ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال اول، شمارهٔ سوم، مهر ۱۳۷۹

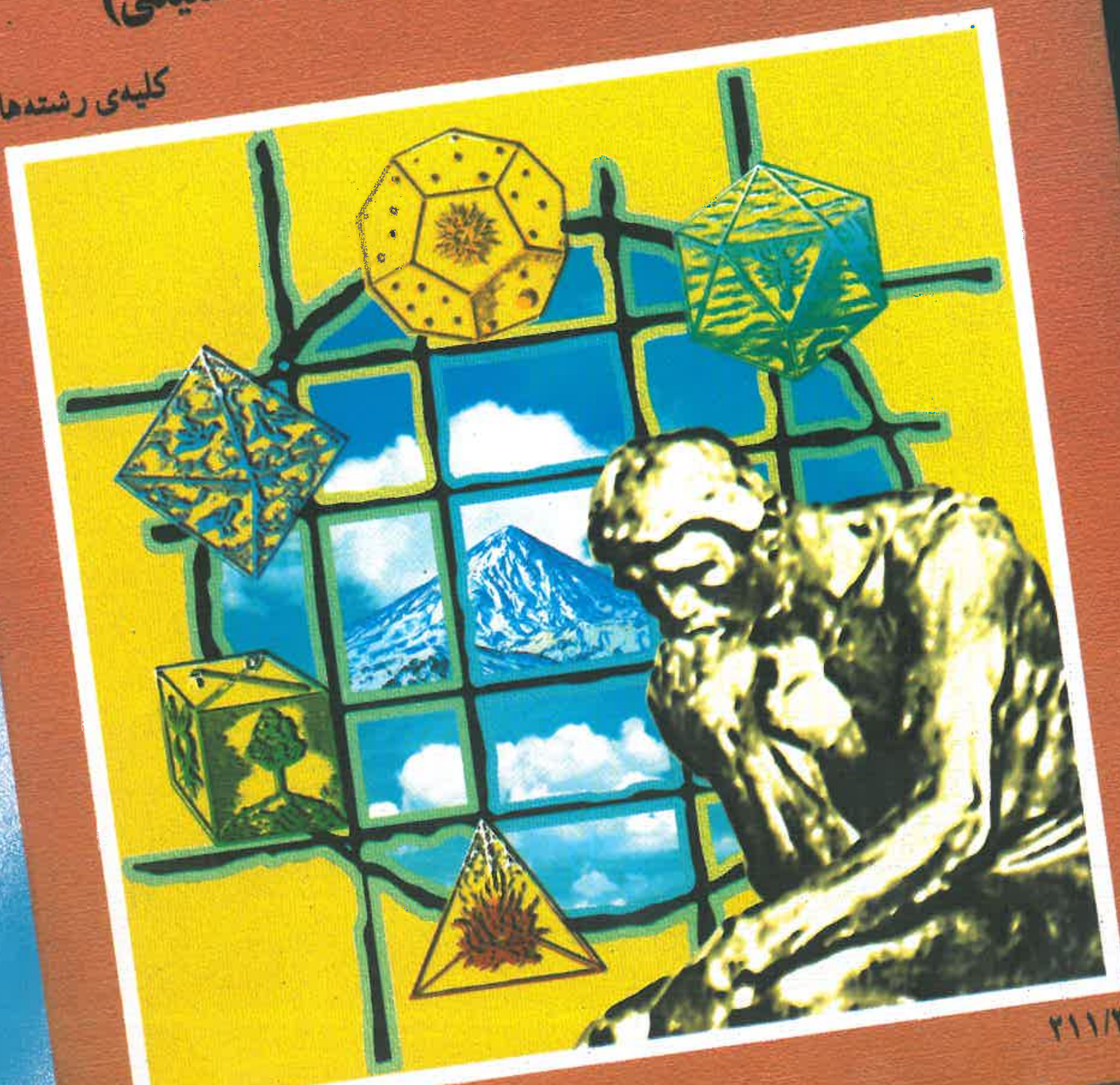
۳۰۰ تومان

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

آموزشِ هُنرِ حلّ مسئله

(ریاضیات تکمیلی)

کلیه‌ی رشته‌ها



۲۱۱/۳

دوره‌ی دبیرستان

بسم الله الرحمن الرحیم

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال اول، شمارهٔ سوم، مهر ۱۳۷۹

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول
یحیی تابش

هیأت تحریریه
محمدرضا پورنکی
یحیی تابش
کورش توکلی
بردیا حسام
سهیلا غلام‌آزاد
امید نقشینه ارجمند

حروف‌چینی، طراحی و صفحه‌آرایی
آتلیهٔ ماهنامهٔ ریاضیات، با تشکر از آزاده فرجی

چاپ و صحافی
محمد امین(خیابان آزادی، بلوار استاد معین)

نشانی دفتر ماهنامه
شمارهٔ ۱۵۹، خیابان استاد مطهری، تهران ۱۵۷۶۶
تلفن: ۸۷۵۲۰۳۴ (۰۲۱)
دورنگار: ۸۷۴۴۹۵۵ (۰۲۱)
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست

روی جلد: نگاه کنید به
مقالهٔ شاخص اویلر.

درگذشت استاد حسین غیور

زنگ تلفن به صدا در آمد. وقتی که گوشی را برداشتم، صدای یکی از دوستان را شنیدم که بدون مقدّمه و با تأثر بسیار، خبر از درگذشت استاد بزرگوارمان جناب آقای غیور می‌داد. از کسالت دیرینهٔ جناب آقای غیور آگاهی داشتم؛ با این همه، خبر به اندازه‌ای غیرمترقبه و تأسف‌بار بود که لحظه‌ای مبهوت شدم ولی توضیحات بعدی دوستم تا اندازه‌ای موضوع را روشن ساخت و آنگاه واقعیّت را پذیرفتم: آری، استاد ما چشم از جهان بسته بود.

بی‌درنگ تلفن منزل جناب آقای غیور را گرفتم و با سرکار علیه خانم محترمشان صحبت کردم و هر دومان پشت خط تلفن گریستیم: ایشان به خاطر از دست دادن همسری با وفا، پدری دلسوز و یک یار و یاور مهربان و من به جهت فقدان یک انسان بزرگ‌منش ، یک استاد ریاضی روشن‌بین، یک شخصیت ممتاز و باوقار فرهنگی و یک عارف فرزانه.

باری؛ استاد غیور در سال ۱۲۷۹ در همدان چشم به جهان گشود. تحصیلات ابتدایی و دورهٔ اول متوسطه را در زادگاه خود گذراند و مدتی به تدریس در مدارس آن شهرستان مشغول بود و سپس به تهران آمد و ضمن کار معلمی ــ که واقعاً شایستهٔ آن بود ــ دیپلم ریاضی را با رتبهٔ اول گرفت و وارد دانشسرای عالی شد و دورهٔ سه‌سالهٔ آن را با موفقیت «درخشان» به پایان برد. تأکید روی کلمهٔ «درخشان» از این سبب است که استاد زنده‌یاد، جناب آقای دکتر هشترودی، در گفته‌ها و نوشته‌های خود از یکی از دانشجویان سابقش به نام آقای حسین غیور نام می‌برد تقریباً بدین مضمون: «این مسأله را آقای غیور هنگامی که دانشجو بودند به‌طرز بسیار زیبایی حل کردند!». به جرأت می‌توان گفت که استاد غیور یکی از چهار رکن اساسی تعلیم هندسهٔ متوسطه در ایران بودند که تصادفاً اسم سه نفرشان حسین بود: حسین هورفر، حسین مجذوب و حسین غیور(نفر چهارم این جمع پربار و پربرکت علمی، جناب آقای احمد بی‌رشک هستند که هم‌اکنون در قید حیات هستند. ما از خداوند برای آن سه مرحوم طلب رحمت و برای جناب آقای بی‌رشک طول عمر توأم با موفقیت آرزو می‌کنیم). جناب آقای غیور افزون بر این‌که یک استاد ریاضی به تمام معنا بودند، در ادبیات و شعر نیز از ذوقی لطیف بهره داشتند. یک دفتر شعر از سروده‌های ایشان ــ که به چاپ هم رسیده‌است ــ موجود است که غزل‌های عارفانه و مثنوی‌های اندرزگونه در آن بسیار است. در مجلس ترحیم آن بزرگوار، قاری قرآن مسجد نور شعر زیبایی از آن دفتر قرائت کرد که جوّ مجلس را ــ که جمع کثیری از استادان و صاحب‌نظران و شاگردان سابق آن مرحوم حضور داشتند ــ بسیار متأثر کرد و معنویت خاصی به مجلس بخشید.

جناب آقای غیور پس از پایان دورهٔ دانشکده به همدان بازگشت و چند سالی در مدارس آن شهرستان به آموزش علمی و پرورش اخلاقی جوانان آن خطّه همت گماشت که عده‌ای از دانش‌آموختگان آن دوره‌ها امروز از مهندسین و معلمین سرشناس، خوش‌نام و باسواد کشورند و به این‌که کلاس درس استاد حسین غیور را درک کرده‌اند افتخار می‌کنند.

پس از گشایش دانشگاه تربیت معلّم، جناب آقای غیور برای همکاری در آن دانشگاه دعوت شد. نامه‌ای به امضای آقای دکتر فیلسوفی(رئیس وقت آن دانشگاه) در دست است که صلاحیت

علمی جناب آقای غیور برای تدریس در دانشگاه مزبور را که در شورای استادان به تصویب رسیده‌است، اعلام می‌دارد و ضمن تبریک، از ایشان برای شروع کار در آن دانشگاه دعوت می‌نماید.

مرحوم غیور در دانشگاه تربیت معلّم علاوه بر درس هندسهٔ تحلیلی که درس اصلی ایشان بود، درس‌های دیگری نیز تدریس می‌کردند که از جمله می‌توان درس مکانیک استدلالی مرحوم آقای پروفسور فاطمی را نام برد که از درس‌های سنگین آن دوره‌ها محسوب می‌شد. این مطلب را از این جهت آوردیم که با توجه به سلیقهٔ مشکل پسند مرحوم آقای پروفسور فاطمی، واگذاری درس ایشان به آقای غیور مقام با ارزش علمی ایشان را پیش استاد سابقش می‌رساند.

در خاتمهٔ این نوشته ذکر این نکته نیز ضروری است: آنچه که بیش از همه آقای حسین غیور را در نظر دوستان، همکاران و دانشجویان ممتاز می‌ساخت ــ علاوه بر تسلّط علمی و حضور ذهن غیر قابل توصیف ایشان در پاسخ به پرسش‌های مطروحه ــ شخصیت باوقار، حسن خلق، فروتنی و چهرهٔ آرامش‌بخش ایشان بود که هر مخاطب و هر پرسشگر را تحت تأثیر قرار می‌داد. ماهنامهٔ ریاضیات فقدان این مرد بزرگ و این استاد شامخ فرهنگی را به جامعهٔ دانشگاهیان و به معلمین و دانش‌آموختگان مکتب ایشان و به خانوادهٔ محترمشان تسلیت می‌گوید. یادش گرامی و راهش برای دانشجویان و پژوهندگان پرفروغ باد.

جعفر نیوشا

چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی از دوازدهم تا بیست و پنجم جولای در کشور کرهٔ جنوبی برگزار شد. در این دوره، حدود ۴۸۰ شرکت‌کننده از هشتاد و دو کشور جهان حضور داشتند و تیم ایران در مکان دهم قرار گرفت. تیم ایران را در این دوره آقای سلمان ابوالفتح بیگی دزفولی(دبیرستان شهید بهشتی اهواز)، آقای امین امین‌زاده گوهری (دبیرستان علامه حلی کرمان)، آقای علی بابایی(دبیرستان شهید بهشتی ساری)، آقای آرش امینی و آقای علی شوریده(دبیرستان علامه حلی تهران) و آقای سید علی مدنی‌زاده(دبیرستان نیکان تهران) تشکیل می‌دادند. نتایج به‌دست آمده از این قرار بود: امین امین‌زاده و سلمان ابوالفتح بیگی مدال طلا، آرش امینی و علی بابایی و علی شوریده نقره و سید علی مدنی‌زاده برنز.

نکتهٔ جالبی که در همهٔ دوره‌های المپیاد به چشم می‌خورد، علاقهٔ همهٔ بچه‌ها به برقرارکردن ارتباط با اعضای تیم‌های دیگر است: مبادلهٔ پول کشورهای مختلف بین دانش‌آموزان و یادگاری، به‌عنوان یک سنت درآمده است! المپیاد، مکان خوبی‌ست برای مبادلهٔ افکار، دیدگاه‌ها و رسوم بین انسان‌هایی که همه کم و بیش از یک سطح استعداد برخوردارند.

شایان ذکر است که تیم المپیاد ریاضی ایران از سال ۱۳۶۵ در این مسابقات شرکت کرده و در این چهارده سال، حضور خوبی را به نمایش گذاشته؛ چنان که اکنون هشت سال است که به‌طور متوالی، ایران بین ده تیم برگزیده قرار دارد.

علی شوریده

ده تیم اول چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

رتبه	کشور	امتیاز	طلا	نقره	برنز
۱)	چین	۲۱۸	۶	۰	۰
۲)	روسیه	۲۱۵	۵	۱	۰
۳)	آمریکا	۱۸۴	۳	۳	۰
۴)	کره‌جنوبی	۱۷۲	۳	۳	۰
۵)	بلغارستان	۱۶۹	۲	۳	۱
۵)	ویتنام	۱۶۹	۳	۲	۱
۷)	بلاروس	۱۶۵	۲	۲	۲
۸)	چین‌تایپه	۱۶۴	۳	۲	۱
۹)	مجارستان	۱۵۶	۱	۵	۰
۱۰)	ایران	۱۵۵	۲	۳	۱

توابع متناوب

احمد مرشدیان

در زندگی روزمره با بسیاری از پدیده‌ها سر و کار داریم که به‌طور منظم تکرار می‌شوند؛ مثل از پی هم آمدن شب و روز، فصول و .... در علوم و به‌خصوص در علم فیزیک با بررسی پدیده‌هایی سر و کار داریم که «تناوب» و بارزترین خاصیت آنهاست؛ پدیده‌هایی از قبیل حرکت آونگ ساده، حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت و مقولهٔ بسیار مهم امواج الکترومغناطیس که به‌صورت صوت، نور یا موج الکتریکی بیشترین نمود را در امور دارند.

از دیدگاه ریاضی محض نیز چون توابع مثلثاتی ــ که از ابتدایی‌ترین مقولات تا عالی‌ترین سطوح مانند آنالیز فوریه[1] ــ به‌کار می‌آیند توابعی متناوب هستند، بررسی توابع متناوب و خواص آنها لازم می‌نماید. در این نوشته، سعی شده تا در حد معلومات دبیرستان، تعاریف و مثال‌های لازم شکافته شود.

تعریف ۱. *تابع (حقیقی) f را متناوب گوییم اگر عدد (حقیقی) ناصفر c موجود باشد که در هردو شرط*

۱) $\forall x \in D_f \;:\; x \pm c \in D_f$؛

۲) $\forall x \in D_f \;:\; f(x+c) = f(x)$.

صدق کند. c *را یک دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم و از این به بعد، دورهٔ تناوب را به «د. ت.» خلاصه می‌کنیم.*

مثال ۱. $f(x) = \sin x$ و $c = 8\pi$، $f(x) = \cos x$ و $c = -4\pi$، $f(x) = \tan x$ و $c = -2\pi$ و $f(x) = \cot x$ و $c = \pi$.

به‌وضوح، اگر c د. ت. باشد آنگاه $-c$، $\pm 2c$، $\pm 3c$ و اصولاً kc برای هر $k \in \mathbb{Z}$ هم یک د. ت. است.

بر خلاف آن‌چه که در نگاه اول به‌نظر می‌رسد، متناوب بودن تابع f هیچ شرطی را بر مجموعهٔ مقادیر f القا نمی‌کند و بُردِ f می‌تواند کران‌دار یا بی‌کران باشد: تابع‌های $\sin x$ و $\tan x$ متناوبند و بردشان به ترتیب $[-1,1]$(کران‌دار) و $(-\infty,\infty)$(بی‌کران) است.

چنان که از اولین شرط تعریف ۱ بر می‌آید دامنهٔ تابع f بی‌کران است؛ اما می‌توان با تحدید دامنه به بازه‌ای متناهی یا فقط از یک طرف بی‌کران با کمی مسامحه از تابعی متناوب بر چنین مجموعه‌هایی سخن به میان آورد. مثال معروف این مطلب، «$y = \sin(\omega t + \varphi_0)$ به ازای $t \geq 0$» است. این نکته را نیز نباید از نظر دور داشت که «بی‌کران بودن دامنه» الزاماً به معنی $D_f = \mathbb{R}$ نیست:

مثال ۲.

$$\begin{cases} f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

وقتی از دورهٔ تناوب تابع سینوس یا کسینوس می‌پرسند، اغلب جواب 2π شنیده می‌شود و در جواب سؤال مشابه برای تانژانت و کتانژانت، π. این جواب‌ها، در واقع به «کوچک‌ترین دورهٔ تناوب مثبت» اشاره می‌کنند. تعریف زیر، بیان رسمی این مطلب است:

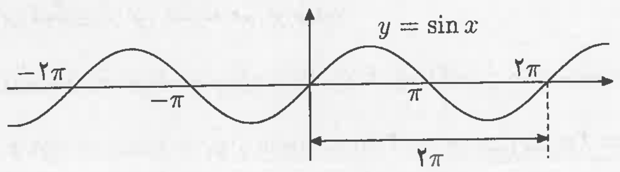
تعریف ۲. *کوچک‌ترین دورهٔ تناوبِ مثبتِ تابع f را ــ در صورت وجود ــ دورهٔ تناوب اصلی تابع f می‌نامیم.*

---

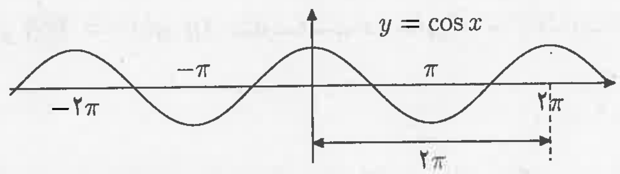
۱) Foureir analysis

در ادامه، دورهٔ تناوب اصلی را به «د. ت. ا.» خلاصه می‌کنیم و با T نمایش می‌دهیم.

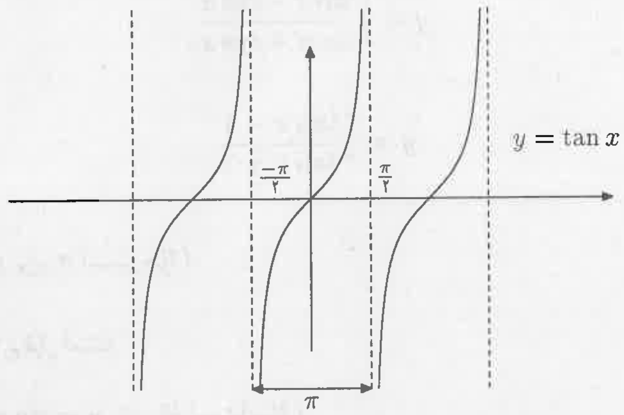
مثال ۳. چون برای هر $k \in \mathbb{Z}$، $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$، $2k\pi$ دورهٔ تناوب است. چون هر c که در شرط «برای هر x، $\sin(x + c) = \sin x$» صدق کند به‌شکل $2k\pi$ است(ثابت کنید!)، 2π دورهٔ تناوب اصلی است.



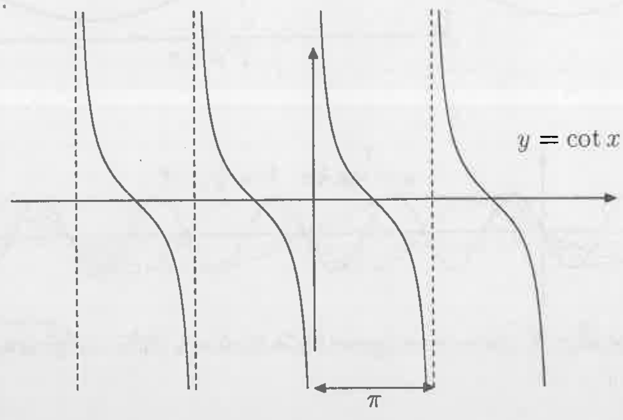
مثال ۴. $f(x) = \cos x$، $T = 2\pi$.



مثال ۵. $f(x) = \tan x$، $T = \pi$.



مثال ۶. $f(x) = \cot x$، $T = \pi$.



مثال زیر، قیدِ «در صورت وجود» را در تعریف ۲ توجیه می‌کند:

مثال ۷. *تابع ثابت $f(x)=1$ به‌وضوح متناوب است و هر $c\in\mathbb{R}$ دورهٔ تناوب آن است(چرا؟)؛ اما از آنجا که کوچک‌ترین عددِ حقیقیِ مثبت وجود ندارد، تابع د. ت. ا. ندارد.*

در تمرین‌های انتهای نوشته، مثال‌های دیگری از این دست هم موجودند.

گزاره ۱. *اگر f و g تابع‌هایی متناوب با دامنهٔ تعریف مشترک باشند، $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ هم متناوب هستند.*

مثال ۸. $y_1=\sin x+\cos x$، $y_2=\tan x+\cot x$ و $y_3=2\sin x\cos x$ متناوبند($T_1=2\pi$، $T_2=\pi$ و $T_3=\pi$).

این مثال نشان می‌دهد که کوچک‌ترین مضرب مشترک[1] د. ت. ا. های f و g لزوماً د. ت. ا. ی $f\pm g$، fg یا $\frac{f}{g}$ نیست؛ هر چند که به هر حال د. ت. هست.

مثال ۹. *اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$، fg متناوب است در حالی‌که نه f متناوب است و نه g؛ پس عکس گزارهٔ فوق درست نیست.*

مثال ۱۰. *2π دورهٔ تناوب $y=\tan x+\cos x+\sin 3x$ است(چرا؟). در واقع، 2π د. ت. ا. هم هست.*

مثال ۱۱. *دورهٔ تناوب اصلی*

$$y=\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+\cos x}$$

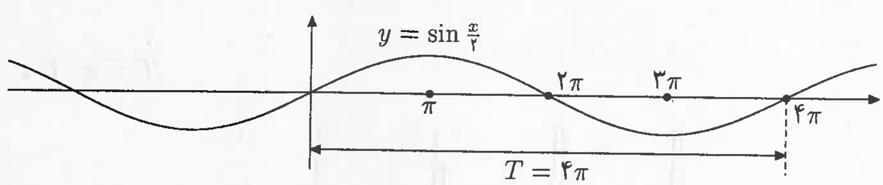
برابر π است؛ زیرا

$$y=\frac{3\tan x-1}{2\tan x+1}.$$

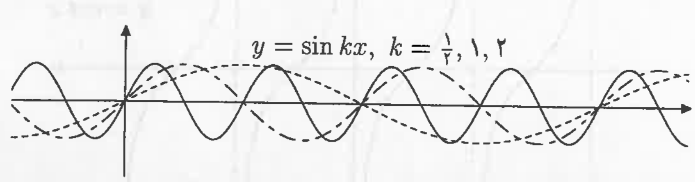
مثال ۱۲. *T برای $y=|\sin x|$ برابر π است(چرا؟).*

نتیجهٔ مشابهی برای $y=|\cos x|$ برقرار است.

مثال ۱۳. *دورهٔ تناوب اصلی $y=\sin ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است(چرا؟).*

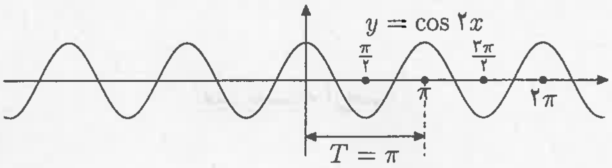


و



۱) کوچک‌ترین مضرب مشترک کسرهای $\frac{a_1x}{b}$،...،$\frac{a_nx}{b}$ را ــ که a_i ها و b صحیح هستند ــ برابر $\frac{ax}{b}$ می‌گیریم که در آن، a کوچک‌ترین مضرب مشترک [معمولی] a_i هاست.

همین حکم برای $y = \cos ax$ هم برقرار است:



برای $\tan ax$ و $\cot ax$، دورهٔ تناوب اصلی برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

توجه کنید که قدر مطلق در محاسبات بالا لازم است، زیرا دورهٔ تناوب اصلی را کوچک‌ترین دورهٔ تناوب «مثبت» تعریف کرده‌ایم.

مثال ۱۴ . برای $y = ۳\sin ۵x + ۴$، $T = \frac{۲\pi}{۵}$.

مثال ۱۵ . برای $y = ۳\tan ۵x + ۴$، $T = \frac{\pi}{۵}$.

مثال ۱۶ . برای $y = \sin^۲ x$، $T = \pi$ زیرا $\sin^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲x)$.

چون $\cos^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲x)$، همین حکم برای $\cos^۲ x$ هم برقرار است.

مثال ۱۷ . برای $y = \sin^۲ ۳x$، $T = \frac{\pi}{۳}$ زیرا $\sin^۲ ۳x = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۶x)$.

تمرین. متناوب بودن هر یک از تابع‌های حقیقی زیر را بررسی کنید و د. ت. و د. ت. ا. را ــ در صورت وجود ــ مشخص کنید.

۱)

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & x \in \mathbb{N} \\ ۰, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

۲)

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & x \in \mathbb{Z} \\ ۰, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳)

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & x \in \mathbb{Q} \\ ۰, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

۴)

$$f(x) = kx - [kx]$$

(k عدد حقیقی ناصفر دلخواهی است و $[a]$، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی a است)

شاخص اویلر (قسمت دوم)

امید نقشینه ارجمند

در قسمت قبل ثابت کردیم که اگر G گرافی همبند و مسطح باشد، تعداد ناحیه‌هایی که از رسم G به‌وجود می‌آید مستقل از روش رسم است و داریم

$$f - e + v = ۲$$

که f تعداد ناحیه‌ها، e تعداد یال‌ها و v تعداد رأس‌های G است.

اکنون قصد داریم مسأله را روی «رویه»های دیگر بررسی کنیم. منظور از یک رویه چیزی است که اطراف هر نقطه‌اش شبیه ناحیه‌ای در صفحه است که احتمالاً کمی کج و کوله شده است! به عنوان مثال سطح یک توپ و یا سطح یک تیوپ ماشین دو رویه هستند که به اولی کره و به دومی چنبره می‌گوییم. آیا غیر از این دو، رویه‌های دیگری می‌شناسید؟

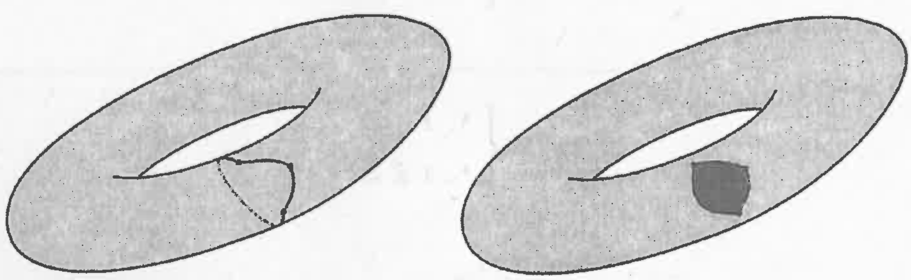
از کره شروع می‌کنیم. مسأله روی کره به سادگی حل می‌شود. نشان می‌دهیم قضیه‌ای مشابه آنچه در مورد صفحه ثابت کردیم در مورد کره نیز درست است.

قضیه ۵. *اگر G گرافی همبند، v رأسی و e یالی روی کره باشد، تعداد ناحیه‌های تولید شده، f، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:*

$$f - e + v = ۲$$

برهان. توجه کنید که گراف G کره را نپوشانده است، به این معنی که قسمتی از کره وجود دارد که می‌توان از آن یک دایرهٔ کوچک برید تا باد کره خالی شود! در این وضعیت، اگر سوراخ تولید شده را بکِشیم تا گشاد شود، می‌توان کرهٔ سوراخ شده را روی صفحه نشاند. حالا گراف همبند G نیز روی صفحه نشسته است و می‌دانیم که رابطهٔ $f - e + v = ۲$ برای چنین گرافی برقرار است. ■

پس از کره آشناترین رویه چنبره است. فرض کنید گرافی را بتوان روی چنبره رسم کرد. آیا تعداد ناحیه‌ها مستقل از روش رسم است؟ مثال سادهٔ زیر نشان می‌دهد که جواب منفی است.

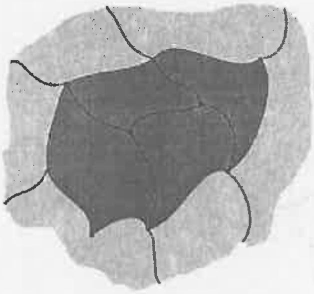


همان‌طور که می‌بینید $K_۳$، یعنی مثلث، را می‌توان به دو طریق روی چنبره رسم کرد به‌طوری که در یک روش یک ناحیه و در روش دیگر دو ناحیه به‌وجود آید.

واقعاً چه تفاوتی بین کره و چنبره وجود دارد که منجر به این اختلاف می‌شود؟ آیا نمی‌توان قضیه‌ای مشابه آنچه برای صفحه و کره داشتیم برای رویه‌های دیگر هم ثابت کرد؟

یکان شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۱۱ــ۸

اضافه کردن یال



به یاد دارید که برای ثابت کردن فرمول اویلر ($f - e + v = ۲$) نشان دادیم که اگر یک یال به گرافی همبند و مسطح طوری اضافه کنیم که مسطح بماند یکی از ناحیه‌ها دو قسمت شده و در نتیجه تعداد ناحیه‌ها یکی افزایش پیدا می‌کند.این موضوع روی چنبره درست نیست (خودتان مثالی برای این ادعا بیابید). با توجه به این نکته می‌خواهیم شرایطی روی گراف بگذاریم که با اضافه کردن یک یال تعداد ناحیه‌ها یکی زیاد شود: فرض کنید گراف G روی یک چنبره (یا به‌طور کلی روی یک رویه) طوری رسم شده است که ناحیه‌های آن همه چندضلعی‌هایی، احتمالاً کج و کوله، هستند.

در چنین گرافی اگر بتوان یال جدیدی اضافه کرد که نتیجه هنوز هم مسطح بماند، تعداد ناحیه‌ها دقیقاً یکی افزایش پیدا می‌کند. حال با این ایده قضیه زیر را مطرح می‌کنیم. از این پس یک چندضلعی کج و کوله را «ناحیه همبند ساده» می‌نامیم.

قضیه ۶. *فرض کنید M یک رویه و G گرافی رسم شده روی آن باشد (G لزوماً ساده نیست، یعنی می‌تواند یال چندگانه داشته باشد). اگر ناحیه‌ها همبند ساده باشند آنگاه مقدار $f - e + v$ عددی است که فقط به M بستگی دارد و نه به G. f تعداد ناحیه‌ها، e تعداد یال‌ها و v تعداد رأس‌های G است.*

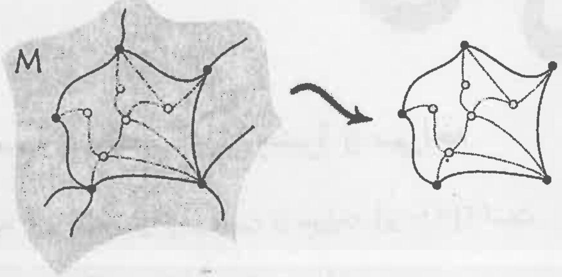
برای اثبات این قضیه ابتدا دو لم ساده را اثبات می‌کنیم.

لم ۳. فرض کنید G گرافی باشد که روی رویهٔ M رسم شده است.

الف) گذاشتن یک رأس روی یک یال G مقدار $f - e + v$ را تغییر نمی‌دهد.

ب) اگر ناحیه‌ای همبند ساده باشدو آن را با اضافه کردن چند رأس و یال به چند ناحیه تقسیم کنیم، در کل مقدار $f - e + n$ تغییر نمی‌کند.

برهان. قسمت (الف) که کاملاً بدیهی است. برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنید Δv تا به رأس‌ها، Δe تا به یال‌ها و Δf تا به ناحیه‌ها افزوده شده باشد. می‌توان ناحیه تقسیم شده را ناحیه‌ای در صفحه در نظر گرفت. در این صورت یک گراف مسطح و همبند در صفحه داریم که $n + \Delta v$ رأس، $n + \Delta e$ یال و $\Delta f + ۲$ ناحیه دارد. که n تعداد رأس‌های ناحیه تقسیم شده است. اکنون طبق رابطهٔ اویلر در صفحه داریم:



$$(۲ + \Delta f) - (n + \Delta e) + (n + \Delta v) = ۲$$

و در نتیجه:

$$\Delta f - \Delta e + \Delta v = ۰$$

و این یعنی اینکه مقدار $f - e + v$ هیچ تغییری نکرده است. ■

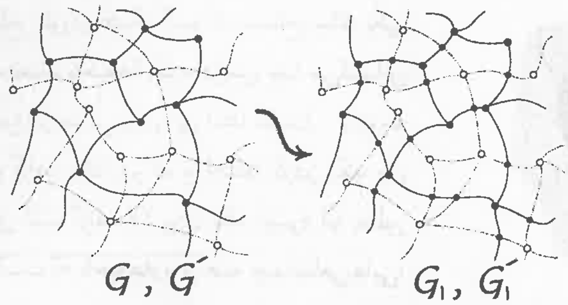
حال برای اثبات قضیه ۶ آماده‌ایم.

برهان. فرض کنید G و G' دوگراف رسم شده روی M هستند که ناحیه‌های تولید شده در هر دو همبند ساده‌اند. روش اثبات به این صورت است که این دوگراف را با اضافه کردن رأس و یال (و در نتیجه ناحیه) به یک گراف بزرگتر، که روی M رسم شده، تبدیل می‌کنیم به طوری که مقدارهای $f - e + v$ و $f' - e' + v'$ تغییری نکند.

ابتدا در محل تقاطع هر یال G با هر یال G' یک رأس می‌گذاریم. طبق قسمت (الف) لم ۳ این کار تأثیری در مقدار $f - e + v$ و

$f' - e' + v'$ نمی‌گذارد. گراف‌های جدید را G_1 و G'_1 می‌نامیم. داریم

$$f - e + v = f_1 - e_1 + v_1 \ , \ f' - e' + v' = f'_1 - e'_1 + v'_1 \ (*)$$



اکنون با اضافه کردن G'_1 به G_1 گراف G'' به‌دست می‌آید. به دو صورت می‌توان به G'' نگاه کرد.با یک دید G'' همان G_1 است که بعضی از ناحیه‌های آن چند قسمت شده‌است و با دید دیگر G'' همان G'_1 است که بعضی از ناحیه‌های آن قسمت شده‌است. پس

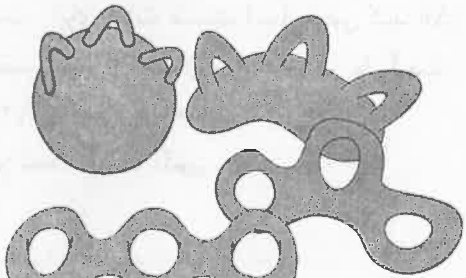
$$f_1 - e_1 + v_1 = f'' - e'' + v'' = f'_1 - e'_1 + v'_1 \ (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌شود که $f - e + v = f' - e' + v'$. و این همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم. ■

برای هر رویهٔ M، مقدار $f - e + v$، که مستقل از گراف رسم شده می‌باشد را با $\chi(M)$ (بخوانید خی M) نمایش می‌دهند و به آن شاخص اویلر رویهٔ M می‌گویند. طبق قضیهٔ ۲، شاخص اویلر کره، ۲ است.

چنبره‌های چند سوراخه

برای هر $g \in \mathbb{N}$، چنبرهٔ g سوراخه، یک تیوپ شنای g نفره است! چنبرهٔ صفر سوراخه در واقع همان کره است. یک چنبرهٔ g سوراخه را می‌توان کره‌ای دانست که g دسته به آن وصل شده است. شکل زیر این مطلب را برای $g = ۳$ نشان می‌دهد.



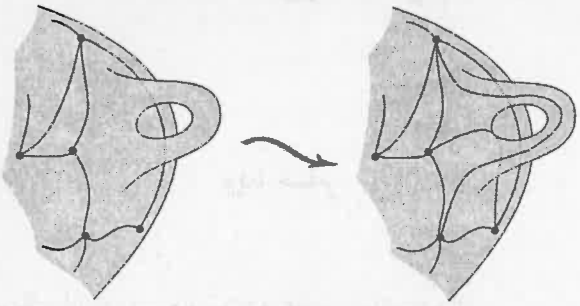
محاسبهٔ شاخص اویلر چنبرهٔ g سوراخه

قضیه ۷. *شاخص اویلر چنبرهٔ g سوراخه $۲(۱ - g)$ است.*

برهان. به کمک استقرا این مطلب را نشان می‌دهیم.

$g = ۰$. چنبرهٔ صفر سوراخه همان کره است و شاخص اویلر آن ۲ است و $۲(۱ - ۰) = ۲$.

فرض کنید شاخص اویلر چنبرهٔ g سوراخه $۲(۱ - g)$ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم شاخص اویلر چنبرهٔ $g + ۱$ سوراخه $-۲g$ است. G را گرافی بگیرید که روی چنبره‌ای g سوراخه رسم شده و آن را به f ناحیهٔ همبند تقسیم کرده است. پس $f - e + v = ۲(۱ - g)$. درون یکی از این ناحیه‌ها دسته‌ای اضافه می‌کنیم و مطابق شکل زیر با اضافه کردن دو یال کاری می‌کنیم که ناحیه های جدید هم همبند ساده باشند.



توجه کنید که لزومی ندارد گراف رسم شده ساده باشد و می‌توان در صورت احتیاج بین دو رأس بیش از یک یال رسم کرد. اکنون گراف جدید v رأس و $e + ۲$ یال دارد و رویه را به f ناحیه تقسیم کرده‌است (با کمی دقت می‌توانید ببینید که تعداد ناحیه‌ها تغییر نکرده‌است). پس شاخص اویلر چنبره ۱ + g سوراخه $f - (e + ۲) + v$ یعنی $(f - e + v) - ۲ = -۲g$ است. ■

اکنون قضیه‌ای مشابه لم ۲، بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۸. *فرض کنید M رویه‌ای با شاخص اویلر χ باشد. اگر G گرافی ساده، v رأسی و e یالی باشد که روی M می‌نشیند آنگاه* $e \leq ۳(v - \chi)$.

برهان. فرض کنید G روی M، f ناحیه تولید کرده‌است. این ناحیه‌ها لزوماً همبند ساده نیستند. با اضافه کردن یال‌های مناسب می‌توان یک ناحیه را به یک ناحیه همبند ساده تبدیل کرد. اگر پس از انجام این کار e' یال داشته باشیم آنگاه $e \leq e'$ و $f - e' + v = \chi$. اکنون با توجه به اینکه هر ناحیه حداقل ۳ ضلعی است $۳f \leq ۲e'$.

$$f = e' - v + \chi \Rightarrow ۳e' - ۳v + ۳\chi \leq ۲e' \Rightarrow e' \leq ۳(v - \chi)$$

پس $e \leq ۳(v - \chi)$. ■

قضیه ۹. *اگر K_n روی چنبرهٔ g سوراخه بنشیند آنگاه* $n \leq \frac{۷ + \sqrt{۱ + ۴۸g}}{۲}$.

برهان. K_n، n رأس و $\binom{n}{۲}$ یال دارد و شاخص اویلر چنبرهٔ g سوراخه $۲(۱ - g)$ است. پس

$$\binom{n}{۲} \leq ۳(n - ۲(۱ - g)) \Rightarrow n^۲ - n \leq ۶(n - ۲(۱ - g)) \Rightarrow n^۲ - ۷n + ۱۲(g - ۱) \leq ۰$$

ریشه‌های چند جمله‌ای اخیر $\frac{۷ \pm \sqrt{۱ + ۴۸g}}{۲}$ هستند، در نتیجه

$$n \leq \frac{۷ + \sqrt{۱ + ۴۸g}}{۲}$$

■

سؤال. اگر $n \leq \frac{۷+\sqrt{۱+۴۸g}}{۲}$ آیا K_n روی چنبرهٔ g سوراخه می‌نشیند؟

مراجع

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications.* New York: Elsevier North Holland, 1976.

[۲] ایستین ار، گراف و کاربردهای آن. ترجمهٔ محمدصادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی.

[۳] نورمن استینراد و ویلیام چین، نخستین مفاهیم توپولوژی. ترجمهٔ ابوالقاسم لاله، مرکز نشر دانشگاهی.

معادلهٔ درجه سوم

بردیا حسام

فکر کنید که علی‌الطلوع روز جمعه، یکی از راه رسیده و نرسیده عبارتی نتراشیده مثل

$$\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}+\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}+\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}-\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}$$

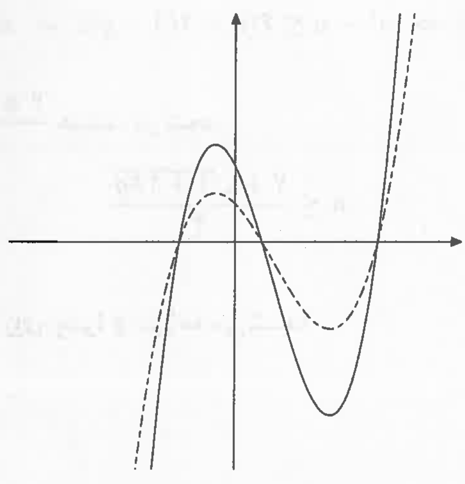
تحویلتان بدهد و بعد، وقتی دید که مثل علامت سؤال شده‌اید، حکیمانه توضیح بدهد که این جواب $x^۳ + px + q = ۰$ است و وقتی دید که چشم‌هایتان بدجور به گردی و سفیدی می‌زند، بگوید که «باور نمی‌کنی؟ من امتحان کرده‌ام.» اعتراف می‌کنم که فقط توانستم بخندم: یعنی واقعاً این عبارت عظیم را به توان رسانده بود و جمع و تفریق کرده‌بود؟ این را هیچ وقت نپرسیدم و هیچ وقت نگفت و حتی نمی‌دانم که حالا از آن روزها چیزی به یاد دارد یا نه؛ اما «چیز»ی برای من ماند: یک «چرا»ی دبیرستانی که از آن به بعد برای هر چُنین فرمولی سر و کله‌اش پیدا می‌شد. این نوشته، شاید به نوعی جواب همان اولین «چرا»ی از این نوع باشد: می‌خواهیم «سعی کنیم» که معادلهٔ درجهٔ سوم را «حل» کنیم؛ به عبارتی، می‌خواهیم با فرض $a \neq ۰$، پی ریشه‌های معادلهٔ

$$ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$$

بگردیم(حقیقی و مختلطش را [فعلاً] جدا نمی‌کنیم).

از کجا شروع کنیم؟ بیایید دنبال تبدیل‌هایی بگردیم که شکل معادله‌مان را «کمی» ساده کنند و در عین حال، به «موجودیت» ریشه‌ها هم کاری نداشته باشند: تبدیلی که ریشه را کمی به راست یا چپ می‌کشد بد چیزی نیست؛ اما چطور می‌توان تبدیلی که «تابع را بالا می‌کشد» ـــ و در نتیجه [احتمالاً] بعضی از ریشه‌ها را از بین می‌برد ـــ را تحمل کرد؟![۱]

اول همه، چون $a \neq ۰$، می‌توانیم با خیال راحت طرفین رابطه‌مان را به a تقسیم کنیم و از «شر» یک ضریب خلاص شویم.



نمودار $۲x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۱$ و $x^۳ - \frac{۳}{۲}x^۲ - x + \frac{۱}{۲}$(خط‌چین)

۱) البته، این که این طور شروع کنیم فقط یک پیشنهاد است و شما می‌توانید قبولش نکنید؛ اما . . .!

ریاضیات شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۱۵ـ۱۲

با این حساب، هدفمان ــ بدون کاسته‌شدن از کلیت ــ پیدا کردن ریشه‌های معادله‌هایی به فرم

$$x^{۳} + bx^{۲} + cx + d = ۰$$

است.

یک نگاه به «شکل» تابع هم کمک زیادی می‌کند؛ مثلاً این که نشان می‌دهد که «احتمالاً» تابع ماکزیمم و مینیمم دارد و متقارن هم هست. اما واقعاً هم این طور است؟

بیایید فرض کنیم که تابع دلخواهی مثل f نسبت به نقطه‌ای مثل (α, β) متقارن باشد؛ پس می‌دانیم که اگر α وسط x و y باشد، β وسط $f(x)$ و $f(y)$ است. در چنین حالتی، چون [مثلاً] $y - \alpha = \alpha - x$، می‌توانیم بنویسیم

$$f(۲\alpha - x) = ۲\beta - f(x).$$

با این حساب، f نسبت به (α, β) متقارن است اگر و تنها اگر برای هر x، این شرط برقرار باشد. اما، چه‌طور می‌توانیم α و β را پیدا کنیم؟ اگر α را پیدا کنیم، مشکلمان حل می‌شود:

$$f(\alpha) = f(۲\alpha - \alpha) = ۲\beta - f(\alpha);$$

پس $f(\alpha) = \beta$. حالا، باید α را پیدا کنیم.

فرض کنید که f، تابعی مشتق‌پذیر باشد. با مشتق گرفتن از دو طرف رابطه، داریم

$$-f'(۲\alpha - x) = (۲\alpha - x)' \cdot f'(۲\alpha - x) = -f'(x).$$

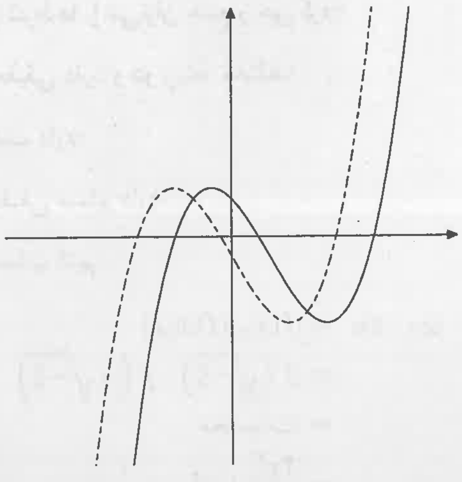
با محاسبه‌ای از همین نوع، می‌توانیم ببینیم که اگر بتوانیم n بار از f مشتق بگیریم(و این کار را هم انجام بدهیم!)، خواهیم داشت

$$(-۱)^{n} f^{(n)}(۲\alpha - x) = -f^{(n)}(x).$$

حالا فرض کنید که f به خوبیِ یک چندجمله‌ای باشد؛ تابعی به شکل

$$a_{۰} + a_{۱}x + \cdots + a_{n}x^{n}.$$

به عنوان تمرین، با همان رابطهٔ پیش نشان بدهید که چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج نمی‌توانند مرکز تقارن داشته باشند و برای چندجمله‌ای‌های با درجهٔ فرد ــ با $n - ۱$ بار مشتق گرفتن ــ $\alpha = -\frac{a_{n-۱}}{n}$؛ با این حساب، برای $f(x) = x^{۳} + bx^{۲} + cx + d$، نقطهٔ تقارن باید $(-\frac{b}{۳}, f(-\frac{b}{۳}))$ باشد.



نمودار $x^{۳} - \frac{۳}{۲}x^{۲} - x + \frac{۱}{۲}$ و انتقال یافته‌اش با $(-\frac{۱}{۲}, ۰)$ (خط‌چین)

حالا که طول مرکز تقارن را می‌دانیم، می‌توانیم شکل تابع را ساده کنیم: طول مرکز تقارن صفر است اگر و تنها اگر ضریب $x^{۲}$ در تابع صفر باشد. با توجه به این نکتهٔ کوچک و این که انتقال افقی تابع تغییری در وضعیت [کیفی] ریشه‌ها نمی‌دهد، می‌توانیم با تبدیل x به $x - \frac{b}{۳}$ چندجمله‌ای f را به چندجمله‌ای‌ای که ضریب $x^{۲}$ در آن صفر باشد تبدیل کنیم؛ پس همین کار را می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f\left(x-\tfrac{b}{۳}\right) &= \left(x-\tfrac{b}{۳}\right)^{۳} + b\left(x-\tfrac{b}{۳}\right)^{۲} + c\left(x-\tfrac{b}{۳}\right) + d \\ &= x^{۳} + \left(۳\left(\tfrac{b}{۳}\right)^{۲} - ۲b\tfrac{b}{۳} + c\right)x + \left(-\left(\tfrac{b}{۳}\right)^{۳} + b\left(\tfrac{b}{۳}\right)^{۲} - c\tfrac{b}{۳} + d\right) \end{aligned}$$

این محاسبهٔ ساده، نشان می‌دهد که کافی‌ست فقط وضع ریشه‌های تابع‌هایی به شکل

$$f(x) = x^{۳} + px + q$$

را بررسی کنیم. همین نکتهٔ [ظاهراً] کوچک، فایده‌های زیادی دارد؛ مثلاً، محاسبهٔ ریشه‌های مشتق را — و در نتیجه، محاسبهٔ مقدار ماکزیمم و مینیمم [موضعی] تابع را — فوق‌العاده ساده می‌کند.

حالا بیایید از این تابع مشتق بگیریم: معلوم‌است که $f'(x) = ۳x^{۲} + p$. اگر $p > ۰$، f' مثبت است و در نتیجه f صعودی‌ست، پس درست یک ریشهٔ حقیقی دارد. اگر $p = ۰$ هم که وضع معلوم است: تابع $x^{۳} + q$ یک ریشهٔ حقیقی دارد و دو ریشهٔ مختلط. فقط حالتی مانده که $p < ۰$ و در نتیجه f ماکزیمم و مینیمم [موضعی] متمایز دارد.

اگر $p < ۰$، ریشه‌های مشتق متمایزند و می‌توانیم جدولی مثل این درست کنیم:

	$-\infty$		$x_M = -\sqrt{-\frac{p}{۳}}$		$x_m = \sqrt{-\frac{p}{۳}}$		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\nearrow$	y_M	$\searrow$	y_m	$\nearrow$	

(y_m و y_M به‌ترتیب عرض‌های مینیمم و ماکزیمم موضعی هستند). با این جدول، به‌راحتی می‌توانیم وضع ریشه‌ها را مشخص کنیم(توجه کنید که $x_m > x_M$ و $y_m < y_M$):

- اگر $y_m > ۰$، تابع فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد؛ چون برای هر $x < x_M$ تابع مثبت است و روی $(-\infty, x_M)$ صعودی.
- اگر $y_M < ۰$ هم تابع فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد(چرا؟).
- اگر y_m(یا y_M) صفر باشد، x_m(یا x_M) ریشهٔ مضاعف تابع است(چرا؟).
- اگر $y_m < ۰ < y_M$، تابع سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد: یکی در (x_M, x_m)، یکی در $(۲x_M - x_m, x_M)$ و دیگری در $(x_m, ۲x_m - x_M)$(ثابت کنید!).

کمی حواس جمع، نشان می‌دهد که همهٔ این شرط‌ها را می‌توان جمع و جور کرد:

- اگر $y_m \cdot y_M > ۰$، تابع یک ریشهٔ حقیقی دارد و دو ریشهٔ مختلط؛
- اگر $y_m \cdot y_M = ۰$، تابع ریشهٔ مضاعف دارد؛
- اگر $y_m \cdot y_M < ۰$، تابع سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

بیایید مقدار $y_m \cdot y_M$ را بر حسب p و q حساب کنیم:

$$\begin{aligned} y_m \cdot y_M &= f(x_m)f(x_M) \\ &= f\left(\sqrt{-\tfrac{p}{۳}}\right) \cdot f\left(-\sqrt{-\tfrac{p}{۳}}\right) \\ &= \text{محاسبات!} \\ &= \frac{۴p^{۳}}{۲۷} + q^{۲} \end{aligned}$$

چون ضریب ثابت مثبت هم نقشی در علامت ندارد، می‌توانیم از صورت بسته‌تر $\frac{p^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}$ (در واقع، $((\frac{p}{۳})^۳+(\frac{q}{۲})^۲)$) و یا صورت محاسباتی‌تر $۴p^۳+۲۷q^۲$ استفاده کنیم. به‌عنوان تمرینی ساده، می‌توانید نشان دهید که اگر $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ ریشه‌های $f(x)=x^۳+px+q$ باشند و

$$\delta=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ \alpha_۱ & \alpha_۲ & \alpha_۳ \\ \alpha_۱^۲ & \alpha_۲^۲ & \alpha_۳^۲ \end{vmatrix}$$

[تقریباً] همین حرف‌ها را با دانستن مقدار $\delta^۲$ هم می‌توان گفت(مواظب ریشه‌های مختلط باشید!). فکر می‌کنید چرا از $\delta^۲$ و نه δ استفاده می‌کنیم؟ یک ایدهٔ خوب، بررسی مقدار دترمینان مشابه برای معادلهٔ درجهٔ دوم است.

بالاخره، می‌خواهیم ریشه‌ای از این تابع را پیدا کنیم. فرض کنید

$$f(\alpha)=\alpha^۳+p\alpha+q=۰.$$

یک ایدهٔ نه‌چندان بد، این است که α را به‌صورت جمع دو متغیر دیگر بنویسیم. در این حال، بنا به چیزهایی که دربارهٔ معادلهٔ درجه دو می‌دانیم، حاصل‌ضرب متغیرهای جدید را در رابطه‌ای که به‌دست می‌آید [تقریباً] هر چه می‌خواهیم بگیریم و با این روش، رابطه را ــ دست کم، «کمی»! ــ ساده کنیم. بیایید فرض کنیم $\alpha=x+y$:

$$f(x+y)=x^۳+y^۳+(۳xy+p)(x+y)+q=۰.$$

پس اگر xy را $-\frac{p}{۳}$ بگیریم، $x^۳+y^۳=-q$. چون $x^۳y^۳=-\frac{p^۳}{۲۷}$، $x^۳$ و $y^۳$ جواب‌های

$$t^۲+qt-\frac{p^۳}{۲۷}=۰$$

هستند؛ پس

$$x^۳=\frac{۱}{۲}\left(-q+\sqrt{q^۲+\frac{۴p^۳}{۲۷}}\right)$$

و

$$y^۳=\frac{۱}{۲}\left(-q-\sqrt{q^۲+\frac{۴p^۳}{۲۷}}\right)$$

یا معادلاً

$$x=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}\left(-q+\sqrt{q^۲+\frac{۴p^۳}{۲۷}}\right)}$$

و

$$y=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}\left(-q-\sqrt{q^۲+\frac{۴p^۳}{۲۷}}\right)}$$

و در نتیجه

$$\alpha=\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}+\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}+\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}-\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}$$

و این، [تقریباً] همان فرمولی‌ست که معرف حضورتان هست!

آرش در سیارهٔ تویاپ(قسمت اول)

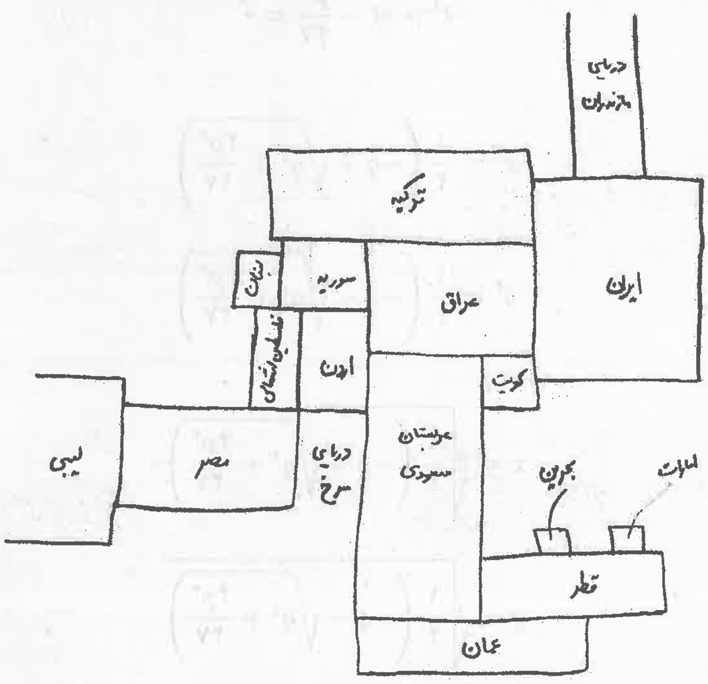
ایمان افتخاری

آرش، روی تخت، زیر باد ملایم کولر دراز کشیده بود و به سؤالی که امروز برایش پیش آمده بود فکر می‌کرد. احتمالاً نمرهٔ امتحان جغرافیش خوب نمی‌شد. واقعاً نمی‌دانست چرا باید ارتفاع بلندترین کوه آفریقا را بداند. از همه بدتر، کشیدن نقشهٔ خاورمیانه بود! بچه‌ها معتقد بودند که آقای صولتی، معلم جغرافی، می‌خواست ثابت کند که اگر بخواهد، می‌تواند حال همه را بگیرد! امتحانی بگیرد که . . .

بعد از امتحان با خودش فکر کرده‌بود که چقدر خوب بود کشورها یک کم از زمین‌هایشان را با هم عوض می‌کردند تا اینقدر حفظ کردن نقشهٔ جغرافی سخت نباشد!

به ذهنش رسیده بود که اگر روزی رئیس سازمان ملل شد، طرحی بدهد که طبق آن نقشهٔ همهٔ کشورها چیزی شبیه به مستطیل باشد؛ حتی دریاچه‌ها و دریاها را هم به شکل مستطیل دربیاورند!

از روی کتاب جغرافی، نقشه‌ای برای خاورمیانه ساخت؛ از آن خوشش نیامد: خیلی حیف است که نقشهٔ ایران به‌جای گربه مستطیل باشد!



تمام مدتی که توی اتوبوس بود به این ایدهٔ احمقانه فکر می‌کرد: سعی کرده بود سطح کره زمین را با چیزهایی شبیه به مستطیل بپوشاند؛

یکان شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۲۲_۱۶

ولی ظاهراً این کار ممکن نبود. هر بار لازم می‌شد بعضی از ناحیه‌ها شکلی غیر از مستطیل، مثلاً مثلث، داشته باشند. خسته بود. کم کم چشم‌هایش گرم شد و به خواب رفت . . . .

ـ سلام مرد جوان! به سیارهٔ تویاپ خوش آمدی.

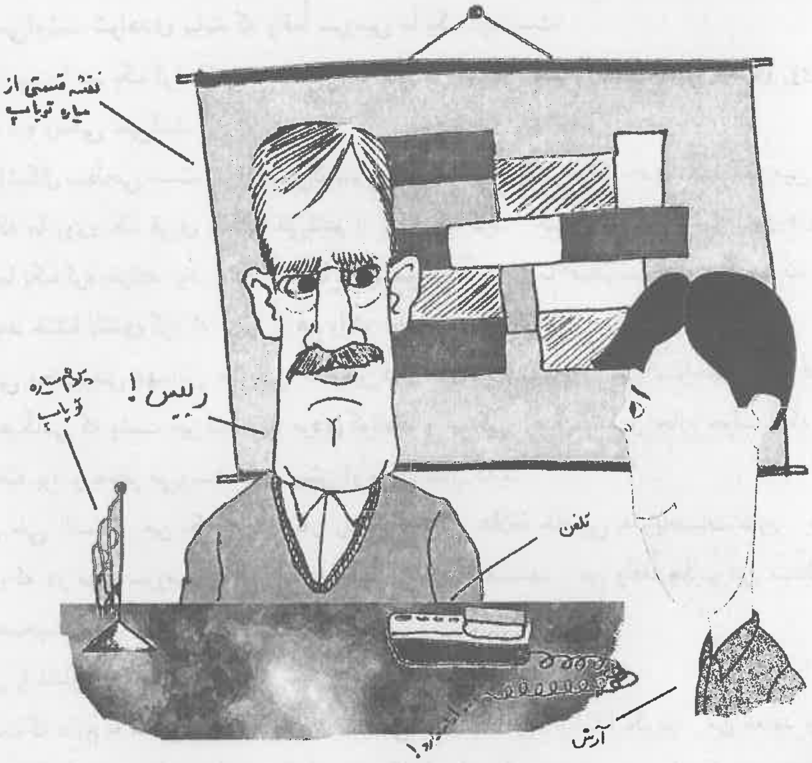
این صدای مردی بود که پشت میز بزرگی نشسته بود. به نظر با جذبه می‌رسید. مرد ادامه داد «من رئیس سیارهٔ تویاپ هستم. از آشنایی با شما خوش‌وقتم.» و دستش را دراز کرد.

آرش هم، مؤدبانه، دست خود را دراز کرد و گفت: من آرش هستم؛ ساکن سیارهٔ زمین. گفتید اسم سیارهٔ شما چیست؟

رئیس: تویاپ! ظاهراً تا به‌حال اسم سیارهٔ ما را نشنیده‌اید.

آرش: نه‌خیر، نشنیده‌ام؛ اسم جالبی است.

خواست بپرسد معنی آن چیست؛ ولی فکر کرد سؤال احمقانه‌ای است. مگر او می‌داند «زمین» یعنی چه؟! سپس متوجه نقشه‌ای شد که پشت سر رئیس روی دیوار نصب شده بود. نقشهٔ ساده و جالبی بود: همهٔ منطقه‌ها به شکل مستطیل بود.



آرش: این نقشه دقیق است؟ ظاهراً شما زمین‌هایتان را خیلی منظم تقسیم کرده‌اید.

رئیس با افتخار سرش را بالا گرفت و گفت: بله، ادارهٔ سیارهٔ عظیم ما بسیار مشکل است و لذا تصمیم گرفتیم تقسیم اراضی هم شکل منظمی داشته باشد. هریک از زمین‌هایی که به مردم این سیاره واگذار شده‌است تقریباً یک مستطیل است؛ یعنی ضلع‌های آن آن‌قدر صاف است که مختصر انحنای احتمالی آنها قابل اغماض است و زاویه‌ها هم حداکثر یک درجه با زاویه قائمه تفاوت دارند. پس می‌شود گفت که دقت زیادی در تقسیمات انجام داده‌ایم. به‌علاوه، در سرزمین ما هر خانواده مالک و ساکن یکی از این قطعات است.

آرش پرسید: آیا شما مطمئن هستید که تمام سیارهٔ شما تقسیم شده‌است؟ ما در زمین سرزمین‌های وسیعی داریم که هیچ ساکنی ندارد!

رئیس گفت: ما کاملاً مطمئن هستیم. در واقع، ریاضی‌دانان ما، با توجه به این که مستطیل هرکسی حداقل ۱۰۰ متر مربع مساحت

دارد و این که ما روی یک سیارهٔ متناهی زندگی می‌کنیم و این که دورتادور مستطیل هرکسی با مستطیل‌های همسایه‌هایش پر شده است، این مطلب را برای ما ثابت کرده‌اند که هیچ بخشی از سیارهٔ ما تقسیم نشده نمانده است.

آرش گفت: منظور شما از این گزارهٔ آخر در مورد همسایه‌ها و . . . چیست؟

رئیس: ببینید! اگر یک نفر در مستطیلی زندگی کند که در مجاورت او یک صحرای تقسیم نشده باشد، می‌تواند از سرزمین خود وارد ناحیه‌ای شود که تقسیم نشده است؛ ولی ما با آمارگیری می‌دانیم که هرکس، به هر صورت که از مستطیل خودش خارج شود، وارد مستطیل کس دیگری خواهد شد.

آرش گفت: خوب؛ بگذریم . . . . من این مطلب را از شما قبول می‌کنم؛ ولی باز هم شگفت‌زده هستم. دلیلی برای حرفی که می‌زنم ندارم ولی به نظرم می‌رسد که روی کرهٔ زمین ما چنین کاری را نمی‌شود کرد. البته یک علت آن وجود اقیانوس‌ها است؛ ولی صرف نظر از آنها، حتی اگر اقیانوس‌ها هم خشک شوند، به نظرم این کار ممکن نیست.

رئیس: جالب است. بین مردم سرزمین ما هم زمزمه‌هایی شایع شده‌است که ما روی یک کره زندگی نمی‌کنیم؛ ولی این اصلاً قابل قبول نیست. اگر روی کره زندگی نمی‌کنیم، پس کجا زندگی می‌کنیم؟ البته بین دانشمندان و متفکرین جامعهٔ ما هم هستند کسانی که ادعا می‌کنند سیارهٔ ما کروی شکل نیست. اکنون تعدادی از دانشمندان ما مشغول بررسی این ادعا هستند؛ بعضی سعی می‌کنند آن‌را ثابت کنند و برخی دیگر می‌کوشند شواهدی بیابند که واقعاً سرزمین ما یک کره است.

آرش: خوب حتی زمین ما هم یک کرهٔ واقعی نیست و شما هم، هرچند که ناهمواری‌های خیلی کمتری روی سرزمینتان دارید، تقریباً واضح است که روی یک کره زندگی نمی‌کنید.

رئیس: بله؛ اما این اِشکال سطحی است. وقتی می‌گوییم «کره»، منظورمان در همان حدی است که زمین شما کره است. در واقع، مسألهٔ ما مثلاً این است که ما روی یک قوری زندگی می‌کنیم یا روی یک کره. یعنی واقعاً آیا اگر ما بلندی‌های سرزمینمان را بکوبیم و چاله‌ها را پر کنیم، سیارهٔ ما یک کره خواهد بود یا نه؟ بعد با لحن شوخی گفت: ما اصلاً نمی‌توانیم بگوییم که روی یک قوری دسته دار بزرگ زندگی نمی‌کنیم و بعد خندهٔ بلندی کرد که آرش را هم وادار به لبخند زدن کرد.

آرش شب را در هتلی مخصوص مهمانان خارجی، که زمین‌های مستطیل شکل ندارند، استراحت کرد و صبح برای صرف صبحانه به رستوران هتل رفت. هنگامی که پشت میز نشست، مردی کوتاه‌قد و عینکی نزدیک شد و اجازه خواست که صبحانه را با آرش باشد. موهای بالای سر مرد ریخته بود و به‌نظر می‌رسید سنی بیش از چهل سال دارد.

مرد گفت: اسم من خی[1] است! من یکی از دوستان رئیس هستم و علاقهٔ خاصی به ریاضیات دارم. دیشب رئیس به من گفت که شما ظاهراً به مسأله‌ای که در مورد سرزمین ما مطرح شده‌است علاقمند هستید. من واقعاً جذب این مسأله شده‌ام؛ دوست دارم که کمی با هم در این مورد صحبت کنیم.

آرش با سر موافقتش را نشان داد. پیش‌خدمت، سینی صبحانه را روی میز گذاشت.

خی: من مدتی است که دارم به شکل وارونه به مسأله نگاه می‌کنم. بگذارید از ابتدا بگویم: من معتقد بودم و هستم که ادعایی که مبنی بر کره نبودن سیارهٔ ما شده‌است حقیقت دارد و بعد از مدتی کار کردن به این نتیجه رسیدم که یک راه منطقی آن است که به بررسی کره‌ها بپردازیم و خواصی از آنها به‌دست بیاوریم که در مورد سرزمین بسیار بزرگی مثل سرزمین ما، با توجه به امکانات و شرایط موجود، قابل تحقیق باشد و بعد امیدوار باشیم که آن خاصیت در مورد سرزمین ما برقرار نباشد و نتیجه بگیریم که روی کره زندگی نمی‌کنیم.

آرش: و البته این خاصیت‌ها باید مستقل از ناهمواری‌ها و پستی و بلندی‌ها باشند!

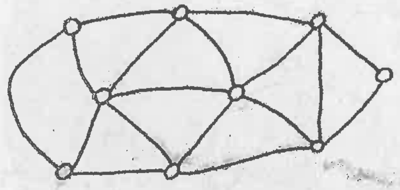
خی خندید و گفت: بله؛ رئیس در مورد صحبت‌های دیروزتان به‌طور مفصل با من صحبت کرد. این نکته‌ای که می‌گویی هم دارای اهمیت است.

آرش: خوب؛ تفکرات شما نتیجه‌ای هم داشته‌است؟

خی: یک نکتهٔ خیلی عالی! البته از نظر خودم.

خی یک کاغذ روی میز گذاشت و با قلم، شکلی به این صورت کشید

[1] حرف یونانی χ



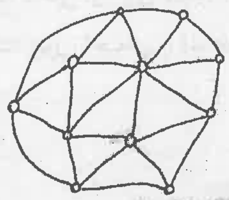
خی: چنین شکلی را روی صفحه در نظر بگیر که هر دو مثلث حداکثر در یک ضلع مشترک هستند.

آرش: قرار بود در مورد کره حرف بزنیم.

خی: عجله نکن! به آن هم می‌رسیم. در این شکل تعدادی شبه پاره‌خط (یعنی تکه خطوط احتمالاً خمیده) بین رأس‌های مشخص شده داریم که این رأس‌ها را به هم وصل می‌کنند و صفحه را به تعدادی مثلث (!) تقسیم می‌کنند. الان در این شکل تعداد رأس‌ها ۹ است و تعداد شبه پاره‌خط‌ها ۱۷ است. تعداد ناحیه‌های ایجاد شده هم، با احتساب ناحیهٔ بیرونی ۱۰ تاست. حالا این عددها را این طوری با هم جمع و تفریق کن: تعداد رأس‌ها به‌علاوهٔ تعداد ناحیه‌ها منهای تعداد شبه پاره‌خط‌ها. در این حالت این عدد چند است؟

آرش: ۹ به‌اضافهٔ ۱۰ منهای ۱۷ می‌شود ۲.

خی: خوب؛ حالا عدد را برای این شکل حساب کن.



آرش: تعداد رأس‌ها که ... ۱۱ تاست. شبه پاره‌خط‌ها ... ۲۳ تاست و ناحیه‌ها ۱۴ تا، پس عدد مورد نظر ۱۴+۱۱-۲۳ خواهد بود. باز هم ۲ می‌شود.

خی: و جالب آن است که من صد شکل مختلف کشیده‌ام و همیشه عدد ۲ را به‌دست آورده‌ام.

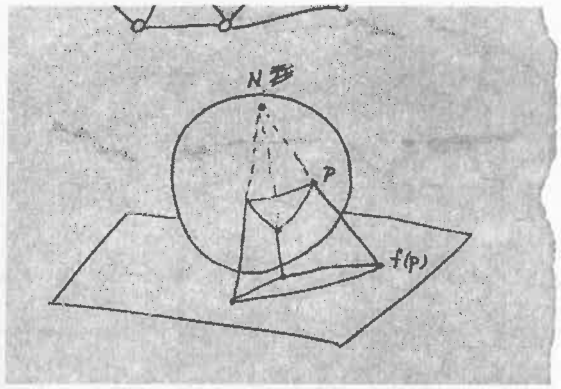
آرش: من هم چیزهایی در این مورد شنیده‌ام و فکر می‌کنم چیزی که شما به‌دست آورده‌اید ثابت شده است.

خی: حالا برویم سراغ کره. می‌شود فرض کرد که یک چنین شکلی روی سطح کره هم کشیده شده باشد؛ منتها این بار ناحیهٔ بیرونی نخواهیم داشت و هریک از ناحیه‌ها اصولاً چیزی شبیه مثلث است. یک کره را در نظر بگیر و این بلا را به سرش بیاور: طوری روی صفحه بگذارش که قطب جنوب آن روی صفحه باشد. اگر P نقطه‌ای از کره غیر از قطب شمال باشد، P را به قطب شمال وصل کن تا این خط صفحه را در نقطه‌ای قطع کند و اسم آن را $f(P)$ بگذار؛ به این ترتیب، اگر از همهٔ نقاط یک شکل روی کره که قطب شمال داخل یکی از مثلث‌هایش باشد، f بگیریم، شکلی روی صفحه به‌دست می‌آید که شبیه همان چیزهایی است که با هم دیدیم و تعداد رأس‌ها و پاره‌خط‌ها و ناحیه‌های آن‌را حساب کردیم.

در ضمن تصویر هر رأس، یعنی (رأس)f، رأسی در صفحه است. تصویر هر پاره‌خط هم یک پاره خط در صفحه است.

آرش: و تصویر هر ناحیه هم یک ناحیه در صفحه.

خی: بله. البته وقتی ناحیه‌ای که قطب شمال در آن است روی صفحه بیاید، همان ناحیهٔ بیرونی را که قبلاً داشتیم ایجاد می‌کند. حالا می‌توانی بگویی چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

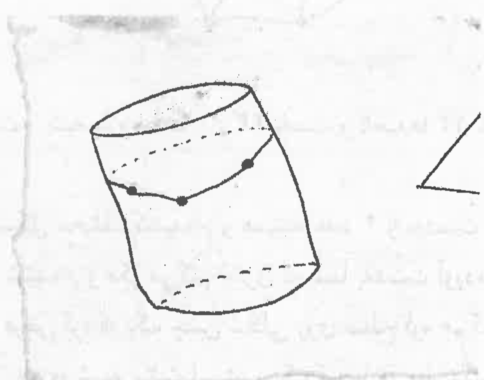


آرش: خوب؛ معنی این حرف‌ها این است که متناظر یک شکل روی کره، یک شکل روی صفحه داریم و چون روی صفحه، رابطهٔ شما که «۲ = پاره‌خط− ناحیه+ رأس» را داشتیم، پس روی کره هم این رابطه برقرار است.

خی: و این دقیقاً چیزی است که من به‌آن رسیده‌ام؛ یعنی تعداد مثلث‌های روی کره به اضافهٔ تعداد رأس‌ها همیشه ۲ تا بیشتر از تعداد ضلع‌هاست.

آرش با هیجان گفت: خوب؛ این خیلی خوب است! با استفاده از همین روش تحقیق کنید؛ شاید نتیجه دهد که سرزمین شما کره نیست.

خی: مشکل اینجاست که اولین مرحله تقسیم سیاره به تعداد زیادی مثلث است و برای این‌که مطمئن باشیم که یک ناحیه مثلث است باید به اندازهٔ کافی کوچک باشد تا بشود فهمید که داخل آن روی سیاره هست یا نه. مثلاً، این سه نقطه روی استوانه را در نظر بگیر که با این سه خط به‌هم وصل شده‌اند، این مثلث نیست؛ چون ناحیه‌ای را احاطه نکرده است. در واقع، منظورمان از یک مثلث، سه رأس، سه ضلع و ناحیهٔ درون آن است.



به این ترتیب باید تعداد خیلی خیلی زیادی مثلث کشیده شود و بعد، بررسی این که این‌ها این خاصیت‌های مورد نظر مرا داشته باشند نیاز به دقت زیاد و روشی مؤثر دارد. تازه، شمردن ناحیه‌ها، رأس‌ها و پاره‌خط‌ها هم خودش کار دشواری است. اینها خیلی هزینه‌بردار است و در نهایت هم ممکن است نتیجه‌ای ندهد و عدد ۲ به‌دست آید. آه! چای شما یخ کرد. خیلی عذر می‌خواهم ...

آرش: خواهش می‌کنم؛ اصلا مهم نیست. حرف‌های شما خیلی دلچسب‌تر از یک قوری چای داغ است!

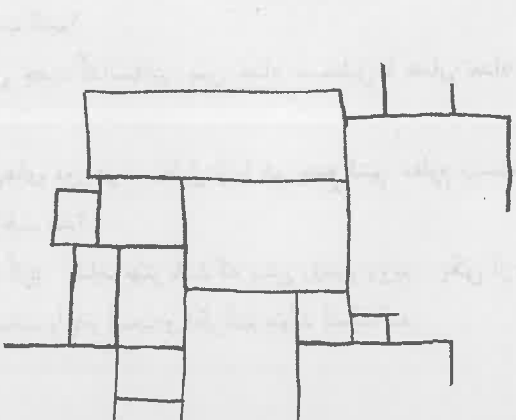
آرش و خی صبحانه را تمام کردند و با هم به پژوهشکدهٔ علوم پایه، محل کار خی، رفتند.

آرش در راه گفت: اگر یک جوری از مستطیل‌ها به‌جای مثلث‌ها استفاده می‌کردیم و این شرط یک ضلع مشترک را یک جوری برای مستطیل‌هایی که گاهی در قسمتی از یک ضلع مشترک هستند ضعیف می‌کردیم، می‌شد از این نکته که شما سرزمینتان را به تعداد زیادی مستطیل تقسیم کرده‌اید استفاده کرد.

خی: بله؛ این فکر خوبی است. خیلی جالب است. این جریان مستطیل‌بندی شدن سیارهٔ ما آن‌قدر برای خود ما عادی شده است که اصلاً به فکر آن هم نیفتادم؛ ولی ظاهراً فکر شما را خیلی اشغال کرده است که این‌قدر زود این ایده به ذهنتان رسید.

آرش: آخر، اگر واقعیت را بخواهید، چیزی که باعث شده من نسبت به کره بودن سیارهٔ شما شک کنم، احساسی بود که نسبت به این مستطیل‌بندی داشتم. یک حس مبهم به من می‌گوید که این کار روی کره امکان ندارد و فکر می‌کنم اگر شرایط واقعاً آن طور باشد که ما فکر می‌کنیم، برای نشان دادن اینکه شما روی کره زندگی نمی‌کنید استفاده از وجود این مستطیل‌ها یک نکتهٔ اساسی است.

وارد اتاق کار خی شدند. یک تخته سیاه روبه‌روی آنها روی دیوار نصب شده بود و یک میز تحریر در طرف دیگر اتاق قرار داشت، چندتا صندلی هم به‌طور نامنظم این طرف و آن طرف. روی هم رفته می‌شد گفت که اتاق زیاد مرتب نبود. در گوشهٔ دیگر اتاق، یک قفسه کتاب بود که شاید در حدود ۵۰ جلد کتاب را در خود جای داده بود. بلافاصله بعد از ورود، هر دو رفتند کنار تخته سیاه و آرش شکلی روی تخته کشید.



آرش: علاوه بر چهار رأسی که هر مستطیل دارد، لازم نیست نقطهٔ دیگری را در نظر بگیریم؟

خی: خوب؛ این‌جا هر جا یک گوشه داریم، چند تا خط به‌هم رسیده‌اند و نقطه‌ای وجود دارد. به نظر می‌رسد همان گوشه‌های مستطیل‌ها کافی باشند.

آرش: ولی از طرف دیگر، روی یک مستطیل خاص که نگاه کنیم، نقاطی هم هستند که رأس‌های آن مستطیل نیستند ولی ما این‌جا آنها را مشخص کرده‌ایم.

خی: یک ایده! هر مستطیل را به چند مثلث تقسیم کنیم.

آرش: برای این‌که کار مرتب‌تر باشد، پیشنهاد می‌کنم که درون هر مستطیل یک رأس اضافه کنیم و بعد آن را به تمام نقاطی که روی محیط مستطیل هستند وصل کنیم؛ به این ترتیب هر مستطیل به تعداد زیادی مثلث تقسیم خواهد شد و بنابراین کل سطح سیارهٔ شما هم به مثلث‌ها تقسیم می‌شود.

خی: خوب؛ بیا حالا فکر کنیم که چه راه عملی‌ای برای حل مسأله وجود دارد.

آرش: شما در هر مستطیل یک ساکن دارید و می‌توانید از او بخواهید که تعداد پاره‌خط‌هایی که دورتادور سرزمین او هستند بشمارد. حالا باید ببینیم که این عددها چه ربطی به تعداد واقعی پاره خط‌ها دارند.

خی: تعدادی پاره‌خط روی مستطیل‌ها داریم که در واقع همان پاره‌خط‌های قدیمی‌مان هستند و تعدادی هم پاره‌خط جدید که داخل مستطیل‌ها کشیده شده‌اند.

آرش: تعداد رأس‌های دور تا دور یک مستطیل همان تعداد پاره‌خط‌های دور تا دور مستطیل است؛ پس پاره‌خط‌های جدیدی که درون مستطیل کشیده شده‌اند را می‌شود حساب کرد: به‌ازای هر نقطه روی مستطیل، یک پاره‌خط جدید کشیده‌ایم و چون نقطه‌ها و پاره‌خط‌های دور تا دور یک مستطیل با هم برابرند، تعداد پاره‌خط‌های جدید داخل یک مستطیل برابر است با تعداد پاره‌خط‌های روی آن مستطیل.

خی: خوب؛ حالا باید برای حساب کردن پاره‌خط‌های قدیمی فکری بکنیم.

آرش: پاره‌خط‌های قدیمی هم که جمع تعداد پاره‌خط‌های دور هر مستطیل هستند.

خی: نه! نه! اشتباه نکن! اگر ما به هرکس بگوییم که تعداد پاره‌خط‌های دور مستطیلش را به ما بگوید، چیزی که به عنوان مجموع این اعداد به‌دست می‌آوریم بیشتر از تعداد واقعی اضلاع است؛ چون هر ضلع را ممکن است چند نفر شمرده باشند.

آرش: راست می‌گویی؛ ولی ... ولی ما می‌توانیم بگوییم هرکدام از پاره‌خط‌های قدیمی را چند نفر شمرده‌اند؟

خی: خوب ... فکر کنم که ... می‌شود! بله! برای هر پاره‌خط دو نفر هستند که این پاره‌خط بین مستطیل‌های آنها مشترک است. پس هر پاره‌خط را دقیقاً دو نفر می‌شمارند.

آرش: پس اگر از هر نفر بپرسیم که چند تا پاره‌خط دور مستطیل او است و این اعداد را با هم جمع کنیم و a بنامیم، تعداد پاره‌خط‌های جدید a و تعداد پاره‌خط‌های قدیمی $\frac{a}{2}$ است.

خی: تعداد مثلث‌ها در هر مستطیل هم برابر است با تعداد پاره‌خط‌های روی آن مستطیل؛ پس تعداد کل مثلث‌ها هم برابر است با a.

آرش: تعداد رأس‌ها را چه‌طور حساب کنیم؟

خی: درون هر مستطیل، یک رأس جدید گذاشته‌ایم؛ پس تعداد مستطیل‌ها همان تعداد رأس‌های جدید است. فقط باید برای رأس‌های قدیمی یک فکری بکنیم.

آرش گفت: اگر بخواهیم تعداد رأس‌های دور هر مستطیل را با هم جمع کنیم، معلوم نیست که هر رأسی چند بار شمرده شده است: بعضی دو بار و بعضی سه بار شمرده خواهند شد!

خی: نمی‌دانم که چه کاری می‌شود کرد. شاید بهتر باشد که پیش رئیس برویم. یکی از دوستان مشترک من و رئیس، سای[۱]، هم الان باید همراه رئیس باشد. او در ریاضیات واردتر است و فکر کنم بتواند کمک کند.

ادامه دارد ...

۱) حرف یونانی ψ

راهکارهای حل مسأله

جواد حاج‌بابایی

راهکارهای حل مسأله بخشی ویژه در ماهنامه است که در دو شماره قبل با توجه به کتاب جدید درسی در سال‌های اول و دوم دبیرستان(آموزش هنر حل مسأله) شکل گرفت و با درج مطالبی بر اساس این کتاب، سعی در ارائهٔ زمینهٔ لازم برای معرفی کتاب گردید. از این به بعد، مطالب متنوعی در این بخش گنجانده خواهد شد. در این شماره یادداشتی از یکی از مؤلفان کتاب آموزش هنر حل مسأله درج می‌شود و از دانش‌آموزان علاقمند درخواست می‌شود که به فراخوان نویسنده پاسخ‌گو باشند.

آموزش هنر حل مسأله (یاددهی ـــ یادگیری ریاضی از نوعی دیگر!)

حل مسأله، ویژه‌ترین و ناب‌ترین فعالیت فکری آدمی‌ست. این فعالیت فکری، قدم زدن در بُعد نامتناهی خویشتن است. هیچ شکی نیست که این توانایی موهبتی آسمانی‌ست! از این موهبت حداکثر استفاده را ببرید!

مسأله‌ها قلب ریاضیاتند و حل مسأله قلب جریان یاددهی ـــ یادگیری ریاضیات است. فرصت را از دست ندهید: نگذارید دیگران به‌جای شما فکر کنند. اگر حل مسأله‌ها را در اختیار شما قرار دهند، هیچ بهره‌ای نخواهید برد! اصل، تلاش فکری شماست؛ نه حل مسأله! هدف، افزایش توانایی فکری شما و شکوفا شدن استعدادهای نامتناهی درون شماست. همواره با خود بگویید: «من باید خودم مسأله را حل کنم». ممکن است کسانی بگویند حل مسأله یک ویژگی ذاتی است، بعضی‌ها مسأله حل‌کن‌های خوبی هستند و بعضی‌ها این گونه نیستند! با قاطعیت پاسخ می‌دهیم که این دیدگاه نادرست است و زیربنای علمی ندارد. بیش‌تر از این، معتقدیم هنر حل مسأله آموزش دادنی است و راهکارهایی وجود دارد که مسأله حل‌کن‌های ضعیف را به مسأله حل‌کن‌های قوی ارتقا می‌دهد. تحقیقات علمی در آموزش ریاضی کاملاً این موضوع را تأیید می‌کنند.

قصد آن نداریم که به راهکارهایی که اشاره شد، بپردازیم؛ می‌خواهیم فرصت‌هایی فراهم کنیم تا در مسیر اصلی قرارگیریم.

شیوهٔ کار و برخی اصول راهنما

۱) پیش از هر چیز با مسأله‌ها درگیر شوید!

۲) هدف ما حل کردن یک مسأله نیست؛ هدف، تلاش فکری و چگونگی مسیر فکری شما در جریان حل مساله است و بنابراین، «راه» و «چگونگی» حل مهم است؛ نه نتیجه و جواب!

۳) وقتی با مسأله‌های پیشنهادی ما درگیر می‌شوید، هر چه در ذهنتان می‌گذرد را چه مربوط به مسأله باشد و چه هیچ ربطی به مسأله نداشته باشد، همهٔ اتفاقات ذهنی و فکرهای گوناگونی که رخ داده‌است را ـــ با دقت و وسواس تمام بنویسید و برای مجله بفرستید. تلاش فکری خود را در جریان حل یک مسأله طوری بنویسید که هر کس که می‌خواند، احساس کند فیلم جریان اندیشیدن شما را تماشا می‌کند. این کار فایده‌های بسیار برای خودتان دارد. پس از این‌که فرایند فکریتان را نوشتید، چند بار آن را مرور کنید تا چیزی از قلم نیفتد. اگر لازم بود، آن را کامل‌تر کنید و سپس به جریان اندیشیدن خود فکر کنید! مهم نیست روند فکری شما به

برهان شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۲۴ـ۲۳

جواب منتهی می‌شود یا نه: گاهی در بعضی از مسیرهای فکری که به نتیجه نمی‌رسند هزاران نکته و پند و اندرز وجود دارد!

۴) ما فرآیندهای فکری شما را به بحث و بررسی خواهیم گذاشت و فراز و نشیب‌ها و پیچ و خم‌های فرایند فکری شما را تجزیه و تحلیل کرده در مجله چاپ می‌کنیم تا از آن‌ها آگاه شوید. این راهکارهای بی‌نظیر برای افزایش توانایی حل مسأله شماست. یادتان باشد که هرچه فرایند فکری خودتان در جریان حل مسأله را دقیق‌تر و کامل‌تر ارسال نمایید ما بهتر می‌توانیم شما را راهنمایی کنیم. اگر از درون ذهن شما در جریان حل مسأله اطلاع درستی نداشته باشیم، این احتمال وجود دارد که توصیه‌های ما به دردتان نخورد و یا حتی شما را به اشتباه راهنمایی کنیم!

۵) در جریان حل یک مساله، سختی‌ها، ناامیدی‌ها، لذت‌ها، «بدآمدن»ها و احساس‌های گوناگونی به شما دست می‌دهد، آن‌ها را هم گزارش کنید. اصلاً این موارد را حقیر نشمارید! «کامل» گزارش کنید!

۶) وقتی مسأله یا مسأله‌ها را با روش مورد اشاره حل کردید، نوبت به یک تلاش فکری عمیق‌تر می‌رسد: با ایده‌های دیگر، با دیدگاهی کاملاً متفاوت از پیش، دوباره به مسأله‌ها یورش ببرید و با دقت هرچه تمام‌تر فرایند فکری جدید خود را — مستقل از مرتبهٔ اول — گزارش کنید. وقتی کسی مسأله‌ای را از یک راه حل می‌کند، سخت است که با دیدگاه و ایدهٔ دیگری هم آن را حل کند.

هیچ وقت ناامید نشوید. این یکی از راهکارهای بی‌نظیر است تا بتوانید یک مسأله حل‌کن ماهر شوید!

۷) اگرگام ششم را با موفقیت پشت سر گذاشتید، برای راه حل سوم با دیدگاهی دیگر و ایده‌هایی دیگر تلاش کنید و با دقت هرچه تمام‌تر فرایند فکری خود در راه حل سوم را برای ما گزارش کنید! هیچ ضرری ندارد که به راه حل چهارم، پنجم، ششم و . . . فکر کنید، یک سر فایده است؛ گویی چند فکر در یک فکر، چند نفر در یک نفر!

۸) ما تعهد می‌کنیم که همهٔ گزارش‌های شما را تجزیه و تحلیل کنیم و به اطلاعتان برسانیم یا در مجله چاپ کنیم.

۹) دانش‌آموزان عزیز، ای امیدهای آینده، ای گل‌های بهشتی، ما «نیاز»ی به حل مسأله‌ها نداریم؛ ما حل آن‌ها را بلد هستیم! هدف ما «تلاش فکری شما»ست. می‌خواهیم فرایند فکری شما در جریان حل مسأله را تماشا کنیم تا بتوانیم به شما و به همه کمک کنیم و، البته، خودمان هم «یاد می‌گیریم». هزاران نکتهٔ باریک‌تر از مو در جریان فکرکردن آدمی وجود دارد؛ نکته‌هایی که به هیچ وجه پیش از آن قابل تصور نیست. گوناگونی فکر کردن بسیار زیاد است؛ در واقع، همه متفاوت فکر می‌کنند! ما «پاک‌نویس» جریان فکر کردن شما را نمی‌خواهیم؛ ما «چرک‌نویس» فکر کردن شما را می‌خواهیم: از روی آن‌ها خیلی چیزها می‌توان فهمید. حل‌المسائل‌ها قاتل فکر شما هستند: آن‌ها که حل‌المسائل می‌نویسند به همهٔ نوجوان‌ها، به همهٔ امیدها خیانت می‌کنند. اگر همسفر مایید، نباید به سراغ آن بدی‌ها بروید!

۱۰) مسأله‌هایی که انتخاب کرده‌ایم یا از کتاب آموزش هنر حل مسأله است و یا از دست نوشته‌هایی که برای راهنمای معلم کتاب آموزش هنر حل مسأله در حال تهیه است.

این مسأله‌ها دارای ویژگی‌های خوبی هستند! راستی مسأله‌های خوب چه مسأله‌هایی هستند؟ شاید بد نباشد این سؤال را هم جزء مسأله‌ها مطرح کنیم.

۱۱) مخاطبان درجه اول ما همهٔ دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان هستند (همهٔ رشته‌ها!) و سپس دانش‌آموزان دیگر. مسأله‌ها را می‌توانید با شیوه و راه و رسم ما به صورت گروهی انجام دهید. یادتان نرود هرچه در ذهن همهٔ اعضای گروه (دو، سه یا چهار نفری)، در جریان حل مسأله می‌گذرد به همراه همهٔ بحث و جدل‌ها را گزارش کنید.

۱۲) معلمان عزیز نیز می‌توانند با شیوهٔ ما به این مسأله‌ها یورش ببرند و فرایند فکری خویش را به‌طورکامل برای ما گزارش کنند. حتماً برای همه آموزنده است!

از تمرین‌های مطرح شده در دو شمارهٔ قبل، بخش راهکارهای مسأله، شروع کنید و گزارش کار خود را برای ماهنامه ارسال کنید.

مسأله‌های درسی

• ریاضی ۱

۱) از تساوی $(a^2-1)^{40}+(ab+2)^{60}=0$، مقدار a و b را به‌دست بیاورید.

۲) ثابت کنید $x^3+y^3+z^3=3xyz$ اگر و تنها اگر $x+y+z=0$.

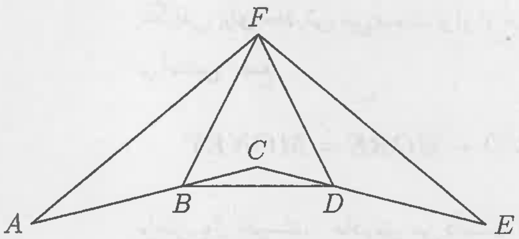
• ریاضی ۲

۱) مقدار $1^2+2^2+\cdots+100^2$ را به‌دست آورید.

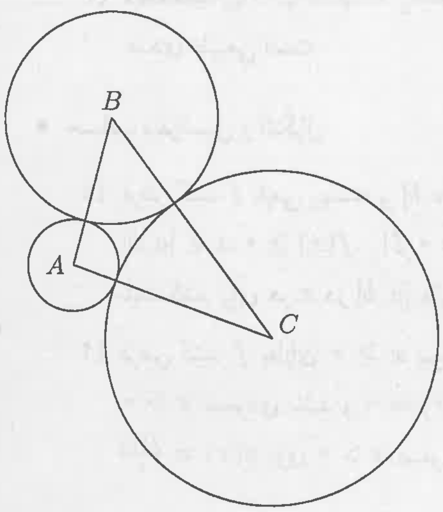
۲) مقدار $\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\cdots+\sin 360^\circ$ چقدر است؟

• هندسه ۱ و ۲

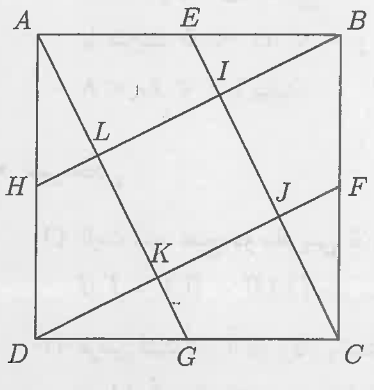
۱) در شکل داریم $AF=EF$، $AC=EC$ و $\widehat{AFB}=\widehat{EFD}$. ثابت کنید مثلث CBD متساوی‌الساقین است.



۲) در شکل، دایره‌های کشیده شده به مرکز A، B و C دو به دو به هم مماسند. اگر $AB=10$، $AC=14$ و $BC=18$، شعاع هر دایره را بیابید.



۳) چهارضلعی $ABCD$ مربع است و E و F و G و H وسط‌های اضلاع آن هستند. نسبت مساحت $IJKL$ به مساحت $ABCD$ را بیابید.



۴) ثابت کنید که محیط مثلث قائم‌الزاویه با مجموع قطر دایرهٔ محاطی و دو برابر قطر دایرهٔ محیطی آن برابر است.

• جبر و احتمال

۱) نقطه‌ای مثل (x, y) را به تصادف از درون مستطیلی که اضلاع آن محور طول‌ها، محور عرض‌ها و خط‌های $y = 2$ و $x = 3$ هستند انتخاب می‌کنیم. احتمال این که $x^2 + y^2 > 5$ چقدر است؟

۲) ثابت کنید $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ به‌ازای هر n طبیعی عددی طبیعی است.

• حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱) فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشد و برای هر $x \in [a, b]$، $f(x) \geq 0$. اگر $\int_a^b f(x)\, dx = 0$، ثابت کنید برای هر x در $[a, b]$ داریم $f(x) = 0$.

۲) فرض کنید f به‌ازای $x \geq 0$ پیوسته و f' به‌ازای $x > 0$ صعودی باشد و $f(0) = 0$. ثابت کنید $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ روی $x > 0$ صعودی است.

• ریاضیات گسسته

۱) فرض کنید G گرافی غیرکامل است و ضمناً $q = 15$ و $p \leq 12$. اگر G گرافی r منتظم باشد، r را پیدا کنید.

۲) تعداد جواب‌های صحیح $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ با شرایط $0 < x_1 < 5$ و $0 < x_2 < 6$ و $0 < x_3 < 8$ را بیابید.

• جبر خطی

۱) ثابت کنید هیچ دو ماتریس A و B موجود نیستند که $AB - BA = I$ (I ماتریس همانی است).

۲) فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند و طول $\vec{a} + \vec{b}$ کمتر از طول $\vec{a} - \vec{b}$ باشد. در بارهٔ زاویهٔ بین دو بردار چه می‌توان گفت؟

• آموزش حل مسأله

۱) **عددبازی.** علی، ایمان، امید و رضا هر کدام یک عدد برای خود انتخاب کرده‌اند و اطلاعات زیر را در مورد عددهایشان اعلام کرده‌اند:

ــ هر چهار عدد متمایزند، ب. م. م. هر دو عدد بزرگ‌تر از یک است و ب. م. م. هر جفت عدد با ب. م. م. هر جفت عدد دیگر متفاوت است.

کوچک‌ترین چهار عددی که در این شرایط صدق می‌کنند را پیدا کنید.

۲) **عبور از رودخانه.** گروهی شامل ۲۴ نفر بزرگ‌سال و ۳۶ نفر کودک می‌خواهند از رودخانه‌ای عبور کنند. آن‌ها قایقی در اختیار دارند که می‌تواند یک بزرگ‌سال یا دو کودک را در هر سفر از رودخانه عبور دهد. هر کودک یا بزرگ‌سال می‌تواند قایق را در رودخانه هدایت کند. تعیین کنید دست کم چند سفر باید انجام شود تا همهٔ افراد از رودخانه عبور کنند(در هر بازگشت قایق، دست کم یک نفر باید در آن باشد).

۳) **خط سوا.** فرض کنید از هر رأس مثلثی دلخواه، n خط سوایی طوری رسم شده‌اند که هیچ سه تا از آنها هم را داخل مثلث قطع نمی‌کنند. این خط‌ها ناحیهٔ درون مثلث را به چند بخش مجزا تفکیک می‌کنند؟

۴) **تلگراف فوری.** دانشجویی که در فاصله‌ای بسیار دور از خانواده در دانشگاهی مشغول تحصیل است، به پولی بیشتر از معمول احتیاج پیدا کرده‌است. او تلگرافی برای مادرش می‌فرستد و از او می‌خواهد که بر اساس جمع

$$SEND + MORE = MONEY$$

برایش پول بفرستد. مادرش می‌دانست که این یک مسألهٔ رمزگشایی است و او باید ابتدا مسأله را حل کند تا بفهمد که فرزندش چه‌قدر پول اضافه نیاز دارد. در این گونه مسأله‌های رمزگشایی، هر حرف نمایان‌گر رقمی از ۰ تا ۹ است و هیچ دو حرفی نمایان‌گر یک رقم نیستند. تعیین کنید این دانشجو چه‌قدر پول اضافه می‌خواهد.

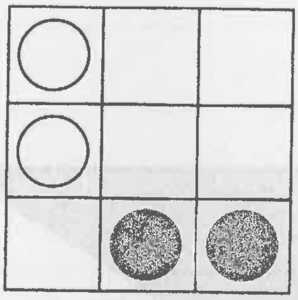
بازی و ریاضی

یحیی تابش

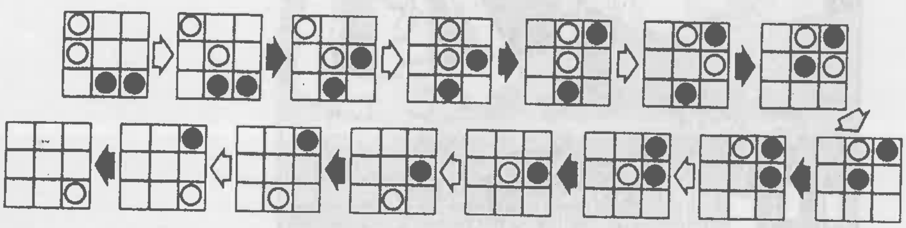
در این شماره، یک بازی و یک معما ذکر می‌کنیم. لازم به ذکر است که نظریهٔ بازی‌ها یکی از مباحث ریاضی است که در آن به بررسی راهکارها و استراتژی برد از دیدگاه ریاضی پرداخته می‌شود که در شماره‌های آینده مقاله‌ای در این زمینه خواهیم داشت. از خوانندگان علاقمند نیز دعوت می‌شود که با ارسال بازی‌ها و معماهای متنوع ما را یاری کنند. این مطالب، به نام خود آنان در ماهنامه درج خواهد شد.

مهره‌بازی

این بازی بین دو نفر روی یک صفحهٔ ۳ × ۳(یا بزرگ‌تر) انجام می‌شود. در اینجا به شرح بازی ۳×۳ می‌پردازیم.
به یک صفحهٔ ۳ × ۳ با دو مهرهٔ سیاه و دو مهرهٔ سفید نیاز داریم. در شروع بازی، وضع به‌شکل زیر است:



بازی‌کن مهرهٔ سفید در هر حرکت می‌تواند یکی از مهره‌ها را به یکی از خانه‌های بالا، پایین و یا راست که خالی باشد ببَرد(نمی‌تواند مهره‌ای را به چپ برگرداند) و بازی‌کن مهرهٔ سیاه در هر حرکت می‌تواند یکی از مهره‌ها را به یکی از خانه‌های چپ، راست و یا بالا که خالی باشد ببَرد(نمی‌تواند مهره‌ای را به پایین برگرداند). مهره‌های سفید اگر به ستون راست برسند می‌توانند از صفحه خارج شوند و مهره‌های سیاه اگر به ردیف بالا برسند می‌توانند از صفحه خارج شوند. هر بازی‌کنی که زودتر همهٔ مهره‌هایش را خارج کند برنده است. نمونه‌ای از بازی به‌صورت زیر است که سفید بازی را شروع می‌کند و سیاه برنده می‌شود:

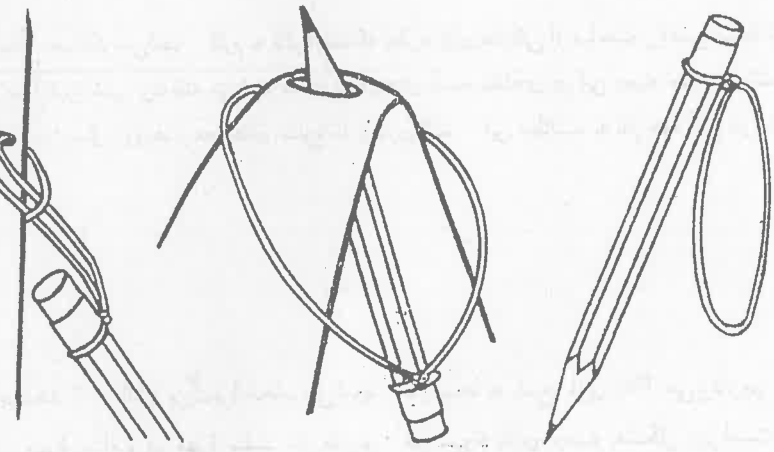


نمونهٔ بازی را روی صفحهٔ ۵ × ۵ بسازید و با دوستانتان بازی کنید.

ماهنامه ریاضیات شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۲۸_۲۷

معمای جادگمه

حلقهٔ نخی را به یک مداد یا تکه‌ای چوب طوری وصل کنید که طول حلقهٔ نخ کوتاه‌تر از از طول مداد یا تکهٔ چوب باشد(شکل الف). مداد را از جادگمه‌ای کت یکی از دوستانتان مطابق شکل ب بدون باز کردن حلقه بگذرانید و آن را مطابق شکل ج محکم کنید. سپس از دوستتان بخواهید که بدون بازکردن گره نخ(یا بریدن جادگمه‌ای!) آن را بیرون بیاورد. اگر او متوجه نحوهٔ وصل کردن شما نشده‌باشد، در بیرون آوردن مداد با اشکال فراوان مواجه خواهدشد.



آمادگی برای المپیاد ریاضی

هادی سلماسیان

۵. همان‌طور که در موقع حل کردن تمرین ۹ دیده‌اید، باقیماندهٔ تقسیم یک چندجمله‌ای $F(x)$ بر یک چندجمله‌ای از درجهٔ یک به‌شکل $G(x) = x - a$ را می‌توان به‌سادگی بدون انجام عمل تقسیم (یعنی پیدا کردن چندجمله‌ای $Q(x)$ ای که گزارهٔ ۹ را برقرار می‌کند) محاسبه کرد: تنها کافی‌ست $F(a)$ را به‌دست آوریم! اما آیا می‌توان باقیماندهٔ تقسیم $F(x)$ را بر یک چندجمله‌ای از درجهٔ دو مثل $G(x) = x^2 + ax + b$ هم، تقریباً به همین سادگی معین کرد؟

مثال ۶. *می‌خواهیم باقیماندهٔ تقسیم x^n، که n یک عدد صحیح مثبت است، بر $x^2 - x - 1$ را بیابیم.* فرض کنید

$$x^n = (x^2 - x - 1)Q(x) + R(x)$$

که درجهٔ $R(x)$ از دو کمتر است. بنابراین عددهای حقیقی A و B وجود دارند که $R(x) = Ax + B$. ولی دقت کنید که جواب‌های معادلهٔ $x^2 - x - 1 = 0$، $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ هستند. *بنابراین اگر به‌جای x، مقدارهای α و β را قرار دهیم، به رابطه‌های زیر می‌رسیم:*

$$\begin{aligned} A\alpha + B &= R(\alpha) = (\alpha^2 - \alpha - 1)Q(\alpha) + R(\alpha) = \alpha^n \\ A\beta + B &= R(\beta) = \beta^n \end{aligned}$$

که با حل این دستگاه دومعادله ــ دو مجهول، A و B به‌دست می‌آیند:

$$A = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$
$$B = \frac{\beta\alpha^n - \alpha\beta^n}{\beta - \alpha}$$

تمرین ۱۰. *اگر برای هر عدد صحیح و مثبت n، $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$، نشان دهید*

$$R(x) = F_n x + F_{n-1} \text{ و } Q(x) = F_1 x^{n-1} + F_2 x^{n-2} + \cdots + F_{n-1}$$

قدری با چندجمله‌ای‌ها انس گرفته‌اید؛ وقت آن رسیده که بیشتر بشناسیدشان! مثلاً، بیایید از بررسی ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها شروع کنیم. همان‌طور که شاید در مدرسه یادتان داده‌اند، ریشه یا ریشه‌های یک عبارت جبری، مثل یک چندجمله‌ای، آن عددهای حقیقی هستند که اگر به‌جای مجهول عبارت، آن اعداد را بگذاریم، مقدار عبارت صفر می‌شود. مثلاً جملهٔ «ریشه‌های چندجمله‌ای $x^2 - 1$، $+1$ و -1 هستند»، به این معناست که اگر به‌جای x، $+1$ یا -1 بگذاریم، مقدار عددی چندجمله‌ای بالا، صفر است.

چندجمله‌ای $x^2 - 1$، دو تا ریشه دارد. چندجمله‌ای x^2، درست یک ریشه (یعنی ۰) دارد. چندجمله‌ای $x^2 + 1 = 0$، اصلاً ریشه ندارد(چرا؟).آیا یک چندجمله‌ای از درجهٔ دو می‌تواند سه ریشه داشته باشد؟ حتماً فریادتان بلند می‌شود که «البته که نه! جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دومی به‌شکل $ax^2 + bx + c = 0$، به‌صورت $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ هستند؛ یعنی دو تا ریشه بیشتر وجود ندارد!» ولی این که دلیل نشد.

تمرین ۱۰٫۵. چرا این دلیل نشد؟!

گزاره ۱۰ . اگر $F(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، که n یک عدد صحیح مثبت است، در این صورت $F(x)$ حداکثر دارای n ریشه است.

این هم از گزاره‌هایی‌ست که دوست ندارم وقتتان را با اثباتش تلف کنم. خودتان هم می‌توانید با اندکی تلاش، ثابتش کنید (و توصیه می‌کنم که حتماً این کار را بکنید). فقط برای راهنمایی، این را بگویم که از استقرا روی درجهٔ F استفاده کنید. α_1 را یک ریشهٔ $F(x)$ بگیرید و آن را بر $x-\alpha_1$ تقسیم کنید. تمرین ۹ هم یادتان نرود.

بسیار خوب، نوبت به مسایل جدی‌تر می‌رسد! مسألهٔ زیر، از بین مسأله‌های المپیاد جهانی در سال ۱۹۷۴ برگزیده شده است.

مثال ۷ . *فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای غیر ثابت با ضریب‌های صحیح باشد (یعنی ضریب‌های $P(x)$ عددهای صحیح هستند). اگر $n(P)$ تعداد عددهای صحیح متمایز k باشد که $(P(k))^2=1$ آنگاه $n(P)-\deg(P)\le 2$ ($\deg(P)$ یعنی درجهٔ $P(x)$).*

فرض کنید R_+، مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح k باشد که $P(k)=1$ و R_- هم مجموعهٔ عددهای صحیح k باشد که $P(k)=-1$. هدف آن است که نشان دهیم اگر $R=R_+\cup R_-$، آنگاه تعداد اعضای R از $deg(P)+2$ بیشتر نیست. اگر دست کم یکی از R_+ و R_- تهی باشد که حکم برقرار است: گزارهٔ ۱۰ را برای یکی از چندجمله‌ای‌های $P(x)-1$ یا $P(x)+1$ بکار ببرید.

اکنون فرض کنید هر دوی مجموعه‌های R_+ و R_-، ناتهی باشند. نشان می‌دهیم R حداکثر ۴ عضو می‌تواند داشته‌باشد. دقت کنید که با اثبات این مطلب، مسأله برای وقتی که P یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداقل ۲ باشد، حل می‌شود. در حالتی که $deg(P)\le 1$، کافی است دقت کنید که هریک از R_+ و R_-، طبق گزارهٔ ۱۰، حداکثر $deg(P)$ عضو می‌تواند داشته باشد. پس R حداکثر $2deg(P)$ عضو دارد، و بعلاوه $2deg(P)\le deg(P)+2$.

برای اثبات ادعای بالا، فرض کنید $a\in R_+$ و $b_1,\dots,b_k\in R_-$ (b_i ها متمایزند). بنابراین، طبق تمرین ۹،

$$P(x)+1=(x-b_1)\cdots(x-b_k)Q(x)$$

که $Q(x)$ هم یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است. چون $P(a)=1$،

$$(a-b_1)\cdots(a-b_k)Q(x)=2$$

پس هر یک از عبارت‌های $a-b_i$، که عددی صحیح است، باید مساوی با ± 1 یا ± 2 باشد. در ضمن، امکان ندارد که بیش از یکی از این اعداد از میان ± 2 باشد. بنابراین $R_-\subseteq\{a-2,a-1,a+1\}$ یا $R_-\subseteq\{a-1,a+1,a+2\}$. به طور مشابه، اگر $b\in R_-$، یکی از دو حالت $R_+\subseteq\{b-2,b-1,b+1\}$ یا $R_+\subseteq\{b-1,b+1,b+2\}$ می‌توانند اتفاق بیافتند. اکنون فرض کنید $R=\{c_1,\dots,c_m\}$ که $a=c_1<\dots<c_m$، $m\ge 5$ و مثلاً $a\in R_+$. بنابراین $R_-\subseteq\{a+1,a+2\}$ (چرا؟) و $\{c_4,\dots,c_m\}\subseteq R_+$. چون R_- ناتهی است، پس از بین c_2 و c_3 یکی به R_- تعلق دارد. ولی هردوی حالات $b=c_2$ و $b=c_3$ با آنچه در بالا در مورد R_+ ثابت شد در تناقض است؛ پس $m\le 4$.

ضمن استدلال بالا، دیدید که اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح، و a ریشه‌ای از P باشد، برای هر عدد صحیح m، $P(m)$ بر $m-a$ بخشپذیر است. در حقیقت، گزارهٔ زیر هم صحیح است:

گزاره ۱۱ . *فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. در این صورت برای هر دو عدد صحیح $m\ne n$، $m-n\mid P(m)-P(n)$.*

کافی‌ست دقت کنید که اگر $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_sx^s$، که a_i ها عددهای صحیح هستند،

$$P(m)-P(n)=a_1(m-n)+a_2(m^2-n^2)+\cdots+a_s(m^s-n^s)=(m-n)K(m,n)$$

که در اینجا $K(m,n)=a_1+a_2K_2+\cdots+a_sK_s$ و

$$K_i=m^{i-1}+m^{i-2}n+\cdots+mn^{i-2}+n^{i-1}$$

(برای اثبات، از اتحاد $x^p-y^p=(x-y)(x^{p-1}+x^{p-2}y+\cdots+xy^{p-2}+y^{p-1})$ استفاده کنید) و بنابراین $K(m,n)$ یک عدد صحیح است.

تمرین ۱۱. *(المپیاد ریاضی آمریکا، سال ۱۹۷۴).* فرض کنید c، b، a سه عدد صحیح و متمایز باشند. نشان دهید هیچ چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح وجود ندارد که $P(a)=b$، $P(b)=c$ و $P(c)=a$ (راهنمایی: با نمادگذاری گزارهٔ ۱۱، نشان دهید $K(a,b)K(b,c)K(c,a)=1$ و نتیجه بگیرید که $a-b=\pm(b-c)=\pm(c-a)$).

تمرین ۱۱٫۵. مسألهٔبالا را برای حالتی که به‌جای سه عدد c، b، a، n عدد صحیح متمایز در نظر بگیریم، تعمیم دهید و حل کنید.

تمرین ۱۲. همهٔ چندجمله‌ای‌های از درجهٔ n را بیابید که برای هر $j\in\{0,1,\dots,n\}$، $P(j)=\frac{1}{j+1}$ (راهنمایی: فرض کنید $Q(x)=(1+x)P(x)-1$).

۶. اعداد مختلط چه هستند؟ اصلاً چرا اختراع شده‌اند؟ عجیب است که می‌توانم پاسخ سؤال دوم را زودتر بدهم. من به گفتهٔ لئوپولد کرونکر[1]، ریاضی‌دان آلمانی، که «خداوند اعداد طبیعی را آفرید، مابقی کار بشر است» اعتقاد چندانی ندارم. ولی واقعیت این است که همان‌طور که $\sqrt{2}$ در ابتدا به‌عنوان موجودی که معادله‌ای «حل نشدنی» مثل $x^2=2$ را حل می‌کند در نظر گرفته‌شد، اعداد مختلط هم برای حل‌کردن معادلاتی مثل $x^2+1=0$ (که همان‌طور که قبلاً مطرح شد، جوابی در میان اعداد حقیقی ندارند) ابداع شده‌اند. پاسخ معادلهٔ بالا، با نماد i نشان داده‌می‌شود (مخفف واژهٔ imaginary به معنای موهومی است) و هر عدد مختلط هم، چیزی نیست جز موجودی که به‌صورت $z=a+bi$ قابل نمایش است (bi به طور نمادین معنای «b ضرب در i» می‌دهد!) که b و a دو عدد حقیقی هستند. جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد مختلط، به‌طور طبیعی تعریف می‌شود و البته قرارداد $i^2=-1$ را هم نباید فراموش کرد. بنابراین، مثلاً داریم:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\ (a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bic+bidi\\ &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= ac+(ad+bc)i+bd(-1)\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

اگر بخواهیم $\frac{1}{x+iy}$ را هم به‌دست آوریم، چه باید بکنیم؟ باید $a+bi$ را طوری پیدا بکنیم که $(a+bi)(x+iy)=(x+iy)(a+bi)=1$. اما حتماً متوجه شدید که قبلاً یواشکی i را جابجا کردیم؛ به این معنا که برای هر عدد حقیقی r، فرض کرده‌ایم $ir=ri$. در حقیقت با استفاده از این قرارداد، به‌سادگی دیده می‌شود که اگر z و z' دو عدد مختلط باشند $zz'=z'z$. اما در $a+bi$، a و b را چگونه بیابیم؟ دقت کنید که

$$(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+(bx+ay)i$$

دقت کنید که «۱» را به‌صورت $1+i(0)$ می‌توان نشان داد (صفر ضرب در هر عددی، حتی عدد موهومی i، صفر است!) پس باید $ax-by=1$ و $bx+ay=0$. این دستگاه دو معادله ـــ دو مجهول را می‌شود در صورتی که $x^2+y^2\neq 0$، حل کرد و به جواب‌های زیر رسید

$$a=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{و} \quad b=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

---

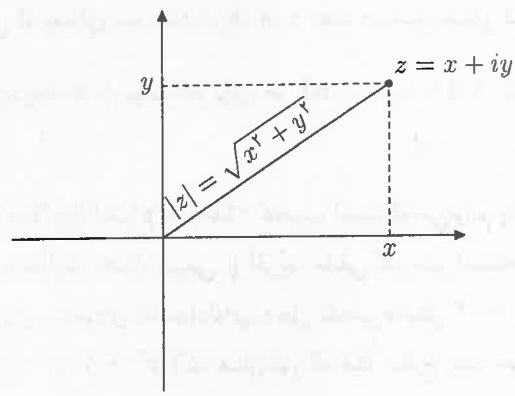
[1] Leopold Kroneker

یعنی

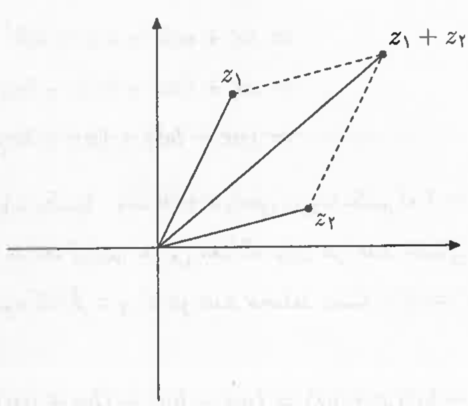
$$\frac{1}{x+iy}=a+bi=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

فرض کنید $z=x+iy$. مقدار $\sqrt{x^2+y^2}$، قدرمطلق z نام دارد که با $|z|$ نشان داده‌می‌شود. دقت کنید که اگر $y=0$، این مفهوم قدرمطلق، با مفهوم قدرمطلق عدد حقیقی $x=x+0i$ سازگار است و ضمناً برای هر عدد مختلط z، $|z|$ عددی حقیقی و نامنفی است. x و y هم، به ترتیب، جزء حقیقی و جزء موهومی z نام دارند، و می‌نویسیم $Imz=y$ و $Rez=x$.

اعداد مختلط را می‌توان به یک طریق هندسی هم تصور کرد: مختصات دکارتی را در صفحه در نظر بگیرید، و عدد $z=x+iy$ را با نقطه به مختصات (x,y) نشان دهید.



روشن است که جمع دو عدد مختلط، روی صفحه، به جمع برداری بردارهای نظیر آنها (که ابتدای آنها مبدأ مختصات و انتهایشان نقاط متناظر با اعداد است) مبدل می‌شود.



در این صفحه، نقاط نظیر اعدادی که قدرمطلق‌شان با هم برابر است، روی دایره‌هایی به مرکز مبدأ مختصات قرار دارند (چرا؟). برای این‌که قدری با اعداد مختلط مأنوس‌تر شوید، بررسی کنید که آیا چندجمله‌ای x^2+x+1 در اعداد مختلط ریشه دارد یا نه.

تقارن و خواص آن

محسن بیاتی

برای هر خط ثابت مثل d در صفحه، می‌توان عملی تعریف کرد که به هر نقطه مثل A از صفحه نقطه‌ای مثل A' را (در همان صفحه) طوری نسبت دهد که d عمود منصف AA' باشد. این عمل را تقارن محوری نسبت به d می‌نامند. در واقع، این کار مشابه این است که آینهٔ مسطحی را طوری روی d قرار دهیم که «رو»ی آن به طرف A باشد و تصویر A در آینه را A' بگیریم.

این عمل ساده، خواص نسبتاً جالبی دارد. به‌عنوان نمونه، به این مسألهٔ معروف توجه کنید:

مسأله ۱. *دو شهر A و B در یک طرف رودخانه‌ای با ساحلی کاملاً مستقیم قرار دارند. نقطه‌ای مثل C را در ساحل این رودخانه طوری پیدا کنید که $AC + BC$ کمترین مقدار ممکن را داشته‌باشد.*

می‌دانیم که کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو نقطهٔ دلخواه در صفحه، پاره‌خط راستی‌ست که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند. در این مسأله، می‌خواهیم کوتاه‌ترین مسیر بین A و B را طوری پیدا کنیم که در طول راه، ملاقاتی هم با ساحل رودخانه داشته‌باشیم و تقارن، مسأله‌مان را به همان مسألهٔ قبلی تبدیل می‌کند؛ یعنی اگر قرینهٔ A نسبت به ساحل رودخانه را A' بنامیم، برای هر نقطه مثل X در ساحل رودخانه مثلث XAA' متساوی‌الساقین خواهدبود(ارتفاع رأس X میانه هم هست) و در نتیجه داریم $AX = A'X$؛ پس

$$AX + BX = A'X + BX.$$

اکنون، برای پیدا کردن C، کافی‌ست کوتاه‌ترین مسیر بین A' و B را در نظر بگیریم و محل تلاقی مسیر با ساحل رودخانه را C بنامیم. واضح‌است که این، همان جواب مسأله است؛ چون $A'C + BC$ کمترین مقدار ممکن را دارد.

در مسألهٔ قبل، دیدیم که به کمک تقارن محوری ساده‌ای مسأله به مسأله‌ای ساده‌تر تبدیل شد. می‌توان از همین روش استفاده کرد و نتیجه‌های جالب‌تری به‌دست آورد؛ مثلاً به‌کمک مسألهٔ زیر ــ که با استفاده از تقارن به‌راحتی حل می‌شود ــ نتیجه خواهیم گرفت که بین همهٔ مثلث‌های محاط در مثلثی مفروض، مثلثی کمترین محیط را دارد که رأس‌هایش پاهای سه ارتفاع نظیر رأس‌های مثلث مفروض باشند(این مثلث را اصطلاحاً مثلث ارتفاعی مثلث اولیه می‌نامند).

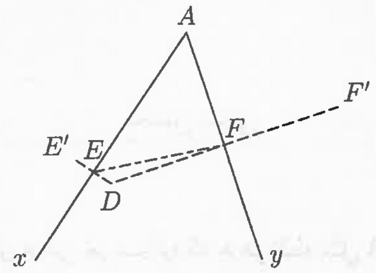
مسأله ۲. *فرض‌کنید زاویهٔ xAy و نقطه‌ای مثل D داخل آن داده شده‌اند. نقاط E و F را روی Ax و Ay طوری پیدا کنید که محیط مثلث DEF کمترین مقدار ممکن باشد.*

برای حل این مسأله، اگر قرینه‌های D را نسبت به Ax و Ay به‌ترتیب E' و F' بنامیم، مثل مسألهٔ قبل می‌توان گفت که $DE = DE'$ و $DF = DF'$؛ پس

$$\text{محیط}\, DEF = DE + EF + FD = E'E + EF + FF';$$

پس برای هر دو نقطهٔ E و F روی اضلاع زاویه، محیط مثلث DEF برابر طول پاره‌خط شکسته‌ای‌ست که از E'، E، F و F' می‌گذرد و بین همهٔ این پاره‌خط‌ها، پاره‌خط مستقیم کمترین طول را دارد؛ پس اگر E' و F' را با خطی راست به هم وصل کنیم تا Ax و Ay را به‌ترتیب در E و F قطع کند، این E و F به‌دست آمده جواب مسأله‌اند.

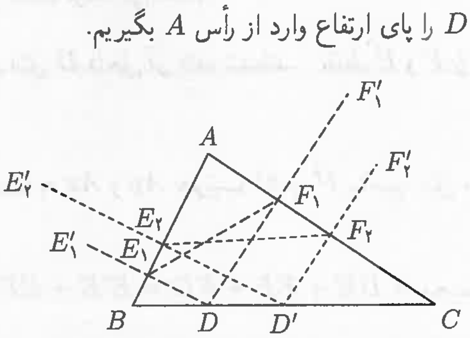
ریاضیات شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۳۴ــ۳۳



اکنون می‌خواهیم بین همهٔ مثلث‌هایی که در مثلث ABC محاطند، مثلثی با کمترین محیط پیدا کنیم. اگر نقطهٔ D روی ضلع BC ثابت باشد، پیدا کردن E و F ای که محیط مثلث DEF حداقل ممکن باشد همان مسألهٔ قبلی‌ست؛ پس اگر برای هر D روی BC مثلث پیدا شده به روش مسألهٔ قبلی را T_D بنامیم، باید نقطهٔ D را طوری روی BC پیدا کنیم که محیط T_D حداقل ممکن باشد. طبق مسألهٔ قبل، محیط T_D برابر است با طول پاره‌خطی که قرینه‌های D نسبت به AB و AC را به هم وصل می‌کند. با کمی دقت، می‌توانیم رابطهٔ بهتری بین طول $E'F'$ و محل D روی BC پیدا کنیم: چون E' و F' قرینه‌های D نسبت به AB و AC هستند، $\widehat{DAB} = \widehat{BAE'}$ و $\widehat{DAC} = \widehat{CAF'}$؛ بنابراین

$$\begin{aligned}\widehat{E'AF'} &= \widehat{E'AB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF'} \\ &= \widehat{BAD} + \widehat{BAC} + \widehat{DAC} \\ &= ۲\widehat{BAC}\end{aligned}$$

و $AD = AF' = AE'$؛ پس برای هر نقطهٔ D روی BC، طول $E'F'$(یا همان محیط T_D) برابر است با قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی که اندازهٔ ساق‌هایش برابر AD و زاویهٔ رأسش برابر $۲\widehat{BAC}$ باشد. حال، اگر دو نقطهٔ D و D' روی ضلع BC داشته‌باشیم، ادعا می‌کنیم اگر $AD < AD'$ آنگاه محیط $T_D <$ محیط $T_{D'}$؛ چون اگر زاویه‌ای به اندازهٔ $۲\widehat{BAC}$ را رسم کنیم و روی دو ضلع آن نقاط $E_۱$ و $E_۲$ و $F_۱$ و $F_۲$ را مطابق شکل طوری انتخاب کنیم که $AD = AE_۱ = AF_۱$ و $AD' = AE_۲ = AF_۲$ آنگاه با توجه به استدلال بالا محیط T_D و محیط $T_{D'}$ به‌ترتیب برابر $E_۱F_۱$ و $E_۲F_۲$ خواهد بود؛ اما چون $AD < AD'$، مثلث $AE_۱F_۱$ کاملاً داخل مثلث $AE_۲F_۲$ قرار خواهد گرفت و واضح است که $E_۲F_۲ > E_۱F_۱$؛ پس محیط $T_D <$ محیط $T_{D'}$. پس برای حداقل کردن محیط T_D، کافی‌ست طول AD را حداقل کنیم و در نتیجه، باید D را پای ارتفاع وارد از رأس A بگیریم.



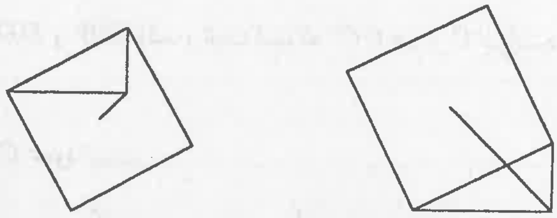
تا اینجا ثابت کرده‌ایم که اگر DEF مثلثی محاط در مثلث ABC باشد و با حداقل محیط، رأس D پای ارتفاع A است. با انجام همین کار برای نقاط متناظر روی دو ضلع دیگر ABC، نتیجه می‌گیریم که E و F هم پاهای ارتفاع‌های B و C هستند و بنابراین DEF مثلث ارتفاعی است.

مسأله‌هایی دربارهٔ مربع‌ها

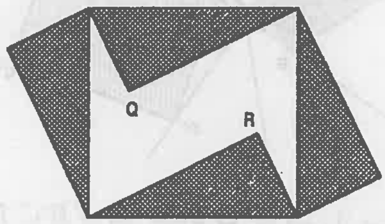
سید ماجد طاهری

در این مقاله، مسأله‌هایی را در مورد مربع‌ها مطرح خواهیم کرد. این مسأله‌ها، مسأله‌هایی جالب هستند و اگر جدید نیستند، در بیشتر راه‌حل‌ها رابطه‌هایی در شکل مطرح شده‌اند که تازگی دارند. بهتر است ابتدا روی مسأله‌ها فکر کنید و خودتان مسأله را حل کنید و بعد راه‌حل مطرح شده را بررسی کنید.

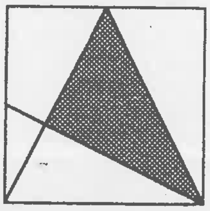
مسأله ۱. *مربعی به‌طور داخلی یا خارجی روی وتر یک مثلث قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم. نشان‌دهید که پاره‌خطی که رأس مثلث را به مرکز مربع وصل می‌کند، با ضلع‌های مثلث زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.*



مسأله ۲. *روی اضلاع یک مربع، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ همنهشتی را طوری رسم کرده‌ایم که دو مثلث بیرون و دو مثلث داخل مربع باشند. ثابت‌کنید نقاط P، Q، R و S هم‌خط هستند.*

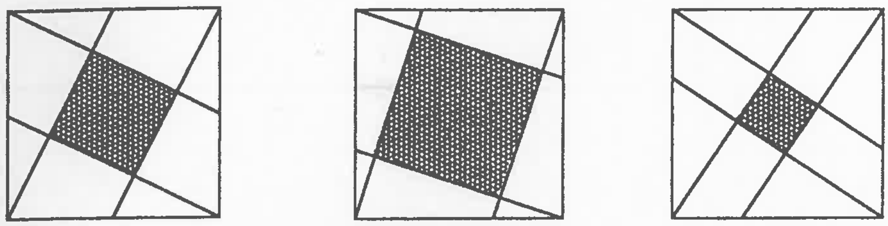


مسأله ۳. *مثلث هاشورخورده از وصل‌کردن رأس‌های مربع به وسط ضلع‌های مقابل پدید آمده. ثابت‌کنید که این مثلث، مثلثی قائم‌الزاویه است که ضلع‌هایش به نسبت ۵ : ۴ : ۳ هستند.*

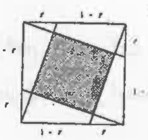


مسأله ۴. *در هر یک از شکل‌ها، از وصل کردن هریک از رأس‌های مربع به یک ضلع غیر مجاور، مربعی پدید آمده است. اگر طول*

ضلع مربع اولیه برابر واحد باشد، مساحت هریک از مربع‌ها را به‌دست بیاورید(نسبت طول پاره‌خط طرف چپ به طول پاره‌خط طرف راست روی ضلع بالایی مربع‌ها به ترتیب از راست به چپ ۱ به ۲، ۲ به ۱ و ۱ به ۱ است).



مسأله ۵. مساحت مربع هاشور خورده‌ای راکه مانند شکل در مربع واحد قرارگرفته به‌دست آورید.

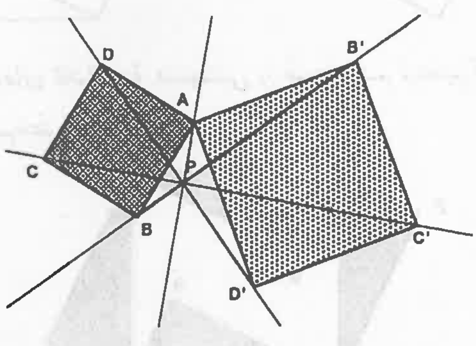


مسأله ۶. فرض‌کنید مربع‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ در رأس A مشترک باشند و هردو را در یک جهت نام‌گذاری کرده‌باشیم.

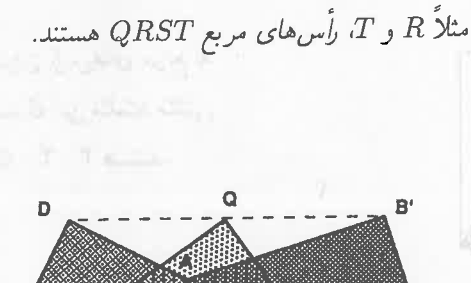
۱) ثابت کنید پاره‌خط‌های BB' و DD' مساوی و عمود بر هم هستند؛

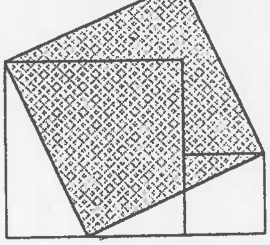
۲) فرض‌کنید P محل برخورد DD' و BB' باشد و ثابت کنید که CC' هم از P می‌گذرد و نیم‌ساز زاویهٔ P(که از برخورد BB' و DD' پدید می‌آید) است.

۳) نشان دهید خط AP بر CC' عمود است.



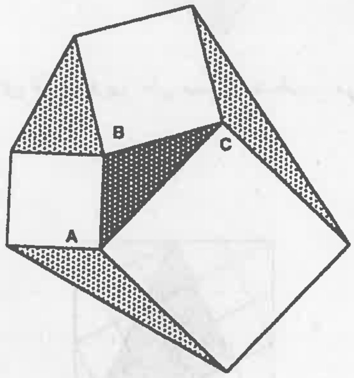
مسأله ۷. فرض‌کنید مربع‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ مثل مسألهٔ قبل در رأس A مشترک باشند. ثابت کنید نقاط Q و S(وسط‌های $B'D$ و BD' به‌همراه مرکزهای دو مربع، مثلاً R و T، رأس‌های مربع $QRST$ هستند.





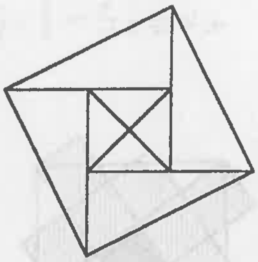
مسأله ۸. مثل شکل، روی یک خط، دو مربع رسم می‌کنیم که یک ضلعشان روی یک خط باشد. رأس بالا و چپ و رأس بالا و راست را قطر مربعی جدید می‌گیریم و این مربع را رسم می‌کنیم. ثابت کنید یک رأس مربع جدید روی خط افقی و رأس دیگرش روی خط عمودی مشترک بین دو مربع است.

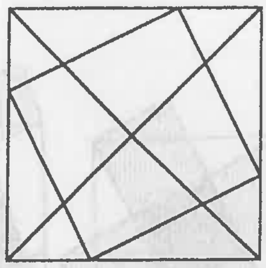
مسأله ۹. روی اضلاع مثلث دلخواه ABC، سه مربع بیرون مثلث رسم کنید. ثابت کنید مساحت مثلث اولیه با مساحت هریک از سه مثلث جدید در شکل برابر است.

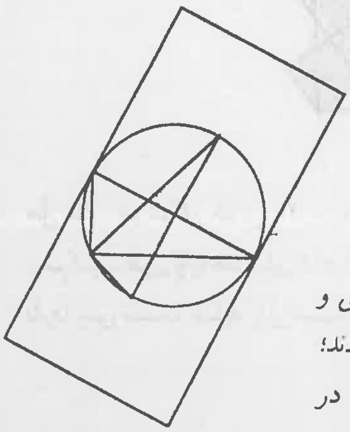


حل ۱.

۱) (از راه کاشی کردن) با اضافه‌کردن مثلث‌های همنهشت با مثلث اولیه به بقیهٔ ضلع‌های مربع، مربع جدیدی به‌وجود می‌آید که حل مسأله را به‌وضوح می‌توان در آن دید.

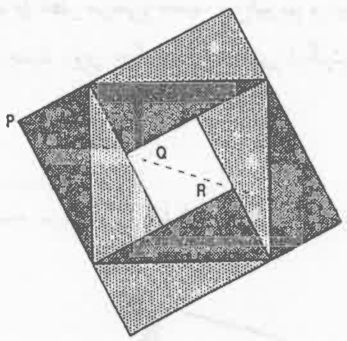




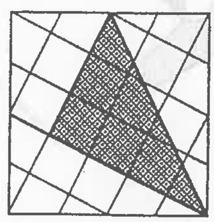


۲) (از راه زوایای محاطی در دایره) دایره به قطر وتر مثلث را رسم می‌کنیم و مرکزهای دو مربع داخلی و خارجی را هم به هم وصل می‌کنیم. این پاره‌خط و وتر مثلث هر دو قطر دایره هستند و بر هم عمودند؛ بنا بر این، کمان‌هایی که روی دایره به‌وجود می‌آیند، همه 90° هستند و در نتیجه، زاویه‌های پدیدآمده در رأس مثلث 45° خواهند بود؛ چون زاویهٔ محاطی، نصف کمان روبه‌رو است.

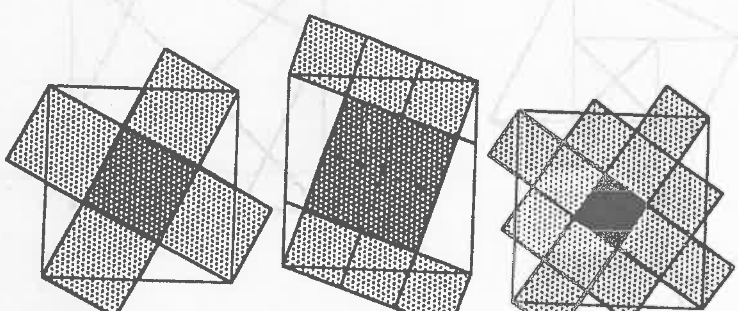
حل ۲. اگر شکل را مثل شکل زیر کامل کنیم، به‌راحتی می‌توان دید که همهٔ این نقطه‌ها روی قطر مربع بزرگ بیرونی هستند. ■

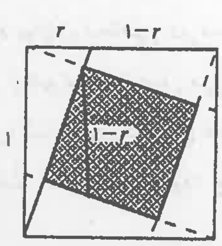


حل ۳. اگر شکل را مطابق شکل زیر در شبکه‌ای قرار دهیم، حل مسأله مشخص می‌شود. ■



حل ۴. در هر حالت، با شبکه‌بندی مناسب می‌توان به‌راحتی جواب مسأله را پیدا کرد. همان‌طور که در شکل زیر دیده می‌شود، در هر حالت هریک از مثلث‌های بیرونی که هاشور خورده با یکی از مثلث‌های داخلی که هاشور نخورده برابر است و بنا بر این مربع‌های هاشورخورده مساحت‌های $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۳}$ دارند. ■





حل ۵. در شکل مقابل، اگر پاره‌خطی عمودی از یک رأس مربع هاشور خورده تا ضلع مقابل رسم کنیم، طول پاره‌خط برابر $۱-r$ خواهد بود. متناظر همین پاره‌خط در مربع، طول $\sqrt{۱+r^۲}$ دارد؛ پس نسبت تشابه برابر است با

$$A=\frac{(۱-r)^۲}{۱+r^۲};$$

که اگر مثلاً $r=\frac{۲}{۳}$ بگیریم، برابر $\frac{۱}{۱۳}$ می‌شود که در مسألهٔ ۴ به‌دست آمده بود. ■

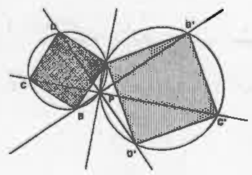
حل ۶. شکل زیر را درنظر بگیرید.

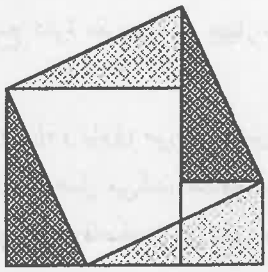
۱) با یک دوران $90°$ حول A، مثلث ABB' به مثلث ADD' می‌رود؛ پس دو مثلث برابرند و در نتیجه $BB' = DD'$ و به‌علاوه، $BB' \perp DD'$.

۲) دایره‌های محیطی مربع‌ها را رسم می‌کنیم؛ دو دایره در A و P هم را قطع می‌کنند. با استفاده از اندازه‌های زاویه‌های محیطی، می‌بینیم که PC و PC' نیم‌ساز هستند و بنا بر این در یک راستا قرار دارند.

۳) چون PA و PC به دو سر قطر دایره می‌رسند، زاویهٔ P قائمه است.

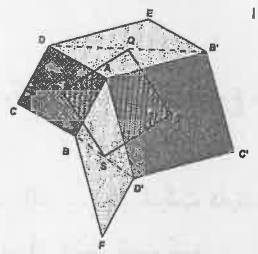
■



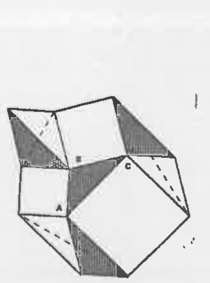


حل ۷. شکل مسأله در واقع از یکی از برهان‌های قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آمده است. اگر به شکل بخش بخش شده نگاه کنیم، واضح است که مساحت مربع بزرگ مساوی جمع مساحت‌های دو مربع کوچک‌تر است. اثبات حکم مسأله هم نتیجهٔ مستقیم شکل پیش است. ■

حل ۸. Q و S به‌ترتیب مرکزهای متوازی‌الاضلاع‌های مساوی $AB'ED$ و $BFD'A$ هستند. $BD'FA$ با یک دوران $90°$ حول R به $AB'ED$ می‌رود؛ پس RS و RQ برابرند و با هم زاویهٔ $90°$ می‌سازند. به همین ترتیب، QT و ST هم برابر و عمود هستند؛ پس $QRST$ مربع است. ■



حل ۹. با استفاده از مثلث‌های مساوی ABC، مسأله به‌راحتی حل می‌شود: اگر هر یک از مثلث‌های بیرونی را مثل شکل به متوازی‌الاضلاع تبدیل کنیم و قطر متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم، مثلث‌هایی مساوی ABC به‌وجود می‌آیند. ■



مسأله‌های المپیادی

علی شوریده

۳-۱) ترازویی با n سنگ به وزن‌های ۱، ۳، $۳^۲$، ...، $۳^{n-۱}$ کیلو داده شده. نشان دهید که می‌توان با قرار دادن بعضی از سنگ‌ها در یک کفهٔ ترازو و بعضی دیگر در کفهٔ دوم، هر وزن N کیلویی را توزین کرد؛ به شرط این که N عددی طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲}(۳^n - ۱)$ باشد.

۳-۲) از پنج دایرهٔ مفروض، هر چهار دایره از یک نقطه می‌گذرند. ثابت کنید نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می‌گذرند.

۳-۳) وزارت راه و ترابری می‌خواهد بین ۶ شهر ۵ جاده بکشد، طوری که بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر مسافرت کرد(هر جاده دو شهر را به هم وصل می‌کند، جاده‌ها یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند و از شهرهای دیگر نمی‌گذرند). آیا می‌تواند طوری این کار را انجام دهد که کوتاه‌ترین فاصله‌ها بین شهر به‌ترتیب برابر با ۱، ۲، ۳، ...، ۱۵ کیلومتر، از طریق شبکه جاده‌ها باشد؟

۳-۴) n نقطهٔ قرمز و n نقطهٔ آبی روی یک خط راست قرار دارند(همگی متمایزند). تعیین کنید کدام یک از این دو عدد بزرگ‌ترند:

مجموع فواصل دو به دوی نقاط آبی از نقاط قرمز،

یا

مجموع فواصل نقاط قرمز از یک‌دیگر، به‌اضافهٔ مجموع فواصل دو به دوی نقاط آبی از هم.

۳-۵) در یک دوره مسابقهٔ تنیس، n بازیکن با نام‌های $A_1, \ldots, A_n$ شرکت دارند. هر دو بازیکن دقیقاً یک بار با هم مسابقه می‌دهند. اگر W_i تعداد بردهای A_i و L_i تعداد باخت‌های A_i باشد، ثابت کنید

$$W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2 = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2$$

(توجه کنید که مسابقهٔ تنیس، تساوی ندارد!)

حل مسأله‌های المپیادی (شمارهٔ ۲)

علی شوریده

۲-۱) الف) به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که دنباله‌ای از خانه‌های با شماره‌های A_1، A_2، ...، A_k هست که ۱ در A_1 و n^2 در A_k است و A_i و A_{i+1} مجاورند، $1 \leq i \leq k-1$ و $k \leq n$. اگر a_i عدد درون A_i باشد، خواهیم داشت

$$(a_k-a_{k-1})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)=n^2-1$$

و اگر $(1 \leq j \leq k-1) b_j = a_{j+1} - a_j$، در این صورت

$$b_{k-1}+b_{k-2}+\cdots+b_2+b_1=n^2-1$$

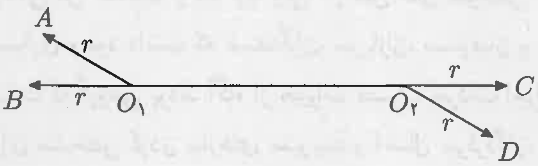
در این صورت طبق اصل لانهٔ کبوتر یکی از b_i ها از $\frac{n^2-1}{k-1}$ و در نتیجه از $\frac{n^2-1}{n-1}=n+1$ کوچک‌تر است که همان است که می‌خواستیم.

۲-۲) اختلاف ساعت دو شهر تهران و توکیو ۳۰ : ۵ است؛ در نتیجه در دو حالتی که نوک‌های عقربه‌ها روی خط واصل مرکزهاست و هر دو به طرف هم یا در خلاف جهت هم هستند، فاصلهٔ نوک دو عقربه‌به ترتیب مینیمم و ماکزیمم است.

در این صورت اگر l فاصلهٔ دو مرکز باشد و r طول دقیقه‌شمار، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2r+l=M \\ l-2r=m \end{cases} \Rightarrow 2l=M+m \Rightarrow l=M+m.$$

حال کافی‌ست ثابت کنیم حالاتی که بیان کردیم واقعاً مینیمم و ماکزیمم هستند. با توجه به شکل و استفاده از رابطهٔ مثلث، معلوم است که AD کوچک‌تر از BC است. حالت مینیمم هم به‌طور مشابه ثابت می‌شود.



۲-۳) توجه داشته باشید که با هر بازی یک تیم حذف می‌شود. از طرفی می‌خواهیم $n-1$ تیم حذف شوند و تنها یک تیم به عنوان قهرمان بماند؛ پس دقیقاً $n-1$ بازی لازم است تا قهرمان مشخص شود.

۲-۴) شش نقطهٔ A_1، A_2، A_3، A_4، A_5 و A_6 را رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع و اوساط اضلاع می‌گیریم. چون مثلث متساوی‌الاضلاع را با پنج مثلث متساوی‌الاضلاع پوشانده‌ایم، دو تا از این ۶ نقطه در یک مثلث می‌افتند. حال فاصلهٔ این دو نقطه از هم سه حالت دارد؛ اگر a ضلع مثلث باشد این سه حالت عبارتند از $\frac{a}{2}$، a، $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ که همگی از $\frac{a}{2}$ بیشترند، در نتیجه ضلع پنج مثلث متساوی‌الاضلاع مشابه از $\frac{a}{2}$ بیشتر است. اکنون واضح است که با چهار مثلث از این نوع می‌توان مثلث اصلی را پوشانید.

ریاضیات شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۴۱ـ۴۱

پاپیروس‌های ریند و مسکو

مسعود مختاری

در خلال هزاره‌های پنجم، چهارم و سوم قبل از میلاد، در کرانهٔ رودهای بزرگ در آفریقا و آسیا و در مناطق استوایی یا نیمه استوایی، شکل‌های نوتر و پیشرفته‌تری از جامعه و اجتماعات قوام یافتهٔ نوسنگی پدید آمدند. این رودها عبارت بودند از نیل، دجله و فرات، سند و بعدها گنگ، هوانگ‌هو و سپس یانگ ـ تسه.

همین که طغیان آب این رودها مهار شد و باتلاق‌ها زهکشی شدند، از اراضی کرانه‌های آنها می‌شد محصولات فراوانی به‌دست آورد. بر خلاف بیابان‌های خشک و نواحی کوهستانی و دشت‌هایی که این مناطق را در بر گرفته بودند، دره‌های این رودها را می‌شد به بهشت تبدیل کرد. طی قرون، با ساختن بندها و سدها، حفر آب‌راه‌ها و ساختن مخازن آب، این مشکلات حل شد. تنظیم ذخایر آب در نواحی دور از هم، نیازمند هماهنگ کردن فعالیت‌ها به مقیاسی بسیار وسیع‌تر بود؛ این امر به استقرار تشکیلات اداری در شهرها، که در ایام پیشین در دهکده‌ها جای داشتند، منجر شد. مازاد تولید نسبتاً زیادی که در نتیجهٔ بهبود وسیع کشاورزی و کشت متمرکز حاصل آمد، سطح زندگی کل جمعیت را بالا برد؛ ولی در عین حال اشرافیتی شهری پدید آورد که سرکردگانی نیرومند در رأس آن بودند. پیشه‌های تخصصی بسیاری وجود داشت که صنعتگران، سربازان، مستوفیان و روحانیان به آنها می‌پرداختند. ادارهٔ امور عمومی در دست مأموران دایمی قرار گرفت که گروهی بودند آگاه از تغییرات فصول، حرکات اجرام سماوی، فن تقسیم زمین، انبار کردن غذا، و اخذ مالیات. دست خطی نیز برای مشخص کردن نیازهای مدیریت و اعمال سرکردگان، به کار می‌رفت. دیوانیان و صنعتگران، دانش فنی قابل ملاحظه‌ای از جمله فلزشناسی و پزشکی کسب کردند. هنرهای محاسبه و اندازه‌گیری نیز از زمرهٔ این دانش‌ها بود . . . .

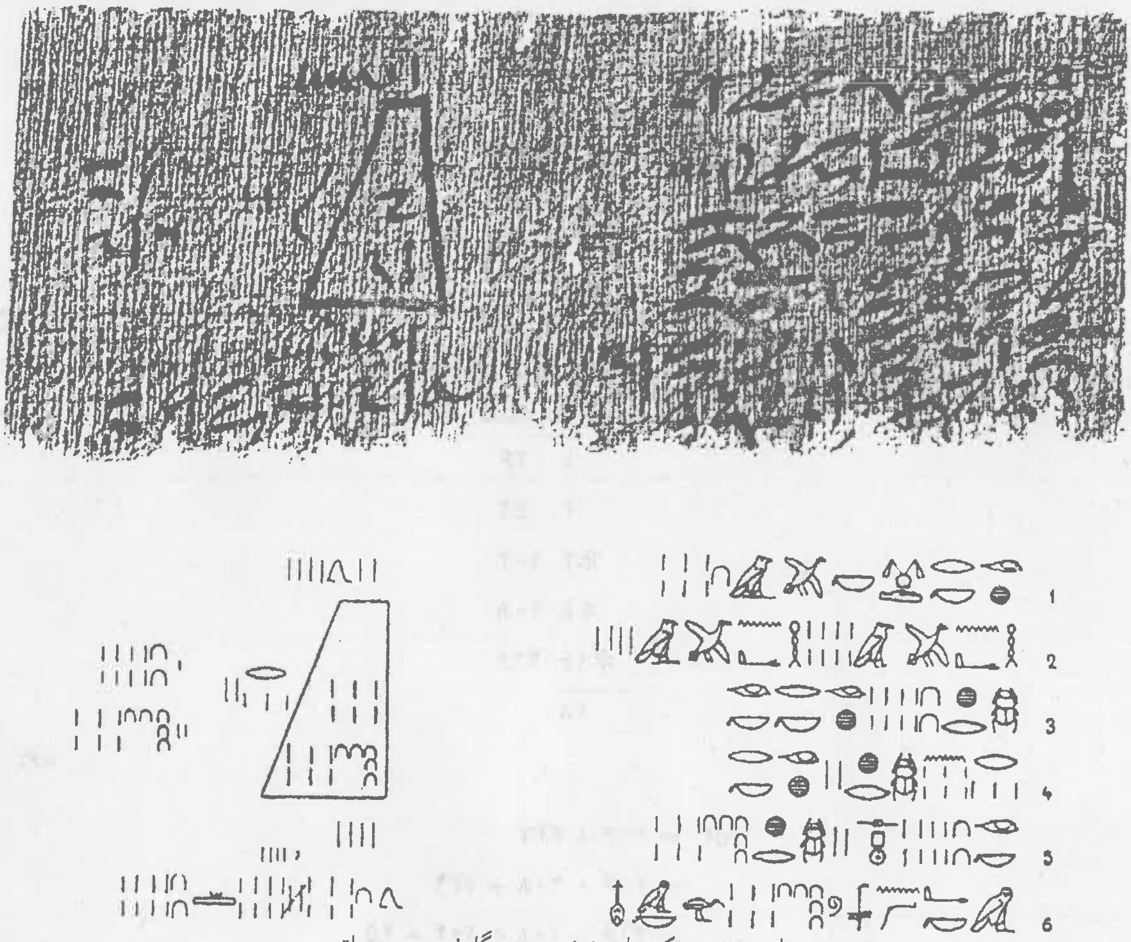
مصر

ریاضیات مصر باستان، بر خلاف اعتقاد عموم، هرگز به سطحی که ریاضیات بابلی به آن نایل‌شد، نرسید. شاید این امر معلول توسعهٔ پیشرفته‌تر اقتصادی بابل بوده باشد. بابل بر سر راه چند جادهٔ کاروان‌رو بزرگ قرار داشت؛ در حالی که مصر نیمه منزوی بود. نیل نسبتاً آرام هم نیازمند مهندسی و امور اداری چندان گسترده‌ای در حد رودخانه‌های با جریان متغیر دجله و فرات نبود.

با این حال، تا کشف رمز تعداد زیادی لوح ریاضی بابلی در این اواخر، مصر برای مدت مدیدی غنی‌ترین منبع پژوهش‌های تاریخی عهد باستان بود. دلایل این امر در احترامی که مصریان برای مردگان خود قایل بودند و در آب و هوای آن ناحیه که به طور نامعمول خشک بود، نهفته است. اولی منجر به بنای قبور و معابد دیرپا با دیوارهایی پر از نقش و نگار گردید و دومی در حفظ بسیاری از پاپیروس‌ها و اشیایی که در غیر این صورت از بین می‌رفتند، نقش برجسته‌ای داشت.

پاپیروس مسکو تقریباً متعلق به ۱۸۵۰ قبل از میلاد است. این پاپیروس، متنی ریاضی است مشتمل بر ۲۵ مسأله که در همان موقع تدوین نوشتهٔ مزبور قدیمی بوده‌اند. پاپیروس مسکو در ۱۸۹۳ در مصر خریداری و در ۱۹۳۰ با توضیحات ویراستاری منتشر شد. این پاپیروس ۱۸ فوت درازا و در حدود ۱۳ اینچ پهنا دارد.

فرهنگ و رشنگ شمارهٔ ۳
(مهر ۱۳۷۹) صص ۴۶ـ۴۲



پاپیروس مسکو، با رونوشت هیروگلیف متن هیراتی

تاریخ تقریبی پاپیروس ریند(یا احمس)، ۱۶۵۰ قبل از میلاد است؛ یک متن ریاضی که تا حدی ماهیت یک کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسأله است که به خط هیراتی به‌وسیلهٔ احمس کاتب از روی یک اثر قدیمی‌تر نسخه‌برداری شده است. این پاپیروس در ۱۸۵۸ به‌وسیلهٔ مصرشناس اسکاتلندی، ا. هنری ریند از مصر خریداری شده و سپس به موزهٔ بریتانیا رسیده است.

حساب و جبر در دو پاپیروس

کلیهٔ ۱۱۰ مسأله‌ای که در پاپیروس‌های مسکو و ریند دیده می‌شوند، عددی‌اند و عدهٔ زیادی از آنها بسیار ساده‌اند. اگرچه اغلب این مسایل ریشهٔ عملی دارند، برخی از آنها دارای ماهیت نظری‌اند.

ریاضیات این پاپیروس‌ها بر دستگاه شمارش اعشاری مبتنی است که علایم ویژه‌ای برای هر واحد اعشاری بالاتر دارد. ما از طریق دستگاه رومی، که از همان اصول تبعیت می‌کند، با این دستگاه آشنا هستیم: MDCCCLXXVIII=۱۸۷۸. مصری‌ها بر اساس این دستگاه، حسابی را پدید آوردند که عمدتاً سرشتی جمعی داشت؛ یعنی حسابی بود که گرایش اصلی آن، تحویل ضرب به جمع‌های مکرر بود. یک پیامد دستگاه شمار مصری، خصلت جمعی حساب وابسته به آن است. مثلاً ضرب و تقسیم معمولاً با یک سلسله اعمال دو برابر سازی انجام می‌شد و مبتنی بر این حقیقت بود که هر عدد را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از توان‌های دو نمایش داد. به عنوان مثالی از این شیوهٔ ضرب، حاصلضرب ۲۶ و ۳۳ را پیدا می‌کنیم. چون ۲ + ۸ + ۱۶ = ۲۶، تنها لازم است که این مضارب ۳۳ را با هم جمع کنیم. این کار را می‌توان به طریق زیر ترتیب داد:

۱	۳۳
*۲	۶۶
۴	۱۳۲
*۸	۲۶۴
*۱۶	۵۲۸
	۸۵۸

جمع مضارب مناسب ۳۳، یعنی آنها که با ستاره مشخص شده‌اند، جواب ۸۵۸ را می‌دهد.

همچنین، مثلاً، برای تقسیم ۷۵۳ بر ۲۶، مقسوم علیه(یعنی ۲۶) را به طور پیاپی تا مرحله‌ای دو برابر می‌کنیم که دو برابر سازی بعدی از مقسوم(یعنی از ۷۵۳) بیشتر شود. نحوهٔ کار، در زیر نشان داده شده است:

۱	۲۶
۲	۵۲
*۴	۱۰۴
*۸	۲۰۸
*۱۶	۴۱۶
۲۸	

حال، چون

$$
\begin{aligned}
۷۵۳ &= ۴۱۶ + ۳۳۷ \\
&= ۴۱۶ + ۲۰۸ + ۱۲۹ \\
&= ۴۱۶ + ۲۰۸ + ۱۰۴ + ۲۵
\end{aligned}
$$

با توجه به اقلام ستاره‌دار در ستون فوق، ملاحظه می‌کنیم که خارج قسمت برابر ۲۸ = ۴ + ۸ + ۱۶ و باقی‌مانده ۲۵ است. این روش مصری ضرب و تقسیم، نه تنها لزوم یادگیری یک جدول ضرب را منتفی می‌کند، بلکه انجام آن روی چرتکه چنان آسان است که روش مزبور تا زمانی که این وسیله مورد استفاده بود، و حتی مدتی بعد از آن، دوام آورد.

هندسه دو پاپیروس

بیست و شش مورد از ۱۱۰ مسألهٔ موجود در پاپیروس‌های مسکو و ریند هندسی هستند. اغلب این مسایل از فرمول‌های مساحی لازم برای محاسبهٔ مساحت زمین‌ها و حجم انبارهای غله ناشی می‌شوند. مساحت دایره مساوی مساحت مربعی که روی ۸/۹ قطر ساخته شود، و حجم استوانهٔ قایم به صورت حاصلضرب مساحت قاعده در طول ارتفاع آن گرفته می‌شود. از تحقیقات جدید، به نظر می‌رسد که مصریان قدیم می‌دانسته‌اند که مساحت هر مثلث با نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع داده می‌شود.

مسأله‌ای عجیب در پاپیروس ریند

گرچه در کشف رمز و بعدها در تفسیر اغلب مسایل پاپیروس ریند مشکل کمی پیش آمد، مسأله‌ای وجود دارد که تفسیر آن چندان قطعی نیست. در این مسأله، مجموعهٔ عجیبی از داده‌ها ظاهر می‌شوند که برگردان آن به صورت زیر است:

صفحه‌ای از پاپیروس ریند

ملک

۷	خانه
۴۹	گربه
۳۴۳	موش
۲۴۰۱	دانهٔ گندم
۱۶۸۰۷	میزان هکات
۱۹۶۰۷	

(هکات = hekat پیمانهٔ غله و میوه بوده است).

به سادگی می‌توان تشخیص داد که این اعداد، پنج توان اول ۷ و مجموعشان هستند. به‌این خاطر، در وهلهٔ اول تصور شد که نویسنده در اینجا قصد ارائهٔ نام‌های نمادیِ خانه، گربه و غیره را برای توان اول، توان دوم و غیره دارد.

موریس کانتور، در ۱۹۰۷ مسأله را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

ملکی متشکل از هفت خانه بود؛ هر خانه هفت گربه داشت؛ هر گربه هفت موش خورد؛ هر موش هفت دانه گندم خورد؛ هر دانهٔ گندم هفت هکات غله تولید می‌کند. خانه‌ها، گربه‌ها، موش‌ها، دانه‌های گندم، میزان غله به هکات، چند تا از اینها در مجموع در این ملک وجود داشتند؟

پس احتمالاً در اینجا مسأله‌ای داریم که به عنوان قسمتی از فرهنگ معمایی دنیا محفوظ مانده است. مسلماً این مسأله در همان زمانی که احمس آن را استنساخ کرده قدیمی بوده است.

مراجع

[۱] هوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمّد قاسم وحیدی اصل.

[۲] درک ج. استرویک، تاریخ فشردهٔ ریاضیات، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و حشمت الله کامرانی.

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری

مدیر داخلی: محمد حسین احمدی

زیر نظر هیئت تحریریه

از انتشارات جانبی دانشگاه آزاد ایران

نشانی: تهران ـ خیابان کریم‌خان‌زند ـ اول آبان شمالی ـ دانشگاه آزاد ایران

فهرست مطالب

عشق می‌ورزم و امید که این فن شریف
چون هنرهای دگر موجب حرمان نشود

هدف این مجموعه کوششی است برای گشودن دریچه‌ای ــ یا شاید روزنه‌ای ــ به‌روی چشمهای جوینده و ذهنهای پوینده، تا مگر آنها را به‌نگریستن و اندیشیدن به‌فراسوی روزنـه برانگیزد.

بارها کسانی، که این هدف با جانشان درآمیخته بود، به‌چنین کوششی دست زده‌اند، و امروز مـا آزمایش را از سرمی‌گیریم، تا چه پیش‌آید.

با این امیدکار را آغاز می‌کنیم که بتوانیم از آنچـه درجهان دانش ریـاضی می‌گـذرد تصویرهایی بـه‌خوانندهٔ ایرانـی عرضه کنیمـ تصویرهایی ساده وروشن ــ که اورا به‌جستجوی دانش و آگاهی برانگیزد.

بدین امید وقتی می‌توان دل بست‌که از یـاری و پشتیبانی صاحبان دانش و اهل قلـم برخوردار شویم و از آسیب بدگمانی و بدگویی برکنار مانیم.

سردبیر

۱

اولین شمارهٔ «آشتی با ریاضیات»، بهار ۱۳۵۶

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، شمارهٔ ۱۵۹، خیابان استاد مطهری، تهران کد پستی ۱۵۷۶۶» ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، شمارهٔ ۱۵۹، خیابان استاد مطهری، تهران کد پستی ۱۵۷۶۶» ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

مسأله‌های جایزه‌دار!

در این شماره، دو مسألهٔ جایزه‌دار مطرح می‌کنیم. پاسخ‌های خود را به دفتر مجله ارسال کنید، به پاسخ‌های صحیح برگزیده جایزه تعلق می‌گیرد.

۱) در یک صفحهٔ شطرنجی 5×5، حداکثر چند اسب را می‌توان طوری قرار داد که هر اسب دقیقاً دو اسب دیگر را تهدید کند؟

۲) بزرگ‌ترین عدد صحیح و مثبت N را با این شرط که «N عدد صحیح مثبت متوالی موجودند که جمع ارقام kـامین عدد ($1 \le k \le N$) بر k بخش‌پذیر است» پیدا کنید.

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

دوچرخه الکتریکی

خودتان بسازید ،
خودتان سوار شوید

اوقات فراغت

آموزش فنی

وسیله نقلیه ایمن

صرفه جویی در هزینه

باشگاه دانش آموزی
مؤسسه عترت

بدون
آلودگی
صدا
خطر
کم جا

ساخت دوچرخه الکتریکی

با باتری قابل شارژ ، بی خطر و قابل استفاده برای یک سرنشین
۱۵ کیلومتر مسافت با هر بار شارژ

الف – محتوای دوره :

۱ – آشنایی با اصول پایه مکانیک و مکانیزم های حرکت و انتقال نیرو

۲ – کسب مهارت فنی لازم ، بدون نیاز به اطلاعات و تجربه قبلی

۳ – آشنایی با کنترل الکترونیکی موتورها

ب – نحوه برگزاری دوره :

۱ – دانش آموزان مقاطع تحصیلی راهنمایی و دبیرستان (به استثنای دوره پیش دانشگاهی) می توانند در این دوره ثبت نام نمایند.

۲ – کلاسها در محل باشگاه در مدتی حدود ۶ ماه و هفته ای یک جلسه برگزار می شود.

۳ – برای پرهیز از اختلال در امور تحصیلی ، حجم روزانه فعالیت های این دوره در طول سال تحصیلی برای حداکثر ۲ ساعت در هفته تنظیم می گردد.

۴ – در مقاطعی از دوره ، نمایشگاههایی از فعالیت های دانش آموزان شرکت کننده تشکیل می گردد.

محل ثبت نام : خیابان ایرانشهر شمالی ، خیابان آذرشهر، پلاک ۳۱، باشگاه دانش آموزی مؤسسه عترت

تلفن : ۸۸۲۳۲۶۹

Design: bbarva@looksmart.com