

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دفترچه سوالات مرحله دوم المپیاد نجوم و اخترفیزیک از

ابتدا تاکنون

(همراه با کلید)



amoozz.ir



sampaadia.ir

- [برای هدایت به صفحه راهکارهای مؤثر برای موفقیت در المپیاد: از برنامه‌ریزی تا مدیریت زمان بر روی این متن کلیک کنید](#)
- [برای هدایت به صفحه امتیاز و تسهیلات کسب مدال در المپیادهای علمی دانش آموزی چیست؟ بر روی این متن کلیک کنید](#)
- [برای هدایت به صفحه نمره کف قبولی المپیاد چیست؟ بر روی این متن کلیک کنید](#)

سایر مطالب مرتبط:

- [آشنایی با المپیاد نجوم و اختر فیزیک](#)
- [تاریخچه المپیاد نجوم و اخترفیزیک در ایران و جهان](#)
- [دانلود سوال و پاسخنامه آزمون‌های مرحله اول و مرحله دوم المپیادهای نجوم و اخترفیزیک ایران](#)
- [آزمون‌های آنلاین مرحله اول المپیاد نجوم و اختر فیزیک](#)
- [نتایج تیم ملی المپیاد نجوم و اخترفیزیک ایران در المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک از ابتدا تا کنون](#)
- [منابع و مراجع المپیاد نجوم و اخترفیزیک](#)
- [سرفصل‌های المپیاد نجوم و اخترفیزیک](#)

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش پژوهان جوان



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله دوم

بیست و یکمین دوره المپیاد نجوم و اخترفیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

تاریخ: ۱۴۰۴ / ۱ / ۲۷ - ساعت: ۸:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه - نوع: تشریحی

استفاده از هر نوع ماشین حساب مجاز است.

توضیحات مهم

- ۱- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۲- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۳- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه میشود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پانویس نمایید.
- ۴- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از قطع سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۵- از مخدوش کردن بارکدها و مربعها در چهارگوشه صفحه در دفترچه پاسخ برگه جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب جزوه یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.
- ۷- در این آزمون کلیه موارد درخواست شده برای هر سوال در قسمت های مستطیلی قرار داده شده است. لطفاً در برگه های پاسخ، دقیقاً مشخص کنید که جواب کدام پرسش را می دهید.
- ۸- این دفترچه شامل ۱۰ سوال و با احتساب جلد ۹ برگ است.

کلیه حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.

آدرس پایگاه اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

جدول ثوابت فیزیکی و ریاضیاتی

مقدار	کمیت	نماد
$1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$	ثابت بولتزمن	k
$3 \times 10^8 \frac{m}{s}$	سرعت نور	c
$1.67 \times 10^{-27} kg$	جرم پروتون	m_p
$9.11 \times 10^{-31} kg$	جرم الکترون	m_e
$1.6 \times 10^{-19} J$	الکترون ولت	eV
2.718 (یا مقدار ذخیره شده در ماشین حساب های مهندسی)	عدد نپر (عدد اویلر)	e

جدول ثوابت نجومی

مقدار	کمیت	نماد
$6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg.s^2}$	ثابت جهانی گرانش	G
$6.63 \times 10^{-34} Js$	ثابت پلانک	h
$5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$	ثابت استفان - بولتزمن	σ
$2.898 \times 10^{-3} m.K$	ثابت وین	W
$3.09 \times 10^{16} m$	پارسک	pc
$1.5 \times 10^{11} m$	واحد نجومی	AU
$9.46 \times 10^{15} m$	سال نوری	Ly
$70 \frac{km}{s.Mpc}$	ثابت هابل	H_0
2.73 K	دمای تابش پس زمینه کیهان	T_{CMB}

جدول ثوابت خورشیدی

نماد	کمیت	مقدار
M_{Sun}	جرم خورشید	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
R_{Sun}	شعاع خورشید	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
L_{Sun}	درخشندگی خورشید	$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$
b_{sun}	ثابت خورشیدی (روشنایی خورشید از زمین)	$1361 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
T_{effSun}	دمای مؤثر سطح خورشید	5779 K
M_{sun}	قدر مطلق خورشید	4.83
m_{sun}	قدرظاهری خورشید	-26.7
BC_{Sun}	تصحیح بولومتریک خورشید	-0.14

جدول ثوابت منظومه‌ی شمسی

نماد	کمیت	مقدار
M_{Earth}	جرم زمین	$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
R_{Earth}	شعاع زمین	6378 km
	دوره تناوب وضعی زمین	86164 s
ε	انحراف محور چرخش زمین نسبت به خط عمود بر دایره البروج	23.5°
$r_{Jupiter}$	شعاع مداری مشتری	5.204 AU
$R_{Jupiter}$	شعاع مشتری	69911 km
$M_{Jupiter}$	جرم مشتری	$1.898 \times 10^{27} \text{ kg}$
r_{IO}	شعاع مداری آیو	421700 km

جدول ثوابت جغرافیایی

نماد	کمیت	مقدار
φ_{Tehran}	عرض جغرافیایی تهران	36°
l_{Tehran}	طول جغرافیایی تهران	51.5°

سوال ۱ - (۲۰ نمره) یک منظومه ی ستاره ای دوتایی غیرگرفتی در فاصله ای بسیار دور رصد شده که از دو ستاره ی متغیر تشکیل شده است. در جدول زیر دوره ی تناوب تغییرات قدر آن ها (P)، قدر در حالت روشنایی بیشینه و اختلاف قدر بیشینه و کمینه ی آن ها را مشاهده می کنید. تغییرات قدر این ستارگان متغیر تنها بر اثر تغییر یکنواخت و خطی درخشندگی آن ستاره حاصل می شود.

ستاره	دوره تناوب تغییر قدر (P) بر حسب روز	قدر در حالت روشنایی بیشینه	اختلاف قدر بیشینه و کمینه
A	۳۵	۹.۳	۱.۸
B	۵۳	۸.۱	۰.۸

الف) در حالت کمینه ی روشنایی سیستم دوتایی، قدر مجموع آن را حساب کنید.

ب) اگر امشب هر دو ستاره در حالت بیشینه ی قدر خود قرار داشته باشند، چند روز بعد برای اولین بار قدر این سیستم به کمترین حالت ممکن می رسد؟

سوال ۲ - (۲۵ نمره) در شبی از شبهای زمستان قطر ماه کامل برابر ۲۹ دقیقه شده و میل ماه برابر ۵ درجه است. می‌خواهیم در شهر آلتای (Alta) نروژ با عرض جغرافیایی ۷۰ درجه با صرف نظر کردن از اثرات شکست یک فیلم به صورت گاه‌گذر (time-laps) از طلوع ماه با یک دوربین عکاسی با مقری سمتی ارتفاعی موتوردار تهیه کنیم.

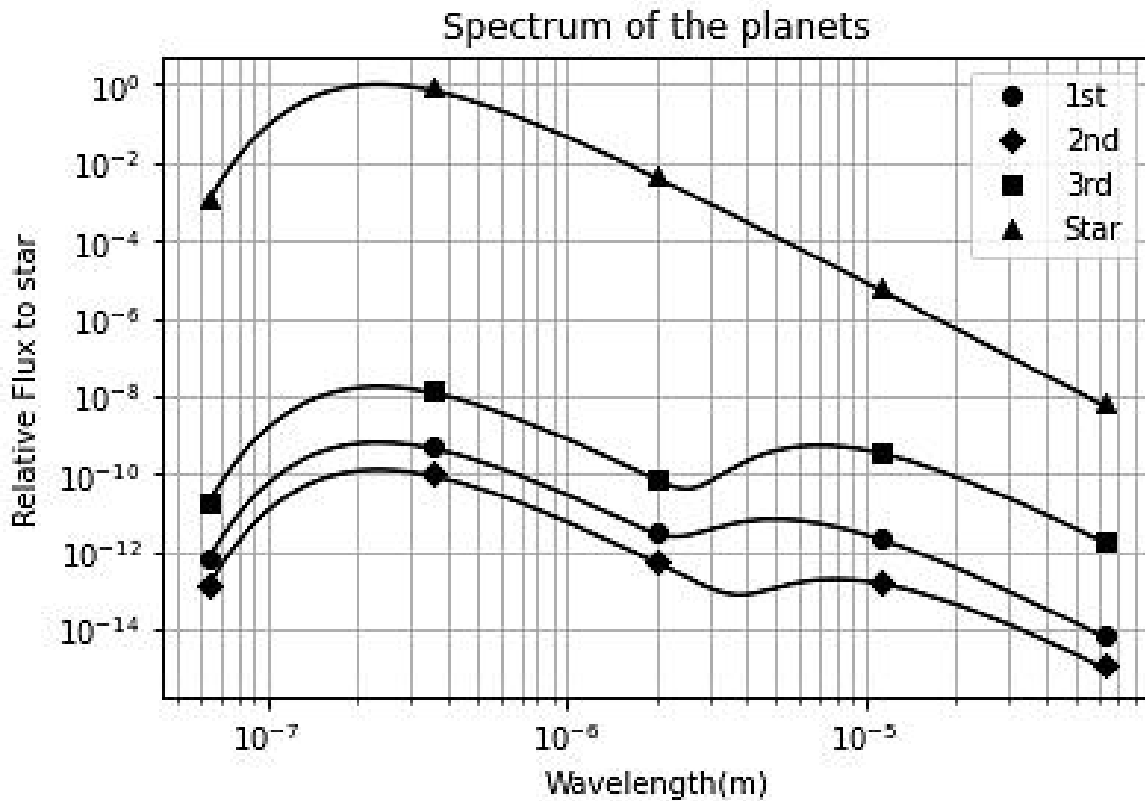
الف) مدت زمانی که طول می‌کشد تا قرص ماه به طور کامل طلوع کند را محاسبه کنید. (اولین تماس قرص ماه با افق تا آخرین تماس قرص ماه با افق)

ب) برای تهیه‌ی این تایم لپس در حین طلوع ماه و در مدت زمانی که در قسمت قبل محاسبه کردید، مرکز ماه همواره در مرکز تصویر قرار خواهد داشت. در طول ثبت تصاویر از ماه، مقدار چرخش مقرر در راستای سمت و مقدار چرخش مقرر در راستای ارتفاع با دقت دقیقه قوسی به ترتیب چند درجه خواهد بود.

سوال ۳ - (۳۰ نمره) یک کاوشگر برای ماموریت رصدی خود به منظومه‌ای ناشناخته سفر کرده است و از آنجایی که طیف‌های سیارات این منظومه اطلاعات بسیار زیادی از سطح سیارات آن به ما می‌دهند، تصمیم به بررسی شار دریافتی از هر سیاره و طیف‌نگاری آن‌ها می‌کند. این کاوشگر ابتدا مشخصات فیزیکی اجزای این منظومه را محاسبه می‌کند. برای ستاره‌ی مرکزی این منظومه، دما برابر 12350 کلوین و شعاع آن برابر 8.12×10^8 متر است. همچنین این کاوشگر ۳ سیاره را رصد می‌کند و اطلاعات آنها را به دست می‌آورد که در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

شماره سیاره	فاصله تا ستاره (واحد نجومی)	شعاع سیاره (کیلومتر)
یک	۰.۸۴۶	۴۳۷۵
دو	۱.۲۹۷	۲۳۹۳
سه	۲.۱۳۴	۸۹۹۱۱

نموداری که در ابتدای صفحه‌ی بعد آمده است، طیف ستاره‌ی مرکزی و طیف سیارات منظومه را نشان می‌دهد. محور عمودی این نمودار شار نسبی نرمال شده به بیشینه‌ی شار ستاره و محور افقی طول موج بر حسب متر است. این طیف از قرص کاملاً روشن هر سیاره ثبت شده و از یک ناحیه‌ی کوچک از مرکز سطح آنها اندازه‌گیری شده است. مدار سیارات دایروی بوده و همچنین سیارات همگی در تعادل گرمایی هستند.



الف) با توجه به نمودار فوق دلیل آنکه طیف ستاره یک قله (بیشینه) دارد اما طیف سیارات دارای دو قله (دو بیشینه‌ی نسبی) است را بیان کنید.

ب) با استفاده از نمودار داده شده، طول موج بیشینه‌ی تابش هر کدام از سیارات را بدست بیاورید.

ج) دمای موثر هر سه سیاره را بدست بیاورید.

د) ضریب آلبدوی هر سه سیاره را محاسبه کنید.

سوال ۴ - (۳۵ نمره) در مقیاس های کهکشانی برای اینکه یک ابر گازی رمبش کند، شرطی روی مقیاس زمانی های آن ابر وجود دارد. دو مقیاس زمان متفاوت وجود دارد که شکل زیر تعریف می شوند:

- **مقیاس زمانی صوت:** زمانی که طول می کشد یک جبهه ی موج صوتی شعاع ابر گازی را به صورت کامل طی کند. این مقیاس به صورت $t_{sound} = \frac{R}{c_s}$ تعریف می شود که R شعاع ابر گازی و c_s سرعت صوت است.

- **مقیاس زمانی سقوط آزاد:** زمانی که طول می کشد یک ابر گازی بدون وجود هیچ مقاومتی کاملاً در خودش رمبش گرانشی انجام دهد. رابطه ی این مقیاس زمانی به شکل $t_{ff} \propto \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$ است که ρ چگالی این ابر و G ثابت جهانی گرانش است. (فرض کنید ابر گازی یکنواخت است)

حال رمبش در صورتی اتفاق می افتد که مقیاس زمانی سقوط آزاد از مقیاس زمانی صوت کمتر باشد. در غیر این صورت انرژی جنبشی ذرات مانع از رمبش ابر می شود.

الف) برای بدست آوردن ضریب نسبت مقیاس زمانی سقوط آزاد، فرض کنید یک ذره در لبه ابر هنگام سقوط آزاد در حال طی کردن یک مدار بیضوی با خروج از مرکز بسیار نزدیک به ۱ باشد. در این صورت نصف دوره تناوب حرکت در مدار برابر زمان سقوط آزاد خواهد شد. با استفاده از این فرض اگر رابطه ی مقیاس زمانی سقوط آزاد به صورت $t_{ff} = k \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$ باشد، مقدار k را به دست آورید.

ب) فرض کنید این ابر گازی از گاز کامل با دمای ثابت T تشکیل شده است که تمامی ذرات آن دارای جرم متوسط \bar{m} هستند. اگر فرض کنیم سرعت صوت به شکل زیر داده شده باشد:

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

مقیاس زمانی صوت را بر حسب پارامترهای فیزیکی مسئله برای این ابر بدست بیاورید. (P فشار گاز و ρ چگالی ابر گازی است).

ج) می‌دانیم که چگالی میانگین جهان برابر ۶ پروتون بر متر مکعب است و همچنین با توجه به تابش پس زمینه‌ی کیهان دمای میانگین جهان برابر ۲.۷۳ کلوین است. اگر در همین شرایط با چگالی یکنواخت یک ابر گازی قادر به رمبش کردن می‌بود، حداقل شعاع آن ابر بر حسب کیلوپارسک چقدر می‌شد؟ (همه ذرات ابر گازی را هیدروژن در نظر بگیرید).

سوال ۵ - (۴۵ نمره) بابک از صورت فلکی جبار و سحابی‌های زیبای اطراف آن یک تصویر زیبا و بی‌بدیل را ثبت کرده است که در صفحه‌ی بعد قرار داده شده است. این تصویر حاصل مجموع ۶ عکس با زمان نوردهی کوتاه و با فواصل زمانی ثابت در یک شب رصدی است. نقاطی که با علامت فلش (←) در تصویر مشخص شده‌اند، ماهواره‌ای مزاحم را نشان می‌دهند که در تمامی ۶ عکس ثبت شده‌اند. این ماهواره به دور زمین در گردش است. در تصویر شبکه بندی (Gridline) سیستم مختصات استوایی (خطوط هم میل و هم بعد) به همراه مقیاس رسم شده‌اند و همچنین خطوط صورت فلکی جبار در تصویر مشخص شده‌اند. با توجه به تصویر به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) دوره‌ی تناوب گردش این ماهواره به دور زمین چقدر است؟

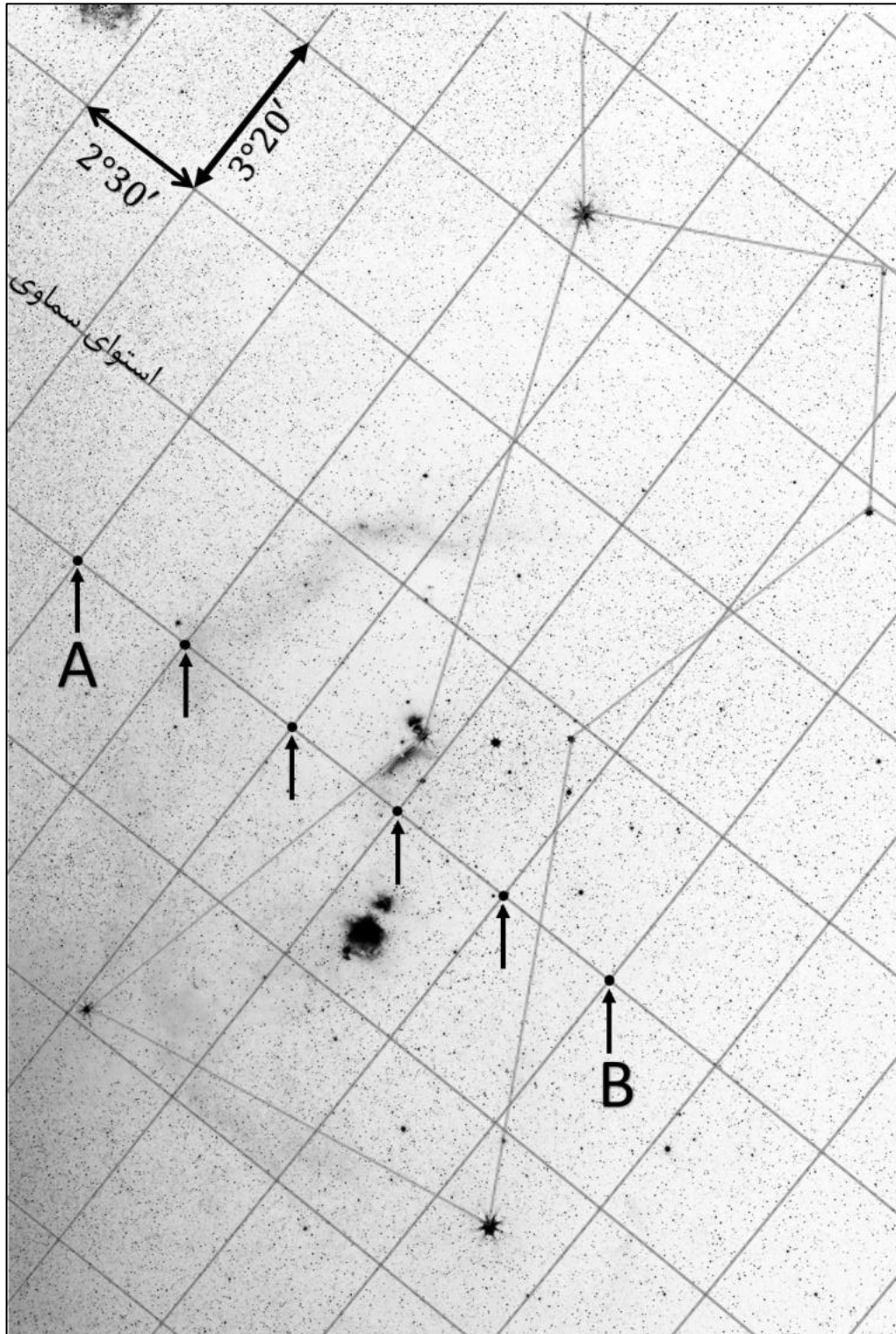
ب) ارتفاع ماهواره از سطح زمین چند کیلومتر است؟

ج) فواصل زمانی بین هر عکس را با دقت ثانیه بیابید.

د) بین تصویری که ماهواره در آن در موقعیت A (روی شکل) قرار داشته و تصویری که ماهواره در آن در

موقعیت B (روی شکل) قرار داشته، کدام عکس زودتر تهیه شده است؟

هـ) اگر هنگام تهیه آخرین عکس سمت و ارتفاع ماهواره به ترتیب ۲۵۰ و ۲۳ درجه باشد، عرض جغرافیایی ناظر را پیدا کنید.



سوال ۶ - (۵۰ نمره) ناظری بر روی یک سیاره‌ی کروی متقارن با توزیع جرم یکنواخت، جسمی را مشاهده می‌کند که بر اثر نیروی گرانش سیاره در حال حرکت در مداری بیضوی است. در لحظه‌ای که جسم در سرسوی ناظر قرار داشته ناظر متوجه می‌شود که نسبت سرعت شعاعی به سرعت مماسی جسم (نسبت به مرکز جرم سیاره) بیشینه است. این جسم هنگامی که به موقعیت اوج مداری خود می‌رسد از دید ناظر در حال غروب قرار دارد. او می‌داند که این جسم حتماً با سیاره برخورد خواهد کرد. با فرض اینکه این سیاره حرکت وضعی ندارد، خروج از مرکز مدار جسم به دور سیاره در چه بازه‌ای می‌تواند باشد.

سوال ۷ - (۶۰ نمره) خوشه‌ای کهکشانی با ساختاری نسبتاً کروی از سه جزء اصلی زیر تشکیل شده است.

- هزاران کهکشان درخشان
- گاز هیدروژن یونیزه
- ماده‌ی تاریک

این سه جزء با یکدیگر به تعادل رسیده‌اند. در این خوشه‌ی کهکشانی مجموع جرم تمامی کهکشان‌هایش $M = 2 \times 10^{13} M_{\odot}$ است و قطر زاویه‌ای این خوشه‌ی کهکشانی ۳۰ دقیقه‌ی قوسی است.

قرمزگرایی ۱۰ کهکشان این خوشه در جدول زیر داده شده است.

کهکشان‌های فوق به طور تصادفی از نواحی مختلف خوشه انتخاب شده‌اند.

کهکشان	قرمزگرایی	کهکشان	قرمزگرایی
Xyphos-17	0.1136	Tarsis-Ω12	0.1050
Veltrion-5	0.1101	Quintara-9B	0.1170
Zorvexia Prime	0.1175	YX-405 Nebus	0.1181
N-GC 8472	0.1126	Vorathis-A27	0.1075
Ophidion-3X	0.1064	Draconis-Σ14	0.1123

(اسامی کهکشان‌ها توسط هوش مصنوعی تولید شده‌اند)

الف) فاصله‌ی این خوشه تا زمین چند مگاپارسک است؟

ب) شعاع این خوشه‌ی کهکشانی چند مگاپارسک است؟

ج) جرم کل این خوشه را بر حسب جرم خورشید محاسبه کنید.

د) آهنگ تولید انرژی به صورت اشعه‌ی X از گاز هیدروژن داغ و یونیزه در واحد حجم از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\epsilon = 1.42 \times 10^{-40} \times n_e^2 \times T^{\frac{1}{2}} \left(\frac{W}{m^3} \right)$$

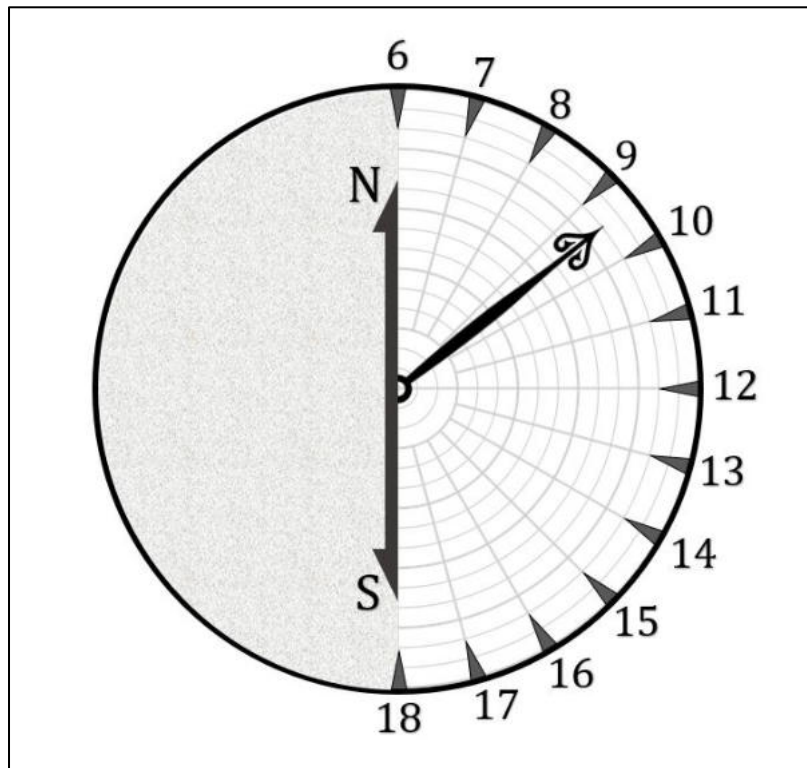
که در آن T دمای گاز هیدروژن یونیزه بر حسب کلوین و n_e چگالی عددی الکترون‌های آزاد بر حسب تعداد $\frac{m^3}$ است.

شار دریافتی اشعه X از این خوشه‌ی کهکشانی در سطح زمین برابر $f = 10^{-15} \frac{W}{m^2}$ اندازه‌گیری شده است.

در این قسمت با فرض اینکه دمای گاز هیدروژن یونیزه ۷۰ میلیون کلوین باشد، جرم کل گاز هیدروژن یونیزه موجود در خوشه‌ی کهکشانی را بر حسب جرم خورشید محاسبه کنید.

ه) چند درصد از جرم کل خوشه از کهکشان‌های درخشان، چند درصد از گاز هیدروژن یونیزه و چند درصد از ماده‌ی تاریک تشکیل شده است؟

سوال ۸ - (۶۰ نمره) یک ساعت آفتابی به شکلی طراحی کرده ایم که از دو عقربه‌ی عمود بر همدیگر و یک دایره‌ی مدرج ساخته شده است. دایره‌ی مدرج روی سطح زمین صاف قرار می‌گیرد. ساختار مکانیکی این ساعت آفتابی به نحوی است که عقربه‌ی اول همواره به سوی خورشید نشانه می‌رود (از لحظه‌ی طلوع تا غروب). عقربه‌ی دوم که عمود بر عقربه‌ی اول است مقید است تا همیشه روی سطح زمین بماند. عقربه‌ها به مرکز دایره متصل‌اند. می‌خواهیم زاویه‌ی سمت عقربه‌ای که روی زمین قرار دارد را به عنوان معیاری از گذر زمان در نظر بگیریم و زمان را با آن بسنجیم.



شکل فوق نمایی از دایره‌ی مدرج این ساعت آفتابی به همراه عقربه‌ی دوم را در زمانی تصادفی نشان می‌دهد. حروف N و S راهنمای ما جهت قرار دادن صحیح جهت این صفحه بر روی زمین است. جهت N به سمت شمال قرار خواهد گرفت. عقربه‌ی دوم همیشه در قسمت مدرج خواهد ماند.

الف) برای یک عرض جغرافیایی دلخواه (φ) در روز اعتدال بهاری، رابطه‌ای برای سمتی که عقربه‌ی دوم به آن نشانه رفته را تنها بر حسب زاویه ساعتی خورشید (H_{\odot}) و عرض جغرافیایی (φ) بدست بیاورید.

ب) در قسمت قبل در ساعت ۱۲ ظهر سمت عقربه‌ی دوم چه عددی را نشان می‌دهد؟

ج) در یک روز دلخواه که خورشید دارای میل δ_{\odot} است، این سمت را بر حسب زاویه ساعتی خورشید، میل خورشید و عرض جغرافیایی منطقه بدست آورید.

د) تفاوت زمانی که این ساعت در روز ۱۳ آبان با ساعت رسمی در شهر تهران هنگام ساعت ۳ بعد از ظهر دارد را محاسبه کنید. تعدیل زمان در این روز برابر ۱۶.۵ دقیقه است.

ه) با توجه به اختلاف به دست آمده در قسمت قبل به عنوان یک منجم آیا استفاده از این ساعت آفتابی را به دیگران پیشنهاد می‌کنید؟ کفایت با بله یا خیر پاسخ دهید.

سوال ۹ - (۶۰ نمره) کهکشان خورشیدش درخشان ترین کهکشانی است که از سیاره شازده کوچولو در منظومه ی فراخورشیدی فناپذیران در آسمان شب می درخشد. شازده کوچولو می خواهد سوار بر سفینه خود شود و فاصله ی این کهکشان تا سیاره خود را حساب کند و به اطلاع ساکنین سیاره خود برساند. سفینه ی او با سرعت ثابت v حرکت می کند و کوتاه ترین فاصله را در این جهان تخت انرژی تاریک غالب می پیماید.

الف) در طی مدت زمان کوتاه Δt سفینه چه مسیری را در دستگاه مختصات همراه طی کرده است؟ (از تغییر ضریب مقیاس $a(t)$ در این مدت صرف نظر کنید).

شازده کوچولو در زمان t_0 ($a(t_0) = 1$) شروع به حرکت می کند و پس از گذشت مدت زمان $t_H = \frac{1}{H_0}$ به سیاره خود باز می گردد. (شازده کوچولو بلافاصله پس از رسیدن به خورشید شب، به سمت سیاره خود باز می گردد).

ب) شازده کوچولو در چه زمانی به کهکشان خورشیدش رسیده است؟

ج) او فکر می کرد که ممکن است کهکشان هایی باشند که او هرگز نتواند به آنها برسد؟ در صورت وجود چنین کهکشان هایی، ضمن توضیح علت آن، فاصله نزدیک ترین آنها را در لحظه $t = t_0$ از سیاره شازده کوچولو حساب کنید.
راهنمایی:

دستگاه مختصات همراه یک سیستم مختصاتی است که با انبساط جهان هماهنگ است و کهکشان ها در این دستگاه موقعیت ثابتی داشته و تنها با گذر زمان، فاصله بین آنها افزایش می یابد.

سوال ۱۰ - (۶۵ نمره) در سال ۱۶۷۱ میلادی مصادف با ۱۰۴۹ هجری شمسی، منجم دانمارکی اوله رومر (Ole Rømer) رصدهایی از قمر آیو مشتری انجام داد و با تحلیل آن‌ها به یکی از اولین کسانی تبدیل شد که سرعت نور را اندازه گرفته است. در این سوال می‌خواهیم به بررسی روش او پردازیم.

رومر دریافت که اختلاف زمانی رصد پایان دو اختفای پیاپی آیو پشت مشتری کمی متفاوت از مقداری تئوری آن بر پایه‌ی یافته‌های علم نجوم و مکانیک سماوی است و حدس زد که این اختلاف به دلیل این است که نور سرعتی محدود دارد و طول می‌کشد مسیر آیو تا ناظر زمینی را بپیماید.

زمان دو رصد پایان اختفای متوالی توسط رومر به تاریخ شمسی و به همراه زمان دقیق آن در جدول زیر آمده است:

ساعت	تاریخ	
۲۳:۴۳:۱۹	۲۱ مهر	رصد اول
۱۸:۱۳:۱۸	۲۳ مهر	رصد دوم

همچنین تاریخ مقابله‌ی مشتری در سال ۱۰۴۹ هجری شمسی در روز ۲۷ بهمن و ساعت ۲۱:۲۴:۱۴ بوده است.

در نظر بگیریید زمین و مشتری در مدارهای دایروی و هم صفحه به دور خورشید در گردش‌اند و آیو نیز در مدار دایروی به دور مشتری و هم صفحه با دایره‌البروج در گردش است و اندازه‌ی آیو در مقابل مشتری قابل صرف نظر کردن است. اگر در نظر بگیریم ناظر دقیقاً در مرکز زمین باشد آنگاه:

الف) اختلاف طول مسیری که نور طی می‌کند تا از آیو در موقعیت پایان اختفا به ناظر زمینی برسد برای این دو رصد چقدر است؟

ب) اختلاف زمانی بین دو موقعیت پایان اختفا از دید ناظر زمین بدون در نظر گرفتن محدودیت سرعت نور در این دو رصد به طور دقیق چند ثانیه باید باشد؟

ج) با توجه به اختلاف زمانی بین قسمت ب و زمان رصدهای انجام شده توسط اوله رومر، سرعت نور را محاسبه کنید.



باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «لام نهمین (ره)»

پاسخنامه تشریحی

بیست و یکمین دوره المپیاد نجوم و اخترفیزیک

نسخه ی اولیه

کمیته ی علمی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

فروردین ماه ۱۴۰۴

از اساتید و دانش پژوهان گرامی دعوت می شود تا نظرات و پیشنهادات خود را به نشانی الکترونیکی کمیته ی المپیاد نجوم ایران ارسال نمایند.

IRAstronomyCommittee@gmail.com

ما را در شبکه های اجتماعی دنبال کنید. @IrAstronomyCommittee

سوال ۱) دوتایی متغیر - (۲۰ نمره)

الف) برای اینکه روشنایی مجموع سیستم کمینه باشد یا به عبارتی قدر سیستم بیشینه باشد، باید قدر هر دو مولفه بیشینه باشد.

$$m_1 = 9.3 + 1.8 = 11.1 \quad m_2 = 8.1 + 0.8 = 8.9$$

حال باید قدر مجموع را در حالت فوق حساب کنیم:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \rightarrow \frac{b_1}{b_2} = 10^{\frac{m_1 - m_2}{-2.5}} \rightarrow \frac{b_1}{b_2} = 10^{\frac{11.1 - 8.9}{-2.5}}$$

برای محاسبه‌ی قدر مجموع در رابطه‌ی قدر، قدر مجموع را با قدر ستاره‌ی دوم در رابطه‌ی قدر قرار می‌دهیم.

$$m_t - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{b_1 + b_2}{b_2}\right) \rightarrow m_t = m_2 - 2.5 \log\left(\frac{b_1}{b_2} + 1\right) \rightarrow m_t = 8.76$$

ب)

با توجه به تغییر یکنواخت قدر دو مولفه، مولفه‌ی اول در زمان مضارب فرد $\frac{35}{2}$ و مولفه‌ی دوم در زمان مضارب فرد $\frac{53}{2}$ به قدر کمینه خود می‌رسند. برای اینکه قدر سیستم کمینه شود باید قدر هر دو کمینه شود پس باید مضاربی فرد برای $\frac{35}{2}$ و $\frac{53}{2}$ پیدا کنیم تا این دو زمان با هم برابر شوند. به عبارت دیگر برای محاسبه‌ی زمان خواسته شده می‌توانیم به سادگی ک.م.م دو عدد $\frac{35}{2}$ و $\frac{53}{2}$ را پیدا کنیم.

ک.م.م این دو عدد برابر است با: **927.5 روز**

* هرگونه توضیح منطقی و رسیدن به عدد فوق نیز صحیح می‌باشد.

محاسبات سوال ۱:

$9.3 + 1.8$	$= 11.1$
$8.1 + 0.8$	$= 8.9$
$10^{\frac{11.1 - 8.9}{-2.5}}$	$= 0.1318256739$
$8.9 - 2.5 \log\left(0.1318256739 + 1\right)$	$= 8.765551147$
$\frac{(35 \cdot 53)}{2}$	$= 927.5$

سوال ۲) عکاسی از ماه در شهر آلتا - (۲۵ نمره)

الف) باید اختلاف زمانی هنگامی که ارتفاع مرکز ماه $\frac{29}{2}$ - دقیقه قوسی است را با زمانی که ارتفاع مرکز ماه $\frac{29}{2}$ دقیقه قوسی است را حساب کنیم. با استفاده از مثلث PZX و رابطه‌ی کسینوس‌ها رابطه‌ای برای زاویه ساعتی ماه به دست می‌آوریم:

$$\cos(90 - a) = \cos(90 - \varphi) \cos(90 - \delta) + \sin(90 - \varphi) \sin(90 - \delta) \cos(H)$$

$$\sin(a) = \sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \cos(H)$$

$$\cos(H) = \frac{\sin(a) - \sin(\varphi) \sin(\delta)}{\cos(\varphi) \cos(\delta)}$$

طبق اطلاعات مسئله: $\delta = 5^\circ$, $\varphi = 70^\circ$. با جایگذاری مقادیر ارتفاع و اطلاعات مسئله در عبارت فوق داریم:

$$H_1 = -104.64^\circ, H_2 = -103.18^\circ$$

در نتیجه اختلاف زمان بین این دو موقعیت برابر است با:

$$\Delta t = \frac{104.64 - 103.18}{15} \times 60 = 5.84 \text{ min}$$

ب) چیزی که سوال در این قسمت خواسته در اصل مقدار تغییر ارتفاع و تغییر سمت ماه در مدت زمان گفته شده در قسمت قبل هست:

تغییر ارتفاع برابر است با:

$$\Delta a = a_2 - a_1 \rightarrow \Delta a = \frac{29}{2} - \left(-\frac{29}{2}\right) \rightarrow \Delta a = 29'$$

برای محاسبه‌ی تغییرات سمت در مثلث PZX رابطه‌ای برای سمت به دست آورده سپس در دو موقعیت گفته شده سمت‌ها را محاسبه کرده و در نهایت از هم کم می‌کنیم. برای تنوع از رابطه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(A)}{\sin(90 - \delta)} = \frac{\sin(H)}{\sin(90 - a)} \rightarrow \sin(A) = \frac{\cos(\delta)}{\cos(a)} \sin(H)$$

با جایگذاری اعداد با استفاده از اطلاعات مسئله، فرضیات و اعداد به دست آمده از قسمت قبل داریم:

$$A_1 = 74.55, A_2 = 75.92$$

$$\Delta A = (75.92 - 74.55) \times 60 \rightarrow \Delta A = 82.2'$$

محاسبات سوال ۲:

$\frac{29}{2}$	= 14.5
$\cos^{-1}\left(\frac{\sin\left(-\frac{14.5}{60}\right) - \sin(70)\sin(5)}{\cos(70)\cos(5)}\right)$	= 104.640448
$\cos^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{14.5}{60}\right) - \sin(70)\sin(5)}{\cos(70)\cos(5)}\right)$	= 103.1789873
$\frac{104.64 - 103.18}{15} \cdot 60$	= 5.84
$\sin^{-1}\left(\frac{\cos(5)}{\cos\left(-\frac{14.5}{60}\right)} \cdot \sin(103.18)\right)$	= 75.92120648
$\sin^{-1}\left(\frac{\cos(5)}{\cos\left(\frac{14.5}{60}\right)} \cdot \sin(104.64)\right)$	= 74.54924297
$(75.92 - 74.55) \cdot 60$	= 82.2

سوال ۳) تابش سیارات - (۳۰ نمره)

الف) طیفی که از سیارات می بینیم در واقع ترکیبی از طیف ستاره‌ی مرکزی است که نور آن را بازتاب کرده‌اند و همچنین شامل طیف تابش خود سیاره است که پس از جذب انرژی ستاره مرکزی مقداری تابش داشته است. (اگر دقت کنید طول موج یکی از قله ها همواره با ستاره‌ی مرکزی برابر است که نشان دهنده سهم بازتاب طیف است و قله‌ی دیگر که متفاوت است نمایانگر تابش خود سیاره می باشد).

ب) طول موج بیشینه سه سیاره را از روی نمودار می خوانیم که مقادیر آنها برابر با جدول زیر است:

شماره سیاره	طول موج بیشینه تابش (متر)
یک	5×10^{-6}
دو	8×10^{-6}
سه	7×10^{-6}

ج) از رابطه‌ی وین داریم:

$$T_{eff} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{\lambda_{\text{بیشینه تابش}}}$$

شماره سیاره	دمای موثر (کلوین)
یک	579.60
دو	362.25
سه	414.00

د) برای محاسبه‌ی آلبدو داریم:



$$\sigma T_{star}^4 \times \frac{4\pi R_{star}^2}{4\pi d^2} \times \pi R_{planet}^2 (1 - A_{planet}) = \sigma T_{eff}^4 \times 4\pi R_{planet}^2$$

$$\Rightarrow 1 - A = \left(\frac{T_{eff}}{T_{star}}\right)^4 \times 4 \times \left(\frac{d}{R_{star}}\right)^2$$

با جایگذاری اطلاعات مسئله و مقادیر به دست آمده در قسمت آبدوی سیارات به صورت زیر به دست می‌آیند:

شماره سیاره	ضریب آبدو
یک	0.526
دو	0.835
سه	0.215

محاسبات سوال ۳:

$\frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}}$	$= 579.6$ 
$\frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-6}}$	$= 362.25$ 
$\frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-6}}$	$= 414$
$1 - \left(\left(\frac{579.6}{12350} \right)^4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{0.846 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{8.12 \cdot 10^8} \right)^2 \right)$	$= 0.5260671046$
$1 - \left(\left(\frac{362.25}{12350} \right)^4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1.279 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{8.12 \cdot 10^8} \right)^2 \right)$	$= 0.834713537$
$1 - \left(\left(\frac{414}{12350} \right)^4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2.134 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{8.12 \cdot 10^8} \right)^2 \right)$	$= 0.2150304409$

سوال (۴) مقیاس های زمانی ابر گازی - (۳۵ نمره)

الف) با توجه به فرض مسئله، رابطه ی دوره تناوب در مدار بیضوی را نوشته و نصف آن را برابر با زمان سقوط آزاد قرار می دهیم.

$$t_{ff} = \frac{t_{orbit}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}$$

که a نیم قطر اطول مدار است که برابر نصف شعاع ابر میشود. چگالی ابر گازی $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ خواهد بود که با جایگذاری داریم:

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{\pi^2}{G \times \frac{4\pi}{3} R^3 \rho} \left(\frac{R}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \times \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \rightarrow k = \sqrt{\frac{3\pi}{32}} = 0.54$$

ب)

از معادله گاز کامل داریم:

$$PV = nRT$$

که اگر به جای بیان مولی به بیان تعداد ذره بنویسیم به شکل زیر میشود:

$$PV = Nk_B T$$

که k_B ثابت بولتزمن و N تعداد ذرات است. پس فشار برابر میشود با $P = \frac{N}{V} k_B T$

حالا میتوانیم نسبت تعداد در حجم را به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{N}{V} = \frac{N \times m}{V \times m} = \frac{M}{V} \times \frac{1}{m} = \frac{\rho}{m}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\rho k_B T}{m} \rightarrow \frac{dP}{d\rho} = \frac{k_B T}{m}$$

چون دما و جرم را ثابت گرفتیم در مشتق ظاهر نمی شوند.

$$\Rightarrow c_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

$$\rightarrow t_{sound} = R \sqrt{\frac{m}{k_B T}}$$

ج) برای حالت مرزی باید t_{ff} برابر با t_{sound} باشد. با استفاده از اعداد داده شده در مسئله مقدار شعاع به صورت زیر محاسبه می شود:

$$R \sqrt{\frac{m}{k_B T}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G}} \times \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{3\pi \times k_B \times T}{32G \times \rho \times m}} \rightarrow R = 3.2 \text{ kpc}$$

محاسبات سوال ۴:

$$\sqrt{\frac{3\pi}{32}} = 0.5427009409$$

$$\sqrt{\frac{3\pi \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 2.73}{32 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot (1.67 \cdot 10^{-27})^2}} = 9.97071788 \times 10^{19}$$

$$\frac{9.97071788 \times 10^{19}}{3.09 \cdot 10^{16}} \cdot 10^{-3} = 3.226769539$$

سوال ۵) جبار و ماهواره – (۴۵ نمره)

با توجه به موقعیت ماهواره در ۶ عکس می بینیم که میل ماهواره ثابت مانده است. از طرفی زمان بین عکس ها یکسان است. اگر ماهواره نسبت به ناظر حرکت می کرد در بازه های زمانی ثابت حتما میل آن تغییر می کرد. پس می توان نتیجه گرفت که موقعیت ماهواره نسبت به ناظر ثابت است و بنابراین این ماهواره یک ماهواره ی GEO یا زمین ثابت است!

الف) دوره ی تناوب این ماهواره برابر دوره تناوب گردش وضعی کره ی زمین است. طبق جدول ثوابت:

$$T = 86164 \text{ s}$$

ب) برای محاسبه ی ارتفاع ماهواره از سطح زمین کافی است تا از رابطه ی دوره تناوب و شعاع مداری استفاده کنیم.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_E} r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_E}{4\pi^2} T^2}$$

با استفاده از عدد به دست آمده از قسمت قبل و با توجه به جرم زمین در جدول ثوابت شعاع مداری برابر است با:

$$r = 42150 \text{ km}$$

با توجه به مقدار شعاع زمین در جدول ثوابت ارتفاع ماهواره از سطح زمین به صورت زیر محاسبه می شود:

$$h = r - R_E \rightarrow h = 35772 \text{ km}$$

ج) اختلاف بعد دو موقعیت متوالی ماهواره در واقع اختلاف زاویه ساعتی ستاره های تصویر و در واقع میزان چرخش آسمان (زمین) در فاصله زمانی بین هر دو عکس می باشد. با توجه به شبکه بندی تصویر و مقیاس آن، میزان چرخش آسمان در دو عکس متوالی برابر است با:

$$\Delta\theta = 2^\circ 30'$$

فاصله ی زمانی بین دو عکس برابر است با:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \rightarrow \Delta t = \frac{2^\circ 30'}{\frac{360}{86164}} \rightarrow \Delta t = 9.97 \text{ min} = 9': 58''$$

د) اگر همانند موقعیت این ماهواره، نقطه ای ثابت، جایی در حوالی استوای سماوی در آسمان در نظر بگیریم با گذر زمان نقاطی از آسمان که بعد بیشتری دارند زودتر از نقطه رد خواهند شد، بنابراین می توان گفت:

تصویری که ماهواره در آن در موقعیت **A** قرار داشته زودتر ثبت شده است.

هـ) با توجه به موقعیت استوای سماوی روی شکل و درجه بندی میل می فهمیم که میل ماهواره برابر است با:

$$\delta = -3^{\circ}20'$$

با داشتن سمت و ارتفاع می توانیم با استفاده از مثلث PZX مقدار عرض جغرافیایی (φ) را محاسبه کنیم:

با استفاده از رابطه ی کسینوس ها داریم:

$$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - a) \cos(90 - \varphi) + \sin(90 - a) \sin(90 - \varphi) \cos(A)$$


$$\sin(\delta) = \sin(a) \sin(\varphi) + \cos(a) \cos(\varphi) \cos(A)$$

مقدار A را برابر سمت غربی یعنی 110° ، مقدار ارتفاع (a) برابر 23 درجه و میل $\delta = -3^{\circ}20'$ است.

با جایگذاری و حل معادله ی فوق مقدار عرض جغرافیایی به دست می آید:

$$\varphi =$$

محاسبات سوال ۵:

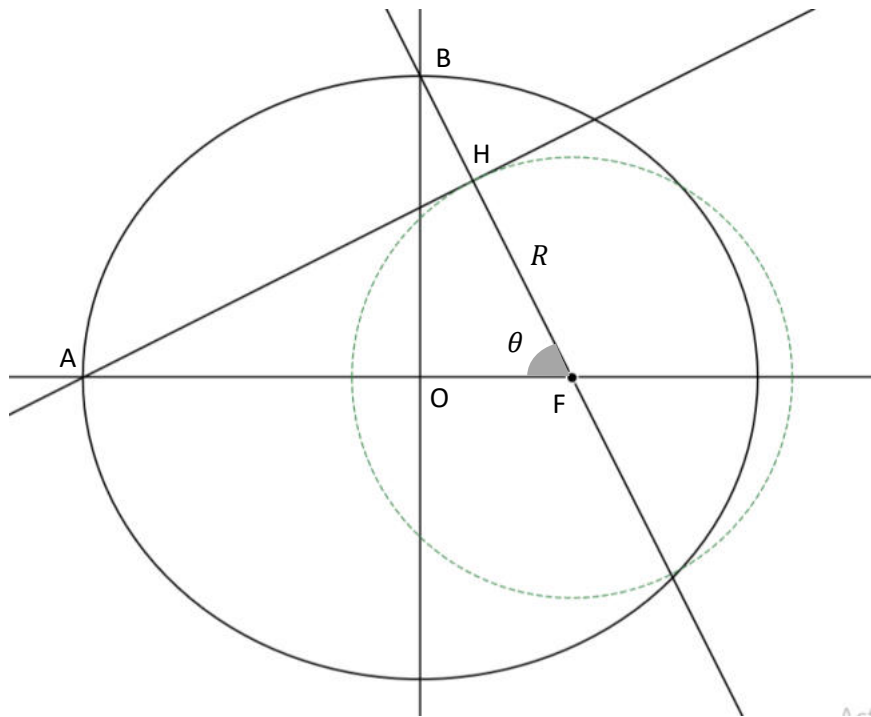
$\sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2} \cdot 86164^2 \cdot 10^{-3}}$	$= 42149.98045$
$\boxed{42149.98045}_{\text{ans}} - 6378$	$= 35771.98045$
$\frac{2 + \frac{30}{60}}{\frac{360}{86164}} \cdot \frac{1}{60}$	$= 9.972685185$ 
$360 - 250$	$= 110$

سوال ۶) مدار بیضوی - (۵۰ نمره)

الف) بیشترین نسبت سرعت شعاعی به مماسی در مدار متعلق به لحظه ای است که ماهواره بر روی نیم قطر کوچک و در فاصله ای برابر با نیم قطر بزرگ از کانون قرار گرفته است. با توجه به اینکه نقطه اوج مدار در لحظه غروب مشاهده شده است شعاع سیاره را میتوان بر حسب خروج از مرکز محاسبه کرد.

$$FOB : \cos \theta = \frac{ae}{a} = e$$

$$AHF : R = a(a + e) \cos \theta = ae(1 + e)$$



برای اینکه برخورد بین جسم و سیاره وجود داشته باشد، شعاع سیاره باید بیشتر از حضيض مدار باشد.

$$a(1 - e) < R \Rightarrow 1 - e < e(1 + e) \Rightarrow 0 < e^2 + 2e - 1$$

$$\Rightarrow e > \sqrt{2} - 1 \quad \text{یا} \quad e < -\sqrt{2} - 1$$

با توجه به اینکه خروج از مرکز یک عدد مثبت شرط دوم غیر قابل قبول است. همچنین شعاع سیاره نباید بیش از طول FB باشد تا ناظر بتواند نقطه ی B را مطابق ادعای سوال در سرسوی خود ببیند.

$$R < a \Rightarrow e(1+e) < 1 \Rightarrow e^2 + e - 1 < 0$$

$$\Rightarrow e < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{و} \quad e > \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

با توجه به اینکه خروج از مرکز یک عدد مثبت شرط دوم بدیهی است. در نهایت بازه قابل قبول برای خروج از مرکز عبارت است از

$$\sqrt{2}-1 < e < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{به تقریب} \quad \rightarrow \quad \mathbf{0.414 < e < 0.618}$$

سوال ۷) خوشه کهکشانی - (۶۰ نمره)

الف) با توجه به این که قرمزگرایی کهکشان ها ناشی از انبساط هابلی و سرعت خاصه کهکشان ها است و همچنین با فرض تصادفی بودن سرعت خاصه کهکشان ها، می توان با میانگین گیری از مقادیر قرمزگرایی، سرعت ناشی از انبساط هابلی و با استفاده از قانون هابل فاصله ی آن را به دست آورد:

$$\langle z \rangle = 0.1120$$

$$d = \frac{cz}{H_0} = \frac{c\langle z \rangle}{H_0} \rightarrow d = 480 \text{ Mpc}$$

ب) با توجه به قطر زاویه ای ($\Delta\theta$) خوشه که در مسئله آمده می توان شعاع خوشه را حساب کرد:

$$R = \frac{d\Delta\theta}{2} \approx 2.1 \text{ Mpc}$$

ج) برای محاسبه ی جرم خوشه چون تعادل ویرالی برقرار است داریم:

$$\langle U \rangle + 2\langle K \rangle = 0$$

برای انرژی جنبشی داریم:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} M \langle (v' - \langle v \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{2} M \sigma_v^2$$

حال با توجه به این که سرعت همسان گرد است داریم:

$$\sigma_{v_r} = c\sigma_z, \sigma_v^2 = 3\sigma_{v_r}^2 \rightarrow \langle K \rangle = \frac{3}{2} M c^2 \sigma_z^2$$

همچنین برای انرژی پتانسیل داریم:

$$\langle U \rangle = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

$$\sigma_z^2 = 1.99 \times 10^{-5} \rightarrow \sigma_z = 0.0044$$

$$M = \frac{5Rc^2\sigma_z^2}{G} \rightarrow M_{tot} = 4.25 \times 10^{15} M_\odot$$

د) با توجه به مقادیر داده شده در صورت سوال و رابطه ی داده شده در این قسمت می توان نوشت:

$$L_X = f \cdot 4\pi d^2 = \epsilon \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow \frac{\epsilon}{3} R^3 = f d^2$$

$$\epsilon = \frac{3fd^2}{R^3} = 2.41 \times 10^{-33} \frac{W}{m^3}$$

$$\epsilon = 1.42 \times 10^{-40} \times n_e^2 \times T^{\frac{1}{2}} \rightarrow n_e = 45.09 \text{ m}^{-3}$$

برای محاسبه جرم گاز داریم:

$$M_{HII} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot n_H m_H$$

به دلیل اینکه گاز یونیزه است می توان نوشت:

$$n_H = n_e$$

بنابراین:

$$M_{HII} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot n_e m_H \rightarrow M_{HII} = 4.27 \times 10^{13} M_{\odot}$$

(هـ)

برای محاسبه درصد جرم هر قسمت بدین گونه عمل می کنیم:

با توجه به قسمت قبل و قسمت ج سهم گاز هیدروژن یونیزه برابر است با:

$$\frac{M_{HII}}{M_{tot}} = \frac{4.35 \times 10^{13} M_{\odot}}{4.16 \times 10^{15} M_{\odot}} \rightarrow \frac{M_{HII}}{M_{tot}} = 1.00\%$$

برای محاسبه درصد جرم کهکشان های درخشان با توجه به اطلاعات مسئله در مورد جرم کهکشان ها و جرم کل در قسمت ج داریم:

$$\frac{M_{galaxy}}{M_{tot}} = \frac{2 \times 10^{13} M_{\odot}}{4.16 \times 10^{15} M_{\odot}} \rightarrow \frac{M_{galaxy}}{M_{tot}} = 0.47\%$$

جرم کل خوشه منهای جرم گاز و کهکشان ها برابر جرم ماده ی تاریک می باشد. بنابراین درصد ماده تاریک برابر است با:

$$\frac{M_{dark}}{M_{tot}} = \frac{M_{tot} - (M_{galaxy} + M_{HII})}{M_{tot}} \rightarrow \frac{M_{dark}}{M_{tot}} = 98.52\%$$

محاسبات سوال ۷:

$\frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0.1120}{70}$	= 480
$\frac{480 \cdot \frac{30}{60} \cdot \frac{\pi}{180}}{2}$	= 2.094395102
$\frac{5 \cdot \frac{2.094395102}{(2.1 \cdot 10^6 \cdot 3.09 \cdot 10^{16})^3} \cdot 10^6 \cdot 3.09 \cdot 10^{16} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 0.0044^2}{6.67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{1}{1.99 \cdot 10^{30}}$	= $4.24772164 \times 10^{15}$
$\frac{3 \cdot 10^{-15} \cdot (480 \cdot 10^6 \cdot 3.09 \cdot 10^{16})^2}{(2.1 \cdot 10^6 \cdot 3.09 \cdot 10^{16})^3}$	= $2.41539057 \times 10^{-33}$

$$\sqrt{\frac{2.41539057 \times 10^{-33}}{1.42 \cdot 10^{-40} \cdot \sqrt{70 \cdot 10^6}}} = 45.08945653$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2.09 \cdot 10^6 \cdot 3.09 \cdot 10^{16})^3 \cdot 45.08945653 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{1}{1.99 \cdot 10^{30}} = 4.26914889 \times 10^{13}$$

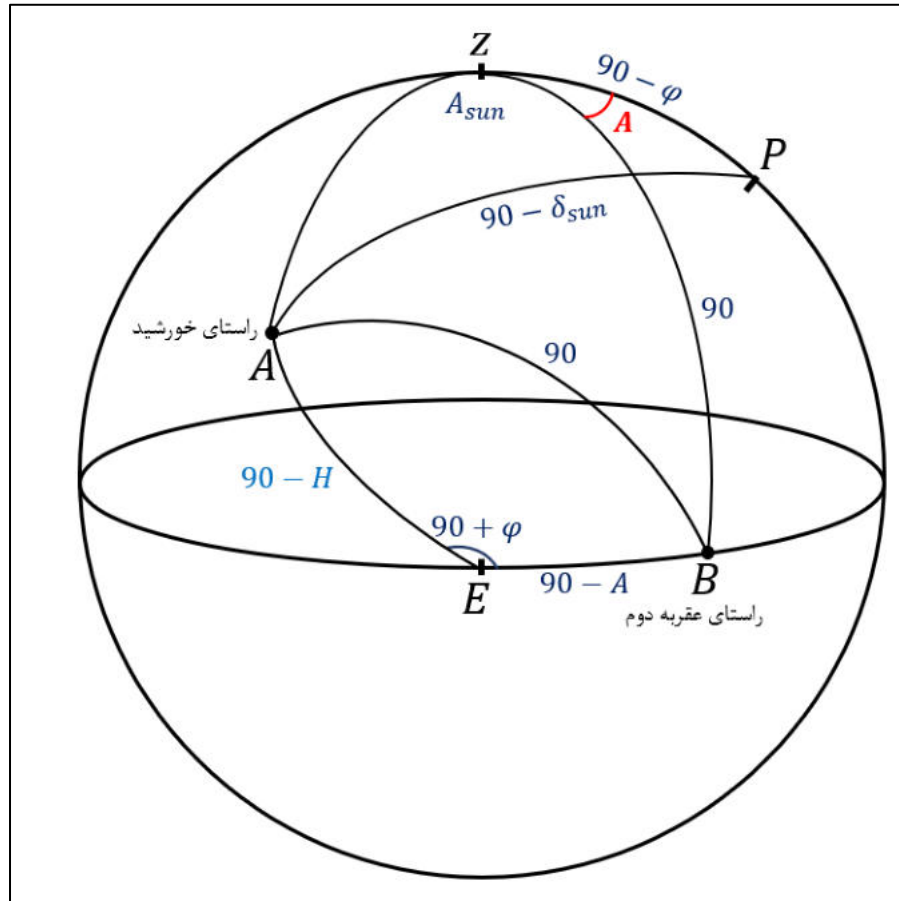
$$\frac{4.26914889 \times 10^{13}}{4.25 \cdot 10^{15}} \cdot 100 = 1.004505621$$

$$\frac{2 \cdot 10^{13}}{4.25 \cdot 10^{15}} \cdot 100 = 0.4705882353$$

$$\frac{4.25 \cdot 10^{15} - (2 \cdot 10^{13} + 4.27 \cdot 10^{13})}{4.25 \cdot 10^{15}} \cdot 100 = 98.52470588$$

سوال ۸) ساعت آفتابی مکانیکی - (۶۰ نمره)

شکل کلی به صورت زیر است، عقربه اول همیشه در راستای خورشید و عقربه دوم به نقطه‌ای روی افق با فاصله‌ی ۹۰ درجه از خورشید اشاره می‌کند.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث AEB داریم:

اندازه ضلع AE وقتی میل خورشید صفر است برابر $|H - 90|$ است.

$$\cos 90 = \cos(90 - A) \cos(90 - H) + \sin(90 - A) \sin(90 - H) \cos(90 + \phi)$$

$$\Rightarrow 0 = \sin A \sin H - \cos A \cos H \sin \phi \Rightarrow \tan A = \frac{\sin \phi}{\tan H}$$

ب)

$$\tan A = \sin \phi \cot H$$

در ساعت ۱۲ ظهر $H_{sun} = 0$ است. پس همان طور که در شکل مدرج شده سمت عقربه دوم برابر با ۹۰ درجه خواهد بود و روی عدد ۱۲ قرار دارد.

(ج)

چون زاویه ی بین خورشید و راستای عقربه ی دوم ۹۰ درجه است، پس اگر خورشید را قطب دایره عظیمه ای در نظر بگیریم، این دایره عظیمه از راستای ساعت آفتابی رد می شود. پس سمت ساعت آفتابی ۹۰ درجه با سمت قطب خود که خورشید است فاصله دارد.

$$A = A_{sun} - 90$$

$$\cos(-H) \sin \phi = \cos \phi \tan \delta - \sin(-H) \cot A_{sun} \Rightarrow \cos H \sin \phi - \cos \phi \tan \delta = -\sin H \tan A$$

$$\Rightarrow \tan A = -\frac{\sin \phi \cos H - \cos \phi \tan \delta}{\sin H}$$

(د) از آنجایی که تعدیل زمان را مساله به ما داده است نیاز به حساب کردن بعد خورشید نیست اما میل آن برای بدست آوردن سمت عقربه دوم نیاز است.

$$H_{sun} = HAMS + E = (LMT - 12^h) + E = 15^h - 12^h + 16.5^m$$

$$= (15 - 12) \times 15^\circ + 16.5 \times 0.25^\circ$$

$$\Rightarrow H_{sun} = 49.125^\circ$$

حال مقدار میل خورشید را محاسبه میکنیم و با جایگذاری در جواب بخش ج، زاویه سمت ساعت آفتابی را محاسبه میکنیم.

$$\lambda = 360 \times \frac{t}{365.25} = 360 \times \frac{(13 + 30 + 6 \times 31)}{365.25} = 225.7^\circ$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{\sin \lambda}{\sin 90} \Rightarrow \delta = -16.58^\circ$$

از آنجایی که خورشید در نیمه غربی آسمان است می دانیم که سمت عقربه دوم باید بیشتر از ۹۰ درجه باشد پس جواب معادله $\tan A$ را به ازای حالت ۱۸۰ درجه بیشتر بررسی می کنیم (همان طور که می دانید تانژانت دو جواب دارد)

$$\rightarrow A = -39.6 + 180 = 140.4^\circ \Rightarrow t_{\text{ساعت}} = 15^h 21^m 36^s \Rightarrow t_{\text{واقعی}} - t_{\text{ساعت}} = 21^m 36^s$$

(ه) درست است که این ساعت دقت کاملا بالایی ندارد اما خطای آن در نشان دادن زمان قابل قبول است لذا می تواند ساعت آفتابی مورد قبولی باشد.

سوال ۹) شازده کوچولو و کهکشان خورشیدشب - (۶۰ نمره)

الف)

$$\Delta r = v\Delta t$$

$$r = a \cdot \chi \rightarrow \Delta r = a \cdot \Delta \chi \rightarrow d\chi = \frac{v dt}{a(t)}$$

ب) چون این مسیر را یک بار رفته و یک بار بازگشته است پس مجموعاً 2χ را طی می‌کند که χ فاصله همراه است.

$$2\chi = \int_{t_0}^{t_0+t_H} \frac{v dt}{a(t)}$$

حالا با فرض اینکه جهان توصیف شده غالبیت انرژی تاریک دارد پس از معادلات فریدمان داریم:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = H_0^2 \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \Rightarrow a(t) = a(t_0) e^{H_0(t-t_0)} = e^{H_0(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow d\chi = v \cdot e^{-H_0(t-t_0)} dt = v e^{H_0 t_0} e^{-H_0 t} dt$$

$$\Rightarrow 2\Delta\chi = v e^{H_0 t_0} \int_{t_0}^{t_0+t_H} e^{-H_0 t} dt = -\frac{v}{H_0} e^{H_0 t_0} (e^{-H_0(t_0+t_H)} - e^{-H_0 t_0}) = \frac{v}{H_0} (1 - e^{H_0 t_H})$$

$$\Rightarrow \Delta\chi = \frac{v}{2H_0} (1 - e)$$

حال اگر اختلاف زمان رسیدن به خورشیدشب را δt^* در نظر بگیریم داریم:

$$\Delta\chi = v e^{H_0 t_0} \int_{t_0}^{t_0+\delta t^*} e^{-H_0 t} dt = -\frac{v}{H_0} e^{H_0 t_0} (e^{-H_0(t_0+\delta t^*)} - e^{-H_0 t_0}) = \frac{v}{H_0} (1 - e^{-H_0 \delta t^*})$$

پس در نتیجه:

$$\frac{v}{2H_0} (1 - e) = \frac{v}{H_0} (1 - e^{-H_0 \delta t^*}) \Rightarrow \delta t^* = \frac{1}{H_0} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{e}}{2}\right)$$

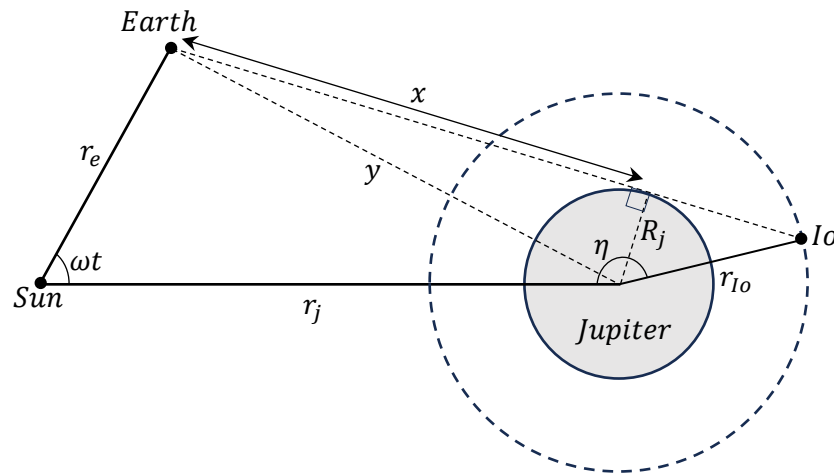
$$\rightarrow t^* = t_0 + \delta t^* = t_0 + \frac{1}{H_0} \ln\left(\frac{1 + e}{2e}\right)$$

ج) برای اینکه هیچگاه به یک کهکشان نرسد یعنی در طول روندی سفر به آن کهکشان میزان انبساط از سرعت سفینه پیشی می‌گیرد و هیچ وقت نمی‌تواند خود را برساند.

$$2\chi_\infty = \frac{v}{H_0} (1 - e^{-H_0 t_\infty}) = \frac{v}{H_0} (1 - e^{-\infty}) = \frac{v}{H_0} \Rightarrow \chi_\infty = \frac{v}{2H_0}$$

سوال ۱۰) اوله رومر و سرعت نور = (۶۵ نمره)

(الف)



$$r_e^2 + r_j^2 - 2r_e r_j \cos \omega t = x^2 + R_j^2 = y^2 \rightarrow x = \sqrt{r_e^2 + r_j^2 - R_j^2 - 2r_e r_j \cos \omega t}$$

$$L = x + \sqrt{r_{Io}^2 - R_j^2} = \sqrt{r_e^2 + r_j^2 - R_j^2 - 2r_e r_j \cos \omega t} + \sqrt{r_{Io}^2 - R_j^2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P_E} - \frac{2\pi}{P_J} = 1.823 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

اختلاف تاریخ با روز مقابله نیز به ما t را می‌دهد پس:

$$t_1 = 125^d 21^h 40^m 55^s, \quad t_2 = 124^d 3^h 10^m 56^s$$

$$\Delta L = \frac{dL}{dt} \times (t_2 - t_1) = \frac{r_e r_j \sin \omega t_1}{\sqrt{r_e^2 + r_j^2 - R_j^2 - 2r_e r_j \cos \omega t_1}} \times \omega (t_2 - t_1) = 3.51 \times 10^9 \text{ m}$$

(ب)

$$r_j = r_e \cos \omega t + y \cos \eta' \rightarrow \eta' = \cos^{-1} \left(\frac{r_j - r_e \cos \omega t}{\sqrt{x^2 + R_j^2}} \right)$$

$$\eta'' = \tan^{-1} \frac{x}{R_j}, \quad \eta''' = \cos^{-1} \frac{R_j}{r_{Io}}$$

$$\rightarrow \eta = \cos^{-1} \left(\frac{r_j - r_e \cos \omega t}{\sqrt{x^2 + R_j^2}} \right) + \tan^{-1} \frac{x}{R_j} + \cos^{-1} \frac{R_j}{r_{lo}}$$

$$\eta_1 = 179.73^\circ, \eta_2 = 179.88^\circ$$

$$T_{lo} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_j}} r_{lo}^3 = 42^h 28^m 43^s$$

$$\Delta t = T_{lo} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{360^\circ} T_{lo} = 42^h 29^m 47^s$$

(ج)

$$\Delta t^* = (t_2 - t_1) - \Delta t = 12s$$

$$c = \frac{\Delta L}{\Delta t^*} = 2.98 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

محاسبات سوال ۱۰:

$$\frac{2\pi}{365.25 \cdot 86400} - \frac{2\pi}{\boxed{11.87150916} \cdot 365.25 \cdot 86400} = 1.82330703 \times 10^{-7}$$

$$(6 \cdot 31) + 21 + \frac{23}{24} + \frac{43}{24 \cdot 60} + \frac{19}{24 \cdot 3600} = 207.9884144$$

$$(6 \cdot 31) + 23 + \frac{18}{24} + \frac{13}{24 \cdot 60} + \frac{18}{24 \cdot 3600} = 209.7592361 \text{ (B)}$$

$$(6 \cdot 31) + (4 \cdot 30) + 27 + \frac{21}{24} + \frac{24}{24 \cdot 60} + \frac{14}{24 \cdot 3600} = 333.8918287 \text{ (B)}$$

$$(333.8918287 - 209.7592361) \cdot 24 \cdot 3600 = 10725056$$

$$(333.8918287 - 207.9884144) \cdot 24 \cdot 3600 = 10878055$$

$$\frac{1 \cdot 5.204 \cdot \sin\left(1.82330703 \times 10^{-7} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \boxed{10878055}\right)}{\sqrt{1^2 + 5.204^2 - \left(\frac{69911}{1.5 \cdot 10^8}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5.204 \cdot \cos\left(1.82330703 \times 10^{-7} \cdot \frac{180}{\pi}\right)}} = 0.02341630777$$

$$\boxed{0.02341630777} \cdot 1.5 \cdot 10^{11} = 3.51244617 \times 10^9$$

$$\sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.898 \cdot 10^{27}} \cdot 421700000^3} \cdot \frac{1}{3600} = 42.47875192$$

$$\boxed{42.47875192} + \frac{179.88 - 179.73}{360} \cdot \boxed{42.47875192} = 42.4964514$$

$$\frac{3.51 \times 10^9}{(10878055 - 10725056) - \left(\boxed{42.4964514} \cdot 3600\right)} = 298089959.1$$



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۸ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۳/۰۱/۲۹ - ساعت: ۱۴:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه



شماره سندلی

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب مجاز است

- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پانویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.

جدول ثوابت

مقدار	کمیت	نماد
$6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg}$	ثابت جهانی گرانش	G
$6.63 \times 10^{-34} Js$	ثابت پلانک	h
$3 \times 10^8 \frac{m}{s}$	سرعت نور	c
$5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$	ثابت استفان - بولتزمن	σ
$1.67 \times 10^{-27} kg$	جرم پروتون	m_p
$9.11 \times 10^{-31} kg$	جرم الکترون	m_e
$1.6 \times 10^{-19} C$	بار الکترون	e
$3.09 \times 10^{16} m$	پارسک	pc
$1.5 \times 10^{11} m$	واحد نجومی	AU
$1.99 \times 10^{30} kg$	جرم خورشید	M_{Sun}
$6.96 \times 10^8 m$	شعاع خورشید	R_{Sun}
$3.85 \times 10^{26} W$	درخشندگی خورشید	L_{Sun}
$5777 K$	دمای مؤثر سطح خورشید	T_{effSun}
4.83	قدر مطلق خورشید	$M_{V_{Sun}}$
-26.7	قدرظاهری خورشید	$m_{V_{Sun}}$
-0.14	تصحیح بولومتریک خورشید	BC_{Sun}
$5.97 \times 10^{24} kg$	جرم زمین	M_{Earth}

6371 km	شعاع زمین	R_{Earth}
0.3	آلبدو زمین	A_{Earth}
23.5°	انحراف دایره البروج نسبت به استوا	ε
6052 km	شعاع زهره	R_{Venus}
0.7 AU	شعاع مداری زهره	r_{Venus}
0.7	آلبدو زهره	A_{Venus}
3390 km	شعاع مریخ	R_{Mars}
1.5 AU	شعاع مداری مریخ	r_{Mars}
$10^{-10}m$	آنگستروم	A
23 h 56 m	روز نجومی	

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



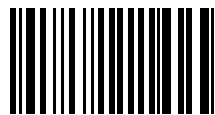
سوال اول (۳۵ نمره)

ناظری می‌خواهد به کمک آسمان عرض جغرافیایی محلی که در آن قرار دارد را پیدا کند. او از آسمان فقط دو نقطه و دو صفحه را می‌شناسد؛ سیاره‌ای که روی دایره البروج قرار دارد، قطب شمال دایره البروج و صفحه افق و صفحه نصف النهار. او ارتفاع سیاره را در لحظه عبور بالای ۱۰ درجه و در همین هنگام، ارتفاع قطب شمال دایره البروج را ۷۰ درجه اندازه می‌گیرد. عرض جغرافیایی ناظر را به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۱

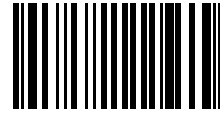
از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 1, featuring horizontal lines.

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال دوم (۴۰ نمره)

طوفانی از غبار سطح مریخ را پوشانده است و باعث می شود که قدر ظاهری خورشید در سمت الرأس ناظری روی سطح مریخ نسبت به حالتی که غبار نباشد به اندازه ی $|\Delta m| = 0.5$ تغییر کند.

الف) با فرض اینکه شعاع ذرات غبار حدودا $r = 0.5 \text{ mm}$ و چگالی ماده موجود در هر ذره غبار $\rho = 1.5 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ باشد ، جرم کل لایه غبار را به دست آورید.

ب) فرض کنید جرم لایه غبار همان است که در بخش الف به دست آورده اید، اما شعاع ذرات غبار یک پنجم قبل است (یعنی $r = 0.1 \text{ mm}$). در این صورت تغییر قدر ظاهری خورشید در سمت الرأس ناظر روی سطح مریخ چقدر است؟

در صورت لزوم از این قسمت به

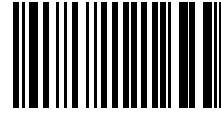
عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۲

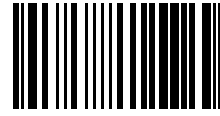
از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 2.

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال سوم (۴۰ نمره)

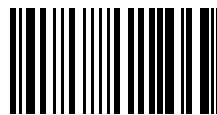
یک ناظر روی زمین داریم که به سیاره زهره نگاه می کند و یک ناظر روی سیاره زهره داریم که به زمین نگاه می کند. قدر ظاهری که ناظر روی زهره برای زمین ثبت می کند را m_E و قدر ظاهری که ناظر روی زمین برای زهره ثبت می کند را m_V می نامیم.

هنگامی که فاصله زمین و زهره $0.5 AU$ باشد، $m_E - m_V$ را به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۳

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

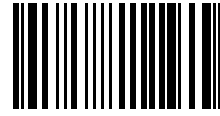
A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 3.



بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



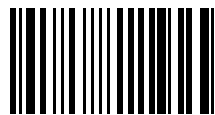
سوال چهارم (۴۵ نمره)

کیانوش در عرض و طول جغرافیایی ۶۰ درجه شمالی و ۴۰ درجه شرقی و پژمان در عرض و طول جغرافیایی ۳۰ درجه جنوبی و ۱۰ درجه شرقی رو به شرق ایستاده‌اند و تصمیم می‌گیرند تا هر یک در مسیری مستقیم که روبرویشان است شروع به حرکت کنند و این مسیر مستقیم را ادامه بدهند. نسبت سرعت حرکت کیانوش به سرعت حرکت پژمان چقدر باید باشد تا آنها با طی کمترین مسافت در یک نقطه به هم برسند؟

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۴

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

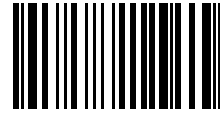
Blank area for writing the answer to question 4, featuring horizontal lines.



بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال پنجم (۵۰ نمره)

- یک خوشه ستاره‌ای شامل ۱۵۰۰ ستاره با جرم‌های تقریباً یکسان و هر کدام به جرم خورشید هستند. این خوشه ستاره‌ای به صورت کروی است و ستاره‌ها در آن تقریباً یا یک توزیع یکنواخت قرار گرفته‌اند. شعاع خوشه در حدود ۲,۵ پارسک است. خوشه فوق در فاصله ۱۳۰۰ پارسکی از ما قرار گرفته است و ضریب خاموشی فضای بین ستاره‌ای از خوشه تا ما در حدود ۰,۷ قدر بر کیلوپارسک است.
- الف) قدر ظاهری هر ستاره را محاسبه کنید.
- ب) قدر ظاهری خوشه چقدر است؟
- ج) قدر ظاهری سطحی خوشه، به طور متوسط چند قدر بر دقیقه قوسی مربع است؟
- د) نسبت کمترین سرعت ستاره‌ای در لبه این خوشه که بتواند از گرانش خوشه فرار کند به میانگین سرعت ستاره‌های خوشه چقدر است؟

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۵

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 5.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال ششم (۵۰ نمره)

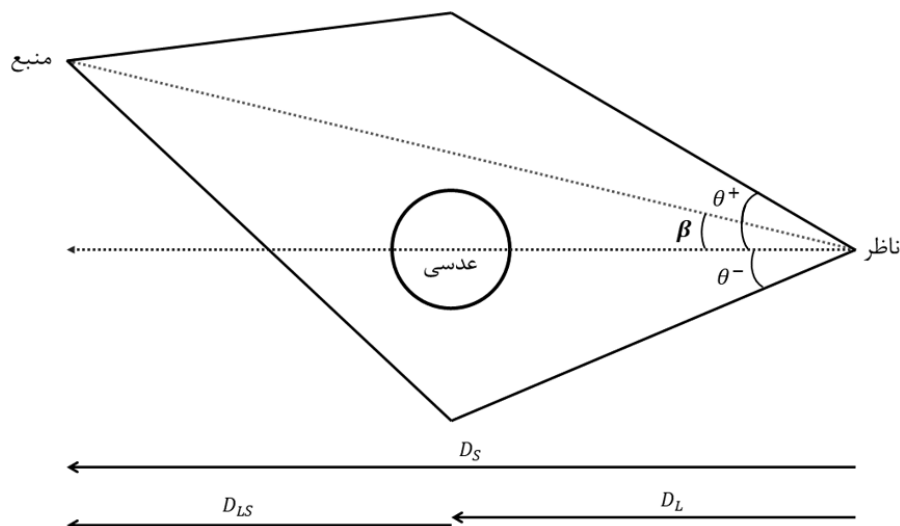
اگر یک سیاهچاله پر جرم بین ناظر و منبع نور قرار گیرد، با توجه به معادلات نسبیت عام، توسط ناظر دو تصویر از منبع نور دیده می‌شود. این پدیده مانند این است که سیاهچاله مانند یک عدسی عمل می‌کند. منشأ این پدیده، معادلات گرانشی نسبیت عام است که باعث خم شدن مسیر نور در نزدیکی یک جرم می‌شود. لذا به این پدیده، عدسی گرانشی نیز گفته می‌شود. با توجه به شکل زیر اگر جدایی زاویه‌ای بین منبع و سیاهچاله β باشد، دو تصویر در زوایای θ^+ و θ^- در دو طرف سیاهچاله تشکیل می‌شوند که با رابطه زیر تعیین می‌شوند:

$$\theta^{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}$$

به دست می‌آید که در آن θ_E زاویه اینشتین نام دارد و با رابطه زیر تعریف می‌شود :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{(D_S - D_L)}{D_S D_L}}$$

در رابطه ذکر شده G ثابت جهانی گرانش، M جرم سیاهچاله، c سرعت نور، D_S فاصله منبع و ناظر، D_L فاصله سیاهچاله (عدسی) تا ناظر است.



الف) اگر منبع و عدسی از دید ناظر دقیقاً در یک راستا باشند انتظار دارید ناظر، چه تصویری از منبع مشاهده کند؟

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



بزرگ‌نمایی هر یک از تصاویر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{\pm} = \frac{\theta^{\pm} d\theta^{\pm}}{\beta d\beta}$$

این نسبت بزرگ‌نمایی در واقع نسبت مساحت تصویر به مساحت منبع از دید ناظر است. به همین دلیل است که به این پدیده عدسی گرانشی گفته می‌شود زیرا اندازه تصویر را تغییر می‌دهد. مقدار نسبت بزرگ‌نمایی در تصویر را با R نمایش می‌دهیم:

$$R = \frac{|A^{+}|}{|A^{-}|}$$

برای سادگی محاسبات معمولاً پارامتر برخورد γ را به صورت $\gamma = \frac{\beta}{\theta_E}$ تعریف می‌کنند.

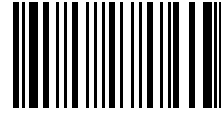
(ب) مقدار R را بر حسب γ به دست آورید.

(ج) مقدار R را می‌توانیم از تصویرهای ثبت شده برای پدیده عدسی گرانشی به دست آوریم. با فرض پیدا کردن D_S و D_L و β از روش‌های دیگر، رابطه‌ای بنویسید که جرم عدسی را بتوان بر حسب R ، D_L و D_S به دست آورد. تمام پاسخ‌های ممکن را در نظر بگیرید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



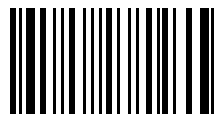
پاسخ سوال ۶

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 6.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

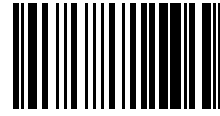


ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال هفتم (۵۰ نمره)

در یک منظومه ستاره‌ای فرضی، ستاره مرکزی دارای جرمی بسیار بزرگ‌تر از سیارات و اجرام اطرافش است. این ستاره دارای جرمی ۱۰ برابر جرم خورشید و شعاعی ۱۰۰ برابر شعاع خورشید است. یک سیارک با ابعاد ناچیز در مداری دایروی با شعاع ۱,۲ واحد نجومی به دور این ستاره می‌گردد. یک سیاره با شعاع یک سوم شعاع ستاره نیز در همان صفحه مداری سیارک، در مداری دایروی با شعاع ۱ واحد نجومی به دور ستاره می‌گردد. جهت گردش سیاره و سیارک مانند هم است.

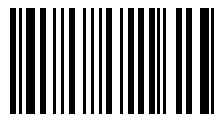
الف) از دید ناظر روی سیارک، هنگامی که سیاره از جلوی ستاره عبور می‌کند، مدت زمانی که سیاره جلوی ستاره است و حداقل بخش کوچکی (غیر صفر) از ستاره را پوشانده است چند روز است؟

ب) ناظر روی سیارک، هنگامی که سیاره از پشت ستاره عبور می‌کند، در چند روز کلاً سیاره را نمی‌تواند ببیند؟

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۷

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

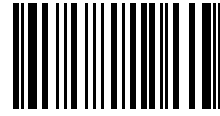
A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 7.



بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال هشتم (۶۵ نمره)

داده های رصدی ۴ ابرنواختر نوع $SN Ia$ در جدول زیر داده شده است. F شار دریافتی است. Z قرمزگرایی کهکشان میزبان ابرنواختر است. فرض کنید درخشندگی ابرنواختر نوع $SN Ia$ در روشنایی بیشینه برابر است با $5.8 \times 10^9 L_{SUN}$.

الف) مقادیر فاصله ابرنواختر از ما، d_{SN} (فاصله ویژه، $proper\ distance$) را بر حسب مگا پارسک و ثابت هابل را بر حسب $\frac{km}{s.Mpc}$ برای هر ابرنواختر به دست آورده و در جدول موجود در پاسخنامه وارد کنید. در جدول، F_{Sun} شار رسیده از خورشید به زمین است.

ب) بر اساس این داده های رصدی، تخمینی از سن عالم را بر حسب سال، به همراه خطا گزارش کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

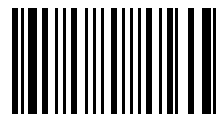


توجه: این صفحه جزو پاسخنامه سوال شماره ۸ می باشد و تصحیح خواهد شد.

z	$F(10^{-18} F_{Sun})$	$d_{SN}(Mpc)$	$H_0 \left(\frac{km}{s.Mpc} \right)$
0.050	3.280		
0.071	1.623		
0.087	1.114		
0.110	0.705		



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۸

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



سوال نهم (۷۰ نمره)

می دانیم که خورشید در انتهای عمر خود به یک کوتوله سفید تبدیل می شود که ابعادی در حدود ابعاد زمین خواهد داشت.

الف) نشان دهید که در طول عمر خورشید اندازه حرکت زاویه ای (تکانه زاویه ای) آن به دور خودش همواره ثابت است.

ب) خورشید به صورت یک جسم صلب نمی چرخد. دوره تناوب منطقه استوایی و قطبی آن به ترتیب در حدود ۲۴ روز و ۳۰ روز است ولی برای سادگی فرض کنیم که خورشید جسم صلبی است که دوره تناوب آن حدود ۲۷ روز باشد. دوره تناوب خورشید زمانی که به کوتوله سفید تبدیل می شود چند دقیقه خواهد بود؟
ج) یک ناظر بیرونی وقتی خورشید را در اچ-آلفا ($H\alpha$) با طول موج ۶۳۲۸ آنگستروم مشاهده می کند، پهنای طول موجی خط $H\alpha$ ناشی از دوران آن چند آنگستروم خواهد شد؟

امروزه میدان مغناطیسی به طور متوسط روی کل سطح خورشید در حدود ۱۰۰ میکرو تسلا است. مقدار شار مغناطیسی در فرآیند تحول ستاره را ثابت در نظر بگیرید. خط اچ-آلفا ($H\alpha$) به واسطه اثر جداسازی زیمان می تواند به دو خط مجزا تبدیل شود که مقدار فرکانس های آن خطوط از رابطه زیر به دست می آید

$$\nu = \nu_0 \pm \frac{\mu_B B}{h}$$

در رابطه بالا B میدان مغناطیسی، h ثابت پلانک و μ_B مگنتون بور نامیده می شود که برابر با مقدار زیر است

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

که در آن e بار الکترون، m_e جرم الکترون و h ثابت پلانک است.

د) مقدار جداسازی $\Delta\nu$ ناشی از اثر زیمان را در زمانی که خورشید به کوتوله سفید تبدیل می شود محاسبه کنید. آن را با قسمت ج مقایسه کرده و بگویید که آیا خط $H\alpha$ به صورت دو خط جداگانه دیده می شود یا خیر؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۹

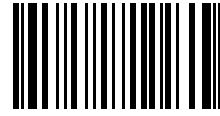
از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 9, featuring horizontal lines.

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



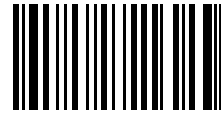
سوال دهم (۸۵ نمره)

- در منظومه‌ای خیالی، یازده سیاره به جرم‌زمین به دور ستاره‌ای مرکزی با جرم‌زمین می‌گردند. مدار این سیارات یک مدار مشترک دایروی با شعاع یک واحد نجومی است و آن‌ها به صورت منتظم روی دایره توزیع شده‌اند.
- الف) انرژی مکانیکی منظومه را بر حسب ژول دست آورید.
- ناگهان ستاره مرکزی محو می‌شود. از این پس:
- ب) نسبت بیشترین میانگین فاصله ۱۱ جرم باقیمانده از همدیگر به کمترین میانگین فاصله آن‌ها از هم‌دیگر را به دست آورید.
- ج) چه مدت زمان طول می‌کشد که میانگین فاصله ۱۱ جرم از کمترین مقدار به بیشترین مقدارش برسد؟ پاسخ خود را بر حسب سال گزارش کنید.
- د) حداقل جرم ستاره مرکزی را به نحوی تعیین کنید که پس از محو شدن ستاره، منظومه مقید نماند و متلاشی شود. پاسخ خود را بر حسب جرم زمین بیان کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پاسخ سوال ۱۰
از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

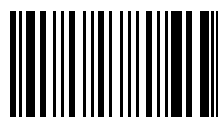


ادامه پاسخ سوال ۱۰ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



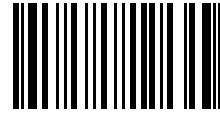
ادامه پاسخ سوال ۱۰ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال یازدهم (۱۰۰ نمره)

گذر زهره از مقابل خورشید پدیده ای نادر در آسمان می باشد که در هر قرن حداکثر ۲ بار روی می دهد. اگرچه در قرن بیستم این پدیده رخ نداد اما اوایل قرن بیست و یکم، دو مرتبه گذر زهره در آسمان رویت شد و تا بیش از ۹۰ سال دیگر ما شاهد چنین پدیده ای نخواهیم بود. آخرین گذر زهره در تاریخ ۱۶ و ۱۷ خرداد ماه ۱۳۹۱ رخ داده که از ساعت ۲۲:۱۰ روز ۱۶م تا ساعت ۴:۵۰ بامداد روز ۱۷م به وقت گرینویچ به طول انجامید. رصدگری می خواهد از این پدیده عکس بگیرد اما او زمانی متوجه وقوع این پدیده می شود که حداقل سه ساعت از شروع این پدیده گذشته است. او تصویری زیبا از این پدیده ثبت کرده است که در زیر آن را مشاهده می کنید. در تصویر دوم، مسیر حرکت زهره بر روی قرص خورشید نسبت به راستای قطب شمال سماوی (NCP) و دایرة البروج مشخص شده است. از خروج از مرکز مدار زهره و زمین و حرکت مداری زمین به دور خورشید در مدت گذر صرف نظر کنید. تصویر دوم ممکن است نسبت به تصویر اول چرخانده شده باشد.

الف) تصویر در چه ساعتی به وقت گرینویچ ثبت شده است؟

ب) طول و عرض جغرافیایی عکاس را بدست آورید

توضیح: تصاویر در صفحه بعد آمده است که جزو پاسخنامه شما می باشد.

در صورت لزوم از این قسمت به

عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

شرایطی تصحیح نخواهد شد

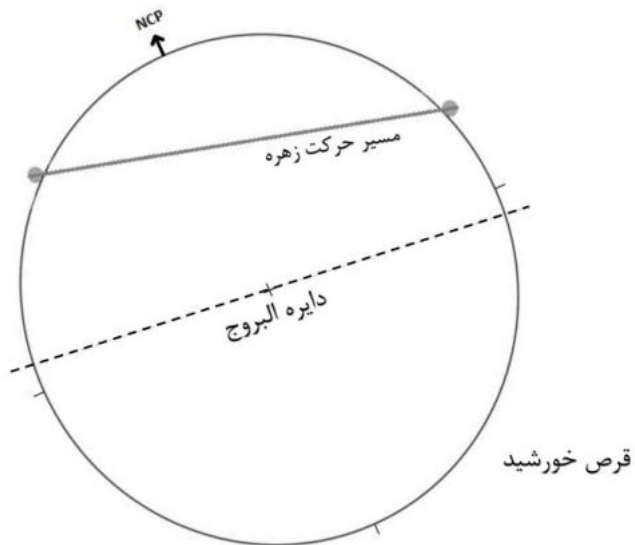
بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۴۰۳/۰۱/۲۹



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

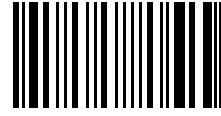


توجه: این صفحه جزو پاسخنامه سوال شماره ۱۱ می باشد و تصحیح خواهد شد.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

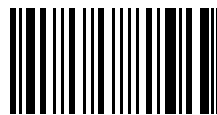


پاسخ سوال ۱۱
از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۱۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سوال دوازدهم (۱۲۰ نمره)

آرش کمان‌گیر از اسطوره‌های ایرانی است که برای تعیین مرز ایران و توران، تیری پرتاب کرد و جان خود را از دست داد. فرض کنید آرش زاویه دست خود را با افق 60° درجه گرفته باشد و این تیر از نقطه‌ای به عرض جغرافیایی $36^\circ 30' N$ و طول جغرافیایی $52^\circ 42' E$ پرتاب شده باشد و هدف آرش این باشد که تیرش به نقطه‌ای با عرض جغرافیایی $37^\circ 35' N$ و طول جغرافیایی $61^\circ 48' E$ اصابت کند. از ارتفاع نقطه پرتاب و نقطه اصابت تیر نسبت به سطح دریا صرف‌نظر کنید. آرش برای این پرتاب سرعت اولیه لازم را به تیر می‌دهد. اما او چرخش زمین را در نظر نگرفته است بنابراین سرعتی به تیر می‌دهد که اگر زمین به دور خود نمی‌چرخید و اصطکاک هوا وجود نداشت، به هدف اصابت می‌کرد.

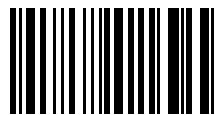
الف) آرش با چه سرعت اولیه‌ای تیر را پرتاب می‌کند؟

ب) با در نظر گرفتن اثر چرخش زمین به دور خود و صرف‌نظر از اصطکاک هوا، تعیین کنید، محل اصابت تیر آرش چند کیلومتر از روی سطح زمین با هدفی که داشته است، فاصله دارد؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



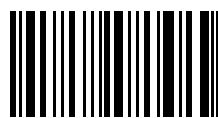
پاسخ سوال ۱۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

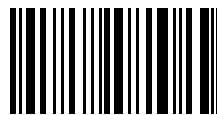


ادامه پاسخ سوال ۱۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ادامه پاسخ سوال ۱۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستوجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

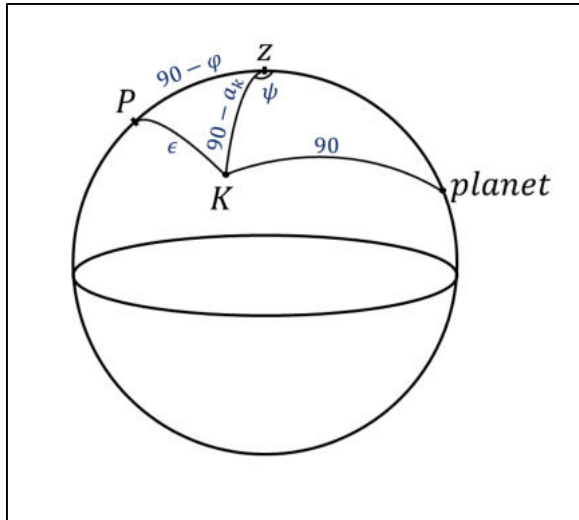
پاسخنامه تشریحی آزمون مرحله دوم بیستمین دوره المپیاد نجوم و اخترفیزیک

کمیته علمی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

فروردین ماه ۱۴۰۳

از اساتید و دانش‌پژوهان گرامی دعوت می‌شود تا نظرات و پیشنهادات خود را به نشانی الکترونیکی کمیته‌ی المپیاد نجوم ایران ارسال نمایند.

IRAstronomyCommittee@gmail.com



شکل درست ۵ نمره

سوال (۱)

رابطه ی کسینوس ها برای مثلث K - Z - Planet

کسینوسها ۵ نمره

$$\cos 90 = \sin a_{planet} \sin a_k + \cos a_{planet} \cos a_k \cos \psi$$

$$\psi = \cos^{-1}(-\tan a_{planet} \tan a_k) \quad (I)$$

رابطه ی کسینوس ها برای مثلث P - Z - K

کسینوسها ۵ نمره

$$\cos \epsilon = \sin \varphi \sin a_k + \cos \varphi \cos a_k \cos(\pi - \psi)$$

$$\cos \epsilon = \sin \varphi \sin a_k - \cos \varphi \cos a_k \cos(\psi)$$

$$\stackrel{(I)}{\rightarrow} \cos \epsilon = \sin \varphi \sin a_k + \cos \varphi \cos a_k \tan a_{planet} \tan a_k$$

$$\cos \epsilon = \sin a_k (\sin \varphi + \cos \varphi \tan a_{planet})$$

رابطه نهایی ۵ نمره

پس از حل معادله ی بالا مقادیر برای φ به صورت زیر خواهند بود:

$$\rightarrow \cos \varphi_1 = 0.438935, \quad \cos \varphi_2 = -0.105152$$

حل رابطه نهایی ۵ نمره

$$\cos \varphi_1 = 0.438935 \rightarrow \varphi = \pm 63.864^\circ$$

$$\cos \varphi_2 = -0.105152 \rightarrow \varphi = \pm 96.06$$

استدلال رد کردن جواب

نامعقول ۵ نمره

مقدار ± 96.09 در بازه ی تعریف شده برای عرض جغرافیایی $-90 < \varphi < 90$ نیست پس صحیح نیست.

مقدار -63.86 نیز صحیح نیست زیرا با توجه به میل قطب شمال دایره البروج، در این عرض k نمی تواند بالای افق قرار گیرد.

پس مقدار صحیح برابر است با:

$$\varphi = 63.84^\circ \quad \text{جواب آخر صحیح ۵ نمره}$$

سوال (۲) قسمت الف)

اگر نوری با شدت I_0 از محیط عبور کند به صورت زیر در طول مسیر جذب می شود:

نوشتن این رابطه یا اثبات آن ۵ نمره

$$dI = -n \sigma I dx \rightarrow I = I_0 e^{-n\sigma x} \rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-n\sigma x} \quad (I)$$

نوشتن این رابطه یا شبیه آن ۵ نمره

$$m - m_0 = -2.5 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \xrightarrow{(I)} m - m_0 = 2.5 n \sigma x \log_{10} e \quad (II)$$

منطقا با کاهش شدت قدر افزایش می یابد پس:

$$\Delta m = m - m_0 = 0.5$$

$$\xrightarrow{(II)} n \sigma h = \frac{\Delta m}{2.5 \log_{10} e} \quad (III)$$

نوشتن این رابطه یا رابطه قدر ۵ نمره

استدلال کم بودن ارتفاع جو ۵ نمره

محاسبه ی جرم لایه ی غبار:

با تقریب خیلی کوچک بودن ارتفاع جو در برابر شعاع مریخ

$$\rightarrow M_{\text{کل}} = (4\pi R_{\text{mars}}^2 \times h) \times n \times M_{\text{غبار}}$$

$$M_{\text{کل}} = (4\pi R_{\text{mars}}^2 n h) \left(\frac{4}{3} \pi r_{\text{غبار}}^3 \rho_{\text{غبار}} \right) = \left(\frac{16\pi}{3} R_{\text{mars}}^2 r_{\text{غبار}} n h \right) (\sigma \rho_{\text{غبار}})$$

$$M_{\text{کل}} = \left(\frac{16\pi}{3} R_{\text{mars}}^2 r_{\text{غبار}} \rho_{\text{غبار}} \right) (n\sigma h) \xrightarrow{(III)} M_{\text{کل}} = \left(\frac{16\pi}{3} R_{\text{mars}}^2 r_{\text{غبار}} \rho_{\text{غبار}} \right) \left(\frac{\Delta m}{2.5 \log_{10} e} \right)$$

رسیدن به این جرم ۵ نمره

$$M_{\text{کل}} = 6.651 \times 10^{13} \text{ kg} \quad \text{پاسخ نهایی}$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ب)

$$\Delta m \propto r_{\text{غبار}} \rightarrow \Delta m_{\text{ثانویه}} = \Delta m_{\text{اولیه}} \times \left(\frac{r_{\text{غبار}}}{r_{\text{ثانویه}} \text{ غبار}} \right) = 0.5 \times 5 = 2.5$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

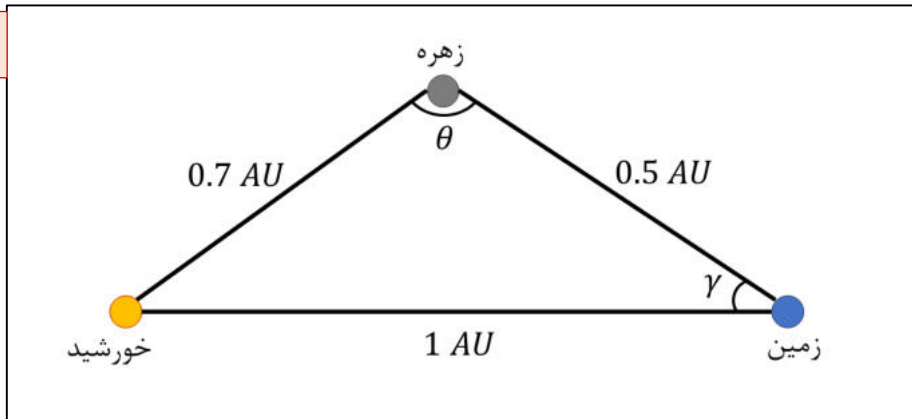
نوشتن این رابطه یا

نوشتن دوباره ی معادله ی

جرم لایه ی غبار ۵ نمره

سوال ۳

شکل درست ۵ نمره



$$1^2 = 0.7^2 + 0.5^2 - 2 \times 0.5 \times 0.7 \times \cos \theta \rightarrow \theta = 111.804$$

محاسبه ی θ ۵ نمره

$$0.7^2 = 1^2 + 0.5^2 - 2 \times 0.5 \times 1 \times \cos \gamma \rightarrow \gamma = 40.536$$

محاسبه ی γ ۵ نمره

محاسبه ی ضریب هلال یا اشاره به آن:

$$\frac{\text{مساحت ناحیه روشن}}{\text{مساحت کل}} = \frac{\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi R(R \cos \alpha)}{2}}{\pi r^2} = \frac{(1 + \cos \alpha)}{2}$$

نوشتن رابطه ی فاز ۵ نمره

$$\begin{cases} f_E = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1)^2} \times \pi R_{\oplus}^2 \times \frac{1}{2\pi(0.5)^2} \times \frac{(1 + \cos \gamma)}{2} \times A_E \\ f_V = \frac{L_{\odot}}{4\pi(0.7)^2} \times \pi R_V^2 \times \frac{1}{2\pi(0.5)^2} \times \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \times A_V \end{cases}$$

$$m_E - m_V = -2.5 \log \left(\frac{f_E}{f_V} \right) \quad \text{رابطه ی قدر ۵ نمره}$$

$$= -2.5 \log \left(\frac{\frac{L_{\odot}}{4\pi(1)^2} \times \pi R_{\oplus}^2 \times \frac{1}{2\pi(0.5)^2} \times \frac{(1 + \cos \gamma)}{2} \times A_E}{\frac{L_{\odot}}{4\pi(0.7)^2} \times \pi R_V^2 \times \frac{1}{2\pi(0.5)^2} \times \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \times A_V} \right)$$

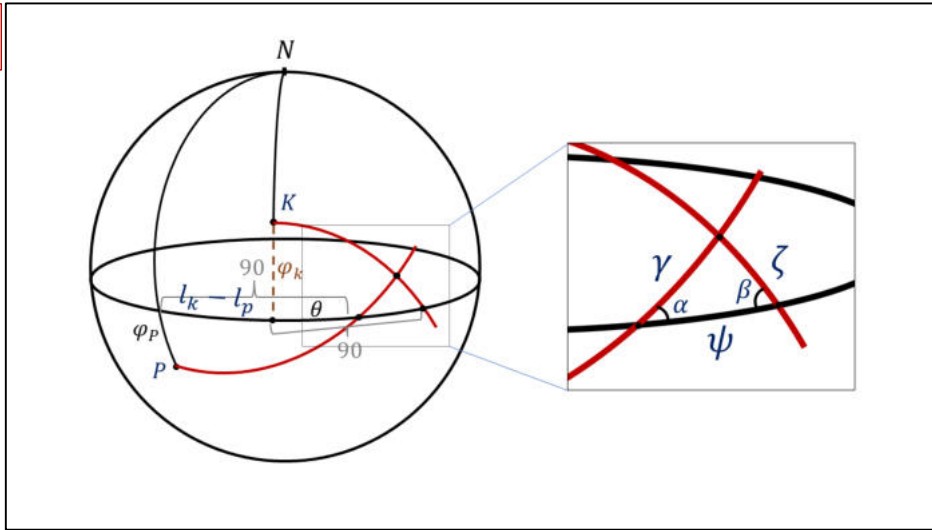
$$m_E - m_V = -2.5 \log \left(\left(\frac{0.7}{1} \right)^2 \times \left(\frac{R_{\oplus}}{R_V} \right)^2 \times \left(\frac{1 + \cos \gamma}{1 + \cos \theta} \right) \times \frac{A_E}{A_V} \right) \rightarrow m_E - m_V = 0.326$$

رابطه ی نهایی ۱۰ نمره

جواب آخر صحیح ۵ نمره

سوال ۴

شکل درست ۵ نمره



$$\beta = \varphi_k, \quad \alpha = -\varphi_p \quad \text{نمره ۵}$$

$$\theta = 90 - (l_k - l_p) \rightarrow \psi = 90 - \theta = l_k - l_p \quad \text{نمره ۵}$$

$$\cos \alpha \cos \psi = \frac{\sin \psi}{\tan \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \rightarrow \gamma = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \psi}{\cos \alpha \cos \psi + \frac{\sin \alpha}{\tan \beta}} \right) \rightarrow \gamma = 25.705^\circ \quad \text{نمره ۵}$$

$$\cos \beta \cos \psi = \frac{\sin \psi}{\tan \zeta} - \frac{\sin \beta}{\tan \alpha} \rightarrow \zeta = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \psi}{\cos \beta \cos \psi + \frac{\sin \beta}{\tan \alpha}} \right) \rightarrow \zeta = 14.502 \quad \text{نمره ۵}$$

$$\frac{v_k}{v_p} = \frac{R \left(\frac{\pi}{2} - \zeta_{rad} \right)}{t_k} \xrightarrow{t_k = t_p} \frac{v_k}{v_p} = \frac{90 - \zeta}{90 + \gamma} \rightarrow \frac{v_k}{v_p} = 0.615 \quad \text{جواب آخر صحیح ۵ نمره}$$

استدلال برای زمانها ۵

رابطه‌ی نهایی ۵ نمره

* این سوال به وسیله‌ی مثلث‌های دیگری نیز حل می‌شود. حل از راه مثلث‌های دیگر نیز نمره‌ی کامل را کسب خواهد کرد.

سوال ۵) قسمت الف)

جرم ستاره ها با جرم خورشید برابر هستند پس با تقرب خوبی می توان گفت ستاره ها خورشیدگون هستند.

لذا با تقریب معقول برای هر ستاره داریم:

استدلال ۵ نمره

$$L_* = L_{\odot}$$

$$m_* - m_{\odot} = -2.5 \log \left(\frac{f_*}{f_{\odot}} \right) + A d \xrightarrow{m_{\odot} = m_{v_{\odot}} + BC_{\odot}}$$

$$m_* = m_{v_{\odot}} + BC_{\odot} - 2.5 \log \left(\frac{\frac{L_*}{4\pi d^2}}{\frac{L_{\odot}}{4\pi (1)^2}} \right) + A d \rightarrow m_* = 16.21$$

جواب آخر صحیح
۵ نمره

رابطه ی نهایی ۵ نمره

قسمت ب)

رابطه ۵ نمره

$$m_c - m_{\odot} = -2.5 \log \left(\frac{1500 f_*}{f_{\odot}} \right) + A d \rightarrow m_c = m_* - 2.5 \log 1500 \rightarrow m_c = 8.27$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ج)

باید حساب کنیم یک دقیقه قوسی مربع معادل چه نسبتی از روشنایی کل خوشه می شود:

$$\alpha = \frac{(d \times 1_{\text{arcmin}})^2}{\pi R^2}$$

$$\mu - m_c = -2.5 \log \left(\frac{\left(\frac{(d \times 1_{\text{arcmin}})^2}{\pi R^2} \right) \times 1500 f_*}{1500 f_*} \right)$$

رابطه ی صحیح ۵ نمره

$$\mu = m_c - 5 \log \left(\frac{1300}{2.5} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{60}{206265} \right) \rightarrow \mu = 13.61 \frac{\text{mag}}{\text{arcmin}^2}$$

جواب آخر
صحیح ۵ نمره

قسمت د)

با توجه به اینکه این خوشه عمر قابل ملاحظه ای دارد می توان در نظر گرفت ستاره ها به تعادل ویرالی در خوشه رسیده اند، لذا:

$$2K \approx -U(I)$$

انرژی گرانشی یک کره ی یکنواخت:

$$-\frac{3GM^2}{5R}$$

$$\stackrel{(I)}{\rightarrow} NMv_{avg}^2 \approx -\left(-\frac{3G(NM)^2}{5R}\right) \rightarrow v_{avg} \approx \sqrt{\frac{3GNM}{5R}} \quad (II)$$

سرعت متوسط
۵ نمره

محاسبه ی سرعت فرار از لبه ی خوشه:

$$E = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G(NM)m}{R} = 0 \rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GNM}{R}} \quad (III)$$

سرعت فرار
۵ نمره

$$\stackrel{(II),(III)}{\rightarrow} \frac{v_{esc}}{v_{avg}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.83$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

چون نسبت فوق بزرگتر از ۱ است، خوشه از هم متلاشی نمی شود.

سوال ۶ قسمت الف)

در آن صورت $\beta = 0$ و θ^+ و θ^- هر دو برابر با θ_E می شوند لذا شکل از دو طرف تقارن خواهد داشت. هم چنین به خاطر اینکه ارجحیتی بین جهات سمتی مختلف وجود ندارد، در همه ی سمت ها می توانیم پرتو

داشته باشیم. لذا انتظار داریم تصویر به صورت دایره باشد. استدلال ۱۰ نمره

قسمت ب)

محاسبه ی مشتق ۵ نمره

$$\frac{d\theta^+}{d\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} (2\beta) = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} = \frac{2\frac{\theta^+}{\theta_E}}{2\sqrt{y^2 + 4}} = \frac{\frac{\theta^+}{\theta_E}}{\sqrt{y^2 + 4}}$$

$$\frac{d\theta^-}{d\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} (2\beta) = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} = \frac{2\frac{\theta^-}{\theta_E}}{2\sqrt{y^2 + 4}} = \frac{\frac{\theta^-}{\theta_E}}{\sqrt{y^2 + 4}}$$

محاسبه ی مشتق ۵ نمره

$$A^+ = \frac{\theta^+}{\beta} \frac{d\theta^+}{d\beta} = \left(\frac{\theta^+}{\theta_E}\right)^2 \left(\frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + 4}}\right) \quad (I)$$

۵ نمره

$$A^- = \frac{\theta^-}{\beta} \frac{d\theta^-}{d\beta} = -\left(\frac{\theta^-}{\theta_E}\right)^2 \left(\frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + 4}}\right) \quad (II)$$

۵ نمره

$$\xrightarrow{(I),(II)} R = \frac{|A^+|}{|A^-|} = \left(\frac{\theta^+}{\theta^-}\right)^2 \rightarrow R = \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{y - \sqrt{y^2 + 4}}\right)^2 \quad (III)$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ج)

با توجه به (III) داخل پرانتز حتما عددی منفی است پس هنگام رادیکال گرفتن باید $-\sqrt{R}$ را لحاظ

استدلال ۵ نمره

کنیم و گر نه به تناقض برمی خوریم.

$$-\sqrt{R} = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{y - \sqrt{y^2 + 4}} \rightarrow y(\sqrt{R} + 1) = (\sqrt{R} - 1)\sqrt{y^2 + 4} \rightarrow$$

$$y^2(\sqrt{R} + 1)^2 = (\sqrt{R} - 1)^2(y^2 + 4) \rightarrow y = \frac{4(\sqrt{R} - 1)^2}{(\sqrt{R} + 1)^2 - (\sqrt{R} - 1)^2} \rightarrow$$

$$y = \frac{4(\sqrt{R} - 1)^2}{2\sqrt{R}} = \frac{\pm\beta}{\theta_E} = \pm\beta \sqrt{\frac{c^2}{4GM}} \sqrt{\frac{D_S D_L}{D_S - D_L}}$$

رابطه‌ی نهایی y ۵ نمره

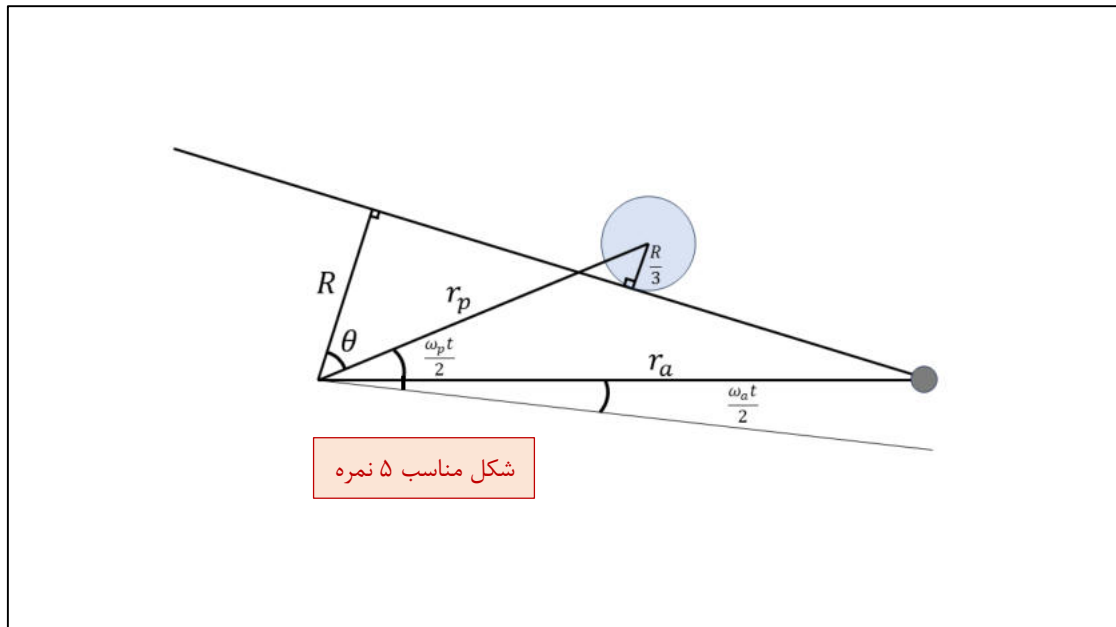
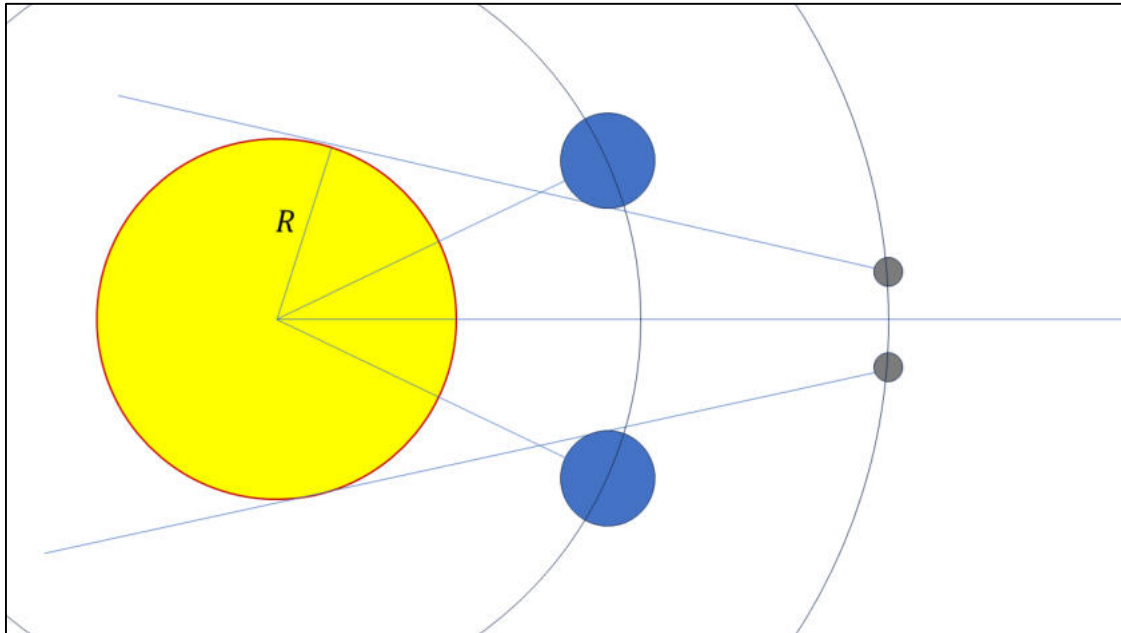
$$M = \frac{c^2 \beta^2}{16 G} \frac{D_S D_L}{D_S - D_L} \frac{R}{(\sqrt{R} - 1)^4}$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

سوال (۷ قسمت الف)

جرم ستاره‌ی مرکزی بسیار بیشتر از اجرام اطرافش است، لذا توصیف حرکت اجسام اطراف به صورت تک جسم خواهد بود.

برای آنکه از دید سیارک، حداقل بخش کوچکی از ستاره پوشانده شده باشد، لازم است از تماس اول تا تماس چهارم را در نظر بگیریم. مانند شکل زیر:



شکل مناسب ۵ نمره

$$r_a \cos\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2} + \theta\right) = R \quad \text{معادله ی اول ۵ نمره}$$

$$r_p \cos(\theta) = R + \frac{R}{3} \quad \text{معادله ی دوم ۵ نمره}$$

در بالا دو معادله و دو مجهول داریم: θ و t . دستگاه بالا را باید حل کنیم تا t را بیابیم:

$$r_a \cos\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right) \cos \theta - r_a \sin\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right) \sin \theta = R \rightarrow$$

$$r_a \cos\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right) \left(\frac{4R}{3r_p}\right) - r_a \sin\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2} = R \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} x := r_a \left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right) \rightarrow x \left(\frac{4R}{3r_p}\right) - \sqrt{r_a^2 - x^2} \sqrt{1 - \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2} = R$$

$$(r_a^2 - x^2) \left(1 - \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2\right) = x^2 \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2 + R^2 - 2xR \left(\frac{4R}{3r_p}\right) \rightarrow$$

$$x^2 - 2x \left(\frac{4R^2}{3r_p}\right) + R^2 - r_a^2 \left(1 - \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2\right) = 0$$

پس از حل معادله ی درجه ی دوی فوق داریم:

$$x_1 = -8.73589 \times 10^{10} \text{ m}$$

این پاسخ امکان ندارد اتفاق بیفتد زیرا لازمه اش آن است که $(\omega_p - \omega_a)t > \pi$ باشد که از لحاظ هندسی منتفی است. بنابراین عدد صحیح برابر است با:

$$x_2 = 1.73477 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$\xrightarrow{\text{حرکت یک جسم}} \omega_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p^3}}, \omega_a = \sqrt{\frac{GM}{r_a^3}} \rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{GM} \left(\frac{1}{\sqrt{r_p^3}} - \frac{1}{\sqrt{r_a^3}}\right)} \cos^{-1}\left(\frac{x}{r_a}\right) \rightarrow$$

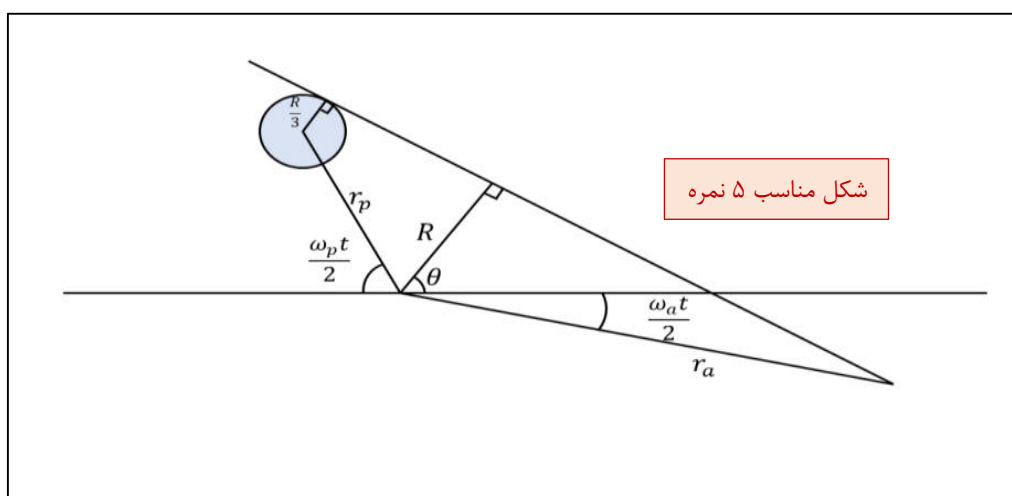
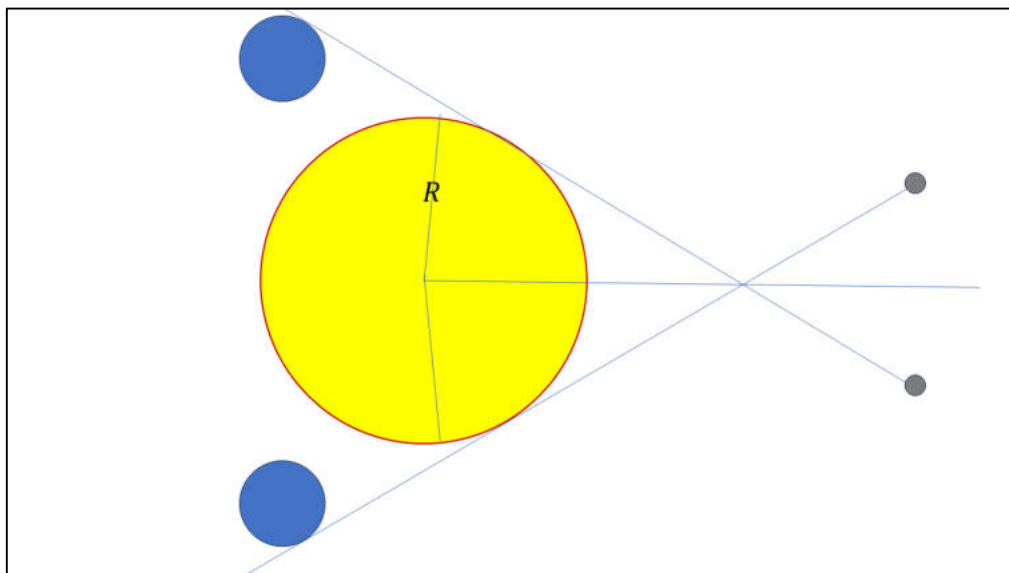
رابطه ی نهایی ۵ نمره

$$t = 3.599 \times 10^6 \text{ s} \rightarrow t = 41.66 \text{ days}$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ب)

شکل این قسمت به صورت زیر می باشد:



شکل مناسب ۵ نمره

$$r_a \cos\left(\theta + \frac{\omega_a t}{2}\right) = R \quad (I)$$

معادله ی اول ۵ نمره

$$r_p \cos\left(\pi - \theta - \frac{\omega_p t}{2}\right) = R - \frac{R}{3} = \frac{2}{3}R \rightarrow -r_p \cos\left(\theta + \frac{\omega_p t}{2}\right) = \frac{2}{3}R \quad (II)$$

معادله ی دوم ۵ نمره

$$\xrightarrow{(I),(II)} \left(\theta + \frac{\omega_p t}{2}\right) - \left(\theta + \frac{\omega_a t}{2}\right) - \frac{(\omega_p - \omega_a) t}{2} = \cos^{-1}\left(-\frac{2R}{3r_p}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{R}{r_a}\right)$$

$$t = 9.483 \times 10^6 \text{ s} \rightarrow t = 109.76 \text{ days}$$

رابطه ی نهایی ۵ نمره

جواب آخر صحیح ۵ نمره

سوال (۸ قسمت الف)

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

به خاطر انبساط زمان کیهان‌شناختی و کاهش انرژی فوتون‌های دریافتی داریم:

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2(1+z)^2} \quad \chi: \text{طول همراه} \quad \text{۵ نمره}$$

در جهان تخت طول همراه (χ) با طول ویژه (d_p) برابر است. جهان ما با تقریب خیلی خوب تخت است پس:

$$\chi \approx d_p$$

$$F = \frac{L}{r\pi d_p^2 (1+z)^2} \rightarrow d_p = \frac{1}{1+z} \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad \text{۵ نمره}$$

رابطه‌ی داپلر نسبیتی به صورت زیر است:

$$1+z = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \rightarrow \left(1-\frac{v}{c}\right)(1+z)^2 = 1+\frac{v}{c} \rightarrow v = c \left(\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}\right) \quad (I) \quad \text{۵ نمره}$$

طبق قانون هابل جهان تخت داریم:

$$v = H_0 d_p \rightarrow H_0 = \frac{v}{d_p} \rightarrow H_0 = v(1+z) \sqrt{\frac{4\pi F}{L}} \quad \text{۵ نمره}$$

$$\stackrel{(I)}{\rightarrow} H_0 = c \sqrt{\frac{4\pi F}{L} \frac{(1+z)(2+z)(1+z-1)}{(1+z)^2 + 1}} \rightarrow$$

$$H_0 = c \sqrt{\frac{4\pi F}{L} \frac{(1+z)(2+z)(z)}{(1+z)^2 + 1}} \quad \text{رابطه‌ی نهایی ۵ نمره}$$

به کمک روابط به دست آمده جدول را پر می کنیم:

z	$F (10^{-18} F_{sun})$	$d_{SN} (Mpc)$	$H_0 (\frac{km}{s.Mpc})$
0.050	3.280	194.41	75.23
0.071	1.623	270.96	75.83
0.087	1.114	322.24	77.69
0.110	0.705	396.6	78.64

قسمت ب)

واحد H_0 از بعد $\frac{1}{\text{زمان}}$ است پس H_0^{-1} بعد زمان دارد. همچنین $\frac{1}{H_0}$ می تواند تخمینی از سن عالم باشد زیرا با صادق دانستن تقریبی قانون هابل در زمان ها مختلف کیهان برای فاصله ی بین دو جسم بعد از گذشتن زمان t از شروع عالم

استدلال ۴ نمره

$$d = vt, v = Hd \xrightarrow{t=\frac{1}{H}} v = H(vt) \rightarrow t = \frac{1}{H}$$

نمره ۵

بنابراین $\frac{1}{H_0}$ را به عنوان تخمین مناسب از سن عالم پیشنهاد می کنیم. اما چهار داده برای H_0 داریم. بهترین گزارش این خواهد بود که میانگین $\frac{1}{H_0}$ را گزارش کنیم:

استدلال میانگین و خطا ۵ نمره

$$t_0 \approx \langle \frac{1}{H_0} \rangle \rightarrow t_0 \approx 12.754 \text{ Gyr}$$

جواب آخر صحیح میانگین ۵ نمره

برای گزارش خطای $\frac{1}{H_0}$ از انحراف معیار آن ها استفاده می کنیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{H_{0i}} - \text{avg} \left(\frac{1}{H_0} \right) \right)^2}{4}} \rightarrow \sigma = 223 \text{ Myr} = 0.22 \text{ Gyr}$$

جواب آخر صحیح خطا ۵ نمره

در نهایت:

$$t_0 = 12.75 \pm 0.22 \text{ Gyr}$$

سوال (۹ قسمت الف)

لایه‌های درونی خورشید به لایه‌های بیرونی خورشید طبق قانون پوسته‌ی نیوتن به صورت شعاعی نیرو وارد می‌کنند. گشتاور این فرم نیرو صفر است.

۵ نمره

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = (r\hat{r}) \times (F\hat{r}) \rightarrow \tau = 0$$

۵ نمره

می‌دانیم $\tau = \frac{dL}{dt}$ و چون $\tau = 0$ است بنابراین: ثابت $\frac{dL}{dt}$ یعنی L که تکانه‌ی زاویه‌ای خورشید باشد ثابت است.

استدلال ۵ نمره

توضیح بالا در حد ابتدایی خوب است و اگر دانش‌پژوه آن را نوشته باشد قابل قبول است اما توضیح بالا کاملاً علمی نیست. ممکن است سوال شود اصطکاک بین لایه‌های مختلف خورشید را چرا در مدل وارد نکردیم. پاسخ این است که حتی اگر اصطکاک بین لایه‌های خورشید را وارد کنیم با توجه به قانون $\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$ در دستگاه مرکز جرم، به جهت اینکه تمام ذرات یک سیستم بزرگی مثل خورشید به فرم قانون سوم نیوتن (عمل و عکس‌العمل) به همدیگر نیرو وارد می‌کنند، جمع تمام نیروهای داخلی صفر است و نیروی خارجی نیز به سیستم وارد نمی‌شود. (خورشید با تقریبی خیلی خوب نسبت به سیارات کم جرم اطرافش ایزوله به حساب می‌آید) لذا جمع نیروهای خارجی وارد شده به مرکز جرم صفر است بنابراین: $\bar{\tau} = 0$ است و لذا \bar{L} ثابت است. بنابراین تکانه‌ی زاویه‌ای کل خورشید نسبت به مرکز جرم خورشید (مرکز هندسی آن) ثابت است.

قسمت ب)

۵ نمره

۵ نمره

$$L = I\omega \quad , \quad I_{\text{کره}} = \frac{2}{5}MR^2 \rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{I_2\omega_2}{I_1\omega_1} = 1 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{M_1 \approx M_2} \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \xrightarrow{\omega \propto \frac{1}{T}} T_2 = T_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \rightarrow T_2 = 3.257 \text{ min} \quad \text{جواب آخر صحیح ۵}$$

رابطه نهایی ۵ نمره

قسمت ج)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} \xrightarrow{\text{در لایه}} \Delta\lambda = 2 \frac{\lambda(R_2\omega_2)}{c} \rightarrow \Delta\lambda = 2 \frac{\lambda(2\pi R_2)}{c T_2} \rightarrow \Delta\lambda = 8.64 \text{ \AA} \quad (I)$$

جواب آخر صحیح ۵

رابطه نهایی ۵ نمره

قسمت د)

$$\phi = B A \rightarrow \phi = 4\pi r^2 B \quad \text{۵ نمره}$$

$$r_2^2 B_2 = r_1^2 B_1 \rightarrow B_2 = B_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$\rightarrow \Delta v = 2 \left(\frac{eh}{4\pi m_e}\right) \frac{B}{h} \rightarrow \Delta v = 2 \frac{eB}{4\pi m_e} \rightarrow \Delta v_2 = 2 \frac{eB_2}{4\pi m_e} \quad \text{رابطه نهایی ۵ نمره}$$

$$\Delta v_{2 \text{ زیمان}} = 3.336 \times 10^{10} \text{ Hz} \quad \text{پاسخ نهایی صحیح برای } \Delta v \text{ یا } \Delta \lambda \text{ ۵ نمره}$$

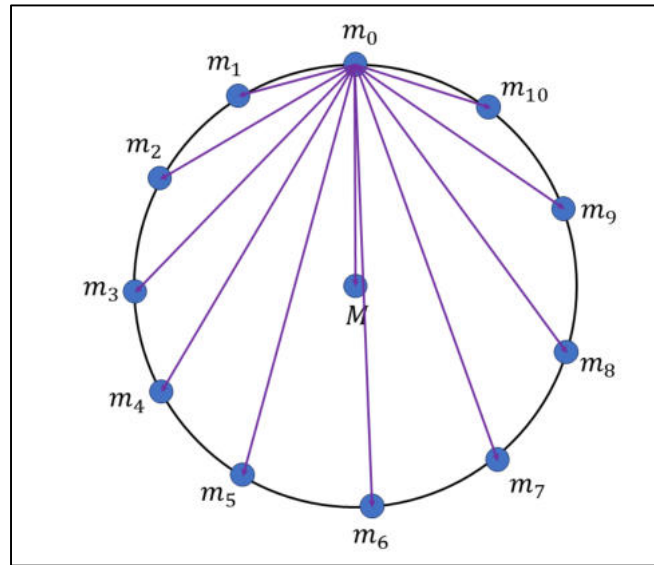
از طرفی داریم:

$$v = \frac{c}{\lambda} \rightarrow |\Delta v| = \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda \rightarrow \Delta \lambda_{2 \text{ زیمان}} = \Delta v \frac{\lambda_{H\alpha}^2}{c} \rightarrow \Delta \lambda_{2 \text{ زیمان}} = 0.45 \text{ \AA} \quad (II) \quad \text{۵ نمره}$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \Delta \lambda_{\text{زیمان}} < \Delta \lambda_{\text{پهن شدگی}}$$

پس خط $H\alpha$ به صورت دو خط جدا دیده نمی شود. نتیجه گیری ۵ نمره

سوال (۱۰ قسمت الف)

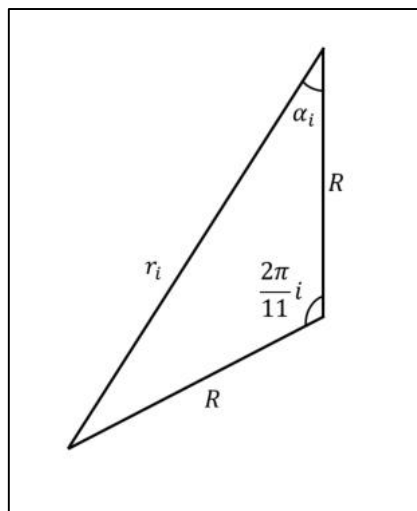


نیروی برآیند وارد بر یکی از این اجرام را به صورت ؟ به دست می آوریم.

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r} - 2Gm^2 \hat{r} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{r_i^2} \cos \alpha_i \quad \text{نمره ۵}$$

در رابطه‌ی بالا r_i فاصله‌ی جسم m_i تا m_0 است و α_i زاویه‌ی بردار نیرو نسبت به محور عمودی است.

می‌توانیم r_i را بر حسب شعاع دایره (R) به این صورت بنویسیم:



$$r_i = 2R \sin\left(\frac{2\pi}{11} \cdot \frac{i}{2}\right) \rightarrow r_i = 2R \sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)$$

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{11}i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi i}{11} \rightarrow \cos \alpha_i = \sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)$$

رابطه نهایی ۱۰ نمره

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r} - \frac{1}{2} \frac{Gm^2}{R^2} \hat{r} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r} - \frac{1}{2} \frac{Gm^2}{R^2} \hat{r} (8.83194)$$

برای اینکه هر کدام از اجرام ۱۱ گانه بتواند روی دایره به حرکت خود ادامه دهند لازم است $F = \frac{mv^2}{R}$ باشد.

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{\frac{G}{R}} \sqrt{M + \frac{8.83194}{2} m}$$

$$K = \frac{11}{2} mv^2 = 5.5 \frac{Gm}{R} \left(M + \frac{8.83194}{2} m \right) \xrightarrow{M=m} K = 29.78784 \frac{Gm^2}{R} \quad (I)$$

رابطه نهایی K ۵ نمره

هر دو جرم نسبت به هم پتانسیل $-\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$ دارند پس:

رابطه نهایی U ۵ نمره

$$U = -11 \frac{GMm}{R} - \frac{11}{2} Gm^2 \left(2 \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2R \sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)} \right) = -11 \frac{Gm^2}{R} \left(1 + \frac{8.83194}{2} \right)$$

$$= -59.57567 \frac{Gm^2}{R} \quad (II)$$

جواب آخر درست ۵ نمره

$$E = K + U \xrightarrow{(I),(II)} E = -29.78783 \frac{Gm^2}{R} = -4.721 \times 10^{29} J$$

قسمت ب)

پس از اینکه جرم مرکزی حذف می شود به خاطر تقارن، دایروی و مشترک بودن مدارها قبل از حذف شدن در هر لحظه از زمان ۱۱ جرم روی یک دایره به صورت منظم توزیع شده خواهند بود.

استدلال ۵ نمره

بنابراین نیروی برآیند وارد شده به هر جرم $-\frac{1}{2} \gamma \frac{Gm^2}{r^2} \hat{r}$ خواهد بود که در آن:

$$\gamma = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)} = 8.83194$$

در نتیجه این مسئله را می توان به یک مسئله ی تک جسم تقلیل داد. در لحظه ی محو شدن ستاره ی مرکزی سرعت اولیه ی هر جسم v_0 بوده است و عمود بر راستای شعاع بوده است و پس از آن هر جسم تحت تاثیر

نیروی مرکزی $\hat{r} \frac{1}{2} \gamma \frac{Gm^2}{r^2} -$ قرار می گیرد. چون فرم نیرو مثل حالت تک جسم شده است هر نتیجه ای که برای مسئله ی تک جسم داشته باشیم را می توان برای این حالت نیز استفاده کرد. در مسئله ی تک جسم داریم.

$$F = -\frac{km}{r^2} \hat{r} \rightarrow \text{مدار مقطع مخروطی}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{k}{r} > 0 \rightarrow \text{مدار بیضوی است}$$

در این مسئله $k = \frac{1}{2} \gamma Gm$ است پس:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{\frac{1}{2} \gamma Gm}{R} = \frac{Gm}{R} \left(\frac{1 + \frac{8.83194}{2}}{2} - \frac{8.83194}{2} \right) = \frac{Gm}{R} \times (-1.70799) < 0$$

پس مدار هر جسم بیضوی هست. از رابطه ی سرعت در حضيض داریم:

$$v_p = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \gamma Gm}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

رابطه نهایی v_p ۱۰ نمره

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{\frac{1}{2} \gamma Gm}{R} = -1.70799 \frac{Gm}{R} = -\frac{\frac{1}{2} \gamma Gm}{2a}$$

$$a = R \left(\frac{\gamma}{4 \times 1.70799} \right) \rightarrow v_p = v_0 \rightarrow \sqrt{2 \times 1.70799} \sqrt{\frac{Gm}{R}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$= \sqrt{\frac{Gm}{R}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}} \rightarrow e = \frac{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}} - \sqrt{2 \times 1.70799}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}} + \sqrt{2 \times 1.70799}} \approx 0.1147$$

رابطه نهایی a ۱۰ نمره

چون همه ی ابعاد به صورت متناسب با هم بزرگ و کوچک می شوند تغییرات میانگین فاصله ی اجرام از همدیگر متناسب با تغییرات فاصله ی یک جسم از مرکز است. استدلال ۵ نمره

$$\frac{\text{بیشترین میانگین فاصله}}{\text{کمترین میانگین فاصله}} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = 1.259$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ج)

می توانیم مدت زمانی که یک جسم از حضيض خود به اوج می رود را حساب کنیم که نصف دوره ی تناوبش است.

$$t = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}} = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\gamma GM}}$$

$$= \sqrt{\frac{R^3}{Gm}} \times \pi \left(\frac{\gamma}{4 \times 1.70799}\right)^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$$

$$\xrightarrow{m=M_{\oplus}, R=1 AU} t = 202.71 \text{ yr}$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

رابطه ی نهایی t ۵ نمره

قسمت د)

برای این منظور لازم است مدار هر جسم سهمی یا هذلولی شود:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\gamma Gm}{R} \geq 0 \rightarrow \frac{G}{2R} \left(M + \frac{1}{2}\gamma m\right) - \frac{1}{2}\frac{\gamma Gm}{R} \geq 0$$

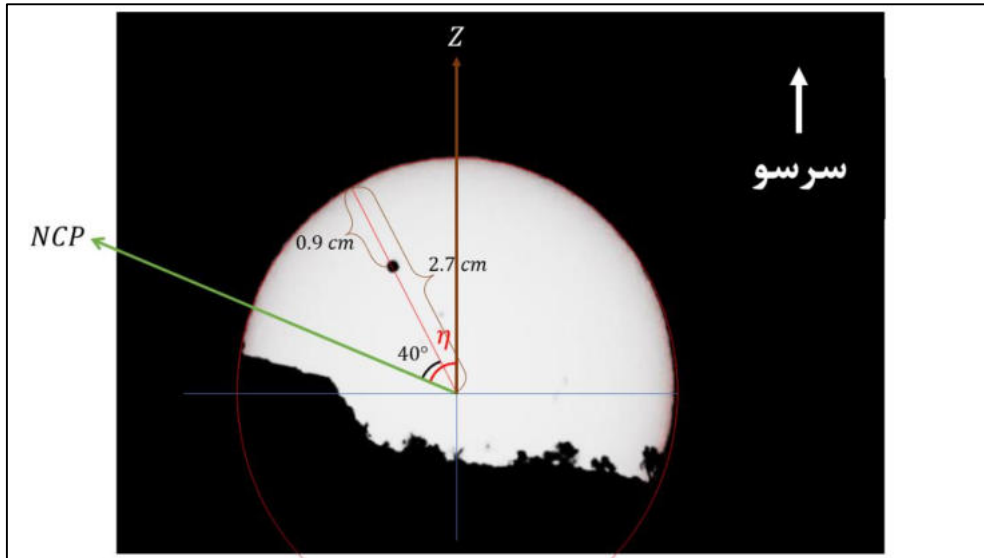
$$\rightarrow M \geq \gamma m \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\gamma m \rightarrow \text{حداقل جرم ستاره مرکزی} = \frac{1}{2}\gamma M_{\oplus} = 4.416 M_{\oplus}$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

نامساوی نهایی ۵ نمره

سوال (۱۱ قسمت الف)

از تصویر دوم باید وضعیت جایی از مسیر که شیشه تصویر اول باشد را به دست آوریم. برای این امر مرکز هر دو دایره را بدست می آوریم.

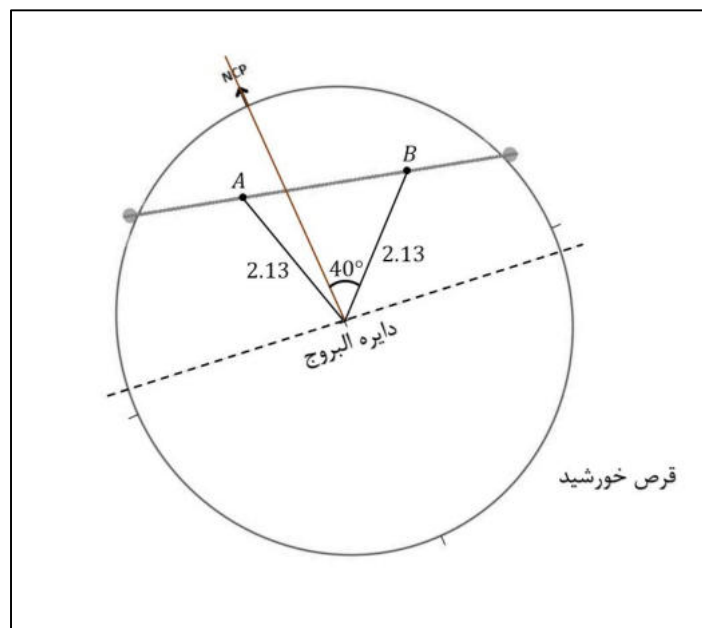


رسم درست روی شکل ۵ نمره

از تصویر اول:

$$\frac{\text{فاصله زهره از مرکز}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{2.7 - 0.9}{2.7} = \frac{2}{3}$$

۵ نمره



رسم درست روی شکل ۵ نمره

از تصویر دوم:

جایی از مسیر که نسبت فاصله‌ی آن از مرکز به شعاع دایره برابر $\frac{2}{3}$ را پیدا می‌کنیم.

$$\text{فاصله‌ی مطلوب از مرکز} = 3.2 \times \frac{2}{3} = 2.133 \text{ cm} \quad \text{۵ نمره}$$

شعاع دایره = 3.2 cm

مکان‌های A و B محتمل هستند. کل مدت زمان گرفت طبق اطلاعات سوال $1:50 + 4:50 = 6:40$ است.

از طرفی با توجه به مکان NCP و قطب شمال دایره‌البروج و اینکه جهت گردش زهره و زمین همانند هم و پادساعتگرد است و سرعت زاویه‌ای زهره از زمین بیشتر است به راحتی می‌توان استدلال نمود در مدت گرفت، مسیر حرکت زهره از سمت چپ به راست روی شکل است.

اشاره به جهت حرکت ۵ نمره

اگر A مکان زهره باشد داریم:

استدلال اینکه چرا A نمی‌تواند درست باشد ۵ نمره

$$t_A = \frac{1.75}{5.35} (6^h:40^m) \rightarrow t_A = 2^h:10^m:50.47^s$$

این مدت زمان از شروع گرفت از سه ساعت که در صورت سوال گفته شده است کمتر است پس موقعیت A نمی‌تواند جواب باشد لذا موقعیت B را می‌پذیریم.

$$t_B = \frac{3.65}{5.35} (6^h:40^m) \rightarrow t_B = 4^h:32^m:53.83^s \quad \text{۵ نمره}$$

پاسخ فوق از ۳ ساعت بیشتر است و مشکلی ندارد.

روز 17 ام خرداد به وقت گرینویچ $2:42:54 + (4^h:32^m:53.83^s) = 22:10$ = زمان تصویر

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ب)

حال که موقعیت B در عکس تایید شد راستای NCP را با حفظ زاویه نسبت به B روی تصویر اصلی مشخص می‌کنیم.

این کار را انجام می‌دهیم و با توجه به اینکه می‌بینیم راستای NCP بالای افق است و به سمت چپ است نتیجه می‌گیریم که عرض جغرافیایی ناظر شمالی است و خورشید در تصویر در حال طلوع است.

نتیجه گیری ۵ نمره

نتیجه گیری ۵ نمره

زاویه‌ی بین راستای سرسو و NCP را در تصویر واقعی اندازه می‌گیریم. این همان زاویه‌ی اختلاف منظر هنگام طلوع است. (زاویه‌ی η)

$$\eta = 64^\circ \text{ از روی شکل} \quad \boxed{5 \text{ نمره}}$$

در انتهای روز ۱۶ ام که گذره زهره اتفاق افتاده است 31 + 31 + 16 روز از اعتدال بهاری گذشته است پس طول سماوی خورشید برابر است با:

$$\lambda_{\odot} = \frac{31 + 31 + 16}{365.25} \times 360 = 76.879^\circ \quad \boxed{5 \text{ نمره}}$$

با صرف نظر کردن از خروج از مرکز مدار زمین و در نظر گرفتن مقدار صفر برای تعدیل زمان در اول بهار بعد خورشید میانگین برابر است با طول سماوی خورشید:

$$RAMS = \lambda_{\odot} \rightarrow RAMS = 76.879 \quad \boxed{5 \text{ نمره}}$$

با استفاده از روابط تبدیل مختصات استوایی به دایره البروجی، میل و بعد خورشید را محاسبه می کنیم:

$$\sin \delta_{\odot} = \sin \epsilon \sin \lambda_{\odot} \rightarrow \delta_{\odot} = 22.851^\circ \quad \boxed{5 \text{ نمره}}$$

$$\tan \alpha_{\odot} = \cos \epsilon \tan \lambda_{\odot} \rightarrow \alpha_{\odot} = 75.739^\circ \quad \boxed{5 \text{ نمره}}$$

محاسبه ی تعدیل زمان در روز ۱۶ خرداد ماه:

$$E = RAMS - \alpha_{\odot} = 1.14^\circ \quad \boxed{5 \text{ نمره}}$$

حال کره ی ناظر را بررسی می کنیم.

رابطه ی کسینوس ها در مثلث PZX برای محاسبه ی عرض جغرافیایی عکاس:

$$\sin \varphi = \cos(90) \sin \delta_{\odot} + \sin(90) \cos \delta_{\odot} \cos \eta \quad \boxed{5 \text{ نمره}}$$

$$\varphi = \sin^{-1}(\cos \delta_{\odot} \cos \eta) \rightarrow \varphi = 23.826^\circ \quad \boxed{\text{جواب آخر صحیح 5 نمره}}$$

محاسبه ی زاویه ساعتی طلوع خورشید:

$$\cos H_{\odot} = -\tan \varphi \tan \delta_{\odot} \rightarrow H_{\odot} = -100.725^\circ$$

$$HAMS = H_{\odot} - E \rightarrow HAMS = 258.135^\circ \rightarrow HAMS = 17^h : 12^m : 32.38^s$$

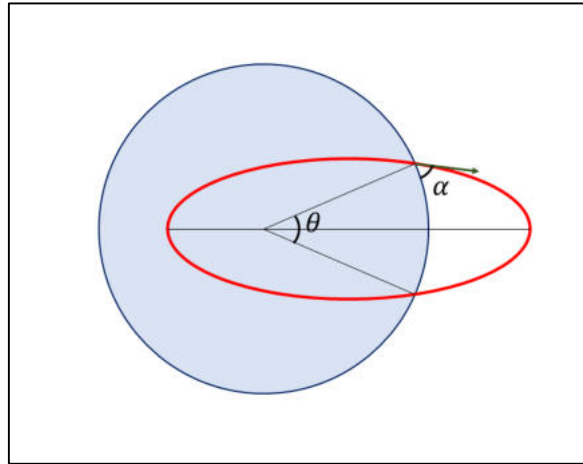
رابطه ی طول جغرافیایی 5 نمره

طول جغرافیایی عکاس برابر است با:

$$l = HAMS - GMT \rightarrow l = [(17^h : 12^m : 32.38^s) - (12^h + 2^h : 42^m : 54^s)] \times 15$$

$$l = 37.4^\circ E \quad \boxed{\text{جواب آخر صحیح 5 نمره}}$$

سوال (۱۲) قسمت الف)



با توجه به معادله‌ی قطبی بیضی داریم:

$$R_{\oplus} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\pi - \frac{\theta}{2})} \rightarrow R_{\oplus} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(\frac{\theta}{2})} \quad (I) \quad \text{۵ نمره}$$

با توجه به رابطه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم در مدار بیضوی داریم:

$$h = R_{\oplus} v \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R_{\oplus} v \cos(\alpha) = \sqrt{GM_{\oplus} a(1 - e^2)} \rightarrow R_{\oplus}^2 v^2 \cos^2 \alpha = GM_{\oplus} a(1 - e^2) \quad (II) \quad \text{۵ نمره}$$

با توجه به پایستگی انرژی در مدار بیضی داریم:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = -\frac{GM_{\oplus}}{2a} \quad (III) \quad \text{۵ نمره}$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} R_{\oplus}^2 v^2 \cos^2 \alpha = GM_{\oplus} R_{\oplus} \left(1 - e \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{(III)} R_{\oplus} \left(\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} - \frac{GM_{\oplus}}{a}\right) \cos^2 \alpha = GM_{\oplus} \left(1 - e \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$a = \frac{R_{\oplus}}{2 - \frac{1 - e \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \alpha}} = \frac{R_{\oplus} \cos^2 \alpha}{e \cos \frac{\theta}{2} - 1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

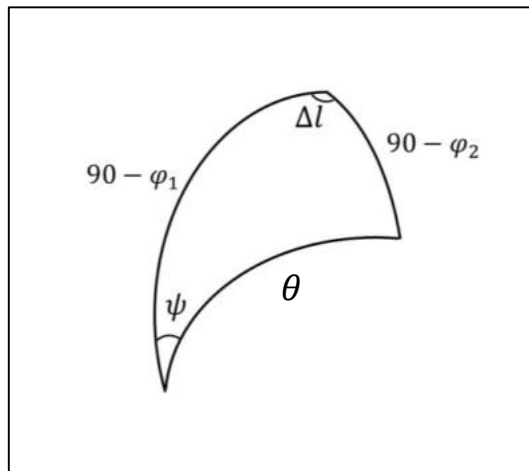
$$R_{\oplus} - R_{\oplus} e \cos \frac{\theta}{2} = \frac{R_{\oplus} \cos^2 \alpha}{e \cos \frac{\theta}{2} - 1 + 2 \cos^2 \alpha} (1 - e^2)$$

فرآیند حل
دستگاه سه معادله
۱۵ نمره

$$-1 - e^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2e \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos^2 \alpha - 2e \cos \frac{\theta}{2} \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - e^2 \cos^2 \alpha$$

$$\rightarrow e^2 \left(\cos^2 \alpha - \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + 2e \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \quad (IV)$$

مقدار θ را از رابطه‌ی کسینوس‌ها به دست می‌آوریم:



$$\cos \theta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta l \rightarrow \theta = 7.341^\circ$$

۵ نمره

$$\alpha = 60 \xrightarrow{(IV)} e = 0.96627, e = 1.04060$$

با توجه به انرژی منفی مدار و مقید بودن آن مقدار بیشتر از یک برای خروج از قابل قبول نیست.

$$e = 0.96627$$

۵ نمره

$$a = \frac{R_{\oplus} \cos^2 \alpha}{e \cos \frac{\theta}{2} - 1 + 2 \cos^2 \alpha} \rightarrow a = 3.43 \times 10^6 \text{ m}$$

۵ نمره

$$v = \sqrt{GM_{\oplus} \left(\frac{2}{R_{\oplus}} - \frac{1}{a} \right)} \rightarrow v = 2988.021 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۵ نمره

قسمت ب)

رابطه ی چهارجزئی:

$$\sin \varphi_1 \cos(l_2 - l_1) = \cos \varphi_1 \tan \varphi_2 - \frac{\sin(l_2 - l_1)}{\tan \psi} \rightarrow \psi = 78.79^\circ \quad \text{۵ نمره}$$

در محل پرتاب زمین با سرعت $R_{\oplus} \omega_{\oplus} \cos \varphi_1$ در حال چرخیدن به سمت شرق است پس:

$$v'_{\text{افقی}} = \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + R_{\oplus}^2 \omega_{\oplus}^2 \cos^2 \varphi_1 + 2v \cos \alpha R_{\oplus} \omega_{\oplus} \cos \varphi_1 \sin(\psi)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{23h:56m} \rightarrow v'_{\text{افقی}} = 1861.776 \frac{m}{s}$$

$$v_{\text{عمودی}} = v \sin \alpha \rightarrow \alpha' = \tan^{-1} \left(\frac{v_{\text{عمودی}}}{v'_{\text{افقی}}} \right) \rightarrow \alpha' = 54.266^\circ \quad \text{۵ نمره}$$

$$v' = \sqrt{v'^2_{\text{افقی}} + v^2_{\text{عمودی}}} \rightarrow v' = 3187.854 \frac{m}{s} \quad \text{۵ نمره}$$

از معادله ی پایستگی انرژی در مدار جدید داریم:

$$\frac{v'^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = -\frac{GM_{\oplus}}{a'} \rightarrow a' = \frac{GM_{\oplus}}{2 \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} - v'^2} \rightarrow a' = 3.46739 \times 10^6 m \quad \text{۵ نمره}$$

$$R_{\oplus}^2 v'^2 \cos^2 \alpha' = GM_{\oplus} a' (1 - e'^2) \rightarrow e' = \sqrt{1 - \frac{R_{\oplus}^2 v'^2 \cos^2 \alpha'}{GM_{\oplus} a'}} \rightarrow e' = 0.94768 \quad \text{۵ نمره}$$

از معادله ی قطبی بیضی برای مدار جدید داریم:

$$R_{\oplus} = \frac{a(1 - e'^2)}{1 + e' \cos \left(\pi - \frac{\theta'}{2} \right)} \rightarrow R_{\oplus} = \frac{a(1 - e'^2)}{1 - e' \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right)} \rightarrow$$

$$\theta' = 2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{e'} \left(1 - \frac{a'(1 - e'^2)}{R_{\oplus}} \right) \right) \rightarrow \theta' = 9.331^\circ \quad \text{۵ نمره}$$

برای محاسبه ی عرض جغرافیایی محل برخورد از رابطه ی کسینوس ها استفاده می کنیم:

$$\sin \varphi'_2 = \sin \varphi_1 \cos \theta' + \cos \varphi_1 \sin \theta' \cos \psi \rightarrow \varphi'_2 = 37.75524^\circ \quad \text{۵ نمره}$$

از رابطه‌ی چهارجزئی برای محاسبه‌ی طول جغرافیایی محل برخورد استفاده می‌کنیم:

$$\sin \varphi_1 \cos \psi = \frac{\cos \varphi_1}{\tan \theta'} - \sin \frac{\psi}{\tan(l'_2 - l_1)} \rightarrow l'_2 = 64.0305660 \quad \text{۵ نمره}$$

اما l'_2 طول جغرافیایی مکان جدید اصابت نیست زیرا زمین نیز در این مدت چرخیده است. برای محاسبه‌ی میزان چرخش زمین نیاز است مدت زمان پرواز را بیابیم:

$$\tan \left(\frac{E'}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+e'}{1-e'}} \tan \left(\frac{\pi - \theta'}{2} \right) \rightarrow E' = 179.23495^\circ$$

از معادله‌ی کپلر داریم:

نوشتن معادله ۵ نمره

$$\frac{2\pi}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{t_{\text{پرواز}}}{2} \right) = E' - e' \sin E' \rightarrow t_{\text{پرواز}} = T \left(1 - \frac{E' - e' \sin E'}{\pi} \right) \quad (V)$$

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_\oplus}} \xrightarrow{(V)} t_{\text{پرواز}} = 16.8291 \text{ s} \quad \text{۱۰ نمره}$$

$$l'_{2 \text{ واقعی}} = l'_2 - \left(\frac{2\pi}{23h:56m} \right) t_{\text{پرواز}} \rightarrow l'_{2 \text{ واقعی}} = 64.23428 \quad \text{۵ نمره}$$

قرار بود تیر به نقطه‌ی $\begin{cases} \varphi_2 = 37^\circ 35' \\ l_2 = 61^\circ 48' \end{cases}$ اصابت کند اما به نقطه‌ی $\begin{cases} \varphi'_2 = 37.755^\circ \\ l'_{2 \text{ واقعی}} = 64.23428^\circ \end{cases}$ اصابت کرده است. حال فاصله‌ی این دو نقطه را محاسبه می‌کنیم:

از رابطه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$\xi = \cos^{-1}(\sin \varphi'_2 \sin \varphi_2 + \cos \varphi'_2 \cos \varphi_2 \cos(l'_2 - l_2)) \rightarrow \xi = 1.93445 \quad \text{۵ نمره}$$

اختلاف مسافت روی زمین برابر است با:

$$d = R_\oplus \xi_{rad} \rightarrow d = 215.1 \text{ km} \quad \text{۵ نمره}$$



نوزدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه سؤالات آزمون مرحله 2 سال تحصیلی 1401-1402

نهایی

نکات بسیار مهم

لطفاً قبل از شروع پاسخگویی به سؤالات، این قسمت را به دقت بخوانید. برای خواندن این قسمت 5 دقیقه وقت اضافه در نظر گرفته شده است.

- (1) این آزمون حاوی 10 سؤال تشریحی است. مجموع کل نمره این آزمون 1000 نمره است که بسته به نوع سؤالات بین 10 سؤال توزیع شده است. در سؤالاتی که بخش های الف و ب و ج و ... دارند، نمره هر بخش به تفکیک داده شده است.
- (2) سوالات اول و دوم و سوم سوالات کوتاه هستند. این سوالات به نسبت سوال های چهارم تا دهم زمان کمتری لازم دارند و نمره آنها نیز کمتر است.
- (3) دقت کنید که تمامی مقادیر ثابت باید از جدول ثوابت که در ابتدای سؤالات آمده گرفته شوند. اگر شما خواستید سؤالی را از یک روش ابتکاری و جدید حل کنید و نیاز به ثابتی داشتید که در جدول ثوابت نبود، حتماً آن ثابت را در ابتدای پاسخ خود به سؤال، داخل کادر بنویسید. در این مورد اگر راه حل شما درست باشد و پاسخ شما هم در محدوده دقت باشد، نمره کامل خواهید گرفت.
- (4) در بعضی از سوالات در پایان سوال توضیحاتی داده شده که به شما در حل سوال کمک می کند و یا توجه به آنها لازم است. پس حتماً قبل از شروع به حل سوال، متن سوال را به طور کامل بخوانید.
- (5) برای دقت و خوانایی بیشتر و ممانعت از محدودیت های نرم افزار Microsoft Word فارسی، در این آزمون از اعداد انگلیسی استفاده شده است. شما در پاسخنامه می توانید به اختیار خود از اعداد فارسی و یا انگلیسی استفاده کنید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت	
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش	G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور	c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمان	σ
$1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	ثابت بولتزمان	k
$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	عدد آووگادرو	
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	سال نوری	ly
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک	pc
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	واحد نجومی	AU
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید	M_{\odot}
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید	R_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
+4.74	قدر مطلق خورشید	M_{\odot}
-26.8	قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
5780 K	دمای مؤثر سطح خورشید	T_{\odot}
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین	M_{\oplus}
6380 km	شعاع زمین	R_{\oplus}
-4.6	کمترین قدر ظاهری سیاره زهره	
23.5°	تمایل محور زمین	ϵ

قدر کم نورترین ستاره قابل مشاهده با چشم غیر مسلح = 6.0

قطر مردمک چشم انسان = 6 میلیمتر

سؤال اول: (35 نمره)

کوتوله سفیدی به جرم $m = 1M_{\odot}$ را در نظر بگیرید که از ستاره همدم خود با آهنگ $10^{-9} M_{\odot} yr^{-1}$ هیدروژن را می بلعد. این فرایند به مدت 10^5 سال ادامه پیدا می کند. سپس هیدروژن بلعیده شده به یکبارہ و در مدت 90 روز می سوزد و به هلیوم تبدیل می شود. درخشندگی تولید شده در این فرایند چند برابر درخشندگی خورشید است؟ (در مجموعه واکنش های هسته ای هیدروژن سوز 0.7 درصد ماده هیدروژنی به انرژی تبدیل می شود)

پاسخ:

$$\Delta m = \dot{m}\Delta t = 10^{-9}M_{\odot} \times 10^5 = 10^{-4}M_{\odot}$$

$$E_{\text{تولیدی}} = \frac{0.7}{100}\Delta mc^2 = \frac{0.7}{100}10^{-4}(1.99 \times 10^{30}) \times (3 \times 10^8)^2 = 1.254 \times 10^{41} J$$

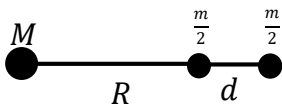
$$L_{\text{تولیدی}} = \frac{E}{\Delta t} = \frac{1.254 \times 10^{41}}{90 \times 24 \times 3600} = 1.61 \times 10^{34} W \rightarrow \frac{L}{L_0} = 4.19 \times 10^7$$

سؤال دوم : (45 نمره)

فضانوردی را در نظر بگیرید که به درون یک سیاهچاله سقوط می کند. در اثر نزدیکی به سیاهچاله و به دلیل تغییرات شدید میدان گرانش، بدن فضانورد در راستای قد او کشیده می شود. حداکثر کشیدگی که فضانورد می تواند تحمل کند 1000 نیوتن است. اگر جرم این فضانورد را 100 کیلوگرم و قد او را 2 متر در نظر بگیریم، جرم سیاهچاله در چه شرایطی باید صدق کند تا فضا نورد بتواند به سلامت از افق حادثه سیاهچاله (شعاع شوارتزشیلد) عبور کند.

پاسخ:

سیستم را به صورت یک جرم مرکزی M (سیاهچاله) و دو جرم $\frac{m}{2}$ در فاصله R از سیاهچاله و d از یکدیگر در نظر می گیریم:



شرط مسئله به این صورت است که اختلاف نیروی وارد شده به دو طرف فضانورد باید کمتر از 1000N باشد.

$$\Delta F = \left| -\frac{GMm/2}{R^2} + \frac{GMm/2}{(R+d)^2} \right| \leq 1000N, R = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\rightarrow \Delta F = \frac{GMm/2}{R^2} \left(-\frac{1}{\left(1 + \frac{d}{R}\right)^2} + 1 \right) \approx \frac{GMm/2}{R^2} \times \frac{2d}{R} = \frac{GMmd}{R^3} = \frac{GMmd}{8G^3 M^3 / c^6} = \frac{c^6 md}{8G^2 M^2} \leq 1000N$$

$$\rightarrow M \geq \sqrt{\frac{c^6 md}{8G^2 \times 1000N}} \rightarrow M \geq 32.0 \times 10^2 M_{\odot}$$

$$F = \frac{GMm}{R^2} \leq 1000N \rightarrow \frac{GMm}{\frac{4G^2 M^2}{c^4}} \leq 1000N \rightarrow M \geq \frac{c^4 m}{4G \times 1000} = 1.52 \times 10^{12} M_{\odot}$$

سؤال سوم : (45 نمره)

تعداد ستاره هایی که با چشم غیر مسلح (حداکثر قدر ظاهری 6) در کل آسمان قابل مشاهده است حدوداً 6000 است. فرض کنید عالم کاملاً همگن و تمامی این ستاره ها خورشیدگون هستند. در این صورت قدر ستاره ای که شار آن معادل کل شار دریافتی از این ستاره ها باشد چقدر است؟ قدر به دست آمده را با قدر سیاره زهره مقایسه کنید.

پاسخ:چگالی همگن ← $n = cte$

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 8.87 \times 10^{-51} m^{-3}, \quad N = 6000$$

$$R: \text{farthest visible star} \rightarrow 6 - M_{\odot} = -2.5 \log\left(\frac{(1AU)^2}{R^2}\right) \rightarrow R = 5.45 \times 10^{17} m$$

$$db = \frac{dL}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot} dN}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \times n 4\pi r^2 dr = n L_{\odot} dr$$

$$b_{tot} = \int_0^{b_{tot}} db = \int_0^R n L_{\odot} dr = n L_{\odot} R = L_{\odot} \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} R = \frac{3L_{\odot} N}{4\pi R^2} = 1.86 \times 10^{-6} \text{ watt}$$

$$m - M_{\odot} = -2.5 \log\left(\frac{b_{tot}}{b_{\odot}}\right), \quad b_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1AU)^2} \rightarrow \frac{b_{tot}}{b_{\odot}} = \frac{3N(1AU)^2}{R^2} \Rightarrow m = -4.64$$

$$m_{Venus} = -4.6$$

تقریباً برابرند.

سوال چهارم: (70 نمره)

اخترشناسان از انتقال به سرخ z برای تعیین فاصله و یا به عنوان معیاری از زمان در کیهان شناسی استفاده می کنند. انتقال به سرخ نمایانگر زمانی است که اندازه عالم $\frac{1}{1+z}$ برابر اندازه کنونی بوده است. اخیراً تلسکوپ فضایی جیمز وب ستاره های دو کهکشان دور دست را طیف نگاری کرده است. این دو کهکشان به ترتیب در انتقال به سرخ های $z_{g1} = 11$ و $z_{g2} = 13$ قرار دارند. بر مبنای اطلاعات طیفی به نظر می رسد سن ستاره های این دو کهکشان به ترتیب $\tau_1 = 400 \text{ Myr}$ و $\tau_2 = 200 \text{ Myr}$ باشد. فرض کنید کمیت z_f انتقال به سرخ مرتبط با زمانی را نشان می دهد که ستاره های هر کدام از این دو کهکشان متولد شده اند.

الف) عبارتی کلی برای z_f بر حسب z_g و τ به دست آورید. (45 نمره)

ب) مقدار عددی z_f را برای دو کهکشان بالا حساب کنید. (25 نمره)

سن فعلی عالم را 13.8 میلیارد سال، عالم را ماده غالب و رابطه ضریب مقیاس با زمان را به شکل $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ در نظر بگیرید.

پاسخ:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{g1} = 11, z_{g2} = 13 \\ \tau_1 = 400 \text{ Myr}, \tau_2 = 200 \text{ Myr} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} t_0 = 13.8 \text{ Myr} \\ a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \end{array} \right.$$

الف)

$$\frac{a(z)}{a_0} = \frac{1}{1+z}, a_0 = 1 \rightarrow a(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t_f = t_g - \tau \rightarrow a(t_f) = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} = a(z_f)$$

$$\rightarrow (1+z_f)^{-1} = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow z_f = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{-\frac{3}{2}} - 1$$

$$\frac{1}{1+z_g} = a(z_g) = a(t_g) = \left(\frac{t_g}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{t_g}{t_0} = (1+z_g)^{-\frac{3}{2}}$$

$$z_f = \left[(1+z_g)^{-\frac{3}{2}} - \frac{\tau}{t_0} \right]^{-\frac{2}{3}} - 1$$

ب)

$$t_{g1} = 332 \text{ Myr}$$

$$t_{g2} = 263 \text{ Myr}$$

$$z_{f1} = 33.5 \text{ Myr}$$

$$z_{f2} = 35.2 \text{ Myr}$$

سوال پنجم : (115 نمره)

رصدخانه ملی ایران (INO340) در قله گرگش واقع در 33 کیلومتری جنوب کاشان و در ارتفاع 3600 متری از سطح دریا قرار دارد. این رصدخانه مجهز به یک تلسکوپ از نوع ریچی کرتین و با میدان دید 20 دقیقه قوس است. قطر آینه اصلی آن 3.4 متر و نسبت کانونی تلسکوپ 11.24 است. این تلسکوپ در تاریخ پنجم مهرماه 1401 اولین نور خود را دریافت کرد که در طی آن از کهکشان NGC23 با توان تفکیک 0.65 ثانیه قوسی تصویر برداری کرد. پارامتر دید محل رصدخانه در شب های مختلف بین 0.55 تا 0.7 ثانیه قوس متغیر است.

الف) حد قدری نظری این تلسکوپ چقدر است؟ (20 نمره)

ب) قدرت تفکیک زاویه ای نظری این تلسکوپ در ناحیه مرئی ($\lambda = 500 \text{ nm}$) چند ثانیه قوس است؟ (15 نمره)

ج) فاصله کانونی موثر تلسکوپ چند میلیمتر است؟ (10 نمره)

د) مقیاس صفحه این تلسکوپ چند ثانیه قوس بر میلیمتر است؟ (20 نمره)

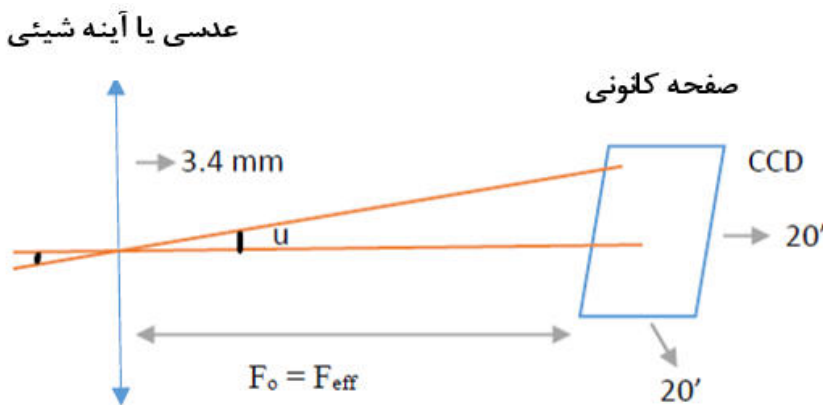
ه) ابعاد CCD مورد استفاده در INO340 چقدر باید باشد؟ (20 نمره)

و) اگر پیکسل های CCD مربعی و به ابعاد 20 میکرومتر باشند، CCD آن باید حدوداً چند مگاپیکسل داشته باشد؟ (15 نمره)

ز) هر پیکسل تقریباً چند ثانیه قوس را پوشش خواهد داد؟ (15 نمره)

یاسخ:

(دو داده آخر مساله در حل استفاده ندارند)



الف) با استفاده از اعداد نوشته شده در جدول ابتدای سوالات برای چشم:

$$L_M = 5 \log \frac{D}{D_{eye}} + m_{eye} = 5 \log \frac{3.4 \times 10^3}{6} + 6 = 19.77$$

ب) اگر رابطه زاویه تفکیک را بر حسب ثانیه قوسی بنویسیم:

$$\theta'' = 2.5 \times 10^5 \frac{5 \times 10^{-7}}{3.4} = 0.03676''$$

ج) با توجه به رابطه تعریف نسبت کانونی:

$$F_{\#} = \frac{F_0}{D} = \frac{F_{eff}}{D}$$

$$F_{eff} = F_{\#} \times D = 11.24 \times 3.4 = 38.216 \text{ m} = 38216 \text{ mm}$$

(د) می‌خواهیم زاویه مقابل به 1mm روی صفحه کانونی تلسکوپ را بیابیم:

$$\tan u' = \frac{1 \text{ mm}}{F_{eff}} = \frac{1 \text{ mm}}{38216 \text{ mm}} \rightarrow u' = 0.0015 \frac{\text{درجه}}{\text{mm}} = 5.397 \frac{\text{ثانیه قوس}}{\text{mm}}$$

(ه) اگر از میدان دید که 20 دقیقه قوسی برای ابعاد آشکارساز CCD استفاده کنیم:

$$\tan \frac{20'}{60'} = \frac{\text{ابعاد CCD}}{38.216 \text{ m}} \rightarrow \text{ابعاد CCD} = 38.216 \times \tan \frac{1}{3} = 0.222 \text{ m}$$

بنابراین هر ضلع CCD حدود 22/2 سانتیمتر است.

(و) از نسبت ابعاد CCD می‌توان یافت:

$$\text{Pixel Size } (a) = 20 \mu\text{m}$$

$$\frac{\text{ابعاد CCD}}{\text{اندازه پیکسل}} = \frac{22.2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-5}} = 123.21 \text{ Mega Pixel}$$

(ز) مقداری که روی هر پیکسل ثبت خواهد شد:

$$u'' = \tan^{-1} \frac{\text{اندازه پیکسل}}{\text{فاصله کانونی}} = \tan^{-1} \frac{20 \times 10^{-6}}{38.216} = 3 \times 10^{-5} \text{ درجه}$$

$$3 \times 10^{-5} \times 3600 = 0.108 \text{ arc sec}$$

سؤال ششم : (115 نمره)

از روی میانگین شهاب های مشاهده شده در روز تخمین زده می شود که روزانه حدود 44000 کیلوگرم شهاب سنگ وارد جو زمین شده، می سوزد و به صورت گرد و غبار روی سطح زمین می نشیند. شهاب سنگ ها ذرات سرگردانی هستند که زمین با عبور خود از میان آنها (ناشی از گردش به دور خورشید) آنها را جارو می کند. سرعت میانگین این ذرات در منظومه شمسی نسبت به سرعت زمین به دور خورشید ناچیز است.

الف) با فرض جسم سیاه بودن زمین، مقدار درخشندگی زمین ناشی از دریافت انرژی از خورشید را محاسبه کنید. (25 نمره)

ب) نسبت انرژی آزاد شده یک شهاب سنگ به جرم m ناشی از گرانش (انرژی گرانشی ناشی از افتادن ذره روی سطح زمین) به انرژی آزاد شده ناشی از هم سرعت شدن شهابسنگ با زمین (در اثر برخورد و اصطکاک شهاب سنگ با جو) را به دست آورید. (35 نمره)

ج) اگر انرژی تمام شهابسنگها به صورت درخشندگی تابش شود، نسبت درخشندگی شهاب سنگ ها (L_{acc}) به درخشندگی زمین (قسمت الف) چقدر است؟ (35 نمره)

د) خاکستر شهاب سنگ ها به صورت گرد و غبار روی سطح زمین می نشینند. چند سال زمان لازم است تا یک سانتیمتر گرد و غبار ناشی از شهابسنگها روی زمین جمع شود؟ چگالی گرد و غبار حدوداً $3 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ است. (20 نمره)

پاسخ:

الف)

$$L_{earth} = \frac{L_{sun}}{4\pi r^2} \pi R_{earth}^2 = \frac{3.85 \times 10^{26}}{4 \times (1.5 \times 10^{11})^2} \times (6380 \times 10^5)^2 = 1.74 \times 10^{17} \omega$$

ب)

$$\frac{E_G}{E_v} = \frac{\frac{GM_e m}{R}}{\frac{1}{2} m v^2} = \frac{2GM_{earth}}{\frac{GM_{sun} R}{r}} = \frac{2 \times 1.5 \times 10^{11} \times 5.97 \times 10^{24}}{1.99 \times 10^{30} \times (6380 \times 10^3)^2} = \frac{6.247 \times 10^7 m}{4.427 \times 10^8 m} = 0.141$$

ج)

$$E_T = (E_G + E_v) \rightarrow L_{acc} = \frac{E_T}{1 \text{ day}} = \frac{(0.625 + 4.427) \times 44000 \times 10^8}{24 \times 3600} = 2.57 \times 10^8 \omega$$

$$\frac{L_{acc}}{L_{earth}} = 1.48 \times 10^{-9}$$

د)

$$v_{dust} = A_{earth} \times 1 \text{ cm} = 4 \pi R_{earth}^2 \times 1 \text{ cm} = 4 \pi (6380 \times 10^3)^2 \times 10^{-2} = 5.11 \times 10^{12} \text{ m}^3$$

$$M_{dust} = \rho v = 1.534 \times 10^{16} \text{ kg}$$

$$\frac{M_{dust}}{M_{1 \text{ day}}} = \frac{1.534 \times 10^{16}}{44000} = 3.5 \times 10^{11} \text{ days} = 9.56 \times 10^8 \text{ years}$$

سؤال هفتم : (125 نمره)

می خواهیم از رابطه جرم-درخشندگی ادینگتون، به رسم دقیقی از رشته اصلی ستارگان بر روی نمودار هرتسپرونگ-راسل برسیم! اگر رابطه ضابطه مند ادینگتون برای محدوده های جرمی مختلف ستارگان رشته اصلی بصورت زیر باشد

$$L \propto \begin{cases} M^{2.5} & M \leq 0.6M_{\odot} \\ M^{4.5} & 0.6 M_{\odot} < M \leq 4M_{\odot} \\ M^3 & 4M_{\odot} < M \end{cases}$$

و همچنین بدانیم رابطه دمای درونی (T_I) در این ستارگان با دمای سطحی (T_S) آنها، برحسب عمق اپتیکی (τ) بصورت

$$T_I = T_S(\tau + 1)^{\frac{1}{4}}$$

است.

الف) ابتدا دمای سطحی این ستارگان را به صورت تابعی از جرم و شعاعشان به دست آورید. (25 نمره)

ب) اگر بخواهیم برای ستارگان رشته اصلی رابطه ای توانی بین شعاع و جرمشان بیابیم، برای هر محدوده جرمی توان این رابطه را بدست آورید. (40 نمره)

ج) با استفاده از رابطه بدست آمده و علم به این مطلب که بر روی نمودار هرتسپرونگ-راسل می توان درخشندگی را برحسب دمای سطحی رسم کرد، در بازه های جرمی مختلف ابتدا رابطه میان این دو کمیت را برای ستارگان رشته اصلی بدست آورید و سپس بر روی نموداری که در پاسخ نامه ی این سوال به شما داده شده است، خطوط ضابطه مند مربوط به ستارگان رشته اصلی را ترسیم نمایید. (60 نمره)

توجه: مقدار عمق نوری در مرکز تمامی ستاره های رشته اصلی تقریباً یکسان و برابر 10^{12} است. روی سطح ستاره دمای گاز را تقریباً برابر دمای موثر در نظر بگیرید

پاسخ:

چون در انتها برای همه ستارگان عمق اپتیکی در مرکز را تقریباً یکسان و 10^{12} گرفته است.

$$L \propto \begin{cases} M^{2.5} & M \leq 0.6M_{\odot} \\ M^{4.5} & 0.6 M_{\odot} < M \leq 4M_{\odot} \\ M^3 & 4M_{\odot} < M \end{cases}$$

ضابطه های معادله ادینگتون

$$T_I = T_S(\tau + 1)^{\frac{1}{4}} \rightarrow T_I \cong 10^3 T_{eff}$$

زیرا در اولین بخش ما در تقریب خطی سازی دمای مرکز ستاره را باید جایگذاری نماییم، اما در نمودار HR دمای موثر داریم.

الف)

با استفاده از تعادل هیدرواستاتیک برای این ستارگان داریم:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{-G M(r) \rho(r)}{r^2}$$

$$\text{خطی سازی: } \frac{P_c}{R} = \frac{M \frac{M}{R^3}}{R^2} \rightarrow P_c \propto \frac{M^2}{R^4}$$

$$P = \frac{\rho k T}{\bar{m}} \rightarrow P_c \propto \frac{M}{R^3} \cdot T_c \rightarrow T_c \propto \frac{M}{R} \rightarrow T_{eff} \propto \frac{M}{R}$$

ب) اگر از رابطه تابندگی استفاده کنیم:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \rightarrow L \propto R^2 T^4 \equiv M^\alpha$$

$$R^2 \left(\frac{M}{R}\right)^4 \propto M^\alpha \rightarrow \frac{M^4}{R^2} \propto M^\alpha \rightarrow M^{4-\alpha} \propto R^2 \rightarrow R \propto M^{\frac{4-\alpha}{2}}$$

$$R \propto \begin{cases} M^{0.75} & M \leq 0.6M_\odot \\ M^{-0.25} & 0.6M_\odot < M \leq 4M_\odot \\ M^{0.5} & 4M_\odot < M \end{cases}$$

ج) اگر توان های ضابطه ای بالا را β فرض کنیم:

$$L \propto R^2 T^4, R \propto M^\beta, T \propto \frac{M}{R}$$

$$T \propto \frac{R^{\frac{1}{\beta}}}{R} \propto R^{\frac{1}{\beta}-1} \propto R^{\frac{1-\beta}{\beta}} \rightarrow R \propto T^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

$$L \propto R^2 T^4 \propto T^{\frac{2\beta}{1-\beta}} \cdot T^4 \propto T^{\frac{2\beta+4-4\beta}{1-\beta}} \rightarrow L \propto T^{\frac{4-2\beta}{1-\beta}}$$

$$L \propto \begin{cases} M^{\frac{2.5}{0.25}} \equiv M^{10} & M \leq 0.6M_\odot \\ M^{\frac{4.5}{1.25}} \equiv M^{3.6} & 0.6M_\odot < M \leq 4M_\odot \\ M^{\frac{3}{0.5}} \equiv M^6 & 4M_\odot < M \end{cases}$$

برای رسم یک نمودار تمام لگاریتمی توان بصورت شیب ظاهر می گردد:

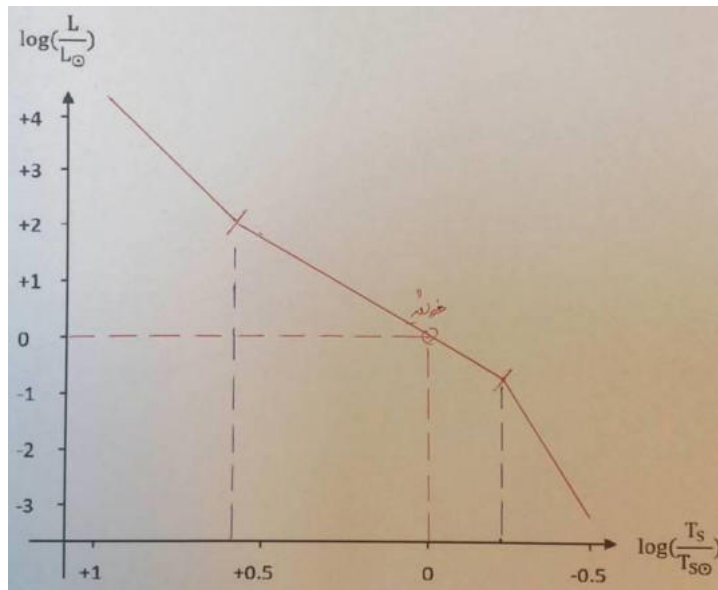
$$\text{شیب نمودار تمام لگاریتمی} = \frac{\frac{\Delta y (cm)}{\text{طول سیکل عمودی (cm)}}}{\frac{\Delta x (cm)}{\text{طول سیکل افقی (cm)}}}$$

7.8 cm طول سیکل افقی

$$\text{طول سیکل عمودی} \quad 1.25 \text{ cm} \quad \equiv \quad \frac{7.8}{1.25} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

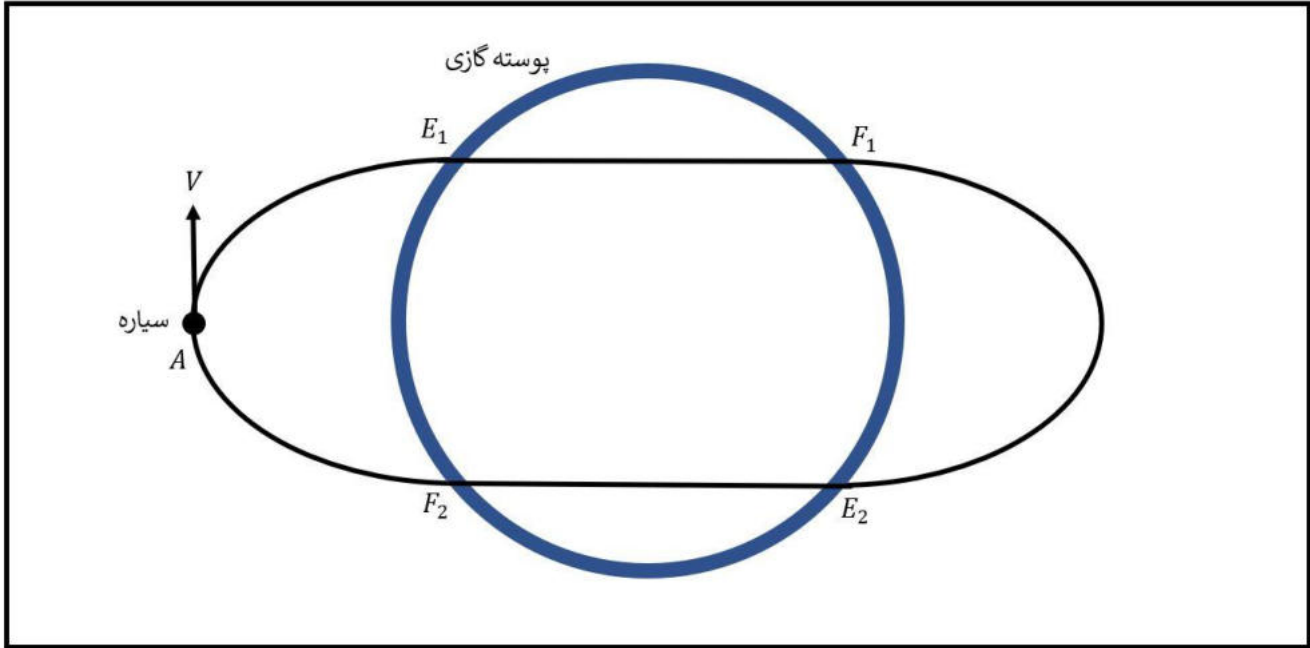
در نتیجه مقادیر شیب باید این گونه باشد

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \propto \begin{cases} 1.6 \equiv 58^\circ \\ 0.58 \equiv 30^\circ \\ 0.96 \equiv 43.9^\circ \end{cases}$$



سؤال هشتم : (140 نمره)

فرض کنید ستاره ای با ساختار غیرعادی داریم به صورتی که هسته ستاره منفجر شده و ذرات آن به بیرون پراکنده شده اند و این اتفاق باعث شده تا ستاره به پوسته ای گازی کروی شکل و رقیق که جرم آن به اندازه جرم ستاره و ضخامت آن در مقابل شعاع پوسته کوچک است تبدیل شود. سیاره ای به دور این ستاره در گردش است. مطابق شکل زیر سیاره در ابتدا در نقطه A قرار دارد جاییکه بردار سرعت آن V بر شعاع مداری سیاره عمود است. مدار سیاره به پوسته کروی نزدیک است به گونه ای که در نقطه E_1 سیاره وارد پوسته کروی می شود و مسیر نقطه E_1 تا F_1 را درون پوسته طی می کند و در نقطه F_1 از پوسته خارج می شود. در ادامه مسیر دوباره در نقطه E_2 وارد و در نقطه F_2 از پوسته خارج می شود و در نهایت به نقطه A می رسد و مدار کامل می شود.



اگر جرم پوسته $1.2 M_{\odot}$ و شعاع آن $1.5 R_{\odot}$ و فاصله اولیه سیاره تا مرکز ستاره $2.1 R_{\odot}$ باشد آنگاه:

الف) سرعت اولیه (V) سیاره باید چقدر باشد تا این حرکت به این گونه انجام شود؟ (50 نمره)

ب) مدت زمان یک دوره تناوب کامل سیاره چقدر است؟ (45 نمره)

ج) آیا مقدار غیرصفر دیگری برای سرعت سیاره در آن نقطه وجود دارد که در نهایت به همان نقطه اول بازگردد؟ اگر این امکان وجود ندارد با استدلال توضیح دهید و اگر وجود دارد یک مثال بزنید. (45 نمره)

پاسخ:

الف) نقطه A اوج مدار

$$r_A = a(1 + e) \rightarrow 2.1R_{sun} = a(1 + e)$$

مسیر E_1 تا F_1 مسیر مستقیم است و اگر دستگاهی را تعریف کنیم که مرکز آن مرکز ستاره است و راستای x آن در جهت A ، در این دستگاه در نقطه E_1 سرعت راستای y صفر است.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = 1.5R_{sun} , \quad v_y = \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta) = 0 \rightarrow \cos \theta = -e \quad \text{در نقطه } E_1$$

$$r = 1.5R_{sun} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a \rightarrow a = 1.5R_{sun}$$

$$e = \frac{2.1R_{sun}}{1.5R_{sun}} - 1 = 0.4 \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1 - e}{1 + e}} = 255.6 \text{ km/s}$$

(ب)

$$T = 4t_{AE_1} + 2t_{E_1F_1}$$

$$t_{AE_1}: \cos \theta = -e \rightarrow r = a, r = a(1 - e \cos E) \rightarrow E_{E_1} = \frac{\pi}{2}, E_A = \pi$$

$$\omega t_{AE_1} = E_A - E_{E_1} - e(\sin E_A - \sin E_{E_1}) = \frac{\pi}{2} - 0.4(-1) = \frac{\pi}{2} + 0.4$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 3.72 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

$$\rightarrow t_{AE_1} = 5300s$$

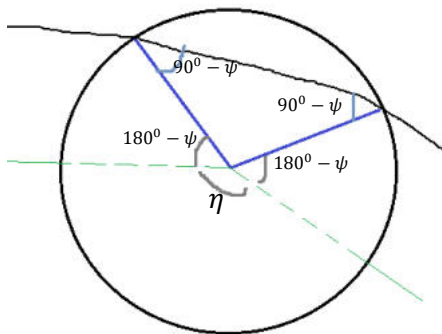
$$v_{E_1} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_{E_1}} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{GM \left(\frac{1}{a} \right)} = 390.5 \text{ km/s}$$

$$t_{E_1F_1} = \frac{d_{E_1F_1}}{v_{E_1}} = \frac{2ae}{v_{E_1}} = 2151.3s$$

$$T = 25502 s = 7h5m$$

(ج)

در یک بارخ دادن این اتفاق مدار به اندازه η درجه می چرخد. اگر θ آنومالی حقیقی و ψ زاویه پرواز باشد، آنگاه:



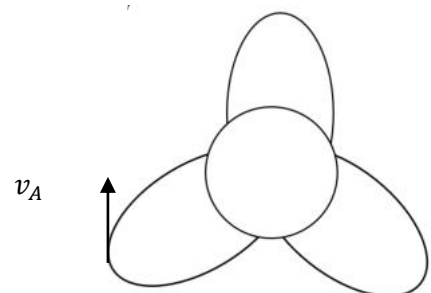
$$\eta = 360^\circ - 2(180^\circ - \theta) - (180^\circ - 2(90^\circ - \psi)) = 2\theta - 2\psi$$

حال اگر η ضریب $\frac{p}{q}$ ای از 2π باشد بعد از q بار دور زدن جسم به جای اول باز می گردد پس شرط مساله:

$$2\theta - 2\psi = 2\pi \frac{p}{q} \quad | \quad p, q \in \mathbb{N}$$

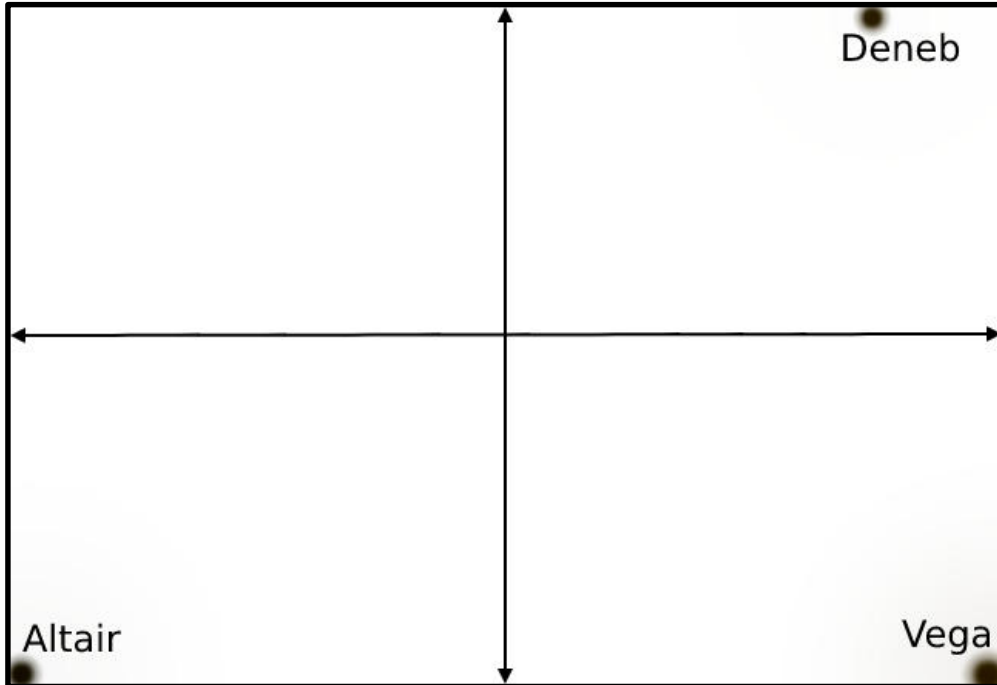
سپس بعد از یافتن θ ، v_A را می یابیم.

مثال:



سؤال نهم : (170 نمره)

رصدگری در یک شب تابستانی در حال عکاسی از آسمان است و تصمیم می گیرد که از مثلث تابستانی عکس بگیرد. این رصدگر به دنبال آن است که عکسی از این مثلث بگیرد که کمترین مساحت از آسمان را اشغال کرده باشد. این رصدگر بعد از تلاش های بسیار توانسته است عکس زیر را بگیرد که با توجه به اینکه ستارگان وگا و الطیر در دو گوشه تصویر هستند و ستاره دنب نیز بر روی ضلع بالای آن است کمترین مساحت را از آسمان اشغال کرده است.



مختصات این سه ستاره به صورت زیر است:

$$\text{Vega: } \alpha = 18^{\text{h}} 37^{\text{m}} \quad \delta = 38.8^{\circ}$$

$$\text{Altair: } \alpha = 19^{\text{h}} 51^{\text{m}} \quad \delta = 8.9^{\circ}$$

$$\text{Deneb: } \alpha = 20^{\text{h}} 42^{\text{m}} \quad \delta = 45.3^{\circ}$$

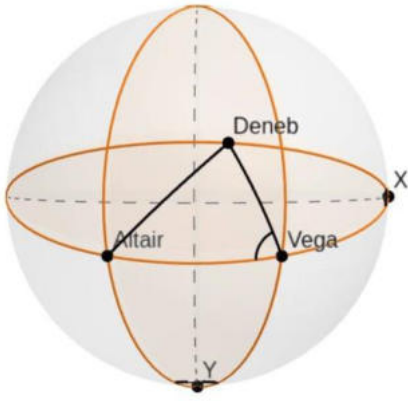
الف) با استفاده از مختصات این سه ستاره ابعاد عکس را بدست بیاورید. (ابعاد زاویه ای پیکان های روی عکس را به دست آورید، 110 نمره)

ب) مساحت این عکس چند استرادیان است؟ (60 نمره)

زاویه η داخل پاسخ ها همان زاویه Deneb-Vega-Altair هست

پاسخ:

الف) خطوط بالا پایین و چپ و راست تصویر دوایر عظیمه ای هستند که دو به دو اگر امتداد یابند به نقاط X, Y می رسند. زوایای راس X, Y را x, y می نامیم با توجه به این که فاصله این دو نقطه از مرکز تصویر 900 است، پس x, y همان عرض و طول تصویر اند.



$$\cos\theta_{pA} = \sin\delta_A \sin\delta_D + \cos\delta_A \cos\delta_D \cos(\alpha_A - \alpha_D)$$

$$\theta_{DA} = 38^\circ, \theta_{DV} = 23.8^\circ, \theta_{VA} = 34.3^\circ$$

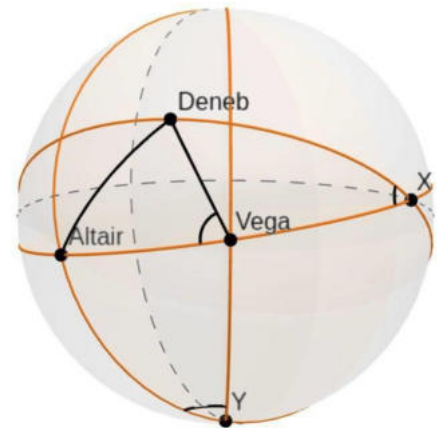
$$\cos\eta = \frac{\cos\theta_{DA} - \cos\theta_{DV}\cos\theta_{VA}}{\sin\theta_{DV}\sin\theta_{VA}} \rightarrow \eta = 81.8^\circ$$

$$XV = 90^\circ - \frac{\theta_{VA}}{2}$$

$$-\sin\frac{\theta_{VA}}{2} \cos\eta = \cos\frac{\theta_{VA}}{2} \cot\theta_{DV} - \sin\eta \cot x \rightarrow x = 24.1^\circ$$

$$\sin\frac{x}{2} \cos 90 = \cos\frac{x}{2} \cot\frac{\theta_{VA}}{2} - \sin 90 \cot\frac{y}{2} \rightarrow \tan\frac{y}{2} = \frac{\tan\frac{\theta_{VA}}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \rightarrow y = 35^\circ$$

(ب)



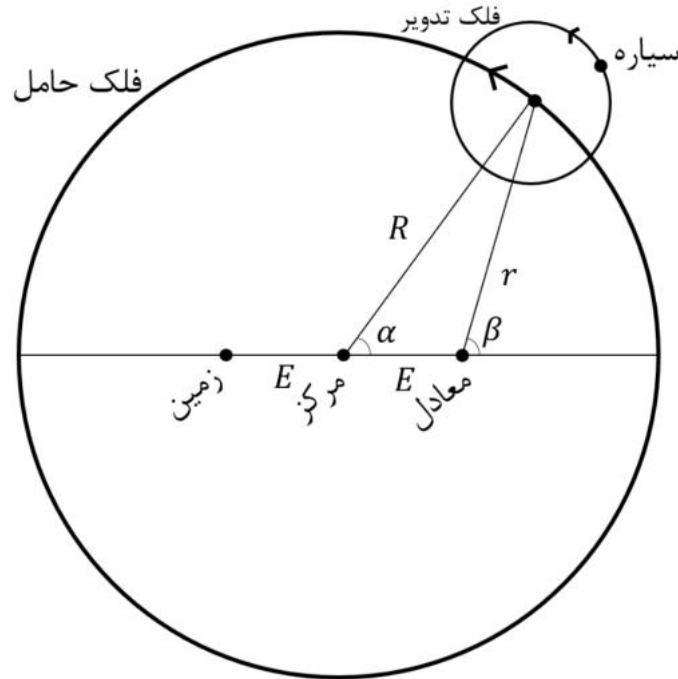
$$5\text{عكس} = 4\beta - 2\pi$$

$$0 = \sin\frac{\theta_{VA}}{2} \tan\frac{x}{2} + \cos\beta \rightarrow \beta = 97.52^\circ$$

$$5\text{عكس} = 0.525 \text{ str}$$

سؤال دهم : (140 نمره)

یکی از اولین مدل‌های پیشنهاد شده در کتاب بطلمیوس برای توضیح حرکت سیارات در نظریه زمین‌مرکزی فلک تدویر است. در این مدل سیاره بر روی یک فلک تدویر حرکت می‌کند که مرکز این فلک مطابق شکل زیر روی محیط فلک حامل به مرکزیت زمین قرار دارد. این مدل تا مدت‌ها مورد استفاده قرار گرفت، اما در مواردی با شواهد رصدی متناقض بود و یا پیش‌بینی‌های آن برای پدیده‌های نجومی اشتباه بودند. در طی زمان اصلاحاتی در این مدل صورت گرفت. در اولین قدم مرکز دایره فلک حامل را نقطه‌ای غیر از زمین قرار دادند. این مدل نیز تا مدت‌ها مورد قبول بود تا آنکه با دقت‌تر شدن مشاهدات، این مدل نیز در توضیح بعضی مسائل، مثل تغییر سرعت زاویه‌ای سیاره در فواصل مختلف از زمین، ناتوان ماند.



در مرحله بعدی از اصلاح، نقطه معادلی پیشنهاد شد که نسبت به مرکز دایره فلک حامل در نقطه مقابل زمین و در همان فاصله از مرکز قرار دارد (نقطه معادل در شکل). مرکز فلک تدویر نسبت به نقطه مرکز همواره فاصله ثابت (R) دارد، اما سرعت زاویه‌ای حرکت آن ($\Omega = \frac{d\beta}{dt}$) نسبت به نقطه معادل ثابت است.

الف) با نوشتن روابط هندسی بین پارامترهای شکل، روابط زیر را اثبات کنید. (35 نمره)

$$\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \frac{E}{R}}$$

$$E \sin(\beta) = R \sin(\beta - \alpha)$$

ب) از آنجاییکه سرعت زاویه‌ای حول نقطه معادل ثابت است ($\Omega = \text{ثابت}$)، سرعت زاویه‌ای حول مرکز با زمان تغییر می‌کند و این تغییر سرعت زاویه‌ای مشاهده شده توسط ناظران زمینی را توجیه می‌کند. با مشتق‌گیری از روابط هندسی و نتایج قسمت الف رابطه زیر را اثبات کنید. (35 نمره)

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{r}}{E \sin(\beta)}$$

ج) بار دیگر از روابط هندسی قسمت الف استفاده کرده و رابطه ای برای \dot{r} بر حسب r, E, Ω, β به دست آورید. با جای گذاری این رابطه در رابطه قسمت ب و حذف \dot{r} ، رابطه زیر را اثبات کنید. (45 نمره)

$$\omega(t) = \left[1 - \frac{\frac{E}{R} \cos(\Omega t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{R} \sin(\Omega t)\right)^2}} \right] \Omega$$

د) با داشتن $\frac{E}{R} = 0.2$ ، نسبت $\frac{\omega}{\Omega}$ را بر حسب Ωt رسم کنید (نمودار را برای پنج نقطه با فاصله یکسان در بازه صفر تا 2π رسم کنید. 25 نمره)

یاسخ:

(الف)

$$R \sin \alpha = r \sin \beta \quad (I) , \quad R \cos \alpha = r \cos \beta \quad (II) \rightarrow \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{E}{R}}$$

$$E = R \cos \alpha - r \cos \beta = R \cos \alpha - \frac{R \sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta \rightarrow E \sin \beta = R[\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \alpha] \\ = R \sin(\beta - \alpha)$$

(ب)

$$\Omega = \frac{d\beta}{dt} = K , \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$$

به ترتیب از روابط (I) و (II) مشتق می گیریم:

$$R \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} = \dot{r} \sin \beta + r \cos \beta \cdot \dot{\beta}, \quad -R \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = \dot{r} \cos \beta + r \sin \beta \cdot \dot{\beta}$$

$$\rightarrow \dot{\beta} = \frac{R \cos \alpha \cdot \omega - \dot{r} \sin \beta}{r \cos \beta} = \frac{R \sin \alpha \cdot \omega + \dot{r} \cos \beta}{r \sin \beta}$$

$$\rightarrow R \sin \beta \cos \alpha \cdot \omega - \dot{r} \sin^2 \beta = \dot{r} \cos^2 \beta + R \omega \sin \alpha \cos \beta$$

$$\rightarrow \dot{r} = R \omega (\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) = E \sin \beta \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{\dot{r}}{E \sin \beta}$$

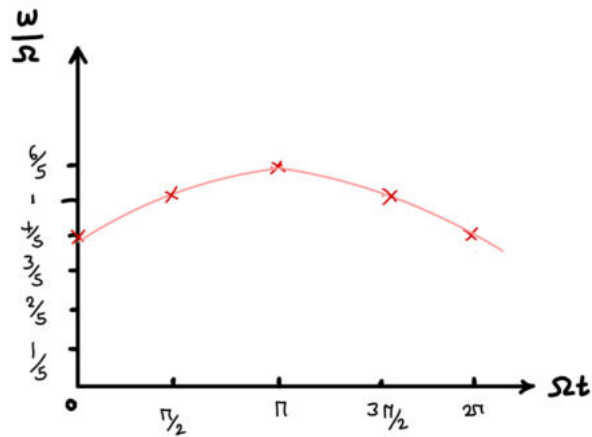
(ج)

$$R \cos \alpha = r \cos \beta + E \rightarrow R^2 \cos^2 \alpha = r^2 \cos^2 \beta + E^2 + 2rE \cos \beta , \quad R^2 \sin^2 \alpha = r^2 \sin^2 \beta$$

$$\rightarrow R^2 = r^2 + E^2 + 2rE \cos \beta \quad (III)$$

از رابطه (III) مشتق می گیریم:

$$0 = 2r\dot{r} + 2E\dot{r} \cos \beta - 2Er \sin \beta \cdot \Omega \rightarrow \dot{r} = \frac{rE \sin \beta \cdot \Omega}{r + E \cos \beta}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow \omega &= \frac{rE \sin \beta \cdot \Omega / r + E \cos \beta}{E \sin \beta} = \frac{r\Omega}{r + E \cos \beta} = \frac{-E \cos \beta + \sqrt{R^2 - E^2 \sin^2 \beta}}{\sqrt{R^2 - E^2 \sin^2 \beta}} \cdot \Omega \\ &= \left[1 - \frac{\frac{E}{R} \cos \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{R} \sin \beta\right)^2}} \right] \cdot \Omega \end{aligned}$$

همچنین از رابطه (III) داریم:

$$r = -E \cos \beta + \sqrt{E^2 \cos^2 \beta - (E^2 - R^2)} = -E \cos \beta + \sqrt{R^2 - E^2 \sin^2 \beta}$$

(د)

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1 - \frac{0.2 \cos(\Omega t)}{\sqrt{1 - (0.2 \cos(\Omega t))^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi & \frac{6}{5} \\ \frac{3\pi}{2} & 1 \\ 2\pi & \frac{4}{5} \end{array} \right.$$



هجدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه پاسخنامه آزمون مرحله ۲ سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بعد از ظهر دوشنبه ۱۹ اردیبهشت ماه ۱۴۰۱ - ساعت ۱۴:۰۰ تا ۱۸:۰۰

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت	
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش	G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور	c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمان	σ
$1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	ثابت بولتزمان	k
$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	عدد آووگادرو	
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	سال نوری	ly
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک	pc
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	واحد نجومی	AU
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید	M_{\odot}
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید	R_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
+4.74	قدر مطلق خورشید	M_{\odot}
-26.8	قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
5780 K	دمای مؤثر سطح خورشید	T_{\odot}
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین	M_{\oplus}
6380 km	شعاع زمین	R_{\oplus}
25772 yr	دوره تناوب حرکت تقدیمی زمین	
23.5°	تمایل محور زمین	ϵ

سؤال اول : (۱۳۰ نمره)

اختر شناسان با رصد دقیق، یک منظومه فراخورشیدی یافته اند که در آن سیاره ای به جرم m به دور ستاره ای به جرم M می گردد، بردار های مکان و سرعت سیاره در یک لحظه از زمان به صورت زیر اندازه گیری شده است:

$$\vec{r} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k})$$

$$\vec{v} = \sqrt{3}\hat{j} + \hat{k}$$

این دو بردار در دستگاه مختصاتی کارتزینی نوشته شده اند که مبدا آن روی مرکز ستاره و محور های x و y آن در صفحه مداری سیاره و محور z عمود بر صفحه مداری در جهت راستگرد قرار دارد. \hat{i} و \hat{j} و \hat{k} بردار های یکه در دستگاه مختصات کارتزین هستند.

الف) تعیین کنید شکل مدار کدامیک از مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، سهمی و یا هذلولی) است؟ (۳۰ نمره)

ب) مختصات کارتزین (x, y, z) نقطه حضیض مدار را تعیین کنید (۱۰۰ نمره)

توجه: فرض کنید جرم ستاره مرکزی به گونه ایست که $GM = 1$ باشد. از جرم سیاره در مقابل ستاره صرف نظر کنید. در این مسئله باید مشروح محاسبات داده شود. صرفا نام بردن از یک مقطع مخروطی کافی نیست و در صورت درست بودن جواب، فقط نمره جواب نهایی را خواهد گرفت.

پاسخ سوال اول:

الف) یک راه ساده برای تعیین شکل مدار این است که انرژی مدار را حساب کنیم مقدار انرژی کل مدار همواره ثابت است و بر مبنای آن می توان شکل مدار را تعیین کرد

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

از داده های مسئله واضح است که

$$r^2 = \frac{1}{\lambda}(1 + 1) = \frac{1}{\xi} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$$v^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow v = 2$$

با جایگذاری در معادله انرژی و در نظر گرفتن اینکه $GM = 1$ به دست می آوریم

$$E = 2m - 2m = 0$$

کل انرژی مدار همواره صفر است پس مدار سهمی خواهد بود

ب) برای تعیین نقطه حضیض ابتدا باید بردار لنز را مشخص کنیم. این بردار در راستای حضیض است برای این کار ابتدا باید بردار اندازه حرکت زاویه ای ویژه (برواحد جرم) را حساب کنیم

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) \times (\sqrt{3}\hat{j} + \hat{k}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{3}\hat{i} - \hat{j} + \sqrt{3}\hat{k})$$

بردار لنز بنا به تعریف برابر است با

$$\vec{A} = -(\vec{L} \times \vec{v}) - \frac{G(M+m)}{r}\vec{r} = G(M+m)\vec{e}$$

جاییکه بردار \vec{e} برداری است در جهت نقطه حضیض با اندازه خروج از مرکز مدار با توجه به فرضیات این مسئله داریم

$$-(\vec{L} \times \vec{v}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 3\hat{k}) - \frac{2}{2\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + \hat{k}) = \vec{e}$$

واضح است که طول بردار \vec{e} برابر واحد است که سهمی بودن مدار را دوباره تایید می کند. با این حساب بردار \vec{e} برداری یکه است در جهت حضیض. برای پیدا کردن مختصات کارتزین حضیض کافی است این بردار را در فاصله حضیض ضرب کنیم تا مختصات حضیض به دست آید. در مدار سهمی شکل می دانیم که فاصله حضیض برابر است با

$$r_p = \frac{L^2}{\gamma G(M+m)} = \frac{L^2}{\gamma} = \frac{\gamma}{16}$$

در نهایت داریم

$$\vec{r}_p = \frac{\gamma}{32\sqrt{2}} (2\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + \hat{k})$$

مولفه های این بردار مختصات حضیض را نشان می دهد.

توجه: در این مسئله به اشتباه گفته شده که صفحه xy چارجوب کارتزین در صفحه مدار است که با مقدار بردار مکان سیاره سازگار نیست. هر چند این اشتباه در راه حل مسئله اثری ندارد با وجود این اگر دانش آموز با در نظر گرفتن این فرض و رعایت قواعد فیزیک و ریاضی به پاسخ نهایی یعنی مختصات کارتزین حضیض برسد نمره کامل خواهد گرفت.

سؤال دوم : (۸۰ نمره)

حد قدری یک تلسکوپ عبارت است از قدر ظاهری کم نورترین ستاره ای که به کمک آن تلسکوپ قابل رصد است.

الف) حد قدری تلسکوپ m_l است. کم جرمترین ستاره ای که در یک خوشه ستاره ای به فاصله r (بر حسب پارسک) به کمک این تلسکوپ قابل رصد است، چند برابر جرم خورشید جرم دارد؟ (راهنمایی: سعی کنید روابط را بر حسب $\log\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)$ بنویسید.) (۳۵ نمره)

ب) اگر میزان خاموشی محیط میان ستاره ای به صورت αr سبب افزایش قدر ستاره شود (α ضریب خاموشی، بر حسب قدر بر کیلو پارسک است)؛ کم جرم ترین ستاره قابل مشاهده توسط این تلسکوپ چند برابر جرم خورشید خواهد بود؟ (۲۰ نمره)

ج) یک خوشه ستاره ای در فاصله $r = 2000$ پارسکی از ما قرار گرفته است. اگر ضریب خاموشی $\alpha = 0.75$ قدر بر کیلوپارسک باشد، نسبت جرم قسمت ب به جرم قسمت الف چند است؟ (نمره ۲۵)

همه ستاره های خوشه، ستاره های رشته اصلی هستند و برای آنها رابطه $L \propto M^3$ برقرار است که در آن M جرم و L درخشندگی ستاره است.

پاسخ سوال دوم:

(الف)

$$M_l - M_{\odot} = -2.75 \text{ Log } \frac{F}{F_{\theta}} = -2.75 \log \left(\frac{\frac{L}{\xi \pi r^2}}{\frac{L_{\odot}}{\xi \pi (1.0)^2}} \right)$$

$$= 2.75 \text{ Log } \left[\left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \left(\frac{1.0}{r} \right)^2 \right]$$

$$\text{Log} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = \frac{2}{3} \text{ Log} \left(\frac{r}{1.0} \right) - \frac{m_l - M_{\odot}}{2.75 \times 3}$$

که در آن فاصله بر حسب پارسک است.

(ب) تنها جمله‌ی مربوط به خاموشی میان ستاره‌ای افزوده می‌شود و رابطه به صورت زیر در خواهد آمد که در آن فاصله بر حسب پارسک است.

$$\text{Log} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = \frac{2}{3} \text{ Log} \left(\frac{r}{1.0} \right) - \frac{m_l - M_{\odot} - \frac{\alpha r}{1.0 \dots}}{2.75 \times 3}$$

(ج)

$$\text{Log} \frac{M_b}{M_{\text{الف}}} = \text{Log} \left(\frac{M_b M_{\odot}}{M_{\odot} M_{\text{الف}}} \right) = \text{Log} \left(\frac{M_b}{M_{\odot}} \right) - \text{Log} \left(\frac{M_{\text{الف}}}{M_{\odot}} \right)$$

$$= \left[\frac{2}{3} \text{Log} \frac{r}{1.0} - \frac{m_l - M_{\odot} - \frac{\alpha r}{1.0 \dots}}{2.75 \times 3} \right] - \left[\frac{2}{3} \text{Log} \frac{r}{1.0} - \frac{m_l - M_{\odot}}{2.75 \times 3} \right] = \frac{\alpha \left(\frac{r}{1.0 \dots} \right)}{2.75 \times 3}$$

$$= \frac{0.75 \times 2}{2.75 \times 3} = 0.18$$

$$\frac{M_b}{M_{\text{الف}}} = 1.0^{0.18} = 1.058$$

سؤال سوم: (۱۲۰ نمره)

سازمان فضایی می خواهد ماهواره ای را طی مانوری خاص به خارج از منظومه خورشیدی بفرستد. این مانور به این گونه است که ماهواره در هر مرحله در مدار بیضوی ای قرار دارد و لحظه ای که در اوج مداری قرار دارد سرعتی به اندازه u در جهت عمود به حرکت به آن اضافه می شود.

فرض کنید مدار ابتدایی یک مدار دایروی با شعاعی بسیار نزدیک به شعاع زمین است و در این حالت سرعت u عمود بر مسیر حرکت اضافه می شود.

الف) خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مدار مرحله دوم را بر حسب u به دست بیاورید. (۲۵ نمره)

ب) فرض کنید ماهواره در مرحله i ام در مداری با خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ e_i و a_i باشد، خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ ماهواره را در مرحله بعدی بر حسب a_i و e_i و u و ثوابت فیزیکی بدست بیاورید. (۴۰ نمره)

ج) خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مرحله i ام را فقط بر حسب i و u و ثوابت فیزیکی بدست بیاورید. (۳۵ نمره)

د) بعد از چند مرحله این ماهواره به مرحله فرار می رسد؟ (۲۰ نمره)

پاسخ سوال سوم :

(الف)

$$E_i = \frac{-GMm}{r R_e} \rightarrow E_{i+1} = \frac{-GMm}{r R_e} + \frac{1}{r} m u^2$$

$$E_{i+1} = \frac{-GMm}{r a} \rightarrow a = \frac{1}{\frac{1}{R_e} - \frac{u^2}{GM}}$$

$$h = \sqrt{GM R_e} = \sqrt{GM a (1 - e^2)} \rightarrow 1 - e^2 = \frac{R_e}{a} = 1 - \frac{R_e u^2}{GM}$$

$$\rightarrow e = u \sqrt{\frac{R_e}{GM}}$$

(ب)

$$E_i = \frac{-GMm}{r a_i}, E_{i+1} = \frac{-GMm}{r a_i} + \frac{1}{r} m u^2$$

$$a_{i+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_i} - \frac{u^2}{GM}}$$

$$h_i = h_{i+1} \rightarrow a_i (1 - e_i^2) = a_{i+1} (1 - e_{i+1}^2)$$

$$1 - e_{i+1}^2 = (1 - e_i^2) \left(1 - \frac{a_i u^2}{GM} \right) = 1 - e_i^2 - \frac{a_i u^2}{GM} + \frac{a_i u^2 e_i^2}{GM}$$

$$\rightarrow e_{i+1} = \sqrt{e_i^2 - \frac{a_i u^2}{GM} (1 - e_i^2)}$$

(ج)

$$E_i = E. + i \frac{\lambda}{r} mu^r \rightarrow a_i = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{R_e} - \frac{i u^r}{GM}}$$

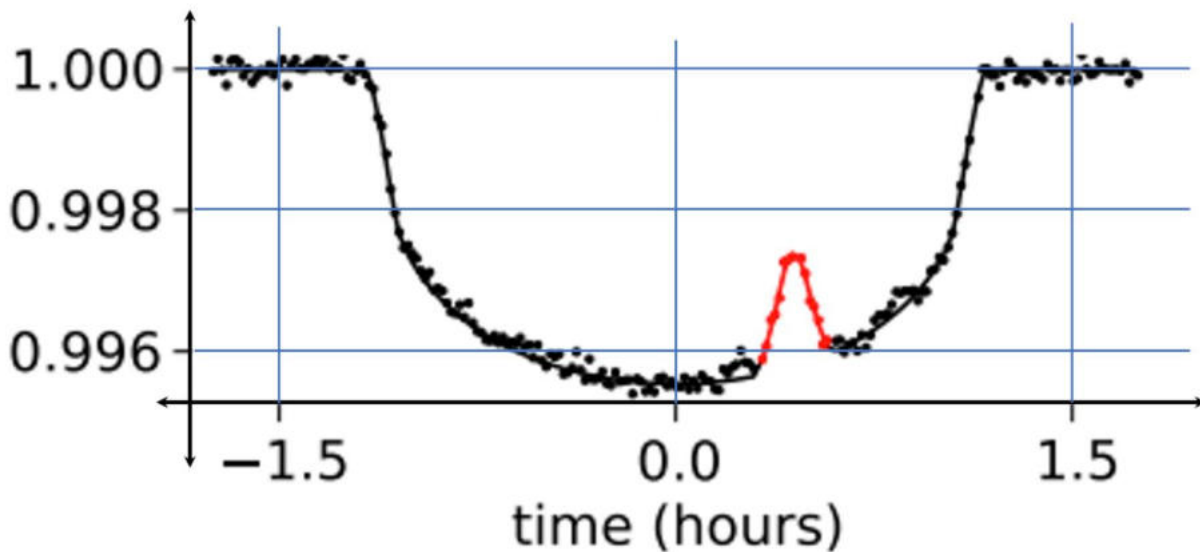
$$h. = h_i \rightarrow R_e = a_i (\lambda - e_i)^r \rightarrow e_i = u \sqrt{\frac{i R_e}{GM}}$$

(د)

$$e_i > \lambda \rightarrow i > \frac{GM}{u^r R_e} \rightarrow i = \left| \frac{GM}{u^r R_e} \right| + \lambda$$

سؤال چهارم: (۱۳۰ نمره)

منظومه ای فراخورشیدی را در نظر بگیرید که ستاره ای خورشیدگون دارد و سیاره آن در مدار دایروی با تمایل مداری 87° گرد ستاره اش می گردد. منحنی نوری زیر را از یکی از گرفت های سیاره ثبت کرده ایم که اثرات یک لکه ی ستاره ای نیز در آن مشهود است. لکه های ستاره ای نواحی نسبتاً سرد روی سطح ستاره ها هستند که معمولاً ابعاد بزرگتری از سیارات دارند و دمای آنها در حدود 1000 درجه از دمای سطح ستاره کمتر است و نسبت به سطح ستاره تاریکتر دیده می شوند. در بعضی از ستاره ها ممکن است ابعاد لکه آنچنان بزرگ باشد که اثر آن در درخشانی ستاره قابل اندازه گیری شود.



الف) دمای سطحی لکه ی ستاره ای چند کلوین است؟ (۲۵ نمره)

ب) شعاع سیاره چند برابر شعاع زمین است؟ (۱۵ نمره)

ج) شعاع مدار گردش سیاره به دور ستاره را پیدا کنید. (۲۵ نمره)

د) سرعت مداری سیاره چقدر است؟ (۲۰ نمره)

ه) ابعاد لکه را بر حسب شعاع زمین تخمین بزنید. (۱۵ نمره)

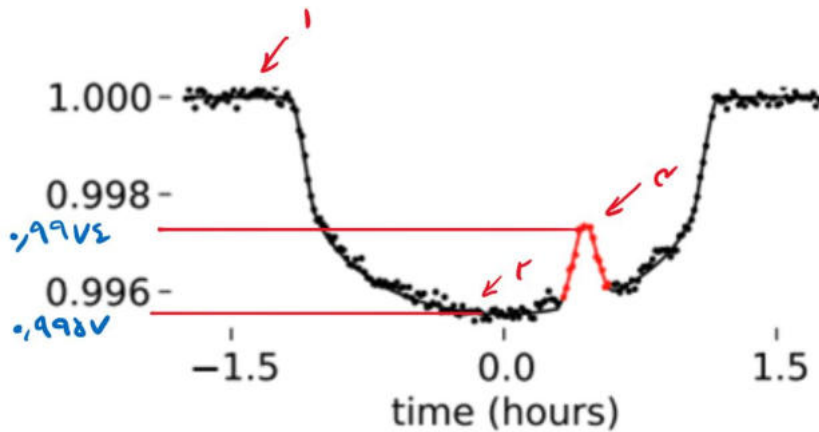
و) اگر لکه با سرعت 350 m s^{-1} خلاف جهت حرکت سیاره حرکت کند، منحنی نوری در گرفت بعدی

چه تغییری می کند؟ آن را رسم کنید. فرض کنید دمای لکه ثابت باقی بماند، همچنین لکه روی خط

گرفت حرکت کند. (۳۰ نمره)

پاسخ سوال چهارم :

الف و ب) سیاره‌ای داریم که جلوی ستاره را گرفته است؛ در سه حالت مشخص شده روی منحنی نوری، میزان درخشندگی را می‌توان به صورت زیر نوشت.



۱. وقتی گرفتی رخ نداده باشد:

$$I_1 = S_{\odot} \sigma T_{\odot}^4$$

۲. وقتی سیاره کاملاً روی ستاره باشد:

$$I_2 = I_1 - S_p \sigma T_{\odot}^4$$

۳. وقتی سیاره روی لکه است:

$$I_3 = I_1 - S_p \sigma T_{\text{لکه}}^4$$

با تقسیم کردن I_2 و I_3 خواهیم داشت:

$$\frac{I_2}{I_1} = 1 - \frac{S_p}{S_{\odot}}$$

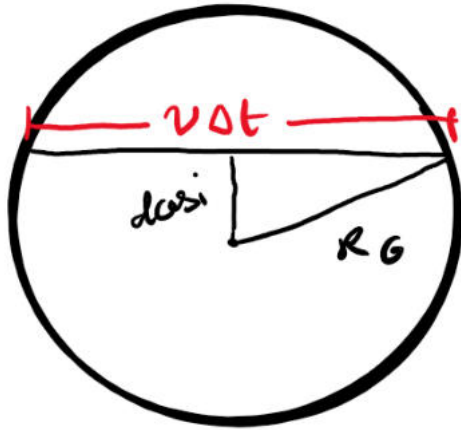
$$\frac{I_3}{I_1} = 1 - \frac{S_p}{S_{\odot}} \left(\frac{T_{\text{لکه}}}{T_{\odot}} \right)^4$$

با توجه به عددهای خوانده شده از نمودار می‌توانیم هر دو مجهول S_p و $T_{\text{لکه}}$ را به دست آوریم.

$$R_p = \sqrt{\frac{S_p}{S_{\odot}}} R_{\odot} = 0.10656 R_{\odot} = 4.59 \times 10^6 m = 7.17 R_{\oplus}$$

$$T_{\text{لکه}} = 0.1882 T_{\odot} = 5100 K$$

ج) اگر خط گرفت را روی ستاره رسم کنیم شکل زیر به دست می آید.



با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث خواهیم داشت:

$$d^2 \cos^2 i + \left(\frac{v \Delta t}{\gamma}\right)^2 = R_G^2$$

و $\Delta t \approx 2/3 \text{ hr}$ همچنین از مدار دایروی داریم:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{d}}$$

با جایگذاری و حل معادله درجه سوم (به صورت عددی یا هر طور دیگر) سه جواب به دست می آید که دو جواب زیر مثبت و قابل قبول هستند. برای کسب نمره‌ی کامل لازم است به همه‌ی جواب‌ها اشاره شود هر چند به دست آوردن یکی از جواب‌های قابل قبول (مثبت) منجر به کسب کسر زیادی از نمره خواهد شد.

$$d = 9/5 \times 10^9 \text{ m}$$

$$d = 5/7 \times 10^9 \text{ m}$$

د) تنها با جایگذاری فاصله در رابطه‌ی سرعت مدار دایروی $v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{d}}$ داریم:

$$v = 120 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v = 150 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

ه) با ضرب δt در سرعت مداری و یا نسبت تناسب بستن با $2\sqrt{R_{\odot}^2 - \left(\frac{v \Delta t}{\gamma}\right)^2}$ می توان ابعاد لکه را تخمین زد.

$$\delta t = 14 \text{ min}$$

$$l \approx 16 R_{\oplus}$$

$$l \approx 20 R_{\oplus}$$

و) جهت حرکت سیاره راست به چپ است؛ همچنین طی یک دوره تناوب که زمان ۱۴۰ ساعت می باشد، لکه تقریباً به اندازه‌ی $\frac{R_{\odot}}{4}$ به چپ منتقل شده است و تبعاً برآمدگی با همین ابعاد به همین اندازه به چپ منتقل می شود.

جهت حرکت سیاره راست به چپ است؛ همچنین طی یک دوره تناوب که زمان ۶۶ ساعت می باشد، لکه تقریباً به اندازه‌ی $\frac{R_{\odot}}{1}$ به چپ منتقل شده است و تبعاً برآمدگی با همین ابعاد به همین اندازه به چپ منتقل می شود.

سؤال پنجم: (۱۲۰ نمره)

سرعت نوری یکی از ثوابت اساسی در عالم است. ثابت بودن سرعت نور به ما این امکان را می دهد که میزان مسافتی که نور در فضا می پیماید را برحسب زمان بیان کنیم. در یک عالم منبسط شونده با ضریب مقیاس $a(t)$ ، مسافتی (d) را که یک پرتو نور از زمان تابش (زمانی که فوتون تولید می شود) تا زمان جذب (زمانی که فوتون توسط ابزارهای ما رصد می شود)، در چارچوب همراه، می پیماید از رابطه زیر به دست می آید

$$d = x(t_e) - x(t.) = \int_{t_e}^{t.} \frac{cdt'}{a(t')}$$

که در آن $a(t)$ ضریب مقیاس تابعی از زمان، c سرعت نور، t_e زمان تابش فوتون و $t.$ زمان حال یا زمان رصد فوتون و به همین ترتیب $x(t_e)$ مکان فوتون در زمان تابش و $x(t.)$ مکان فوتون در زمان رصد در چارچوب همراه است. در کیهان شناسی چارچوب همراه چارچوبی است که در آن مختصات و فواصل در یکای ضریب مقیاس اندازه گیری می شوند. برای تعیین فواصل در این دستگاه باید ابتدا مختصات را در چارچوب فیزیکی تعیین کنیم و سپس آن را به ضریب مقیاس تقسیم کنیم. در رابطه بالا cdt' مسافت فیزیکی است که نور در زمان dt' می پیماید با تقسیم این مسافت بر ضریب مقیاس و انتگرال گیری روی زمان کل مسافت طی شده توسط فوتون در چارچوب همراه به دست می آید. چون مختصات فیزیکی و ضریب مقیاس هردو به یک نسبت در عالم منبسط می شوند مختصات در دستگاه همراه، همواره ثابت می ماند. توجه کنید که مبداء دستگاه مختصات همراه که x در آن اندازه گیری می شود روی زمین است.

بدون توجه به جزئیات مهبانگ، در نظر بگیرید که همه نقاط عالم در لحظه مهبانگ در یک نقطه متمرکز بوده اند. فرض کنید هم زمان با رخ داد مهبانگ یک فوتون هم تابش شده باشد. این فوتون بعد از سفری طولانی در فضا زمان، در زمان حال ($t.$) توسط ابزارهای نجومی ما روی زمین رصد می شود.

الف) فاصله فیزیکی لحظه ای این فوتون را در هر لحظه از زمان (t) از زمین برحسب c و $t.$ به دست آورید. (۹۰ نمره)

ب) این فوتون در زمان مهبانگ به همراه تمامی نقاط عالم با ما هم مکان بوده است در زمان حال هم که به کمک ابزارهای ما رصد شده با ما هم مکان است، بنابراین فاصله فوتون از ما باید یک بیشینه داشته باشد. مقدار بیشینه فاصله فیزیکی را بر حسب پارامترهای مسئله به دست آورید. (۳۰ نمره)

جهان را تخت و ماده غالب در نظر بگیرید در چنین جهانی ضریب مقیاس به شکل

$$a(t) = \left(\frac{t}{t.}\right)^{\frac{2}{3}}$$

با زمان رابطه دارد.

پاسخ سوال پنجم:

الف فوتون در زمان رخداد مهبانگ منتشر شده است، بنابراین داریم $t_e = 0$. ما فاصله فیزیکی فوتون از زمین را می خواهیم با استفاده از رابطه بالا ابتدا باید مختصات فوتون در چارچوب همراه که مرکز آن روی زمین است به دست آوریم سپس آن را در ضریب مقیاس ضرب کنیم. طبق رابطه داده شده در مسئله داریم

$$x(t) = x(t_e = 0) - \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}$$

$$x(t) = x(t_e = 0) - ct \int_0^t \frac{dt'}{t'^{\frac{3}{2}}} = x(0) - 3ct \cdot t^{\frac{1}{2}}$$

برای محاسبه $x(0)$ کافی است بدانیم که این فوتون قرار است در زمان t روز زمین رصد شود بنابراین مختصات همراه این فوتون در زمان حال برابر صفر است

$$x(t_e) = x(0) - 3ct_e = 0 \Rightarrow x(0) = 3ct_e$$

با جایگذاری مقدار $x(0)$ و ضرب کردن مقدار $x(t)$ در ضریب مقیاس فاصله فیزیکی لحظه ای به دست می آید

$$r(t) = \left(\frac{t}{t_e}\right)^{\frac{3}{2}} (3ct_e - 3ct \cdot t^{\frac{1}{2}}) = 3ct_e \cdot \left[\left(\frac{t}{t_e}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{t}{t_e} \right]$$

ب) در این قسمت باید از $r(t)$ نسبت به زمان مشتق بگیریم

$$\frac{dr}{dt} = 3c \left(\frac{t}{t_e}\right)^{\frac{1}{2}} - 3c = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{9} t_e$$

اگر این مقدار را در رابطه $r(t)$ جایگذاری کنیم فاصله بیشینه به دست می آید

$$r\left(\frac{4}{9} t_e\right) = 3ct_e \cdot \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} \right] = 0.44 ct_e$$

سؤال ششم: (۱۵۰ نمره)

دو ستاره داریم که هم‌اکنون در مختصات زیر هستند:

$$A \begin{cases} \alpha = 2^h 32^m \\ \delta = 42^\circ \end{cases} \quad B \begin{cases} \alpha = 2^h 32^m \\ \delta = 71^\circ \end{cases}$$

همان‌طور که مشخص است این دو ستاره هم‌اکنون هم‌بعد هستند.

الف) حساب کنید چند سال دیگر دوباره این دو ستاره هم‌بعد خواهند شد؟ این مدت زمان را Δt می‌نامیم. (۴۰ نمره)

ب) بعد از گذشت هزار سال از زمان حال، بیشینه عرض جغرافیایی که می‌تواند این دو ستاره را هم‌سمت ببیند چقدر است؟ (۵۰ نمره)

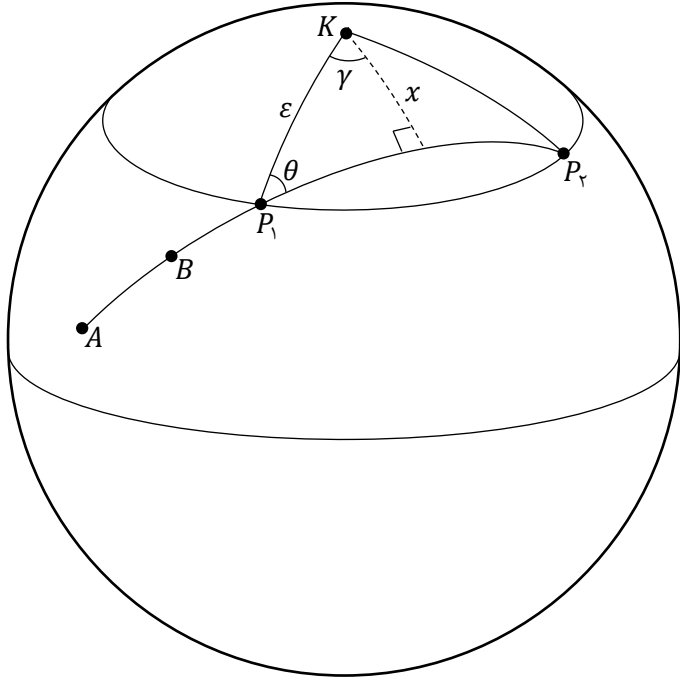
ج) ثابت کنید بعد از گذشت $\frac{\Delta t}{4}$ از زمان حال، فاصله زمانی دوبار هم‌سمت شدن پیاپی این دو ستاره برای ناظری در عرض جغرافیایی ϕ از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$\Delta H = 2 \cos^{-1}(Q \tan \phi)$$

که در آن Q یک ثابت است و مقدار عددی آن را نیز محاسبه کنید. (۶۰ نمره)

پاسخ سوال ششم :

الف) برای هم بعد شدن باید دایره عظیمه AB از قطب بگذرد. این اتفاق در دو نقطه میفتد که اختلاف زمانی این دو نقطه خواسته این بخش است.



$$\theta = 18.0^\circ - (9.0^\circ + \alpha) = 9.0^\circ - \alpha$$

$$\cos 9.0^\circ = -\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \varepsilon$$

$$\rightarrow \tan \gamma = \frac{\tan \alpha}{\cos \varepsilon} \rightarrow \gamma = 40.43^\circ$$

$$\Delta t = (36.0^\circ - 2\gamma) \times \frac{26.00}{36.0} = 2.160 \text{ سال}$$

ب) برای هم سمتی در این حالت باید سرسو از دایره عظیمه AB بگذرد. بیشترین عرض جغرافیایی ممکن وقتی است که از قطب شمال سماوی در این لحظه (P') به این دایره عظیمه عمود کنیم. شکل در صفحه بعد آمده است.

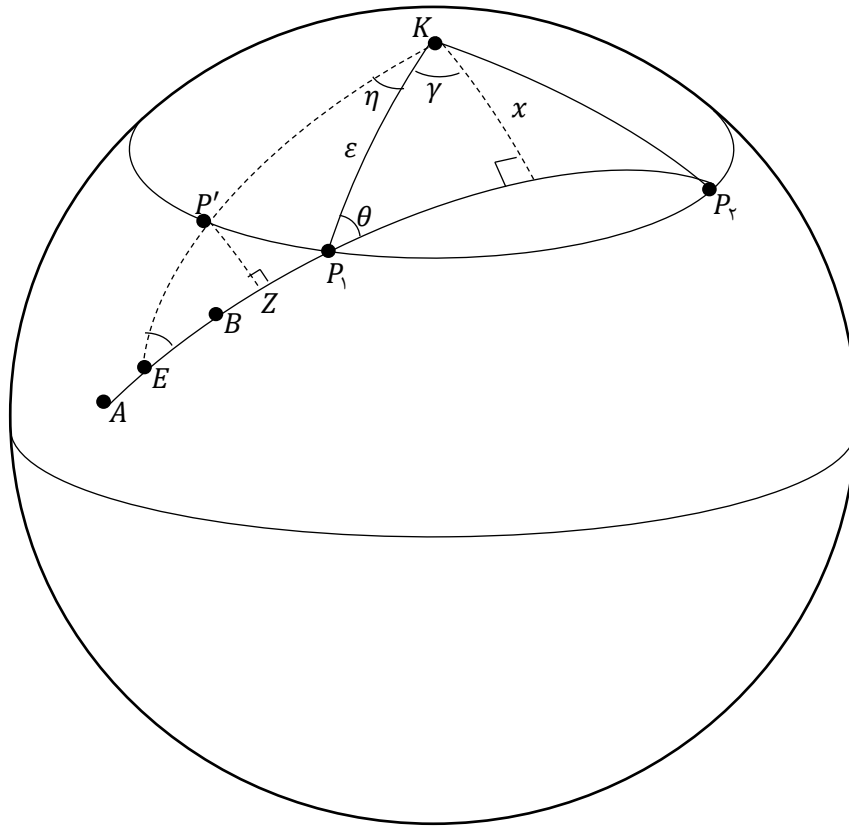
$$\eta = \frac{1.00}{26.00} \times 36.0^\circ = 13.85^\circ, \quad \sin x = \sin \theta \sin \varepsilon \rightarrow x = 18.31^\circ$$

$$\cos E = -\cos 9.0^\circ \cos(\eta + \gamma) + \sin 9.0^\circ \sin(\eta + \gamma) \cos x \rightarrow E = 39.58^\circ$$

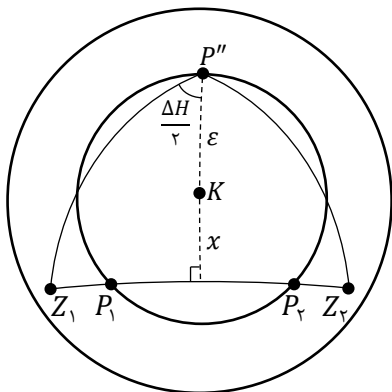
$$\cos(\eta + \gamma) \cos x = \sin x \cot KE - \sin(\eta + \gamma) \cot 9.0^\circ \rightarrow KE = 29.54^\circ$$

$$P'E = KE - \varepsilon \rightarrow P'E = 17.4^\circ$$

$$\sin P'Z = \sin E \sin P'E \rightarrow P'Z = 37.85^\circ, \quad P'Z = 9.0^\circ - \phi_{\max} \rightarrow \phi_{\max} = 16.16^\circ$$



ج) در این حالت قطب شمال سماوی را P'' می نامیم و چون این نقطه دقیقا بین P_1 و P_2 است پس تقارن در مساله وجود دارد و با توجه به سرسوی ناظر فاصله $P''Z_1$ و $P''Z_2$ نیز در هر صورت برابر خواهد بود.



$$P''Z_1 = P''Z_2 = 90^\circ - \phi$$

$$\cos \frac{\Delta H}{2} \cos(\epsilon + x) = \sin(\epsilon + x) \tan \phi - \sin \frac{\Delta H}{2} \cot 90^\circ$$

$$\rightarrow \Delta H = 2 \cos^{-1}(\tan(\epsilon + x) \tan \phi) = 2 \cos^{-1}(Q \tan \phi)$$

$$Q = \tan(\epsilon + x) = 0,894$$

سؤال هفتم: (۱۴۰ نمره)

کهکشانی با تعداد 10^{11} ستاره را در نظر بگیرید که در ابتدای شکل گیری ($t = 0$) از سه نوع ستاره با قدرهای مطلق $M_1 = 5$ و $M_2 = 2.5$ و $M_3 = 0$ تشکیل شده است. اگر نسبت تعداد ستاره ها به صورت $\frac{N_1}{N_2} = 10$ و $\frac{N_2}{N_3} = 10$ باشد، مقادیر جرم کهکشان (m)، درخشندگی کل (L)، قدر مطلق کل (M) و نسبت جرم به درخشندگی ($\frac{m}{L}$) را در زمان های خواسته شده در جدول زیر محاسبه کنید. فرض کنید ستاره های این کهکشان در روند تحولی خود تبدیل به کوتوله سفید می شوند که جرم آنها با جرم اولیه ستاره به شکل زیر رابطه دارد

$$m_{wd} = 0.108 m_i + 0.48 m_{\odot}$$

در این رابطه m_i جرم اولیه ستاره است.

	$t = 0$	$t = 0.10 \text{ Gyr}$	$t = 2.10 \text{ Gyr}$
m			
L			
$\frac{m}{L}$			
M			

توجه: منظور از جرم در این سوال جرم ستاره ای و بازمانده های ستاره ایست. از درخشندگی کوتوله های سفید صرف نظر کنید. در این سوال مشروح محاسبات باید در پاسخ نامه بیاید. بعد از اینکه محاسبات را انجام دادید جدولی شبیه جدول بالا در پاسخ نامه رسم کنید و نتایج محاسبات خود را در آن وارد کنید. توجه کنید که برگه سوال تصحیح نخواهد شد. همه موارد خواسته شده در جدول را بر حسب مقادیر خورشیدی (m_{\odot} و L_{\odot} و $\left(\frac{m}{L}\right)_{\odot}$) بیان کنید. ($1 \text{ Gyr} = 10^9 \text{ yr}$)

پاسخ سوال هفتم :

ابتدا تعداد ستاره های هرگونه و نیز درخشندگی آن ها را محاسبه می کنیم :

$$N_1 + N_2 + N_3 = 10^{11}$$

$$\rightarrow N_2 + 10N_2 + 100N_2 = 10^{11}$$

$$\rightarrow N_2 = \frac{10^9}{1/11}, \quad N_2 = \frac{10^{10}}{1/11}, \quad N_1 = \frac{10^{11}}{1/11}$$

$$M_1 - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_1}{L_{\odot}} \rightarrow 0 - 4.74 = 2.5 \text{Log} \frac{L_1}{L_{\odot}} \rightarrow L_1 = 0.18 L_{\odot}$$

$$M_2 - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_2}{L_{\odot}} \rightarrow L_2 \approx 7.9 L_{\odot} \rightarrow L_2 \approx 8 L_{\odot}$$

$$M_3 - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_3}{L_{\odot}} \rightarrow L_3 \approx 78.7 L_{\odot} \rightarrow L_3 \approx 80 L_{\odot}$$

در لحظه $t = 0$

$$L_{tot}(\cdot) = N_1 L_1 + N_2 L_2 + N_3 L_3 = 2.14 \times 10^{11} L_{\odot}$$

$$M_{tot}(\cdot) - M_{\odot} = -2.5 \text{Log} \frac{L_{tot}(\cdot)}{L_{\odot}} \rightarrow M_{tot}(\cdot) = -23.58$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \rightarrow \begin{cases} m_1 \approx 0.93 m_{\odot} \\ m_2 \approx 2 m_{\odot} \\ m_3 \approx 4.3 m_{\odot} \end{cases}$$

جرم گونه های مختلف ستاره

$$M_{tot}(\cdot) = \sum N_i m_i = N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_3 = 1/0.5 \times 10^{11} m_{\odot}$$

$$\left(\frac{m}{L} \right)_{(\cdot)} \approx 0.494 \frac{m_{\odot}}{L_{\odot}}$$

برای زمان های بعدی ابتدا طول عمر رشته اصلی ستارگان و نیز جرم ستاره کوتوله سفید مربوطه را باید محاسبه کنیم:

$$\frac{\tau}{\tau_{\odot}} = \left(\frac{m}{m_{\odot}} \right) \rightarrow \tau_1 = 10 \text{ Gyr } (0.93)^{-2/5} \rightarrow \tau_1 = 11.9 \text{ Gyr}$$

$$\tau_2 = 1.76 \text{ Gyr} \quad \tau_3 = 0.26 \text{ Gyr}$$

پس در زمان $t = 2.5 \text{ Gyr}$ ستاره های نوع ۲ حتما به کوتوله سفید تبدیل شده اند.

در زمان $t = 0.5 \text{ Gyr}$ ستاره های نوع ۳ نیز به کوتوله سفید تبدیل شده اند.

و فقط سهم جرم کوتوله ای لحاظ می شود.

$$m_{wd,2} = 0.8 \times (2) + 0.48 \rightarrow m_{wd,2} = 0.76 m_{\odot}$$

$$m_{wd,3} = 0.8 \times (0.3) + 0.48 \rightarrow m_{wd,3} = 0.824 m_{\odot}$$

در زمان $t = 0.5 \text{ Gyr}$

$$L_{tot} = N_1 L_1 + N_2 L_2 = 1.43 \times 10^{11} L_{\odot}$$

$$M_{tot} - M_{\odot} = -2.5 \text{ Log } \frac{L_{tot}}{L_{\odot}} \rightarrow M_{tot} = -23.15$$

$$m_{tot} = N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_{wd,3} = 1.2 \times 10^{11}$$

$$\left(\frac{m}{L} \right) = \left(\frac{m_{tot}}{L_{tot}} \right) (t = 0.5 \text{ Gyr}) = 0.71 \frac{m_{\odot}}{L_{\odot}}$$

$$t = 2.5 \text{ Gyr}$$

$$L_{tot} = N_1 L_1 = \frac{1.0^{11}}{1.11} \times 0.78 = 0.72 \times 1.0^{11} L_{\odot}$$

$$M_{tot} - M_{\odot} = -2.5 \text{ Log} \frac{L_{tot}}{L_{\odot}} \rightarrow M_{tot} = -22.4$$

$$m_{tot} = N_1 m_1 + N_2 m_{wd,2} + N_3 m_{wd,3}$$

$$= \frac{1.0^{11}}{1.11} \times 0.93 + \frac{1.0^{10}}{1.11} \times 0.74 + \frac{1.0^9}{1.11} \times 0.824$$

$$m_{tot} = 0.902 \times 1.0^{11} m_{\odot}$$

$$\left(\frac{m}{L}\right) = \left(\frac{m_{tot}}{L_{tot}}\right) (t = 2.5 \text{ Gyr}) = 1.25 \frac{m_{\odot}}{L_{\odot}}$$

جدول

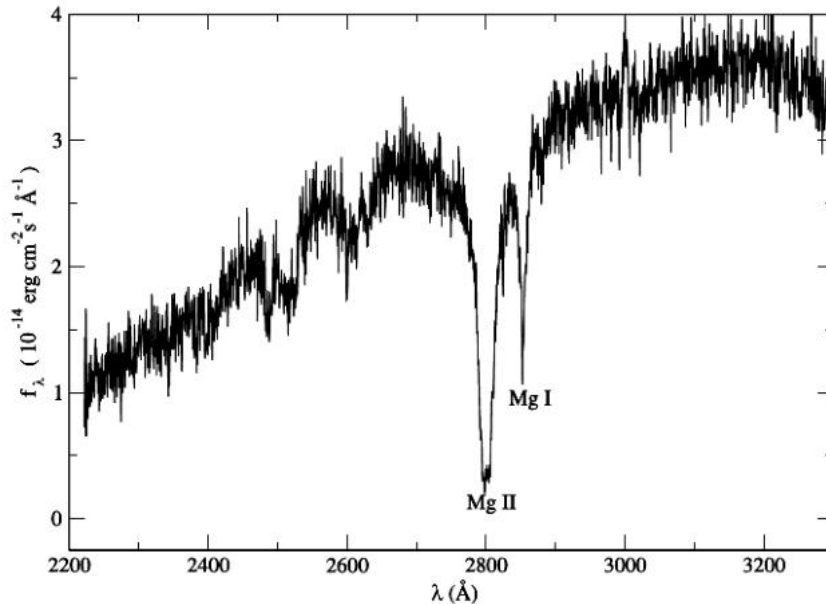
	$t = .$	$t = 0.5 \text{ Gyr}$	$t = 2.5 \text{ Gyr}$
m	1.05×1.0^{11}	1.02×1.0^{11}	0.902×1.0^{11}
l	2.14×1.0^{11}	1.43×1.0^{11}	0.72×1.0^{11}
m/L	0.494	0.71	1.25
M	-23.58	-23.15	-22.4

توجه :

پاسخهایی که با فرض رابطه $L = m^{3.5}$ انجام داده اند نیز نمره کامل را خواهند گرفت.

سؤال هشتم: (۱۳۰ نمره)

در تصویر زیر نمودار نورسنجی از یک کوتوله سفید DZ و سرد (Cool DZ White Dwarf) در محدوده پرتوهای فرابنفش نشان داده شده است. این دسته از کوتوله های سفید کمی سردتر و با خطوط فلزی بیشتر نسبت به هیدروژن و هلیوم در طیف خود هستند. در این نورسنجی تصحیح شده (اثرات حرکتی و ناشی از انتقال به قرمز حذف شده اند)، خطوط جذبی عنصر منیزیم خنثی Mg و یونیزه Mg^+ بخوبی مشخص هستند؛ که به ترتیب در طول موج های ۲۸۵۲ و ۲۷۹۹ آنگستروم ثبت شده اند.



- الف) مشخص کنید دمای مؤثر سطحی برای این ستاره حدوداً چقدر است؟ (۱۵ نمره)
- ب) اگر انرژی یونش برای این عنصر ۷۳۸ کیلوژول بر مول باشد، هر اتم منیزیم در چه دمایی یونیزه می شود؟ آیا در سطح این ستاره اکثر منیزیم ها یونیزه اند؟ بله یا خیر؛ فقط توضیح دهید. (۲۵ نمره)
- ج) شار دریافتی یا روشنایی در قله این نمودار چند وات بر متر مربع در هر نانومتر است؟ هر اِ رگ 10^{-7} ژول است. (۲۵ نمره)
- د) می دانیم برای این ستارگان با توجه به برقراری تعادل هیدرواستاتیک، رابطه شعاع-جرم بصورت $R_{wd} = M_{wd}^{-\frac{1}{7}}$ است. اگر جرم این ستاره در ابتدا ۱/۵ برابر جرم خورشید بوده باشد و بدانیم خورشید در انتهای عمرش به یک کوتوله سفی
- د با شعاع $\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$ مقدار کنونی تبدیل خواهد شد، تابندگی این ستاره را بدست آورید. (۲۵ نمره)
- ه) اگر بخواهیم با استفاده از خط جذبی $MgII$ اثر انتقال به قرمز گرانشی را در طیف سنجی از این ستاره تشخیص دهیم، حداقل وضوح طیف سنج چقدر باید باشد؟ این ستاره نسبت به ما حرکت شعاعی ندارد. (۴۰ نمره)
- توجه: در این سوال برای تعیین جرم کوتوله سفید از رابطه ای که در مسئله هفتم داده شده کمک بگیرید.

پاسخ سوال هشتم :

(الف) اگر قله نمودار تابش پلانک را در حدود 3200 \AA در نظر بگیریم:

$$\lambda_{max} \cdot T_{eff} = 2.898 \times 10^{-3} \rightarrow T_{eff} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{3.2 \times 10^{-7}} \cong 9056 \text{ K}$$

البته این مقدار حدوداً دقیق است و کلیه پاسخها در بازه ۹۰۰۰ تا حدود ۹۲۰۰ کلون درست هستند.

(ب) انرژی یونش $\frac{KJ}{mol}$ ۷۳۸ است؛ در نتیجه انرژی یونش برای هر اتم خواهد بود:

$$\frac{738 \times 10^3}{6.022 \times 10^{23}} = 1.23 \times 10^{-18} \text{ Joule} (= 7.75 \text{ eV}) \cong \frac{3}{4} kT$$

$$\rightarrow T = \frac{1.23 \times 10^{-18}}{1.5 \times 1.38 \times 10^{-23}} \cong 59200 \text{ K}$$

با مقایسه دماهای بدست آمده در موارد فوق، مشخص است که در سطح ستاره با دمای مؤثری که بدست آمد، اکثر اتم های منیزیم غیر یونیزه باقی خواهند ماند. به همین علت الکترون های مقید به هسته ها قادر به ایجاد خطوط جذبی مشاهده شده در طیف خواهند بود.

(ج) اگر قله نمودار در $\frac{\text{Erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{\AA}}$ 3.7×10^{-14} باشد:

$$3.7 \times 10^{-14} \times \frac{1}{10^{-7}} \times 10^{-4} \times 10 = 3.7 \times 10^{-16} \frac{\text{watt}}{\text{m}^2 \cdot \text{nm}}$$

(تبدیل واحد های انجام شده، بترتیب برای تبدیل ارگ به ژول، سانتیمتر مربع به متر مربع و نیز آنگستروم به نانومتر است.)

البته اعداد خوانده شده از روی نمودار می توانند در بازه ۳/۵ تا 3.7×10^{-14} نیز باشند...

(د) با استفاده از رابطه جرم نهایی برای کوتوله های سفید، برای خورشید و این ستاره داریم:

$$M_{wd,\odot} = 0.08 M_{\odot} + 0.48 M_{\odot} = 0.56 M_{\odot}$$

$$M_{DZ} = 0.08 \times 1.5 M_{\odot} + 0.48 M_{\odot} = 0.70 M_{\odot}$$

$$\frac{R_{DZ}}{R_{wd,\odot}} = \left(\frac{M_{DZ}}{M_{wd,\odot}} \right)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow R_{DZ} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \times 7.97 \times 10^8 \times \left(\frac{0.70}{0.56} \right)^{-\frac{1}{3}} \cong 9.2 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\rightarrow L_{DZ} = 4\pi R_{DZ}^2 \sigma T_{DZ}^4 = 4.05 \times 10^{23} \text{ watt}$$

این مقدار نیز با توجه به بازه های قابل قبول در موارد (الف) و (ب) نمره دهی خواهد شد.

(ه) اگر حرکت شعاعی نداشته باشیم تنها انتقال به قرمز گرانشی دخیل است:

$$z_g \cong \frac{\Delta \lambda_{MgII}}{\lambda_{MgII}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_{Sch}}{R_{DZ}}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM_{DZ}}{R_{DZ}c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1$$

$$z_g = \frac{1}{\left(1 - \frac{2 \times 6,673 \times 10^{-11} \times 0,6 \times 1,99 \times 10^{30}}{9,2 \times 10^7 \times 9 \times 10^{16}}\right)^3} - 1 = 9,62 \times 10^{-6}$$

$$\rightarrow \Delta\lambda_{MgII} = z_g \cdot \lambda_{MgII} = 9,62 \times 10^{-6} \times 2799 \cong 0,27A^\circ \equiv 0,27nm$$

و می دانیم که حداقل وضوح طیف سنجی نیز می تواند در همین حد باشد، تا بتوان تشخیص داد.



هفدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه پاسخ نامه سؤالات آزمون مرحله 2 سال تحصیلی 1399-1400

نهایی

نکات بسیار مهم

لطفاً قبل از شروع پاسخگویی به سؤالات، این قسمت را به دقت بخوانید. برای خواندن این قسمت 10 دقیقه وقت اضافه در نظر گرفته شده است.

(1) این آزمون حاوی 8 سؤال تشریحی است. مجموع کل نمره این آزمون 1000 نمره است که بسته به نوع سؤالات بین 8 سؤال توزیع شده است. در سؤالاتی که بخش‌های الف و ب و ج و ... دارند، نمره هر بخش به تفکیک داده شده است.

(2) در سؤالاتی که به جواب عددی منتهی می‌شوند، دقت پاسخ داده شده است. در این سؤالات نمره پاسخ نهایی وقتی داده خواهد شد که پاسخ نهایی در محدوده دقت باشد. منظور از محدوده دقت این است که اگر پاسخ نهایی A و دقت پاسخ X باشد، جواب‌هایی که در بازه $[A - X, A + X]$ باشند پذیرفته خواهند شد. مثلاً فرض کنید در یک سؤال از شما خواسته باشند یک زاویه را حساب کنید و دقت پاسخ را یک درجه داده باشند. فرض کنید جواب درست 135 درجه باشد، در این صورت اگر جواب شما بزرگتر و مساوی 134 و کوچکتر و مساوی 136 باشد، نمره پاسخ نهایی را خواهید گرفت. در غیر این صورت نمره پاسخ نهایی شما کمتر و در بخش‌هایی دارای نشر خطا است. توجه داشته باشید که این موضوع فقط مربوط به پاسخ نهایی سؤال است و شامل بخش‌های دیگر پاسخ نمی‌شود. مثل نوشتن روابط لازم و حل معادلات، رسم شکل و غیره. اگر در سؤالی دقت جواب نهایی داده نشده باشد، مقدار پیش فرض X برابر است با $X = 0.1A$.

(3) دقت کنید که تمامی مقادیر ثابت باید از جدول ثوابت که در ابتدای سؤالات آمده گرفته شوند. اگر شما خواستید سؤالی را از یک روش ابتکاری و جدید حل کنید و نیاز به ثابتی داشتید که در جدول ثوابت نبود، حتماً آن ثابت را در ابتدای پاسخ خود به سؤال، داخل کادر بنویسید. در این مورد اگر راه حل شما درست باشد و پاسخ شما هم در محدوده دقت باشد، نمره کامل خواهید گرفت.

(4) برای دقت و خوانایی بیشتر و ممانعت از محدودیت‌های نرم افزار میکروسافت Word فارسی، در این آزمون از اعداد انگلیسی استفاده شده است. شما در پاسخنامه می‌توانید به اختیار خود از اعداد فارسی و یا انگلیسی استفاده کنید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت	
6.67×10^{-11}	$\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
3.00×10^8	m s^{-1}	سرعت نور c
5.67×10^{-8}	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمان σ
9.46×10^{15}	m	سال نوری ly
3.09×10^{16}	m	پارسک pc
1.50×10^{11}	m	واحد نجومی AU
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید M_{\odot}
6.96×10^8	m	شعاع خورشید R_{\odot}
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید L_{\odot}
+4.72		قدر مطلق خورشید M_{\odot}
-26.8		قدر ظاهری خورشید m_{\odot}
5780	K	دمای مؤثر سطح خورشید T_{\odot}
1737	km	شعاع ماه R_m
384400	km	فاصله متوسط ماه از زمین r_m
5.97×10^{24}	kg	جرم زمین M_{\oplus}
6380	km	شعاع زمین R_{\oplus}
23.5°		تمایل محور زمین ϵ

سؤال اول: (100 نمره)

در عرض جغرافیایی ϕ شاخصی به طول l با زاویه $(90 - \phi)$ نسبت به افق، به سمت جنوب قرار گرفته است.

الف) در اعتدالین طول سایه شاخص را برحسب زاویه ساعتی خورشید (H) بدست آورید (40 نمره)

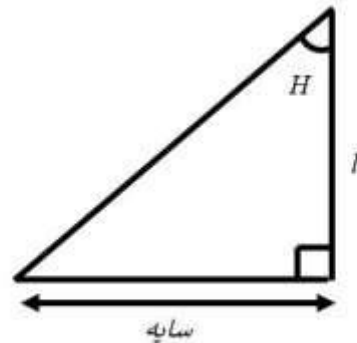
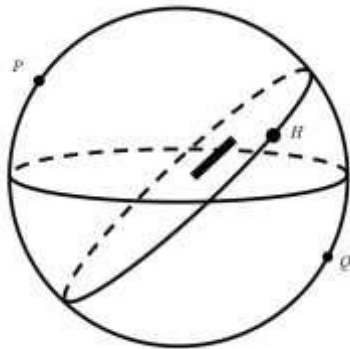
ب) در روز انقلاب تابستانی کمترین طول سایه شاخص چقدر است؟ (60 نمره)

پاسخ:

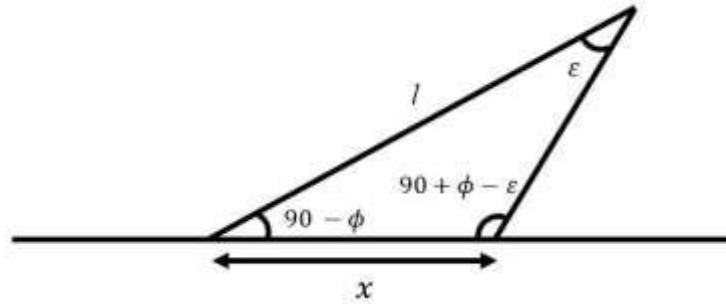
الف)

در اعتدالین چون میل خورشید برابر صفر است پس روی استوای سماوی قرار دارد و چون زاویه ی شاخص با جنوب هم $90 - \phi$ است پس راستای شاخص هم در همین صفحه ی استوای سماوی قرار دارد. به این ترتیب سایه همیشه بر روی فصل مشترک دو صفحه تشکیل می شود که همان راستای شرق به غرب است که مستقل از عرض جغرافیایی است. اندازه طول سایه نیز به این صورت به دست می آید:

$$l \tan H = \text{طول سایه}$$



ب) طبق شکل زیر کمینه طول سایه وقتی است که خورشید در بیشترین ارتفاع باشد که همان لحظه ای است که بر روی نصف النهار ناظر است:



$$\frac{\sin(90 + \phi - \epsilon)}{l} = \frac{\cos(\epsilon - \phi)}{l}$$

$$\frac{\cos(\epsilon - \phi)}{l} = \frac{\sin \epsilon}{x}$$

$$\frac{\cot \epsilon \cos \phi + \sin \epsilon \sin \phi}{l} = \frac{\sin \epsilon}{x}$$

$$\frac{\cot \epsilon \cos \phi + \sin \phi}{l} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{l}{\sin \phi + \cos \phi \cot \epsilon}$$

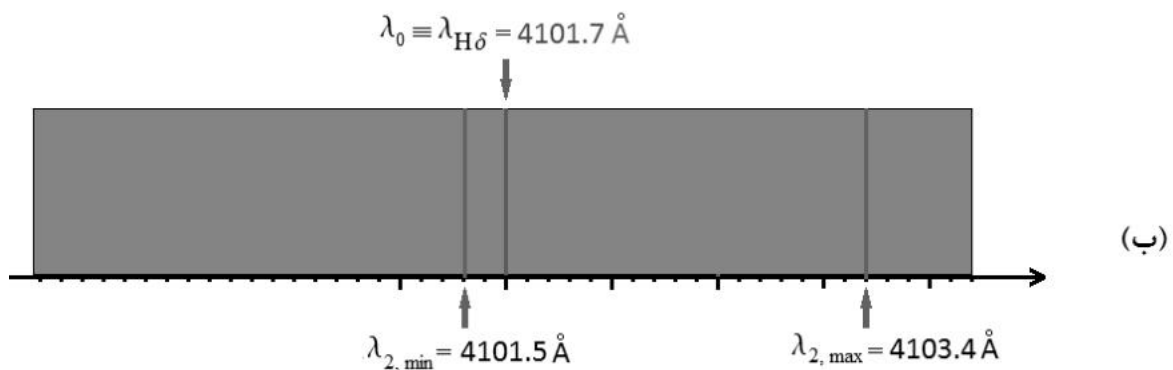
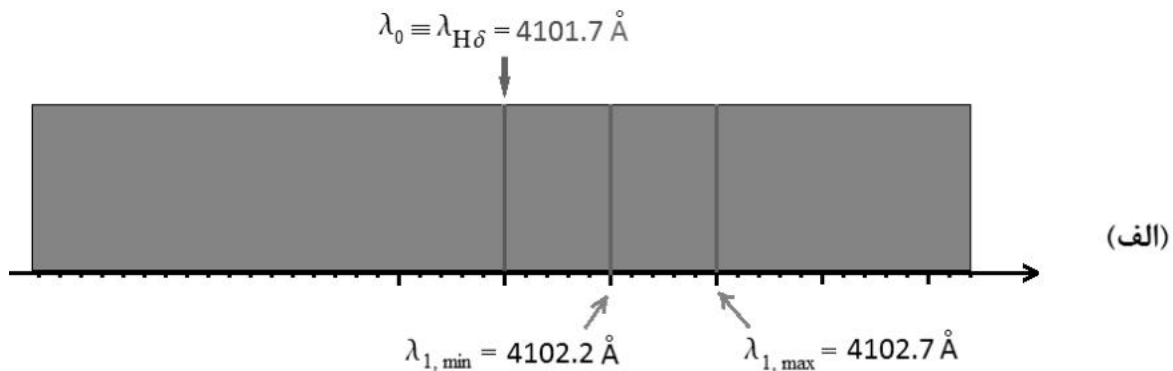
سؤال دوم : (100 نمره)

در نور رسیده از یک چشمه نقطه‌ای در آسمان، شاهد تغییراتی متناوب در روشنی با دوره تناوب 9.3×10^6 ثانیه هستیم. ضمناً این چشمه، طیفی دو-خطی (Double-Line) را به نمایش می‌گذارد که دوره تناوب تغییرات طول موج خطوط جذبی آن‌ها نیز همان 9.3×10^6 ثانیه است. کمینه و بیشینه تغییرات نظیر هر خط در شکل‌های (الف) و (ب) متناظر با خط جذبی بالمر H_δ با طول موج آزمایشگاهی $\lambda_0 = 4101.7 \text{ \AA}$ نشان داده شده است. همچنین طی مشاهداتی ده ساله که با دقت یک ثانیه قوسی انجام شده، هیچ حرکت ویژه‌ای (حرکت خاصه یا Proper Motion) در این سیستم مشاهده نشده است. به همین جهت با فرض اینکه تنها حرکت ممکن این سیستم در راستای دید (حرکت شعاعی) است:

(الف) سرعت مرکز جرم و سرعت هر ستاره نسبت به مرکز جرم این سامانه چقدر است؟ (35 نمره)

(ب) جرم هر ستاره و شعاع مداری هر یک از آن‌ها چقدر است؟ (35 نمره)

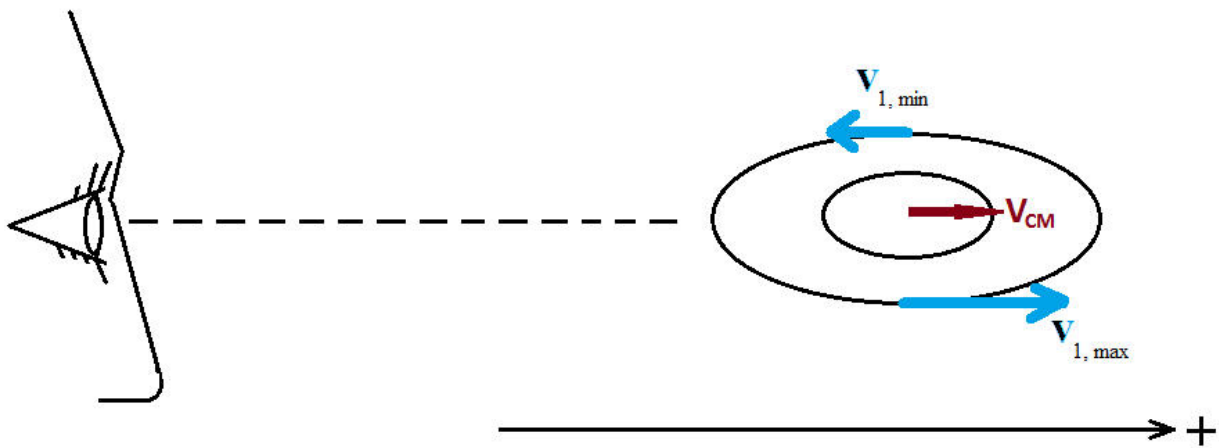
(ج) در اندازه‌گیری‌های بعدی با تلسکوپ‌هایی با توان تفکیک 0.01 ثانیه قوسی، فاصله این سامانه از ما حدود 200 پارسک بدست آمده است. آیا نتایجی که بدست آوردید با وجود این یافته همچنان معتبر می‌ماند؟ (30 نمره)



پاسخ:

(الف)

سیستم را سنکرون در نظر می گیریم و تندی همدم با جرم m_1 را با v_{10} و تندی همدم با جرم m_2 را با v_{20} نشان می دهیم. سرعت مرکز جرم را هم با v_{cm} نشان می دهیم و با توجه به شکل زیر از قاعده جمع سرعت ها داریم:



$$\begin{cases} v_{1,max} = v_{10} + v_{CM} & (1) \\ v_{1,min} = -v_{10} + v_{CM} & (2) \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} v_{2,max} = v_{20} + v_{CM} & (3) \\ v_{2,min} = -v_{20} + v_{CM} & (4) \end{cases}$$

اما

$$v_{1,max} = \frac{\Delta\lambda_{1,max}}{\lambda_0} c \quad (5),$$

$$v_{1,min} = \frac{\Delta\lambda_{1,min}}{\lambda_0} c \quad (6),$$

$$v_{2,max} = \frac{\Delta\lambda_{2,max}}{\lambda_0} c \quad (7),$$

و

$$v_{2,min} = \frac{\Delta\lambda_{2,min}}{\lambda_0} c \quad (8).$$

ضمن آنکه پیرو آنچه در صورت مسئله بیان شد:

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta\lambda_{1,max} = 1.0 \text{ \AA} & (\text{redshifted}) \\ \Delta\lambda_{1,min} = 0.5 \text{ \AA} & (\text{redshifted}) \\ \Delta\lambda_{2,max} = 1.7 \text{ \AA} & (\text{redshifted}) \\ \Delta\lambda_{2,min} = -0.2 \text{ \AA} & (\text{blueshifted}) \end{array} \right.$$

با قرار دادن این مقادیر در (5) تا (8) بدست می آوریم:

$$v_{1,max} = 73 \text{ km/s} \quad (5)',$$

$$v_{1,min} = 37 \text{ km/s} \quad (6)',$$

$$v_{2,max} = 124 \text{ km/s} \quad (7)',$$

و

$$v_{2,min} = -15 \text{ km/s} \quad (8)'.$$

اینک، با قرار دادن این نتایج در (1) تا (4) بدست می آوریم:

$$v_{CM} = \frac{v_{1,max} + v_{1,min}}{2} = \frac{73 + 37}{2} = 55 \text{ km/s}$$

یا

$$v_{CM} = \frac{v_{2,max} + v_{2,min}}{2} = \frac{124 - 15}{2} \approx 55 \text{ km/s}$$

و سپس از (1) یا (2)

$$v_{10} = v_{1,max} - v_{CM} = 73 - 55 = 18 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (10)$$

و (3) یا (4)

$$v_{20} = v_{2,max} - v_{CM} = 124 - 55 = 69 \text{ km} \quad (11)$$

(ب):

اینک توجه می کنیم که:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{20}}{v_{10}} = \frac{69}{18} \quad (12)$$

ضمن آنکه از قانون سوم کپلر

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3 \quad (13)$$

اما

$$a = a_1 + a_2 \quad (14)$$

و

$$\begin{cases} a_1 = \frac{v_{10}}{2\pi} P \\ a_2 = \frac{v_{20}}{2\pi} P \end{cases} \quad (15)$$

با قرار دادن (14) و (15) در (13) :

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} \frac{(v_{10}+v_{20})^3}{(2\pi)^3} P^3$$

پس

$$m_1 + m_2 = \frac{(v_{10}+v_{20})^3}{2\pi G} P$$

با قرار دادن مقادیر معلوم در این رابطه بدست می آوریم:

$$m_1 + m_2 = 1.5 \times 10^{31} \text{kg} \quad (16)$$

و سرانجام با داشتن نسبت جرمها از (12):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{69}{18} \approx 3.8$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{3.8}{4.8} \cong 0.8$$

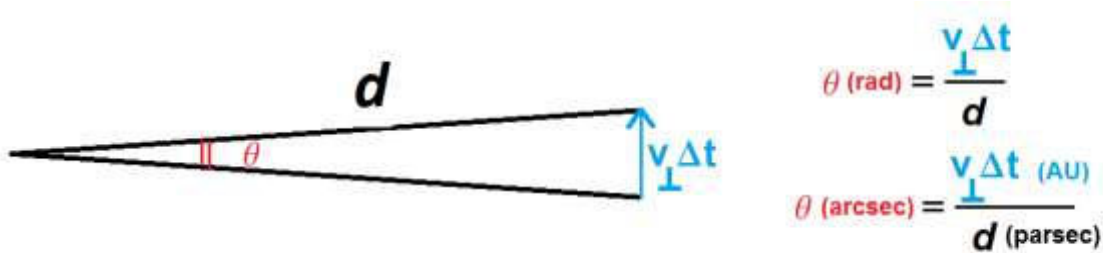
$$m_1 \cong 0.8 (m_1 + m_2) = 0.8 \times 1.5 \times 10^{31} \text{kg} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_1 \cong 1.2 \times 10^{31} \text{kg} \\ m_2 \cong 0.3 \times 10^{31} \text{kg} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{v_{10}}{2\pi} P = \frac{18 \text{ km/s}}{2 \times 3.14} \times 9.3 \times 10^7 = 2.7 \times 10^{11} \text{ m} = 1.8 \text{ AU}$$

$$a_2 = \frac{v_{20}}{2\pi} P = \frac{69 \text{ km/s}}{2 \times 3.14} \times 9.3 \times 10^7 = 1.0 \times 10^{12} \text{ m} = 6.7 \text{ AU}$$

(ج)



شرط معتبر بودن محاسبات بالا این است که مولفه‌ی عرض سرعت مرکز جرم سیستم نسبت به مولفه‌ی شعاعی آن کوچک باش:

$$\left| \frac{v_{\perp}}{v_r} \right| \ll 1 \Rightarrow \left| \frac{d \times \theta / \Delta t}{v_r} \right| \ll 1 \Rightarrow$$

$$d \ll \left| \frac{v_r}{\theta / \Delta t} \right|$$

با قرار دادن $v_r \sim 50 \text{ km/s}$ ، $\theta \sim 1'' = \frac{1}{3600} \times \frac{\pi}{180} \approx 4.8 \times 10^{-6} \text{ rad}$ ، و $\Delta t = 10 \text{ year}$ بدست می‌آوریم:

$$d \ll \frac{5 \times 10^4 \text{ m/s}}{(4.8 \times 10^{-6}) / (3 \times 10^8 \text{ s})} \sim 3 \times 10^{18} \text{ m} \approx 100 \text{ parsec}$$

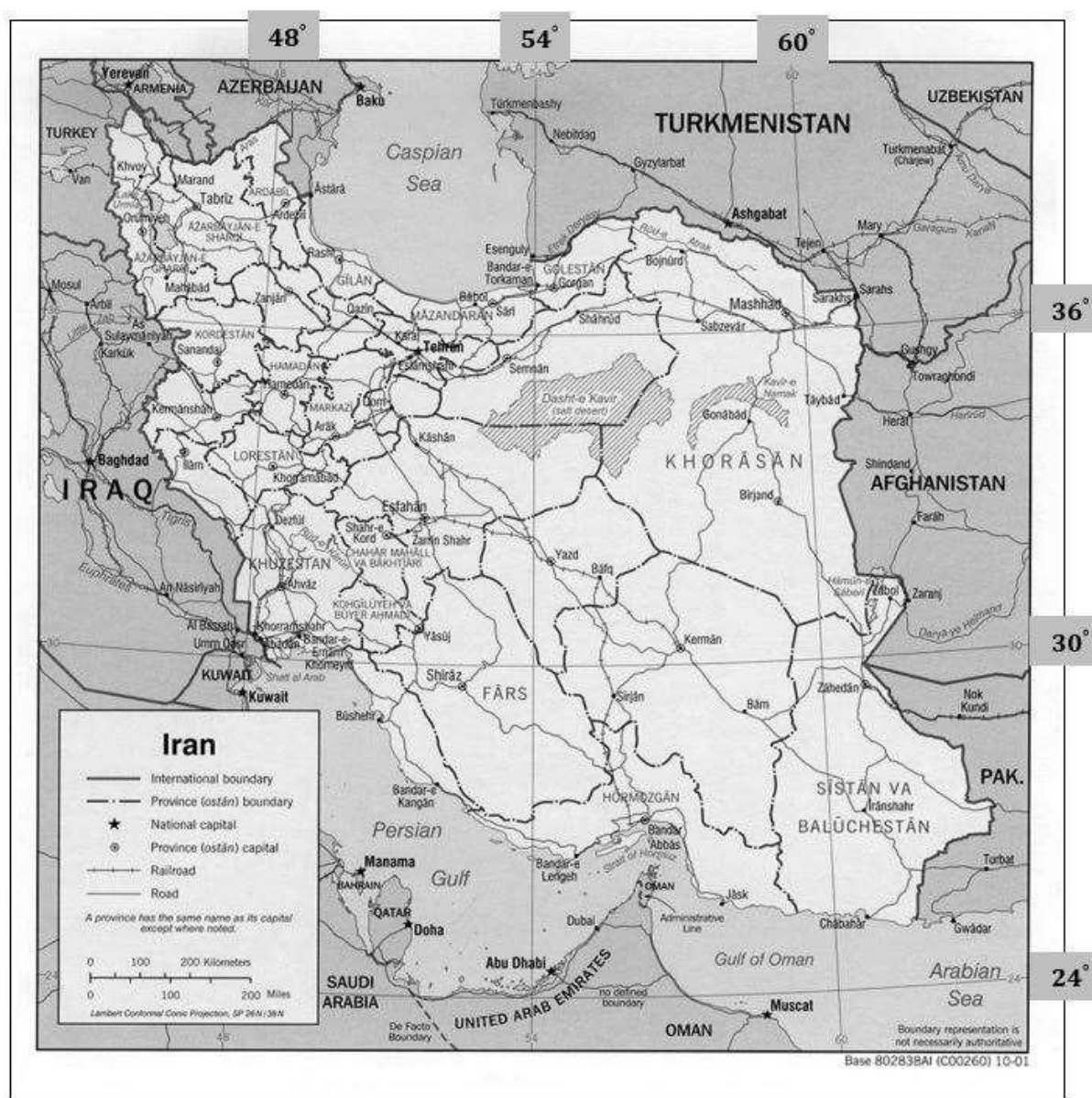
در حالی که d حدود 200 پارسک بدست آمده و این یعنی سرعت عرضی می‌توانسته از مرتبه‌ی سرعت شعاعی باشد. و لذا محاسبات ما از اعتبار ساقط می‌شود!

سؤال سوم: (120 نمره)

با توجه به نقشه کشورمان ایران، به سؤالات زیر برای روز انقلاب زمستانی پاسخ دهید:
الف) طول و عرض جغرافیایی نقطه ای را بیابید که در آن اذان ظهر زودتر از همه جا اتفاق می افتد؟ (35 نمره)

ب) طول و عرض جغرافیایی نقطه ای را بیابید که پیش از بقیه شاهد طلوع خورشید است؟ (35 نمره)

توجه: قطر ظاهری خورشید $32'$ و شکست افقی $34'$ است. طلوع خورشید را لحظه ای در نظر می گیریم، که لبه بالایی قرص خورشید برای اولین بار در زمین کاملاً مسطح دیده می شود. همچنین در این روز تعدیل زمان 2 دقیقه است.



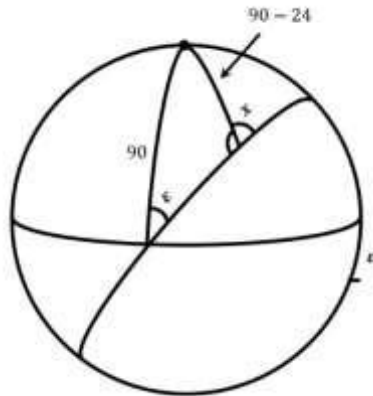
پاسخ:

الف) اذان ظهر همیشه در شرقی ترین نقطه زودتر از باقی مکان ها رخ می دهد پس با اندازه گیری در تصویر ، طول و عرض شرقی ترین نقطه را می یابیم:

$$\phi = 27.2^{\circ} N$$

$$l = 63.3^{\circ} E$$

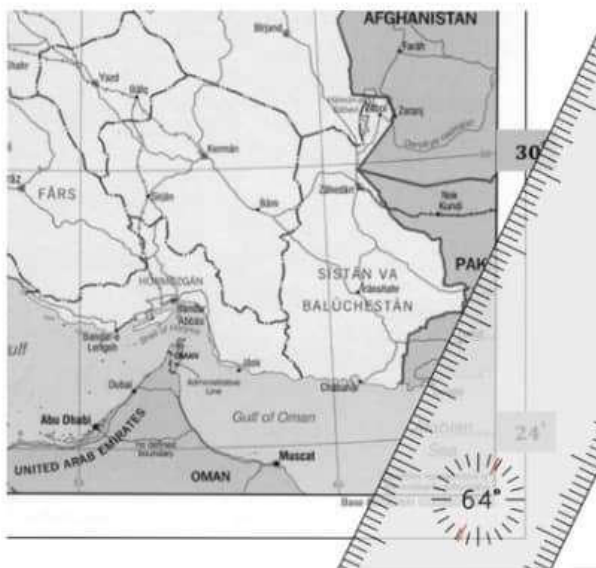
ب) خورشید میلی برابر با ε - دارد و دایره عظیمه ای که در موقع طلوع می سازد (خط جدا کننده ی روز و شب) در هر عرض جغرافیایی زاویه ای با شمال می سازد. این زاویه را برای عرض جغرافیایی 24 درجه محاسبه می کنیم:



$$\frac{\cos 24}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin 90}{\sin x}$$

$$\rightarrow x = 26^{\circ}$$

توجه کنید که عرض جغرافیایی 24 درجه به این دلیل انتخاب شده است که جنوبی ترین نقطه ایران است و اگر هر عدد دیگری در نزدیک این بازه را نیز انتخاب می کردیم زاویه خط روز و شب تقریباً همین می ماند و جواب آخر نیست تغییری قابل توجهی نداشت. بنابراین مطابق شکل مقابل این نقطه را می یابیم :



$$\phi = 26.7^{\circ}$$

$$l = 63.3^{\circ} E$$

ج) برای غروب کردن باید ارتفاع خورشید به اندازه $34 + \frac{32}{2}$ دقیقه قوسی زیر افق باشد.

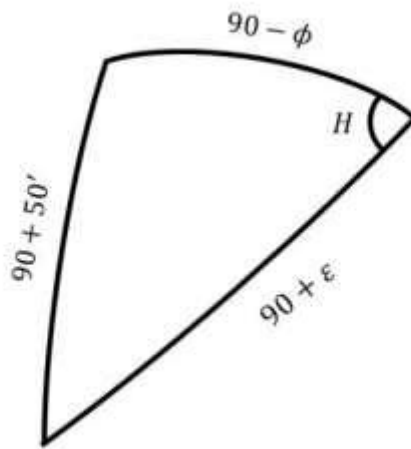
$$-\sin 50' = -\sin \phi \sin \varepsilon + \cos \phi \cos \varepsilon \cos H$$

$$H = -78.4^\circ = -5 \text{ h } 14 \text{ m}$$

$$E = H_{\odot} - H_M \rightarrow H_M = H_{\odot} - E \rightarrow MT = 12 \text{ h} + H_M$$

$$MT - ZT = l - l_0 \rightarrow ZT = MT - (l - l_0)$$

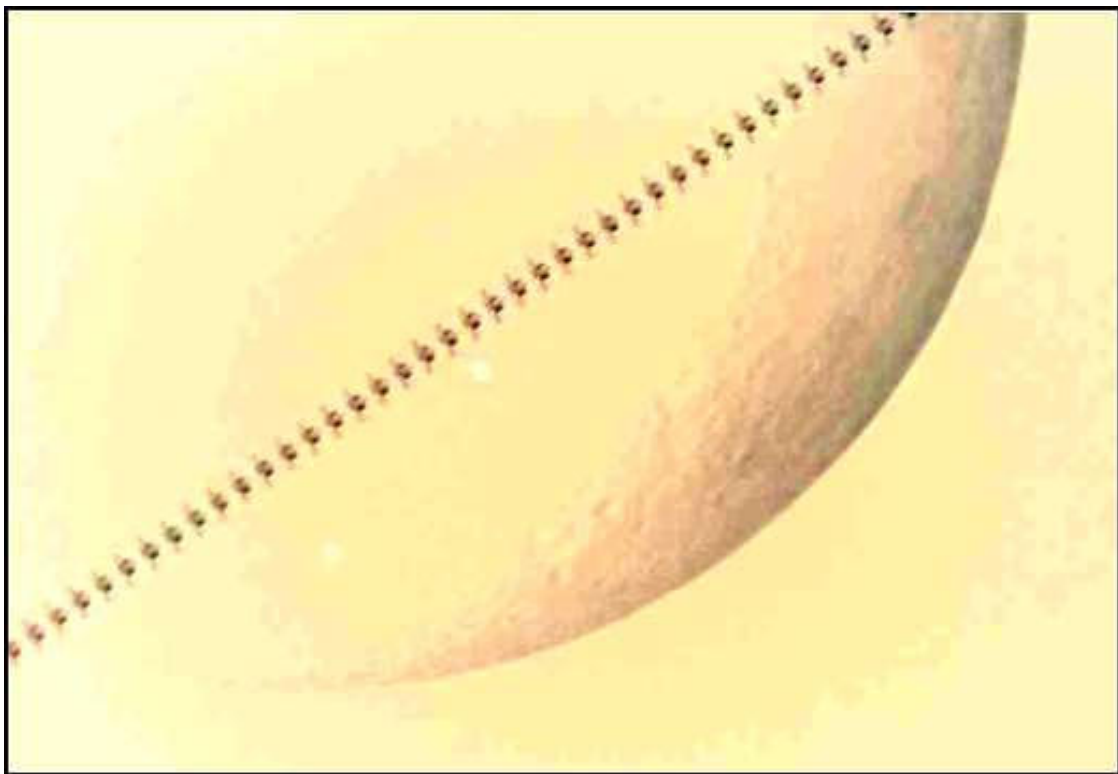
$$= 12 \text{ h} + H_{\odot} - E - (l - l_0) = 6 \text{ h } 01 \text{ m}$$



سؤال چهارم: (150 نمره)

ایستگاه فضایی بین‌المللی در مداری دایروی به ارتفاع 432 کیلومتر از سطح دریا در حال حرکت به دور زمین است. این ماهواره از دید ناظران زمین در زمان‌های محدودی قابل رؤیت است. یکی از مواردی که ماهواره از روی سطح زمین قابل رؤیت می‌شود، زمانی است که ناظر در ناحیه تاریک زمین (بخش شب) بوده ولی ماهواره هنوز در ناحیه روز است. این رخداد چیزی در حدود حداکثر یک تا دو ساعت پس از غروب یا پیش از طلوع آفتاب می‌تواند رخ دهد. البته در این مورد دیده شدن ماهواره منوط به شرایط قرارگیری آن نسبت به موقعیت خورشید و ناظر است؛ که چند درصد از نور را در جهت ناظر زمینی بازتاب می‌کند و معمولاً در چنین شرایطی نور ماهواره به خوبی دیده نمی‌شود.

حالت دیگری که ماهواره از دید ناظر زمینی دیده می‌شود، زمانی است که از جلوی قرص ماه یا خورشید گذر می‌کند. در این صورت به دلیل تضاد نوری ماهواره با پس‌زمینه، شکل آن به خوبی دیده می‌شود. عکس زیر توسط یک تلسکوپ 8 اینچ گرفته شده است.



الف) در زمان گذر، ماه و ماهواره با دقت خوبی نزدیک به سرسو بوده اند؛ بنابراین فرض کنید ماهواره دقیقاً از بالای سر ناظر عبور کرده است. با استفاده از اطلاعات موجود در عکس، پهناى ایستگاه فضایی را محاسبه کنید. (30 نمره)
 (دقت پاسخ 25٪، تا دقت 40٪ نصف نمره)

ب) شعاع مدار ماهواره و شعاع زمین را در یک شکل نسبت به یکدیگر با حفظ مقیاس رسم کنید. ماه در بینهایت قرار دارد و پهناى زاویه‌ای آن 32 دقیقه قوسی است. (10 نمره)

ج) در هر نقطه از سطح زمین چنین رخدادی قابل رؤیت نیست و فقط یک نوار مشخص روی سطح زمین است که ناظر می‌تواند چنین گذری را مشاهده کند. برای این گذر که در روز 27 فروردین امسال در تهران رخ داده است، با رسم شکل پهناى این نوار را محاسبه کنید. (40 نمره) (رسم شکل 25٪ از نمره این بخش را دارد)

د) دوره تناوب این ماهواره به دور زمین چند ثانیه است؟ (30 نمره)

ه) با رسم شکل مدت زمانی که ماهواره از مقابل قرص ماه گذر می‌کند را محاسبه کنید. فرض کنید در نقطه‌ای قرار گرفته‌ایم که گذر ماهواره را از روی قطر قرص ماه مشاهده می‌کنیم. (40 نمره)
 (رسم شکل 30٪ نمره این بخش را دارد)

پاسخ:

(الف)

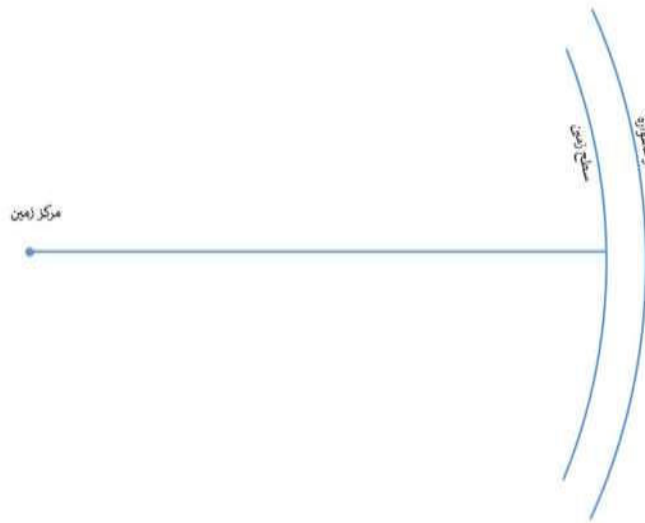
با اندازه‌گیری عکس تقریباً می‌توان گفت که پهناى ایستگاه فضایی حدود 1 قوس است.

$$\Delta x = r\theta = 432 \times 10^3 \text{ m} * \frac{1}{60} * \frac{3.14}{180}$$

$$\Delta x = 125 \text{ m}$$

که پاسخ واقعی 109 متر است.

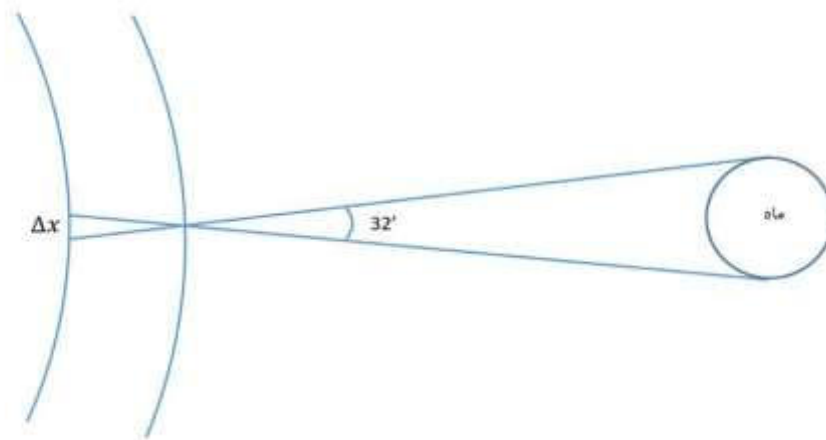
(ب)



(ج)

$$\Delta x = (432 \text{ km}) * 32' = 4019 \text{ m}$$

که مقدار واقعی در تهران 3.8 کیلومتر بود.



(د)

$$T^2 = \frac{4 \pi}{G (M + m)} a^3$$

$$m \ll M$$

$$M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$T^2 = \frac{4 \times 3.14}{6.7 \times 10^{-11} * 6 \times 10^{24}} * (6.8 \times 10^6)^3 = 38 \times 10^5$$

$$T = 5554 s = 92' ; 30''$$

(ه)

زاویه ای است که ناظر زمینی می بیند. $\theta = 32'$

ϕ زاویه ای که ماهواره در مدار خود طی کرده است.

$$x = 432 * \theta = 6800 * \phi$$

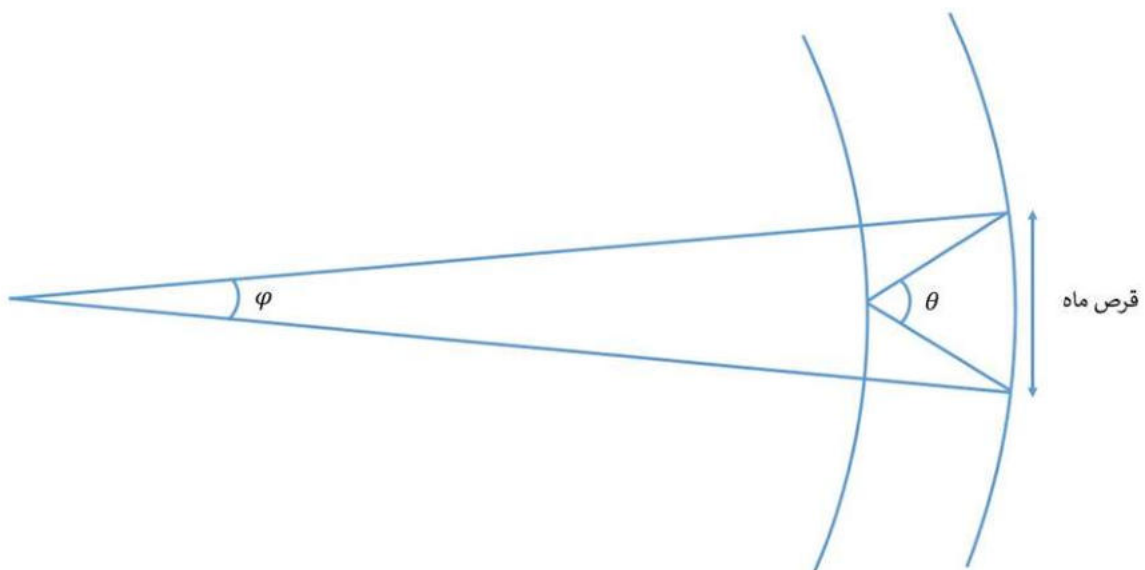
$$\rightarrow \phi = \frac{432}{6800} * 32' = 2'$$

T	360'
t	2'

$$\rightarrow t = \frac{2'}{360'} * 5554 s$$

$$t = 0.51 s$$

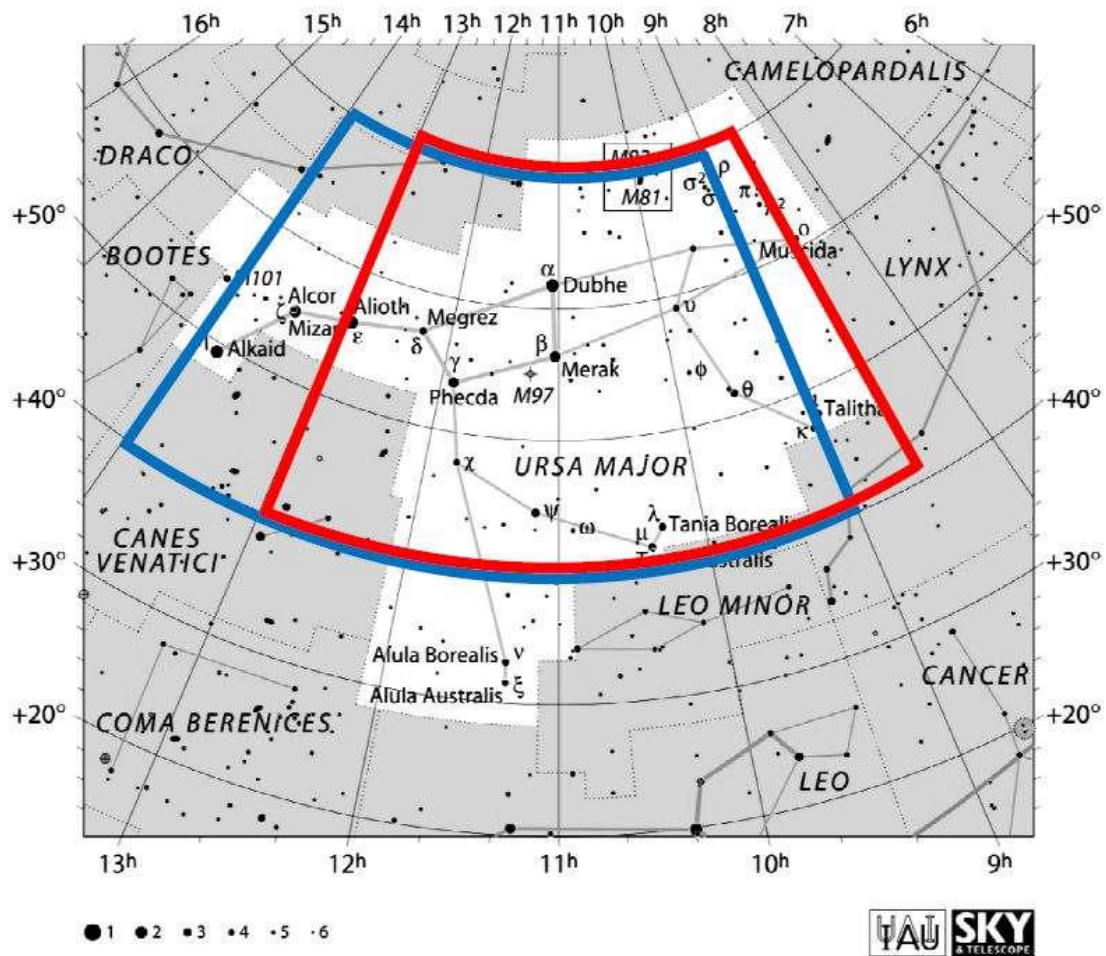
که زمان واقعی هم دقیقا 0.51 ثانیه بود.



سؤال پنجم : (120 نمره)

می‌خواهیم با استفاده از صورت فلکی دُب اکبر تخمین مناسبی از موارد خواسته شده بدست آوریم. محدوده این صورت فلکی که سومین صورت فلکی بزرگ در آسمان ماست، مطابق با قراردادهای اتحادیه بین‌المللی نجوم در تصویر زیر نشان داده شده است و ستارگان و اجرام اعماق آسمان تا قدر ظاهری +6 در آن نمایانند. توزیع همه ستاره‌ها در آسمان را همگن و همسانگرد در نظر بگیرید.

همانگونه که می‌دانید این یکی از نقشه های اطلس آسمان *Pocket Sky Atlas* نوشته راجر سینات است. در این صفحه محدوده صورت فلکی دُب اکبر همراه با همه ستارگان پرنورتر از قدر ظاهری +6 و البته برخی از اجرام غیرستاره ای نمایش داده شده است.



الف) این صورت فلکی چند درصد از کل کره سماوی را به خود اختصاص داده است؟ (40 نمره)
(جزئیات محاسبات باید در پاسخنامه آورده شوند؛ دقت پاسخ 0.4 درصد)

ب) تعداد ستارگان روشن‌تر از قدر ظاهری +6 را در کل آسمان چقدر بدست می‌آورید؟ (40 نمره)
(دقت پاسخ 500 ستاره)

ج) در محدوده این صورت فلکی تنها 13 ستاره نزدیکتر از 10 پارسک از ما قرار گرفته‌اند. مشخص کنید چگالی عددی ستارگان آسمان در اطراف خورشید تا فاصله 10 پارسک از ما برحسب $\frac{\text{ستاره}}{\text{pc}^3}$ چقدر است؟ (40 نمره) (دقت پاسخ $\frac{\text{ستاره}}{\text{pc}^3}$ 0.015)

پاسخ:

(الف)

برای آنکه محدوده خطا را متوجه شویم، اگر دانش آموزی محدوده های آبی یا قرمز را در نظر گرفته باشد نمره کاملی خواهد گرفت؛ با اینحال مشخص است که محدوده آبی رنگ برای این تخمین مناسب تر است. (دقت شود هر محدوده ای که دقیق تر اتخاذ شده باشد، حتماً جوابی در این بازه خواهد داشت)

در نتیجه برای محدوده بدهای 9 تا 14 ساعت و محدوده میل های 70+ تا 40+ درجه داریم:

$$S_{UM} = \frac{2\pi(1 - \cos 50^\circ) - 2\pi(1 - \cos 20^\circ)}{4\pi} \times \frac{14h - 9h}{24h} \times 100 \approx 3.09\%$$

همچنین محدوده بدهای 8/5 تا 13 ساعت و محدوده میل های 70+ تا 40+ درجه می شود:

$$S_{UM} = \frac{2\pi(1 - \cos 50^\circ) - 2\pi(1 - \cos 20^\circ)}{4\pi} \frac{13h - 8.5h}{24h} \times 100 \approx 2.78\%$$

که برای در نظر گرفتن بیشترین خطا، تا 0/4% اختلاف نمره کامل دارد.

(ب)

اگر تعداد ستاره های موجود در این صورت فلکی در نقشه را شمارش کنیم 123 تا هستند. حال چنانچه با مساحت 3.1% از کره سماوی نسبت ببندیم، خواهیم داشت:

$$N = \frac{100}{3.1} \times 123 \cong 3970$$

که در محدوده خطای مورد قبول، تعداد ستاره ها ممکن است مقدار زیر باشند:

$$N = \frac{100}{2.78} \times 123 \cong 4420$$

که برای در نظر گرفتن بیشترین خطا، تا 500 ستاره اختلاف نمره کامل دارد.

(ج)

می توان تعداد ستارگان کل آسمان تا فاصله 10 پارسک از خورشید را اینگونه تخمین زد:

$$N_{10pc} = \frac{100}{3.1} \times 13 \cong 420$$

$$\rightarrow n_{10pc} = \frac{N_{10pc}}{V_{10pc}} = \frac{420}{\frac{4}{3}\pi \times 10^3} \approx 0.1 \frac{\text{ستاره}}{pc^3}$$

و البته این مقدار نیز با خطای مجاز خواهد شد :

$$N_{10pc} = \frac{100}{2.78} \times 13 \cong 470$$

$$\rightarrow n_{10pc} = \frac{N_{10pc}}{V_{10pc}} = \frac{470}{\frac{4}{3}\pi \times 10^3} \approx 0.112 \frac{\text{ستاره}}{pc^3}$$

که برای در نظر گرفتن بیشترین خطا، تا $0.015 \frac{\text{ستاره}}{pc^3}$ اختلاف نمره کامل دارد.

سؤال ششم : (160 نمره)

می دانیم فشار در مرکز توده ای از گاز که در اثر گرانش خود منقبض شده است، از رابطه :

$$P_c = AM^{\frac{2}{3}}\rho_c^{\frac{4}{3}}$$

بدست می آید؛ که در آن ρ_c چگالی در مرکز ابر، M جرم کل توده گازی و A نیز مقداری ثابت تقریباً برابر با 2.96×10^{-11} است.

الف) واحد ثابت A برحسب یكاهای SI چیست؟ (30 نمره)

ابری از گاز هیدروژن را در نظر بگیرید که در حال انقباض و تبدیل شدن به یک ستاره است. در اثر انقباض دما و چگالی در مرکز ابر افزایش می یابد و هیدروژن ها یونیزه می شوند. با افزایش چگالی در مرکز ابر الکترون ها به حالت واگنی (تبهگنی) می رسند. حالت واگنی حالتی کوانتومی است که در آن معادله حالت الکترون ها از قانون گاز کامل تبعیت نمی کند. در این حالت فشار الکترون ها برابر است با

$$P_e = Bn_e^{\frac{5}{3}}$$

که در آن B عددی ثابت و n_e چگالی عددی الکترون ها است.

ب) واحد ثابت B برحسب یكاهای SI چیست؟ (30 نمره)

فشار کل گاز در مرکز ابر، مجموع فشار الکترون ها و پروتون ها خواهد بود :

$$P_c = Bn_e^{\frac{5}{3}} + n_p k T_c$$

که در آن n_p چگالی عددی پروتون ها و T_c دما در مرکز ستاره است.

ج) اگر حداقل دمای لازم برای شروع واکنش های هسته ای در مرکز ستاره T_n باشد، حداقل جرم یک توده ابر برای اینکه بتواند واکنش های هسته ای را در مرکز خود شروع کند، چقدر خواهد بود؟ (100 نمره)

پاسخ:

الف) می خواهیم واحد A را در دستگاه آحاد SI بدست آوریم ، کافی است بعد A را بدست آوریم. فشار برابر است با نیرو بر واحد سطح بنابراین برای بعد فشار داریم

$$P = \frac{F}{S} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = \frac{MT^{-2}}{L} = \frac{M}{LT^2}$$

$$\frac{M}{LT^2} = AM^{2/3} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{4/3} = \frac{AM^2}{L^4}$$

$$A = \frac{L^3}{MT^2}$$

بنابراین واحد A در دستگاه SI برابر است با $m^3 kg^{-1} s^{-2}$

(ب) در این قسمت نیز مثل قسمت قبل

$$\frac{M}{LT^2} = B\left(\frac{1}{L^3}\right)^{5/3} = \frac{B}{L^5}$$

$$B = \frac{L^4 M}{T^2}$$

بنابراین واحد B در دستگاه SI برابر است با $m^4 kg s^{-2}$

(ج) با توجه به متن، فشار گاز هیدروژن باید برابر فشار لازم در مرکز ستاره باشد

$$AM^{2/3} \rho_c^{4/3} = B n_e^{5/3} + n_p k T_c$$

هیدروژن ها هم یونیزه هستند بنابراین چگالی عددی الکترون ها و پروتون ها برابر است.

$$n_e = n_p = \frac{\rho_c}{m_H}$$

$$AM^{2/3} \rho_c^{4/3} = B \left(\frac{\rho_c}{m_H}\right)^{5/3} + \frac{\rho_c}{m_H} k T_c$$

$$AM^{2/3} \rho_c^{1/3} = B \frac{\rho_c^{2/3}}{m_H^{5/3}} + \frac{k}{m_H} T_c$$

$$T_c = \frac{AM^{2/3} m_H}{k} \rho_c^{1/3} - \frac{B}{m_H^{2/3} k} \rho_c^{2/3}$$

$$= \alpha \rho_c^{1/3} - \beta \rho_c^{2/3}$$

$$\alpha = \frac{AM^{2/3} m_H}{k} \quad \beta = \frac{B}{m_H^{2/3} k}$$

با افزایش چگالی دما افزایش می یابد اما به سادگی می توان دید که این افزایش یک حداکثر دارد

$$\frac{dT_c}{d\rho_c} = \frac{1}{3}\alpha\rho_c^{-2/3} - \frac{2}{3}\beta\rho_c^{-1/3} = 0$$

$$\alpha\rho_c^{-2/3} = 2\beta\rho_c^{-1/3} \Rightarrow \rho_c^{-1/3} = \frac{2\beta}{\alpha}$$

$$\rho_c = \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^3$$

$$\Rightarrow T_c^{max} = \alpha \frac{\alpha}{2\beta} - \beta \frac{\alpha^2}{4\beta^2}$$

$$T_c^{max} = \frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta} = \frac{\alpha^2}{4\beta}$$

$$T_c^{max} = \frac{A^2 M^{\frac{4}{3}} m_H^2}{k^2} \frac{m_H^{\frac{2}{3}}}{4B} k = \frac{A^2}{4Bk} m_H^{\frac{8}{3}} M^{\frac{4}{3}} =$$

$$M = \left(\frac{4BkT_c^{max}}{A^2}\right)^{3/4} \left(\frac{1}{m_H}\right)^2$$

هر چه این جرم کمتر باشد T_c^{max} کمتر خواهد بود. بنابراین حداقل جرم برای رسیدن دما به T_n (دمای لازم برای شروع واکنش های هسته ای) برابر است با:

$$M_{min} = \left(\frac{4BkT_n}{A^2}\right)^{3/4} \left(\frac{1}{m_H}\right)^2$$

سؤال هفتم : (120 نمره)

وقتی جسمی از ما دور می شود نور دریافتی ما از آن جسم قرمزتر شده و اصطلاحاً می گوئیم انتقال به سرخ رخ داده است. انتقال به سرخ را با کمیت z نشان می دهیم؛ به طوری که :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$$

است و در آن λ_o طول موج دریافتی (رصد شده) و λ_e طول موج تابش شده است.

ادوین هابل با رصد کهکشان های متفاوت نشان داد که برای کهکشان های دور دست رابطه ای به صورت $v = H_0 d$ برقرار است که در آن $H_0 = 69 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ثابت هابل، d فاصله کهکشان از ما و v سرعت کهکشان از دید ناظر زمینی است. با افزایش فاصله، سرعت دور شدن آن ها از ما بیشتر می شود. به این معنی که ابعاد کیهان در حال انبساط یا کش آمدن است. پس طول موج امواج نیز قرمزتر دیده می شوند که به این پدیده قرمزگرایی کیهانی می گوئیم.

الف) اندازه های کیهانی در زمان t را با $d(t) = R(t)d(t_0)$ نشان می دهیم؛ که در آن $R(t)$ فاکتور مقیاس و $d(t_0) = d_0$ ابعاد کیهان در حال حاضر است. نشان دهید $R = \frac{1}{(1+z)}$. (40 نمره)

ب) تابعیت چگالی جرمی در عالم برای عالمی که در آن تمامی ذرات نسبت به سرعت نور خیلی کند حرکت می کنند (غیر نسبیتی هستند) بر حسب z چگونه است؟ (20 نمره)

ج) به چگالی که در آن مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی (انرژی کل) اجرام کیهانی صفر است چگالی بحرانی کیهانی گفته می شود. انرژی کل اجرام نجومی را حساب کنید و رابطه ای برای چگالی بحرانی به دست آورید. (40 نمره)

د) مقدار عددی چگالی بحرانی بر حسب کیلوگرم بر مترمکعب چقدر است؟ (10 نمره)

ه) اگر این چگالی را بخواهیم در پارسک مکعب بنویسیم، چند جرم خورشید بر پارسک مکعب خواهد بود؟ (10 نمره)

پاسخ:

(الف)

$$\frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e} = z \rightarrow \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{D_0}{D(t)} = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{1}{R} = 1 + z$$

(ب)

$$\rho_0 D_0^3 = \rho(t) D^3(t) = \rho(t) R^3(t) D_0^3$$

$$\rho(t) = \rho_0(1+Z)^3$$

(ج)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v^2 = H_0^2 D_0^2 = \frac{2GM}{D_0} = \frac{2G}{D_0} \rho_c \frac{4}{3} \pi D_0^3$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \Rightarrow \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

(د)

$$\rho_c = 9.47 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$$

(ه)

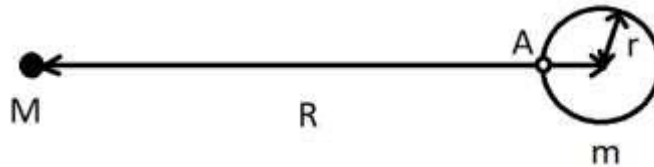
$$\rho_c = 0.15 \times 10^{-6} M_1 / \rho_c^3$$

سؤال هشتم: (130 نمره)

هنگامی که یک جسم غیر نقطه‌ای در یک میدان گرانشی غیریکنواخت قرار می‌گیرد، به اجزای متفاوت آن شتاب‌های گرانشی متفاوتی وارد می‌شود و در نتیجه دچار تغییر شکل خواهد شد که به این پدیده کشند گفته می‌شود. در مرکز بیشتر کهکشان‌ها از جمله کهکشان راه شیری، یک ابرسیاهچاله قرار دارد که جرمی از مرتبه چند میلیون جرم خورشید دارد. در نزدیکی ابرسیاهچاله یک محدوده ستاره‌ای بسیار چگال وجود دارد که به آن (خوشه ستاره‌ای هسته‌ای) می‌گوییم. برای راه شیری، این خوشه تقریباً شعاعی نزدیک به یک پارسک دارد و شامل حدود 10 میلیون ستاره است که غالباً پیر هستند.

در چنین محیط چگالی، برهم‌کنش‌های فراوانی بین ستاره‌ها و نیز بین ابرسیاهچاله و ستاره‌ها رخ می‌دهد. یکی از این برهم‌کنش‌ها، رویداد گسیختگی کشندی است که طی آن، یک ستاره که بیش از حد به ابرسیاهچاله نزدیک شده است، به دلیل نیروی کشندی ابرسیاهچاله، دچار گسیختگی می‌شود و تمام یا بخشی از جرم آن به داخل ابرسیاهچاله سقوط می‌کند.

فرض کنید که ابرسیاهچاله دارای جرم M است و ستاره‌ای به جرم m و شعاع r در فاصله R (مطابق شکل) از آن قرار گرفته است. این ستاره دورانی به دور خودش ندارد و همچنین r در مقایسه با R بسیار کوچک است. می‌خواهیم حساب کنیم که تحت چه شرایطی، بخشی از ستاره در اثر نیروی کشندی از سطح آن جدا می‌شود. مطابق شکل نزدیک‌ترین نقطه ستاره به ابرسیاهچاله A و فاصله این نقطه تا ابرسیاهچاله برابر $R - r$ است.



الف) شتاب گرانشی از طرف ابرسیاهچاله به نقطه A را محاسبه کنید و سپس با کم کردن شتاب مرکز جرم ستاره (محاسبه شتاب نسبی)، شتاب کشندی ناشی از ابرسیاهچاله را به دست آورید. (40 نمره) می‌توانید از رابطه تقریبی بسط تیلور به صورت زیر استفاده کنید:

$$f(x) = f(x_0 = 0) + f'(x_0 = 0)x$$

ب) اکنون با مقایسه این شتاب با شتاب گرانشی ناشی از خود ستاره به اجزای سطح آن، حساب کنید که فاصله R حداقل باید چقدر باشد تا گسیختگی گرانشی رخ دهد؟ (30 نمره)

ستاره $S2$ که نزدیک‌ترین ستاره راه شیری به ابرسیاهچاله مرکزی است و جرم آن 15 برابر جرم خورشید است، در مداری بیضوی به دور آن می‌چرخد. جرم ابرسیاهچاله کهکشان ما 4 میلیون برابر جرم

خورشید است. نیم قطر بزرگ مدار $S2$ برابر $970 AU$ و خروج از مرکز مدار آن برابر با 0.88 است. از آنجا که این ستاره نسبتاً جوان است، احتمالاً در مراحل بعدی تحولش دچار انبساط خواهد شد.

ج) شعاع این ستاره باید به چه مقدار (بر حسب شعاع خورشید) برسد تا فرآیند گسیختگی کشندی آغاز شود؟ (30 نمره)

شعاع شوارزشیلد فاصله‌ای از مرکز یک سیاهچاله است، که داخل آن هر اتفاقی بیفتد اطلاعی به بیرون منتقل نمی‌شود. این شعاع برابر $\frac{2GM}{c^2}$ است که در آن M جرم سیاهچاله، G ثابت جهانی گرانش و c سرعت نور است. فرض کنید یک ستاره نوترونی به جرم 1.2 جرم خورشید و شعاع 10 کیلومتر، مستقیم به داخل ابرسیاهچاله راه شیری سقوط می‌کند. در تمام فرآیند سقوط، گرانش از رابطه نیوتون پیروی می‌کند و از اثرات نسبیت عام نیز صرف نظر کنید.

د) محاسبه کنید گسیختگی گرانشی برای این ستاره نوترونی در چه فاصله‌ای از مرکز سیاهچاله رخ می‌دهد. سپس با مقایسه این فاصله با شعاع شوارزشیلد ابرسیاهچاله، بیان کنید آیا یک رصدگر می‌تواند این پدیده را مشاهده کند یا خیر؟ (30 نمره)

پاسخ:

(الف)

$$A: g_{SMBH} = \frac{-GM}{(R-r)^2} = \frac{-GM}{R^2} \frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} \hat{r}$$

$$\text{بسط تیلور: } \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \dots$$

$$\rightarrow g_{SMBH} = -r \frac{GM}{R^2} - \hat{r} \frac{GM}{R^2} \times \frac{2r}{R}$$

نیروی کشندی:

$$\left(-\frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{R^2} \times \frac{2r}{R}\right) - \left(-\frac{GM}{R^2}\right) = -\frac{GM}{R^2} \times \frac{2r}{R}$$

(ب)

$$\left| \frac{-GM}{R^2} \times \frac{2r}{R} \right| \geq \left| \frac{GM}{r^2} \right|$$

$$\frac{r^3}{m} \geq \frac{R^3}{2M} \rightarrow r_{dis} \gg \sqrt[3]{\frac{m}{2M}} \times R$$

(ج)

$$R = a(1 - e) \rightarrow r_{dis} = a(1 - e) \sqrt[3]{\frac{m}{2M}}$$

$$a = 970 \text{ AU}, \quad e = 0.88 \text{ m} = 15M_{\odot}, \quad M = 4 \times 10^6 M_{\odot}$$

$$r_{dis}/r_{\odot} = 309.3$$

(د)

$$\begin{cases} R_{dis} = \sqrt[3]{\frac{2M}{m}} r = 1.88 \times 10^6 \text{ m} \\ R_{sch} = \frac{2GM}{c^2} = 1.17 \times 10^{10} \text{ m} \end{cases} \rightarrow R_{sch} > R_{dis}$$

پس دیده نمی شود.



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «لام خمینی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۷ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

شانزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۹/۰۴/۲۵ - ساعت: ۱۴:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه



شماره سندلی

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب مجاز است

- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پانویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.

نکات بسیار مهم

لطفا قبل از شروع پاسخ گویی به سوالات، این قسمت را به دقت بخوانید برای خواندن این قسمت 10 دقیقه وقت اضافه در نظر گرفته شده است.

(1) این آزمون حاوی 7 سوال تشریحی است. مجموع کل نمره این آزمون 1000 نمره است که بسته به نوع سوالات بین 7 سوال توزیع شده است. در سوالاتی که بخش های الف و ب و ج و... دارند نمره هر بخش به تفکیک داده شده است. بعد از برگزاری آزمون پاسخ های تشریحی و بارم بندی دقیق پاسخ سوالات منتشر خواهد شد به گونه ای که هر دانش آموز می تواند نمره خود را در هر بخش از هر سوال، حساب کند.

(2) در سوالاتی که به جواب عددی منتهی می شوند، دقت پاسخ داده شده است. در این سوالات نمره پاسخ نهایی وقتی داده خواهد شد که پاسخ نهایی در محدوده دقت باشد. منظور از محدوده دقت این است که اگر پاسخ نهایی A و دقت پاسخ X باشد جواب هایی که در بازه $[A - X, A + X]$ باشند پذیرفته خواهند شد. مثلاً فرض کنید در یک سوال از شما خواسته باشند یک زاویه را حساب کنید و دقت پاسخ را یک درجه داده باشند. فرض کنید جواب درست 135 درجه باشد، در این صورت اگر جواب شما بزرگتر و مساوی 134 و کوچکتر و مساوی 136 باشد نمره پاسخ نهایی را خواهید گرفت. در غیر این صورت نمره پاسخ نهایی شما صفر است. توجه داشته باشید که این موضوع فقط مربوط به پاسخ نهایی سوال است و شامل بخش های دیگر پاسخ نمی شود مثل نوشتن روابط لازم و حل معادلات، رسم شکل و... اگر در سوالی دقت جواب نهایی داده نشده باشد، مقدار پیش فرض X برابر است با $X = 0.1A$.

(3) در بعضی از بخش های بعضی از سوالات علامت **کوتاه پاسخ** دیده می شود. "کوتاه پاسخ" سوالی است که فقط جواب نهایی آن نمره دارد. لازم نیست در این سوالات شما مشروح محاسبات را در پاسخ نامه بنویسید. نوشتن جواب نهایی کافی است. اگر جواب نهایی در بازه دقت جواب درست باشد نمره کامل داده خواهد شد. دقت کنید که هر جا علامت کوتاه پاسخ دیده شد، فقط همان قسمت کوتاه پاسخ است. بقیه بخش های سوال باید به طور معمول به شکل تشریحی پاسخ داده شوند. مثلاً اگر در کنار بخش ب) از یک سوال علامت کوتاه پاسخ دیده شد، فقط بخش ب) شامل کوتاه پاسخ می شود بخش های الف) و ج) و... باید به طور تشریحی پاسخ داده شوند. بعضی از کوتاه پاسخ ها تستی هستند. در این مورد فقط دور گزینه درست خط بکشید. کوتاه پاسخ های تستی نمره منفی ندارند. اگر در کوتاه پاسخ تستی بیش از یک گزینه علامت زده شود نمره صفر داده می شود.

(4) دقت کنید که تمامی مقادیر ثابت باید از جدول ثوابت که در ابتدای سوالات آمده گرفته شوند. اگر شما خواستید سوالی را از یک روش ابتکاری و جدید حل کنید و نیاز به ثابتی داشتید که در جدول ثوابت نبود حتماً آن ثابت را در ابتدای پاسخ خود به سوال، داخل کادر بنویسید. در این مورد اگر راه حل شما درست باشد و پاسخ شما هم در محدوده دقت باشد نمره کامل خواهید گرفت.

(5) توجه کنید که سوال دوم، قسمت الف، کوتاه پاسخ نیست. در این قسمت باید مشروح محاسبات مربوط به روش برازش خطی در پاسخ نامه نوشته شود. اگر از برازشگر داخلی ماشین حساب استفاده کنید و فقط مقدار A و B به دست آمده از ماشین حساب را بنویسید، نمره ای به شما تعلق نمی گیرد.

(6) برای دقت و خوانایی بیشتر و ممانعت از محدودیت های نرم افزار میکروسافت ورد فارسی، در این آزمون از اعداد انگلیسی استفاده شده است. شما در پاسخ نامه می توانید به اختیار خود از اعداد فارسی و یا انگلیسی استفاده کنید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت	
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش	G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور	c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	سال نوری	ly
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک	pc
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	واحد نجومی	AU
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید	M_{\odot}
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید	R_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
4.83	قدر مطلق خورشید	M_{\odot}
-26.8	قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
5880 K	دمای موثر سطح خورشید	T_{\odot}
1737 km	شعاع ماه	R_m
384400 km	فاصله متوسط ماه از زمین	r_m
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین	M_{\oplus}
6380 km	شعاع زمین	R_{\oplus}
23.5°	تمایل محور زمین	ϵ

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس استفاده

کنید مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی تصحیح

نخواهد شد

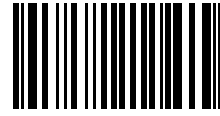
شانزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۹/۰۴/۲۵



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

سؤال اول (150 نمره)

ناظری در ظهر روز انقلاب تابستانی، در عرض جغرافیایی 30 درجه شمالی، یک شاخص عمودی را روی سطح تراز شده زمین نصب می کند و می خواهد به کمک ساعت خود سرعت چرخش سایه شاخص روی زمین را اندازه گیری کند. مقدار این سرعت برحسب ثانیه قوس بر ثانیه چقدر است؟ (دقت پاسخ 1 ثانیه قوس بر ثانیه).

استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



انجمن فیزیکی نجومی ایران

سؤال دوم (150 نمره)

میزان انرژی نورانی که یک جرم نجومی در طول موج های مختلف تابش می کند، یکسان نیست. تحلیل این تابش جزء اصلی ترین تحلیل هایی است که ستاره شناسان از طریق آن شکل گیری و تکامل کهکشان های دوردست را بررسی می کنند. تابع توزیع انرژی طیفی (SED) تابعی است که میزان شدت تابش در هر بازه طول موج را نشان می دهد. در جدول زیر توزیع انرژی طیفی ستاره دوتایی HD13974 داده شده است. در این جدول ستون اول از چپ طول موج برحسب میکرومتر ($1 \mu m = 10^{-6} m$) و در ستون دوم شدت تابش بر حسب میلی جانسکی ثبت شده است (جانسکی واحد شدت تابش است هر جانسکی برابر است با 10^{-26} وات بر متر مربع بر استرادیان).

طول موج (μm)	شدت تابش (mJy)
1.5 ± 0.1	$(6.2 \pm 0.1) \times 10^4$
2.0 ± 0.1	$(4.0 \pm 0.1) \times 10^4$
3.0 ± 0.1	$(2.2 \pm 0.1) \times 10^4$
3.6 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.1) \times 10^4$
5.0 ± 0.1	$(0.9 \pm 0.1) \times 10^4$
7.0 ± 0.1	$(3.8 \pm 0.2) \times 10^3$
10.0 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.2) \times 10^3$
17.0 ± 0.1	$(3.0 \pm 0.2) \times 10^2$
70.0 ± 0.1	3.0 ± 0.2

به نظر می رسد تابع توزیع انرژی (SED) از مدل زیر تبعیت کند

$$F(\lambda) = Be^{A \ln(\lambda)}$$

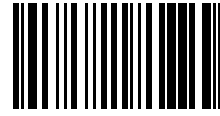
که در آن λ طول موج، $F(\lambda)$ شدت تابش و A و B مقادیر ثابت یا پارامترهای مدل هستند.

الف) با استفاده از داده ها و روش برازش خطی، بهترین مقدار پارامترهای مدل را پیدا کنید. (دقت محاسبه A برابر 0.1 و دقت محاسبه B برابر 100 میلی جانسکی؛ 50 نمره)

ب) دو مورد از منشا های ممکن خطا در پارامترهای تخمین زده شده را ذکر کنید؟ (10 نمره)

ج) در پاسخنامه نمودار لگاریتمی داده شده است. داده ها را با نقطه و مدل را بصورت خط روی نمودار لگاریتمی رسم کنید. (30 نمره)

شانزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۹/۰۴/۲۵

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

د) با ذکر دلیل بیان کنید آیا مدل ارائه شده به دقت تابع توزیع تابش ستاره دوتایی را توصیف می کند. (40 نمره)

ه) با استفاده از مدل به دست آمده تخمین بزنید به ازاء کدام طول موج برحسب **کوتاه پاسخ** میکرومتر، این دوتایی 0.001 Jy را ساطع می کند. (دقت 10 میکرومتر؛ 20 نمره)



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Lined area for writing answers.





نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



مسابقات ملی پرورش استعدادهای درخشان

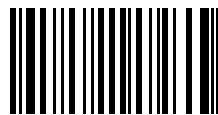
ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Lined area for writing answers.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



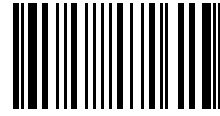
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Lined area for writing answers to questions.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

سؤال سوم (180 نمره)

می دانیم که مسیر حرکت اجسام تحت تاثیر نیروهای عکس مجذوری به صورت مقاطع مخروطی است.

الف) برای توصیف حرکت ذره در صفحه از مختصات r (شعاع) و θ (زاویه) استفاده می کنیم. مرکز نیرو را یک سیاره به جرم سنگین M در نظر بگیرید که در مبدا مختصات می باشد. یک شهاب سنگ با جرم m در نظر بگیرید که با این سیاره برهمکنش می کند و می تواند در هر کدام از مقاطع مخروطی باشد. می دانیم مسیر حرکت شهاب سنگ از رابطه

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

پیروی می کند. با استفاده از ثابت بودن انرژی (E) و تکانه زاویه ای (L)، r_0 و ϵ را برحسب E و L و m و M و G (ثابت گرانش) بدست آورید. (40 نمره)

ب) حال فرض کنید یک شهاب سنگ از بی نهایت دور با پارامتر برخورد b و سرعت اولیه v_0 به سمت منظومه شمسی پرتاب می شود. فقط اثر گرانشی خورشید در نظر گرفته و بررسی کنید چه شرطی بر روی پارامترهای اولیه شهاب سنگ باشد تا شعاع حضیض مدار شهاب سنگ برابر شعاع حرکت مداری کره زمین بشود. (70 نمره)

ج) حال فرض کنید این شهاب سنگ با کره زمین برخورد کاملاً ناکشسان می کند. بررسی کنید تحت چه شرطی این برخورد می تواند زمین را در یک مدار نامقید قرار دهد و در نتیجه زمین از منظورهی شمسی خارج شود. فرض کنید برخورد لحظه ای و در لحظه برخورد بردار سرعت شهاب سنگ و کرهی زمین در خلاف جهت هم باشند. (70 نمره)

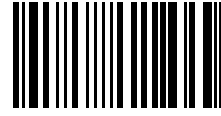
در کل این مسئله حرکت مداری زمین را دایروی در نظر بگیرید.



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

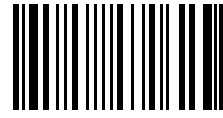
پاسخ سوال ۳

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Lined area for writing the answer to question 3.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



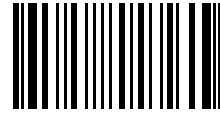
مسابقات ملی پژوهش استهلالی و نجومی

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A series of horizontal lines provided for writing the answer to question 3.

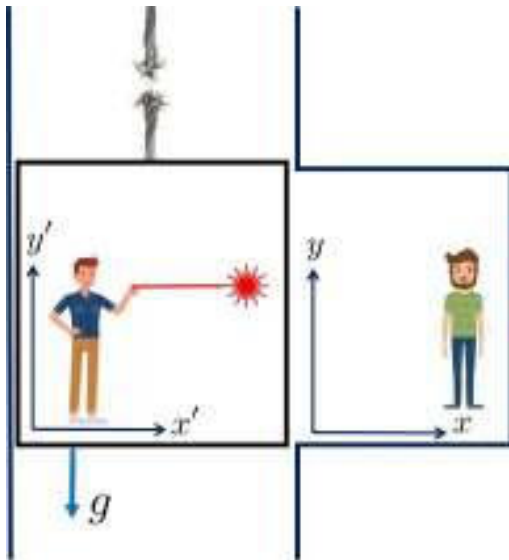


نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سؤال چهارم (100 نمره)

طبق نظریه نسبیت عام اینشتین می دانیم که در میدان گرانشی یک جسم، فقط ناظرهایی که آزادانه سقوط می کنند، مسیر نور را مستقیم می بینند. همانند شکل زیر دو دوست فیزیکدان یکی در آسانسور (علی) و دیگری در یکی از طبقات ساختمان (سامان) روبروی هم (در سکون) ایستاده اند. ناگهان در زمان $t = 0$ کابل آسانسور پاره می شود و آسانسور و علی سقوط آزاد می کنند (از اثرات اصطکاکی صرفنظر می کنیم). در این شرایط علی و سامان تصمیم می گیرند که آزمایشی انجام بدهند. علی یک باریکه لیزر را همزمان با پاره شدن کابل در $t = 0$ دقیقاً موازی کف آسانسور (محور x') ارسال می کند. طبق "اصل هم ارزی" علی می بیند که مسیر لیزر "همواره" (قبل از برخورد به دیواره) یک خط مستقیم و موازی کف آسانسور است.



گزینه پاسخ الف) معادله حرکت پرتو لیزر را نسبت به مختصات (x', y') بنویسید. (10 نمره)

گزینه پاسخ ب) معادله حرکت آسانسور را در مختصات سامان (x, y) بنویسید. (10 نمره)

ج) معادله مسیر پرتو لیزر را در مختصات سامان به صورت $y(x)$ بنویسید؟ (20 نمره)

د) شعاع انحنای نقطه ای، R یک منحنی به معادله $y(x)$ از رابطه

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|$$

به دست می آید که در آن پرایم به معنی مشتق گیری و دو پرایم به معنی مشتق دوم است. با استفاده از این رابطه شعاع انحنای مسیر حرکت باریک لیزر را از دید سامان دقیقاً در لحظه ساطع شدن آن بیابید. مبدا دستگاه ها را به طرز مناسب انتخاب کنید تا محاسبات راحت شود. (30 نمره)

ه) این شعاع را برای میدان گرانشی در سطح زمین حساب کنید. (10 نمره)

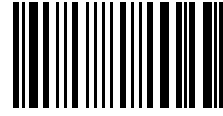
و) حال فرض کنید که یک باریکه نور در اطراف یک جسم بسیار چگال در حرکت است طوری که شعاع انحنای حرکت این باریکه با شعاع جسم برابر است. رابطه جرم و شعاع این جسم را بیابید. این جسم چه موجود فیزیکی می تواند باشد؟ (20 نمره)



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Lined area for writing answers.



شانزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۹/۰۴/۲۵



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



مسابقات ملی پرورش استعدادهای درخشان

سؤال پنجم (160 نمره)

در دهه 30 میلادی آندره دانژون (André Danjon)، منجم فرانسوی حداقل جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید، برای مشاهده پذیر شدن هلال‌های جوان پس از مقارنه ماه و خورشید را 7° تعیین کرد. علت این امر ممانعتِ عوارض سطحی (مانند کوه‌ها و پستی و بلندی‌های لبه ماه) از تابش هلال نازک بخاطر جلوگیری از عبور نورشان است. این جدایی زاویه ای حدّ دانژون نام گرفت. مدت‌ها رصدی حتی به کمک ابزارهای قدرتمند در جدایی زاویه ای کمتر از این مقدار ثبت نشد و این حد مورد قبول بود. با این حال رصد در پرتوهای فروسرخ نشان می‌دهد در زوایای کمتر از حد دانژون نیز هلال تشکیل خواهد شد؛ زیرا در طول موج‌های بلندتر پراکندگی در جو کمتر و درصد عبور نور بیشتر است.

کوتاه پاسخ

الف) لبه ماه را صاف و کروی شکل در نظر بگیرید. با توجه به حد تفکیک چشمان تیزبین (یک دقیقه قوس) کمترین جدایی زاویه‌ای بین ماه و خورشید برای تفکیک ضخامت هلال با چشم غیر مسلح چند درجه خواهد بود؟ (60 نمره)

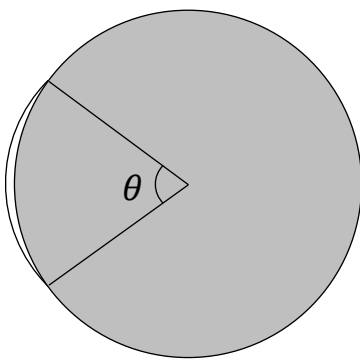
30 (4

15 (3

20 (2

10 (1

ب) تصویر زیر ماه را هنگامی که جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید 5.2 درجه است نشان می‌دهد. اگر در این هنگام گشودگی هلال روشن ماه (زاویه θ ، طول کمان هلال از دید مرکز قرص ماه) در تصویر 70° باشد. بلندی ارتفاعات لبه ماه را برحسب کیلومتر بدست آورید (دقت پاسخ 0.1 کیلومتر؛ 100 نمره).





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۵
از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Lined area for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



معاونت ملی پرورش استعدادهای درخشان

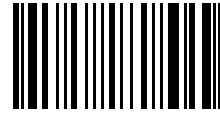
ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Area with horizontal lines for writing answers.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

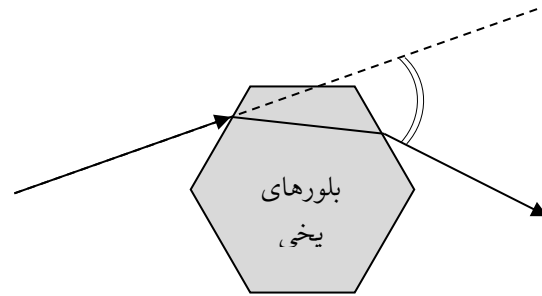


سؤال ششم (100 نمره)

در بعضی از روزها و شب های سرد، ابرهای سیروس و سیرواستراتوس در ارتفاعات 5 تا 14 کیلومتری زمین تشکیل می شوند، در این مواقع گاهاً هاله ای به شعاع 22° در اطراف خورشید یا ماه در آسمان دیده می شود که در تصویر زیر مشخص است. (شکل 1)



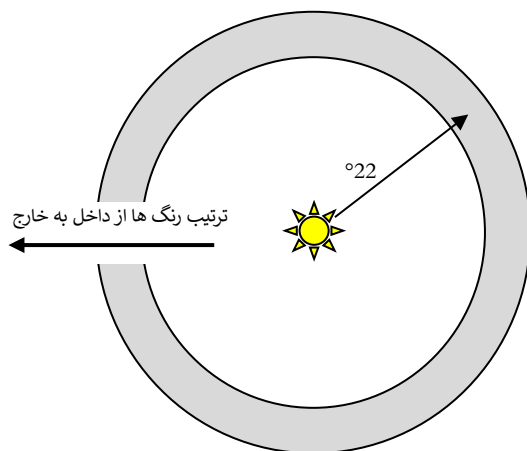
شکل (1)



شکل (2)

این هاله 22° درجه ای ناشی از شکست نور در بلورهای یخ آب است، که منشورهایی 6-ضلعی منظم ایجاد کرده اند و مطابق با تصویر مسیر نور را عوض می کنند (شکل 2).

الف) زاویه انحراف نورهای خروجی نسبت به نورهای ورودی با توجه به زوایای مختلف تابش، در بازه ای تغییر می کند که می دانیم کمینه آن در اطراف 22° است و این امر سبب می شود که در این زاویه از قرص خورشید و یا ماه، شاهد پرتوهای رسیده بیشتری به ناظران این پدیده جوی باشیم. ضریب شکست این بلورها چقدر است؟ راهنمایی: حداقل زاویه انحراف نور از یک منشور، زمانیکه زوایای ورودی و خروجی نور از سطوح یکسان باشند. (دقت 0.01 واحد؛ 70 نمره)



شکل 3

گزینه پاسخ (ب) اگر در شکل 3 بخش خاکستری رنگ نشان دهنده هاله نورانی باشد ترتیب رنگ ها از داخل به خارج چگونه است؟ (30 نمره)

- 1) آبی - سبز - زرد - نارنجی - قرمز
- 2) قرمز - نارنجی - زرد - سبز - آبی
- 3) بسته به شرایط متغیر است
- 4) اصلاً تجزیه نور نداریم



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

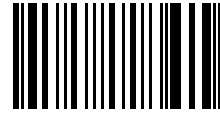
پاسخ سوال ۶

Handwriting practice lines for the answer.





نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



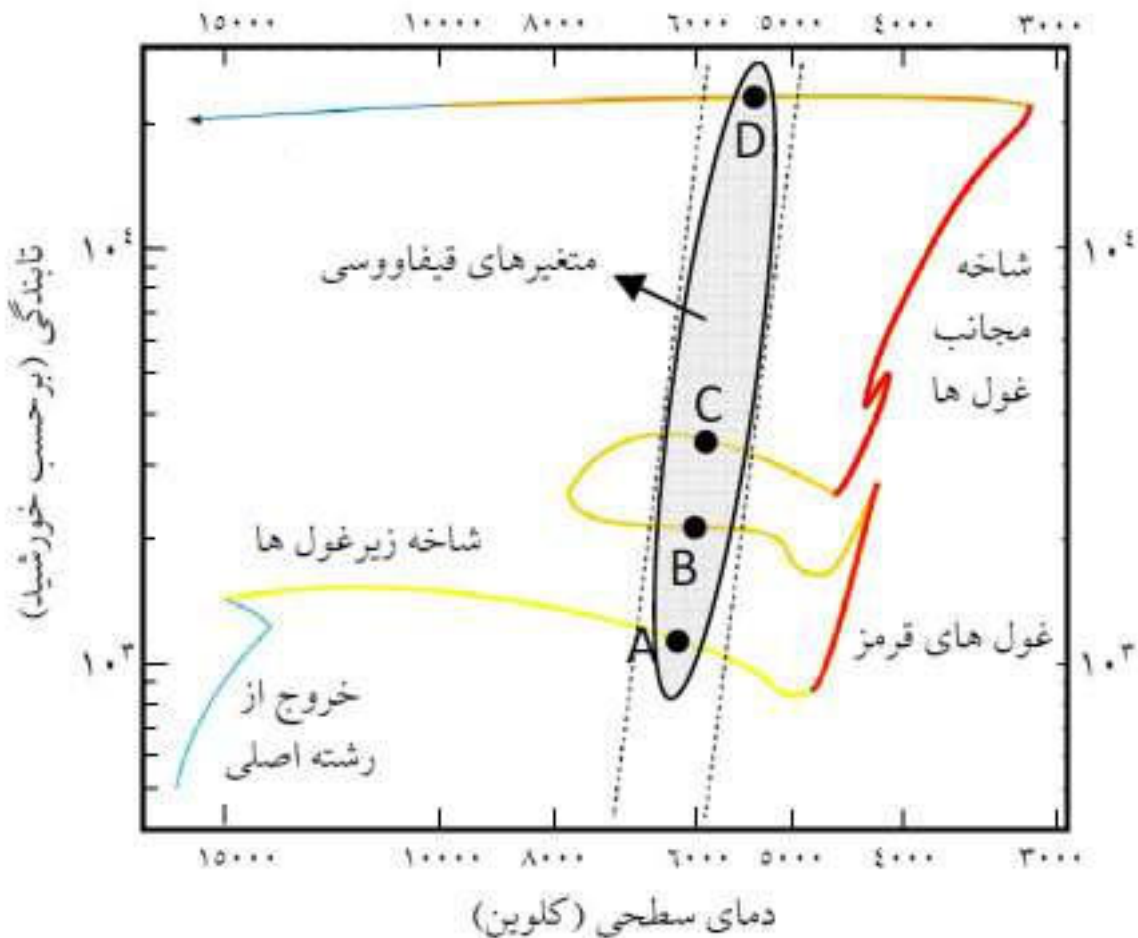
سازمان ملی پژوهش‌های فضا و نجوم

سؤال هفتم (160 نمره)

کهکشان کوتوله کروی UGC10822 در راستای صورت فلکی اژدها، از جمله اقمار کهکشانی راه شیری است که در سال 1954 میلادی توسط آلبرت جورج ویلسون کشف شد. اخیراً در این کهکشان یک ستاره متغیر با مسیر تحولی زیر بر روی نمودار HR، مشاهده شده است که به نظر می رسد در دسته-بندی متغیرهای قیفاووسی قرار گیرد. اگر رابطه "دوره تناوب-تابندگی متغیرهای قیفاووسی" برای متوسط قدر مطلق مرئی آنها به شکل زیر باشد

$$M_v = -2.43(\log_{10} P - 1) - 4.05$$

که در آن P دوره تناوب بر حسب روز و M_v متوسط قدر مطلق مرئی است. همچنین در رصدها مشخص شده است که نور این ستاره با دوره تناوب 6.03 روز تغییر می کند.



شانزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۹/۰۴/۲۵



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پژوهش‌های فضا و نجوم

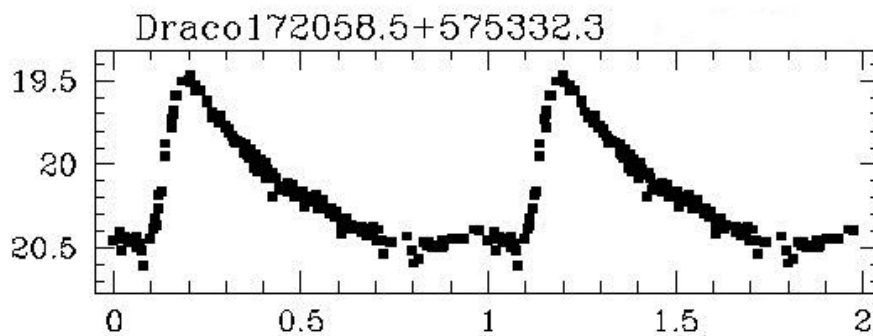
نقطه پاسخ

الف) مشخص کنید مکان این ستاره هم اکنون در کدامیک از نقاط داده شده روی مسیر تحولی بر روی این نمودار است. (20 نمره)

(1) اطراف نقطه A (2) اطراف نقطه B (3) اطراف نقطه C (4) اطراف نقطه D

ب) شعاع این ستاره بطور متوسط چند برابر شعاع خورشید است؟ (دقت 5 واحد؛ 30 نمره)

ج) اگر نمودار تغییرات قدر ظاهری در فازهای مختلف برای این متغیر بصورت زیر باشد، با فرض اینکه این ستارگان در پرنورترین و کم نورترین حالت شعاعی یکسان دارند، نسبت دمای بیشینه روشنایی به دمای کمینه روشنایی را بدست آورید. (دقت 0.05 واحد؛ 40 نمره)



د) می دانیم در راستای مشاهده این کهکشان کوتوله (که در عرض کهکشانی $b=34/6^\circ$ قرار دارد)، به ازاء هر یک کیلوپارسک فاصله، 0.05 قدر جذب داریم. مشخص کنید فاصله این کهکشان تا ما چند پارسک است؟ (دقت 1 کیلوپارسک؛ 70 نمره)

توجه: در این مسئله "تابندگی" معادل "درخشندگی مطلق" و معادل کل توان تابشی ستاره برحسب وات برمتر مربع است.



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



مسابقات ملی پژوهش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Lined area for writing answers.



در صورت لزوم از این

صفحه به عنوان چرک

نویس استفاده کنید

مطالب این صفحه

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



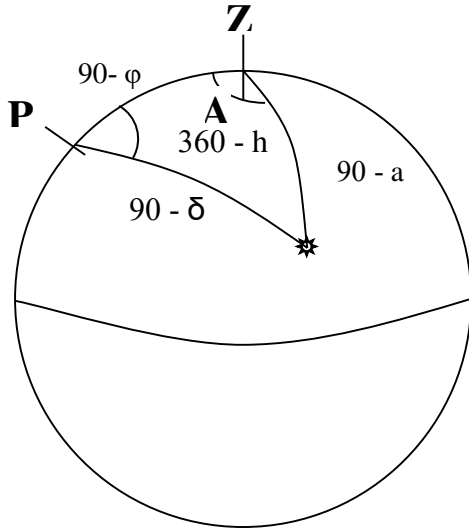
شانزدهمین المپیاد نجوم و اختر فیزیک
پاسخ نامه تشریحی مرحله دوم

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن σ
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	سال نوری ly
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک pc
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	واحد نجومی AU
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید M_{\odot}
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید R_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید L_{\odot}
4.83	قدر مطلق خورشید M_{\odot}
-26.8	قدر ظاهری خورشید m_{\odot}
5880 K	دمای موثر سطح خورشید T_{\odot}
1737 km	شعاع ماه R_m
384400 km	فاصله متوسط ماه از زمین r_m
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین M_{\oplus}
6380 km	شعاع زمین R_{\oplus}
23.5°	تمایل محور زمین ϵ

سؤال اول (150 نمره)

ناظری در ظهر روز انقلاب تابستانی، در عرض جغرافیایی 30 درجه شمالی، یک شاخص عمودی را روی سطح تراز شده زمین نصب می کند و می خواهد به کمک ساعت خود سرعت چرخش سایه شاخص روی زمین را اندازه گیری کند. مقدار این سرعت برحسب ثانیه قوس بر ثانیه چقدر است؟ (دقت پاسخ 1 ثانیه قوس بر ثانیه).



پاسخنامه مسئله 1 :

با توجه به شکل روبرو داریم :

$$\frac{\sin(360 - h)}{\sin(90 - a)} = \frac{\sin A}{\sin(90 - \delta)}$$

$$\rightarrow -\sin h \cos \delta = \sin A \cos a$$

حال برای به دست آوردن سرعت چرخش سایه یا همان $\frac{dA}{dt}$ باید از رابطه بالا مشتق بگیریم که میل خورشید را در طول روز ثابت فرض می کنیم.

$$-\frac{dh}{dt} \cos h \cos \delta = \frac{dA}{dt} \cos A \cos a - \frac{da}{dt} \sin A \sin a$$

می دانیم در هنگام ظهر $\frac{da}{dt} = 0$ است بنابراین :

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dh \cos h \cos \delta}{dt \cos A \cos a}$$

در نتیجه در هنگام ظهر داریم :

$$A = 180^\circ \quad h = 0 \quad \delta = \varepsilon = 23.5^\circ$$

$$a = 90 - \varphi + \varepsilon = 83.5^\circ$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\cos(23.5)}{\cos(83.5)} \frac{dh}{dt} = 8.101 \times \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dt} \frac{dt}{dt} = \frac{360 \times 3600}{86400} \times 0.9973 = 14.9595$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8.101 \times 14.959 = 121.1 \frac{\text{arcsec}}{\text{sec}}$$

سؤال دوم (150 نمره)

میزان انرژی نورانی که یک جرم نجومی در طول موج های مختلف تابش می کند، یکسان نیست. تحلیل این تابش جزء اصلی ترین تحلیل هایی است که ستاره شناسان از طریق آن شکل گیری و تکامل کهکشان های دور دست را بررسی می کنند. تابع توزیع انرژی طیفی (SED) تابعی است که میزان شدت تابش در هر بازه طول موج را نشان می دهد. در جدول زیر توزیع انرژی طیفی ستاره دوتایی HD13974 داده شده است. در این جدول ستون اول از چپ طول موج بر حسب میکرومتر ($1 \mu m = 10^{-6} m$) و در ستون دوم شدت تابش بر حسب میلی جانسکی ثبت شده است (جانسکی واحد شدت تابش است هر جانسکی برابر است با 10^{-26} وات بر متر مربع بر استرادیان).

طول موج (μm)	شدت تابش (mJy)
1.5 ± 0.1	$(6.2 \pm 0.1) \times 10^4$
2.0 ± 0.1	$(4.0 \pm 0.1) \times 10^4$
3.0 ± 0.1	$(2.2 \pm 0.1) \times 10^4$
3.6 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.1) \times 10^4$
5.0 ± 0.1	$(0.9 \pm 0.1) \times 10^4$
7.0 ± 0.1	$(3.8 \pm 0.2) \times 10^3$
10.0 ± 0.1	$(1.6 \pm 0.2) \times 10^3$
17.0 ± 0.1	$(3.0 \pm 0.2) \times 10^2$
70.0 ± 0.1	3.0 ± 0.2

به نظر می رسد تابع توزیع انرژی (SED) از مدل زیر تبعیت کند

$$F(\lambda) = B e^{A \ln(\lambda)}$$

که در آن λ طول موج، $F(\lambda)$ شدت تابش و A و B مقادیر ثابت یا پارامترهای مدل هستند.

الف) با استفاده از داده ها و روش برازش خطی، بهترین مقدار پارامترهای مدل را پیدا کنید. (دقت محاسبه A برابر 0.1 و دقت محاسبه B برابر 100 میلی جانسکی؛ 50 نمره)

ب) دو مورد از منشاهای ممکن خطا در پارامترهای تخمین زده شده را ذکر کنید؟ (10 نمره)

ج) در پاسخنامه نمودار لگاریتمی داده شده است. داده ها را با نقطه و مدل را بصورت خط روی نمودار لگاریتمی رسم کنید. (30 نمره)

د) با ذکر دلیل بیان کنید آیا مدل ارائه شده به دقت تابع توزیع تابش ستاره دوتایی را توصیف می کند. (40 نمره)

ه) با استفاده از مدل به دست آمده تخمین بزنید به ازاء کدام طول موج بر حسب میکرومتر، این دوتایی 0.001 Jy را ساطع می کند. (دقت 10 میکرومتر؛ 20 نمره)

کوتاه پاسخ

پاسخنامه مسئله 2 :

الف : رابطه $F(\lambda)$ را می توان به شکل ساده تری نوشت :

$$F(\lambda) = B e^{ALn(\lambda)} = B e^{ln\lambda^A} = B\lambda^A$$

اما ما به دنبال یک رابطه خطی هستیم و بنابراین بهتر است از طرفین لگاریتم بگیریم.

$$\log F = \log B + A \log \lambda$$

این رابطه خطی است که در تشابه با $y = ax + b$ در آن داریم :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \log F \\ b &\rightarrow \log B \\ x &\rightarrow \log \lambda \\ a &\rightarrow A \end{aligned}$$

که طبق جدول مقادیر (x_i, y_i) داده شده است.

برای برازش خطی از روش حداقل مربعات استفاده می کنیم. در این روش باید کمیت :

$$\delta = \sum_i (y(x_i) - y_i)^2 = \sum_i (ax_i + b - y_i)^2$$

نسبت به پارامترهای مدل یعنی b و a کمینه شوند؛ در نتیجه باید داشته باشیم :

$$\frac{\partial \delta}{\partial a} = \sum_i 2x_i(ax_i + b - y_i) = 2(a \sum_i x_i^2 + b \sum_i x_i - \sum_i x_i y_i) = 0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial b} = \sum_i 2(ax_i + b - y_i) = 2(a \sum_i x_i + b \sum_i 1 - \sum_i y_i) = 0$$

به این ترتیب به یک "دو معادله-دو مجهول" می رسیم :

$$\begin{cases} a \sum_i x_i^2 + b \sum_i x_i = \sum_i x_i y_i \\ a \sum_i x_i + bN = \sum_i y_i \end{cases}$$

که در آن N تعداد داده هاست. با حل این دو معادله-دو مجهول نتیجه می گیریم :

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{N} \rightarrow a \sum x_i^2 + \left(\frac{\sum y_i - a \sum x_i}{N} \right) \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$aN \sum x_i^2 + \sum y_i \sum x_i - a \left(\sum x_i \right)^2 = N \sum x_i y_i$$

$$\rightarrow a \left[N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right] = N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

$$\rightarrow a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} // b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{N}$$

اکنون برای بدست آوردن ضرایب a و b باید کمیت های زیر را حساب کنیم :

$$\sum x_i = \sum \log \lambda_i = 7.13$$

$$\sum x_i^2 = \sum (\log \lambda_i)^2 = 7.78$$

$$\sum y_i = \sum \log F_i = 31.63$$

$$\sum x_i y_i = \sum (\log \lambda_i)(\log F_i) = 19.56$$

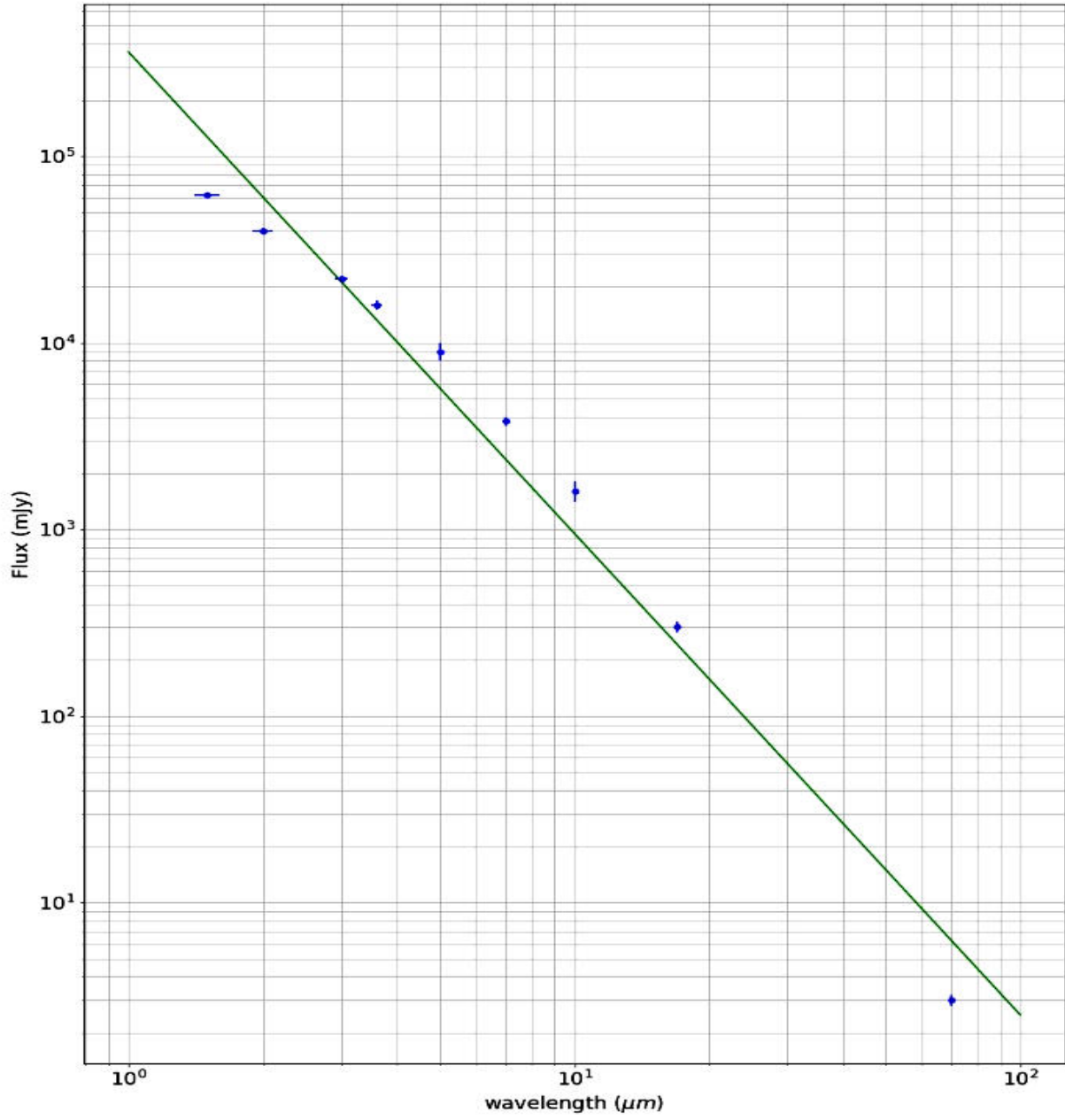
در نتیجه :

$$a = -2.58 \rightarrow A = -2.58$$

$$b = 5.56 \rightarrow B = 361724 \text{ mJy}$$

ب : تابش های رادیویی حرارتی ابزارها + خطاهای ابزارهای اندازه گیری

ج :



د : همانطور که در نمودار دیده می شود خط رسم شده یا مدل، فقط از محدوده خطای یکی از نقاط می گذرد. مقداری که این مدل برای کمیت شدت تابش پیش بینی می کند بسیار بیشتر و کمتر از مقدار رصد شده با احتساب خطای اندازه گیری دستگاه است؛ بنابراین این مدل، مدل مناسبی نیست.

: ۵

$$0.001 \text{ Jy} = 1 \text{ mJy}$$

$$F(\lambda) = B\lambda^A = 361724\lambda^{-2.58} = 1$$

$$\rightarrow -2.58 \log \lambda = -\log(361724)$$

$$\rightarrow \lambda = 10^{2.1544} = 142.69 \mu\text{m}$$

سؤال سوم (180 نمره)

می دانیم که مسیر حرکت اجسام تحت تاثیر نیروهای عکس مجذوری به صورت مقاطع مخروطی است.

الف) برای توصیف حرکت ذره در صفحه از مختصات r (شعاع) و θ (زاویه) استفاده می کنیم. مرکز نیرو را یک سیاره به جرم سنگین M در نظر بگیرید که در مبدا مختصات می باشد. یک شهاب سنگ با جرم m در نظر بگیرید که با این سیاره برهمکنش می کند و می تواند در هر کدام از مقاطع مخروطی باشد. می دانیم مسیر حرکت شهاب سنگ از رابطه

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

پیروی می کند. با استفاده از ثابت بودن انرژی (E) و تکانه زاویه ای (L) ، r_0 و ϵ را بر حسب L و E و m و M و G (ثابت گرانش) بدست آورید. (40 نمره)

ب) حال فرض کنید یک شهاب سنگ از بی نهایت دور با پارامتر برخورد b و سرعت اولیه v_0 به سمت منظومه شمسی پرتاب می شود. فقط اثر گرانشی خورشید در نظر گرفته و بررسی کنید چه شرطی بر روی پارامترهای اولیه شهاب سنگ باشد تا شعاع حضیض مدار شهاب سنگ برابر شعاع حرکت مداری کره زمین بشود. (70 نمره)

ج) حال فرض کنید این شهاب سنگ با کره زمین برخورد کاملاً ناکشسان می کند. بررسی کنید تحت چه شرطی این برخورد می تواند زمین را در یک مدار نامقید قرار دهد و در نتیجه زمین از منظورهی شمسی خارج شود. فرض کنید برخورد لحظه ای و در لحظه برخورد بردار سرعت شهاب سنگ و کرهی زمین در خلاف جهت هم باشند. (70 نمره)

در کل این مسئله حرکت مداری زمین را دایروی در نظر بگیرید.

پاسخنامه مسئله 3 :

الف :

$$L = mr^2\dot{\theta} = cte. \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$E = \frac{-GMm}{r} + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) \equiv const.$$

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \rightarrow \dot{r} = \frac{r_0 \epsilon \dot{\theta} \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} = \frac{r_0 \epsilon \sin \theta L}{mr_0^2} = \frac{\epsilon \sin \theta L}{mr_0}$$

$$E = \frac{-GMm}{r_0} (1 + \epsilon \cos \theta) + \frac{L^2}{2mr_0^2} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 + \frac{L^2}{2mr_0^2} \epsilon^2 \sin^2 \theta$$

$$\rightarrow E = \frac{-GMm}{r_0} (1 + \epsilon \cos \theta) + \frac{L^2}{2mr_0^2} (1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2)$$

توان های مختلف $\cos \theta$ را جدا سازی می کنیم :

$$\text{توان صفرم} \rightarrow E = \frac{-GMm}{r_0} + \frac{L^2}{2mr_0^2} (1 + \epsilon^2)$$

$$\text{توان یکم} \rightarrow -\frac{GMm\epsilon}{r_0} + \frac{L^2\epsilon}{mr_0} = 0$$

$$\rightarrow r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}$$

با جایگذاری r_0 در رابطه انرژی (توان صفرم)

$$E = \frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} (\epsilon^2 - 1)$$

$$\rightarrow \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3 M^2 G^2}}$$

ب : اگر در حضيض مقدار θ برابر با صفر باشد :

$$L = mbv_0 \text{ و } E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$R_{\oplus} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}$$

$$v_p = \frac{L(1 + \varepsilon)}{mr_0} = \frac{L}{mR_{\oplus}}$$

$$\rightarrow v_p = \frac{bv_0}{R_{\oplus}}$$

$$E_p = \frac{1}{2}m \left(\frac{bv_0}{R_{\oplus}} \right)^2 - \frac{GM_{\odot}m}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\rightarrow \frac{GM_{\odot}}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}v_0^2 \left(-1 + \frac{b^2}{R_{\oplus}^2} \right) \rightarrow v_0(b) = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\oplus}} \times \frac{1}{\frac{b^2}{R_{\oplus}^2} - 1}}$$

$$M_E R_{\oplus} w^2 = \frac{M_E M_{\odot} G}{R_{\oplus}^2} \rightarrow R_{\oplus}^3 = \frac{M_{\odot} G}{w^2} \rightarrow R_{\oplus} = \sqrt[3]{\frac{M_{\odot} G}{w^2}}$$

$$w = \frac{2\pi}{1 \text{ year}}$$

: ج

$$v_{\oplus} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R_{\oplus}}}$$

$$v_p = \frac{bv_0}{R_{\oplus}} = \frac{b}{R_{\oplus}} \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\oplus}} \frac{1}{\frac{b^2}{R_{\oplus}^2} - 1}}$$

از پایستگی تکانه خطی داریم :

$$mv_p - Mv_{\oplus} = (m + M_{\oplus})v_f$$

همچنین اگر سرعت فرار در محل زمین را با v_c نشان دهیم، می توان نوشت :

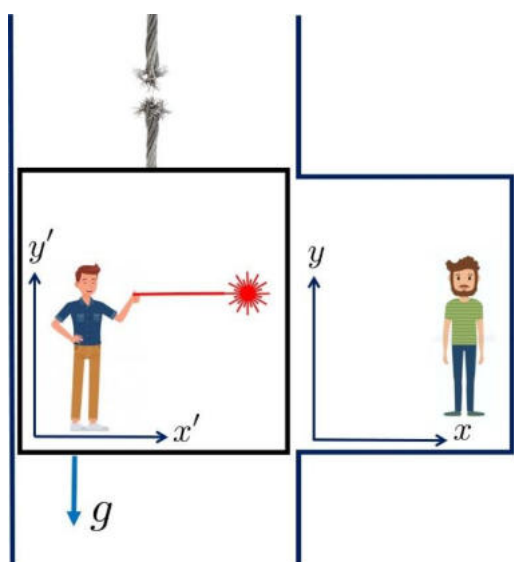
$$v_c = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$$

$$v_f \geq v_c \rightarrow \frac{mb}{R_{\oplus}} \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} \frac{1}{\frac{b^2}{R_{\oplus}^2} - 1}} - M_{\oplus} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \geq (m + M_{\oplus}) \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$$

$$m \geq M_{\oplus} \frac{\sqrt{2} + 1}{-\sqrt{2} + \sqrt{\frac{\frac{2b^2}{R_{\oplus}^2}}{\frac{b^2}{R_{\oplus}^2} - 1}}}$$

سؤال چهارم (100 نمره)

طبق نظریه نسبیت عام اینشتین می دانیم که در میدان گرانشی یک جسم، فقط ناظرهایی که آزادانه سقوط می کنند، مسیر نور را مستقیم می بینند. همانند شکل زیر دو دوست فیزیکدان یکی در آسانسور (علی) و دیگری در یکی از طبقات ساختمان (سامان) روبروی هم (در سکون) ایستاده اند. ناگهان در زمان $t = 0$ کابل آسانسور پاره می شود و آسانسور و علی سقوط آزاد می کنند (از اثرات اصطکاکی صرف نظر می کنیم). در این شرایط علی و سامان تصمیم می گیرند که آزمایشی انجام بدهند. علی یک باریکه لیزر را همزمان با پاره شدن کابل در $t = 0$ دقیقاً موازی کف آسانسور (محور x') ارسال می کند. طبق "اصل هم ارزی" علی می بیند که مسیر لیزر "همواره" (قبل از برخورد به دیواره) یک خط مستقیم و موازی کف آسانسور است.



کوته پاسخ

الف) معادله حرکت پرتو لیزر را نسبت به مختصات (x', y') بنویسید. (10 نمره)

کوته پاسخ

ب) معادله حرکت آسانسور را در مختصات سامان (x, y) بنویسید. (10 نمره)

ج) معادله مسیر پرتو لیزر را در مختصات سامان به صورت $y(x)$ بنویسید؟ (20 نمره)

د) شعاع انحنای نقطه ای، R یک منحنی به معادله $y(x)$

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right|$$

از رابطه

به دست می آید که در آن پرایم به معنی مشتق گیری و دو پرایم به معنی مشتق دوم است. با استفاده از این رابطه شعاع انحنای مسیر حرکت باریک لیزر را از دید سامان دقیقاً در لحظه ساطع شدن آن بیابید. مبدا دستگاه ها را به طرز مناسب انتخاب کنید تا محاسبات راحت شود. (30 نمره)

ه) این شعاع را برای میدان گرانشی در سطح زمین حساب کنید. (10 نمره)

و) حال فرض کنید که یک باریکه نور در اطراف یک جسم بسیار چگال در حرکت است طوری که شعاع انحنای حرکت این باریکه با شعاع جسم برابر است. رابطه جرم و شعاع این جسم را بیابید. این جسم چه موجود فیزیکی می تواند باشد؟ (20 نمره)

پاسخنامه مسئله 4 :

الف : اگر سرعت نور در هوا را تقریباً برابر با سرعت نور در خلاء در نظر بگیریم

$$\begin{cases} x' = ct \\ y' = 0 \end{cases} \quad \text{با انتخاب مبدأ در نقطه ارسال پرتوها داریم :}$$

همچنین در تقریب سرعت های کم $t = t'$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{ب :}$$

$$\begin{cases} x = x' = ct \\ y = y' - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow y = 0 - \frac{gx^2}{2c^2} \rightarrow y(x) = -\frac{gx^2}{2c^2} \quad \text{ج :}$$

د :

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

$$y'(x) = \frac{-gx}{c^2}, \quad y''(x) = -\frac{g}{c^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R} = \frac{-\frac{g}{c^2}}{\left(1 + \frac{g^2x^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{1}{R} \Big|_{x=0} = +\frac{g}{c^2}$$

$$\begin{cases} g \cong 10 \text{ m/s}^2 \\ c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{R} \cong \frac{+10 \text{ m/s}^2}{9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2} \rightarrow R \cong 9 \times 10^{15} \text{ m} \quad \text{ه :}$$

البته این فاصله را می توان به پارسک نیز باز نویسی کرد که $R \cong \frac{1}{3}pc$ خواهد بود.

$$g(R) = ? // g(R) = \frac{GM}{R^2} \quad \text{و :}$$

اگر $R = \frac{1}{2}R_{sch} \equiv \frac{GM}{c^2}$ $\rightarrow \frac{GM}{c^2 R^2} = \frac{1}{R} \rightarrow \frac{g(R)}{c^2} = \frac{1}{R}$ و در نتیجه این جسم یک سیاهچاله است.

سؤال پنجم (160 نمره)

در دهه 30 میلادی آندره دانژون (André Danjon)، منجم فرانسوی حداقل جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید، برای مشاهده پذیر شدن هلال‌های جوان پس از مقارنه ماه و خورشید را 7° تعیین کرد. علت این امر ممانعتِ عوارض سطحی (مانند کوه ها و پستی و بلندی های لبه ماه) از تابش هلال نازک بخاطر جلوگیری از عبور نورشان است. این جدایی زاویه ای حدّ دانژون نام گرفت. مدت ها رصدی حتی به کمک ابزارهای قدرتمند در جدایی زاویه ای کمتر از این مقدار ثبت نشد و این حد مورد قبول بود. با این حال رصد در پرتوهای فرورسرخ نشان می دهد در زوایای کمتر از حد دانژون نیز هلال تشکیل خواهد شد؛ زیرا در طول موج های بلندتر پراکندگی در جو کمتر و درصد عبور نور بیشتر است.

کوتاه پاسخ الف) لبه ماه را صاف و کروی شکل در نظر بگیرید. با توجه به حد تفکیک چشمان تیزبین (یک دقیقه قوس) کمترین جدایی زاویه‌ای بین ماه و خورشید برای تفکیک ضخامت هلال با چشم غیر مسلح چند درجه خواهد بود؟ (60 نمره)

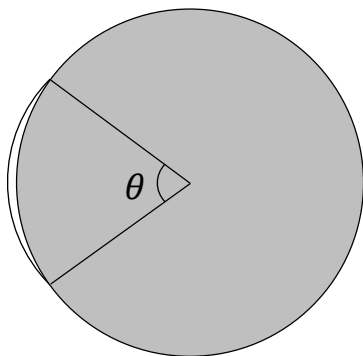
30 (4

15 (3

20 (2

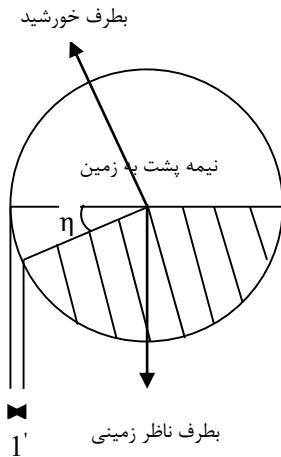
10 (1

ب) تصویر زیر ماه را هنگامی که جدایی زاویه ای بین ماه و خورشید 5.2 درجه است نشان می دهد. اگر در این هنگام گشودگی هلال روشن ماه (زاویه θ ، طول کمان هلال از دید مرکز قرص ماه) در تصویر 70° باشد. بلندی ارتفاعات لبه ماه را برحسب کیلومتر بدست آورید (دقت پاسخ 0.1 کیلومتر؛ 100 نمره).



پاسخنامه مسئله 5 :

الف : اگر حد تفکیک چشم انسان یک دقیقه قوسی باشد، بدون توجه به ارتفاعات لبه های ماه باید ضخامت مرکز هلال (که ضخیم ترین جای آن است) از روی زمین به همین مقدار برسد :

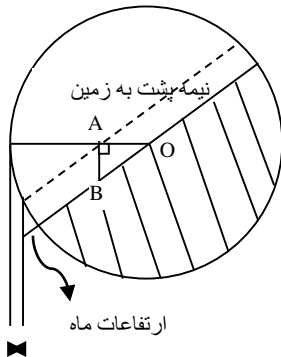


با توجه به تصویر روبرو جدایی زاویه ای زمین از خورشید از دید ماه، معادل $180^\circ - \eta$ هست و چون زاویه به رأس خورشید را نیز می توان تقریباً صفر در نظر گرفت، در نتیجه زاویه θ جدایی زاویه ای ماه از خورشید از دید ناظر زمینی است.

$$\tan(1') = \frac{R_m - R_m \cos \eta}{d} \rightarrow \eta = \cos^{-1} \left(1 - \frac{d \tan(1')}{R_m} \right) = 20.66^\circ$$

این بخش راه دیگری نیز با استفاده از فاز ماه دارد، که حاصل آن گزینه (2) است.

ب : اما با در نظر گرفتن پستی و بلندی های لبه ماه، تصویری مانند روبرو خواهیم داشت که در آن زاویه هلال $\eta = 5/2^\circ$ است.



خط چین در حقیقت لبه ای از ماه است که به سبب ارتفاعات خط هلال را مشخص می کنند، در نتیجه نقطه A نوک هلال است و مثلث ΔOAB نیز مثلث کروی است.

در این مثلث دو زاویه $\eta \equiv O$ و A و $OA = 55^\circ$ را داریم؛ بنابراین :

$$\begin{aligned} \cos A \cos a &= \sin A \cot O - \sin b \cot AB \\ \rightarrow \cos 55^\circ \cos 90^\circ &= \sin 90^\circ \cot 5.2^\circ - \sin 55^\circ \cot AB \\ \rightarrow \cot AB &= \frac{\cot 5.2^\circ}{\sin 55^\circ} \rightarrow AB = 4.2634^\circ \end{aligned}$$

زاویه بدست آمده ارتفاعات لبه ماه از دید ناظر زمینی است، در نتیجه ارتفاع کوه ها مقدار زیر است :

$$\cos 4.26^\circ = \frac{R_m}{R_m + h} \rightarrow h = 4820 \text{ m} \equiv 4.8 \text{ Km}$$

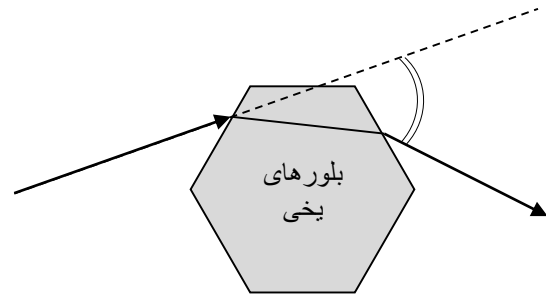
بنابراین چون از هیچ کجای لبه های ماه در جدایی زاویه ای کمتر از زاویه بدست آمده یعنی 4.26° نوری عبور نمی کند تا به زمین برسد، حد جدید برای آستانه تشکیل هلال نازک در جدایی زاویه ای 4.2° تا 4.3° باید تعریف شود.

سؤال ششم (100 نمره)

در بعضی از روزها و شب های سرد، ابرهای سیروس و سیرواستراتوس در ارتفاعات 5 تا 14 کیلومتری زمین تشکیل می شوند، در این مواقع گاهاً هاله ای به شعاع 22° در اطراف خورشید یا ماه در آسمان دیده می شود که در تصویر زیر مشخص است. (شکل 1)



شکل (1)



شکل (2)

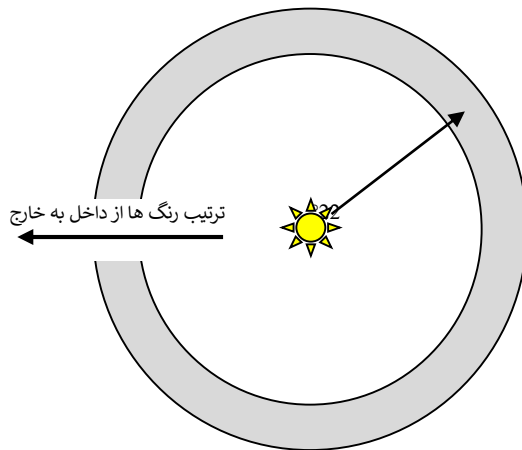
این هاله 22° درجه ای ناشی از شکست نور در بلورهای یخ آب است، که منشورهایی 6-ضلعی منتظم ایجاد کرده اند و مطابق با تصویر مسیر نور را عوض می کنند (شکل 2).

الف) زاویه انحراف نورهای خروجی نسبت به نورهای ورودی با توجه به زوایای مختلف تابش، در بازه ای تغییر می کند که می دانیم کمینه آن در اطراف 22° است و این امر سبب می شود که در این زاویه از قرص خورشید و یا ماه، شاهد پرتوهای رسیده بیشتری به ناظران این پدیده جوی باشیم. ضریب شکست این بلورها چقدر است؟ راهنمایی: حداقل زاویه انحراف نور از یک منشور، زمانیست که زوایای ورودی و خروجی نور از سطوح یکسان باشند. (دقت 0.01 واحد؛ 70 نمره)

ب) اگر در شکل 3 بخش خاکستری رنگ نشان دهنده هاله نورانی باشد ترتیب رنگ ها از داخل

کوته پاسخ

به خارج چگونه است؟ (30 نمره)

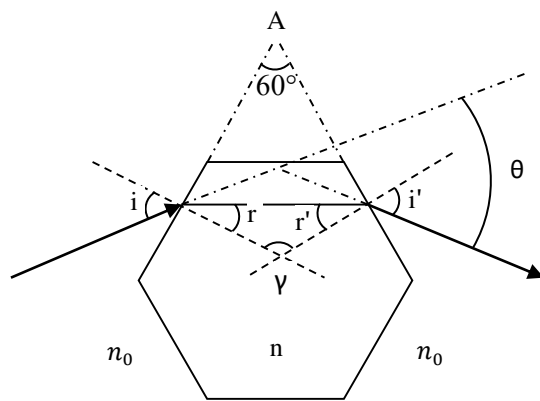


شکل 3

- 1) آبی - سبز - زرد - نارنجی - قرمز
- 2) قرمز - نارنجی - زرد - سبز - آبی
- 3) بسته به شرایط متغیر است
- 4) اصلاً تجزیه نور نداریم

پاسخنامه مسئله 6 :

الف : با توجه به تصویر روبرو که در حالت کمترین زاویه انحراف رسم شده است و $\theta \equiv 22^\circ$ می دانیم زاویه ورود و خروج نور به بلورهای یخی یکسان است و در نتیجه $i = i'$ و البته که $r = r'$ بنابراین :



$$\begin{aligned} n_0 \sin i &= n \sin r \\ \gamma &= 180^\circ - (r + r') \\ A + \gamma &= 180^\circ \rightarrow A = r + r' = 2r \\ &\rightarrow r = 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= (i - r) + (i' - r') \rightarrow \theta \\ &= 2i - 2r \equiv 22^\circ \\ &\rightarrow i = \frac{22^\circ + 2r}{2} = \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ \end{aligned}$$

$$\rightarrow n = \frac{n_0 \sin i}{\sin r} = \frac{1 \times \sin 41^\circ}{\sin 30^\circ} = 1.3121$$

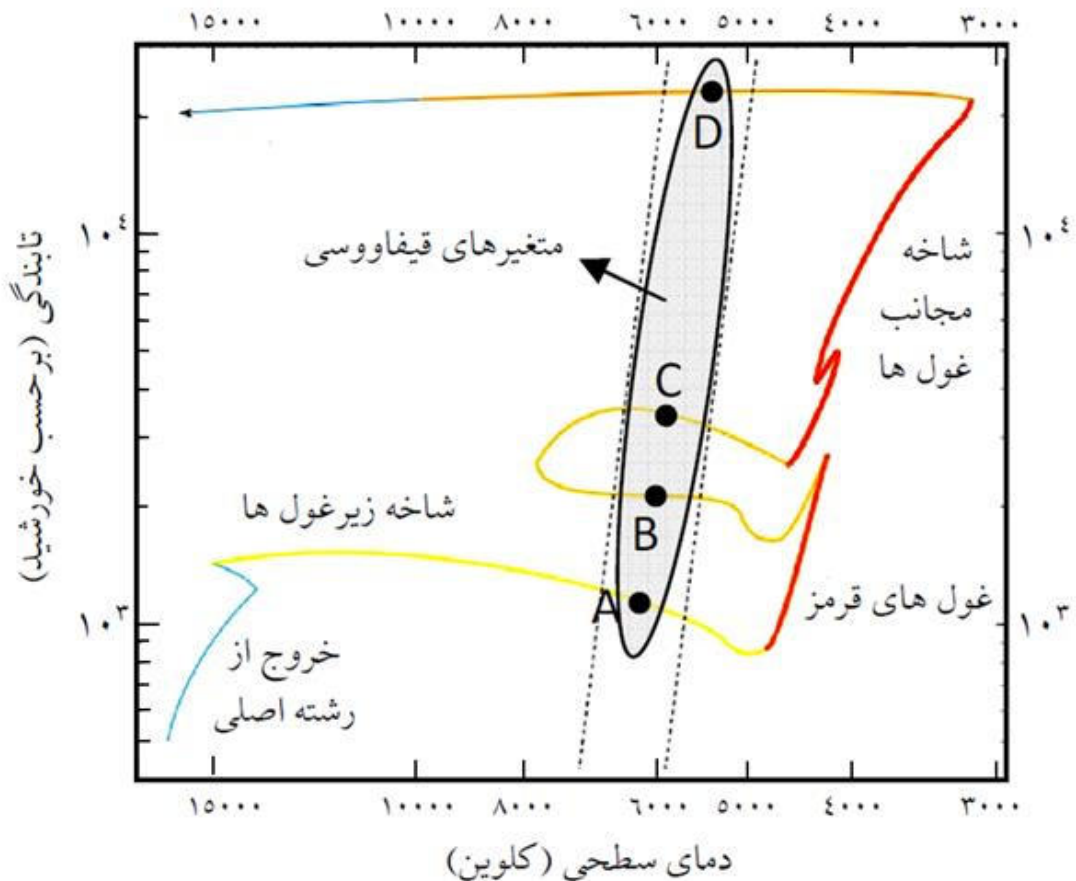
ب : می دانیم در هر یک از بلورهای یخی، در نهایت نورهای با طول موج کوتاه تر بیشتر می شکنند و مثلاً نورهای آبی بیشتر از قرمز خواهند شکست. در این شرایط از بلورهایی که به خورشید نزدیک ترند (جدایی زاویه ای کمتری نسبت به خورشید دارند) نورهایی که کمتر و به اندازه $(22 - \epsilon)^\circ$ منحرف شده اند به چشمانمان رسیده؛ اما بلورهایی که از خورشید دورترند (جدایی زاویه ای بیشتری نسبت به خورشید دارند) نورهایی که بیشتر و به اندازه $(22 + \epsilon)^\circ$ منحرف شده اند به چشمانمان خواهند رسید... این عامل سبب می شود تا لایه های درونی این هاله 22° ای قرمز، اما لایه های بیرونی آبی تر باشند و گزینه (2) درست است.

سؤال هفتم (160 نمره)

کهکشان کوتوله کروی UGC10822 در راستای صورت فلکی اژدها، از جمله اقمار کهکشانی راه شیری است که در سال 1954 میلادی توسط آلبرت جورج ویلسون کشف شد. اخیراً در این کهکشان یک ستاره متغیر با مسیر تحولی زیر بر روی نمودار HR، مشاهده شده است که به نظر می رسد در دسته بندی متغیرهای قیفاووسی قرار گیرد. اگر رابطه "دوره تناوب-تابندگی متغیرهای قیفاووسی" برای متوسط قدر مطلق مرئی آنها به شکل زیر باشد

$$M_v = -2.43(\log_{10} P - 1) - 4.05$$

که در آن P دوره تناوب بر حسب روز و M_v متوسط قدر مطلق مرئی است. همچنین در رصدها مشخص شده است که نور این ستاره با دوره تناوب 6.03 روز تغییر می کند.

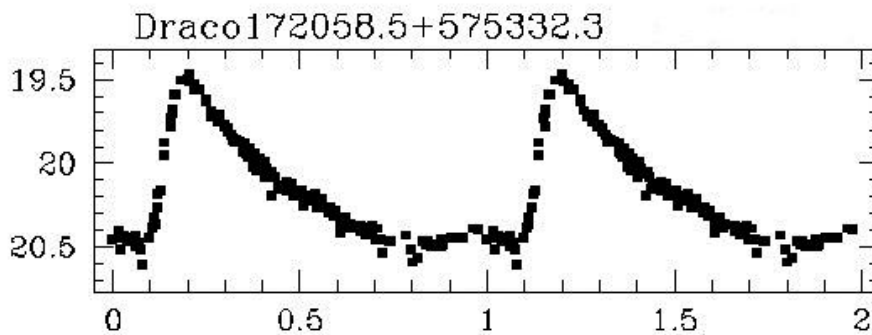


کوتاه پاسخ الف) مشخص کنید مکان این ستاره هم اکنون در کدامیک از نقاط داده شده روی مسیر تحولی بر روی این نمودار است. (20 نمره)

1) اطراف نقطه A 2) اطراف نقطه B 3) اطراف نقطه C 4) اطراف نقطه D

ب) شعاع این ستاره بطور متوسط چند برابر شعاع خورشید است؟ (دقت 5 واحد؛ 30 نمره)

ج) اگر نمودار تغییرات قدر ظاهری در فازهای مختلف برای این متغیر بصورت زیر باشد، با فرض اینکه این ستارگان در پرنورترین و کم نورترین حالت شعاعی یکسان دارند، نسبت دمای بیشینه روشنایی به دمای کمینه روشنایی را بدست آورید. (دقت 0.05 واحد؛ 40 نمره)



د) می دانیم در راستای مشاهده این کهکشان کوتوله (که در عرض کهکشانی $b=34/6^\circ$ قرار دارد)، به ازاء هر یک کیلوپارسک فاصله، 0.05 قدر جذب داریم. مشخص کنید فاصله این کهکشان تا ما چند پارسک است؟ (دقت 1 کیلوپارسک؛ 70 نمره)

توجه: در این مسئله "تابندگی" معادل "درخشندگی مطلق" و معادل کل توان تابشی ستاره برحسب وات برمتر مربع است.

پاسخنامه مسئله 7:

الف: با داشتن دوره تناوب این متغیر و رابطه دوره تناوب-درخشندگی برای آن ها، می توان متوسط قدر مطلق مرئی و سپس تابندگی ستاره را یافت: دقت شود که برای این ستاره، تابندگی در فیلتر مرئی را با تقریب خوبی همان درخشندگی مطلق در نظر گرفته ایم. (معادل با اینکه تصحیح تابش سنجی صفر است)

$$M_v = -2.43(\log_{10} 6.03 - 1) - 4.05 = -3.52$$

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2.5 \log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \rightarrow L = 10^{-0.4(-3.52-4.83)} L_{\odot} = 2188 L_{\odot}$$

که با توجه به محور لگاریتمی تابندگی روی نمودار، متناظر با نقطه B خواهد بود.

ب: حال اگر دمای خوانده شده برای این ستاره از روی نمودار 6000 کلین باشد، شعاع ستاره برابر است با :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{4\pi \sigma T^4}} = \sqrt{\frac{2188 \times 3.85 \times 10^{26}}{4\pi \times 5.67 \times 10^{-8} \times 6000^4}} \\ = 3.02 \times 10^{10} \text{ m}$$

که برابر با 43.4 برابر شعاع خورشید است.

دقت شود که چنانچه دانش آموزی با کمی خطا در قسمت (الف) گزینه های (1) یا (3) را درست گرفته باشد، محدوده دمایی را 6200 تا 5800 کلین در نظر گرفته است و جواب قسمت (ب) را در محدوده 40.6 تا 46.4 برابر شعاع خورشید محاسبه کرده و بنابراین در محدوده خطای در نظر گرفته شده، نمره این بخش را خواهد گرفت.

ج: از روی منحنی نوری نیز مشخص است که تغییرات قدر ظاهری بطور متوسط از 19.5 تا 20.5+ است،

$$R_{max} = R_{min} \equiv R \text{ همچنین}$$

$$m_{max} - m_{min} = -2.5 \log \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) = -2.5 \log \left(\frac{\frac{L_{max}}{4\pi d^2}}{\frac{L_{min}}{4\pi d^2}} = \frac{L_{max}}{L_{min}} \right) \\ = -2.5 \log \left(\frac{4\pi R^2 \sigma T_{max}^4}{4\pi R^2 \sigma T_{min}^4} \right) \\ \rightarrow 19.5 - 20.5 = -10 \log \left(\frac{T_{max}}{T_{min}} \right) \rightarrow \frac{T_{max}}{T_{min}} = 10^{0.1} = 1.26$$

دقت شود که چنانچه دانش آموزی با نهایت دقت مقادیر تغییرات قدر ظاهری را از 19.45 تا 20.6+ در نظر گرفته باشد نیز نسبت دماها را 1.30 بدست خواهد آورد، که در محدوده خطای لحاظ شده خواهد بود.

د: در این بخش عرض کهکشانی ظاهراً داده ای اضافی است زیرا مستقیماً مقدار جذب در آن راستا داده شده است...

$$\bar{m} - \bar{M} = 5 \log d(pc) - 5 + A = 5 \log d(pc) - 5 + a \left(\frac{mag}{Kpc} \right) d(Kpc)$$

$$\rightarrow +20 - (-3.52) = 5 \log d(pc) - 5 + 0.05 \times 10^{-3} d(pc) \rightarrow d = 80059 pc$$

دقت شود که چنانچه دانش آموزی با دقت گفته شده متوسط قدر ظاهری را $+20.025$ نیز قرار داده باشد نیز فاصله را 80383 پارسک بدست خواهد آورد، که خطای اشاره شده برای نمره دهی بیشتر از آن است.

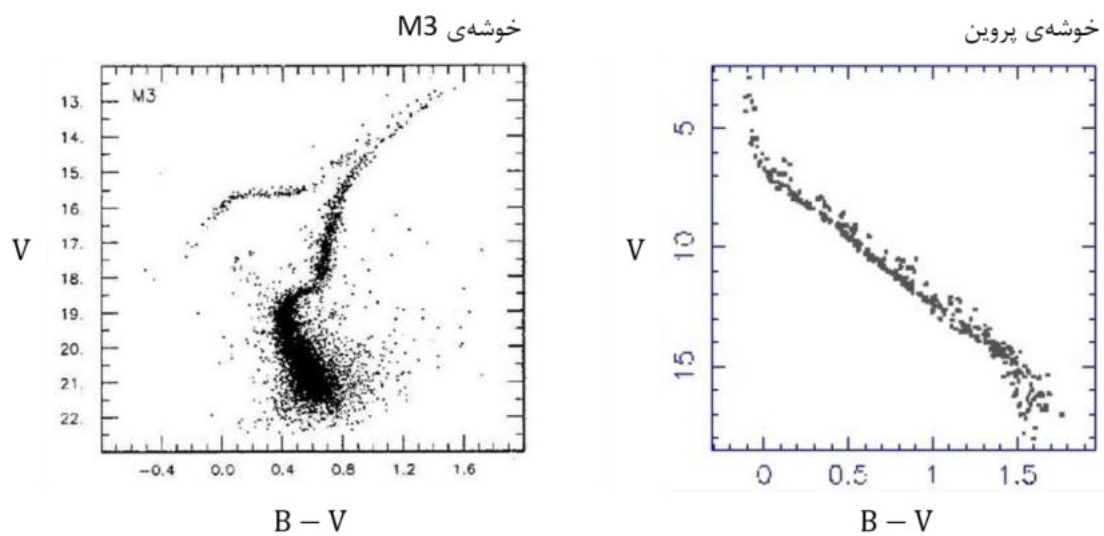
سؤال ۱ (۱۰ نمره)

نمودارهای H-R زیر برای خوشه ی پروین و خوشه ی کروی M3 هستند.

الف) با استفاده از ستارگان $B - V = 0.75$ ، نسبت فاصله ی این دو خوشه را تعیین کنید.

ب) با توجه به نمودار خوشه ی M3 تعیین کنید درخشندگی بالاترین ستارگان نمودار، چند برابر درخشندگی پایین ترین ستارگان نمودار است.

این شکل جزء پاسخ سوال ۱ می باشد.



شکل ۱

سؤال ۲ (۱۰ نمره)

در یک پروژه‌ی رصدی از رادیوتلسکوپ‌های «آرایه‌ی بسیار بزرگ^۱» برای نقشه‌برداری از سحابی جبار در طول موج ۱۰ سانتی‌متر با فناوری تداخل‌سنجی استفاده شده است. آرایه‌ی بسیار بزرگ از ۲۷ تلسکوپ رادیویی با قطر ۲۵ متر تشکیل شده است. قطر مؤثر این آرایه ۳۶ کیلومتر است.

الف) بهترین توان تفکیکی که می‌توانیم با استفاده از این آرایه به آن دست یابیم چه قدر است؟

ب) اگر بخواهیم با تلسکوپی در ناحیه‌ی مرئی چنین توان تفکیکی به دست آوریم، قطر عدسی یا آینه‌ی اولیه‌ی تلسکوپ چه قدر باید باشد؟

ج) اگر فاصله‌ی کانونی تلسکوپ «قسمت ب» ۲۰۰ cm باشد، مساحت تصویر بخشی از سحابی جبار به پهنای ۱۰ دقیقه‌ی قوسی در آشکارساز تلسکوپ چه قدر خواهد بود؟

چرک نویس استفاده کنید مطالب این

سؤال ۳ (۱۵ نمره)

در چه بازه‌ای از عرض دایرة البروجی، می‌توان نقطه‌ای یافت که عرض دایرة البروجی آن با بُعدش برابر باشد؟

مطالب این قسمت تحت هیچ

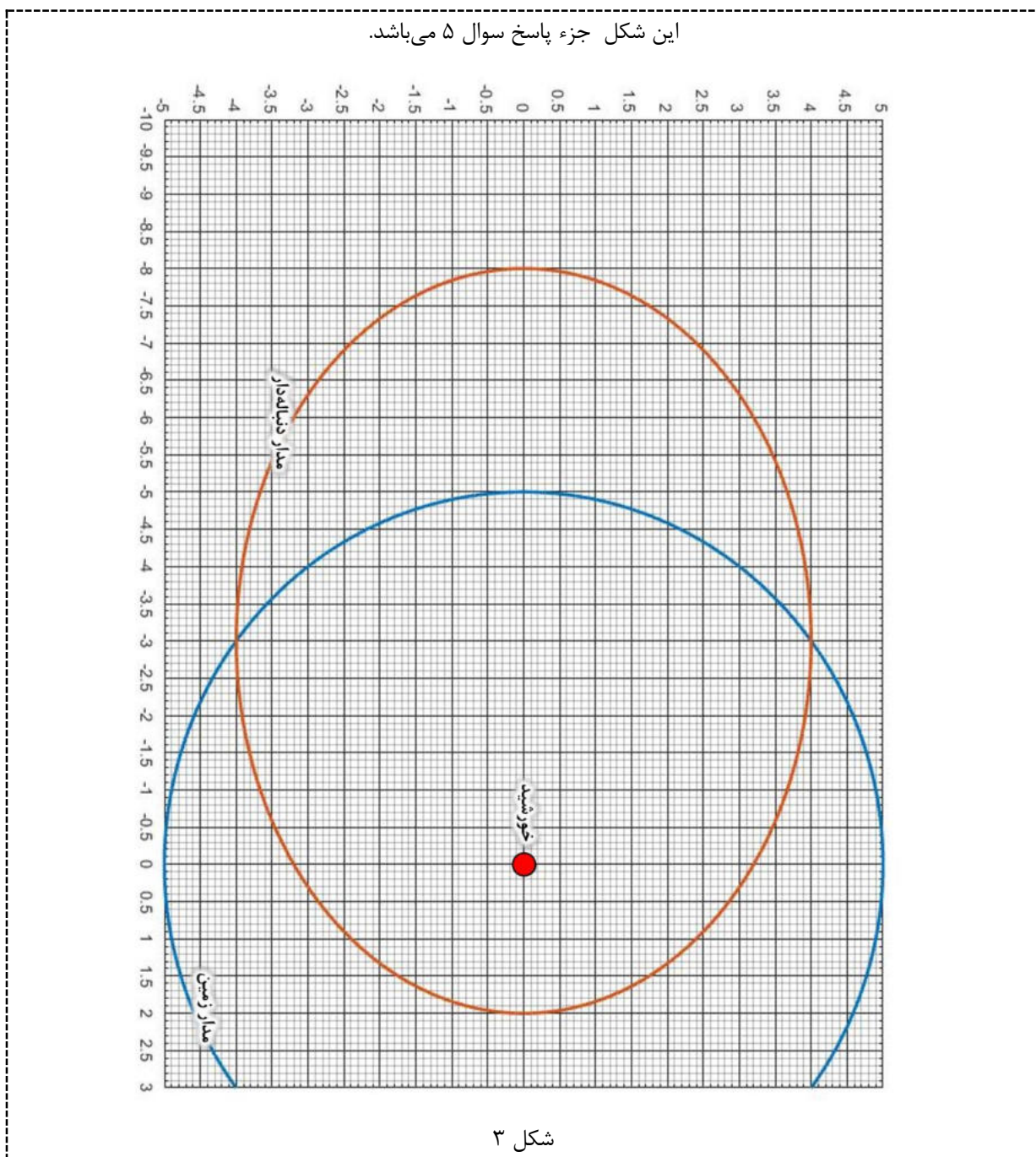
سؤال ۴ (۱۵ نمره)

منجمان سیاره‌ای یافته‌اند که دارای یک حلقه‌ی مسطح با ضخامت ناچیز است. شعاع این حلقه با دوره‌ی تناوب ۲ روز، بین ۶ برابر تا ۱۰ برابر شعاع مشتری نوسان می‌کند. بررسی‌های بیشتر نشان داده است که این حلقه از تکه‌سنگ‌هایی تشکیل شده که تحت تاثیر گرانش سیاره‌ی مرکزی به دور آن می‌گردند. جرم سیاره‌ی مرکزی چند برابر جرم مشتری است؟

مطالب این قسمت تحت هیچ

سؤال ۵ (۲۰ نمره)

شکل ۳ مدار دنباله‌داری را نشان می‌دهد که در صفحه‌ی دایرة البروج هم‌جهت با زمین به دور خورشید می‌گردد. دنباله‌دار در نیمه شب (ساعت ۰۰:۰۰) روز اول فروردین ۱۳۹۸ در حضيض مدار خود دیده شده است. مکان دنباله دار در مدارش را در تاریخ هفتم خرداد (ساعت ۰۰:۰۰) امسال بر روی شکل ۳ با علامت ستاره (*) مشخص کنید.



سؤال ۶ (۲۵ نمره)

بر اساس نظریه های تشکیل ساختار، اندکی پس از زمان بازترکیب و جدا شدن ماده و تابش، ماده ی باریونی شروع به رمبش کرده است. این اتفاق باعث شکل گیری ساختارهای کیهانی شده است.

چگالی ماده ی باریونی در حال حاضر $\Omega_b = 2/273 \times 10^{-2}$ و قرمزگرایی در زمان بازترکیب حدود ۱۱۰۰ است.

الف) حداقل جرم توده ای کروی شکل از ماده ی باریونی که بلافاصله پس از زمان بازترکیب به دلیل برقرار نبودن تعادل می تواند برمبد چه قدر است؟

ب) پاسخ قسمت قبل به جرم کدام یک از ساختارهای زیر نزدیک تر است؟

خوشه ی کهکشانی

گروه کهکشانی

کهکشان

خوشه ی ستاره ای

چرک نویس استفاده کنید مطالب این

سؤال ۷ (۳۰ نمره)

رصدگری یک ستاره را در سه زمان مختلف در طول سال در نزدیک قطب شمال دایرة البروجی رصد کرده است. او مختصات استوایی ستاره را با ابزاری که دقت آن یک میلیونیم درجه است به دست آورده است. مختصات این ستاره پس از اصلاح اثر ابیراهی در جدول زیر آمده است.

جدول ۱

بعد (درجه)	میل (درجه)
۲۷۰/۰۰۰۵۸۶	۶۶/۵۶۱۲۷۱
۲۷۰/۰۰۰۵۳۱	۶۶/۵۶۱۲۷۴
۲۷۰/۰۰۰۵۵۶	۶۶/۵۶۱۲۵۰

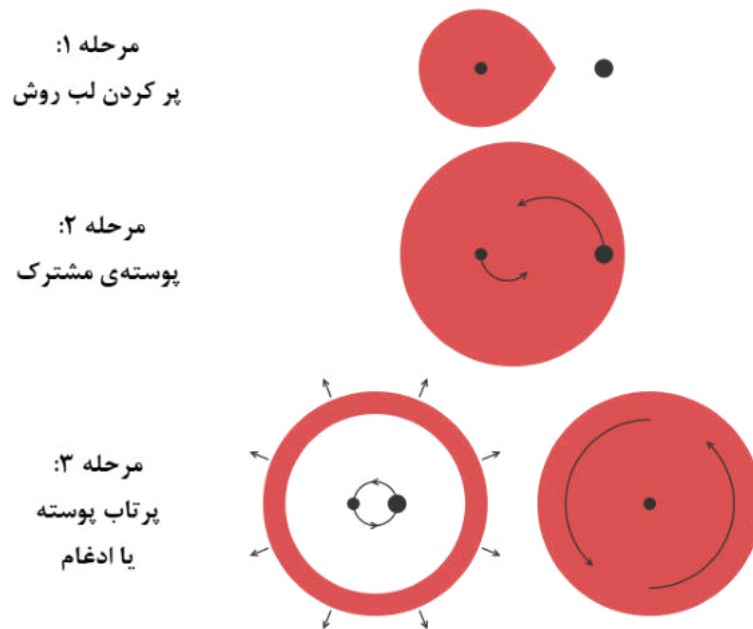
فاصله‌ی این ستاره از خورشید بر حسب سال نوری چه قدر است؟

مطالب این قسمت تحت هیچ

سؤال ۸ (۲۵ نمره)

گروهی از ستارگان دوتایی که ستارگان کوتاه‌دوره نام دارند، دارای دوره‌ی تناوب چندین ساعت تا یک روز هستند و از مؤلفه‌های فشرده‌ای تشکیل شده‌اند که قبلاً هسته‌ی ستاره‌های غول بوده‌اند. طبق نظریه‌ی استاندارد شکل‌گیری این ستاره‌ها، در سیستم‌های دوتایی که جرم مؤلفه‌هایشان برابر نیست، ستاره‌ی سنگین‌تر زودتر تبدیل به غول شده و در شاخه‌ی غول سرخ (RGB) یا شاخه‌ی غول مجانبی (AGB) لب روش^۱ خود را پر می‌کند. در نتیجه جرم آن به ستاره‌ی سبک‌تر برافزوده می‌شود.

به دلیل آهنگ بالای انتقال جرم، در مدت زمان کوتاهی تعادل دینامیکی ستاره‌ی همدم به هم می‌خورد؛ به طوری که این ستاره نیز منبسط شده و لب روش خود را پر می‌کند. در نهایت پوسته‌ی ستاره‌ی غول، کل سیستم دوتایی را در بر می‌گیرد (مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک^۲). نیروی اصطکاکی که توسط پوسته‌ی مشترک به هسته‌ی ستاره‌ها وارد می‌شود، منجر به کاهش انرژی مداری و تکانه‌ی زاویه‌ای مداری سیستم دوتایی و انتقال آن به پوسته‌ی مشترک می‌شود؛ در نتیجه فاصله‌ی هسته‌ها کاهش می‌یابد. در صورتی که پوسته‌ی مشترک پیش از ادغام هسته‌ها، انرژی کافی را دریافت کند، به بیرون رانده شده و به شکل سحابی سیاره‌ای درمی‌آید.

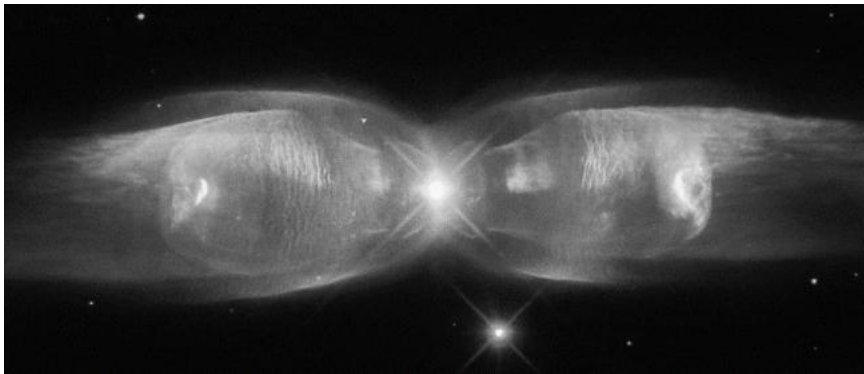


شکل ۴ - مراحل تحول پوسته‌ی مشترک

الف) مسیر تحولی تقریبی یک ستاره‌ی جرم میانه را روی نمودار H-R رسم کنید و مراحل زیرغول^۱ (SG)، شاخه‌ی غول سرخ^۲ (RGB) و شاخه‌ی غول مجانبی^۳ (AGB) را روی آن نشان دهید. در مطالعات آماری جمعیت‌های ستاره‌ای، از یک عبارت ساده برای ارتباط دادن پارامترهای مداری پیش و پس از مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک استفاده می‌شود:

$$\frac{GM_1 M_{env}}{R} = \alpha_{CE}(E_i - E_f)$$

که در آن E_i انرژی مداری اولیه، E_f انرژی مداری نهایی و α_{CE} ضریبی بین ۰ و ۱ است (ضریب کارایی انتقال انرژی). عبارت سمت چپ انرژی بستگی اولیه‌ی پوسته‌ی ستاره‌ی غول است و در آن M_1 جرم کل ستاره، R شعاع آن و M_{env} جرم پوسته است.



شکل ۵- در مرکز سحابی پروانه (M2-9) یک سیستم دوتایی دیده می‌شود.

ب) یک سیستم دوتایی با دوره‌ی تناوب مداری ۵۵۰ روز، شامل ستاره‌ی غول با جرم $2/4 M_{\odot}$ و جرم هسته‌ی $0/6 M_{\odot}$ و ستاره‌ی همدم با جرم $0/5 M_{\odot}$ در مرحله‌ی رشته‌ی اصلی است. اگر ستاره‌ی غول، تمام لب روش خود تا نقطه‌ی L_1 را پر کند، دوره‌ی تناوب مداری سیستم پس از مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک را حساب کنید ($\alpha_{CE} = 0/2$).

فاصله‌ی ستاره‌ی همدم (M_2) از نقطه‌ی L_1 بر حسب فاصله‌ی ستاره‌ها (a) و نسبت جرمی ($q = \frac{M_2}{M_1}$) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$f(q) = \frac{R_{L_1}}{a} \approx \frac{0/49 q^2}{0/60 q^2 + \log_e(1 + q^2)}$$

^۱ Subgiant

^۲ Red Giant Branch

^۳ Asymptotic Giant Branch

سؤال ۹ (۳۰ نمره)

از یک نقطه روی کره شروع به حرکت می‌کنیم، بعد از طی کردن کمانی به طول θ ، به اندازه‌ی θ به سمت راست می‌چرخیم و مجدداً طول θ را طی می‌کنیم. اگر پس از n بار تکرار کردن این عمل، دوباره به نقطه‌ی اولیه برگردیم، رابطه‌ی θ با n را به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس استفاده

کنید مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی تصحیح

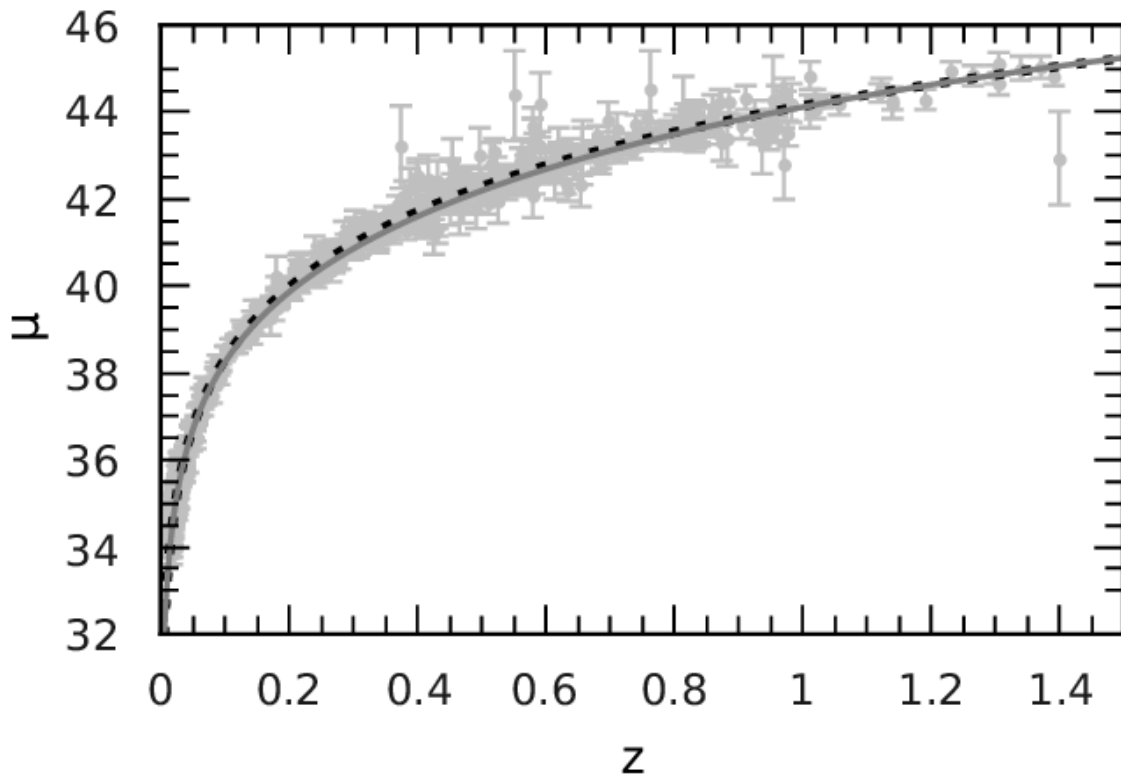
سؤال ۱۰ (۳۵ نمره)

کهکشان HDF4-474 یک کهکشان مارپیچی با قرمزگرایی هابلی ۱/۱ است و به صورت لبه-نما^۱ دیده می‌شود. داده‌های خام زیر توسط رصدخانه‌ی فضایی EHR با طیفسنجی از ابرهای هیدروژنی این کهکشان به دست آمده است. اثر حرکت ماهواره بر داده‌ها تصحیح شده است.

جدول ۲

قرمزگرایی	فاصله‌ی زاویه‌ای از مرکز (ثانیه‌ی قوسی)	#
۱/۱۰۲۳۳۱	۰/۰۴۸	۱
۱/۱۰۲۵۸۳	۰/۱۹۲	۲
۱/۱۰۲۸۶۳	۰/۳۲۴	۳
۱/۱۰۲۹۷۵	۰/۴۵۶	۴
۱/۱۰۳۰۳۸	۰/۸۶۳	۵
۱/۱۰۳۰۰۳	۱/۲۱۱	۶
۱/۱۰۰۹۱۰	۱/۴۳۹	۷
۱/۱۰۳۰۱۷	۱/۸۸۳	۸
۱/۱۰۰۹۲۴	۲/۴۳۴	۹
۱/۱۰۰۸۹۶	۳/۲۸۶	۱۰

منحنی دوران کهکشان HDF4-474 (سرعت دوران بر حسب فاصله از مرکز کهکشان) را در پاسخنامه (شکل ۷) رسم کنید.

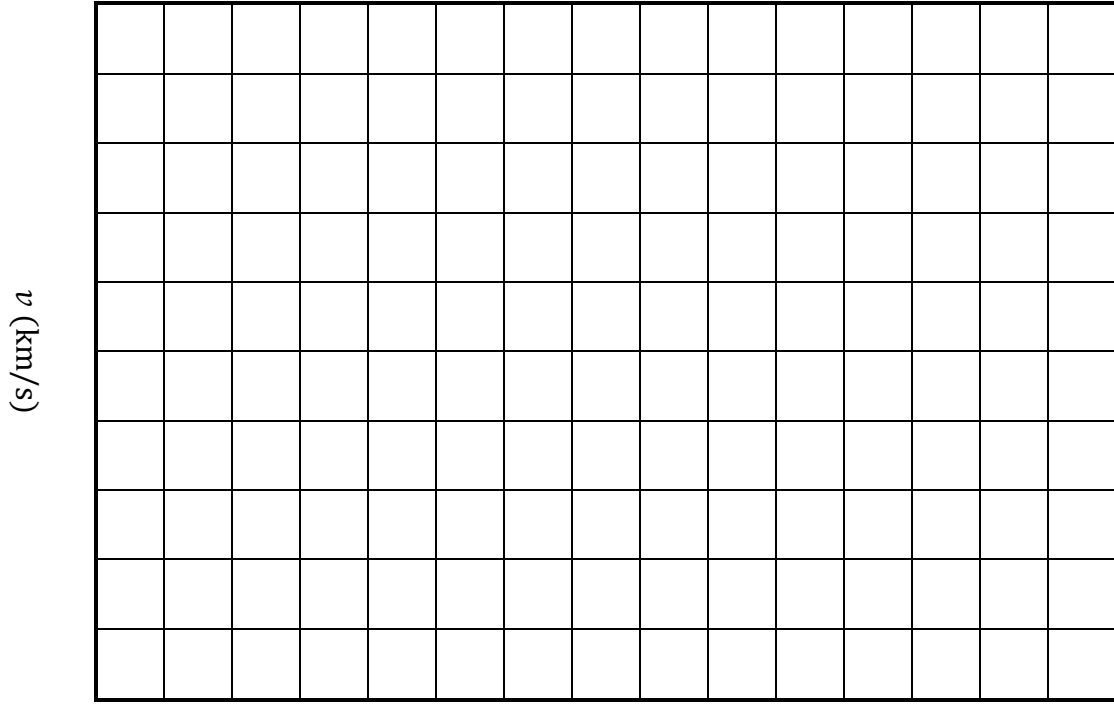


شکل ۶- نمودار مدول فاصله ($\mu = m - M$) بر حسب قرمزگرایی (Z) برای مدل استاندارد کیهان‌شناسی (منحنی خط‌چین)

چرک نویس استفاده کنید مطالب این

این شکل جزء پاسخ سوال ۱۰ می باشد.

منحنی دوران کهکشان HDF4-474



R (kpc)

شکل ۷

به نام یکتا سر در کمال



پانزدهمین دوره ی المپیاد نجوم و اختر فیزیک

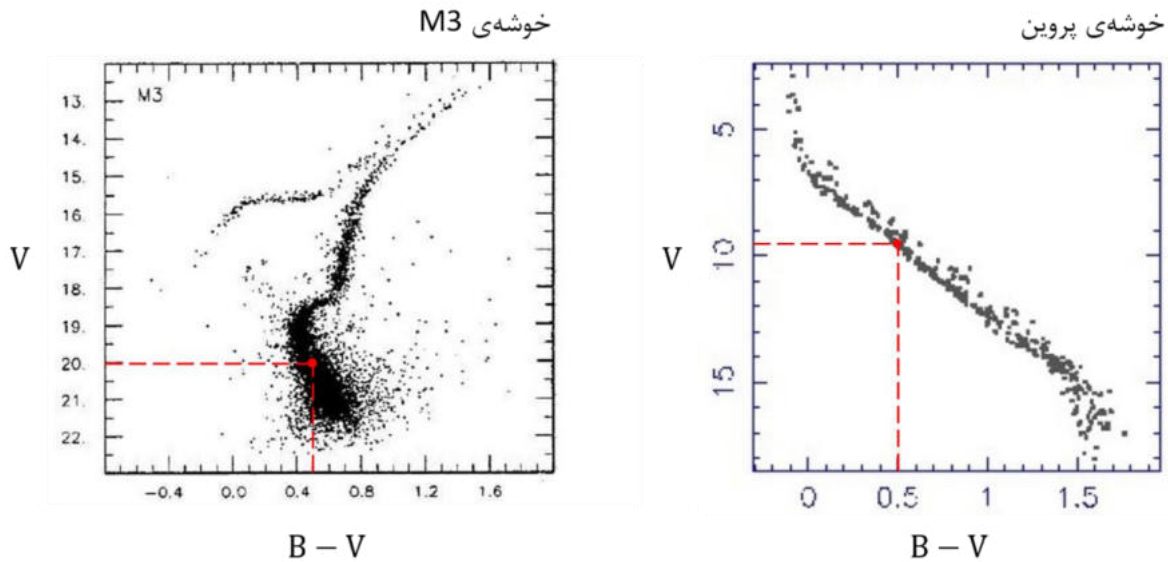
پاسخ نامه ی تشریحی آزمون مرحله ۲

۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۸ (ساعت ۱۴:۰۰ تا ۱۷:۳۰)

ممکن است روش های درست دیگری نیز برای حل این سؤالات وجود داشته باشد.

سؤال ۱ (۱۰ نمره)

الف) درخشندگی ستارگان رشته‌ی اصلی با $B - V = 0.5$ برابر است. بنابراین:

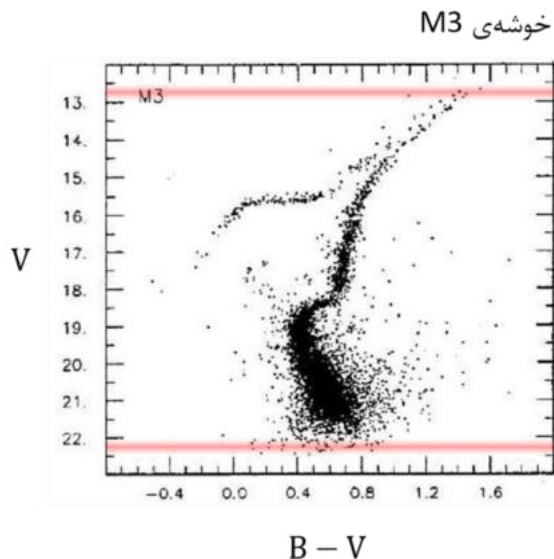


شکل ۱

$$V_{M3} - V_{Pl} = 2.5 \log \left(\frac{d_{M3}}{d_{Pl}} \right)^2 ; \quad V_{M3} = 20.0 \quad , \quad V_{Pl} = 9.5$$

$$\Rightarrow \frac{d_{M3}}{d_{Pl}} = 125$$

ب) با استفاده از نمودار خوشه‌ی M3، اختلاف قدر ظاهری بالاترین ستارگان نمودار و پایین‌ترین ستارگان نمودار را به دست می‌آوریم. با توجه به این که فاصله‌ی این ستارگان برابر است:



$$\Delta V = -2.5 \log \frac{L_{min}}{L_{max}} ; \quad \Delta V \approx 9.5$$

$$\Rightarrow \frac{L_{max}}{L_{min}} = 6300$$

شکل ۲

سؤال ۲ (۱۰ نمره)

الف) از رابطه‌ی توان تفکیک استفاده می‌کنیم.

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D_{\text{eff}}} \quad ; \quad \lambda = 10 \text{ cm} \quad , \quad D_{\text{eff}} = 36 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 3.39 \times 10^{-6} \text{ rad} = 0.70''}$$

ب)

$$\frac{\lambda}{D_{\text{eff}}} = \frac{\lambda_V}{D} \Rightarrow \boxed{D = 19.8 \text{ cm}}$$

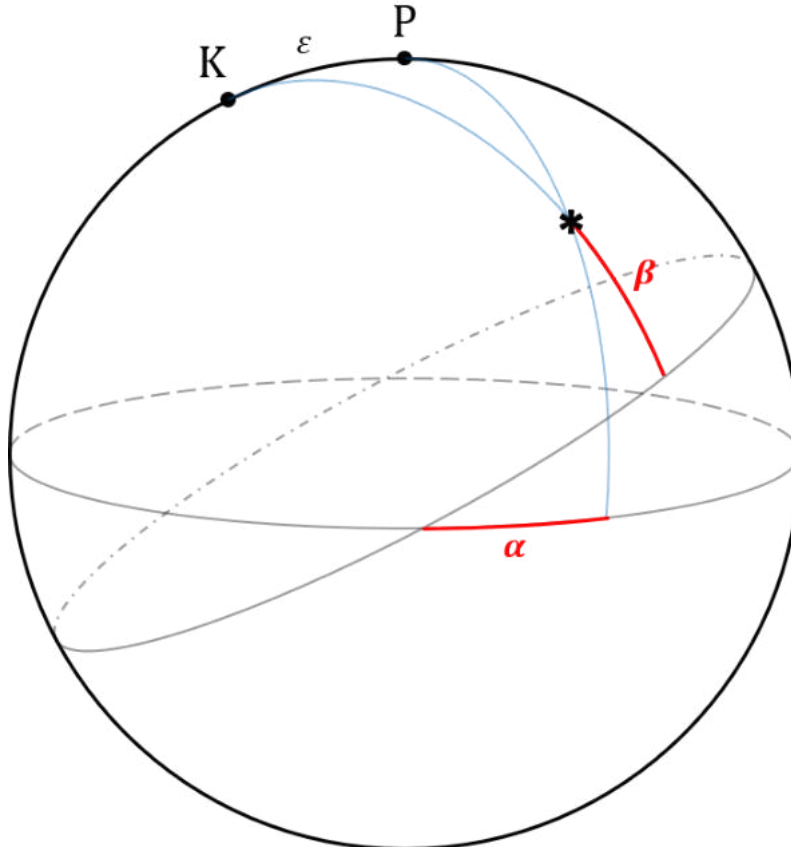
ج) باید مساحت تصویر مربعی به ضلع ۱۰ دقیقه‌ی قوسی در صفحه‌ی کانونی تلسکوپ قسمت «ب» را به دست آوریم. با فرض $\theta \ll 1$:

$$s \approx F\theta \quad ; \quad F = 200 \text{ cm} \quad , \quad \theta = 10' \quad \Rightarrow \quad s = 0.58 \text{ cm}$$

$$A = s^2 \Rightarrow \boxed{A = 0.34 \text{ cm}^2}$$

سؤال ۳ (۱۵ نمره)

شکل زیر، نمونه‌ای از نقطه‌ای که بعد آن با عرض دایره البروجی‌اش برابر است را نشان می‌دهد.



شکل ۳

با جابه‌جا کردن این نقطه بر روی کره‌ی سماوی با حفظ شرط فوق، متوجه می‌شویم که عرض دایره البروجی چنین نقطه‌ای نمی‌تواند بیشتر از $90^\circ - \varepsilon$ باشد. بنابراین:

$$0 \leq \beta \leq 66.6$$

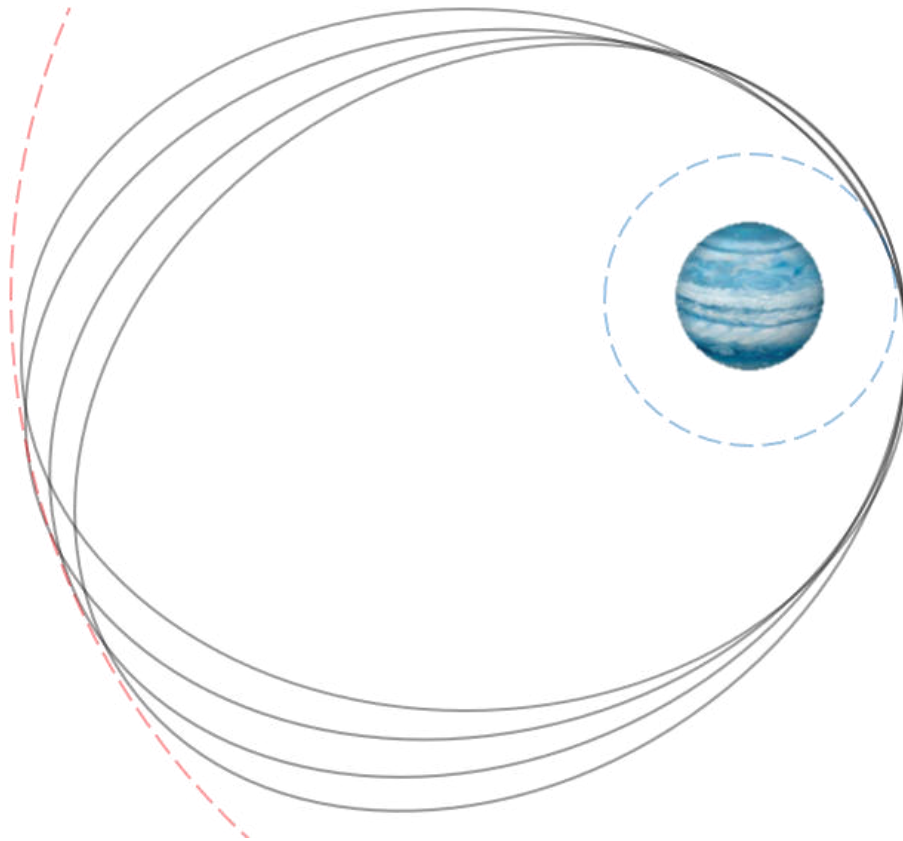
در صورتی که بعد از صفر تا 360 درجه تغییر کند:

$$-66.6 \leq \beta \leq 66.6$$

در صورتی که بعد از 180 تا 180 درجه تغییر کند:

سؤال ۴ (۱۵ نمره)

ذرات تشکیل دهنده‌ی حلقه، همگی در مدارهای بیضوی با شعاع حضیض ۶ برابر شعاع مشتری و شعاع اوج ۱۰ برابر شعاع مشتری به دور سیاره‌ی مرکزی در حال گردش هستند (مطابق شکل).



شکل ۴ (برای ایجاد شهود بهتر، شکل با مقیاس متفاوتی رسم شده است).

نیم قطر اطول مدار ذرات حلقه به دست می‌آید:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 8 R_j$$

با استفاده از قانون سوم کپلر:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow M = 3.47 \times 10^{27} \text{ kg} \Rightarrow \boxed{M = 1.83 M_j}$$

سؤال ۵ (۲۰ نمره)

با توجه به شکل:

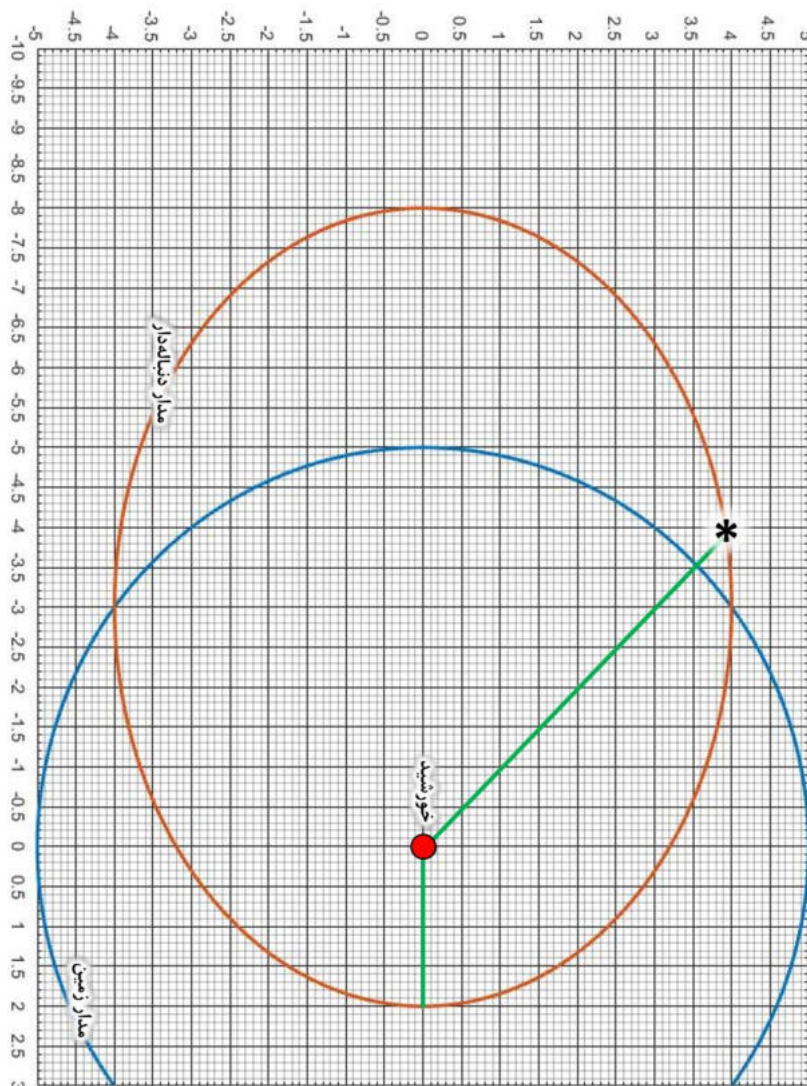
$$a = 1 \text{ AU} \quad , \quad e = 0.6$$

بازه‌ی زمانی مورد نظر (نیمه شب اول فروردین تا نیمه شب هفتم خرداد) برابر با ۶۸ روز است. با استفاده از معادله‌ی کپلر می‌توان زاویه‌ی آنومالی خروج از مرکزی را محاسبه کرد:

$$\frac{2\pi}{T} t = E - e \sin E \Rightarrow E = 1.76 \text{ rad} = 101^\circ$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 135^\circ}$$

مکان دنباله‌دار در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۵

سؤال ۶ (۲۵ نمره)

الف) قضیه‌ی ویرپال، شرایط انرژی یک مجموعه‌ی دارای تعادل دینامیکی را توصیف می‌کند:

$$2K + U = 0$$

اگر تعادل دینامیکی به هم بخورد و مجموعه شروع به رمبش کند:

$$2K + U < 0 \quad ; \quad K = \frac{3}{2} \frac{M}{\bar{m}} kT \quad , \quad U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{kT}{\bar{m}} < \frac{1}{5} \frac{GM}{R} \quad ; \quad R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \frac{5kT}{G\bar{m}} < M \left(\frac{4\pi\rho}{3M} \right)^{1/3} \Rightarrow M > \left(\frac{5kT}{G\bar{m}} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

به عبارت

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\bar{m}} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

که حداقل جرم یک مجموعه‌ی در حال رمبش با جرم متوسط \bar{m} ، دمای T و چگالی ρ است، جرم جینز گفته می‌شود. با فرض این که ذرات سازنده‌ی کیهان هیدروژن هستند:

$$\bar{m} = m_p$$

نکته: به دلیل رخ دادن هم‌جوشی مه‌بانگ^۱، در لحظه‌ی بازترکیب، ماده‌ی باریونی کیهان شامل حداقل ۲۴٪ هلیوم بوده است. می‌توان با در نظر گرفتن این واقعیت، مقدار دقیق‌تری برای \bar{m} به دست آورد.

دمای فوتون‌ها در زمان بازترکیب را از رابطه‌ی دمای تابش و ضریب مقیاس به دست می‌آوریم.

$$T = \frac{T_0}{a} \Rightarrow T = T_0(1+z) \quad ; \quad z = 1100$$

برای ماده‌ی باریونی، تابعیت چگالی و ضریب مقیاس به صورت زیر است ($\Omega_{b,0} = 2.273 \times 10^{-2}$):

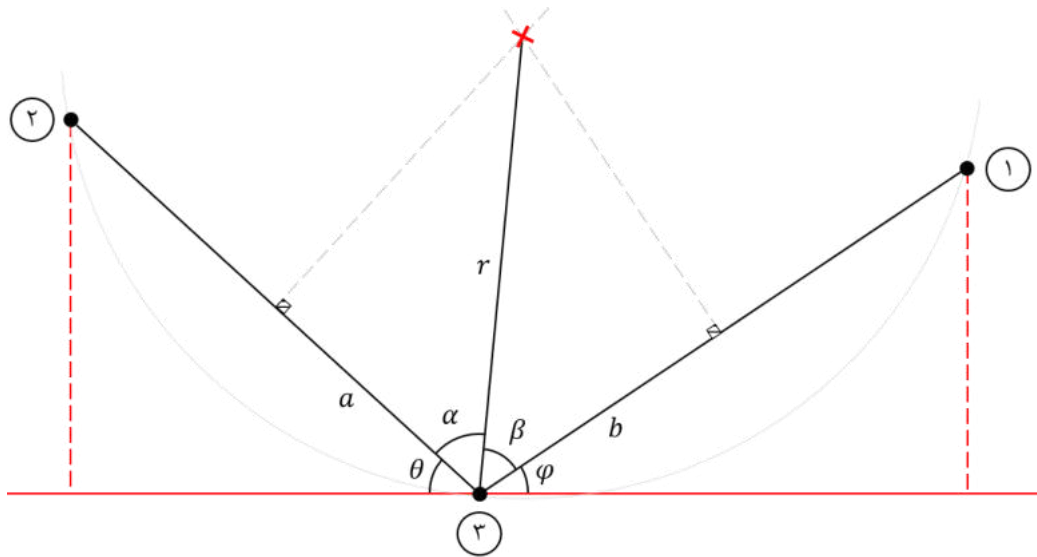
$$\rho = \rho_{b,0} a^{-3} = \rho_{b,0} (1+z)^3 \quad , \quad \rho_{b,0} = \Omega_{b,0} \rho_{c,0} = \Omega_{b,0} \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_J = 2.26 \times 10^{36} \text{ kg} = 1.13 \times 10^6 M_\odot}$$

ب) خوشه‌ی ستاره‌ای

سؤال ۷ (۳۰ نمره)

این ستاره به دلیل اختلاف منظر ناشی از حرکت انتقالی زمین، روی یک دایره جابه‌جا می‌شود. شعاع این دایره برابر با زاویه‌ی اختلاف منظر است. با توجه به کوچک بودن جدایی زاویه‌ای ستاره‌ها، می‌توانیم از هندسه‌ی مسطحه استفاده کنیم.



شکل ۶

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\delta_2 - \delta_3}{(\alpha_3 - \alpha_2) \cos \delta_3} \right] , \quad \varphi = \tan^{-1} \left[\frac{\delta_1 - \delta_3}{(\alpha_1 - \alpha_3) \cos \delta_3} \right]$$

$$\theta = 67^\circ.49 \quad , \quad \varphi = 60^\circ.39$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{(\delta_2 - \delta_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \cos^2 \delta_3} = 1^\circ.2989 \times 10^{-5}$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{(\delta_1 - \delta_3)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \cos^2 \delta_3} = 1^\circ.2077 \times 10^{-5}$$

$$(I): \cos \alpha = \frac{a}{r} \quad (II): \cos \beta = \frac{b}{r} \quad ; \quad \beta = 180 - \eta - \alpha \quad , \quad \eta = \theta + \varphi$$

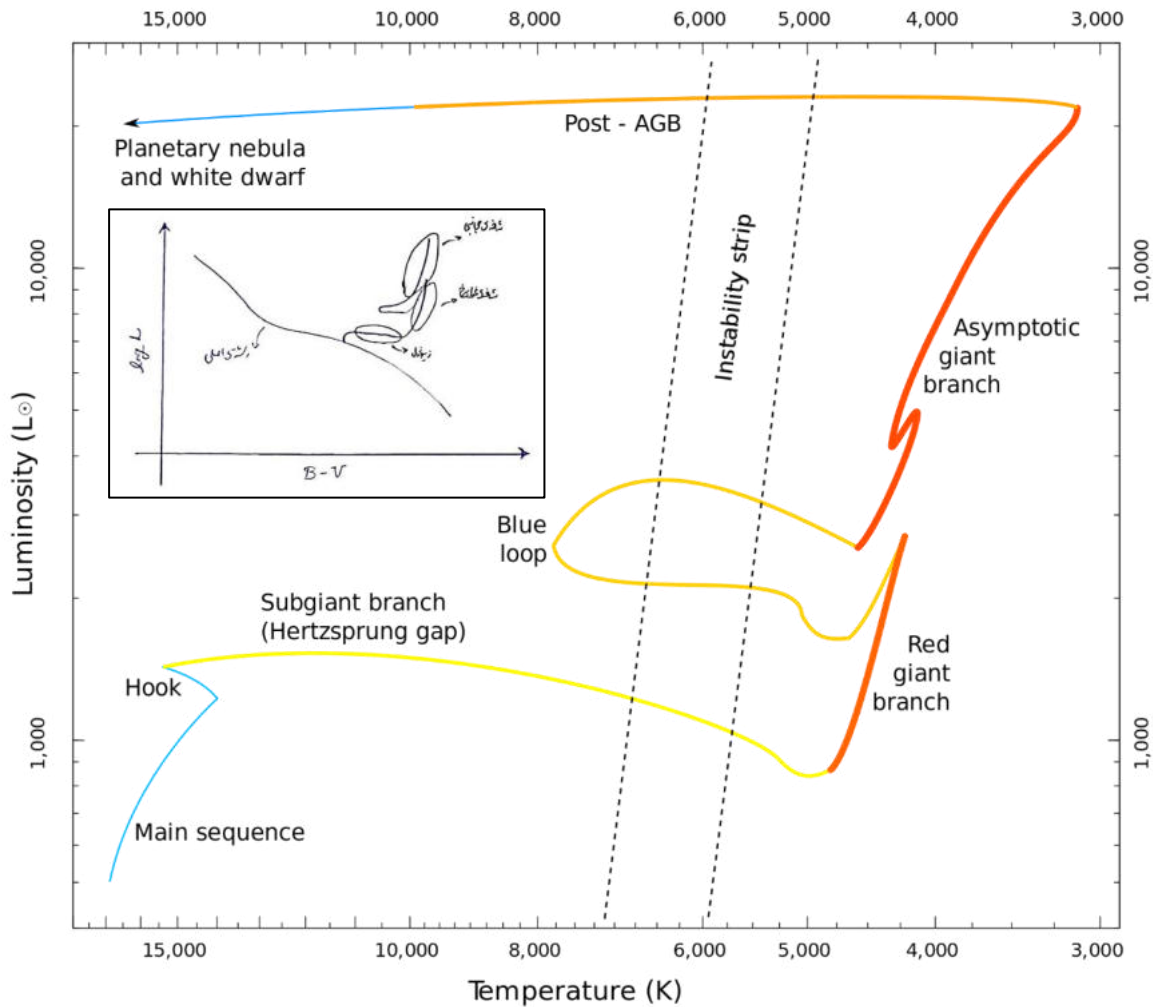
$$\frac{(I)}{(II)} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{-\cos(\eta + \alpha)} = \frac{a}{b} \Rightarrow \cos \eta \cos \alpha - \sin \eta \sin \alpha = -\frac{b}{a} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \left(\cos \eta + \frac{b}{a} \right) \cos \alpha = \sin \eta \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \eta + b/a}{\sin \eta} \right)$$

$$\Rightarrow r = 1^\circ.3987 \times 10^{-5} \Rightarrow d = \frac{1}{r} = 19.9 \text{ pc} \Rightarrow \boxed{d = 64.7 \text{ ly}}$$

سؤال ۸ (۲۵ نمره)

الف) شکل زیر، مسیر تحولی یک ستاره‌ی $5 M_{\odot}$ را نشان می‌دهد که مراحل زیرغول^۱، شاخه‌ی غول سرخ^۲ و شاخه‌ی غول مجانبی^۳ بر روی آن مشخص شده‌اند. مسیر تقریبی نیز در کادر نشان داده شده است.



شکل ۷

ب) پارامترهای ارائه شده در صورت سؤال، عبارت‌اند از:

M_2 (جرم ستاره‌ی همدم)	M_{env} (جرم پوسته‌ی ستاره‌ی غول)	M_{core} (جرم هسته‌ی ستاره‌ی غول)	M_1 (جرم ستاره‌ی غول)
$0.5 M_{\odot}$	$1.8 M_{\odot}$	$0.6 M_{\odot}$	$2.4 M_{\odot}$

- Subgiant Branch ^۱
- Red Giant Branch ^۲
- Asymptotic Giant Branch ^۳

با توجه به صورت سؤال:

$$(*) \quad \frac{GM_1 M_{\text{env}}}{R} = \alpha_{\text{CE}}(E_i - E_f) \quad ; \quad \alpha_{\text{CE}} = 0.2$$

برای شروع مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک، لازم است ستاره‌ی غول لب روش خود را پر کند. پس شعاعش در این لحظه برابر با فاصله تا نقطه‌ی L_1 است.

$$R = R_{L,1} = a_i - R_{L,2} = a_i \left[1 - \frac{0.49 q^{2/3}}{0.60 q^{2/3} + \log_e(1 + q^{1/3})} \right] = 0.75 a_i$$

می‌دانیم انرژی مداری از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a}$$

<p>در اواخر مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک، ستاره‌ی همدم و هسته‌ی ستاره‌ی غول در حال گردش به دور یک دیگر هستند.</p>	<p>در ابتدای مرحله‌ی پوسته‌ی مشترک، ستاره‌ی همدم تقریباً بیرون از ستاره‌ی غول قرار دارد.</p>
--	--

$$E_f = -\frac{GM_{\text{core}} M_2}{2a_f}$$

$$E_i = -\frac{GM_1 M_2}{2a_i}$$

با جایگذاری در معادله‌ی (*) خواهیم داشت:

$$\frac{GM_1 M_{\text{env}}}{0.75 a_i} = 0.2 \left[-\frac{GM_1 M_2}{2a_i} + \frac{GM_{\text{core}} M_2}{2a_f} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_i} \left[\frac{GM_1 M_{\text{env}}}{0.75} + \frac{GM_1 M_2}{10} \right] = \frac{GM_{\text{core}} M_2}{10 a_f} \Rightarrow a_f = \frac{M_{\text{core}} M_2}{\frac{M_1 M_{\text{env}}}{0.075} + M_1 M_2} a_i$$

$$(\times) \quad a_f = \frac{a_i}{196}$$

با داشتن مقدار a_i می‌توانیم a_f را به دست آوریم. برای ارتباط دادن نیم‌قطر اطول و دوره‌ی تناوب از قانون سوم کپلر استفاده می‌کنیم:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

ابتدا a_i را محاسبه می کنیم:

$$P_i^2 = \frac{4\pi^2 a_i^3}{G(M_1 + M_2)} \quad ; \quad P_i = 550 \text{ day}$$

$$\Rightarrow a_i = 2.80 \times 10^{11} \text{ m}$$

با جایگذاری در معادله ی (×) خواهیم داشت:

$$a_f = 1.43 \times 10^9 \text{ m}$$

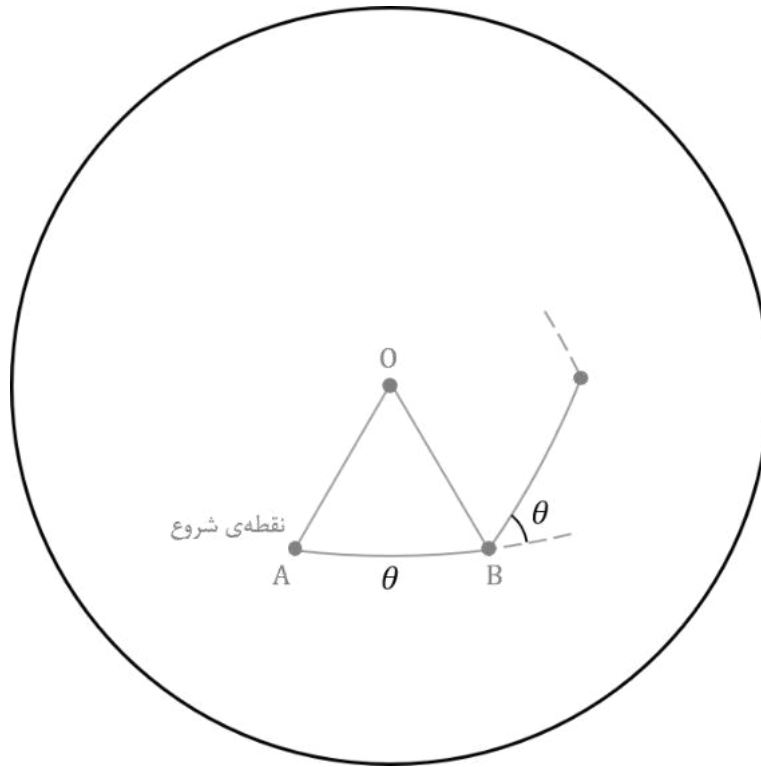
با استفاده از قانون سوم کپلر خواهیم داشت:

$$P_f^2 = \frac{4\pi^2 a_f^3}{G(M_{\text{core}} + M_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_f = 2.81 \times 10^4 \text{ s} = 7.81 \text{ h}}$$

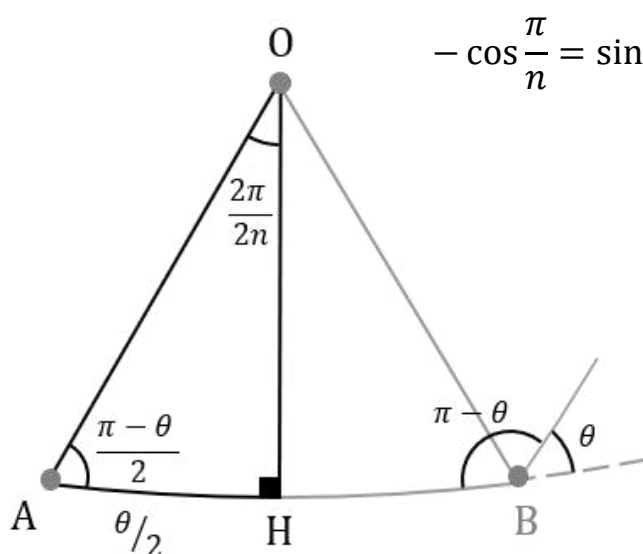
سؤال ۹ (۳۰ نمره)

شکل؟ مسیر حرکت را روی کره نشان می‌دهد. O مرکز چند ضلعی منتظم است.



شکل ۸

عمود منصف ضلع AB را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد را H می‌نامیم. طبق رابطه‌ی کسینوس در مثلث قطبی OAH:



$$-\cos \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\theta}{2} \cos 90^\circ - \cos \frac{\theta}{2} \sin 90^\circ \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{n} = \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 2 \cos^{-1} \left[\sqrt{\cos \frac{\pi}{n}} \right]$$

شکل ۹

سؤال ۱۰ (۳۵ نمره)

محاسبه ی فاصله از مرکز کهکشان

برای تبدیل زاویه های داده شده به طول، از رابطه ی زیر استفاده می کنیم:

$$R = \theta d_A$$

R و θ به ترتیب، فاصله و جدایی زاویه ای از مرکز کهکشان هستند. d_A (فاصله ی قطر زاویه ای) از رابطه ی

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

به دست می آید. برای به دست آوردن فاصله ی درخندگی (d_L) از نمودار مدول فاصله کمک می گیریم:

$$\mu = 5 \log d_L - 5 \Rightarrow d_A = 1720 \text{ Mpc}$$

محاسبه ی سرعت خاصه

از رابطه ی ترکیب قرمزگرایی ها می دانیم:

$$1 + z_{tot} = (1 + z_H)(1 + z_p) \quad ; \quad z_H = 1.1$$

که در آن z_{tot} قرمزگرایی کل، z_H قرمزگرایی هابلی و z_p قرمزگرایی ناشی از حرکت خاصه است. با تصحیح

اثر انبساط هابلی می توانیم سرعت خاصه ی هر کدام از ابرهای هیدروژنی را بیابیم ($v_p = z_p C$):

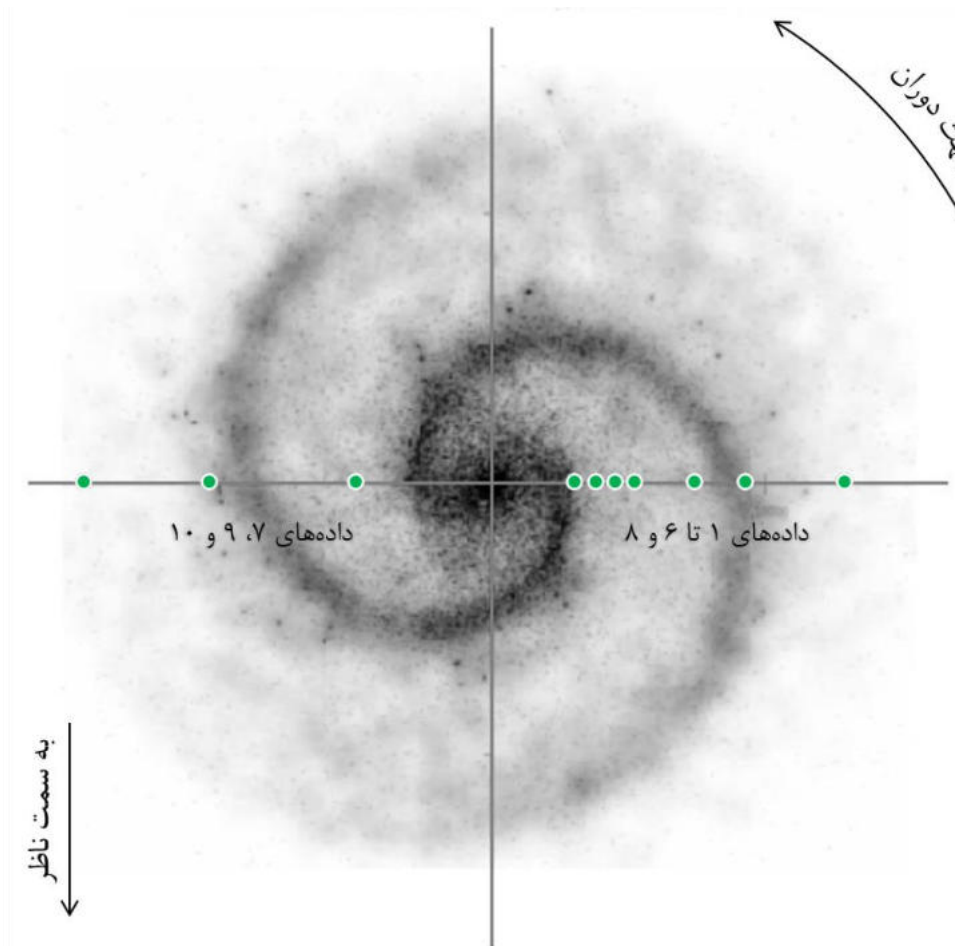
سرعت خاصه (km s^{-1})	فاصله از مرکز (kpc)	#
333	0.40	۱
369	1.60	۲
409	2.70	۳
425	3.80	۴
434	7.20	۵
429	10.10	۶
130	12.00	۷
431	15.70	۸
132	20.30	۹
128	27.40	۱۰

محاسبه و تصحیح سرعت شعاعی کهکشان

مقادیر سرعت خاصه شامل سرعت شعاعی کهکشان و سرعت دورانی هستند.

$$v_p = v_{rot} + v_r$$

برای رسم منحنی دوران، لازم است سرعت شعاعی کهکشان را به دست آوریم و از سرعت خاصه کم کنیم. با توجه به داده‌ها منحنی دوران از داده‌ی شماره‌ی ۵ به بعد، تخت شده است. سرعت دورانی این ابرها با هم برابر است، اما به دلیل این که در طرفین کهکشان قرار گرفته‌اند، تعدادی از نقاط به سمت ناظر حرکت می‌کنند و تعدادی از آن دور می‌شوند (مطابق شکل).



شکل ۱۰

سرعت شعاعی کهکشان با میانگین‌گیری از داده‌های ۵ تا ۱۰ به دست می‌آید.

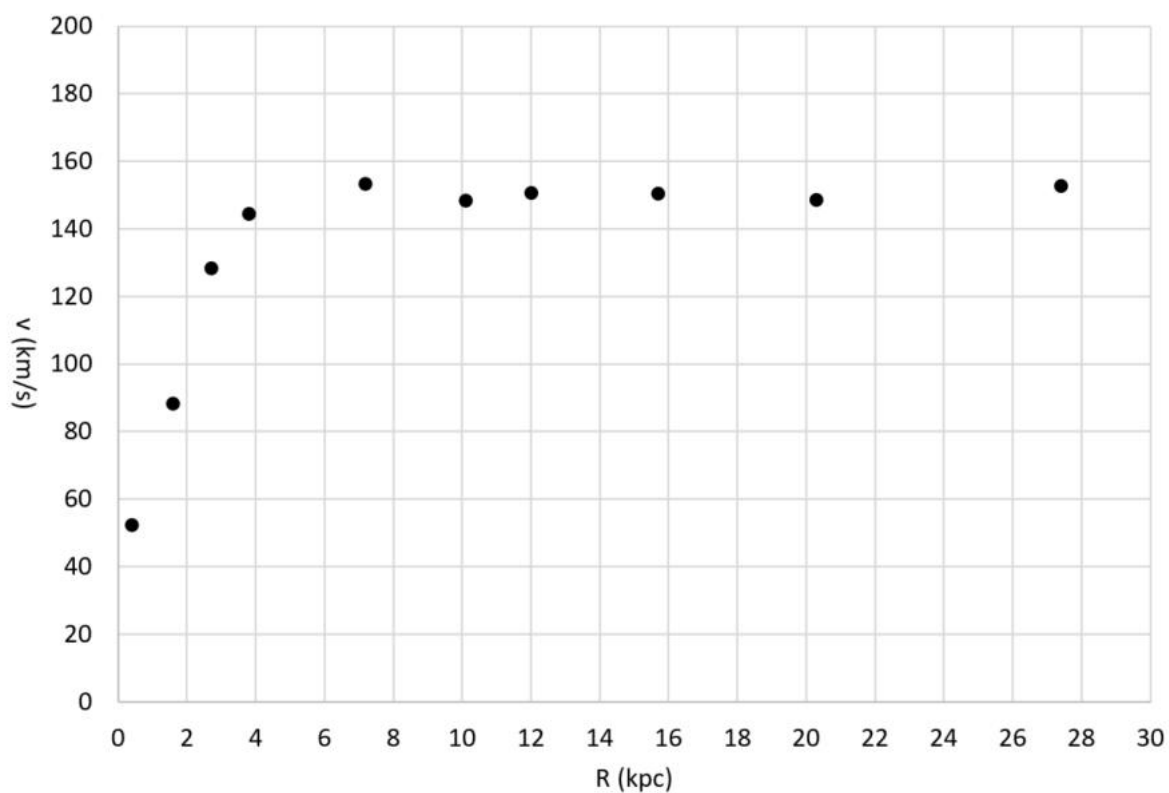
$$v_r = 281 \text{ km s}^{-1}$$

پاسخنامه ی تشریحی آزمون مرحله ۲ | صفحه ی ۱۵

در نهایت مقادیر سرعت دورانی بر حسب شعاع به دست می آید.

سرعت دورانی (km s^{-1})	فاصله ی از مرکز (kpc)	#
53	0.40	۱
89	1.60	۲
129	2.70	۳
145	3.80	۴
154	7.20	۵
149	10.10	۶
150	12.00	۷
151	15.70	۸
148	20.30	۹
152	27.40	۱۰

منحنی دوران کهکشان HDF4-474





جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهاى درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش پژوهان جوان



مرکز ملی پرورش استعدادهاى درخشان
و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «لام خمینی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۷ - ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

شماره سندلی

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب مجاز است

- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پانویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.
- علاوه بر نوشتن پاسخ تشریحی در دفترچه آزمون، وارد کردن پاسخ های نهایی در پاسخ برگ ارائه شده (صفحه ۱ الی ۶) الزامی است. در صورت عدم انتقال پاسخ های نهایی به پاسخ برگ، برگه شما تصحیح نخواهد شد.

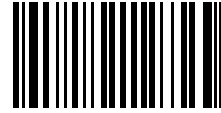
6.67×10^{-11}	$N m^2 kg^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
5.67×10^{-8}	$W m^{-2} K^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
7.56×10^{-16}	$J m^{-2} K^{-4}$	ثابت تابش	$a = \frac{4\sigma}{c}$
1.38×10^{-23}	$J K^{-1}$	ثابت بولتزمن	k_B
6.63×10^{-34}	$J.s$	ثابت پلانک	h
۳۶۵٫۲۵	day	سال	$year$
9.1×10^{-31}	kg	جرم الکترون	m_e
1.67×10^{-27}	kg	جرم اتم هیدروژن	m_H
3.0×10^8	m/s	سرعت نور	c
3.09×10^{16}	m	پارسک	pc
1.5×10^{11}	m	واحد نجومی	$r_{earth} = AU$
9.46×10^{15}	m	سال نوری	Ly
6.96×10^8	m	شعاع خورشید	R_{sun}
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید	M_{sun}
6.38×10^6	m	شعاع زمین	R_{earth}
5.97×10^{24}	kg	جرم زمین	M_{earth}
۵۰	AU	شعاع منظومه شمسی	$R_{solars sys}$
۰٫۰۸		ضریب کارایی چشم انسان	ϵ
۵۰	kpc	فاصله‌ی ابر ماژلانی بزرگ	R_{LMC}
۶۰	kpc	فاصله‌ی ابر ماژلانی کوچک	R_{SMC}
۰٫۰۷		ضریب بازتاب سطح ماه	A_{moon}
1.6×10^{-19}	J	الکترون ولت	eV
۴	Gpc	ابعاد کیهان	D_{cosmos}
۱۳٫۶	eV	انرژی حالت پایه اتم هیدروژن	$E.$
۶۸	$(km/s)/Mpc$	ثابت هابل	$H.$
1.37×10^3	$W m^{-2}$	ثابت خورشیدی	f_{sun}
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید	L_{sun}
۴٫۷۲		قدر مطلق خورشید	M_{sun}
-۲۶٫۷		قدر ظاهری خورشید	m_{sun}
۲۳٫۴۵	$Degree$	زاویه تمایل محور دوران زمین	
۶٫۵		حد قدری چشم انسان	
۶	mm	قطر مردمک چشم انسان	D_{pupil}
۱۵۹	$litr$	حجم یک بشکه	$Barrel$
5.5×10^3	kg/m^3	چگالی متوسط زمین	ρ_{earth}
1.6×10^{-19}	C	بار الکترون	e

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



علاوه بر نوشتن پاسخ تشریحی در دفترچه آزمون وارد کردن پاسخ های نهایی در پاسخ برگ ارائه شده (صفحه ۱ الی ۶) الزامی است. در صورت عدم انتقال پاسخ های نهایی به پاسخ برگ، برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۱- سوال اول:

الف) شکل شماتیک	ب)	$\Delta g/g =$
	ج)	$\Delta g/g =$
	د)	$\Delta g/g =$

۲- سوال دوم :

الف) L_1, L_2, L_3		
الف) L_4, L_5		
ب) نسبت به فاصله زمین تا خورشید:		ب) فاصله بر حسب متر:

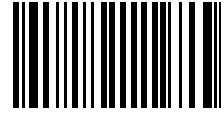
ج)	$L_1:$
ج)	$L_2:$
ج)	$L_3:$

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۳- سوال سوم:

(الف)	
(ب)	$m =$
(ج)	$L_{\text{star}} / L_{\text{sun}} =$
(د)	$M_{\text{star}} / M_{\text{sun}} =$

۴- سوال چهارم:

(الف) واحد اندازه گیری α در دستگاه SI	$[\alpha] =$
(ب) بیشترین طول موج	$\lambda =$
(ج) شعاع ابر H II	$R_{\text{H II}} =$

رده طیفی ستاره مرکزی	$N (s^{-1})$	$R_{\text{H II}} (pc)$	فاصله (pc)
O5V	3×10^{49}	(د)	(ه)
B0V	4×10^{46}		
G2V	1×10^{39}		

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۵- سوال پنجم:

الف) کمترین طول سایه
ب) بیشترین طول سایه

ج) میل خورشید a =	ب) عرض جغرافیایی ناظر $\Phi =$
د) طول سایه: L =	

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۶- سوال ششم:

(الف)	$R_{hm} / R_{hl} =$
(ب) رابطه:	$R_{hm} / R_{hl} =$
(ب) مقدار:	$R_{hm} / R_{hl} =$
(ج) توجیه نتایج بالا در ۳ سطر	

۷- سوال هفتم:

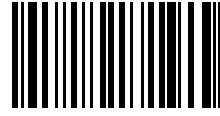
رابطه	مقدار
$r =$	$r =$

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۸- سوال هشتم:

$E_{tot} =$	(الف)
$E_1 =$	$E_1/E_{tot}(\%) =$ (ب)
$E_r =$	$E_r/E_{tot}(\%) =$ (ج)
$E_r =$	$E_r/E_{tot}(\%) =$ (د)
$N_v =$	(ه)
$n =$	(و)

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۹- سوال نهم:

الف)	$r =$
ب)	$(M/L)(r) =$
ج)	$(M/L) =$

۱۰- سوال دهم:

الف)	$m_p =$
ب)	$a_{m1} =$ $a_{m2} =$
ج)	$r =$ $V_{cm} =$

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

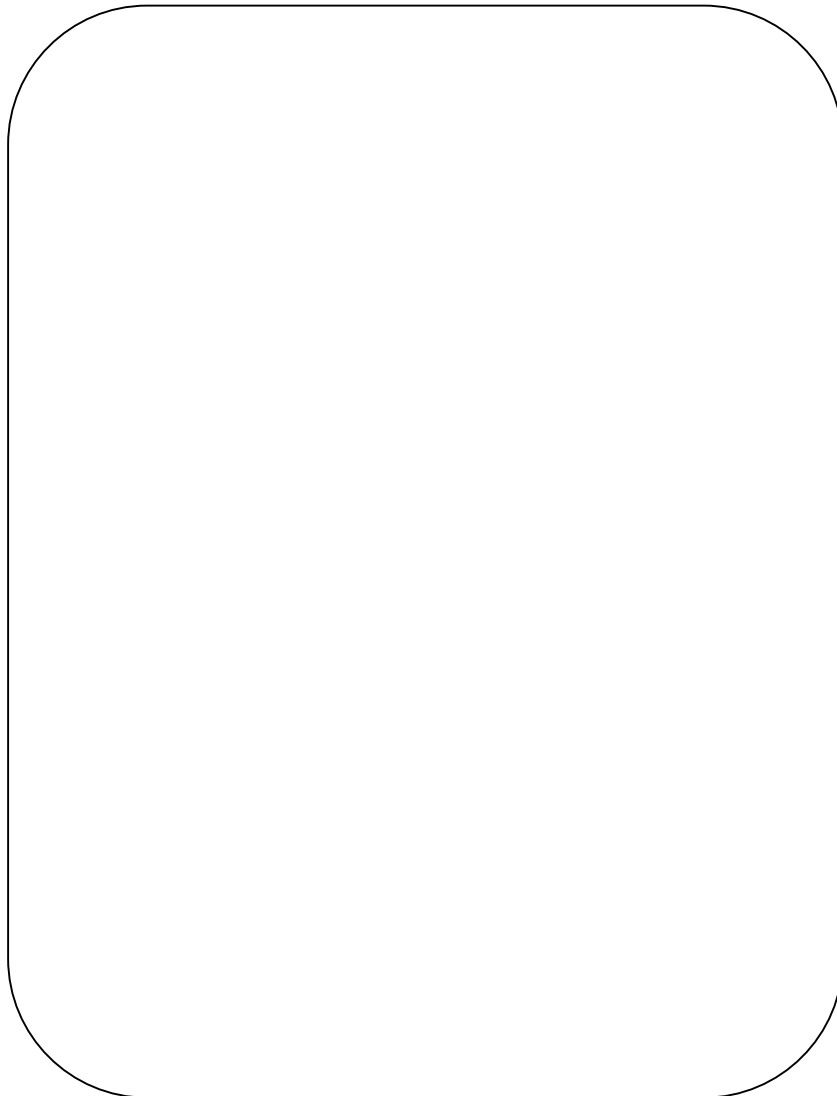
نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



- ۱- برای حجم یک حوزه نفتی در جنوب کشور ۴۰ میلیون بشکه نفت تخمین زده می شود. این حوزه نفتی در عمق یک کیلومتری ($d=1 \text{ km}$) از سطح زمین قرار گرفته است.
- یکی از روش هایی که به اکتشاف منابع نفتی منجر می شود اندازه گیری شتاب گرانش است. چگالی نفت خام برای نفت سبک و سنگین به ترتیب ۸۷۰ و ۹۲۰ کیلوگرم بر مترمکعب است.
- الف) شکل شماتیکی از مسئله ترسیم کنید. فرض کنید مخزن نفتی به صورت کره باشد.
- ب) تغییرات نسبی شتاب گرانش را برای نقطه نصب دکل نفتی به صورت پارامتری به دست آورید.
- ج) مقدار عددی تغییرات نسبی شتاب گرانش را محاسبه کنید.
- د) دقت در اندازه گیری شتاب گرانش دست کم چقدر باید باشد تا از اندازه گیری شتاب گرانش بتوانیم به سبک یا سنگین بودن نفت پی ببریم. (۲۰ نمره)



چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۲- پتانسیل گرانشی را در اطراف یک سامانه دوتایی (مثل خورشید (M) - زمین (m)) به فاصله d از یکدیگر را ترسیم می‌کنیم.

این سامانه با سرعت زاویه‌ای ω حول مرکز خود در حال دوران است. نقاط L_1 تا L_5 به نقاط لاگرانژ موسوم هستند. اگر جسم سومی با جرمی بسیار کوچکتر از این دو جرم $[m, M \ll \mu]$ در نقاط لاگرانژ قرار گیرد، موقعیت آن نسبت به جرم‌های m و M همواره ثابت خواهد ماند.

این نقاط مکان‌های مناسبی برای قرارگیری ماهواره‌های تحقیقاتی هستند. ماهواره تحقیقاتی SOHO در نقطه L_1 قرار گرفته و تلسکوپ فضایی جیمز وب JWST در نقطه L_2 نصب خواهد شد چرا که همواره در سایه زمین نسبت به خورشید قرار خواهد داشت.

الف) با توجه به شکل، مشخصه‌های نقاط لاگرانژ از دید تعادل و پایداری را در دو دسته (L_1, L_2, L_3) و (L_4, L_5) بنویسید.

ب) فاصله خورشید از مرکز جرم مشترک سیستم خورشید زمین را بر حسب متر محاسبه کرده و نسبت آن را به فاصله زمین تا خورشید به دست آورید.

ج) با یک تقریب خوب می‌توانیم فرض کنیم که مرکز جرم زمین-خورشید در مرکز خورشید قرار گرفته باشد. سه معادله برای محاسبه x_1 (فاصله نقطه L_1 از مرکز خورشید)، x_2 (فاصله نقطه L_2 از مرکز خورشید) و x_3 (فاصله نقطه L_3 از مرکز خورشید) بدست آورید که با حل آنها بتوان مقادیر فوق را محاسبه کرد. (۲۰ نمره)

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



- ۳- یک منجم آماتور می خواهد رصدهای خود را با دقت بیشتری ساماندهی کند. به یک سایت رصدی خوب (حد قدری ۶,۵) می رود. ضریب کارایی چشم انسان در حدود ۸٪ است. در همین شرایط از یک تلسکوپ ۸ اینچی (قطر شیئی ۲۰ سانتیمتر) و یک دوربین با ضریب کارایی ۹۰٪ برای تصویر برداری استفاده می کند و تصویر دریافتی را روی مونیتر لپ تاپ خود مشاهده می کند.
- الف) رابطه قدر ظاهری - قدر مطلق را با وجود خاموشی بنویسید.
- ب) قدر کم نورترین ستاره ای را که روی مونیتر لپ تاپ خود مشاهده می کند محاسبه کنید.
- ج) یکی از این کم نورترین ستاره ها در فاصله ۴ کیلوپارسکی از ما (لبه بالچ کهکشان) قرار گرفته است. ضریب خاموشی نیز ۱ قدر بر کیلوپارسک است. درخشندگی ستاره را بر حسب درخشندگی خورشید به دست آورید.
- د) اگر از رابطه $L \propto M^3$ استفاده کنیم، مقدار جرم ستاره را بر حسب جرم خورشید محاسبه کنید. (۲۵ نمره)

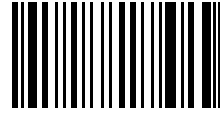
تصحیح نخواهد شد

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۴- ابرهای گازی یونیزه (H II) شمع های استاندارد برای اندازه گیری فاصله هستند. چرا که منطقه ای را به صورت کروی شکل در داخل یک ابر گازی تک اتمی یونیزه می کند. شعاع کره توسط کمیت های قابل رصد محاسبه می شود و از طرفی قطر زاویه ای این کره نیز بر حسب ثانیه قوس قابل اندازه گیری است. در ابرهای گازی تک اتمی مثل سحابی سر اسب یا سحابی اتا شاه تخته چنین پدیده ای دیده می شود. ستاره ای پر جرم و آبی رنگ فوتون های فرا بنفش قابل توجهی تولید می کنند که این فوتون ها قادر به یونیزاسیون اتم های هیدروژن موجود در ابر هستند. بنابراین توسط این فوتون های پر انرژی کسری از اتم ها یونیزه شده و الکترون های آزاد تولید می کنند. الکترون های آزاد شده برای باز ترکیب نیاز به برخورد با هیدروژن های یونیزه یا همان پروتون ها دارند. آهنگ باز ترکیب در واحد حجم با حاصل ضرب چگالی الکترونی (n_e) و چگالی پروتونی (n_p) متناسب است ($\text{Rate} = \alpha n_e n_p$)؛ α ضریب باز ترکیب است. تعداد فوتون های تابشی در واحد زمان از ستاره مرکزی که قادر به یونیزاسیون گاز هیدروژن موجود هستند برابر N است (اعداد مورد نیاز در جدول زیر موجود است):

الف) واحد اندازه گیری α را در دستگاه SI به دست آورید.

ب) بیشترین طول موج فوتون های لازم برای یونیزه کردن یک اتم هیدروژن از حالت پایه را محاسبه کنید.

ج) شعاع ابر H II ایجاد شده را بر حسب N ، n_e و α محاسبه کنید.

د) اگر $n_e = 10^7$ و $\alpha = 3 \times 10^{-19}$ هر دو در دستگاه SI باشند، شعاع ابر H II (R_{HII}) برای ستاره های مرکزی داده شده را محاسبه کنید.

ه) اگر قطر زاویه ای این ابرهای گازی در حدود یک ثانیه قوسی باشد فاصله این ابرهای گازی داده شده در قسمت د را محاسبه کنید. (۲۵ نمره)

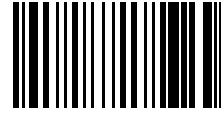
رده طیفی ستاره مرکزی	$N (s^{-1})$
O۵V	3×10^{49}
B۰V	4×10^{46}
G۲V	1×10^{39}

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

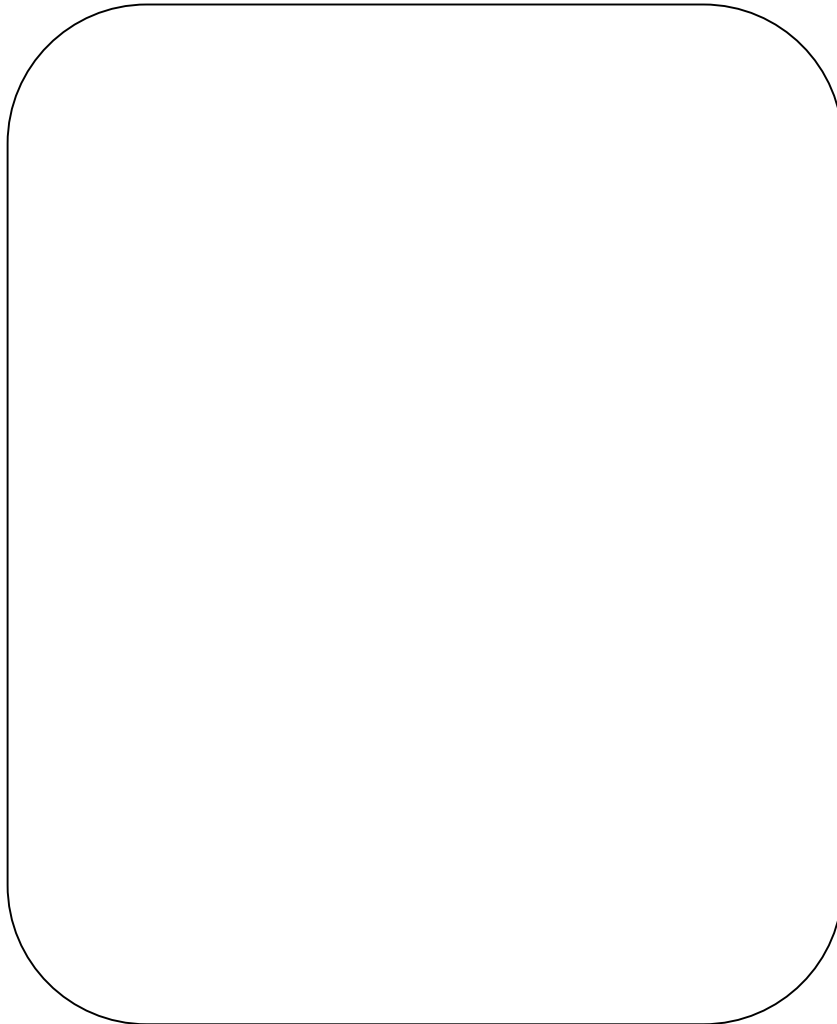
نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



- ۵- شخصی یک ساعت آفتابی با شاخصی به طول یکصد سانتیمتر می سازد. در یک روز مشخص وقتی انتهای سایه را روی سطح زمین علامت می زند، این علامت ها یک شکل بسته را تشکیل می دهد. کوتاهترین طول سایه ۱۷۳ سانتیمتر و بلندترین طول سایه ۵۶۷ سانتیمتر است. (۲۵ نمره)
- الف) ترکیب قرارگیری خورشید، زمین و شاخص را برای بیشترین و کمترین طول سایه ترسیم کنید.
- ب) عرض جغرافیایی ناظر را به دست آورید.
- ج) میل خورشید را به دست آورید.
- د) این پدیده در چه تاریخی یا تاریخ هایی رخ می دهد؟
- ه) ۶ ساعت پس از کوتاهترین سایه، طول سایه چند سانتیمتر خواهد بود؟



چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۶- در یک خوشه ستاره‌ای فرض کنید دو نوع ستاره با جرم‌های $m_1 = 1 M_{\text{sun}}$ و $m_2 = 10 M_{\text{sun}}$ وجود دارد و چگالی عددی آنها به این صورت با شعاع تغییر می‌کند $n_1(r) = n_{0,1}/r^2$ و $n_2(r) = n_{0,2}/r^2$. از رابطه $L \propto M^3$ استفاده کنید. شعاع‌های نیمه جرم (R_{hm}) و نیمه درخشندگی (R_{hl}) به شعاع‌هایی گفته میشود که به ترتیب نیمی از جرم خوشه و نیمی از درخشندگی خوشه در آن وجود داشته باشد.

الف) فرض کنید هر دو نوع ستاره تا شعاع R توزیع شده باشند. نسبت شعاع نیمه جرم به شعاع نیمه درخشندگی را به دست آورید.

ب) می‌دانیم در اثر تحول دینامیکی به مرور زمان ستاره‌های سنگین‌تر به نواحی درونی‌تر خوشه هدایت می‌شوند و تجمع آنها در نواحی مرکزی‌تر خوشه بیشتر می‌شود. به این پدیده جداسازی جرمی (mass segregation) گفته می‌شود.

پس از جداسازی جرمی، ستاره‌های m_2 تا شعاع $R/2$ توزیع شده و ستاره‌های m_1 در همان وضعیت قبلی باقی می‌مانند. رابطه‌ی نسبت شعاع نیمه جرم و شعاع نیمه روشنایی را برای این حالت به دست آورده و مقدار عددی این نسبت را به ازای $n_{0,1} = 10 n_{0,2}$ محاسبه کنید.

ج) با مقایسه حالت‌های الف و ب در حداکثر ۳ خط، نتایج بالا را توجیه کنید. (۲۵ نمره)

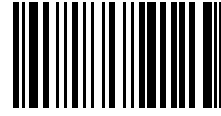
تصحیح نخواهد شد

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

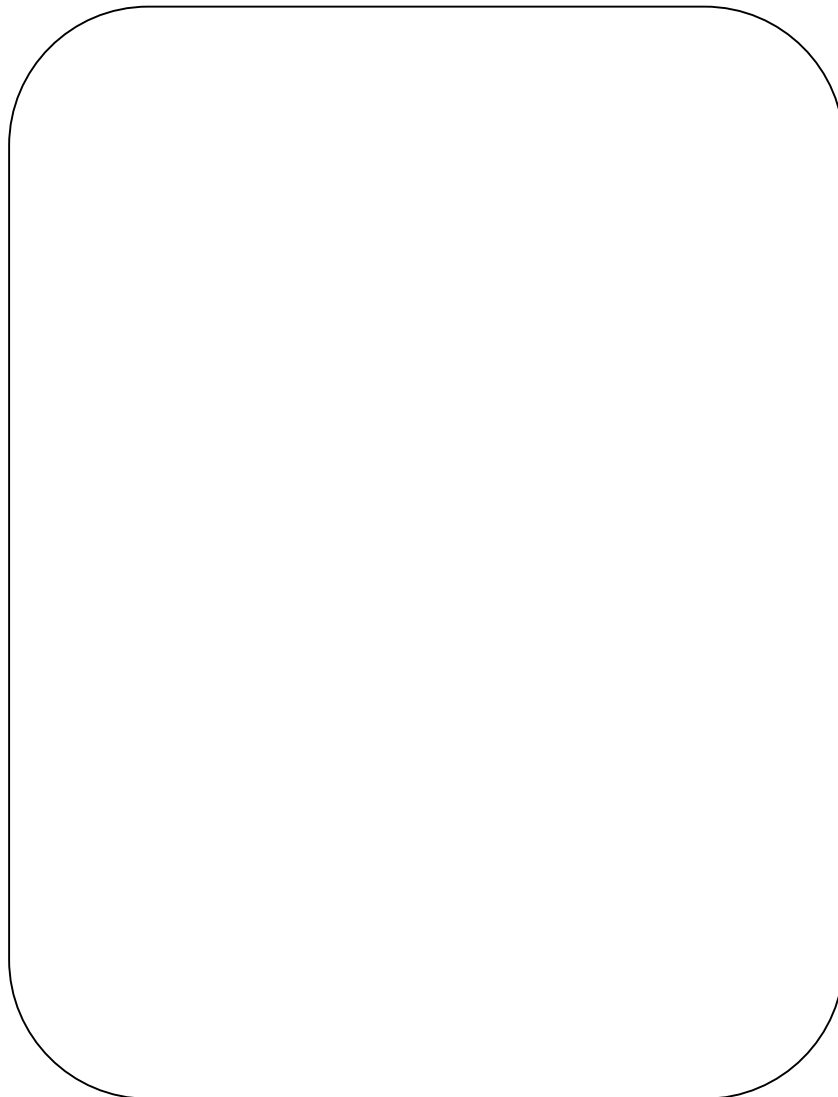
نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۷- سیارکی در صفحه دایره البروج در مداری دایروی به دور خورشید در حرکت است. سفینه ای بر روی این سیارک فرود می آید و با مرکز فرماندهی بر روی زمین با ارسال یک سیگنال رادیویی تماس می گیرد. سفینه هرگاه که سیگنالی از زمین دریافت می کند، فوراً به آن پاسخ می دهد. می دانیم که وقتی سیارک در وضعیت تربیع قرار می گیرد، فاصله زمانی بین ارسال سیگنال و دریافت مجدد آن توسط مرکز فرماندهی در مرکز زمین به مقدار $\Delta t = 775,6s$ طولانی تر از حالتی است که سیارک در وضعیت مقابل قرار گرفته باشد. فرض کنید مدار زمین به دور خورشید دایره ای به شعاع a_E است. شعاع مداری سیارک، a ، را بر حسب a_E ، c (سرعت نور) و Δt به دست آورده و مقدار عددی آن را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

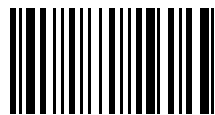


چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۸- رمبش شدید گرانشی ستاره‌ای به جرم $M=10 M_{\text{sun}}$ در مراحل پایانی عمر خود، منجر به یک انفجار شدید ابرنواختری می‌شود؛ به گونه‌ای که هسته ستاره که کوتوله‌ای سفیدی بوده، تبدیل به یک ستاره نوترونی می‌شود و مابقی ستاره به صورت یک پوش به بیرون پرتاب می‌شود. جرم کوتوله سفید تقریباً $M_C=1.4 M_{\text{sun}}$ شعاع آن به اندازه شعاع زمین و شعاع ستاره نوترونی تقریباً 20 km است.

الف) مقدار کل انرژی آزاد شده در فرایند رمبش گرانشی چند ژول است؟

انرژی آزاد شده به سه قسمت تبدیل می‌شود: انرژی جنبشی پوش (E_1)، انرژی تابشی (E_2) و انرژی نوترینوهای آزاد شده (E_3).

ب) در اثر انرژی آزادشده‌ی پوش، لایه اطراف هسته رمبند با سرعتی زیاد به بیرون پرتاب می‌شود. پهن شدن خطوط جذبی در طیف مشاهده شده ابرنواختر، برابر $\Delta\lambda/\lambda=0.0333$ است. انرژی جنبشی آزاد شده در ابرنواختر را بر حسب ژول به دست آورید. این انرژی چند درصد از انرژی کل آزاد شده در قسمت الف است؟

ج) در طول انفجار ابرنواختری که به مدت ۲ ماه به طول می‌انجامد، ابر نواختر با قدر مطلق متوسط $M_V = -1$ می‌درخشد. این مقدار انرژی را بر حسب ژول به دست آورید. چند درصد از انرژی آزاد شده ابرنواختر به شکل انرژی تابشی فوتونها است؟

د) مقدار انرژی آزاد شده توسط نوترینوها را بر حسب ژول به دست آورید. این انرژی تقریباً چند درصد از کل انرژی آزاد شده است؟

ه) اگر انرژی متوسط نوترینوهای آزاد شده برابر $E_\nu=5 \text{ MeV}$ باشد، تعداد نوترینوهای آزاد شده را به دست آورید.

و) اگر این ستاره در ابر ماژلانی بزرگ واقع شده باشد، تعداد نوترینوهای عبوری از سطح مقطع بدن هر یک از انسان‌ها (تقریباً 0.5 متر مربع) ناشی از این انفجار ابرنواختری چقدر خواهد بود؟ (۳۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویسی

استفاده کنید مطالب این قسمت

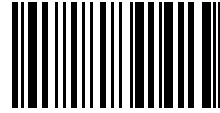
تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۹- یکی از روش های فاصله یابی کهکشان ها استفاده از تابع توزیع درخشندگی خوشه های ستاره ای درون آنهاست. تابع توزیع تعداد خوشه ها برحسب درخشندگی، یک تابع تپه ای شکل بوده، که بیشینه آن در قدر مطلق $M_v = -7.7$ است (یعنی بیشترین فراوانی خوشه ها مربوط به خوشه های کروی با قدر مطلق -7.7 می باشد). این موضوع برای همه کهکشان ها تقریباً یکسان است. اخیراً گروهی به رهبری پیتر وان داکوم در تاریخ ۱۶ فروردین ۱۳۹۷ مقاله ای در مجله نیچر به چاپ رسانده اند که در آن خوشه های ستاره ای موجود در کهکشان کوتوله NGC 1052-DF2 را مورد بررسی قرار داده اند. فاصله این کهکشان کوتوله از روش دیگری (روش نوسانات روشنایی سطحی) اندازه گیری شده و مقدار آن $D=20 \text{ Mpc}$ به دست آمده است. نکته عجیبی که گزارش شده این است که محل بیشینه تابع توزیع درخشندگی خوشه های کروی در این کهکشان بر خلاف همه کهکشان های دیگر در قدر مطلق $M_v = -9.1$ است.

الف) با توجه به مقدار قدر مطلق خوشه های کروی با بیشترین فراوانی ($M_v = -9.1$) فاصله کهکشان کوتوله NGC 1052-DF2 را به دست آورید.

وان داکوم و همکاران، مقدار جرم این کهکشان کوتوله را از روی سرعت خوشه های ستاره ای که درون کهکشان در حال چرخش هستند به دست آوردند. مقدار سرعت چرخشی در این کهکشان تقریباً $\sigma = 3.2 \text{ km/s}$ و مقدار جرم لازم برای ایجاد چنین سرعت هایی برابر $2 \times 10^8 M_{\text{sun}}$ محاسبه می شود. همچنین با توجه به درخشندگی اندازه گیری شده که برابر است با $L = 1 \times 10^8 L_{\text{sun}}$ نسبت جرم به درخشندگی این کهکشان برابر $2 (M/L = 2 M_{\text{sun}}/L_{\text{sun}})$ محاسبه شده است؛ و از آن نتیجه گرفته اند که این کهکشان فاقد ماده تاریک است.

ب) با توجه به این که جرم کهکشان بر اساس شعاع کهکشان و نیز سرعت حرکت ستاره ها و خوشه های ستاره ای در آن تعیین می شود، مقدار M/L را بر حسب فاصله ناظر از کهکشان D به دست آورید.

ج) اگر قبول کنیم که آنها در تخمین فاصله ذکر شده در قسمت الف مرتکب اشتباه شده باشند، مقدار M/L واقعی کهکشان را بر حسب $M_{\text{sun}}/L_{\text{sun}}$ به دست آورید. (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چکرک نویس

استفاده کنید مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۷

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۱۰- یک منظومه دوتایی رصد شده و میل مداری آن دقیقاً صفر است یعنی صفحه‌ی مدارشان عمود بر راستای دید ناظر است. همچنین مدار دو ستاره دایروی است. ستاره کم جرم تر (m_1) این منظومه یک ستاره خورشیدگون است. تلسکوپ در مدت زمان ۲ سال تصویر زیر را از رد دو ستاره در آسمان ثبت کرده است. داده برداری از دو ستاره هر ۱۰ روز یکبار انجام شده است. (محورهای تصویر، بر حسب ثانیه قوسی است) موقعیت دو ستاره در لحظه‌ی اول نیز نشان داده شده است. (۲۵ نمره)

الف) جرم ستاره بزرگتر چقدر است؟

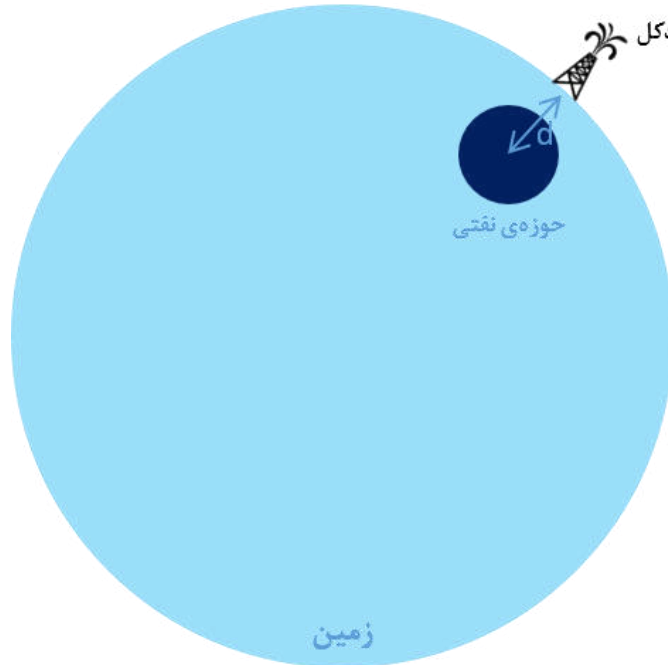
ب) شعاع مداری هر کدام از ستارگان چند است؟

ج) فاصله‌ی منظومه از ما و سرعت مرکز جرم سیستم چقدر است؟

پاسخنامه‌ی آزمون مرحله ۲ سال ۹۷

سؤال ۱

الف) شکل مسئله به صورت زیر است:



ب) تغییر شتاب گرانشی به خاطر این است که چگالی حوزه‌ی نفتی با چگالی زمین متفاوت است.

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} + \frac{G(\rho_o - \rho_{\oplus})V}{d^2}, \quad V = Nv$$

N تعداد بشکه‌های نفت و v حجم یک بشکه نفت است. در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{\frac{G(\rho_o - \rho_{\oplus})Nv}{d^2}}{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{(\rho_o - \rho_{\oplus})Nv}{M_{\oplus}} \left(\frac{R_{\oplus}}{d}\right)^2}$$

ج)

$$\boxed{\left. \frac{\Delta g}{g_0} \right|_{\text{سبک}} = -2.01 \times 10^{-7}}$$

$$\boxed{\left. \frac{\Delta g}{g_0} \right|_{\text{سنگین}} = -1.99 \times 10^{-7}}$$

د) دقت اندازه‌گیری (δg) باید برابر با اختلاف شتاب گرانش نفت سبک و نفت سنگین باشد:

$$\delta g = \left| \Delta g_{\text{سبک}} - \Delta g_{\text{سنگین}} \right| \Rightarrow \boxed{\delta g = 2.12 \times 10^{-8} \text{ m s}^{-2}} \ll 1$$

سؤال ۲

(الف)

نام نقاط	L_1, L_2, L_3	L_4, L_5
وضعیت تعادل	متعادل	متعادل
وضعیت پایداری	ناپایدار	پایدار [مشروط]

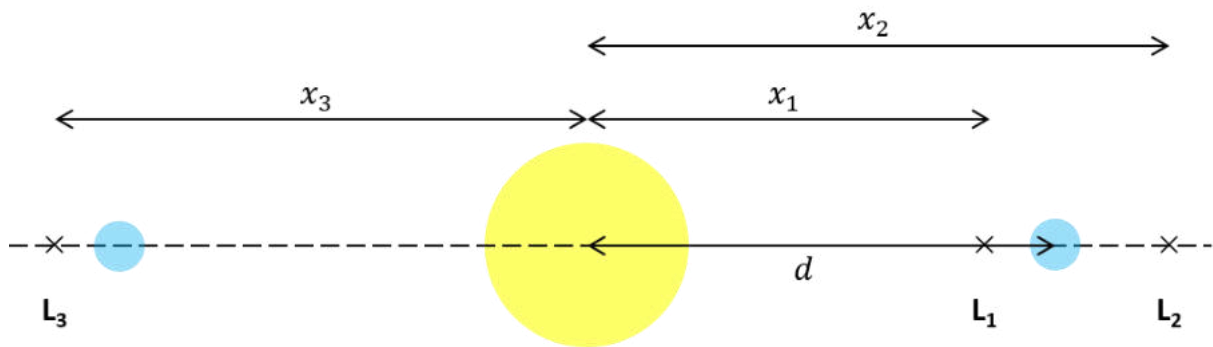
(ب) طبق رابطه‌ی مرکز جرم:

$$M_{\odot} r_{\odot} = M_{\oplus} r_{\oplus} \Rightarrow \frac{r_{\odot}}{d} = \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot} + M_{\oplus}} \Rightarrow \boxed{\frac{r_{\odot}}{d} = 3 \times 10^{-6}} \ll 1$$

$$\boxed{r_{\odot} = 4.50 \times 10^5 \text{ m}} \ll d$$

(ج) با توجه به قانون دوم نیوتون:

$$\frac{\Sigma F}{m} = r\omega^2$$



با توجه به شکل، خواهیم داشت:

$$\boxed{-\frac{GM_{\odot}}{x_1^2} + \frac{GM_{\oplus}}{(d-x_1)^2} = -x_1\omega^2} \quad \text{: نقطه‌ی } L_1$$

$$\boxed{-\frac{GM_{\odot}}{x_2^2} - \frac{GM_{\oplus}}{(x_2-d)^2} = -x_2\omega^2} \quad \text{: نقطه‌ی } L_2$$

$$\boxed{-\frac{GM_{\odot}}{x_3^2} - \frac{GM_{\oplus}}{(x_3+d)^2} = -x_3\omega^2} \quad \text{: نقطه‌ی } L_3$$

سؤال ۳

(الف)

$$\boxed{m - M = 5 \log d - 5 + A} \quad \text{یا} \quad \boxed{m - M = 5 \log d - 5 + ad}$$

ب) برای دیده شدن جسم باید توان دریافتی آن با توان حدی چشم برابر باشد

$$P = P_e \Rightarrow \alpha \frac{\pi D^2}{4} F = \alpha_e \frac{\pi D_e^2}{4} F_e \Rightarrow \frac{F}{F_e} = \frac{\alpha_e}{\alpha} \left(\frac{D_e}{D} \right)^2$$

α ضریب کارایی و D قطر است.

$$m - m_e = -2.5 \log \left(\frac{F}{F_e} \right) = -2.5 \log \left[\frac{\alpha_e}{\alpha} \left(\frac{D_e}{D} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 16.7}$$

ج) طبق رابطه‌ی قسمت الف:

$$M = m - 5 \log d + 5 - ad \quad , \quad a = 1 \text{ kpc}^{-1} \quad d = 4 \text{ kpc}$$

$$\Rightarrow M = -0.27$$

$$M - M_{sun} = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \Rightarrow \boxed{L = 100 L_{\odot}}$$

(د)

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \Rightarrow \boxed{M = 4.6 M_{\odot}}$$

سؤال ۴

الف) $\alpha n_e n_p$ آهنگ در واحد حجم است:

$$[\alpha n_e n_p] = \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \Rightarrow [\alpha] = [n_e]^{-1} [n_p]^{-1} \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \Rightarrow \boxed{[\alpha] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}}$$

ب)

$$\frac{hc}{\lambda} = 13.6 \text{ eV} \Rightarrow \boxed{\lambda = 91.4 \text{ nm}}$$

ج) چون ابر خنثی است $n_e = n_p$ و چون در تعادل است آهنگ یونش و بازترکیب برابر است:

$$N = \alpha n_e^2 \times \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \boxed{R = \left(\frac{3N}{4\pi\alpha n_e^2} \right)^{1/3}}$$

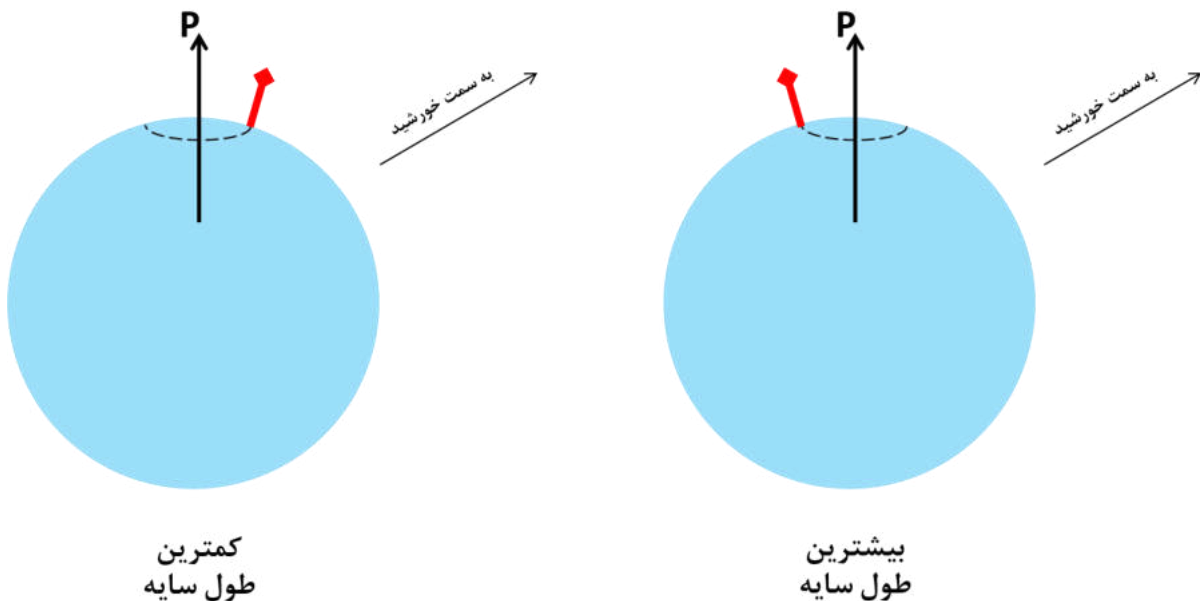
د) با جایگذاری داده‌ها در رابطه‌ی بالا، شعاع ابر به دست می‌آید.

ه) شعاع زاویه‌ای ابر (θ) نیم ثانیه‌ی قوسی است. از رابطه‌ی $d = R/\theta$ استفاده می‌کنیم.

ستاره‌ی مرکزی	$R_{\text{H II}}$ (pc)	d (pc)
O5V	2.01×10^1	8.28×10^6
B0V	2.21×10^0	9.12×10^5
G2V	6.46×10^{-3}	2.67×10^3

سؤال ۵

الف) شکل مسئله به صورت زیر است:

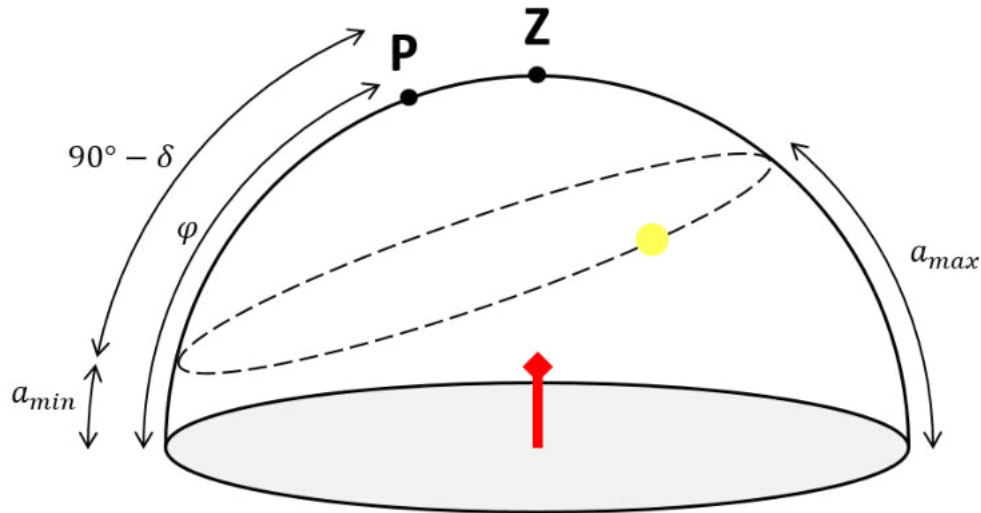


هنگامی که سایه کمترین طول را دارد، ارتفاع خورشید بیشینه و جهت سایه رو به شمال است.

ب و ج) ابتدا ارتفاع خورشید هنگام بیشترین طول و کمترین طول سایه را محاسبه می کنیم

$$\tan a = \frac{h}{l} \quad (h = 100 \text{ cm}) \Rightarrow a_{max} = 30^\circ \quad a_{min} = 10^\circ$$

مطابق شکل زیر:



$$\begin{cases} a_{max} = 90^\circ - \varphi + \delta \\ a_{min} = \varphi - 90^\circ + \delta \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0^\circ, \delta = 0^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 80^\circ}, \quad \boxed{\delta = 20^\circ}$$

می توان با فرض جنوبی بودن عرض جغرافیایی هم مسئله را حل کرد.

د) میل خورشید از رابطه $\sin \delta = \sin \omega t \sin \varepsilon$ به دست می آید که در آن ω سرعت زاویه ای مداری زمین، t زمان سپری شده از اعتدال بهاری و ε تمایل محوری زمین است. با توجه به مقدار میل قسمت ج:

$$t = 60 \text{ روز و } 123 \text{ روز}$$

تاریخ های متناظر ۲۹ اردیبهشت و ۳۰ تیر هستند.

ه) ۶ ساعت پس از کوتاه ترین سایه، زاویه ساعتی خورشید ۶ ساعت (۹۰ درجه) است. ارتفاع خورشید برابر است با:

$$\sin a = \sin \delta \sin \varphi \Rightarrow a = 19.7^\circ$$

$$\tan a = \frac{h}{l} \Rightarrow \boxed{l = 280 \text{ cm}}$$

سؤال ۶

(الف)

$$n_1(r) = \frac{n_{01}}{r^2} \quad r < R_0 \quad , \quad n_2(r) = \frac{n_{02}}{r^2} \quad r < R_0$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه جرم:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad \rho(r) = n_1(r) m_1 + n_2(r) m_2$$

$$\Rightarrow M(r) = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)r \quad , \quad M = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_0$$

$$\frac{M}{2} = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_{hm} \Rightarrow R_{hm} = \frac{R_0}{2}$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه نور:

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r^2 j(r) dr \quad , \quad j(r) = n_1(r) L_1 + n_2(r) L_2$$

$$= n_1(r) m_1^3 + n_2(r) m_2^3$$

$$\Rightarrow L(r) = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)r \quad , \quad L = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_0$$

$$\frac{L}{2} = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_{hl} \Rightarrow R_{hl} = \frac{R_0}{2}$$

در نتیجه:

$$\boxed{R_{hm}/R_{hl} = 1}$$

(ب) ابتدا ثابت n'_{02} برای ستاره‌های نوع ۲ را به دست می‌آوریم. با توجه به این که جرم کل این ستاره‌ها ثابت است:

$$M_2 = 4\pi n'_{02} m_2 \frac{R_0}{2} = 4\pi n_{02} m_2 R_0 \Rightarrow n'_{02} = 2n_{02}$$

$$n_1(r) = \frac{n_{01}}{r^2} \quad r < R_0 \quad , \quad n_2(r) = \frac{2n_{02}}{r^2} \quad r < R_0/2$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه جرم:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad \rho(r) = n_1(r) m_1 + n_2(r) m_2$$

$$\Rightarrow M(r) = \begin{cases} 4\pi(n_{01}m_1 + 2n_{02}m_2)r & r < R_0/2 \\ 4\pi(n_{01}m_1 r + n_{02}m_2 R_0) & r > R_0/2 \end{cases}$$

$$M = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_0 \quad , \quad m_1 = 1 M_\odot \quad m_2 = 10 M_\odot$$

با توجه به این که شعاع نیمه جرم ستارگان m_1 به تنهایی برابر با $R_0/2$ است، شعاع نیمه جرم بایستی کمتر از $R_0/2$ باشد:

$$\frac{M}{2} = 4\pi(n_{01} + 20n_{02})R_{hm} \Rightarrow R_{hm} = \frac{1}{2} \frac{n_{01} + 10n_{02}}{n_{01} + 20n_{02}}$$

برای محاسبه ی شعاع نیمه نور:

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r^2 j(r) dr \quad , \quad j(r) = n_1(r) L_1 + n_2(r) L_2$$

$$= n_1(r) m_1^3 + n_2(r) m_2^3$$

$$\Rightarrow L(r) = \begin{cases} 4\pi(n_{01}m_1^3 + 2n_{02}m_2^3)r & r < R_0/2 \\ 4\pi\left(n_{01}m_1^3r + 2n_{02}m_2^3\frac{R_0}{2}\right) & r > R_0/2 \end{cases}$$

$$L = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_0 \quad , \quad m_1 = 1 M_\odot \quad m_2 = 10 M_\odot$$

با توجه به این که شعاع نیمه نور ستارگان m_1 به تنهایی برابر با $R_0/2$ است، شعاع نیمه نور بایستی کمتر از $R_0/2$ باشد:

$$\frac{L}{2} = 4\pi(n_{01} + 2000n_{02})R_{hl} \Rightarrow R_{hl} = \frac{1}{2} \frac{n_{01} + 1000n_{02}}{n_{01} + 2000n_{02}}$$

در نتیجه:

$$R_{hm}/R_{hl} = \frac{n_{01} + 10n_{02}}{n_{01} + 20n_{02}} \frac{n_{01} + 2000n_{02}}{n_{01} + 1000n_{02}}$$

اگر نسبت n_{01}/n_{02} را با α نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$R_{hm}/R_{hl} = \frac{\alpha + 10}{\alpha + 20} \frac{\alpha + 2000}{\alpha + 1000}$$

و به ازای $\alpha = 10$:

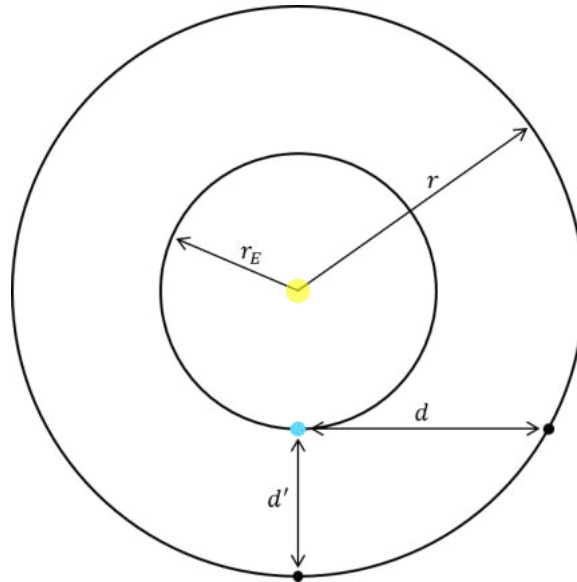
$$R_{hm}/R_{hl} = 1.33$$

ج) در اثر جداسازی جرمی، نسبت R_{hm} و R_{hl} تغییر می کنند و دیگر نمی توان این دو را یکسان در نظر گرفت. دلیل این تغییر، تفاوت حساسیت این دو شعاع نسبت به توزیع ستارگان است. (R_{hm} به α بیشتر حساس است.)

سؤال ۷

با توجه به شکل:

$$d = \sqrt{r^2 - r_E^2} \quad , \quad d' = r - r_E$$



$$2(d - d') = c\Delta t \Rightarrow \sqrt{r^2 - r_E^2} - (r - r_E) = \frac{c\Delta t}{2} \quad , \quad A \equiv \frac{c\Delta t}{2}$$

$$\Rightarrow r^2 - r_E^2 = A^2 + (r - r_E)^2 + 2A(r - r_E)$$

$$\Rightarrow A^2 + 2r_E^2 - 2rr_E + 2Ar - 2Ar_E = 0 \Rightarrow 2(r_E - A)r = A(A - 2r_E) + 2r_E^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{A(A - 2r_E) + 2r_E^2}{2(r_E - A)}$$

با جایگذاری، مقدار عددی $r = 2.34 \text{ AU}$ به دست می آید.

سؤال ۸

(الف)

$$E_{tot} = E_f - E_i \approx -GM^2 \left(\frac{1}{R_{ns}} - \frac{1}{R_{wd}} \right) \Rightarrow |E_{tot}| = 2.58 \times 10^{46} \text{ J}$$

(ب) با توجه به مقدار پهن شدگی و جرم هسته‌ی ستاره:

$$0.5 \Delta\lambda/\lambda = v/c \Rightarrow v = 5000 \text{ km s}^{-1} \quad , \quad M_{env} = 8.6 M_{\odot}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} M_{env} v^2 \Rightarrow E_1 = 2.13 \times 10^{44} \text{ J} \quad , \quad E_1/E_{tot} = 0.83 \%$$

ج) ابتدا درخشندگی ابرنواختر را به دست می آوریم

$$M - M_{sun} = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \Rightarrow L = 194 L_{\odot} \quad , \quad \tau = 2 \text{ ماه}$$

$$E_2 = L\tau \Rightarrow \boxed{E_2 = 3.87 \times 10^{35} \text{ J}}, \quad \boxed{E_2/E_{tot} = 10^{-9} \%}$$

د) انرژی نوترینوها برابر است با:

$$E_3 = E_{tot} - E_1 - E_2 \Rightarrow \boxed{E_3 = 2.56 \times 10^{46} \text{ J}}, \quad \boxed{E_3/E_{tot} = 99.17 \%}$$

هـ)

$$N_\nu = \frac{E_3}{E_\nu} \Rightarrow \boxed{N_\nu = 3.20 \times 10^{58}}$$

و)

$$n_\nu = \frac{N_\nu}{4\pi d^2} \times \sigma_{\text{انسان}} \Rightarrow \boxed{n_\nu = 5.33 \times 10^{14}}$$

سؤال ۹

الف) رابطه‌ی بین قدر ظاهری، قدر مطلق و فاصله به صورت زیر است:

$$m - M = 5 \log d - 5$$

$M = -9.1$ محل بیشینه‌ی قدر مطلق و $d = 20 \text{ Mpc}$ فاصله‌ی به دست آمده است. اگر قدر مطلق

$M' = -7.7$ می‌بود، فاصله چنین به دست می‌آمد:

$$M' - M = -5 \log \frac{d'}{d} \Rightarrow \boxed{d' = 10.5 \text{ Mpc}}$$

ب) جرم با استفاده از شعاع کهکشانی (R) و سرعت حرکت ستاره‌ها (v) تعیین می‌شود. شعاع زاویه‌ای کهکشانی

(θ) از روی رصد به دست می‌آید:

$$M = \frac{v^2 R}{G} \quad , \quad R = \theta d \quad \Rightarrow \quad M \propto d$$

درخشندگی با اندازه‌گیری شار دریافتی به دست می‌آید:

$$L = 4\pi d^2 F \quad \Rightarrow \quad L \propto d^2$$

در نتیجه:

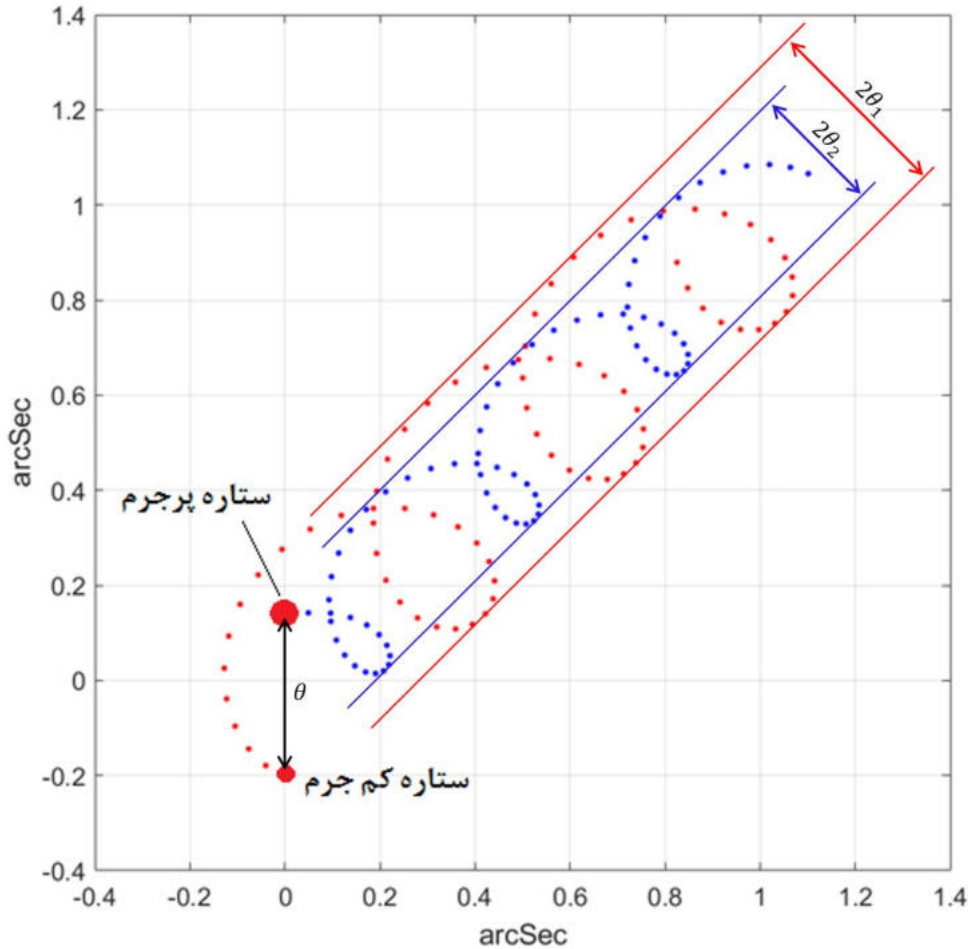
$$M/L = \frac{v^2 \theta}{4\pi G F} \times \frac{1}{d} \Rightarrow \boxed{M/L \propto d^{-1}}$$

ج) با توجه به رابطه‌ی تناسبی به دست آمده در قسمت ب:

$$\boxed{(M/L)' = 3.8 M_{\odot}/L_{\odot}}$$

سؤال ۱۰

الف) مدار هر کدام از ستاره‌ها حول مرکز جرم دایره‌ای و میل مداری 90° درجه است. بنابراین فاصله‌ی بین خطوط مماس بر مسیر حرکت هر ستاره، برابر با قطر مدار آن است.



با توجه به شکل: $r_1/r_2 = \theta_1/\theta_2 =$

با توجه به تعریف مرکز جرم: $M_2/M_1 = r_1/r_2$

هم‌چنین می‌دانیم $M_1 = M_\odot$ است.

$$\Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = 1.5 \Rightarrow \boxed{M_2 = 1.5 M_\odot}$$

برای حل قسمت‌های ب و ج، ابتدا شعاع مدار نسبی دو ستاره را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از قانون سوم کپلر

$$r = \left(\frac{P^2 GM}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

M مجموع جرم دو ستاره است. دوره‌ی تناوب با اندازه‌گیری تعداد نقاط درون یک تناوب به دست می‌آید.
($P = 230$ روز)

$$\Rightarrow r = 1.49 \times 10^{11} \text{ m} \approx 1 \text{ AU}$$

ب) فاصله‌ی زاویه‌ای دو ستاره را با توجه به شکل به دست می‌آوریم ($\theta = 0.33''$).

$$d = \frac{r}{\theta_{\text{rad}}} \Rightarrow \boxed{d = 9.32 \times 10^{16} \text{ m} \approx 3 \text{ pc}}$$

ج) با توجه به تعریف مرکز جرم:

$$r_1 = \frac{M_2}{M} r \quad , \quad r_2 = \frac{M_1}{M} r \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_1 = 0.6 \text{ AU} \quad , \quad r_2 = 0.4 \text{ AU}}$$



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش پژوهان جوان



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان
و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «لام خستین (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سیزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۶/۱/۳۱ - ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه



شماره سندلی

استان:
منطقه:
پایه تحصیلی:

شماره پرونده:
کد ملی:
نام پدر:
نام مدرسه:



حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

- ۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۴- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و سوم متوسطه انتخاب می شوند.

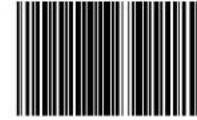


ثوابت نجومی و فیزیکی مورد نیاز

6.67×10^{-11}	$N m^2 kg^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
5.67×10^{-8}	$W m^{-2} K^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
7.56×10^{-16}	$J m^{-3} K^{-4}$	ثابت تابش	$a=4\sigma/c$
1.38×10^{-23}	$J K^{-1}$	ثابت بولتزمن	k_B
6.63×10^{-34}	$J.s$	ثابت پلانک	h
1.6×10^{-19}	C	بار الکترون	e
9.1×10^{-31}	kg	جرم الکترون	m_e
1.67×10^{-27}	kg	جرم اتم هیدروژن	m_H
3.0×10^8	m/s	سرعت نور	c
3.09×10^{16}	m	پارسک	pc
1.5×10^{11}	m	واحد نجومی	$r_{earth}-AU$
9.46×10^{15}	m	سال نوری	Ly
6.96×10^8	m	شعاع خورشید	R_{sun}
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید	M_{sun}
6.38×10^6	m	شعاع زمین	R_{earth}
0.007		ضریب کارایی همجوشی هیدروژن	ϵ
50	AU	شعاع منظومه شمسی	$R_{solars sys}$
15	kpc	شعاع کهکشان راه شیری	R_{Gal}
50	kpc	فاصله ابر ماژلانی بزرگ	R_{LMC}
60	kpc	فاصله ابر ماژلانی کوچک	R_{SMC}
770	kpc	فاصله کهکشان آندرومدا	R_{AM-Gal}
20	Mpc	فاصله خوشه کهکشانی سنبله	$r_{virgo-Chustr}$
4	Gpc	ابعاد کیهان	D_{cosmos}
13.6	Gyr	عمر عالم	T_{cosmos}
68	$(km/s)/Mpc$	ثابت هابل	H_0
1.37×10^3	$W m^{-2}$	ثابت خورشیدی	f_{sun}
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید	L_{sun}
4.72		قدر مطلق خورشید	M_{sun}
-26.7		قدر ظاهری خورشید	m_{sun}
23.45	$Degree$	زاویه تمایل محور دوران زمین	
12.74		قدر ظاهری ماه بدر	m_{moon}
33.67°N, 51.32°E	$Degree$	مختصات جغرافیایی رصدخانه ملی ایران	λ, β_{INO}
768.7	mas	اختلاف منظر پروکسیما قنطورس	da_{Cen}
4.5	Gyr	سن خورشید	A_{sun}



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش پژوهان جوان

۱ یکی از روشهای فهم بهتر ابعاد و اعداد بزرگ مقیاس در نجوم و اخترفیزیک، نزدیک تر کردن مقیاسها به ابعاد و اندازه هایی است که معمولاً در زندگی روزمره از آنها تجربه و حس بهتری داریم. بر این اساس می‌خواهیم مدلی ساده از جهان اطراف خودمان ایجاد کنیم که ابعاد و زمان‌های بزرگ مقیاس را بهتر درک کنیم. در این مدل فرض کنید که خورشید یک پرتقال درشت به قطر ۱۴ سانتیمتر باشد. در این صورت فواصل و واحدهای آنها را بیان کنید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید).

انتخاب بهترین واحد در ستون واحدها نمره خواهد داشت.

از بقایای بدست آمده از انسان‌های نخستین دیده می‌شود که تقریباً آنها حدود ۲ میلیون سال قبل روی کره زمین می‌زیسته اند. اگر عمر عالم را یک روز ۲۴ ساعته تصور کنیم، موارد زیر را محاسبه کنید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

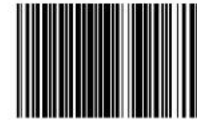
مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



واحد	جرم
سانتیمتر	قطر خورشید
	قطر زمین
	فاصله زمین تا خورشید
	فاصله نزدیکترین ستاره به خورشید
	قد یک انسان
	قطر منظومه شمسی
	قطر کهکشان راه شیری
	فاصله ابر ماژلانی کوچک
	فاصله ابر ماژلانی بزرگ
	فاصله کهکشان آندرومدا
	فاصله خوشه کهکشانی سنبله
	ابعاد کیهان

سوال ۱ جدول ۱

واحد	بازه زمانی
ساعت	سن عالم
	عمر خورشید
	سن خورشید
	پیشینه انسان بر روی زمین
	زمانی که تاریخ نگاشته شده است (تقریباً ۴۰۰۰ سال)
	عمر یک انسان نوعی روی سطح زمین
	یک سال

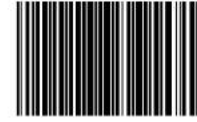
سوال ۱ جدول ۲



نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



۲ محاسبه ساعت خورشیدی به همین سادگی است که شما در این سوال می بینید. فقط باید این محاسبات را برای طول سال انجام دهید و آن را روی یک صفحه ترسیم کنید تا صفحه‌ی اصلی ساعت آفتابی شما تولید شود. آخرین عبور خورشید از نقطه اعتدال بهاری ساعت ۱۳:۵۷:۴۰ روز ۳۰ اسفند سال ۱۳۹۵ به وقت ایران بوده است. از بیضی بودن مدار زمین به دور خورشید صرف نظر کنید. البته اگر بخواهید که ساعت دقیقتری داشته باشید لازم است اثرات بیضی بودن مدار زمین را در نظر بگیرید. زوایای خواسته شده را با دقت ۱۵ دقیقه قوس گزارش کنید.

از دید ناظری در محل رصدخانه ملی ایران و در لحظه شروع آزمون المپیاد نجوم و اخترفیزیک، موارد زیر را محاسبه کنید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۴۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

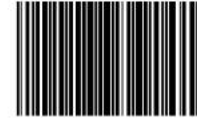
تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

سیزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۶/۱/۳۱



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

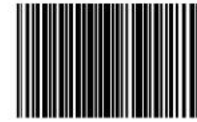


	بعد خورشید	الف)
	میل خورشید	ب)
	زاویه ساعتی خورشید	ج)
	ارتفاع خورشید	د)
	سمت خورشید	ه)
	طول سایه یک میله یک متری در محل	و)

سوال ۲ جدول ۱



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

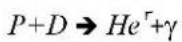


۳- این سوال برای تخمین سهم نوترینوهای ستاره‌ای در تابش زمینه نوترینوی کیهانی است.

نوترینوهای خورشیدی طی چند فرآیند غالب زیر تولید می‌شوند. در جدول زیر انرژی و سهم هر فرآیند بر حسب درصد بیان شده است:

فرآیند	انرژی نوترینو (keV)	سهم (درصد)
$P+P \rightarrow D+e^++\nu_e$	۴۰۰	۹۲٫۴
$Be+e^- \rightarrow Li+\nu_e$	۹۰۰	۷٫۴
$P+e^-+P \rightarrow D+\nu_e$	۱۷۰۰	۰٫۲
$B \rightarrow Be+e^++\nu_e$	۱۸۰۰۰	۸×10^{-3}

واکنشهای تولید هلیوم در فرآیند اول به شرح زیر است:



الف) انرژی متوسط نوترینوهای خورشیدی را محاسبه کنید.

ب) درخشندگی نوترینویی خورشید را بر حسب درخشندگی خورشید بدست آورید.

ج) فرض کنید همه کهکشان‌های عالم مشابه بوده و از ستاره‌های خورشیدگون مشابه تشکیل شده باشند. درخشندگی کهکشان راه شیری 10^{11} برابر درخشندگی خورشید بوده و در کل عالم نیز تقریباً 10^{11} کهکشان تخمین زده می‌شود. تخمین بزنید در هر سانتیمتر مکعب از کیهان چند نوترینو ستاره‌ای وجود خواهد داشت؟

د) در این صورت آیا نوترینوی ستاره‌ای می‌تواند کاندیدای خوبی برای ماده تاریک باشد؟ چرا؟ (چگالی ماده تاریک $6 \times 10^{-28} \text{ kg/cm}^3$) لطفاً پاسخ‌های نهایی خود را در جدول زیر بنویسید (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۳۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویسی

استفاده کنید

مطالب این قسمت

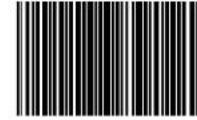
تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

سیزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۶/۱/۳۱



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



	الف)
	ب)
	ج)
	د)

سوال ۳ جدول ۱



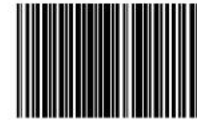
مرکز ملی پژوهش‌های فضا و نجوم
اداره پژوهش‌های نجوم



نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



۴ رصدخانه ملی ایران (INO) اولین نور خود را در انتهای سال ۱۴۰۰ دریافت خواهد کرد. اطلاعات کاملی از این رصدخانه در اینترنت موجود است (ino.org.ir) که برخی از آنها در اینجا آورده شده است. آینه اصلی آن وزن ۴ تن، ضخامت شیشه ۱۸ سانتیمتر و از نوع شیشه زرودور (Zerudor) و با ضریب انبساط حرارتی 10^{-7} بر درجه سلسیوس، نسبت کانونی $F/1.5$ ، دقت صافی سطح حدود ۲ نانومتر و قطر ۳٫۴ متر دارد. یک روزنه ۷۰۰ میلیمتری در مرکز آینه اصلی برای عبور نور تعبیه شده است. قطر آینه ثانویه آن نیز ۶۰۰ میلیمتر است. این تلسکوپ از نوع ریچی-کرتین بوده و هر دو آینه اصلی و ثانویه آن هذلولوی هستند. این تلسکوپ در قله گرکش در نزدیکی شهر کاشان و در ارتفاع ۳۶۰۰ متری از سطح دریا قرار می‌گیرد. دید نجومی آن در بهترین حالت به حدود ۰٫۱ تا ۰٫۲ ثانیه قوسی می‌رسد.

الف) فاصله کانونی آینه اصلی این تلسکوپ چند متر است؟

ب) با اختلاف دمای حدود ۱۵ درجه بین شب و روز مقدار تغییر ضخامت آینه حدوداً چه ضربی از طول موج نور مرئی خواهد شد؟ (راهنمایی: نور مرئی در بازه‌ی ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است)

ج) توان تفکیک ناشی از پراش این تلسکوپ چند میلی ثانیه قوس (mas) است؟

د) نسبت کانونی (F number) نهایی این تلسکوپ $F/11$ است. مقیاس صفحه آن (plate scale) چقدر است؟ ($d\theta/dl$)

ه) برای پوشش میدان دید ۲۰ دقیقه قوس، ابعاد CCD مورد استفاده باید چند سانتیمتر باشد؟

و) حد قدری این تلسکوپ چقدر است؟ (حد قدری چشم انسان با قطر مردمک ۶ میلیمتر، ۶ است.)

ز) اگر این تلسکوپ بخواهد برای ثبت ستاره کم فروغی، این ستاره را بمدت ۱ ساعت دنبال کند بطوری که یک بازه‌ی زاویه‌ای ۰٫۱ ثانیه قوسی، همواره روی یک پیکسل بیوفتد، دقت سرعت زاویه‌ای موتور تلسکوپ بر حسب میلی ثانیه قوسی بر ثانیه (mas/sec) چقدر باید باشد؟ (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید). (۴۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

سیزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۶/۱/۳۱



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

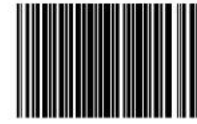


	(الف)
	(ب)
	(ج)
	(د)
	(ه)
	(و)
	(ز)

سوال ۴ جدول ۱



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



۵ برای سادگی فرض کنید که مدارهای زمین و مریخ دایره بوده و روی یک صفحه قرار دارند. می‌خواهیم یک مریخ نورد را با صرف کمترین انرژی از سطح زمین به مریخ پرتاب کنیم. فرض می‌کنیم که مقدار تغییر سرعت‌ها در زمان‌های بسیار کوتاهی نسبت به زمان کل انتقال، صورت می‌گیرد (که معمولا و در عمل نیز این فرض خوبی است). ابتدا تمامی پاسخ‌ها را به صورت پارامتری بدست آورده و سپس مقادیر عددی آنها را محاسبه کنید و در جدول پاسخ‌ها بنویسید. (شعاع مداری مریخ 1.52 AU است)

الف) شکل مدار مورد نظر خود را ترسیم کنید.

ب) کمترین مقدار افزایش سرعتی را که لازم است به مریخ نورد داده شود تا بتواند به مدار مریخ برسد بدست آورید؟

ج) مقدار افزایش یا کاهش سرعتی که مریخ نورد در هنگام رسیدن به مدار مریخ لازم دارد تا اعمال کند، تا در مدار مریخ قرار گیرد را محاسبه کنید. کاهش یا افزایش را حتما ذکر کنید.

د) زاویه زمین-خورشید-مریخ در لحظه پرتاب مریخ نورد را محاسبه کرده بطوری که مریخ نورد به محض قرارگیری در مدار مریخ بتواند بر سطح مریخ فرود آید. کدامیک باید جلوتر باشند؟ زمین یا مریخ؟

ه) آخرین مقابله مریخ و خورشید ۲ خرداد ۱۳۹۵ ساعت ۱۵:۳۰ به وقت تهران بود. محاسبه کنید که نزدیکترین زمانی که برای پرتاب یک مریخ نورد مناسب است کی خواهد بود؟ (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید) (۵۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

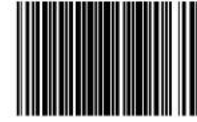
تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

سیزدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۶/۱/۳۱



نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:



Blank area for writing answers, labeled (الف) in the top right corner.

سوال ۵ جدول ۱

پاسخ عددی	پاسخ به صورت پارامتری	
		(ب)
		(ج)
		(د)
		(ه)

سوال ۵ جدول ۲

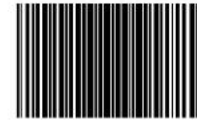




نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



مرکز ملی پژوهش‌های فضا و نجوم
و دانش روزان جوان

۶- فرض کنید کیهان تخت است و چگالی متوسط آن برابر است با $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. فرض کنید ۲۶ درصد از جرم کیهان از ماده‌ی تاریک تشکیل شده است. هنوز دقیقاً مشخص نیست که ماده‌ی تاریک از چه ذراتی تشکیل شده است. برخی از دانشمندان بر این باورند که نوترینوهای باقی مانده از انفجار بزرگ می‌توانند کاندید مناسبی برای ماده‌ی تاریک باشند. ۶ نوع نوترینو با جرمهای متفاوت در عالم وجود دارند (۷۱، ۷۲، ...، ۷۶). این نوترینوها در حال حاضر بسیار سرد هستند یعنی انرژی جنبشی‌شان در مقابل انرژی جرم سکون-شان ناچیز است. چگالی عددی هر کدام از این نوترینوها $\frac{3}{11}$ چگالی عددی فوتون‌های تابش زمینه کیهانی است ($n_{\gamma_i} = \frac{3}{11} n_p$) که در آن $n_p = 410 \text{ cm}^{-3}$. با فرض اینکه نوترینوها تنها مولفه‌ی تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی تاریک در کیهان باشند، مجموع جرم ۶ نوع نوترینو، $m_0 = \sum_{i=1}^6 m_{\gamma_i}$ را برحسب واحد الکترون ولت بر مربع سرعت نور (cV/c^2) به دست آورید. این مقدار m_0 در واقع یک حد بالا برای جرم نوترینوها محسوب می‌شود که بر اساس اطلاعات کیهانشناسی حاصل شده است. (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

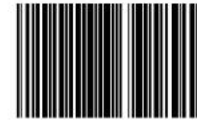
تصحیح نخواهد شد



نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



۷ فرض کنید در یک کهکشان نرخ تشکیل ستاره‌ای با زمان به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$S(t) = S(0) \exp(-t/t_*)$$

به طوری که $S(0) = 1 M_{\text{sun}}/\text{yr}$ و $t_* = 3 \text{ Gyr}$ مقادیر ثابتی هستند. برای سادگی فرض کنید که فقط ۱۰ نوع ستاره با جرم‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰ جرم خورشید تولید می‌شوند و تابع توزیع جرمی ستاره‌های تولید شده با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\frac{dN(M)}{dM} = kM^{-3}$$

که در آن k مقدار ثابتی است.

الف) اگر فرض کنیم اولین دوره ستاره زایی در مدت ۱۰ میلیون سال اتفاق افتاده باشد و مجموعاً در این مرحله ۱ میلیون ستاره تولید شده باشد مقدار ثابت k را بدست آورید.

ب) پس از اولین دوره‌ی ستاره زایی، تعداد ستاره‌های تولید شده از هر جرم را بدست آورده و در یک جدول ۱۰ سطری نمایش دهید و نمودار تابع توزیع جرمی (یعنی محور افقی جرم ستاره و محور عمودی تعداد ستارگان) را رسم کنید. (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید).

ج) در زمان $t = 10 \text{ Gyr}$ تابع جرم ستاره‌هایی که روی رشته‌ی اصلی قرار دارند را مجدداً پس از محاسبه در جدول جدیدی وارد کرده و نمودار تابع جرم را رسم کنید. (از جدول موجود در پاسخنامه استفاده کنید).

راهنمایی: رابطه‌ی جرم-طول عمر رشته‌ی اصلی ستارگان را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$T = 10 \text{ Gyr} (M/M_{\text{sun}})^{-2}$$

(۶۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

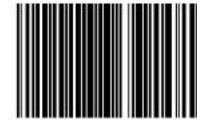
مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

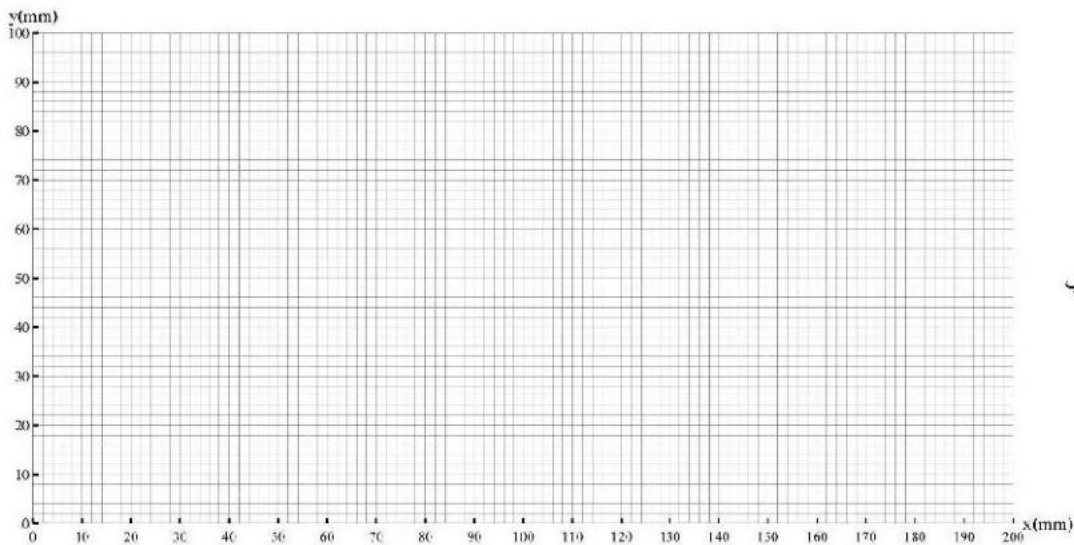


نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

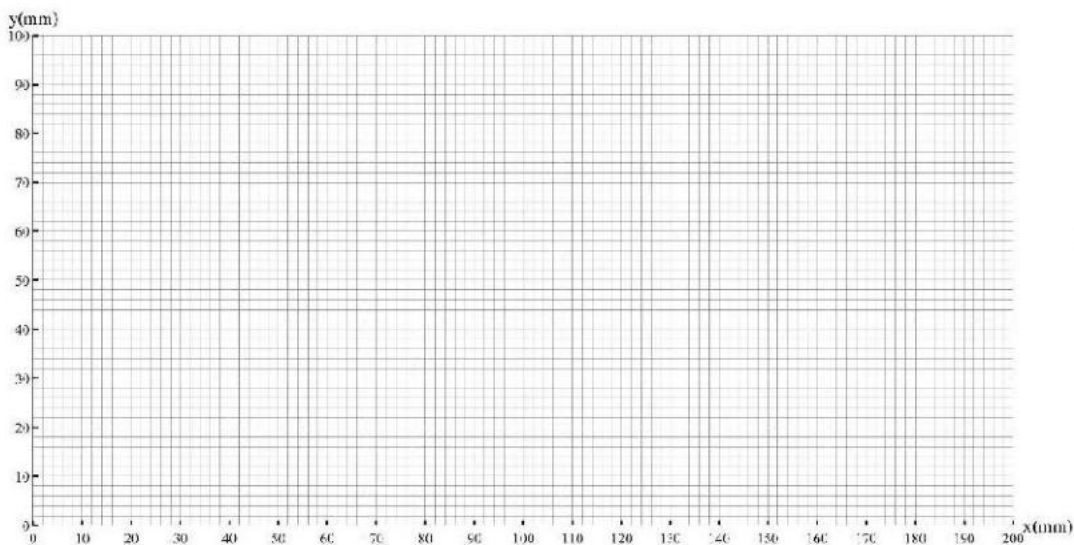


تعداد ستاره	جرم ستاره
سوال ۷ قسمت ج	

تعداد ستاره	جرم ستاره
سوال ۷ قسمت ب	



سوال ۷ قسمت ب



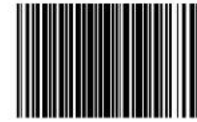
سوال ۷ قسمت ج



نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان
و دانش پژوهان جوان

انفجار ابرنواختر SN1006 برای اولین بار توسط منجم مسلمان علی ابن رضوان در تابستان سال ۱۰۰۶ میلادی به شرح زیر گزارش شده است: "جرمی نورانی است به شکل دایره‌ای به بزرگی ۲٫۵ تا ۳ برابر سیاره زهره که آسمان را به خوبی روشن کرده است. شدت نور آن نزدیک به یک چهارم شدت نور ماه کامل است". همزمان راهبان مسیحی در سنت گالین نیز منحنی نوری این انفجار را به طور تقریبی ثبت کرده‌اند. بر اساس داده‌های آنها به نظر می‌رسد که این انفجار از نوع ابرنواختر نوع Ia بوده است. ابرنواختر نوع Ia در یک سیستم دوتایی که یکی از مولفه‌های آن کوتوله سفید باشد رخ می‌دهد. وقتی جرم مولفه کوتوله سفید به یک حد خاص معروف به حد چاندراسکار می‌رسد انفجار رخ می‌دهد. به دلیل یکسان بودن این شرط حدی برای شروع انفجار، تمام ابرنواخترهای نوع Ia در بیشینه‌ی روشنایی خود به قدر مطلق یکسانی می‌رسند که مقدار آن در فیلتر نور مرئی برابر است با $M_V = -19.5 \pm 0.4$. در دو دهه‌ی گذشته رصدهای متعددی از بقایای این ابرنواختر انجام شده است. با مقایسه‌ی تصاویر دیده شده در سال‌های متوالی مشخص شده است که پوش کروی تولید شده از بقایای این انفجار با سرعت $\alpha = 0.280 \pm 0.008 \text{ miliarcsec. yr}^{-1}$ در حال انبساط است. همچنین با اندازه‌گیری انتقال دوپلری خطوط طیفی، سرعت شعاعی پوش در حال انبساط نیز برابر با $V_r = 2900 \pm 100 \text{ km/s}$ اندازه‌گیری شده است. نهایتاً از قرمزشدگی طیف ستاره‌های همسایه، مقدار جذب میان ستاره‌ای در راستای دید SN1006 برابر $A_V = 0.31 \pm 0.10$ اندازه‌گیری شده است.

الف) فاصله‌ی ما از SN1006، و نیز خطای مربوطه را بر حسب پارسک به دست آورید ($d, \Delta d$).

ب) با فرض اینکه فاصله‌ی SN1006 تا ما در زمان انفجار نیز تقریباً همان d بوده، قدر ظاهری (m_V) در بیشینه‌ی درخشندگی را به همراه خطای مربوطه بدست آورید.

ج) مقدار قدر ظاهری محاسبه شده را با مشاهده‌ی علی ابن رضوان مقایسه کنید. (۴۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

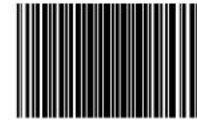
تصحیح نخواهد شد



نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



مرکز ملی آموزش نجوم و اختر فیزیک
و دانش روزانه جوانان

۹ فوتونی با بسامد f دارای جرم لختی موثر m است (جرم گرانشی فوتون از انرژی آن استخراج می‌شود). بنابراین فوتونی که از سطح یک ستاره گسیل می‌شود، هنگام فرار از میدان گرانشی ستاره، مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد. الف) انتقال نسبی بسامد $\frac{\Delta f}{f}$ یک فوتون هنگام فرار از سطح یک ستاره به بینهایت را برحسب جرم و شعاع ستاره به دست آورید. فرض کنید $1 \ll \frac{\Delta f}{f}$.

ب) برای اندازه گیری شعاع ستاره‌ها در کهکشان راه شیری، یک فضا پیمای بدون سرنشین به فضا پرتاب شده است. از آنالیز طیف دو ستاره‌ی مختلف (ستاره های ۱ و ۲) انتقال به سرخ $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 2 \times 10^{-6}$ و $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 10^{-5}$ برای یکی از خطوط جذبی مشخص این ستاره‌ها اندازه گیری شده است. با فرض اینکه رابطه‌ی جرم-شعاع ستاره‌های رشته اصلی به صورت $R \propto M^{0.6}$ باشد، نسبت شعاع ستاره ۲ به شعاع ستاره ۱ را به دست آورید. فرض کنید هر دو ستاره بر روی رشته‌ی اصلی قرار دارند. (۳۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

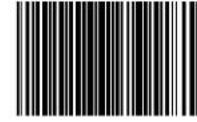
تصحیح نخواهد شد



نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



مرکز ملی پژوهش‌های فضا و نجوم
و اداس پژوهش‌های فضا

۱۰ فرض کنید ستاره‌های رشته‌ی اصلی در تعادل ویریالی باشند، یعنی دو برابر مجموع انرژی جنبشی ذرات برابر است با اندازه انرژی پتانسیل گرانشی. همچنین فرض کنید جرم و درخشندگی ستاره‌ها به صورت $L \propto M^\alpha$ به هم مرتبط است. انرژی هسته‌ای تولید شده در ستاره‌ها نیز با رابطه‌ی $\epsilon_n \propto \rho_c T_c^\beta$ داده می‌شود که در آن ρ_c و T_c به ترتیب چگالی و دمای مرکزی ستاره هستند.

(الف) با توجه به اینکه چگالی مرکزی ستاره به صورت $\rho_c \propto M^\psi$ با جرم ستاره متناسب است مقدار ثابت ψ را بر حسب ثابت های α و β به دست آورید.

(ب) با توجه به اینکه مقدار α همواره کمتر از ۵ است تعیین کنید به ازای چه مقادیری از β چگالی با جرم متناسب است (یعنی ψ مثبت است). (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»



معاونت دانش پژوهان جوان

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک -

تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۹ - ساعت: ۱۴:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه

شماره صندلی



توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

- ۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۴- با توجه به آنکه برگه های پاسخنامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.

6.67×10^{-11}	$N m^2 kg^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
5.67×10^{-8}	$W m^{-2} K^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
7.56×10^{-16}	$J m^{-3} K^{-4}$	ثابت تابش	$a=4\sigma/c$
1.38×10^{-23}	$J K^{-1}$	ثابت بولتزمن	k_B
6.63×10^{-34}	$J.s$	ثابت پلانک	h
1.6×10^{-19}	C	بار الکترون	e
9.1×10^{-31}	kg	جرم الکترون	m_e
1.67×10^{-27}	kg	واحد جرم اتمی	$1u$
3.0×10^8	m/s	سرعت نور	c
3.09×10^{16}	m	پارسک	pc
1.5×10^{11}	m	واحد نجومی	$r_{earth}=AU$
9.46×10^{15}	m	سال نوری	Ly
6.96×10^8	m	شعاع خورشید	R_{sun}
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید	M_{sun}
6.38×10^6	m	شعاع زمین	R_{earth}
5.97×10^{24}	kg	جرم زمین	M_{earth}
1.013×10^5	N	فشار جو (اتمسفر)	atm
1.67×10^{-27}	kg	جرم پروتون	m_p
0.007		ضریب کارایی همجوشی هیدروژن	ϵ
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید	L_{sun}
472		قدر مطلق خورشید	M_{sun}
-26.7		قدر ظاهری خورشید	m_{sun}
73	$(km/s)/Mpc$	ثابت هابل	H_0
1.37×10^3	Wm^{-2}	ثابت خورشیدی	f_{sun}
6.02×10^{23}	mol^{-1}	عدد آووگادرو	N_A
8314	$J mol^{-1} K^{-1}$	ثابت گازها	R
5.29×10^{-11}	m	شعاع اتم بور	r_B
1.6×10^{-19}	J	الکترون ولت	eV
-12/74		قدر ظاهری ماه بدر	m_{moon}
4.5×10^6	K	دمای متوسط خورشید	$T_{mean}(sun)$
6	mm	بیشینه قطر مردمک چشم انسان	D
6		حد قدر چشم انسان	m_{eye}
1.5×10^7	K	دمای مرکز خورشید	$T_{core}(sun)$



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۱- فرض کنید در اثر هر انفجار ابرنواختری جرمی معادل 10 برابر جرم خورشید ($M=10M_{\text{sun}}$) به صورت فلز (عناصر سنگین تر از هیدروژن و هلیوم) وارد محیط کهکشانی می شود. اگر متوسط فلزیت ستاره ها (یعنی نسبت جرم فلزات به کل جرم در کهکشان) 0.01 باشد؛ بدست آورید که در کهکشان ما در هر سال چند انفجار ابرنواختری رخ می دهد؟ (۱۰ نمره)
- راهنمایی: کهکشان راه شیری 10^{11} ستاره دارد. برای سادگی فرض کنید همه ی ستاره ها مانند خورشید هستند.



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

۲- شهاب سنگ ها تکه هایی جدا شده از سیارک ها، ماه، مریخ یا شاید دنباله دارها با وزن های بین چند گرم تا چندین تن باشند که از فضا به زمین برخورد می کنند. شهاب سنگ های بسیار بزرگ، هنگام برخورد با زمین منفجر شده و حفره هایی به نام دهانه های برخوردی پدید می آورند (شکل زیر گودال عظیمی است که در صحرای آریزونا در اثر برخورد یک شهاب سنگ ایجاد شده است). سقوط این شهاب سنگ ها ممکن است با ظهور آتش گوی و سپس موج انفجار نیز همراه باشد. آخرین گزارش ثبت شده از برخورد یک شهاب سنگ با زمین به سال ۱۹۰۸ باز می گردد. در آن برخورد، شهاب سنگی با قطر ۵۰ متر در ناحیه ای به نام تونگوسکا واقع در سیبری روسیه با زمین برخورد کرد که بر اثر آن انفجاری مهیب تا شعاع چهار کیلومتری محل برخورد را فرا گرفت و علاوه بر آن ۲۰۰۰ کیلومتر مربع از جنگل های سیبری نیز بر اثر این انفجار به شدت آسیب دید. در چند سال گذشته نیز عبور یک شهاب سنگ با قطر حدود ۴۰۰ متر از آسمان سیبری در شمال روسیه مشاهده شد که البته بدون برخورد از کنار زمین عبور کرد.

فرض کنید قرار است شهاب سنگی با زمین برخورد کند. محاسبه کنید احتمال اینکه این شهاب سنگ به یک شهر برخورد کند چقدر است؟ تمام فرض های خود را برای حل این مساله به صراحت بیان کرده و در کادر قرار دهید. (۱۰ نمره)





دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

۳- با استفاده از تقارن مقدار پتانسیل گرانشی در گوشه ی یک مکعب توپر و یکنواخت را نسبت به مقدار پتانسیل در مرکز همان مکعب

محاسبه کنید؟ (۱۰ نمره)



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۴- هسته‌ی خورشید منطقه‌ای به شعاع 0.2 شعاع خورشید بوده که حاوی 0.34 جرم خورشید است و تمامی انرژی هسته‌ای خورشید در آن تولید می‌شود. در تقریب اول فرض کنید که خورشید فقط از هیدروژن تشکیل شده است.
- الف) چگالی هسته را به دست آورید
- ب) محاسبه کنید هر پروتون چه مدت طول می‌کشد تا با یک پروتون دیگر هم‌جوشی انجام دهد؟
- ج) محاسبه کنید هر پروتون به طور متوسط چه مسافتی را طی می‌کند تا یک هم‌جوشی انجام دهد؟ (۲۰ نمره)



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۵- چگالی ستاره‌ها در اطراف خورشید تقریباً 0.1 ستاره بر پارسک مکعب است. همچنین می‌دانیم که تقریباً از هر یک میلیون ستاره فقط یک ستاره ممکن است دارای سیاره‌ای باشد که در آن احتمال حیات وجود دارد.
- الف) محاسبه کنید فاصله‌ی نزدیک‌ترین سیاره‌ای که امکان حیات در آن می‌تواند وجود داشته باشد چند پارسک است؟
- ب) حداقل قطر تلسکوپی را بیابید که حد قدری آن به گونه‌ای باشد که سیاره‌ای مانند زمین که در فاصله‌ی یک واحد نجومی از این ستاره قرار دارد را بتوان مشاهده کرد. ستاره را خورشیدگون فرض کنید. (۲۰ نمره)



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک – ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۶- خورشید در انتهای دوره ی هیدروژن سوزی خود به لحظه ای می رسد که هسته ی هیدروژن سوز آن خاموش می شود. در این زمان بلافاصله هلیوم سوزی آغاز نخواهد شد. بلکه به خاطر حذف منبع انرژی هسته ای، خورشید به مرور رمبیده تا این که دمای مرکزی ستاره به ۱۰۰ میلیون کلوین (دمای هلیوم سوزی) و چگالی مرکزی هم به ۲ برابر چگالی قبلی برسد و هلیوم را روشن کند.
- الف) تابعیت فشار گرانشی (فشار ستون جرم) در مرکز ستاره و پتانسیل گرانشی را بر حسب G ، M و R با استفاده از تحلیل ابعادی به دست آورید؟
- ب) با تقریب گاز کامل در مرکز خورشید طی این فرآیند، شعاع خورشید را زمانی که هلیوم سوزی آغاز می شود، بر حسب شعاع فعلی به دست آورید.
- ج) اگر درخشندگی خورشید طی این مدت که برای خورشید ۱۷ میلیون سال به طول می انجامد؛ به طور خطی تغییر کند ($L = L_{\text{sun}} + \alpha t$) مقدار ضریب α را محاسبه کنید.
- د) تابعیت تغییرات دمایی سطح ستاره را بر حسب زمان به دست آورده و مقدار عددی آن را در لحظه ی روشن شدن هلیوم به دست آورید.
- (۳۰ نمره)



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک – ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

۷- لحظه‌ی تحویل سال ۱۳۹۵ ساعت ۸ و صفر دقیقه و ۱۲ ثانیه به وقت تهران ($35^{\circ}42'N$, $51^{\circ}24'E$, $1200m$) بود. ارتفاع خورشید از دید ناظری با مختصات ($24^{\circ}37'38''S$, $70^{\circ}24'15''W$, $2635m$) با دقت دقیقه‌ی قوس چقدر بوده است؟ (۲۰ نمره)



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

۸- یک پروژه‌ی مشترک بین رصدخانه ۱ ($19^{\circ}45'35''N, 155^{\circ}28'30''W, 4145m$) و رصدخانه ۲ ($24^{\circ}37'38''S, 70^{\circ}24'15''W, 2635m$) تعریف شده است تا یک جرم آسمانی را به طور پیوسته رصد کنند. یعنی زمانی که جرم می‌خواهد از افق غربی رصدخانه‌ی ۱ خارج شود، در افق شرقی رصدخانه‌ی ۲ دیده می‌شود و رصد جرم مذکور در رصدخانه‌ی ۲ آغاز می‌شود. به دلیل اثرات جوی در ارتفاع‌های پایین، بهترین زمان انتقال وقتی است که ستاره در دو محل ارتفاع یکسانی داشته باشد. این ستاره در یک لحظه از دید ناظر ۱ در سمت 315 درجه و ارتفاع 45 درجه قرار می‌گیرد.

الف) زاویه‌ی میل جرم را به محاسبه کنید.

ب) متأسفانه به دلیل شرایط خاص رصدی امکان ارتفاع یکسان فراهم نیست. سمت و ارتفاع جرمی که در لحظه‌ی انتقال اندازه‌ی زاویه‌ی ساعتی یکسان از دو رصدخانه داشته باشد در رصدخانه‌ی ۱ (A_1, h_1) و رصدخانه‌ی ۲ (A_2, h_2) را به صورت پارامتری محاسبه کنید؟
ج) مقادیر A_1, h_1, A_2, h_2 را محاسبه کرده و در کادرهای مربوطه بنویسید. (۳۰ نمره)

A_1	h_1	A_2	h_2



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

۹- ستارگان در طول تحول خود پس از سپری کردن مدت زمانی طولانی بر روی رشته اصلی (یعنی مرحله‌ی هیدروژن سوزی در هسته‌ی ستاره) وارد فاز شاخه‌ی غول قرمز (RGB) می‌شوند و مدتی را در آنجا سپری می‌کنند. در ابتدای این فاز، ستاره که در ناحیه‌ی زیرین شاخه‌ی غول قرمز قرار دارد دارای یک هسته‌ی هلیومی است و درخشندگی ستاره تقریباً ثابت بوده و فقط ناشی از سوختن هیدروژن در پوسته‌ی ستاره است. ستاره‌ای به جرم $M=M_{\text{sun}}$ و فراوانی هلیومی $Y=0.3$ و فلزیت $Z=0.001$ را در نظر بگیرید که در ناحیه‌ی زیرین شاخه‌ی غول قرمز دارای هسته‌ای به جرم $M_c=0.2 M_{\text{sun}}$ است و پوسته‌ی ستاره با درخشندگی ثابت $L=10L_{\text{sun}}$ در حال تابش است. ستاره در حین تحول از شاخه‌ی غول قرمز بالا می‌رود تا در بالاترین نقطه، جرقه‌ی هلیومی اتفاق بیافتد. پس از جرقه‌ی هلیومی که در دمای حدوداً 10^8 کلوین رخ می‌دهد، ستاره در شاخه‌ی افقی (HB) قرار می‌گیرد؛ که در آنجا در هسته‌ی ستاره، هلیوم به کربن و در پوسته‌ی آن هیدروژن به هلیوم تبدیل می‌شود.

الف) با رسم نمودار هرتزپرانگ-راسل، محل قرار گیری این ستاره در رشته‌ی اصلی (MS)، ناحیه‌ی زیرین شاخه‌ی غول‌ها (BGB)، شاخه‌ی غول قرمز (RGB) و شاخه‌ی افقی (HB) را به صورت تقریبی مشخص کنید.
 ب) در شاخه‌ی غول قرمز، درخشندگی ستاره فقط به جرم هسته و به صورت $L=kM_c^8$ وابسته است که در آن k مقداری ثابت است. محاسبه کنید که ستاره‌ای مانند خورشید چه مدتی را (بر حسب سال) در شاخه‌ی غول قرمز سپری می‌کند. جرم هسته در بالاترین نقطه‌ی شاخه‌ی غول قرمز با رابطه‌ی زیر داده می‌شود. (در دو رابطه زیر جرم‌ها بر حسب جرم خورشید هستند).

$$M_c = 0.476 - 0.221(Y-0.3) - 0.009(3+\log Z) - 0.023(M-0.8)$$

ج) با استدلال بیان کنید که در یک خوشه کروی، فراوانی ستاره‌ها در شاخه‌ی غول قرمز بیش‌تر است یا در شاخه‌ی افقی؟ مدت زمانی که ستاره در شاخه‌ی افقی باقی می‌ماند (t_{HB}) بر حسب میلیون سال با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\text{Log}(t_{\text{HB}}) = 1.795 + 0.506(Y-0.3) + 0.022(\log Z + 3) + 0.077(M-0.8)$$

می‌توانید فرض کنید که ستاره در شاخه‌ی غول قرمز در اثر تحول، تقریباً جرمی معادل 0.2 جرم خورشید را از دست داده باشد. (**۳۵ نمره**)



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

۱۰- فرض کنید کیهان تخت بوده و فقط شامل هیدروژن است که به صورت یکنواخت در آن توزیع شده است. چگالی کیهان در زمان حال از

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

رابطه‌ی محاسبه می‌شود که در آن H_0 ثابت هابل در زمان حال است.

الف) در قرمزگرایی $Z=6$ چگالی عددی هیدروژن‌ها را محاسبه کنید.

اختروش‌ها یا کوازارها، هسته‌های فعال کهکشان‌های دوردست هستند که در تمام طول موج‌های الکترومغناطیسی با شدتی معادل هزار میلیارد ستاره همانند خورشید ($L=10^{12}L_{\text{sun}}$) تابش می‌کنند. فرض کنید هر کوازار در هر ثانیه 10^{56} فوتون یونیزه کننده تابش می‌کند.

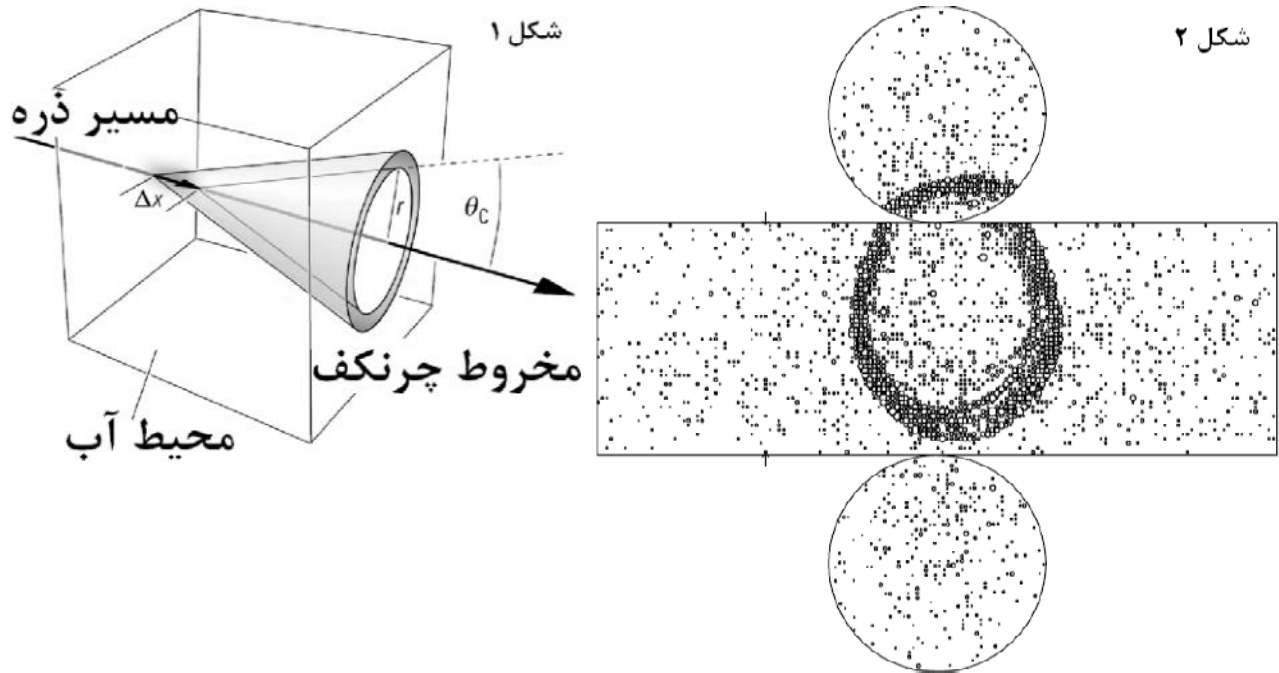
ب) چگالی عددی کوازارها (یعنی تعداد کوازارها در کیلوپارسک مکعب) را به گونه‌ای بیابید به طوری که فوتون‌های آنها همه‌ی کیهان را در قرمزگرایی $Z=6$ با تابش خود یونیزه کنند.

راهنمایی: آهنگ بازترکیب یک الکترون با مجموعه‌ای از پروتون‌ها با چگالی عددی n_p برابر است با $R=an_p$ که در آن مقدار α که به

$$\text{ضریب بازترکیب معروف است برابر است با } \alpha = 3 \times 10^{-13} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \text{ (۳۰نمره)}$$



۱۱- ذرات باردار پر انرژی وقتی از داخل محیطی با ضریب شکست n با سرعتی بیش از سرعت نور در آن محیط ($v > c/n$) عبور می کنند؛ نور چرنکف تابش می کنند. این تابش روی یک حلقه تابیده می شود (شکل ۱).



الف) نشان دهید که زاویه ی راس مخروط چرنکف از رابطه ی $\cos \theta = c/nv$ تبعیت می کند. ضرایب شکست هوا و آب به ترتیب $1/00029$ و $1/333$ هستند. زوایای راس مخروط در هوا و آب را برای ذرات سریعی با سرعت های نزدیک سرعت نور بر حسب درجه به دست آورید.
 ب) آزمایش آشکارساز نوترینوی سوپر کامیوکانده در ژاپن، یک استوانه ی بسیار بزرگ به قطر $39/3$ متر و ارتفاع $41/4$ متر است و 50 هزار تن آب در این محفظه قرار دارد. در سطح داخلی این آشکارساز تعداد 12500 آشکارساز برای ثبت فوتون های نوری نصب شده است. وقتی نوترینویی وارد آب می شود می تواند در داخل آب با یک هسته یا یک الکترون واکنش داده و یک میون پر انرژی در آب تولید کند. این میون به دلیل باردار بودنش و انرژی بالای آن، شکل ۲ را روی دیواره های این آشکارساز ایجاد می نماید. فاصله ی محل تولید میون، از مرکز حلقه ی آشکارسازهای روشن شده (شکل ۲) چند متر است؟ این مقدار عددی را سعی کنید با بیشترین دقت محاسبه کنید. (۳۵ نمره)



دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۵/۲/۹



معاونت دانش پژوهان جوان

۱۲- اغلب سیارات فراخورشیدی رصد شده، جرم‌هایی در حدود جرم مشتری دارند و در فواصل بسیار نزدیک از ستاره‌ی خود قرار گرفته‌اند. از طرفی نواحی نزدیک ستاره‌ها محیط مناسبی برای شکل‌گیری چنین سیارات عظیمی نیستند. اخترفیزیکدان‌ها معتقدند این سیارات بایستی در نواحی دورتر شکل گرفته باشند و به دلایلی به نزدیک ستاره مهاجرت کرده باشند.

این مسئله توصیف ساده‌ای از ساز و کار این مهاجرت است:

فرض کنید سیاره‌ای با جرم مشتری m_J در فاصله r از ستاره‌ای با جرم خورشید در مداری دایره‌ای در حال حرکت است. از این پس همه چیز را شبیه خورشید و مشتری تصور می‌کنیم و ستاره و سیاره را خورشید و مشتری می‌نامیم. برای سادگی مرکز جرم را روی خورشید در نظر می‌گیریم و از محاسبات مرکز جرم مسئله‌ی دو جسم صرف‌نظر می‌کنیم. تصور کنید سرعت سیاره در یک لحظه خاص مختل شود (مثلاً در اثر عبور سیاره‌ای دیگر که از نزدیکی آن حرکت می‌کند). در اثر این برهمکنش سرعت سیاره به طور ناگهانی با فاکتور f تغییر می‌کند.

الف) نیم قطر بزرگ مدار جدید، a' و خروج از مرکز مدار جدید سیاره e' را پس از این اختلال بر حسب r به دست آورید.
ب) در حد $f \rightarrow 0$ مقدار a' و e' را به دست آورید.

ج) نقطه حضیض مدار جدید، خیلی به خورشید نزدیک است و این باعث می‌شود اثرات کشندی بزرگی ناشی از خورشید به روی مشتری اعمال شود که باعث تغییرات جدیدی در مدار سیاره خواهد شد. این فرایند آنقدر ادامه می‌یابد تا اثرات کشندی باعث همزمان شدن مشتری با خورشید شود و نهایتاً مشتری در مداری که در آن آثار کشندی وجود ندارد حرکت می‌کند. (همزمانی: وقتی سرعت زاویه‌ای مشتری به دور خود با سرعت زاویه‌ای آن به دور خورشید برابر شود). نیم قطر بزرگ مدار نهایی مشتری a'' و خروج از مرکز مدار نهایی مشتری e'' را بعد از اعمال اثرات کشندی به دست آورید

د) در حد $e' \rightarrow 1$ ، شعاع مدار جدید a'' ، چند برابر فاصله‌ی حضیض مدار قبلی (r_p') با نیم قطر بزرگ a' است؟

ه) چنین سیاراتی (که به مشتری‌های داغ معروفند؛ hot Jupiter) معمولاً در فاصله 0.05 AU از ستاره مرکزی شان رصد شده‌اند. اگر فرض کنیم شعاع مدار اولیه آنها 5 AU باشد، مقدار انرژی تلف شده توسط اثرات کشندی چند برابر انرژی خودگرانش مشتری است؟ (۴۰)

نمره)

سؤال ۱

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$Z_{gal} = 0.01 \quad , \quad M_z = 10M_{\odot}$$

تمامی ستارگان کهکشان خورشیدگون هستند، در نتیجه برای محاسبه‌ی جرم کل فلزات کافی است از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$M_{z,tot} = Z_{gal} \times 10^{11}M_{\odot} = 10^9M_{\odot}$$

با فرض صفر بودن فلزیت در ابتدای شکل‌گیری کهکشان، در صورتی که تعداد ابرنواخترها را با N ، سن کهکشان را با t_{gal} و آهنگ انفجار ابرنواختری را با \dot{N} نمایش بدهیم، خواهیم داشت:

$$\dot{N} = \frac{N}{t_{gal}} = \frac{M_{z,tot}/M_z}{t_{gal}}$$

با جایگذاری $t_{gal} = 10 \text{ Gyr}$ خواهیم داشت:

$$\dot{N} = 0.01 \text{ yr}^{-1}$$

که معادل ۱ انفجار ابرنواختری در هر ۱۰۰ سال است.

سؤال ۲

کافی است تخمین بزنیم چه کسری از سطح زمین توسط شهرها پوشش داده شده است. احتمال برخورد (P) از تقسیم مساحت کل شهرها (A) به مساحت کره‌ی زمین (A_{\oplus}) به دست می‌آید.

$$P = \frac{A}{A_{\oplus}} = \frac{A}{4\pi R_{\oplus}^2} \quad (*)$$

در ادامه راه‌های مختلفی برای انجام تخمین ارائه شده است.

راه اول: حدوداً سرانه‌ی مساحت در شهرها (A/N) از مرتبه‌ی ۱۰۰ تا ۲۰۰ متر مربع است.

جمعیت کل دنیا (N) حدود ۷ میلیارد نفر است. در نتیجه مساحت کل شهرها چنین به دست می‌آید:

$$A = N \times \left(\frac{A}{N}\right) = (7 \times 10^9) \times (1.5 \times 10^2) = 10^{12} \text{ m}^2$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} P \approx \frac{1}{500} = 0.2 \% \sim 10^{-3}$$

راه دوم: $\frac{3}{4}$ سطح زمین آب است. از میان خشکی‌ها هم حدود ۱٪ شهر هستند.

$$P = 0.01 \times \frac{1}{4} \Rightarrow P \approx 0.25 \% \sim 10^{-3}$$

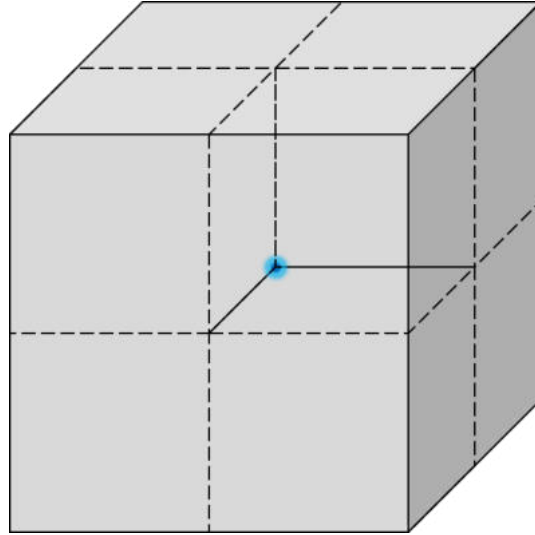
راه سوم: ۷۰ درصد سطح زمین آب است. در یک سوم خشکی‌ها شهرسازی شده است.

اگر نسبت طول یک شهر متوسط به طول کشور ۰/۰۱ باشد، نسبت مساحت آن به مساحت کشور ۰/۰۰۰۱ خواهد بود. فرض می‌کنیم در هر کشور ۱۰۰ شهر متوسط وجود دارد.

$$P = \left(1 - \frac{70}{100}\right) \times \frac{1}{3} \times 100 \times 10^{-4} \Rightarrow P \approx 0.1 \% \sim 10^{-3}$$

سؤال ۳

مکعبی به ضلع l و جرم m را در نظر می‌گیریم. مقدار پتانسیل در مرکز آن Φ_0 و در گوشه ϕ است.



با قراردادن ۸ مکعب کنارهم، مکعب جدیدی به ضلع $L = 2l$ و جرم $M = 2m$ ایجاد می‌شود که مرکز آن بر گوشه‌ی مشترک مکعب‌های قبلی واقع شده است. این مکعب پتانسیل مرکزی Φ_0 را دارد. با توجه به اسکالر بودن میدان پتانسیل، پتانسیل مجموع در یک نقطه را می‌توان با جمع کردن پتانسیل‌ها به دست آورد.

$$\Phi_0 = 8\phi \quad (I)$$

رابطه‌ی پتانسیل در مرکز به فرم زیر است:

$$\phi_0 = -\alpha \frac{Gm}{l}$$

که در آن G ثابت جهانی گرانش و α یک ثابت وابسته به توزیع چگالی است. با توجه به یکنواخت بودن توزیع چگالی، $m \propto l^3$ و در نتیجه:

$$\phi_0 \propto l^2 \Rightarrow \Phi_0 = 4\phi_0 \quad (II)$$

با مقایسه‌ی روابط (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۴

داده های سؤال عبارت اند از:

$$M_c = 0.34 M_{\odot} \quad , \quad R_c = 0.2 R_{\odot} \quad , \quad \bar{m} = m_H$$

الف) با فرض ثابت بودن چگالی خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M_c}{4\pi R_c^3} \Rightarrow \rho = 5.99 \times 10^4 \frac{kg}{m^3}$$

ب) برای محاسبه ی زمان آزاد میانگین، توزیع یکنواختی از ذره های نقطه ای با چگالی عددی ثابت $n = \frac{\rho}{\bar{m}}$ را در نظر می گیریم. یک اتم هیدروژن با شعاع مؤثر ۲ برابر شعاع اتم بور ($2r_B$) از میان این ذرات در حال عبور است. سطح مقطع مؤثر این اتم برابر است با:

$$\sigma = \pi \times (2r_B)^2 = 4\pi r_B^2$$

هنگامی که این اتم طول l را می پیماید، تعداد ذرات جاروب شده توسط آن برابر است با:

$$N = nV = n \times \sigma vt$$

برای محاسبه ی سرعت ذرات، کافی است به جرم آن ها (m_H) و دمای متوسط خورشید (T_{mean}) توجه کنیم. با استفاده از رابطه ی انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \bar{m} v^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3kT}{\bar{m}}}$$

زمان متوسط لازم برای انجام یک برخورد به ازای $N = 1$ به دست می آید:

$$t = \frac{1}{n\sigma v} = \frac{1}{4\pi r_B^2 \rho \sqrt{\frac{3kT}{\bar{m}}}} \Rightarrow t = 2.37 \times 10^{-18} s$$

ج) برای محاسبه ی مسافت متوسط هر برخورد (مسافت آزاد میانگین):

$$l = vt = \frac{1}{n\sigma} = \frac{\bar{m}}{4\pi r_B^2 \rho} \Rightarrow l = 7.93 \times 10^{-13} m$$

سؤال ۵

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$n = 0.1 \text{ pc}^{-3} \quad , \quad P = 10^{-6}$$

الف) راه اول: تعداد ستارگان دارای حیات تا فاصله‌ی d به کمک رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$N = P \times nV = P \times \frac{4}{3} \pi d^3 n$$

در این جا nV تعداد کل ستارگان تا فاصله‌ی d و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = 1$ می‌شود، پاسخ مسئله است.

$$N = 1 \Rightarrow d = \left(\frac{3}{4\pi P n} \right)^{1/3} \Rightarrow d = 1.34 \times 10^2 \text{ pc} \sim 10^2 \text{ pc}$$

راه دوم: مکعبی به ضلع d را در نظر می‌گیریم که در آن یک میلیون ستاره باشد.

$$N = P \times nV = P \times nd^3$$

در این جا nV تعداد کل ستارگان در مکعب و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = 1$ می‌شود، پاسخ مسئله است.

$$N = 1 \Rightarrow d = \left(\frac{1}{Pn} \right)^{1/3} \Rightarrow d = 2.15 \times 10^2 \text{ pc} \sim 10^2 \text{ pc}$$

ب) ابتدا قدر سیاره از دید ناظر زمینی (m_l) را به دست آورده و سپس قطر دهانه‌ی متناظر با آن را می‌یابیم.

راه اول: با فرض این که سیاره‌ی مورد نظر، دارای مشخصاتی (شعاع و اندازه‌ی مدار) شبیه به زمین و یک

جسم سیاه ایده‌آل باشد. آهنگ تابش انرژی توسط آن برابر با آهنگ دریافت انرژی از ستاره خواهد بود.

$$L_{out} = L_{in} = F \times A_{eff} = F_{\odot} \times \pi R^2$$

در این جا F شار دریافتی در محل سیاره، F_{\odot} ثابت خورشیدی و A_{eff} مساحت مؤثر سیاره است. شار دریافتی

سیاره در زمین را به دست آورده و قدر معادل با آن را حساب می‌کنیم.

با توجه به این که نور سیاره به صورت میانگین روی یک نیم‌کره پخش می‌شود و مقایسه با خورشید:

$$F_l = \frac{L_{out}}{2\pi d^2} \quad , \quad m_l - m_{\odot} = -2.5 \log \frac{F_l}{F_{\odot}}$$

$$\Rightarrow m_l = m_{\odot} - 2.5 \log \left(\frac{L_{out}}{2\pi d^2 F_{\odot}} \right) = m_{\odot} - 2.5 \log \left(\frac{R^2}{2d^2} \right) \Rightarrow m_l = 32.5$$

پاسخنامه‌ی تشریحی مرحله ۲ | صفحه‌ی ۷

راه دوم: وقتی سیاره‌ای را کنار خورشید مشاهده می‌کنیم، بازتاب نور خورشید از آن سیاره را مشاهده می‌نماییم. قدر چنین سیاره‌ای (m_0) حدوداً ۲- است. قدر این سیاره از دید زمین (m) چنین به دست می‌آید:

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{F}{F_0}, \quad F = \frac{L}{4\pi d^2}$$
$$\Rightarrow m = m_0 + 5 \log \frac{d}{d_0} \Rightarrow m = 34.5$$

برای محاسبه‌ی قطر دهانه‌ی متناظر با m_l ، از مشخصات چشم انسان (m_{eye} و D_{eye}) کمک می‌گیریم.

$$m_l - m_{eye} = -2.5 \log \left(\frac{D_{eye}}{D_l} \right)^2 \Rightarrow D_l \sim 1 \text{ km}$$

سؤال ۶

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$T_c = 10^8 \text{ K}$$

الف) می‌دانیم:

$$[P] = ML^{-1}T^{-2} \quad , \quad [U] = ML^2T^{-2} \quad , \quad [G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

با توجه به تابعیت فشار (P) و پتانسیل گرانشی (U) از G ، M و R می‌توان گفت:

برای فشار:

$$P = CG^\alpha M^\beta R^\gamma \Rightarrow [P] = [G^\alpha][M^\beta][R^\gamma]$$

$$\Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}T^{-2\alpha}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ 3\alpha + \gamma = -1 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -4 \\ -2\alpha = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = C \frac{GM^2}{R^4}$$

برای پتانسیل گرانشی:

$$U = C'G^\alpha M^\beta R^\gamma \Rightarrow [U] = [G^\alpha][M^\beta][R^\gamma]$$

$$\Rightarrow ML^2T^{-2} = M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}T^{-2\alpha}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 2 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1 \\ -2\alpha = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = C' \frac{GM^2}{R}$$

ب) از قسمت الف می‌دانیم:

$$P \propto \frac{M^2}{R^4}$$

با استفاده از قانون گاز کامل:

$$P = \frac{\rho kT}{\bar{m}} \propto \frac{\rho T}{\bar{m}}$$

پاسخنامه‌ی تشریحی مرحله ۲ | صفحه‌ی ۹

اگر فشار ستون جرم و فشار گاز کامل را برابر قرار دهیم:

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \frac{\rho T}{\bar{m}} \Rightarrow T \propto \frac{M^2}{R^4 \rho} \bar{m}$$

با توجه به این که جرم ستاره در این مدت تقریباً ثابت باقی می‌ماند و جرم متوسط ذرات هسته‌ی هلیومی تقریباً ۴ برابر جرم متوسط ذرات هسته‌ی هیدروژنی است:

$$\frac{T_2}{T_1} = 4 \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \left(4 \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2 T_2}\right)^{1/4}$$

با دانستن شعاع و دمای فعلی خورشید (R_1 و T_1)، $T_2 = T_c$ و توجه به ۲ برابر شدن چگالی مرکزی، خواهیم داشت:

$$R_2 = 0.74 R_{\odot}$$

صرف نظر کردن از تغییر ترکیبات هسته به پاسخ $R_2 = 0.52 R_{\odot}$ می‌انجامد.

(ج) از قسمت الف می‌دانیم:

$$|U| \propto \frac{GM^2}{R}$$

با استفاده از قضیه‌ی ویریال، در می‌یابیم که انرژی کل ستاره ضریبی از انرژی پتانسیل گرانشی آن است. پس می‌توان گفت:

$$E \approx -\frac{GM^2}{R} \quad (I)$$

اندازه‌ی اختلاف انرژی ستاره در این مدت برابر با میزان انرژی تابش شده توسط آن است:

$$dE = -Ldt \Rightarrow \Delta E = E_2 - E_1 = -\int_0^t Ldt \quad (*)$$

با توجه به رابطه‌ی $L = L_{\odot} + \alpha t$ خواهیم داشت:

$$\int_0^t Ldt = \int_0^t (L_{\odot} + \alpha t) dt = L_{\odot}t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (II)$$

با جایگذاری روابط (I) و (II) در رابطه‌ی (*) خواهیم داشت:

$$GM^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = L_{\odot}t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (+)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{t^2} \left[GM^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) - L_{\odot}t \right] = \frac{2GM^2}{t^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) - \frac{2L_{\odot}}{t}$$

با جایگذاری مقادیر جرم، شعاع اولیه و نهایی خورشید و $t = 17 \text{ Myr}$ خواهیم داشت:

$$\alpha = -5.09 \times 10^{11} \frac{\text{W}}{\text{s}} = -0.042 \frac{L_{\odot}}{\text{Myr}}$$

(د) با استفاده از قانون استفان-بولتزمن:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \Rightarrow T_e = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2} \right)^{1/4}$$

اگر از رابطه‌ی $L = L_{\odot} + \alpha t$ استفاده کنیم:

$$T_e = \left(\frac{L_{\odot} + \alpha t}{4\pi\sigma R^2} \right)^{1/4}$$

با استفاده از رابطه‌ی (+)، می‌توان تابعیت زمانی شعاع ستاره را هم به دست آورد:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{GM^2} \left(L_{\odot} t + \frac{\alpha t^2}{2} \right) + \frac{1}{R_0}$$

$$\Rightarrow T_e = \left(\frac{L_{\odot} + \alpha t}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{GM^2} \left(L_{\odot} t + \frac{\alpha t^2}{2} \right) + \frac{1}{R_0} \right]^2 \right)^{1/4}$$

با جایگذاری مقادیر مربوطه، T_e به دست می‌آید.

$$T_e = 4900 \text{ K}$$

سؤال ۷

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$t_{new} = 8^h 00^m 12^s$$

$$\varphi_t = 35^\circ 42' N \quad , \quad l_t = 51^\circ 24' E \quad , \quad h_t = 1200 m$$

$$\varphi = 24^\circ 37' 38'' S \quad , \quad l = 70^\circ 24' 15'' W \quad , \quad h = 2635 m$$

لحظه‌ی تحویل سال زمانی است که میل و بعد خورشید هر دو صفر هستند. با توجه به مشخص بودن میل و عرض جغرافیایی، برای تعیین ارتفاع خورشید کافی است زاویه ساعتی آن از دید ناظر دوم را حساب کنیم. ابتدا با توجه به مختصات ارائه شده برای شهر تهران و روابط مربوط به زمان:

$$t = HAMS + 12^h \quad (I)$$

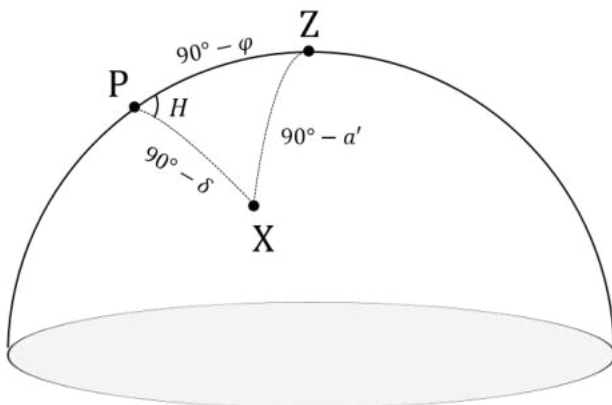
$$ET = HA_{\odot} - HAMS = RAMS - RA_{\odot} = 0 \Rightarrow HA_{\odot} = HAMS$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} HA_{\odot,t} = t - 12^h = 20^h 00^m 12^s$$

t زمان محلی، $HAMS$ زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین، HA_{\odot} زاویه‌ی ساعتی خورشید، $RAMS$ بعد خورشید میانگین، RA_{\odot} بعد خورشید و ET تعدیل زمان است. توجه کنید که با توجه به اعمال ساعت تابستانه در ساعت ۲۳:۵۹ روز اول فروردین، نیازی به در نظر گرفتن ساعت تابستانه نیست.

حال زاویه ساعتی از دید ناظر را به دست می‌آوریم. مطابق شکل:

$$HA_{\odot} = HA_{\odot,t} - \Delta l = 11^h 52^m 59^s$$

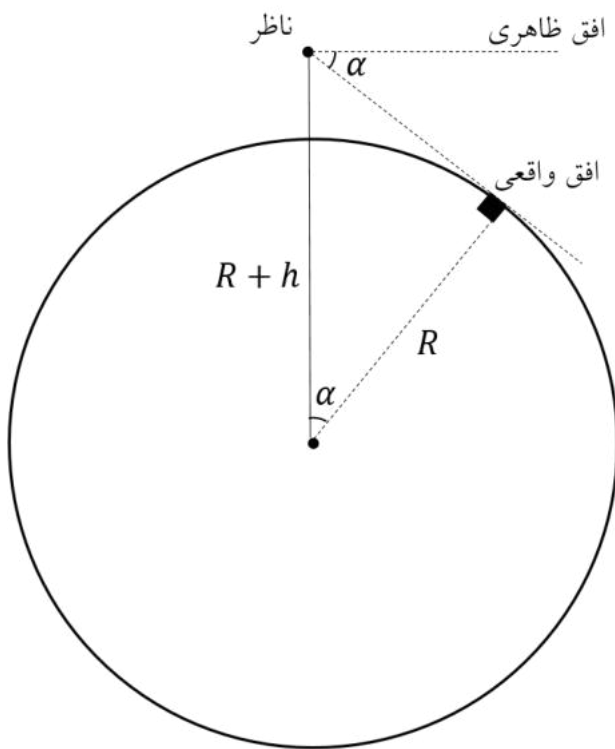


برای حل مثلث کروی مقابل، کافی است از رابطه‌ی کسینوس استفاده کنیم:

$$\sin \alpha' = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H$$

$$\Rightarrow \alpha' = -65.31^\circ$$

پاسخنامه‌ی تشریحی مرحله ۲ | صفحه‌ی ۱۲



به دلیل افت افق ناشی از ارتفاع ناظر، ارتفاع واقعی خورشید کمی بیشتر است. برای محاسبه‌ی میزان افت افق چنین عمل می‌کنیم:

$$\cos \beta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \beta = 1.65^\circ$$

مقدار نهایی ارتفاع برابر است با:

$$a = a' + \beta \Rightarrow a = -63^\circ 40'$$

سؤال ۸

داده‌های سؤال عبارت اند از:

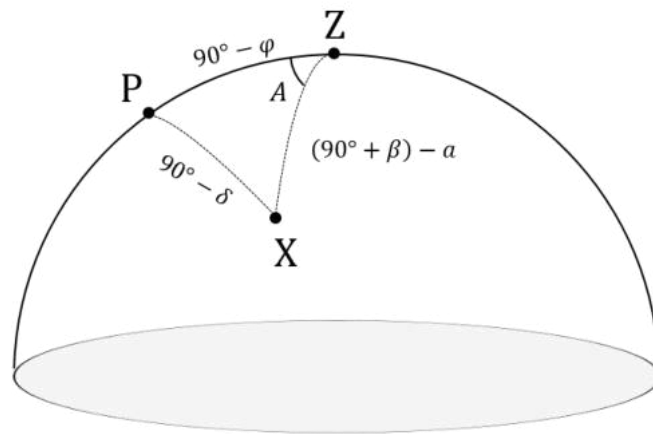
$$\varphi_1 = 19^\circ 45' 35'' N \quad , \quad l_1 = 155^\circ 28' 30'' W \quad , \quad h_1 = 4145 m$$

$$\varphi_2 = 24^\circ 37' 38'' S \quad , \quad l_2 = 70^\circ 24' 15'' W \quad , \quad h_2 = 2635 m$$

الف) در این مسئله هر دو ناظر دارای افق هستند. در این شرایط مجموع ارتفاع و فاصله‌ی سرسویی اجرام برابر با $90^\circ + \beta$ خواهد بود که β میزان افت افق است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\cos \beta = \frac{R}{R + h} \Rightarrow \beta_1 = 2.06^\circ \quad , \quad \beta_2 = 1.65^\circ$$

برای به دست آوردن میل ستاره‌ی مورد نظر، کافی است در مثلث مقابل از رابطه‌ی کسینوس استفاده کنیم.



$$\sin \delta = \sin(a - \beta_1) \sin \varphi_1 + \cos(a - \beta_1) \cos \varphi_1 \cos(360^\circ - A)$$

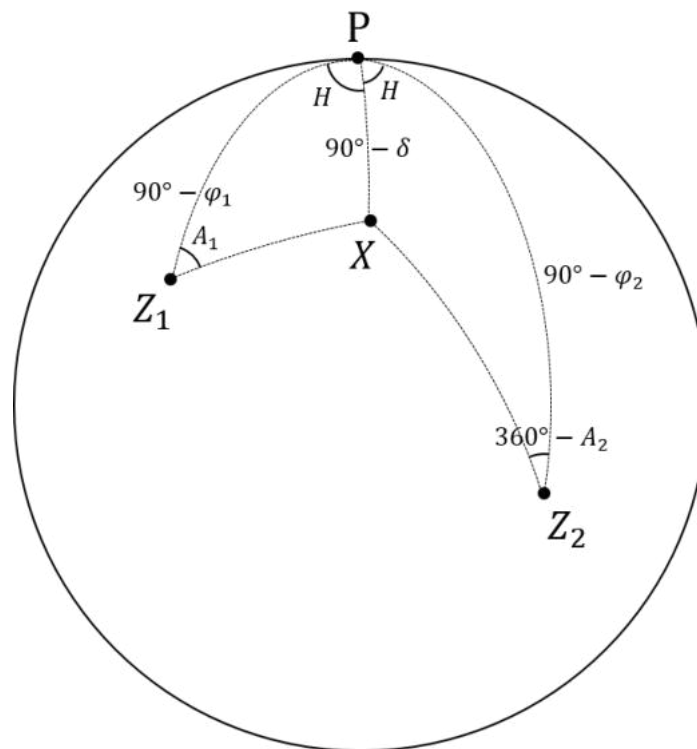
$$\Rightarrow \delta = 45.85^\circ$$

مقدار میل بدون در نظر گرفتن افت افق، $\delta = 45.20^\circ$ به دست می‌آید.

ب) انتقال از رصدخانه‌ی ۱ به ۲ ممکن نیست. هنگام انتقال از رصدخانه‌ی ۲ به ۱، اندازه‌ی زاویه‌ی ساعتی ستاره از دید دو رصدخانه برابر است با:

$$H = \frac{l}{2} = 42.54^\circ$$

با استفاده از روابط کروی در مثلث‌های ذکر شده، می‌توان مقادیر سمت و ارتفاع را محاسبه کرد.



:PZ₁X

کسینوس: $\sin(a_1 - \beta_1) = \sin \delta \sin \varphi_1 + \cos \delta \cos \varphi_1 \cos H$

$$\Rightarrow a_1 = \beta_1 + \sin^{-1}(\sin \delta \sin \varphi_1 + \cos \delta \cos \varphi_1 \cos H)$$

چهارجزیی: $\sin \varphi_1 \cos H = \cos \varphi_1 \tan \delta - \sin H \cot A_1$

$$\Rightarrow A_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sin H}{\cos \varphi_1 \tan \delta - \sin \varphi_1 \cos H}\right)$$

:PZ₂X

کسینوس: $\sin(a_2 - \beta_2) = \sin \delta \sin \varphi_2 + \cos \delta \cos \varphi_2 \cos H$

$$\Rightarrow a_2 = \beta_2 + \sin^{-1}(\sin \delta \sin \varphi_2 + \cos \delta \cos \varphi_2 \cos H)$$

$$\sin \varphi_2 \cos H = \cos \varphi_2 \tan \delta + \sin H \cot A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sin H}{\sin \varphi_2 \cos H - \cos \varphi_2 \tan \delta}\right)$$

(ج) جدول کامل شده به صورت زیر است (ردیف دوم، مقادیر محاسبه شده بدون افت افق هستند):

A_1	a_1	A_2	a_2
43.19°	48.58°	331.47°	11.30°
44.06°	46.76°	331.06°	10.15°

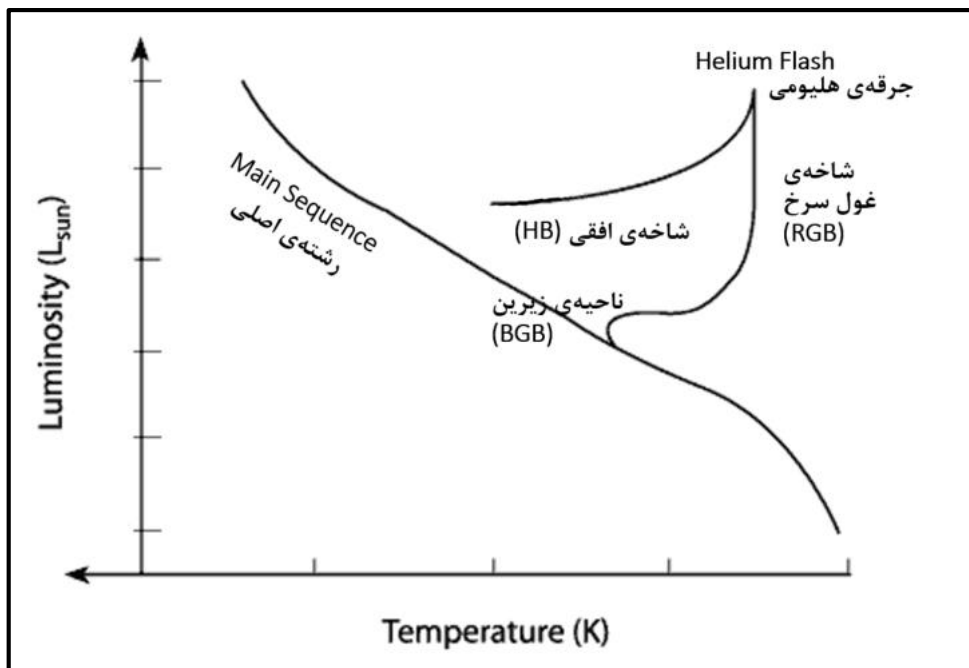
سؤال ۹

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$M = M_{\odot} \quad , \quad M_{c,0} = 0.2 M_{\odot} \quad , \quad L_0 = 10 L_{\odot}$$

$$Y = 0.3 \quad , \quad Z = 0.001 \quad , \quad T_{flash} = 10^8 K$$

الف) تحول ستاره در نمودار $H - R$ به شکل زیر است.



ب) ابتدا مقدار k را در رابطه‌ی $L = kM_c^8$ به دست می‌آوریم:

$$k = \frac{L_0}{M_{c,0}^8} = 3.91 \times 10^6 \frac{L_{\odot}}{M_{\odot}^8}$$

سپس، با استفاده از رابطه‌ی ارائه شده، جرم نهایی هسته را به دست می‌آوریم:

$$M_c = 0.476 - 0.221(Y - 0.3) - 0.009(3 + \log Z) - 0.023(M - 0.8)$$

$$\Rightarrow M_c = 0.471 M_{\odot}$$

در مدت زمان dt جرمی برابر با dM_c در همجوشی مشارکت می‌کند.

$$dE = Ldt = 0.007 \times dM_c \times c^2 \quad , \quad L = kM_c^8$$

$$\Rightarrow dt = \frac{0.007c^2}{k} \frac{dM_c}{M_c^8} \Rightarrow \int_0^{t_{RGB}} dt = \frac{0.007c^2}{k} \int_{M_{c,0}}^{M_c} \frac{dM_c}{M_c^8}$$

$$\Rightarrow t_{RGB} = \frac{0.007c^2}{k} \left[\frac{M_c^{-7}}{-7} \right]_{M_{c,0}}^{M_c} = \frac{c^2}{1000k} \left(\frac{1}{M_{c,0}^7} - \frac{1}{M_c^7} \right) \Rightarrow t_{RGB} = 290 \text{ Myr}$$

پاسخنامه‌ی تشریحی مرحله ۲ | صفحه‌ی ۱۶

ج) با فرض ثابت ماندن Y و Z در این مدّت و استفاده از رابطه‌ی داده شده، مدّت زمان حضور در شاخه‌ی افقی را محاسبه می‌کنیم:

$$\log t_{HB} = 1.795 + 0.506(Y - 0.3) + 0.022(\log Z + 3) + 0.077(M - 0.8)$$
$$\Rightarrow t_{HB} = 60 \text{ Myr}$$

با توجه به مدّت زمان بیشتر حضور ستارگان در شاخه‌ی غول سرخ، انتظار می‌رود فراوانی این نوع ستارگان بیشتر باشد.

سؤال ۱۰

الف) طبق صورت سؤال، مقدار چگالی در زمان حال از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید (کیهان تخت):

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Rightarrow \rho_0 = 1.00 \times 10^{-26}$$

در رابطه‌ی بالا H_0 ثابت هابل است. با استفاده از پایستگی جرم در کیهان ماده غالب (شامل هیدروژن):

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$$

با استفاده از رابطه‌ی قرمزگرایی و ضریب مقیاس $(1+z = a_0/a)$:

$$\rho(z) = \rho_0(1+z)^3, \quad \rho = n\bar{m}$$

$$\Rightarrow n = n_0(1+z)^3 = \frac{\rho_0}{m_H}(1+z)^3$$

m_H جرم هیدروژن است. به ازای $z = 6$ خواهیم داشت:

$$n = 2.05 \times 10^3 \text{ m}^{-3}$$

ب) آهنگ تابش فوتون توسط هر کوازار برابر با $\dot{N}_Q = 10^{56} \text{ s}^{-1}$ است. در صورتی که چگالی تعداد کوازارها

n_Q باشد. آهنگ ساطع شدن فوتون‌ها در واحد حجم برابر است با:

$$\dot{n}_\gamma = \dot{N}_Q n_Q$$

آهنگ بازترکیب یک الکترون با مجموعه‌ای از پروتون‌ها با چگالی عددی n_p برابر با αn_p است. در صورتی

که چگالی عددی الکترون‌های آزاد n_e باشد، آهنگ بازترکیب الکترون‌ها در واحد حجم برابر است با:

$$\dot{n}_e = \alpha n_p n_e = \alpha n_p^2$$

که تساوی آخر به خاطر یونیزه بودن عالم (برابری تعداد الکترون‌های آزاد و پروتون‌ها) برقرار است.

با فرض این که هر فوتون در نهایت یک اتم را یونیزه کند، برای یونیزه بودن کیهان لازم است آهنگ تولید

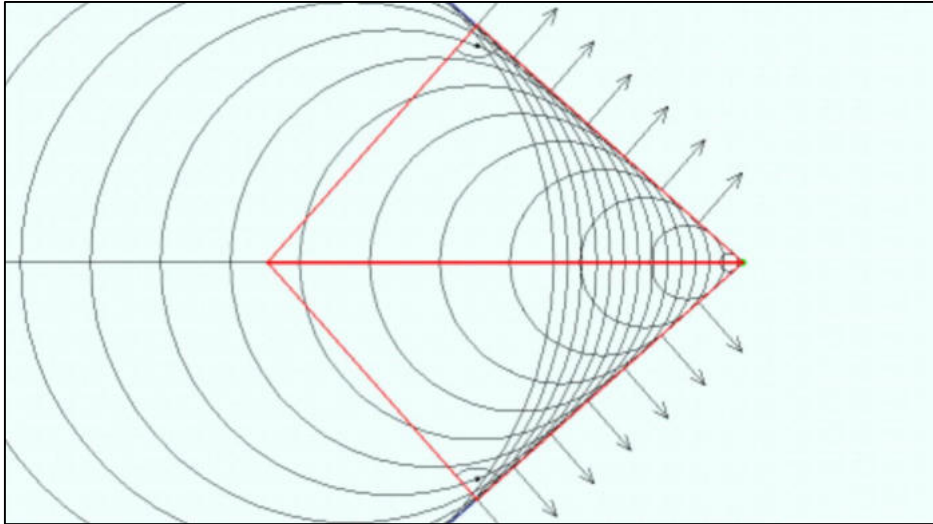
فوتون (یونش اتم‌ها) از آهنگ بازترکیب بیشتر برابر باشد.

$$\dot{n}_\gamma \geq \dot{n}_e \Rightarrow \dot{N}_Q n_Q \geq \alpha n_p^2 \Rightarrow n_Q \geq \frac{\alpha n_p^2}{\dot{N}_Q}$$

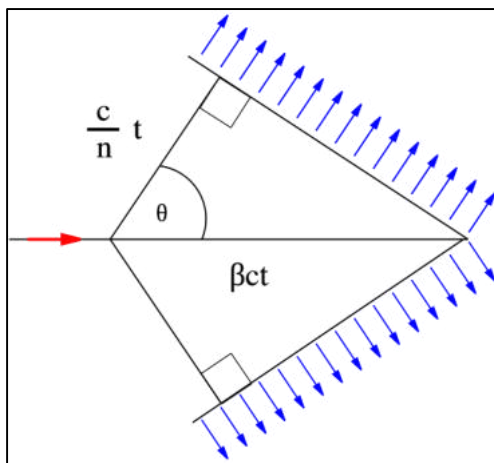
$$\Rightarrow n_Q \geq 1.26 \times 10^{-68} \text{ m}^{-3} = 3.72 \times 10^{-10} \text{ kpc}^{-3}$$

سؤال ۱۱

شکل زیر نحوه‌ی شکل‌گیری مخروط چرنکف را نمایش می‌دهد:



ذره از سمت چپ شروع به حرکت کرده و بیشتر بودن سرعت آن از سرعت پیشروی جبهه‌های موج، موجب شکل‌گیری مخروطی با زاویه‌ی نیم‌رأس θ می‌شود. اگر مبدأ زمانی حرکت ذره را $t = 0$ در نظر بگیریم، مسافت پیموده شده توسط آن $x_p = vt$ و مسافت پیموده شده توسط اولین جبهه‌ی نور $x_\gamma = \frac{c}{n}t$ است.



با توجه به شکل، زاویه‌ی چرنکف (*Cherenkov Angle*) چنین محاسبه می‌شود:

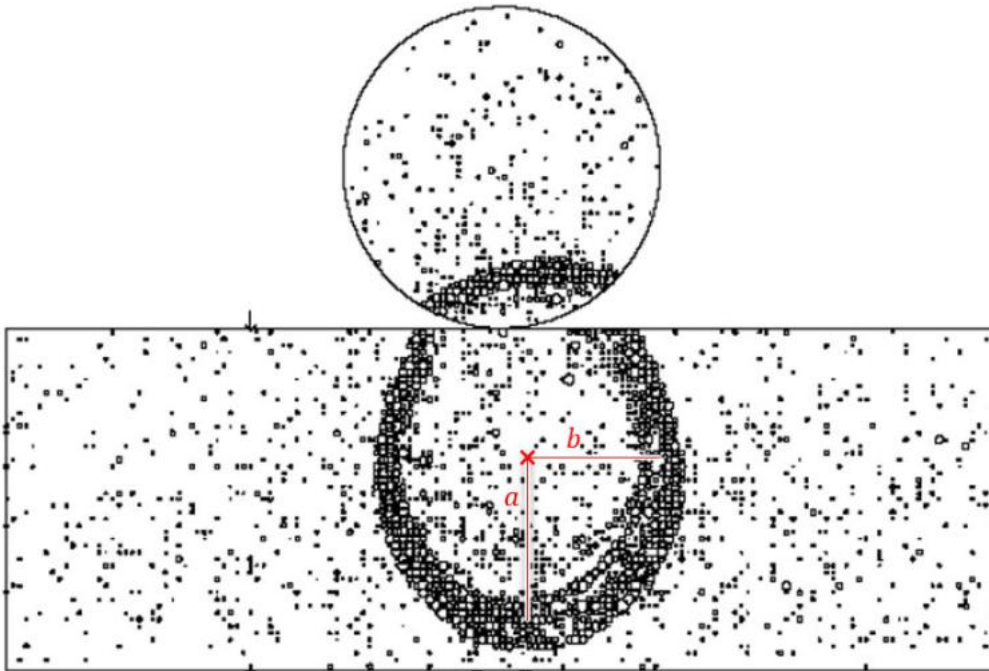
$$\cos \theta = \frac{x_\gamma}{x_p} = \frac{c}{nv}$$

جایگذاری $n_1 = 1.00029$ برای هوا و $n_2 = 1.333$ برای آب نتیجه می‌دهد:

$$\theta_1 = 1.4^\circ \quad , \quad \theta_2 = 41.4^\circ$$

(ب) با رسیدن مخروط تابش (دارای زاویه‌ی نیم‌رأس $90^\circ - \theta$) به دیواره‌های آشکارساز و روشن شدن لامپ‌ها، حلقه‌ی چرنکف (*Cherenkov Ring*) شکل می‌گیرد. توجه کنید که قطر این حلقه به $90^\circ - \theta$ مربوط می‌شود.

حاصل تقاطع مخروط چرنکف با دیواره‌ی مخزن، چیزی شبیه به یک بیضی است. در ادامه با صرف نظر از انحنای مخزن، فرض می‌کنیم این شکل بیضی باشد.

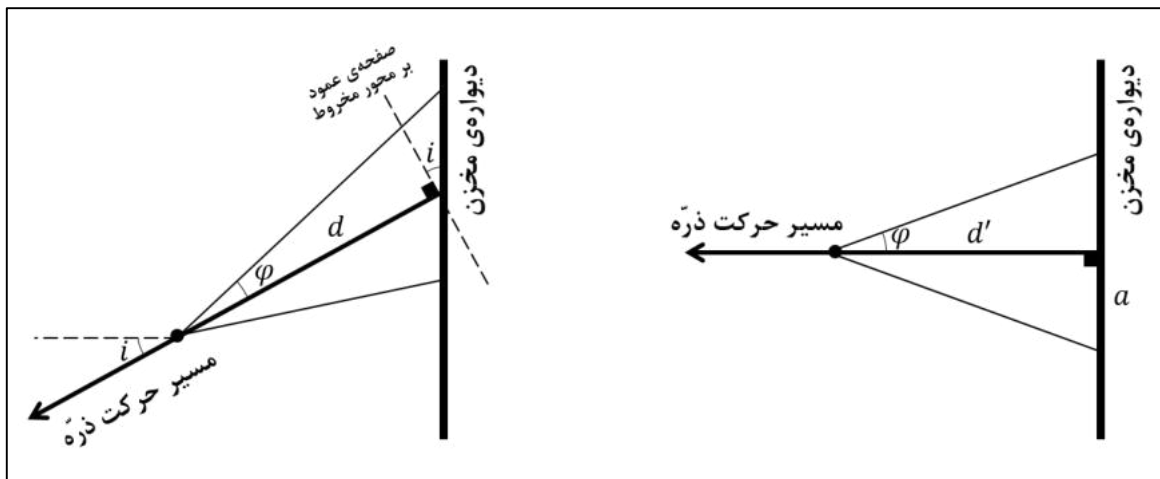


با استفاده از مقیاس‌های ارائه شده:

$$a = 16.0 \text{ m} \quad , \quad b = 13.5 \text{ m}$$

در صورتی که مسیر حرکت ذره عمود بر دیواره‌ی مخزن بود، دایره‌ای از لامپ‌ها به شعاع a روشن می‌شد. حال که شکل حلقه بیضی است، می‌توان زاویه‌ی انحراف مسیر ذره از مسیر عمود (i) را چنین محاسبه کرد:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$



با توجه به شکل بالا ($\varphi = 90^\circ - \theta$):

$$d' = a \cot \varphi \quad , \quad d = d' \sec i$$

$$\Rightarrow d = \frac{a}{\tan \varphi \cos i} = \frac{a^2 \tan \theta}{b} \Rightarrow d = 16.7 \text{ m}$$

سؤال ۱۲

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$e = 0, \quad r, m_J$$

الف) سرعت مشتری به دلیل اختلال، f برابر می‌شود. در نتیجه انرژی مکانیکی آن برابر است با:

$$\begin{aligned} E' = K' + U' &= \frac{1}{2} m_J (fv)^2 - \frac{GM_{\odot} m_J}{r}, \quad v^2 = \frac{GM_{\odot}}{r} \\ \Rightarrow -\frac{GM_{\odot} m_J}{2a'} &= \frac{f^2 GM_{\odot} m_J}{2r} - \frac{GM_{\odot} m_J}{r} \\ \Rightarrow \frac{1}{a'} &= \frac{1}{r} (2 - f^2) \Rightarrow a' = \frac{r}{2 - f^2} \quad (I) \end{aligned}$$

با استفاده از روابط مقطع مخروطی خواهیم داشت:

$$a'(1 - e'^2) = \frac{h^2}{\mu} \quad (*)$$

در این رابطه h تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم و μ پارامتر گرانشی است. با توجه به عمود بودن بردار مکان و سرعت در مدار دایروی، مقدار h چنین به دست می‌آید:

$$h = |\vec{r} \times (f\vec{v})| = rfv \quad (II)$$

با توجه به قرارگیری خورشید بر مرکز جرم، $\mu = GM_{\odot}$ است. با جایگذاری معادلات (I) و (II) در معادله‌ی (*) خواهیم داشت:

$$\frac{GM_{\odot} r}{2 - f^2} (1 - e'^2) = r^2 f^2 \frac{GM_{\odot}}{r} \Rightarrow e' = \sqrt{1 - 2f^2 + f^4} = 1 - f^2$$

ب) در حد $f \rightarrow 0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{f \rightarrow 0} a' = \frac{r}{2}, \quad \lim_{f \rightarrow 0} e' = 1$$

مدار به شکل یک خط خواهد بود.

ج) مداری که در آن اثرات کشندی وجود ندارد، یک مدار دایروی است. پس $e'' = 0$. با توجه به این که هنگام اعمال اثرات کشندی، تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته باقی می‌ماند، با فرض ثابت ماندن سرعت زاویه‌ای چرخشی مشتری در این مدت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} h' = h'' &\Rightarrow GM_{\odot} a' (1 - e'^2) = GM_{\odot} a'' \\ &\Rightarrow a'' = a' (1 - e'^2) \end{aligned}$$

د) ابتدا رابطه‌ی r'' با r'_p را به دست می‌آوریم

$$a'' = a'(1 - e')(1 + e') \quad , \quad r'_p = a'(1 - e')$$

$$\Rightarrow a'' = (1 + e')r'_p$$

در حد $e' \rightarrow 1$ خواهیم داشت:

$$\lim_{e' \rightarrow 1} r'' = 2r'_p$$

توجه شود که $e' \rightarrow 1$ الزاماً معادل با $f \rightarrow 0$ نیست!

ه) انرژی تلف شده توسط اثرات کشندی، برابر با اختلاف انرژی مکانیکی مدار نهایی و مدار اولیه است.

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_{\odot}m_J}{2} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

مقدار $r_f = 0.05 AU$ و $r_i = 5 AU$ است. با فرض یکنواخت بودن توزیع چگالی، اندازه‌ی انرژی خودگرانشی مشتری برابر است با:

$$|U_J| = \frac{3}{5} \frac{Gm_J^2}{R_J}$$

در نتیجه:

$$\frac{\Delta E}{|U_J|} = \frac{5}{6} \frac{M_{\odot}}{m_J} \frac{R_J(r_i - r_f)}{r_i r_f} \approx 8.5$$

مشتری به واسطه‌ی قفل مداری انرژی‌ای آزاد می‌کند که از انرژی پتانسیل گرانشی‌اش بیشتر است. چگونگی آزاد شدن این انرژی، معمای برای دانشمندان است.



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادها و درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»



معاونت دانش پژوهان جوان

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۹ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک -

تاریخ: ۱۳۹۴/۲/۱۷ - ساعت: ۱۴:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه

شماره پرونده: .
کد ملی:
نام پدر:
نام مدرسه:

استان:
منطقه:
حوزه:
پایه تحصیلی:

شماره سندلی

.

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخنامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.

6.67×10^{-11}	$N m^2 kg^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
5.67×10^{-8}	$W m^{-2} K^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
7.56×10^{-16}	$J m^{-3} K^{-4}$	ثابت تابش	$a=4\sigma/c$
1.38×10^{-23}	$J K^{-1}$	ثابت بولتزمن	k_B
6.63×10^{-34}	$J.s$	ثابت پلانک	h
1.6×10^{-19}	C	بار الکترون	e
9.1×10^{-31}	kg	جرم الکترون	m_e
1.67×10^{-27}	kg	واحد جرم اتمی	$1u$
3.0×10^8	m/s	سرعت نور	c
3.09×10^{16}	m	پارسک	pc
1.5×10^{11}	m	واحد نجومی	$r_{earth}=AU$
9.46×10^{15}	m	سال نوری	Ly
6.96×10^8	m	شعاع خورشید	R_{sun}
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید	M_{sun}
6.38×10^6	m	شعاع زمین	R_{earth}
5.97×10^{24}	kg	جرم زمین	M_{earth}
۲۰۶۲۶۵	$Arc\ sec$	رادبان	$Radian$
1×10^{-10}	m	آنگستروم	A
-۱۲۷۴		قدر ظاهری ماه بدر	m_{moon}
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید	L_{sun}
۴۷۲		قدر مطلق خورشید	M_{sun}
-۲۶۷		قدر ظاهری خورشید	m_{sun}
۷۳	$(km/s)/Mpc$	ثابت هابل	H_0
1.37×10^3	Wm^{-2}	ثابت خورشیدی	f_{sun}
6.02×10^{23}	mol^{-1}	عدد آووگادرو	N_A
۸۳۱۴	$J mol^{-1} K^{-1}$	ثابت گازها	R
5.29×10^{-11}	m	شعاع اتم بور	r_B
1.6×10^{-19}	J	الکترون ولت	eV
۱۶۴۸۱۹۵	km^2	مساحت ایران	$S_{ایران}$
$51^{\circ} 25'E, 35^{\circ} 42'N$	$Degree$	مختصات جغرافیایی تهران	λ, β_{Tehran}
۱۸	gr	یک مول آب	H_2O
۴	gr	یک مول هلیوم	He
3.15×10^7	s	سال	Yr

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۱- یکی از روشهای فاصله یابی استفاده از موج ضربه‌ی ایجاد شده در اطراف ابرنواخترها است. این روش به دلیل مستقل بودن از روشهای دیگر فاصله یابی، به عنوان روشی برای کالیبراسیون روشهای استاندارد فاصله یابی ابرنواخترها مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- ابرنواختری در سال ۱۹۰۹ مشاهده شده است. در حال حاضر (یعنی سال ۲۰۱۵) گاز خارج شده از آن در شعاع ۲۰ ثانیه‌ی قوسی اطراف آن دیده می‌شود. سرعت انبساط این گاز در ابتدای انفجار در حدود ۱۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه بوده و بطور خطی افت کرده است، بطوری که سرعت انبساط کنونی آن به حدود ۴۰۰ کیلومتر بر ثانیه رسیده است.
- الف) سرعت متوسط انبساط گاز در این مدت چند کیلومتر بر ثانیه است؟
- ب) این ابرنواختر در چه فاصله‌ای از ما قرار دارد؟ پاسخ خود را بر حسب پارسک بیان کنید.
- (۲۵ نمره)

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۲- در پروژه‌ی مساحی GAIA، نزدیک به یک میلیارد ستاره اخترسنجی خواهد شد؛ که به کمک نتایج آن فواصل ستاره‌ها با دقت بسیار بالایی و به روش اختلاف منظر به دست خواهند آمد. در این پروژه، خطای اندازه‌گیری در اخترسنجی ستاره‌هایی با قدر ظاهری $m=16$ برابر با ۲۳ میکروثانیه‌ی قوسی است.
- درصد خطا در اندازه‌گیری فاصله‌ی ستاره‌های خورشیدگون با قدر مطلق $M_V = 5$ که با قدر ظاهری ۱۶ دیده می‌شوند را بدست آورید. (۳۰ نمره).

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

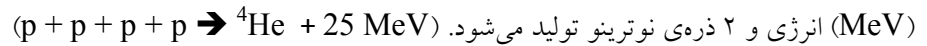
- ۳- در روز ۱۵ اردیبهشت سال ۱۳۹۴ و در لحظه‌ی ظهر شرعی (۱۳:۰۱:۰۴) طول سایه‌ی شاخصی عمودی در محله‌ای در تهران
 (۳۵° ۴۲' N، ۵۱° ۲۵' E) برابر ۳۰ سانتیمتر است.
- الف) منحنی میل خورشید را در طول یک سال رسم کنید. $[\delta_{\text{sun}}=23^{\circ}27' \sin(2\pi t/T)]$
- ب) طول این سایه راس ساعت ۱۶:۰۰ همان روز چند سانتیمتر خواهد بود.
 (۳۰ نمره).

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

۴- تولید انرژی در خورشید از طریق همجوشی ۴ هیدروژن و تولید یک هلیوم است؛ که در این فرآیند تقریباً ۲۵ میلیون الکترون ولت



الف) تعداد نوترینوهای عبوری از هر سانتیمتر مربع از سطح زمین را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع برخورد نوترینوهای خورشیدی با یک هستک (پروتون یا نوترون؛ nucleon) $10^{-45} \text{ cm}^2/\text{nucleon}$ است. به بدن یک

انسان بالغ، به طور متوسط در طول یک سال چند نوترینو برخورد خواهد کرد؟

راهنمایی: سطح مقطع برخورد، مساحت موثر یک ذره با ذرات دیگر در برخورد با آنهاست.

(۳۵ نمره).



۵- در فرآیندهای همجوشی ستاره‌ای و در فرآیندی که اصطلاحاً به فرآیند 3α مشهور است؛ دو هسته‌ی هلیوم ^4He به یکدیگر برخورد کرده و یک هسته‌ی برلیوم ^8Be تولید می‌کنند. از آنجایی که نیمه عمر ^8Be بسیار کم است (10^{-16} ثانیه)، این هسته مجدداً به دو ذره ^4He واپاشی می‌کند. این فرایند به دفعات تکرار می‌شود تا زمانی که قبل از واپاشی ^8Be یک ^4He به آن برخورد کند و یک هسته‌ی پایدار کربن ^{12}C تولید شود ($^4\text{He} + ^8\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{C} + 7.37 \text{ MeV}$). به همین خاطر چنین فرآیندی به چگالی‌های بالا نیاز دارد.

رابطه‌ی واپاشی ^8Be به صورت روبرو است:

$$^8\text{Be} \rightarrow ^4\text{He} + ^4\text{He} + (93.7 \text{ keV})$$

- الف) در طی فرآیند 3α به ازای هر هسته (پروتون یا نوترون؛ nucleon)، چه مقدار انرژی آزاد می‌شود؟
- ب) دمای ذرات آلفای ^4He تولید شده از واپاشی ^8Be در این ستاره چند کلوین است؟
- ج) سرعت ذرات آلفای ^4He تولید شده از واپاشی ^8Be در این شرایط چه درصدی از سرعت نور است؟ (۴۰ نمره).



۶- منجمی سالها به مطالعهی شدت خطوط نشری $H-\alpha$ و $H-\beta$ که بترتیب دارای طول موجهای ۶۵۶۳ آنگستروم و ۴۸۶۱ آنگستروم هستند پرداخته است. وی اخیراً آشکارساز سی سی دی (CCD) خود را از مدل B به مدل C تغییر داده است. در زیر توزیع بازدهی کوانتومی این دو سی سی دی (حساسیت آشکارساز در مقابل فوتونهای ورودی به سطح آن) نشان داده شده است.

الف) این منجم تنها با تغییر سی سی دی از B به C باید چه تغییری در زمان نوردهی جدیدش نسبت به گذشته ایجاد کند تا نسبت سیگنال به نویز در رصدهای وی تغییری نکند؟ پاسخ عددی با خطای بیش از ۵ درصد قابل قبول نیست.

ب) این منجم قبلاً برای نورسنجی از فیلتر باریکی به پهنای ۲۰ آنگستروم در طول موج مرکزی ۸۵۰۰ آنگستروم استفاده می کرد، اکنون با تغییر سی سی دی، پهنای فیلترش در همان طول موج به نصف کاهش یافته است. با همان زمان نوردهی قبلی، نسبت سیگنال به نویز در نور سنجی وی به چه نسبتی تغییر خواهد کرد؟

راهنمایی: برای سادگی از همه عوامل نویز سی سی دی صرف نظر کنید. به عبارت دیگر تنها سیگنال موجود مربوط به چشمه آسمانی است که ویژگی آماری آن از توزیع پواسونی (*Poisson Distribution*) تبعیت می کند؛ که در آن انحراف معیار (*standard deviation*) توزیع برابر با جذر مقدار متوسط (*mean value*) یا همان مقادیر انتظاری رویدادها است.

(۴۰ نمره). **نوشتن پاسخ را از صفحه بعد آغاز کنید چنانچه در این صفحه چیزی بنویسید تصحیح نخواهد شد.**

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

۷- ماهواره‌ای به جرم m و سطح مقطع A در مداری دایره‌ای به شعاع r به دور زمین در حرکت است.

الف) انرژی ماهواره را محاسبه کنید.

ب) جو به چگالی ρ ، نیروی اصطکاکی ثابت و ضعیف (f) به ماهواره اعمال می‌کند. تغییر شعاع نسبی مدار را طی یک دوره‌ی تناوب محاسبه کنید.

ج) جو ساکن است؛ و پس از برخورد الاستیک به ماهواره در جهت حرکت ماهواره حرکت خواهد کرد (حرکت یک بعدی). نیروی اصطکاک فوق را به طور لحظه‌ای محاسبه کنید.
(۴۵ نمره).

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۸- کهکشانی کروی و با توزیع جرمی یکنواخت متشکل از 10^{11} ستاره‌ی خورشیدگون با شعاع $R=10 \text{ kpc}$ را در نظر بگیرید. ستارگان به صورت کاتوره‌ای در این کهکشان حرکت می‌کنند.
- الف) چگالی جرمی این کهکشان را برحسب جرم خورشید بر پارسک مکعب بدست آورید.
- ب) ستاره‌ای را در نظر بگیرید که در این کهکشان، در راستای یکی از قطرها در حال حرکت نوسانی است. رابطه‌ای برای دوره‌ی تناوب نوسان این ستاره بدست آورید و مقدار عددی آن را بر حسب سال بیان کنید.
- ج) این ستاره در طول حرکت خود، به طور متوسط پس از چند سال ممکن است از کنار ستاره‌ای دیگر عبور کند بطوری که فاصله‌اش از آن ستاره کمتر از یک واحد نجومی باشد؟
- (۴۵ نمره).

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

- ۹- ابر اورت پوسته‌ای کروی به شعاع 10^5 واحد نجومی ($R = 10^5 \text{ AU}$) و شامل تعداد زیادی دنباله‌دار است. فرض کنید ستاره‌ای نوعی با جرم متوسط نصف جرم خورشید ($M = 0.5 M_{\text{sun}}$) با سرعت متوسط 30 km/s (با $v = 30 \text{ km/s}$) وارد ابر اورت شود.
- الف) این ستاره از چه فاصله‌ای (بر حسب واحد نجومی) باید از کنار یکی از دنباله‌دارهای این ابر عبور کند؛ به طوری که آن دنباله‌دار، بر اثر برهمکنش گرانشی با این ستاره از ابر اورت خارج شود؟ فرضیات لازم برای حل مسئله را ارائه دهید.
- ب) اگر فرض کنیم عمر منظومه شمسی 4 میلیارد سال ($T = 4 \text{ Gyr}$) باشد، چه کسری از دنباله‌دارهای موجود در ابر اورت با این سازوکار از این ابر خارج می‌شوند؟
- چگالی عددی ستاره‌ای در اطراف منظومه شمسی، 0.1 ستاره بر پارسک مکعب ($n = 0.1 \text{ star/pc}^3$) است.
- ج) فرض کنیم شعاع ابر اورت 10^4 AU باشد؛ کسر محاسبه شده در قسمت (ب) چقدر خواهد شد؟ (۴۵ نمره).

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

۱۰- سازمان فضایی اروپا در مارس ۲۰۱۵ میلادی، متغیری قیفاووسی به نام ساما (*SAMA*) کشف کرده است، این سازمان، طول (*l*) و عرض (*b*) کهکشانی ساما را در دستگاه مختصات کهکشانی اندازه گیری کرده است $(l, b) = (57^{\circ}42'48'', 37^{\circ}53'48'')$. با توجه به این توضیحات به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مختصات کهکشانی ستاره قطبی برابر $(l, b) = (123^{\circ}55'51'', 27^{\circ}7'44'')$ و مختصات استوایی قطب شمال کهکشانی برابر $(\alpha, \delta) = (12^h51^m27^s, 27^{\circ}7'42'')$ است. بعد و میل ساما در دستگاه استوایی را بدست آورید.

ب) سازمان فضایی اروپا برای مطالعه ی بیشتر بر روی این ستاره، قصد ساختن رصدخانه ای را دارد. با توجه به مشکلات جذب نور ستاره در جو زمین، صرفاً مکان هایی برای رصد این ستاره مناسب هستند که ارتفاع ستاره بتواند در آن محل از ۷۰ درجه بیشتر شود (توجه کنید که لزومی ندارد که در طی یک روز همیشه ارتفاع ستاره از ۷۰ درجه بیشتر باشد؛ کافی است فقط یک لحظه ارتفاع بیشتر از ۷۰ درجه شود). بنابراین، عرض جغرافیایی رصدخانه در چه بازه ای می تواند باشد؟

ج) با توجه به اینکه اکثر سطح زمین را آب فرا گرفته است و سهم خشکی ها اندک است، بنابراین طول جغرافیایی رصدخانه فقط می تواند بین ۷۰ تا ۱۰۰ درجه شرقی قرار داشته باشد، بنابراین در چند درصد از سطح زمین، امکان ساخت چنین رصدخانه ای وجود خواهد داشت؟
د) بدترین زمان برای رصد، وقتیست که فاصله ی زاویه ای این ستاره با خورشید کمینه شود، بنابراین در چه روزی این اتفاق رخ می دهد؟ فاصله ی زاویه ای ساما با خورشید در آن روز چقدر است؟

(۶۰ نمره).



۱۱- یک خوشه‌ی ستاره‌ای از دو نوع ستاره، با جرم‌های $m_1 = M_{\text{sun}}$ و $m_2 = 2M_{\text{sun}}$ تشکیل شده است. در این خوشه که در آن جداسازی جرمی اتفاق افتاده است، ستاره‌های با جرم‌های مختلف، توزیع فضایی متفاوتی دارند بطوری که ستاره‌های پرجرم‌تر در نواحی درونی‌تر خوشه تمرکز دارند.

اطلاعات لازم و نمودار چگالی سطحی عددی به صورت تابعی از شعاع، (فاصله از مرکز خوشه) برای این دو نوع ستاره در شکل زیر داده شده است.

الف) با توجه به شکل بالا فاصله‌ی این خوشه تا ناظر زمینی را بر حسب پارسک محاسبه کنید؟

ب) مقدار جرم متوسط ستارگان $\langle m \rangle$ ، بر حسب فاصله از مرکز خوشه را محاسبه کنید و مقادیر عددی آن را در جدول وارد کنید. در جدول، مقدار عددی جرم متوسط ستاره‌ها (بر حسب جرم خورشید) در پنج ناحیه (فاصله از مرکز بر حسب درجه، $r(\text{Degree})$) خواسته شده است.

ج) فرض کنید رابطه‌ی جرم-درخشندگی به صورت $L \propto M^3$ است. قدر ظاهری این خوشه را محاسبه کنید؟

د) منحنی جرم متوسط را بر حسب فاصله از مرکز محاسبه کنید.

(نوشتن پاسخ را از صفحه بعد آغاز کنید چنانچه در این صفحه چیزی بنویسید تصحیح نخواهد شد.)

یازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۴/۲/۱۷



معاونت دانش پژوهان جوان

$r(\text{Degree})$	$\langle m \rangle$
0.25	
0.75	
1.25	
1.75	
2.25	

(۵۵ نمره)



توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

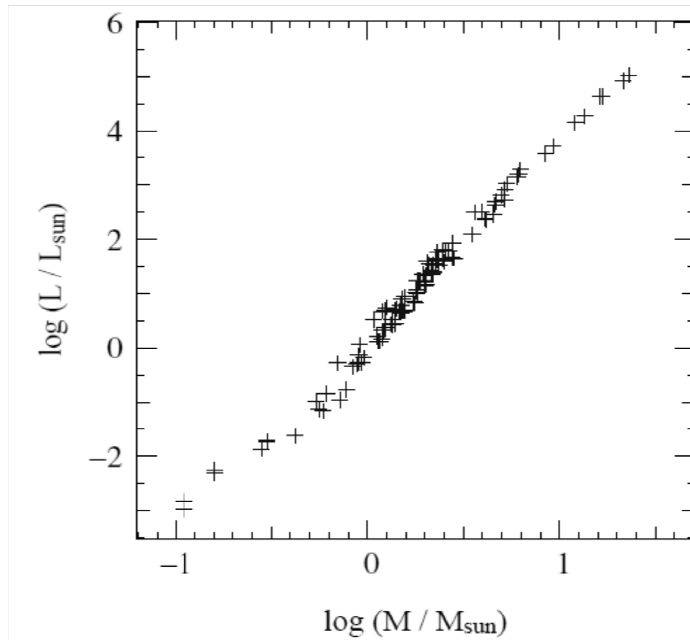
- ۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۴- با توجه به آنکه برگه های پاسخنامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.



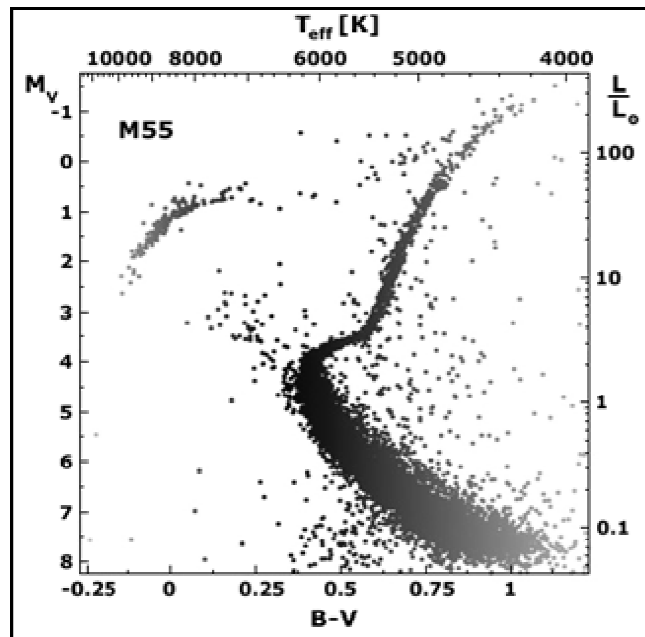
كد ملي:

سؤال ۱: (۵۰ نمره)

نمودار جرم-درخشندگی ستارگان در مقیاس لگاریتمی (شکل ۱) و نمودار رنگ-قدر یک خوشه‌ی کروی (شکل ۲) داده شده است. از این نمودارها می‌توان برای تخمین سن و جرم ستاره‌های خوشه استفاده کرد.



شکل ۱: نمودار جرم-درخشندگی ستاره‌ای



شکل ۲: نمودار رنگ-قدر یک خوشه‌ی کروی

دهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۳/۲/۱۱



کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

الف) به کمک این نمودارها، درخشندگی و جرم ستاره‌ای از خوشه را بیابید که در حال خروج از رشته‌ی اصلی است. (جواب‌ها را بر حسب درخشندگی و جرم خورشید به دست آورید).

ب) با فرض این که این خوشه از ستارگان هم‌سن تشکیل شده است، سن خوشه را بر حسب سال به دست آورید.

ج) تابع جرم یک خوشه‌ی ستاره‌ای، معرف تعداد ستاره‌هایی (dN) از خوشه است که جرمشان در بازه‌ی M و $M + dM$ قرار دارد. فرض کنید تابع جرم اولیه‌ی این خوشه به صورت زیر است:

$$\frac{dN}{dM} \propto \begin{cases} M^{-1} & 0.1 < M < 0.5 \\ M^{-2.35} & 0.5 < M < 2.0 \end{cases}$$

همچنین فرض کنید مدت زمانی که ستارگان نمایش داده شده در نمودار شکل ۲، در مراحل بعد از خروج از رشته‌ی اصلی (پسارشته‌ی اصلی) سپری می‌کنند حداکثر ۱۰ درصد مدت زمانی است که در رشته‌ی اصلی می‌گذرانند. حد بالا و پایینی برای جرم ستاره‌هایی که در مرحله‌ی پسارشته‌ی اصلی قرار دارند، را به دست آورید.

د) اگر در شکل ۲، در مجموع ۲۰۰ ستاره در مرحله‌ی پسارشته‌ی اصلی موجود باشند، جرم کل این خوشه‌ی ستاره‌ای را به دست آورید.

دهمین دوره المپید نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۳/۲/۱۱



معاونت دانش پژوهان جوان

کد ملی:

سؤال ۲: (۳۰ نمره)

پرتوهای کیهانی از عوامل مزاحم در تصویربرداری های عمیق از آسمان هستند. این پرتوها با برخورد به سی سی دی ها و آزاد کردن الکترون باعث اشباع پیکسل های سی سی دی و در نتیجه از بین رفتن اطلاعات نورسنجی آن بخش از سی سی دی ها می شوند. برای برطرف کردن این مشکل، منجمان زمان کل نوردهی سی سی دی را معمولاً به چند زمان کوتاه تر تقسیم می کنند تا در مجموع اطلاعات همه ی پیکسل های یک سی سی دی را در اختیار داشته باشند. یعنی اگر در یک نوردهی، پرتوی کیهانی موجب اشباع یک پیکسل شود، در نوردهی بعدی از این امر در امان بماند.

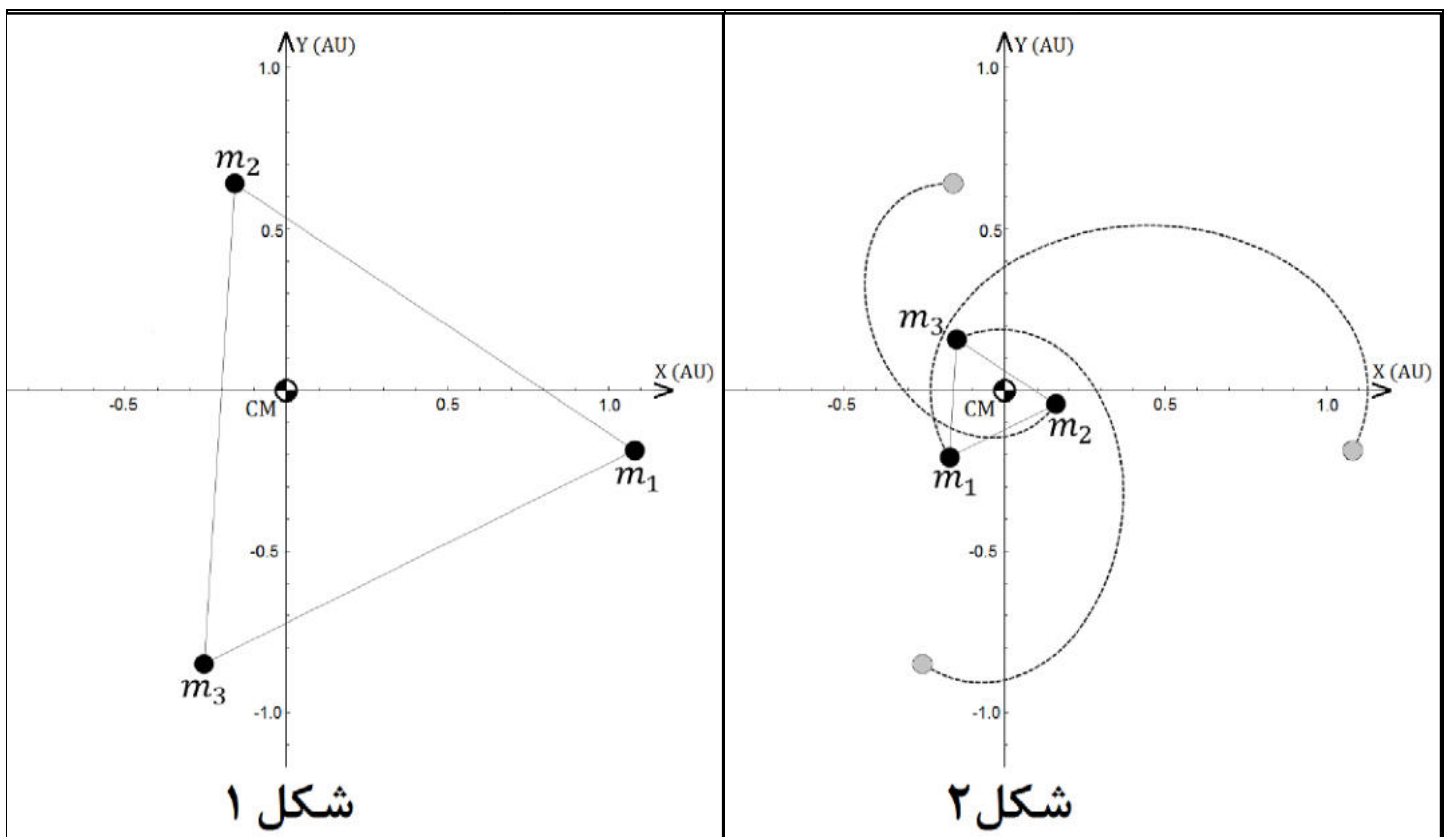
منجمی از تلسکوپ فضایی هابل برای تصویربرداری استفاده می کند. در این مورد، پرتوهای کیهانی با آهنگ ۱۰۰ پرتو در ثانیه در سانتی متر مربع، به طور تصادفی اما با توزیع یکنواخت فرود می آیند. این تلسکوپ دارای فاصله ی کانونی ۵۷/۶ متر است و میدان دید آشکارساز آن مربعی به ضلع ۱۶۰ ثانیه ی قوسی است. پهنای زاویه ای (ضلع) هر پیکسل مربعی شکل این سی سی دی ۰/۰۴ ثانیه قوسی است. اگر مدت زمان نورگیری از یک منطقه از آسمان ۲ ساعت باشد، حداقل تعداد تصاویری را که تلسکوپ هابل باید عکس برداری کند تا کمتر از ۰/۵٪ پیکسل های هر عکس به دلیل برخورد پرتوهای کیهانی اشباع شده باشد؛ را بیابید. فرض کنید هر پرتوی کیهانی به هنگام اصابت به سی سی دی، تنها یک پیکسل را به اشباع می رساند.



سؤال ۳: (۵۰ نمره)

سه جرم m_1 ، m_2 و m_3 مطابق شکل ۱، بر روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع قرار دارند. موقعیت اولیه‌ی این سه جرم به گونه‌ای است که مرکز جرمشان (CM) منطبق بر مبدأ مختصات است. این اجرام طوری پرتاب می‌شوند که اولاً، مکان مرکز جرمشان ثابت مانده و ثانیاً، همواره بر روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باقی بمانند، به طوری که اندازه‌ی این مثلث بر حسب زمان تغییر می‌کند. بعد از پرتاب، هریک از این اجرام تحت تأثیر نیروی گرانش دو جرم دیگر، مسیری می‌پیماید که در شکل ۲ نمایش داده شده است. واحد محورهای مختصات در این شکل‌ها واحد نجومی است.

اگر مقدار جرم m_1 ، برابر جرم خورشید باشد، مدت زمانی را بیابید که اجرام از وضعیت شکل ۱ به مثلث متساوی الاضلاع شکل ۲ برسند.



دهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۳/۲/۱۱



کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

سؤال ۴: (۲۰ نمره)

باقی مانده های انفجارهای ابرنواختری عموماً ستاره های نوترونی هستند. طی یک انفجار ابرنواختری، ستاره ی نوترونی ایجاد شده، انرژی ای در حدود $E_\nu = 10^{46} \text{J}$ تابش می کند. فرض کنید این تابش فقط ناشی از نوترینوهای سریع است، کاملاً همسان گرد نیست و عدم تقارنی در حدود ۱٪ دارد که باعث پس زنی ستاره ی نوترونی در یک جهت خاص می شود. سرعت این ستاره ی نوترونی را در پایان انفجار ابرنواختری بر حسب کیلومتر بر ثانیه تخمین بزنید.



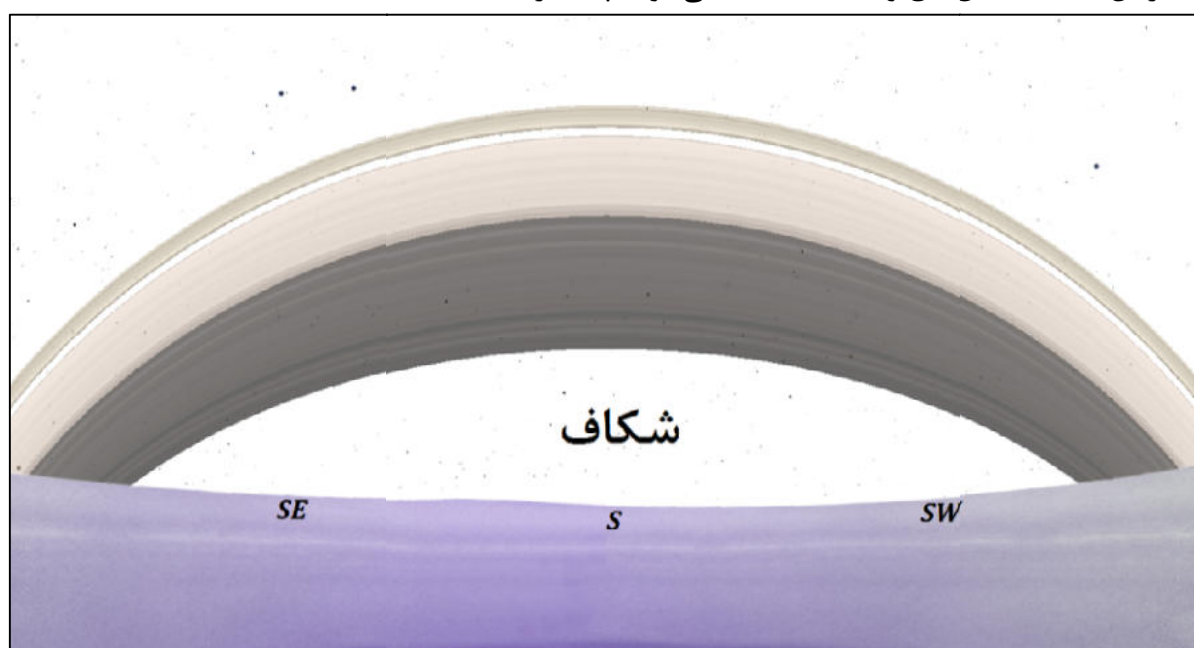
کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

سؤال ۵: (۶۰ نمره)

سیاره ی زحل را می توان کره ای به شعاع $R = 60268 \text{ km}$ در نظر گرفت که حلقه های زیبای آن در صفحه ی استوایی سیاره از ارتفاع $h = 14030 \text{ km}$ تا $H = 79552 \text{ km}$ بالاتر از سطح سیاره قرار گرفته اند. این سیاره هر ۱۰ ساعت و ۳۴ دقیقه یک بار به دور محور خود می چرخد.

الف) ناظری که در عرض های کم شمالی سیاره قرار دارد؛ در سمت جنوب، منظره ای همانند تصویر زیر را مشاهده می کند. از دید او شکافی بین حلقه ها و افق وجود دارد که برای ناظرهای نزدیک قطب، این شکاف دیگر دیده نمی شود. کم ترین عرض جغرافیایی شمالی ای که در آن، فاصله ی بین افق و حلقه ها دیده نمی شود، چند درجه است؟



حال فرض کنید، ناظری در عرض جغرافیایی ای که در قسمت الف به دست آوردید، قرار دارد. او قصد دارد در روزی که میل خورشید از دید زحل $\delta = -18^\circ$ است، بالا آمدن خورشید را از میان حلقه ها نظاره کند.

ب) با صرف نظر کردن از قطر زاویه ای خورشید، مدت زمانی را که خورشید از دید این ناظر پشت حلقه ها پنهان است (از طلوع تا بیرون آمدن خورشید از پشت حلقه ها)، بیابید.

ج) هنگام خروج خورشید از میان حلقه ها، مسیر ظاهری خورشید در آسمان، چه زاویه ای با لبه ی بالایی حلقه ها می سازد؟

دهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۳/۲/۱۱



کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

سؤال ۶: (۲۰ نمره)

فرض کنید آهنک تشکیل ستاره در یک کهکشان متناسب با e^{-t/t_s} کاهش می یابد که در آن $t_s = 3 \text{ Gyr}$ مقیاس زمانی است. عمر رشته ی اصلی ستاره ای به جرم ۳ برابر جرم خورشید 35° میلیون سال است. محاسبه کنید چند درصد از ستارگانی با جرم ۳ برابر جرم خورشید که از ابتدا تشکیل شده اند، همچنان بر روی رشته ی اصلی حضور دارند؟ فرض کنید که سن این کهکشان 10° میلیارد سال باشد.



کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

سؤال ۷: (۶۰ نمره)

کریکلو سیارکی بین زحل و اورانوس است که سال گذشته چندین رصدخانه اختفای یک ستاره با آن را ثبت کردند، منجمان با بررسی داده‌ها متوجه وجود حلقه‌ای نازک اطراف سیارک شدند. هنگام اختفا، کریکلو در فاصله‌ی $13/54$ واحد نجومی از زمین قرار داشت.

از دید یکی از رصدخانه‌ها، ستاره دو بار پشت حلقه قرار گرفت که موقعیت این دو نقطه نسبت به سیارک در جدول زیر آورده شده‌است. از دید رصدخانه‌ای در مکان دیگر نیز ستاره دو بار ولی این بار به علت اختلاف منظر در نقاط متفاوتی پشت حلقه قرار گرفت. موقعیت یکی از این دو نقطه نیز در جدول زیر داده شده‌است. موقعیت این نقاط، در دستگاه مختصات دکارتی‌ای در صفحه‌ی آسمان بیان شده‌است که مرکزش روی مرکز سیارک، جهت x به سمت غرب و y به سمت شمال است.

(میلی ثانیه‌ی قوسی)	(میلی ثانیه‌ی قوسی)		
۱۶/۱۷	۱۷/۲۵	۱	داده‌های رصدخانه‌ی اول
۷/۷۲	-۲۷/۱۳	۲	
-۲۴/۰۷	-۱۰/۹۶	۳	داده‌ی رصدخانه‌ی دوم

الف) شعاع حلقه (R) چند کیلومتر است؟

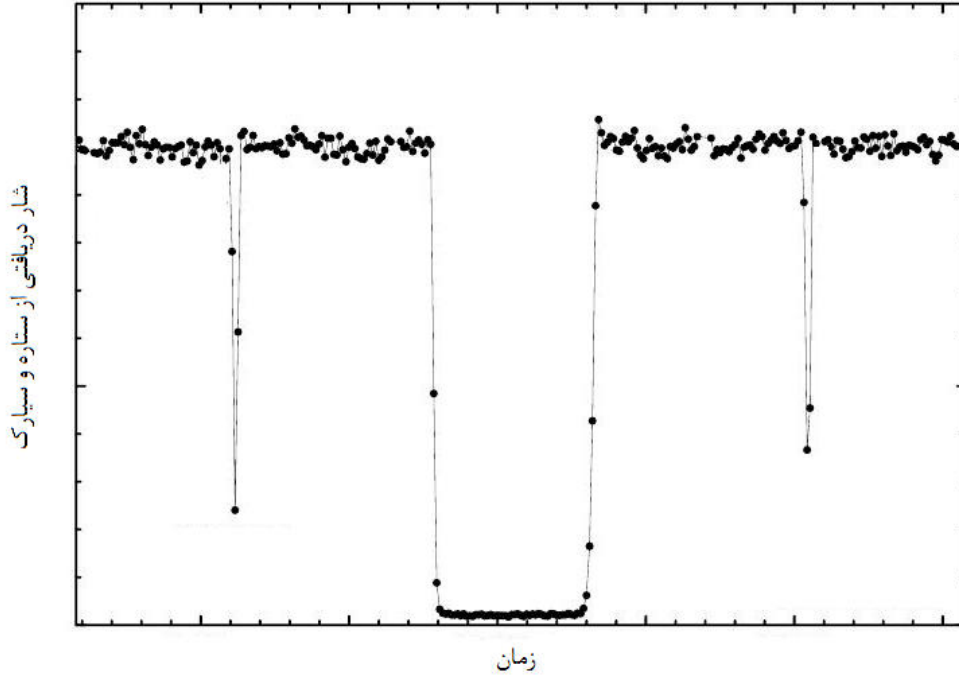
راهنمایی: در دستگاه مختصات دکارتی، معادله‌ی یک بیضی که مرکز آن روی مبدأ است و قطر بزرگ آن نسبت به محور x به اندازه‌ی θ به‌طور پادساعتگرد دوران یافته، به شکل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ است که نیم‌محور بزرگ (a)، نیم‌محور کوچک (b) و اندازه‌ی θ برای این بیضی از روابط زیر قابل محاسبه‌اند:

$$b = \sqrt{\frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}} \quad a = \sqrt{\frac{2}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}}, \quad \tan(2\theta) = \frac{B}{A-C},$$

ب) سیارک کریکلو پخ است و می‌توان آن را یک بیضی‌گون فرض کرد که از دوران بیضی‌ای با نیم‌قطر بزرگ r_l و نیم‌قطر کوچک r_s حول قطر کوچک حاصل شده‌است. حلقه در صفحه‌ی شامل نیم‌قطر بزرگ و عمود بر نیم‌قطر کوچک واقع شده‌است. رصدخانه‌ی اول منحنی نوری صفحه‌ی بعد را از ستاره و سیارک به‌هنگام اختفا ثبت کرده‌است. گرفت طولانی‌تر با رد شدن ستاره از پشت سیارک ایجاد شده و دو گرفت دیگر مربوط به حلقه‌ها هستند. r_l و r_s را بیابید. (داده‌ی اول جدول بالا زودتر از داده‌ی دوم رصد شده‌است)



کد ملی:



ج) احتمال دارد که حلقه به دلیل درهم شکستن جرم صلب همگنی که از حد روش (Roche) سیارک عبور کرده، شکل گرفته باشد. اگر چگالی جرم صلب درهم شکسته 1 gr/cm^3 در نظر گرفته شود، جرم سیارک را تخمین بزنید. برای سادگی از پخی کریکلو صرف نظر کنید و آن را کره‌ی صلب همگنی به شعاع r_1 فرض کنید.

دهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۳/۲/۱۱



معاونت دانش پژوهان جوان

کد ملی:

سؤال ۸: (۳۰ نمره)

- جرم و ابعاد کهکشانی که از یک قرص و یک برآمدگی کروی (*Bulge*) تشکیل شده، به شرح زیر است:
- شعاع برآمدگی کهکشان ۴ کیلوپارسک، شعاع قرص کهکشان ۱۵ کیلوپارسک و ضخامت قرص آن ۳۰۰ پارسک است. جرم کل ستاره‌های این کهکشان 10^{11} برابر جرم خورشید است.
- الف) اگر قطر قرص کهکشان برابر عرض برگی‌های پاسخ‌نامه شما باشد؛ شکل کهکشان را از نمای لبه، با رعایت مقیاس ترسیم کنید.
- ب) اگر همه‌ی ستاره‌های این کهکشان خورشیدگون باشند و توزیع آن‌ها در همه‌جا یک‌نواخت باشد، چگالی عددی کهکشان چند ستاره بر پارسک مکعب خواهد بود؟
- ج) حال فرض کنید که همه‌ی ستاره‌ها خورشیدگون نیستند، بلکه جرمشان می‌تواند در بازه‌ی $0/1$ تا ۱۰۰ برابر جرم خورشید باشد. هم‌چنین تعداد ستاره‌هایی که جرمشان بین M و $M + dM$ است، از رابطه‌ی $dN = A \cdot M^{-2/35} dM$ به دست می‌آید که در آن A مقدار ثابتی است. در این حالت چگالی عددی کهکشان چند ستاره بر پارسک مکعب خواهد بود؟ این چگالی عددی چند برابر مقدار قسمت قبل است؟



کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

سؤال ۹: (۴۰ نمره)

ستارگان طی تحولشان تحت تأثیر پدیده‌ای به نام هدررفت جرم قرار می‌گیرند. رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی تجربی است که مقدار هدررفت جرم (\dot{M}) را برای ستارگان بسیار درخشان ($L \geq 10^3 L_{\odot}$) به دمای سطحی (T_{eff}) و درخشندگی آن‌ها (L) مرتبط می‌سازد:

$$\log(-\dot{M}) \approx -8.16 + 1.77 \log(L) - 1.68 \log(T_{eff})$$

که در آن \dot{M} بر حسب جرم خورشید در سال (M_{\odot}/yr)، L بر حسب درخشندگی خورشید (L_{\odot}) و T_{eff} بر حسب کلوین (K) سنجیده شده‌است.

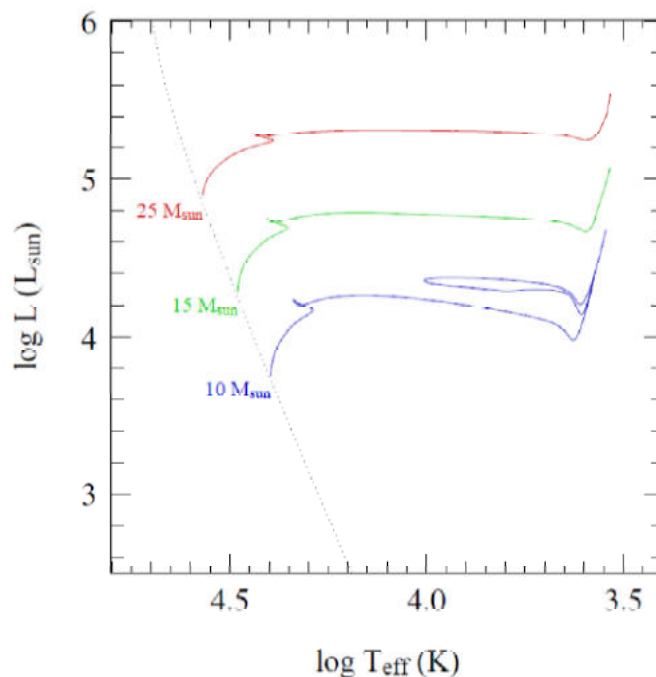
شکل زیر نمودار $H - R$ است که مسیر تحول سه ستاره با جرم‌های مختلف در آن رسم شده‌است.

الف) برای ستاره‌ای به جرم $25 M_{\odot}$ ، مقدار هدررفت جرم را (بر حسب M_{\odot}/yr) در سه موقعیت زیر به دست آورید:

۱. بر روی رشته‌ی اصلی در ابتدای تحول (*Zero Age Main Sequence*)

۲. در انتهای رشته‌ی اصلی

۳. در انتهای مرحله‌ی ابرغول قرمز



ب) فرض کنید همه‌ی فوتون‌های تابش شده تکانه‌ی خود را به ذرات حامل باد ستاره‌ای منتقل کنند. بیشینه‌ی هدررفت جرم طی فرآیند انتقال تکانه از طریق تابش به ذرات دیگر را برای ستاره‌ای با جرم $25 M_{\odot}$ که در ابتدای رشته‌ی اصلی قرار دارد، بر حسب

دهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۳/۲/۱۱



کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

محاسبه کنید. فرض کنید سرعت ذرات باد ستاره‌ای هنگام ترک ستاره، ۳ برابر سرعت فرار از سطح ستاره (v_{esc}) باشد.

دهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۱۳۹۳/۲/۱۱



کد ملی:

معاونت دانش پژوهان جوان

سؤال ۱۰: (۴۰ نمره)

وقتی ماه شروع به گرفت می کند، سایه‌ی زمین به مرور سطح آن را می پوشاند تا وقتی که ماه به طور کامل پشت سایه‌ی زمین برود؛ در این موقع گرفت کامل شروع می شود و پس از مدتی ماه به آرامی از گرفت خارج می شود. اگر فرض کنیم که بخش قرارگرفته در سایه‌ی زمین کاملاً تاریک است و ماه به شکل همسان گرد بازتاب می کند، تابعیت قدر ظاهری ماه را بر حسب زمان به دست آورید. قدر ظاهری ماه کامل ۱۲/۷۴ - است.

مدارها را دایروی و هم صفحه فرض کنید. تمام اطلاعات مورد نیاز شما در جدول ثوابت، داده شده است.



پاسخنامه مرحله دوم نجوم ۱۳۹۳

گردآوری و بازنگری توسط اعضای تیم جهانی ۲۰۱۴
با مدیریت دکتر حقی



پاسخ سوال یک:

الف) از برازش خط بر روی شکل شماره یک:

$$L \propto M^{3.8} \Rightarrow \frac{L}{L_{sun}} \approx \left(\frac{M}{M_{sun}} \right)^{3.8}$$

از روی شکل دو و با استفاده از رابطه‌ی بالا، جرم ستاره‌ای که در حال ترک رشته‌ی اصلی (نقطه برگشت) است برابر است با:

$$M \approx 1.2 M_{sun}$$

(ب)

$$t \propto \frac{M}{L} \Rightarrow t \propto M^{-2.8} \Rightarrow \frac{t}{t_{sun}} \approx \left(\frac{M}{M_{sun}} \right)^{-2.8}$$

$$M \approx 1.2 M_{sun} \Rightarrow t \approx 6 \text{ Gyr}$$

ج) حد پایین جرم که همان $1.2 M_{sun}$ است.

حد بالا:

برای به دست آوردن حد بالای جرم، چون حداکثر ۱۰ درصد عمر رشته‌ی اصلی، در پسا رشته‌ی اصلی هستند، پس:

$$t' = t - \frac{10}{100} \times t \approx 6 \text{ Gyr} - 0.1 \times 6 \text{ Gyr} \approx 5.4 \text{ Gyr}$$

$$\frac{t'}{t_{sun}} \approx \left(\frac{M'}{M_{sun}} \right)^{-2.8} \Rightarrow M' \approx 1.25 M_{sun} \quad \text{حد بالا برابر ۱,۲۵ جرم خورشید می‌شود.}$$

(د)

$$\frac{dN}{dM} = A M^{-1} \Rightarrow N = A \ln M, 0.1 < M < 0.5$$

$$\frac{dN}{dM} = B M^{-2.25} \Rightarrow N = \frac{B}{-1.25} M^{-1.25}, 0.5 < M < 20$$

برای ۰,۵ جرم خورشید باید دو مقدار بالا با هم برابر باشند، پس:

$$A \ln 0.5 = \frac{B}{-1.25} \cdot 0.5^{-1.25} \quad (Eq. 1)$$

با توجه به اینکه ۲۰۰ ستاره در مرحله‌ی پسا رشته‌ی اصلی هست، بنابراین:

$$200 = \int_{1.2}^{1.25} B M^{-2.35} dM = \frac{B}{-1.35} (1.25^{-1.35} - 1.2^{-1.35})$$

$$B \approx 6440$$

$$(Eq. 1) \Rightarrow A \approx 17540$$

برای محاسبه ی جرم کل باید از ۰,۱ تا ۲۰ جرم خورشید انتگرال گرفت.

$$M_{tot} = \int M dN = \int_{.1}^{.5} A dM + \int_{.5}^{20} B M^{-1.35} dM$$

$$M_{tot} \approx 2.4 \times 10^4 M_{sun}$$

پاسخ سوال دو:

با استفاده از فرمول مقیاس تصویر

$$\frac{206265}{f} = \frac{206265}{57600} = 3.581 \frac{\text{arcsec}}{\text{mm}}$$

چون مقیاس تصویر داده شده است. ابعاد هر پیکسل بدست می آید:

$$\frac{.04}{3.581} = 11.17 \text{ micron per pixel}$$

ابعاد سی سی دی:

$$\frac{160 \text{ arcsec}}{.04 \frac{\text{arcsec}}{\text{pix}}} = 4000 \text{ pixels}$$

ابعاد فیزیکی سی سی دی:

$$11.17 \text{ micron} \times 4000 = 4.468 \text{ cm}$$

یعنی ۴,۴۶۸ سانتی متر یا ۱۹,۹۶۳ یا ۲۰ سانتی متر مربع.

به عبارت دیگر ۲۰۰۰ پرتو کیهانی در هر ثانیه بر سی سی دی می نشیند. پس ۵ درصد کل پیکسل ها یعنی

۸۰۰۰۰۰ پیکسل می تواند تحت تاثیر قرار گیرد که زمان آن ۴۰۰ ثانیه خواهد بود.

$$\frac{800000}{2000} = 400 \text{ sec}$$

پس تعداد تصاویر برابر است با:

$$\frac{2 \text{ h}}{400 \text{ sec}} = 18$$

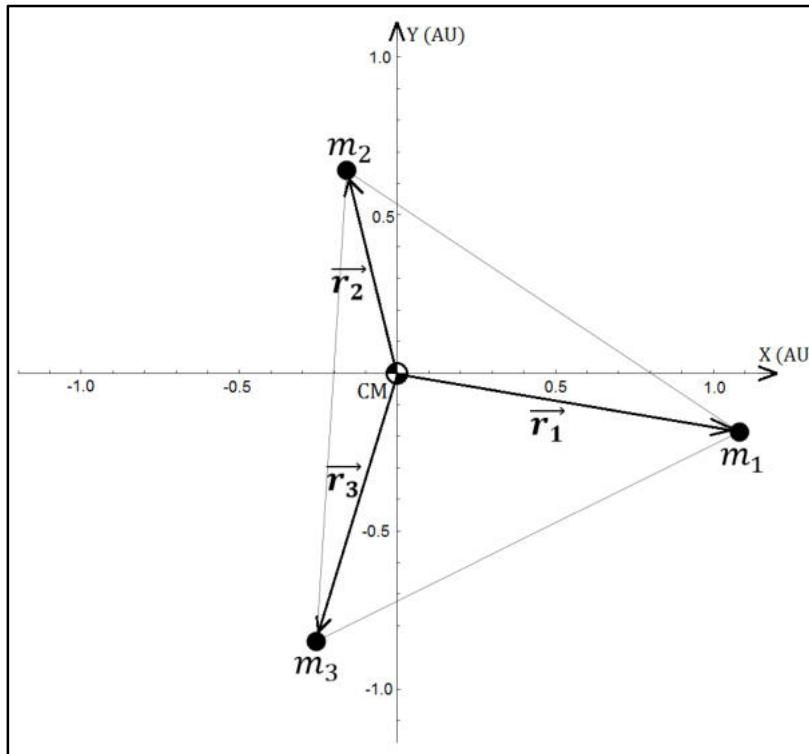
پاسخ سوال سه:

ابتدا باید معادله‌ی حرکت هریک از اجرام را در دستگاه مرکز جرم به دست آوریم. از تعریف مرکز جرم و با توجه به اینکه مرکز جرم در مبداء مختصات است داریم:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = \cdot$$

چون این سه جرم همواره بر روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند بنابراین:

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_3 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| =: r$$



شتاب جرم ۱ که تحت تأثیر نیروی گرانش دو جرم دیگر است عبارت است از:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{Gm_2}{r^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \frac{Gm_3}{r^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \\ &= -\frac{G}{r^3}(m_2 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 - m_2 \vec{r}_2 - m_2 \vec{r}_3) = \\ &= -\frac{G}{r^3}(m_2 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_1) = -\frac{G}{r^3}(m_2 + m_2 + m_3) \vec{r}_1 \end{aligned}$$

در واقع عبارت زیر برقرار است:

$$m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + m_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) = (m_2 + m_2 + m_3) \vec{r}_1$$

می‌توان با به توان دو رساندن طرفین این عبارت، رابطه‌ی بین r_1 و r را به دست آورد:

$$(m_2 + m_2 + m_3) r^2 = M r_1^2$$

که در آن M این‌گونه تعریف شده است:

$$m_2 + m_2 + m_3 =: M$$

از این رو شتاب جرم ۱ برابر است با:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = - \frac{G(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{\frac{2}{3}}}{r_1^3 M^2} \vec{r}_1$$

که با تعریف $K_1 := \frac{G(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{\frac{2}{3}}}{M^2}$ می توان آن را به شکل ساده‌ی زیر نیز نوشت:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = - \frac{K_1}{r_1^3} \vec{r}_1$$

این معادله نشان می‌دهد که مسیر جرم ۱ یک مقطع مخروطی است. این وضعیت برای دو جرم دیگر هم صادق است و این دو جرم هم بر روی یک مقطع مخروطی در حال حرکت هستند. با توجه به مسیر حرکت اجرام در شکل ۲، این مقطع مخروطی بیضی است. (می‌توان نشان داد که خروج از مرکز مدار این اجرام باهم برابر است).

برای محاسبه‌ی مدت زمان خواسته‌شده، به دوره‌ی تناوب سیستم نیاز داریم که به مقدار K_1 وابسته است. که اگر نسبت جرم‌ها را محاسبه کنیم، K_1 قابل حصول خواهد بود. برای یافتن این نسبت‌ها از معادله‌ی مرکز جرم در شکل ۱ استفاده می‌کنیم.

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0, \quad \frac{m_2}{m_1} =: \eta_2, \quad \frac{m_3}{m_1} =: \eta_3$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 = 0 \\ y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \eta_2 = 3.2, \quad \eta_3 = 2.2$$

علاوه بر این، با توجه به اینکه مقدار جرم ۱ برابر جرم خورشید است، مقدار عددی K_1 به دست می‌آید:

$$K_1 = \frac{G(\eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_2 \eta_3)^{\frac{2}{3}}}{(1 + \eta_2 + \eta_3)^2} M_{\odot} = 3.4 \times 10^{20} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^2$$

بنابراین دوره‌ی تناوب این سیستم سه‌تایی عبارت است از:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{K_1}} = 128.4 \text{ days}$$

در این رابطه a_1 نیم‌محور اطول مدار جرم ۱ می‌باشد، که با اندازه‌گیری از روی شکل ۱ به دست می‌آید. علاوه بر این با اندازه‌گیری فواصل اوج و حضیض مدار این جرم می‌توان خروج از مرکز سیستم را نیز به دست آورد، که تقریباً برابر $e = 0.66$ است.

قطر بزرگ مدار جرم ۱ منطبق بر محور افقی است، از این رو موقعیت زاویه‌ی این جرم نسبت به راستای حضیض مدارش (θ) به راحتی قابل اندازه‌گیری است:

$$\begin{cases} \theta_1 = 189.9^\circ \rightarrow \text{شکل ۱} \\ \theta_2 = 50.5^\circ \rightarrow \text{شکل ۲} \end{cases}$$

این ها مقادیر آنومالی واقعی هستند، مقادیر آنومالی خروج از مرکزی (E) و میانگین (M) از روابط زیر قابل حصول خواهد بود:

$$\tan \frac{E}{\gamma} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{\gamma}, \quad E - e \sin E = M$$

$$\begin{cases} M_1 = 3.763 \\ M_2 = 0.151 \end{cases} \Rightarrow M_1 + M_2 = \frac{2\pi}{P} t \Rightarrow t = 80 \text{ days}$$

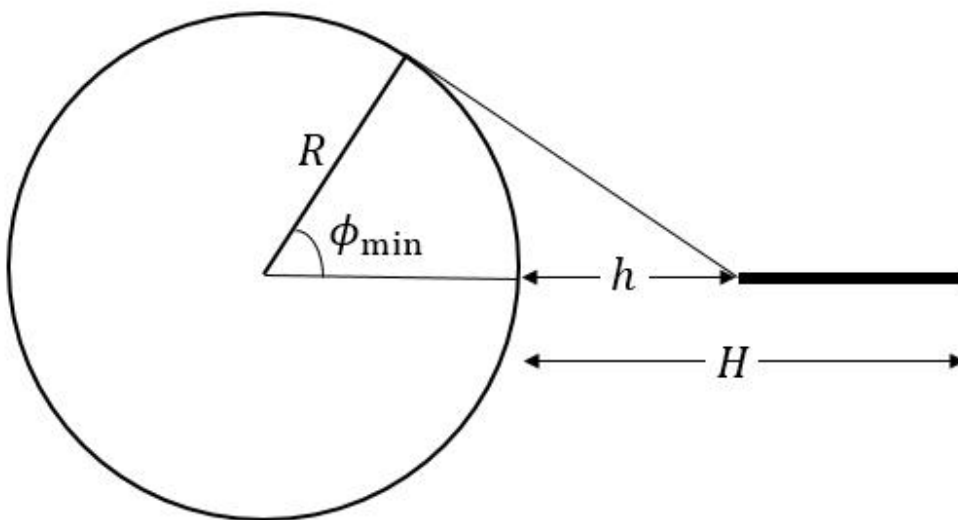
پاسخ سوال چهار:

$$P_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \quad M_{NS} V_{NS} = 0.01 \left(\frac{E}{c} \right) \Rightarrow V_{NS} = 120 \frac{km}{s}$$

پاسخ سوال پنج:

الف) برای پیدا کردن پایین ترین عرض جغرافیایی ای که بین حلقه ها و افق فاصله ای نمی بیند باید از لبه ی درونی حلقه شمالی ترین مماس را بر سطح سیاره رسم کنیم و عرض محل تماس را محاسبه نماییم.

$$\cos \phi_{\min} = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \phi_{\min} = 35.8^\circ$$



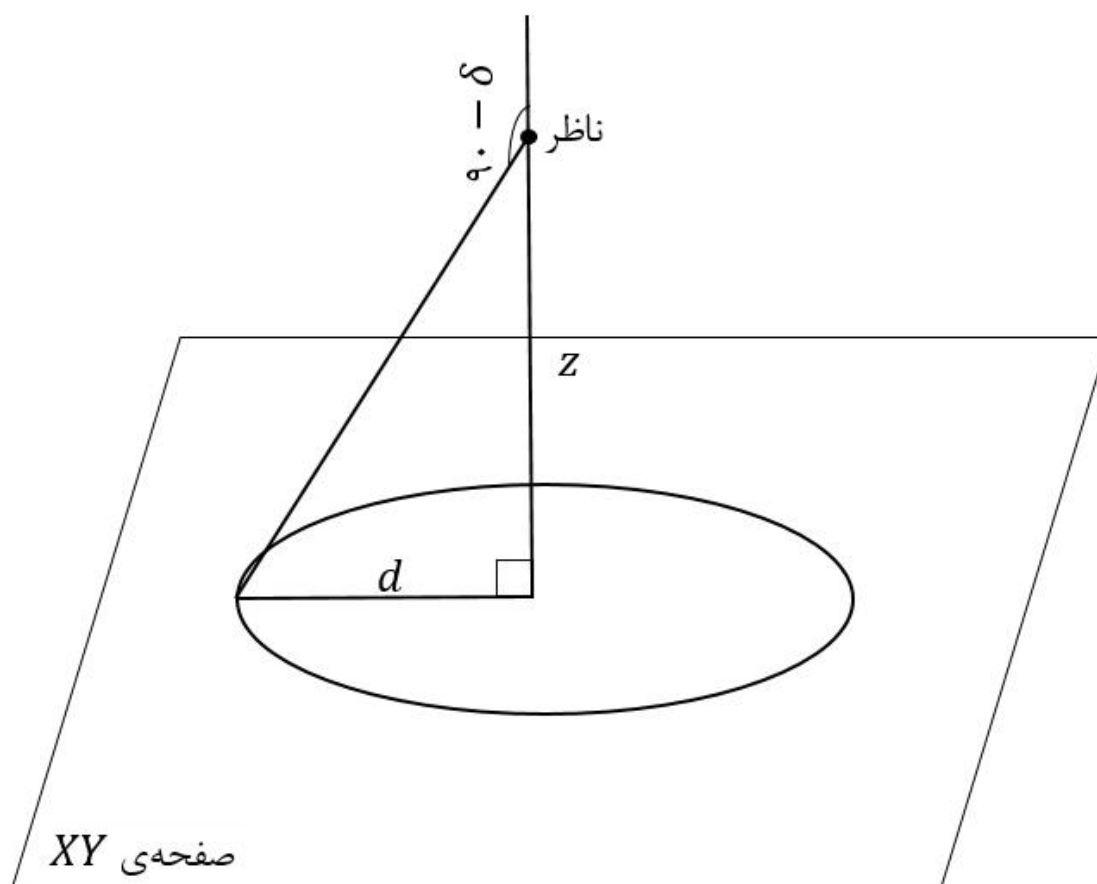
نگاه از کنار

ب) در دستگاه مختصاتی به مبدأ مرکز سیاره که محور Z آن به سمت قطب شمال است و ناظر در صفحه XZ قرار دارد، مختصات ناظر از قرار زیر است:

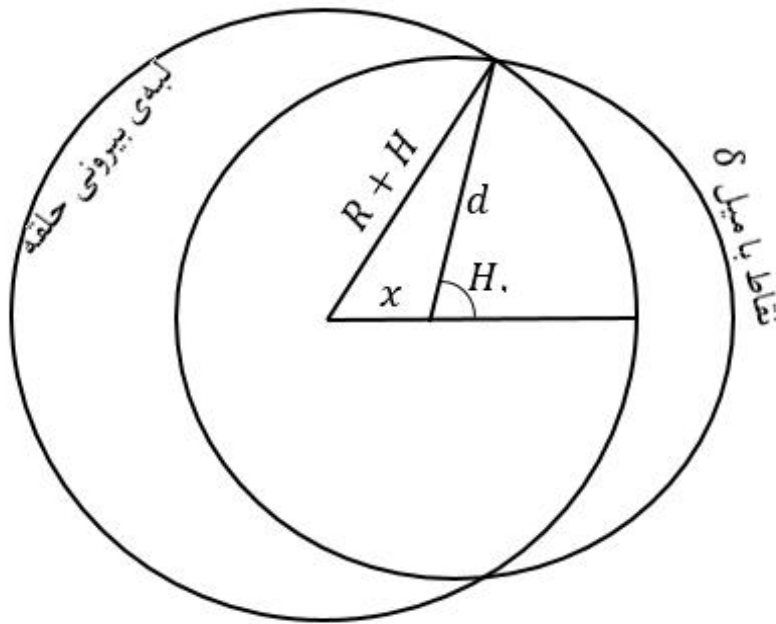
$$x = R \cos \phi_{\min} = 48887 \text{ km}$$

$$z = R \sin \phi_{\min} = 35246 \text{ km}$$

نقاطی از صفحه XY که ناظر آنها را در میل δ می بیند، یک دایره به شعاع $d = z \tan(90^\circ + \delta) = 108486 \text{ km}$ به مرکز تصویر محل ناظر (یعنی نقطه ای با مختصات $(x, 0, 0)$) را تشکیل می دهند.



حال باید اشتراک این دایره و لبه بیرونی حلقه های زحل را بیابیم. این دو نقطه ای اشتراک، نقاطی از لبه ای حلقه هستند که از دید ناظر مسیر ظاهری خورشید از آنها می گذرد. تصویر بعدی، صفحه ای حلقه ها را با لبه بیرونی حلقه ها و دایره ای که شامل نقاط با میل δ هستند نشان می دهد. زاویه ای که به رأس تصویر ناظر با نام H نشان داده شده است، زاویه ای ساعتی خورشید (البته در حقیقت 360° درجه منهای زاویه ای ساعتی است!) هنگام بیرون آمدن از حلقه ها است. با رابطه ای کسینوس ها در مثلثات مسطحه این زاویه به دست می آید:



$$(R + H)^2 = x^2 + d^2 + 2xd \cos H.$$

$$\Rightarrow H_r = 59.4^\circ$$

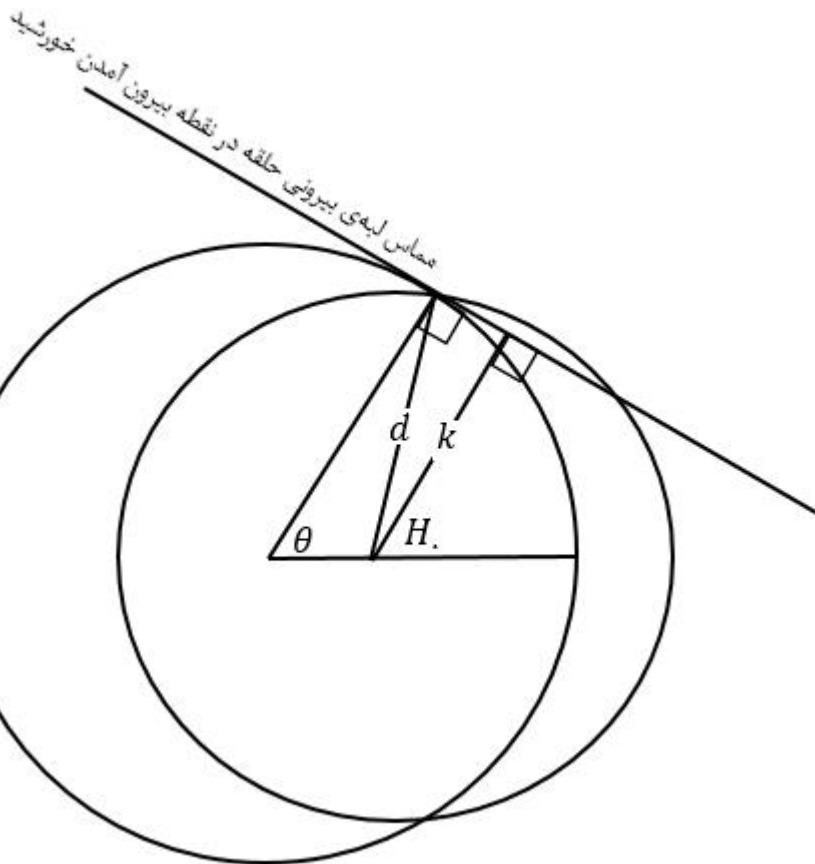
زاویه ساعتی خورشید هنگام طلوع را نیز با رابطه‌ی طلوع و غروب به دست می‌آوریم:

$$\cos H_r = -\tan \phi \tan \delta \Rightarrow H_r = 76.5^\circ$$

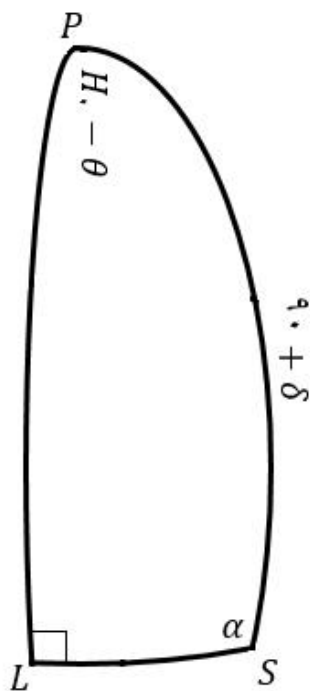
$$\Delta t = \frac{H_r - H_r}{360^\circ} \times 24 \text{ h} = 30 \text{ min}$$

ج) ناظر مماس حلقه‌ها در نقطه‌ی برآمدن خورشید از لبه بیرونی حلقه‌ها (این نقطه را در کره‌ی سماوی با S نشان خواهیم داد) را یک نیم‌دایره‌ی عظیمه مشاهده می‌کند. می‌خواهیم زاویه‌ی این نیم‌دایره‌ی عظیمه را با مسیر ظاهری خورشید حساب کنیم. اگر از محل تصویر ناظر بر این مماس عمودی رسم کنیم (این عمود به طول k نشان داده شده‌است)، نقطه‌ی عمود (این نقطه را در کره‌ی سماوی با L نشان می‌دهیم) بین نقاط این نیم‌دایره‌ی عظیمه پایین‌ترین میل (بیش‌ترین فاصله از قطب شمال سماوی ناظر) را دارد. به این دلیل PL بر نیم‌دایره‌ی عظیمه‌ی مماس حلقه‌ها عمود است. نخست با رابطه‌ی سینوس‌ها در همان مثلث استفاده‌شده در قسمت قبل، زاویه‌ی θ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta}{d} = \frac{\sin H_r}{R + H} \Rightarrow \theta = 41.9^\circ$$



مماس لبه‌ی بیرونی حلقه در نقطه بیرون آمدن خورشید



حال در مثلث PLS ، زاویه‌ی α را به دست می‌آوریم:

$$-\cos(90^\circ) = \cos \alpha \cos(H. - \theta) - \sin \alpha \sin(H. - \theta) \cos(90^\circ + \delta)$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan(H. - \theta) \cos(90^\circ + \delta)} \Rightarrow \alpha = 95.6^\circ$$

مسیر ظاهری خورشید با ضلع PS زاویه‌ی 90° درجه می‌سازد، پس

زاویه‌ی مسیر ظاهری خورشید با لبه‌ی بیرونی حلقه‌ها $\alpha - 90^\circ = 5.6^\circ$ است.

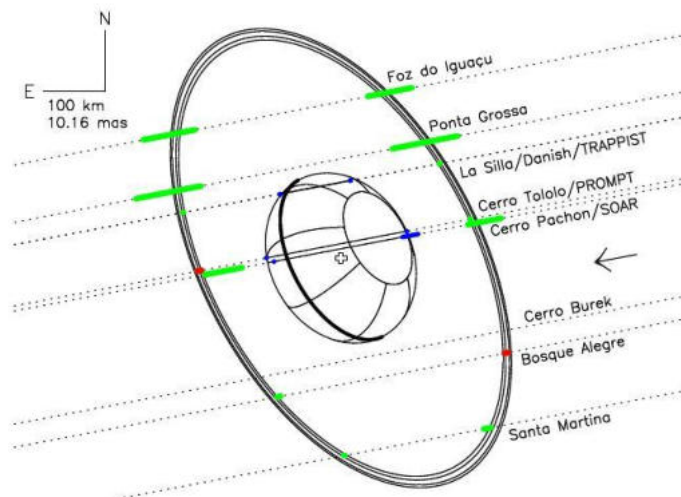
پاسخ سوال شش:

$$\frac{\int_{9.65}^{10} e^{-t/t_s} dt}{\int_0^{10} e^{-t/t_s} dt} = 0.0046 \Rightarrow \text{fraction} = 0.45\%$$

پاسخ سوال هفت:

الف) تصویر شبیه‌سازی‌شده‌ی زیر، با استفاده از داده‌های حاصل از رصد هم‌زمان این اختفا در چندین رصدخانه به‌دست آمده‌است. خطوط موازی رسم‌شده، مسیر حرکت ستاره از پشت سیارک از دید رصدخانه‌های مختلف است. در حقیقت، چون رصدخانه‌ها در مکان‌ها متفاوتی قرار دارند؛ مسیر حرکت نسبی ستاره دچار اختلاف-منظر شده و جابجا می‌شود.

با عبور ستاره از پشت حلقه یا خود سیارک شار دریافتی از آن تغییر می‌کند که به کمک آن می‌توان ساختار هندسی سیارک را بررسی کرد. (بر خلاف صورت سؤال، این سیارک در واقعیت دو حلقه دارد که لبه‌های بیرونی و درونی هر کدام در شبیه‌سازی نشان‌داده شده‌است)



تصویر یک دایره بر صفحه‌ی آسمان یک بیضی با نیم‌قطر بزرگ R و نیم‌قطر کوچک $R \cos i$ است. در این سؤال فقط سه نقطه از محیط بیضی دیده‌شده از حلقه را می‌دانیم که به کمک آن‌ها و معادله‌ی کلی یک بیضی، ضرایب A, B, C را با حل یک دستگاه سه‌معادله-سه‌مجهول می‌یابیم. (واحد هر کدام عکس مربع میلی‌ثانیه‌ی قوسی است)

$$A = 0.00158$$

$$B = 0.00103$$

$$C = 0.00093$$

از روی این ضرایب و با توجه به راهنمایی سؤال داریم:

$$a = 39.41 \text{ miliarcsecond}$$

$$b = 23.17 \text{ mas}$$

$$\theta = 118.9^\circ$$

پس:

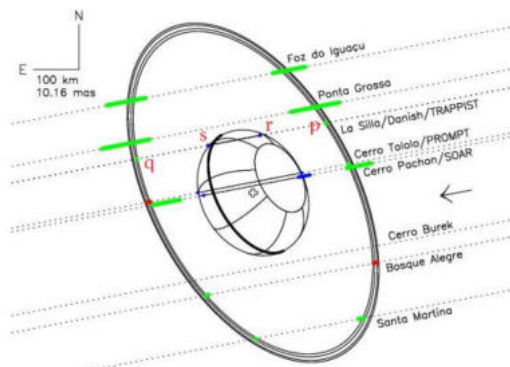
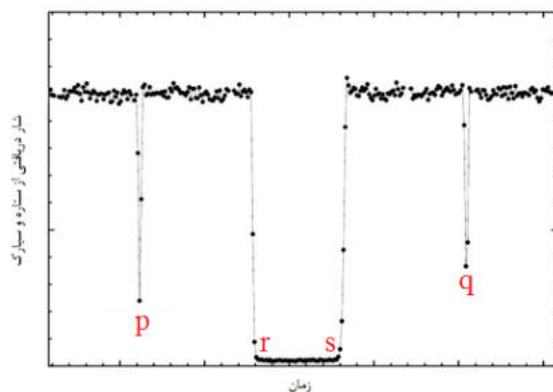
$$R \approx 390 \text{ km}$$

در محاسبات بالا، ستون سمت راست و چپ داده شده در سؤال به ترتیب به عنوان مختصه ی x و y در نظر گرفته شده اند. با توجه به این که انتظار نداریم با دوران مختصات، مقادیر a, b عوض شوند، انتخاب برعکس x, y نیز بی ایراد است. البته مقدار θ تغییر می کند که در جواب های نهایی بی تأثیر است.

ب) دو داده ی اول جدول نقاط p, q را روی شکل و منحنی نوری نشان می دهند و گرفت طولانی در منحنی نوری بین r, s رخ می دهد. با استفاده از نسبت مدت زمان بین گرفت اول و سوم با گرفت اول و دوم و معلوم بودن مختصات p ، مختصات r و با استفاده از نسبت مدت زمان بین گرفت اول و سوم با گرفت دوم و سوم و معلوم بودن مختصات q ، مختصات s پیدا می شود.

$$r = (1.72, 13.21) \text{ mas}$$

$$s = (-9.38, 11.09) \text{ mas}$$



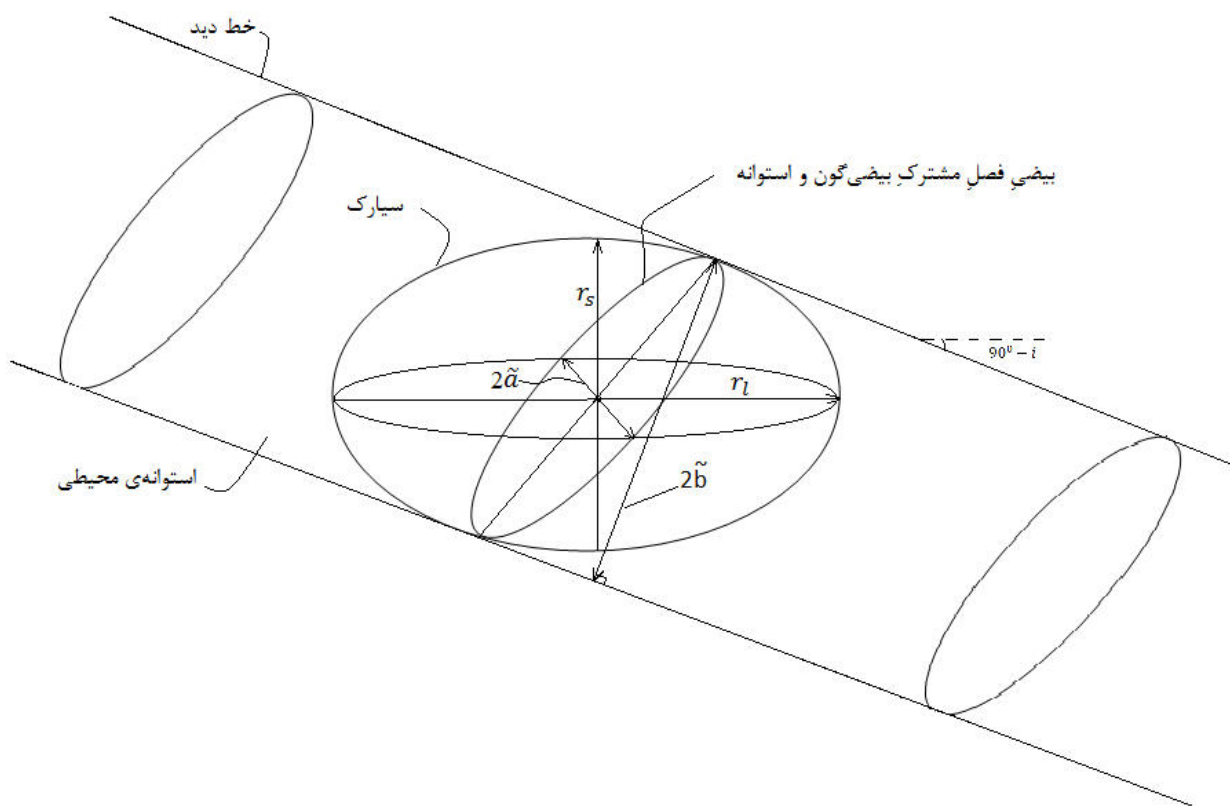
برای تجسم کردن نحوه ی تصویر شدن بیضی گون بر صفحه ی آسمان، یک استوانه همانند شکل را در نظر بگیرید. محور این استوانه در راستای خط دید ما است و بیضی گون داخل آن محاط شده است. فصل مشترک این استوانه و بیضی گون یک بیضی است که نیم قطر بزرگش r_1 و نیم قطر کوچکش بزرگ تر از r_s است. تصویری

که ما از بیضی گون می بینیم، تصویر این بیضی (و نه خود آن) بر صفحه ی آسمان است. پس \tilde{a} (نیم قطر بزرگ بیضی مشاهده شده از سیارک) برابر r_l و \tilde{b} (نیم قطر کوچک آن) نصف فاصله ی دو خط موازی رسم شده در شکل است:

$$\tilde{a} = r_l$$

$$\tilde{b} = \sqrt{r_l^2 \cos^2 i + r_s^2 \sin^2 i}$$

که رابطه ی آخر با به دست آوردن عرض از مبدأ خط مماس بر بیضی که زاویه ی شیبش $i - 90^\circ$ است، حاصل می شود.



θ بیضی دیده شده از سیارک با θ بیضی دیده شده از حلقه یکی است. (چرا؟) از طرفی r, S هم داریم. پس دوباره سه معادله-سه مجهول (که این بار با جای گذاری θ در واقع یک دو معادله-دو مجهول داریم) حل می کنیم. که استفاده از روابط راهنمایی، نتیجه می دهد:

$$\tilde{a} = 14.70 \text{ mas}$$

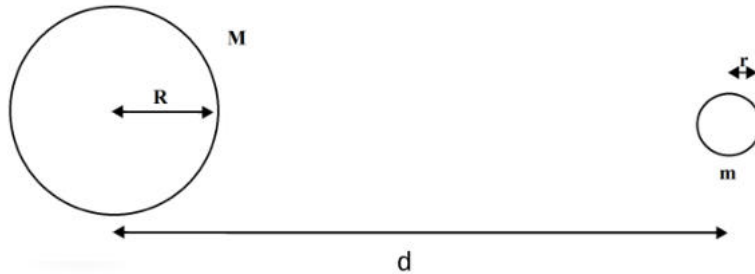
$$\tilde{b} = 11.55 \text{ mas}$$

پس با توجه به روابط بالا:

$$r_s = 113.7 km$$

$$r_l = 144.7 km$$

ج) بیان ساده شده ی زیر را برای به دست آوردن حد روش برای اجسام صلب در نظر می گیریم:



شتاب گرانشی روی سطح جرم کوچک برابر است با:

$$|\vec{a}_g| = \frac{Gm}{r^2}$$

برای شتاب جزر و مدی داریم:

$$|\vec{a}_t| = \frac{GM}{(d-r)^2} - \frac{GM}{d^2} = \frac{GM}{d^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{r}{d}\right)^2} - 1 \right) \cong \frac{GM}{d^2} \left(1 + \frac{2r}{d} - 1 \right) \cong \frac{2GMr}{d^3}$$

در آستانه ی فروپاشی این شتابها برابرند:

$$|\vec{a}_g| = |\vec{a}_t|$$

یعنی:

$$d = \left(\frac{2r^3 M}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

و

$$\rho_m := \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$\rho_M := \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

که بر حسب چگالی ها می شود:

$$d = \sqrt[3]{2R \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)} \cong 1.26R \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

اگر نیروی گریز از مرکز ناشی از گردش جرم کوچک را نیز لحاظ کنیم، ضریب ۱.۲۶ به ۱.۴۴ تغییر می کند.

برای سیارک $R = r_l$ و برای دو ضریب بالا به ترتیب داریم:

$$\rho_M = 9.8 \text{ gr/cm}^3$$

یا

$$\rho_M = 6.6 \text{ gr/cm}^3$$

پس:

$$M = 1.2 \times 10^{20} \text{ kg}$$

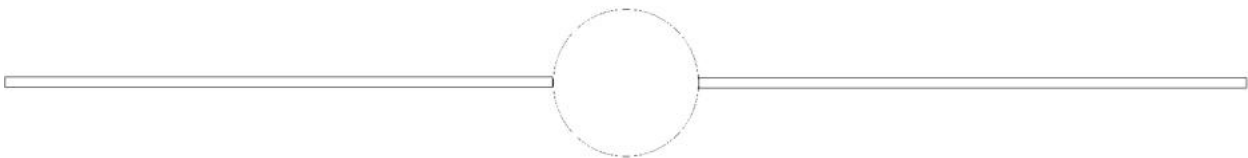
یا

$$M = 8.4 \times 10^{19} \text{ kg}$$

که حدود ۰.۱٪ جرم ماه است و بسیار جالب است که جرمی که ابعاد ظاهری اش در آسمان تنها چند میلی ثانیه‌ی قوسی است، جلوی ستاره‌های بسیار دور دست را می گیرد و ما می توانیم جزییات دقیقی از شکل و هندسه‌ی آن جسم را بفهمیم!

پاسخ سوال هشت:

(الف)



ب) حجم کهکشان 4.8×10^{11} پارسک مکعب، چگالی = 0.21 ستاره بر پارسک مکعب

$$M_G = \int_{0.1 M_{sun}}^{100 M_{sun}} M dN \Rightarrow A = 1.72 \times 10^{10} M_{sun}^{1.35} \text{ (ج)}$$

د) $N = 2.85 \times 10^{11} M_{sun} \Leftarrow$ چگالی ۳ برابر قسمت ب یعنی 0.59 ستاره بر پارسک مکعب خواهد بود.

پاسخ سوال نه:

الف) با توجه به نمودار و محل های خواسته شده مقادیر عددی به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{M} = 7 \times 10^{-8} \frac{M_{sun}}{Year} \text{ for ZAMS}$$

$$\dot{M} = 7 \times 10^{-7} \frac{M_{sun}}{Year} \text{ for end of MS}$$

$$\dot{M} = 5 \times 10^{-5} \frac{M_{sun}}{Year} \text{ for RGB}$$

ب) برای ستاره با جرم ۲۵ مقدار دما و درخشندگی به صورت زیر از نمودار به دست می آید:

$$L = 79432 L_{sun} , T = 37153 K \Rightarrow R = 6.8 R_{sun} \text{ from Boltzman eq.}$$

با توجه به شعاع و جرم ستاره سرعت فرار به دست می آید: $V_{escape} = 3600 \frac{km}{s}$

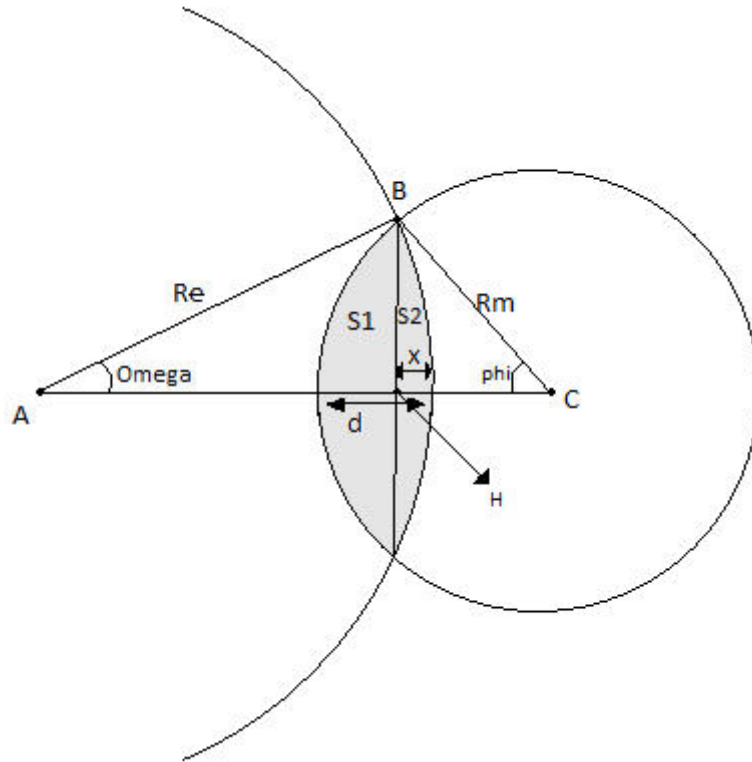
$$\dot{M} V_{\infty} < \frac{L}{c}$$

$$\dot{M} = 4.5 \times 10^{-7} \frac{M_{sun}}{Year} \text{ at ZAMS}$$

پاسخ سوال ده:

ابتدا باید دوره‌ی تناوب هلالی ماه را حساب کنیم:

$$\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_e} = \frac{1}{T_s} \Rightarrow T_s = 29.5 \text{ day}, \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2.47 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



لحظه شروع گرفت: $t = 0$

$$d = \omega_s \times t = d(t)$$

هدف مسئله محاسبه‌ی نسبت قسمت تاریک (هاشورخورده) به کل سطح ماه است.

$$\Delta ABH: (R_e - x)^2 + l^2 = R_e^2$$

$$\Delta BCH: [R_m - (d - x)]^2 + l^2 = R_m^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(R_m - \frac{d}{2}\right) d}{R_e + R_m - d}$$

$$l^2 = R_e^2 - (R_e - x)^2 = [R_e - (R_e - x)] [R_e + (R_e - x)]$$

$$\Rightarrow l^2 = x(2R_e - x)$$

$$l = \frac{\sqrt{\left(R_m - \frac{d}{\gamma}\right) d [(R_e + R_m)(\gamma R_e - d) - d \left(R_e - \frac{d}{\gamma}\right)]}{R_e + R_m - d}$$

$$S_{dark} = \gamma(S_{\gamma} + S_{\gamma'})$$

$$S_{\gamma} = R_m^{\gamma} \times \frac{\phi}{\gamma} - l \times \frac{R_m - (d - x)}{\gamma}, \quad \phi = \sin^{-1} \frac{l}{R_m}$$

$$S_{\gamma'} = R_e^{\gamma} \frac{\Omega}{\gamma} - l \times \frac{R_e - x}{\gamma}, \quad \Omega = \sin^{-1} \frac{l}{R_e}$$

$$\Rightarrow S_{dark} = R_m^{\gamma} \sin^{-1} \frac{l}{R_m} + R_e^{\gamma} \sin^{-1} \frac{l}{R_e} - l(R_e + R_m - d)$$

$$\frac{S_{dark}}{S_{full\ moon}} = \frac{S_{dark}}{\pi R_m^{\gamma}} = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{l}{R_m} + \frac{R_e^{\gamma}}{\pi R_m^{\gamma}} \sin^{-1} \frac{l}{R_e} - \frac{l(R_e + R_m - d)}{\pi R_m^{\gamma}}$$

$$M(t) - M_{full\ moon} = -\gamma \cdot \Delta \log \frac{f(t)}{f_{full\ moon}} = -\gamma \cdot \Delta \log \frac{S_{fm} - S_d}{S_{fm}}$$

$$\Rightarrow M(t) = M_{fm} - \gamma \cdot \Delta \log \left(1 - \frac{S_d}{S_{fm}} \right)$$

که چون لگاریتم همواره منفی است، پس $M(t) > M_{fm}$

در لحظه ای که $\frac{S_d}{S_{fm}} = 1$ آن وقت $M(t) \rightarrow \infty$ که تاریکی مطلق است (فرض غیرواقعی و تقریب)



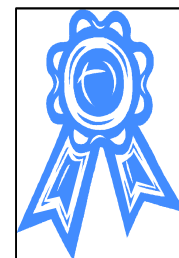
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان

معاونت دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

نهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۹۲/۲/۱۲ - ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه



شماره پرونده: -----
کد ملی: -----
نام پدر: -----
نام مدرسه: -----

استان: -----
منطقه: -----
حوزه: -----
پایه تحصیلی: -----

شماره صندلی

.



توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان سال اول دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.



نهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۹۲/۲/۱۲



معاونت دانش پژوهان جوان



کد ملی: -----



۲- در شکل زیر یک نوع خاص از ساعت آفتابی را مشاهده می کنید. شاخص این ساعت آفتابی، مستطیلی به طول L و ارتفاع h می باشد که به طور عمود روی وجه غربی دیوار قائمی که در راستای شمال-جنوب کشیده شده است، قرار دارد. طول این مستطیل در راستای NCP (قطب شمال سماوی) و SCP (قطب جنوب سماوی) می باشد. شکل زیر وجه غربی دیوار را نشان می دهد، زاویه Φ عرض جغرافیایی مکانی است که ساعت آفتابی در آنجا نصب شده (که در شکل، Φ شمالی در نظر گرفته شده است) و X ارتفاع سایه متوازی الاضلاع شکل است.

الف) رابطه ای به دست آورید که از مقدار X بتوان زاویه ساعتی خورشید را محاسبه کرد.

ب) چنانچه این ساعت آفتابی در تهران ($\Phi = 35.7^\circ$) به کار رود، بیشترین و کمترین مقدار زاویه θ را در روزی که میل خورشید $\delta = 21.4^\circ$ است محاسبه کنید.





نهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۹۲/۲/۱۲



معاونت دانش پژوهان جوان



کد ملی: -----



۵- فرض کنید فقط دو نوع ستاره‌ی x و y با جرم‌های $M_x=0.5$ و $M_y=5$ (برحسب جرم خورشیدی) در یک خوشه‌ی ستاره‌ای وجود دارند. همچنین فرض کنید رابطه‌ی جرم-درخشندگی در ستاره‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{L}{L_{sun}} = \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^3$$

الف) اگر نسبت جرم به درخشندگی این خوشه دو برابر نسبت جرم به درخشندگی خورشید باشد $\left(\frac{M}{L} = 2 \frac{M_{sun}}{L_{sun}}\right)$,

نسبت تعداد ستاره‌های نوع x به تعداد ستاره‌های نوع y را به دست آورید.

ب) نسبت درخشندگی ناشی از مجموع ستاره‌های نوع x به درخشندگی ناشی از مجموع ستاره‌های نوع y را به دست آورید.

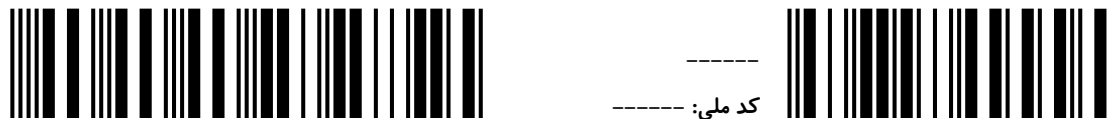
ج) تابع جرم یک خوشه‌ی ستاره‌ای به این صورت تعریف می‌شود: $N(m) = Cm^{-\alpha}$ ، که در این رابطه $N(m)$ تعداد ستاره‌های با جرم m است، همچنین C و α مقادیری ثابت هستند. برای خوشه‌ی ستاره‌ای تعریف شده در بالا مقدار α را به دست آورید.



نهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک - ۹۲/۲/۱۲



معاونت دانش پژوهان جوان



۷- قرص برافزایشی توده‌ای از گاز چرخان بسیار داغ است که سیاهچاله‌ها را احاطه کرده است. قسمت‌های داخلی قرص در این مساله مورد نظر است. فرض کنید ناحیه مورد نظر از R_{ISCO} تا $2R_{ISCO}$ امتداد داشته باشد. ($ISCO$: innermost stable circular orbit)

در داخل این ناحیه ($r < R_{ISCO}$)، گاز بسیار رقیق و تابش بسیار کمی از قرص خواهیم داشت. تابش اصلی قرص از ناحیه $R_{ISCO} < r < 2R_{ISCO}$ می‌آید.

فرض کنید ناحیه مورد نظر تابش جسم سیاهی در دمای T داشته باشد. فرض کنید قرص زاویه‌ی انحراف i داشته باشد (نسبت به ناظر زمینی). فاصله قرص از زمین را هم d بگیرید. ناظر زمینی یک شار کلی از این قرص به اندازه‌ی F دریافت می‌کند (برحسب $\text{erg}/(\text{s}\cdot\text{cm}^2)$).

الف) رابطه‌ای دقیق برای R_{ISCO} برحسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ب) بیشینه‌ی شار تابشی F_λ (شار در بازه‌ی λ و $\lambda + d\lambda$) در $\lambda_{max} = 2.9nm$ اتفاق می‌افتد. شار بولومتریک $F = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda = 2 \times 10^{-12} \text{ erg}/(\text{s}\cdot\text{cm}^2)$ است. از رصدهای دیگر نیز می‌دانیم $d = 1kpc$ و $i = 80^\circ$ هستند. با این مقادیر R_{ISCO} را برحسب km به دست آورید.

ج) می‌دانیم جرم این سیاهچاله $M = 10M_\odot$ است. در نظریه‌های اخترفیزیکی در سیاهچاله‌های غیرچرخان $R_{ISCO} = 6R_G$ و در سیاهچاله‌های با بیشینه چرخش $R_{ISCO} = R_G$ است، که در آن $R_G = \frac{GM}{c^2}$ است. با استفاده از داده‌های قسمت «ب» چه نتیجه‌ای راجع به چرخش سیاهچاله می‌گیریم.

د) رابطه‌ای برای \dot{M} برحسب R_{ISCO} ، M و T به دست آورید. مقدار \dot{M} را در این سیستم برحسب M_\odot/yr به دست آورید.



سوالات و پاسخ

مرحله دوم

هشتمین المپیاد

نجوم و اختر فیزیک

ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

تذکرات پیش از آزمون:

- ۱- ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:
 - ۱- تعداد سؤالات این آزمون ۶ سؤال و وقت آن ۴ ساعت است.
 - ۲- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
 - ۳- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه ای ننویسید.
 - ۴- معرفی نامه و کارنامه ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن ها را ملاحظه و جمع آوری نماید.
 - ۵- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
 - ۶- استفاده از جدول های نجومی، اطلس ها و آلماناک ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
 - ۷- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
 - ۸- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

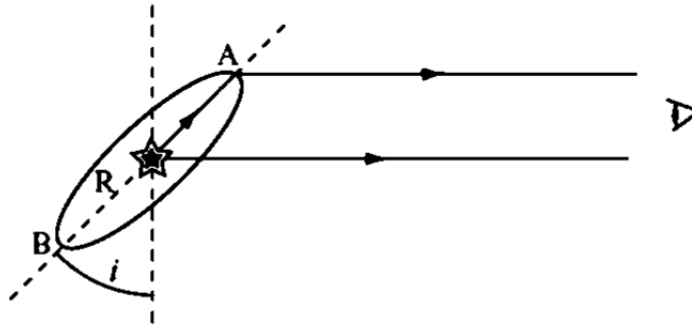
تکثیر این سوالات تنها بدون دریافت وجه و فقط برای افزایش سطح علمی دانش آموزان بلا مانع است.

ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

ثوابت فیزیکی و نجومی

$6 / 67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
$3 \times 10^8 ms^{-1}$	سرعت نور	c
$3 / 0.9 \times 10^{16} m$	پارسک	pc
$1 / 50 \times 10^{11} m$	واحد نجومی	Au
$9 / 46 \times 10^{15} m$	سال نوری	Ly
$6 / 96 \times 10^8 m$	شعاع خورشید	R_{\odot}
$6 / 38 \times 10^6 m$	شعاع زمین	R_{\oplus}
$1 / 74 \times 10^6 m$	شعاع ماه	
$3 / 84 \times 10^8 m$	شعاع مداری ماه	
$5 / 97 \times 10^{24} kg$	جرم زمین	M_{\oplus}
$5777 K$	دمای خورشید	T_{\odot}
$3 / 85 \times 10^{26} W$	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
$1 / 37 \times 10^3 Wm^{-2}$	ثابت خورشیدی	
$-26 / 8$	قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
$70 Km s^{-1} Mpc^{-1}$	ثابت هابل	H_0

(۱) IRYSC.COM در فوریه ۱۹۸۷ در کهکشان ابر ماژلانی بزرگ یک ابرنواختر در حال انفجار دیده شد. مدت کوتاهی بعد از آن، خطوط نشری نازکی از کربن و نیتروژن بسیار یونیده در طیف آن ظاهر شد. خطوط نشری خیلی نازک بودند و احتمالاً از گاز سرد موجود در اطراف ستاره ارسال شده بودند. هنگامی که ابرنواختر خاموش شد، یک بیضی از گاز فروزان در اطراف آن مشاهده شد که ابعاد آن در آسمان در حدود $۱۰'' \times ۶۲''$ بود. این ابعاد احتمالاً معرف یک حلقه‌ی دایره‌ای شکل از ماده است که در صفحه‌ی استوایی ستاره و در مرحله‌ای که ستاره غول قرمز بوده است از آن به بیرون پرتاب شده است و به ظاهر بیضی دیده می‌شود (شکل ۱).



الف) زاویه‌ی تمایل حلقه‌ی ابرنواختر (i) را بدست آورید.

روشن شدن خطوط نشری نازک چندین روز بعد از انفجار ابرنواختر شروع می‌شود. در واقع نور از دو راه به ما می‌رسد: یکی نوری است که مستقیماً از انفجار به ما می‌رسد، و دومی نوری است که از محل انفجار به حلقه‌ی گازی در اطراف ابرنواختر رسیده، گاز را یونیده کرده و سپس نور از گاز به سمت ما گسیل شده است.

ب) اگر شعاع حلقه R باشد، مقدار تأخیر زمانی که نور ابتدا به نقطه‌ی A و سپس به ما می‌رسد، با نوری که مستقیماً از ابرنواختر به سمت ما می‌رسد (t_A) را بدست آورید.

ج) همانند قسمت ب) تأخیر زمانی مربوط به نوری که از طریق نقطه‌ی B به ما می‌رسد (t_B) را بدست آورید.

د) اگر مقادیر اندازه‌گیری شده از تأخیر زمانی، بر حسب روز، عبارت باشند از:

$t_A = ۸۳ \pm ۶$ و $t_B = ۳۹۵ \pm ۲۴$ شعاع R و فاصله‌ی ما از ابرنواختر، d ، را بر حسب روز نوری به دست آورید و خطای مقادیر مربوطه را نیز ذکر کنید.

ه) اگر ابرنواختر در بیشترین روشنایی خود دارای قدر ظاهری $m_v = ۴$ باشد، درخشندگی مطلق آن L را بر حسب درخشندگی مطلق خورشید، L_\odot ، به دست آورید و با توجه به قسمت د) خطای آن را نیز ذکر کنید.

(۲) IRYSC.COM مشاهدات رصدی وجود یک سیاه‌چاله در برخی از کهکشان‌ها را پیش‌بینی می‌کند. برای مدل‌سازی منحنی سرعت

دورانی کهکشان‌هایی که یک سیاه‌چاله در مرکزشان قرار دارد، فرض می‌کنیم که یک جرم نقطه‌ای (سیاه‌چاله) با جرم $M_\odot = 10^6 M_\odot$ در مرکز کهکشان قرار دارد و بقیه‌ی جرم با چگالی $\rho(r) = \rho_0 a^2 / r^2$ در اطراف آن توزیع شده است، که در این رابطه $a = 1 kpc$ و ρ_0 مقادیر ثابتی هستند.

الف) رابطه‌ای برای سرعت دورانی اجرام، حول مرکز کهکشان، $V(r)$ ، به دست آورده و نمودار آن را به صورت تقریبی رسم کنید. فرض کنید اجرام در مدارهای دایره‌ای حرکت می‌کنند.

ب) اگر در شعاع $r = 1pc$ سرعت دورانی ستاره ای برابر با $V = 100 Km.s^{-1}$ باشد، مقدار عددی ثابت ρ_0 را بر حسب جرم خورشید بر پارسک مکعب (M_{\odot} / pc^3) به دست آورید.

ج) اگر چگالی $\rho(r)$ تا فاصله ای گسترده شده باشد که مقدارش در آنجا $0.001\rho_0$ باشد (به عبارت دیگر لبه ی کهکشان جایی است که چگالی در آنجا $0.001\rho_0$ باشد)، مقدار عددی سرعت فرار از لبه ی کهکشان را حساب کنید.

۳) IRYSC.COM در نجوم قدر ستاره ها در نواحی مختلف طیفی اندازه گیری می شود. معمولاً ناحیه ی مرئی را به سه ناحیه ی U به مرکز 365 نانومتر و پهنای 68 نانومتر و B به مرکز 440 نانومتر و پهنای 98 نانومتر و V به مرکز 550 نانومتر و پهنای 89 نانومتر تقسیم بندی می کنند. به این روش اصطلاحاً طیف سنجی UBV گفته می شود. کمیت های $U - B$ ، $U - V$ و $B - V$ کمیت های بسیار مناسبی در نجوم رصدی هستند. (راهنمایی: $U - B = m_U - m_B$)

چون تضعیف نور ستاره ها در محیط های مادی تابع طول موج نور عبوری است؛ بنابراین ضریب تضعیف نور ستاره نیز برای اندیس های U, B, V متفاوت خواهد بود.

مقدار شار تابشی ستاره پس از عبور از ناحیه ی کدر به ضخامت d به صورت $f = f_0 \exp(-k_{\lambda} d)$ کاهش می یابد که k_{λ} ضریب تضعیف در طول موج λ است و f_0 شار تابشی در بالای جو.

الف) رابطه ای برای «قدر ستاره» و در حضور تضعیف به دست آورید.

– اندیس رنگی $U - B$ ستاره ای در دو زاویه ی صفر و 60 درجه نسبت به سمت الرأس به ترتیب 0.8 و 0.6 است. همچنین $B - V$ این ستاره در زاویه ی سمت الرأسی صفر و 60 درجه به ترتیب دو مقدار 0.6 و 0.7 است.

– مقدار افزایش قدر به دلیل خاموشی جوی در نواحی $U - B$ و $B - V$ را به ترتیب با k_{U-B} و k_{B-V} نشان می دهیم.

ب) ضریب خاموشی جو k_{U-B} و k_{B-V} را و همچنین مقدار اندیس رنگ های خارج از جوی $(U - B)_0$ و $(B - V)_0$ بدون اثر خاموشی را به دست آورید.

ج) قدر ستاره در ناحیه ی U برابر 6 است. قدر B و V ستاره را بدست آورید.

د) قدر بولومتریک ستاره قدری است که ستاره در تمام طول موج طیف دارد. در این جا ما تقریباً قدر بولومتریک را از روی مجموع شار دریافتی از سه ناحیه ی U, B, V محاسبه می کنیم. با این تعریف قدر بولومتریک این ستاره در بالای جو را محاسبه کنید.

۴) IRYSC.COM فرض کنید در ابتدای بهار، سیاره ی مریخ در حالت مقارنه باشد. شش ماه بعد (ابتدای پاییز) در لحظه ی طلوع خورشید، سمت و ارتفاع مریخ از دید ناظری در شهر دوگنبدان با عرض جغرافیایی $30/5$ درجه، چقدر خواهد بود؟ (مدار مریخ را بر روی دایره البروج و نیم محور مدار مریخ را $1/52$ واحد نجومی در نظر بگیرید).

۵) IRYSC.COM مقارنه دو جرم سماوی زمانی است که دو جرم در آسمان کمترین زاویه را از دید ناظر زمین داشته باشند. در لحظه ی مقارنه ی دو جرم در منظومه ی خورشیدی مرکز هر دو جرم روی یک نصف النهار قرار گرفته اند و فاصله ی زاویه ای این دو مرکز $5/4$ است.

	M_1	M_2	زمین
نجومی T	224/7	27/3	365/25

دوره تناوب نجومی این اجرام در جدول مقابل آمده است.

۲۴ ساعت بعد، فاصله ی زاویه ای مرکزهای این دو جرم آسمانی چند درجه خواهد بود؟

6) IRYSC.COM برخی از ستاره‌ها در طی مراحل مختلف زندگی‌شان، پس از خروج بخشی از جرمشان که از طریق سوخت و ساز هسته‌ای است، تحت گرانش می‌زمیند و تبدیل به کوتوله‌ی سفید می‌شوند. به طور معمول جرم کوتوله‌های سفید از مرتبه‌ی جرم خورشید و شعاعشان از مرتبه‌ی شعاع زمین است. جرم و شعاع سه کوتوله‌ی سفید که هر کدام عضوی از یک منظومه‌ی دوتایی هستند اندازه‌گیری شده و در جدول زیر مقادیر آن‌ها ذکر شده است.

ستاره	جرم (M_{\odot})	شعاع (R_{\odot})
۱	۰/۵	۰/۰۱۸
۲	۰/۸	۰/۰۱۵
۳	۱/۱	۰/۰۱۴

الف) اگر فرض کنیم که رابطه‌ی جرم و شعاع در کوتوله‌های سفید به صورت زیر باشد:

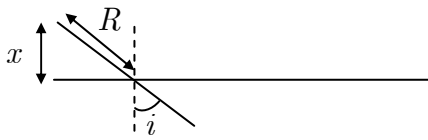
$$\frac{R}{R_{\odot}} = A \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^B$$

با رسم منحنی شعاع - جرم در مقیاس لگاریتمی، در نمودار شماره ۱، مقادیر عددی A و B را به دست آورید.

ب) فرض کنید که کوتوله‌ی سفید مانند جسم سیاه تابش می‌کند، درخشندگی مطلق یک کوتوله‌ی سفید را بر حسب جرم (M) و دمای سطحی (T_E) آن به دست آورید.

ج) نمودار درخشندگی-دمای سطحی یک کوتوله با جرم $M = 1M_{\odot}$ را در مقیاس لگاریتمی در نمودار شماره ۲ رسم کنید.

د) با توجه به قسمت (ج)، اگر درخشندگی کوتوله‌ای به جرم $M = 1M_{\odot}$ و دمای سطحی $T_E = 10^4 K$ در طول زمان ثابت باشد، چه مدت این کوتوله می‌درخشد. یک کوتوله‌ی سفید متشکل از یون‌ها و الکترون‌ها است که فقط انرژی جنبشی یون‌ها می‌توان ساطع شود. مقدار انرژی یون‌ها تقریباً $1/10$ کل انرژی پتانسیل کوتوله است. چگالی جرمی کوتوله را ثابت فرض کنید.



(۱) ابتدا باید طول قطر کوچکتر بیضی مورد نظر را حساب کنیم،

که مطابق شکل برابر می شود با $x = R \cos i$. حال برای محاسبه ی خروج از مرکز

از رابطه ی مقابل استفاده می کنیم: $e = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{1 - (\frac{R \cos i}{R})^2} = \sin i \Rightarrow i = 47^\circ$ که خواسته ی قسمت الف مسئله است.

(ب) تنها پارامتر موثر در تأخیر زمانی نور رسیده، اختلاف

طول مسیر طی شده است، پس:

$$c = \frac{x}{t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c}, \quad \Delta x = R - R \sin i$$

$$\Rightarrow \Delta t_A = \frac{R(1 - \sin i)}{c}$$

(ج) مشابه قسمت (ب) عمل می کنیم:

$$c = \frac{x}{t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c}, \quad \Delta x = R + R \sin i \Rightarrow \Delta t_B = \frac{R(1 + \sin i)}{c}$$

(د) میانگین مدت زمان رسیدن دو باریکه ی نور در قسمت های (ب) و (ج) برابر است با مدت رسیدن نور باریکه ی گسیل شده از

مرکز ابرنواختر، پس داریم:

$$t_{average} = \frac{\Delta t_A + \Delta t_B}{2} = \frac{(R - R \sin i) + (R + R \sin i)}{2c} = \frac{2R}{2c} = \frac{83 \pm 6 + 395 \pm 24}{2} = \frac{478 \pm 30}{2}$$

$$\Rightarrow R = c \times \frac{(478 \pm 30) \times 24 \times 60 \times 60}{2} = 6 / 0 \times 10^{15} \pm 3 / 8 \times 10^{14} m = 231 \pm 14 / 6 Ld$$

از طرفی با توجه به داده های صورت سوال، ابعاد ظاهری ابرنواختر برابر است با: $1 / 62'' \times 1 / 10''$ که در آن قطر بزرگتر همان R

ابرنواختر است. پس از تبدیل بزرگی ظاهری به درجه و سپس به رادیان ($1 / 62'' = 4 / 5^\circ \times 10^{-4} = 7 / 8 \times 10^{-6} Rad$)، برای

بزرگی ظاهری چنین می نویسیم:

$$\theta = \frac{2R}{d} \Rightarrow d = \frac{2 \times (6 / 0 \times 10^{15} \pm 3 / 8 \times 10^{14})}{7 / 8 \times 10^{-6}} = 1 / 58 \times 10^{21} \pm 9 / 7 \times 10^{19} m = 6 / 1 \times 10^7 \pm 3 / 74 \times 10^7 Ld$$

(ه) ابتدا مقدار روشنایی ابرنواختر را، به روش مقایسه ای با خورشید اندازه گیری می کنیم:

$$m_v - m_\odot = -2 / 5 \log \frac{b_v}{b_\odot} \Rightarrow 4 + 26 / 7 = -2 / 5 \log \frac{b_v}{137.0} \Rightarrow b_v = 7 / 2 \times 10^{-10}$$

$$b_v = \frac{L_v}{4\pi d_v^2} \Rightarrow L_v = (7 / 2 \times 10^{-10}) \times 4\pi (1 / 58 \times 10^{21} \pm 9 / 7 \times 10^{19})^2 \Rightarrow$$

$$L_v = (7 / 2 \times 10^{-10}) \times 4\pi (1 / 58 \times 10^{21} \pm 9 / 7 \times 10^{19})^2$$

$$= (7 / 2 \times 10^{-10}) \times 4\pi \times (2 / 5 \times 10^{42} \pm 2 \times 1 / 5 \times 10^{41} + 9 / 4 \times 10^{39}) \Rightarrow$$

$$L_v = 2 / 2 \times 10^{34} \pm 2 / 7 \times 10^{33} W$$

$$\frac{GmM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{الف) با فرض مدارهای دایروی و از برابر نهمی نیروها داریم:} \quad \text{IRYSC.COM} \quad (2)$$

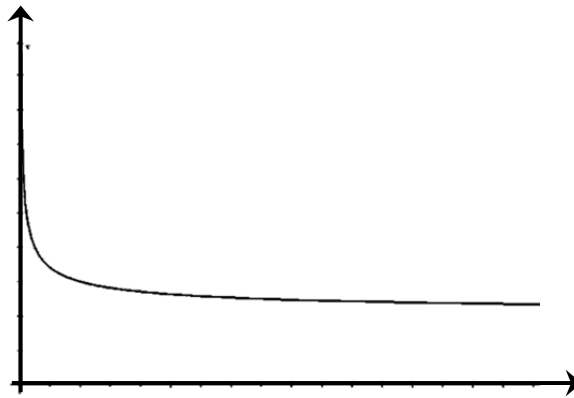
جرم داخلی را برحسب پارامترهای داده شده و با فرض احاطه مادهی داخلی در فضای گوی وار، محاسبه کنیم:

$$M(r) = M_0 + \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad \rho(r) = \rho_0 \frac{a^2}{r^2} \Rightarrow M(r) = M_0 + \int_0^r 4\pi r^2 \rho_0 \frac{a^2}{r^2} dr$$

$$= M_0 + \int_0^r 4\pi a^2 \rho_0 dr = M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r$$

در نتیجه داریم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r)}{r}}$$



برای ترسیم نمودار، پس از نقطه گذاری و بدست آوردن رفتار منحنی در نزدیکی مجانب هایش، به شکل روبرو می رسمیم.

ب) مقادیر عددی را پس از تبدیل واحد جایگذاری می کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r)}{r}}, \quad v = 100 \text{ km.s}^{-1}, r = 1 \text{ pc}, a = 1 \text{ kpc}, M_0 = 1.6 M_\odot$$

در نتیجه: $\rho_0 = 7 / 0.9 \times 10^{-21} \text{ (kg / m}^3\text{)}$ می شود.

ج) ابتدا باید ببینیم در چه فاصله ای چگالی به اندازه ی $0.1 \rho_0$ کاهش می یابد؛ با توجه به معادله ی تغییرات چگالی و برابرنهی با این مقدار داریم:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{a^2}{r^2} \Rightarrow 0.1 \rho_0 = \rho_0 \frac{1 \text{ kpc}^2}{r^2} \Rightarrow r = 10 \text{ kpc}$$

حال باید سرعت فرار را در این شعاع محاسبه کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r)}{r}}, \quad r = 10 \text{ kpc}, a = 1 \text{ kpc}, M_0 = 1.6 M_\odot, \rho_0 = 7 / 0.9 \times 10^{-21} \text{ (kg / m}^3\text{)}$$

پس داریم: $v = 106 / 67 \text{ km.s}^{-1}$

(۳) IRYSC.COM الف) مقایسه‌ی قدر ظاهری ستاره در حضور عامل کاهنده، با قدر ظاهری ستاره در شرایط خلأ چنین است:

$$m - m_o = -2 / 5 \log \frac{b}{b_o}, \quad d = d_o \Rightarrow m - m_o = -2 / 5 \log \frac{L}{L_o} = -2 / 5 \log \frac{f}{f_o}, \quad \frac{f}{f_o} = e^{-k_\lambda d}$$

$$\Rightarrow m - m_o = -2 / 5 \log e^{-k_\lambda d} = k_\lambda d (2 / 5 \log e) \Rightarrow$$

$$m = m_o + 1 / 0.8 k_\lambda d$$

ب) با توجه به عبارت بدست آمده در قسمت الف می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$U - U_o = 1 / 0.8 k_U d, \quad B - B_o = 1 / 0.8 k_B d, \quad V - V_o = 1 / 0.8 k_V d$$

حال می‌توانیم مقدار اندیس رنگی را در حضور و بدون حضور جو مقایسه کنیم (با تفریق دو به دوی روابط از هم) مثلاً:

$$(B - V) - (B - V)_o = 1 / 0.8 d (k_B - k_V)$$

از طرف دیگر، مسافت طی شده توسط نور در درون جو نیز از رابطه‌ی $d_z = d \sec Z$ بدست می‌آید؛ لذا داریم:

$$(B - V) - (B - V)_o = 1 / 0.8 d \sec Z (k_B - k_V)$$

حال کافیت این رابطه را برای دو زاویه‌ی سروسویی متفاوتی که در متن سوال آمده، مقایسه کنیم:

$$(B - V)_{Z=60} - (B - V)_o = 1 / 0.8 d \sec 60 (k_B - k_V), \quad (B - V)_{Z=30} - (B - V)_o = 1 / 0.8 d \sec 30 (k_B - k_V)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\frac{(B - V)_{Z=60} - (B - V)_o}{(B - V)_{Z=30} - (B - V)_o} = \frac{\sec 60}{\sec 30} = 2,$$

و طبق صورت سوال: $(B - V)_{Z=60} = -0.7$ و $(B - V)_{Z=30} = -0.6$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(B - V)_o = -0.5$$

بار دیگر همین عملیات را برای شاخص رنگی $U - B$ تکرار می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\frac{(U - B)_{Z=60} - (U - B)_o}{(U - B)_{Z=30} - (U - B)_o} = \frac{\sec 60}{\sec 30} = 2$$

و طبق صورت سوال: $(U - B)_{Z=60} = 0.6$ و $(U - B)_{Z=30} = 0.8$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(U - B)_o = 1$$

ج) قدر ستاره در طیف $U_o = 6$ است؛ با توجه به $(B - V)_o = -0.5$ و $(U - B)_o = 1$ ، داریم:

$$B = 5, \quad V = 5 / 5$$

د) طبق صورت سوال قدر مطلق در طیف آبی چنین بدست می‌آید:

$$(B - V)_o = M_B - M_V, \quad M_V = +4, \quad (B - V)_o = -0.5 \Rightarrow M_B = 3 / 5$$

از طرف دیگر، قدر بولومتربیک حاصل برآیند تمامی نورها در تمامی طیف‌هاست یعنی برای سادگی کار و با توجه به تعریف سوال

می‌توانیم در اینجا چنین بنویسیم: $L_{bol} = L_U + L_B + L_V$. بنابراین مطابق معمول برای مقایسه چنین می‌نویسیم:

$$M_{bol} - M_B = -2 / 5 \log \frac{L_{bol}}{L_B} = -2 / 5 \log \frac{L_B + L_U + L_V}{L_B} = -2 / 5 \log \left(1 + \frac{L_U}{L_B} + \frac{L_V}{L_B} \right)$$

حال باید نسبت های $\frac{L_U}{L_B}$, $\frac{L_V}{L_B}$ را بدست آوریم:

$$U - B = M_U - M_B = -2 / 5 \log \frac{L_U}{L_B}, \quad V - B = M_V - M_B = -2 / 5 \log \frac{L_V}{L_B}$$

$$\frac{L_V}{L_B} = 0 / 631, \quad \frac{L_U}{L_B} = 0 / 398$$

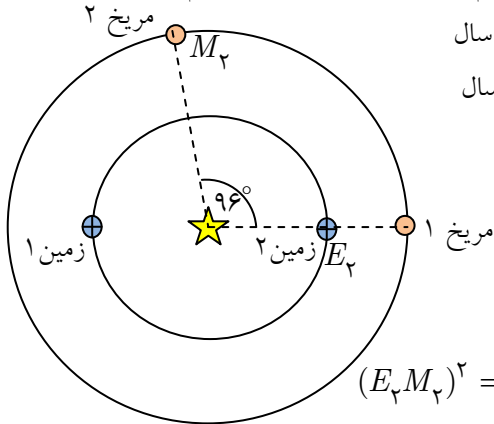
و در نهایت با جایگذاری در عبارت اولیه داریم:

$$M_{bol} = 3 / 5 - 2 / 5 \log(1 + 0 / 398 + 0 / 631) = 2 / 73$$

در انتها برای بدست آوردن درخشندگی بولومتریکی این ستاره، باید قدر بولومتریکی ستاره را با درخشندگی بولومتریکی خورشید مقایسه کنیم:

$$m_{bol} - m_{bol\odot} = -2 / 5 \log \frac{L_{bol}}{L_{bol\odot}} \Rightarrow L_{bol} = 6 / 25 L_{bol\odot}$$

۴) در حالت مقارنه، مریخ دقیقاً در پشت خورشید قرار می گیرد. طبق قوانین کپلر $P^2 = a^3$ و با توجه به این که نیم محور بزرگ مدار مریخ $1 / 52 Au$ است؛ دوره تناوب مداری مریخ را برابر $1 / 87$ سال زمینی بدست می آوریم. بعد از گذشت شش ماه، زمین 180 درجه از موقعیت اولیه اش جا بجا می شود؛ برای محاسبه ی موقعیت جدید مریخ هم از تناسب زیر استفاده می کنیم:



۳۶۰ درجه	۱/۸۷ سال
x درجه	۰/۵ سال

در نتیجه $x = 96 / 25$. پس وضعیت قرارگیری دو سیاره نسبت به هم به قرار مقابل خواهد بود:

حال برای بدست آوردن جدایی زاویه ای زمین ۲ و مریخ ۲ در مثلث (زمین ۲- مریخ ۲ - خورشید) از قضیه ی کسینوس ها و سپس سینوس ها استفاده می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} (E_2 M_2)^2 &= (E_2 \odot)^2 + (M_2 \odot)^2 - 2(E_2 \odot)(M_2 \odot) \cos \theta \\ M_2 \odot &= 1 / 52 Au, \quad E_2 \odot = 1 Au, \quad \theta = 96^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_2 M_2 = 1 / 9 Au$$

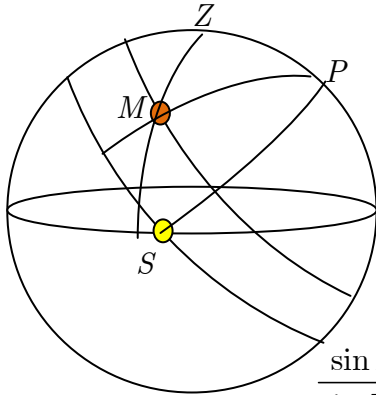
$$\frac{E_2 M_2}{\sin 96} = \frac{M_2 \odot}{\sin x} \Rightarrow x = 52^\circ$$

حال با نوشتن قضیه ی سینوس ها در مثلث مسطحه داریم:

از دید ناظر روی زمین ۲، خورشید در نقطه ی اول میزان قرار دارد، پس طول دایره البروجی مریخ $128^\circ - 52^\circ = 180^\circ$ درجه است (یعنی 128 درجه با نقطه ی اول حمل فاصله دارد). حال با استفاده از روابط تبدیلی بین دستگاه های مختصات، داریم:

$$\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda, \quad \cos \delta \cos \alpha = \cos \lambda \Rightarrow \delta = 18 / 4^\circ, \quad \alpha = 130^\circ$$

بعد خورشید در این تاریخ، ۱۸۰ درجه است، از طرف دیگر زاویه‌ی بین نصف‌النهار مریخ و خورشید برابر تفاوت بُعد این دو جرم سماوی است، یعنی: $\alpha_{\odot} - \alpha_{M_{\text{P}}} = 180 - 130 = 50^\circ$. که در شکل زیر با زاویه‌ی MPS مشخص شده است:



حال در کره‌ی آسمان در مثلث ZPM قضیه‌ی کسینوس‌ها را چنین می‌نویسیم:

$$\cos ZM = \cos ZP \cos PM + \sin ZP \sin PM \cos ZPM$$

که در آن $ZPM = 90 - MPS = 40^\circ$ و $PM = 90 - \delta = 72^\circ$

$ZP = 90 - \varphi = 59 / 5^\circ$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی اولیه، مقدار $ZM = 38^\circ$

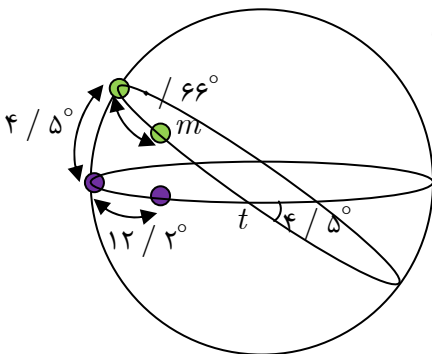
بدست می‌آید. پس ارتفاع مریخ برابر متمام این مقدار یعنی 52° است. برای بدست آوردن

$$\frac{\sin ZM}{\sin ZPM} = \frac{\sin PM}{\sin PZM} \Rightarrow \frac{\sin 38}{\sin 40} = \frac{\sin 72}{\sin A}$$

سمت نیز از قضیه‌ی سینوس‌ها کمک می‌گیریم:

که پس از حل، مقادیر سمت را 83 یا 97 درجه بدست می‌دهد. از این میان تنها پاسخ 97 درجه قابل قبول است. (زیرا با توجه به شکل سمت مریخ شرقی‌تر از سمت خورشید است)

(۵) IRYSC.COM هر دو جسم روی یک نصف‌النهار قرار دارند. پس، از لحظه‌ی مقارنه دائماً جدایی زاویه‌ای‌شان کاهش می‌یابد؛ بنابراین جدایی زاویه‌ای این دو در لحظه‌ی مقارنه برابر زاویه‌ی انحراف مداری دو سیاره نسبت به یکدیگر است.



حال با فرض مدارهای دایروی، میزان جابه‌جایی دو سیاره را ظرف مدت یک شبانه روز و بر روی صفحه‌های مداریشان حساب می‌کنیم؛ اما از آنجا که زمین هم به طور هم‌زمان در مدارش جابجا می‌شود، نخست دوره تناوب هلالی دو سیاره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_S}$$

سیاره‌ها برابر $29/5$ و $538/93$ روز بدست خواهد آمد. حال با استفاده از تناسب میزان جابه‌جایی سیاره‌ها را ظرف مدت 24 ساعت (اروز) محاسبه می‌کنیم:

روز $29/5$	360 درجه
روز 1	x درجه

که از اینجا مقدار x برابر $12/2$ درجه بدست می‌آید. با تکرار تناسب مشابه، میزان جابه‌جایی سیاره‌ی دوم در طی یک روز را نیز محاسبه می‌کنیم که برابر $0/66$ درجه بدست می‌آید. حال با جایگذاری مقادیر روی شکل، به سادگی و با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توان جدایی زاویه‌ای دو سیاره را محاسبه کرد: $\cos ms = \cos mt \cos st + \sin mt \sin st \cos mst$ و $mt = 90 - 0 / 66 = 89 / 34^\circ$

و $st = 90 - 12 / 2 = 77 / 8^\circ$ و $mst = 4 / 5^\circ$. پس از جایگذاری در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\cos ms = \cos 89 / 34 \cos 77 / 8 + \sin 89 / 34 \sin 77 / 8 \cos 4 / 5 \Rightarrow ms = 12 / 37^\circ$$

(۶) IRYSC.COM الف) از دو طرف معادله، لگاریتم می‌گیریم. با توجه به عبارت لگاریتمی $\log\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right) = B \log\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) + \log A$ و

جایگذاری مقادیر عددی، نمودار مورد نظر بدست می‌آید. برای بدست آوردن مقادیر عددی A, B از داده‌های موجود در جدول لگاریتم می‌گیریم؛ اگر خط راست حاصل از این سه نقطه را امتداد دهیم، عرض از مبدأ خط مذکور مقدار A را تعیین می‌کند. با کمک شیب خط مذکور، مقدار عددی B هم تعیین می‌شود. بعد از عددگذاری خواهیم داشت: $A = 0.014$, $B = -0.324$

ب) می‌دانیم درخشندگی از رابطه‌ی $L = 4\pi r^2 \sigma T^4$ بدست می‌آید؛ حال با نوشتن نسبت درخشندگی‌ها داریم:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

و با توجه به صورت سوال داریم: $\frac{R}{R_{\odot}} = A \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^B$. با جایگذاری این مقدار در نسبت درخشندگی‌ها

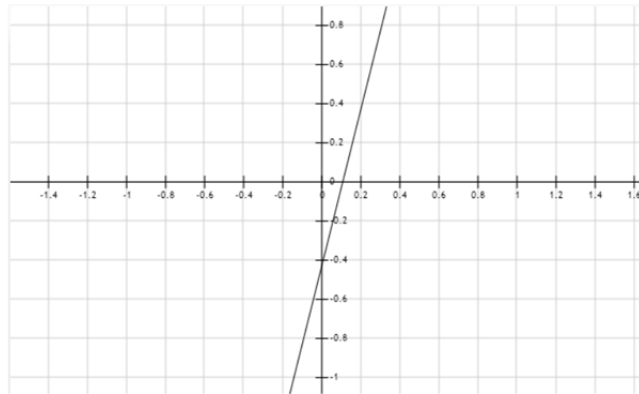
داریم: $\frac{L}{L_{\odot}} = A^2 \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{2B} \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$ و مرتبه‌ی جرم کوتوله‌های سفید نزدیک به جرم خورشید است؛ پس داریم:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = A^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

ج) برای رسم منحنی لگاریتمی باید از دو طرف رابطه‌ی فوق لگاریتم بگیریم؛ یعنی:

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \log\left(A^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4\right) = 2 \log A + 4 \log \frac{T}{T_{\odot}}$$

مقدار A را هم از بخش الف بدست آورده بودیم، پس:

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 4 \log \frac{T}{T_{\odot}} - 3.7 \Rightarrow y = 4x - 3.7$$


د) اگر دمای کوتوله که برابر 10^4 کلوین است را در عبارت بدست آمده در قسمت (ج) جایگزین کنیم؛ مقدار $L = 1/76 L_{\odot}$ بدست می‌آید. حال باید ببینیم که کوتوله‌ای با این درخشندگی چند سال به تابشش ادامه می‌دهد؛ برای این کار باید شرط سوال که انرژی یونها

0.1 انرژی پتانسیل گرانشی باشد را محقق کنیم، لذا داریم: $E_I = 0.1 E_G$ و انرژی پتانسیل گرانشی از رابطه‌ی $E_G = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$

بدست می‌آید؛ پس از جایگذاری، مقدار انرژی $E_I = 1/64 \times 10^{42}$ جی‌اچ‌اچ بدست می‌آید. حال باید ببینیم، یک کوتوله‌ی سفید این میزان انرژی را ظرف چه مدت می‌سوزاند. آهنگ مصرف سوخت در ستاره‌ها برابر درخشندگی‌شان است، پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$t = \frac{E}{L} = \frac{1/64 \times 10^{42} \text{ J}}{1/76 L_{\odot}}, \quad L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26} \text{ J.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow t = 2/4 \times 10^{15} \text{ s} = 7/6 \times 10^7 \text{ year}$$



المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

صفحه ۱ از ۲۱

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

(۱) توجه: این سوال شامل سه قسمت الف و ب و پ است.

الف) اگر بیشینه تابش در طیف ستاره A در طول موج ۲۹۰ نانومتر و بیشینه تابش در طیف ستاره B در طول موج ۸۷۰ نانومتر رصد شده باشد، مشخص کنید طیف های ۱ و ۲ به ترتیب متعلق به کدامیک از ستاره های A و B است.

طیف ۱



طیف ۲



طیف	۱	۲
ستاره		

در صورت مغایرت:
نمره به عدد:
نمره به حروف:
امضای مصححین:

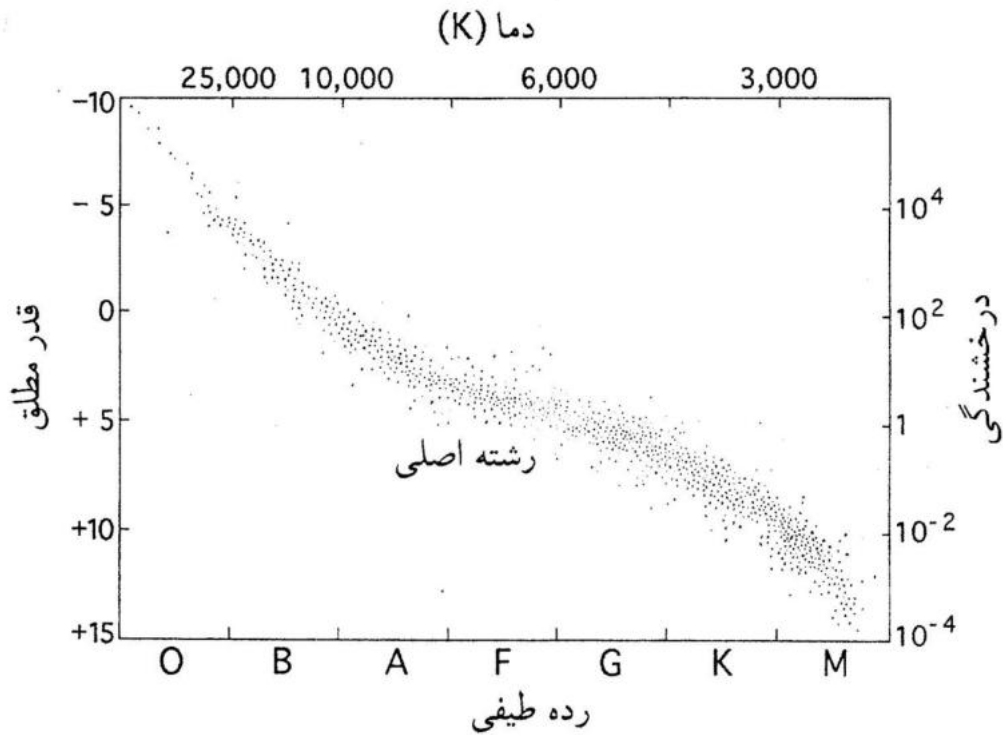
نمره به عدد:
نمره به حروف:
امضای مصحح دوم:

نمره به عدد:
نمره به حروف:
امضای مصحح اول:

در این کادر چیزی ننویسید



ب) طیف جذبی ۱ دارای بیشترین و تاریک ترین خطوط جذبی هیدروژن نسبت به تمامی گونه های طیفی است. اگر فرض کنیم هردو ستاره A و B در مرحله هیدروژن سوزی در هسته باشند. مکان دو ستاره را در شکل زیر مشخص کنید.





المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

صفحه ۳ از ۲۱

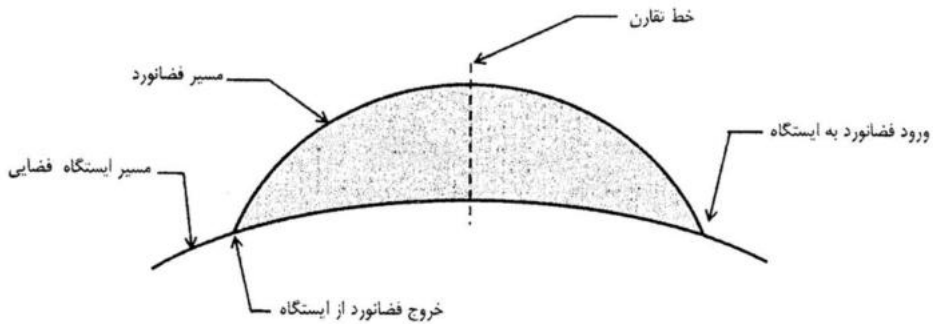
پ) نسبت جرم ستاره A به ستاره B چقدر است؟



۲) توجه: این سوال شامل سه قسمت الف و ب و پ است.

یک ایستگاه فضایی در مداری دایروی با دوره ی تناوب T و شعاع R به دور زمین در گردش است. در یک حرکت نمایشی، فضانوردی قصد دارد با پرش از ایستگاه، طی یک حرکت در فضا مسیری را آزادانه (بدون استفاده از نیروی پیشرانش و یا ...) طی کرده و دوباره به ایستگاه برگردد. مسیر طی شده ی وی در فضا در شکل زیر نشان داده شده است. (شکل به مقیاس نیست) مسیر هم صفحه با مدار ایستگاه فضایی و همچنین مسیر، نسبت به خط میانی متقارن است. (زاویه جدا شدن از ایستگاه و ورود به ایستگاه برابر است) مساحت قسمت رنگی در شکل $\pi R^2 e$ و زمان این مانور $\frac{T}{4}$ است.

$\frac{T}{4}$ $\pi R^2 e$



Lambert $e = 0.728$
 $\frac{a}{r}$

الف) خروج از مرکز مدار فضانورد را محاسبه کنید.

$e = 0.723$



باشگاه دانش‌پژوهان جوان

المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

صفحه ۵ از ۲۱

ب) نسبت نیم محور بزرگ مدار فشانورد، (a) به R را محاسبه کنید. $a/R = 1.34$



المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

صفحه ۶ از ۲۱

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

پ) هنگامی که فضاورد ~~مراجعه~~ هر دو به خط تقارن مانور می‌رسند، اندازه سرعت فضاورد ~~مراجعه~~ به ایستگاه را بر حسب R و T بدست آورید.

.....



۳) توجه: این سوال شامل دو قسمت الف و ب است.

سفینه‌ی فضایی به جرم ۲۵ کیلوگرم در کاوش‌های خارج از منظومه‌ی شمسی خود با یک ستاره‌ی غول سرخ مواجه می‌شود. جرم غول برابر جرم خورشید و درخشندگی آن ۱۰۰۰ برابر درخشندگی خورشید است. حرکت سفینه در یک خط مستقیم به سمت مرکز غول است و تحت گرانش آن به سویی سقوط می‌کند. هنگامی که سفینه به نزدیکی غول رسید، دما و حرارت بالا باعث روشن شدن علائم هشدار در سفینه می‌شود و سفینه بادبان‌های نوری خود را باز می‌کند. این بادبان‌ها تحت تاثیر فشار تابشی، بر نیروی گرانش غول غلبه کرده و سفینه از غول فاصله می‌گیرد. فاصله‌ی سفینه از مرکز غول، (D) بر حسب زمان t در نمودار ثبت شده است. بادبان‌ها نور را به صورت آینه‌ای دریافت و بازتاب می‌کنند و صفحه بادبان‌ها بر راستای تابش غول و راستای حرکت عمود است. در حل مسئله تنها نیروهای گرانش غول و فشار تابشی بر بادبان‌ها بعد از بازشدنشان را در نظر بگیرید و از تاثیرات جو غول و اثرات مغناطیسی و ... صرف‌نظر کنید. با استفاده از نمودار به سوالات زیر پاسخ دهید.

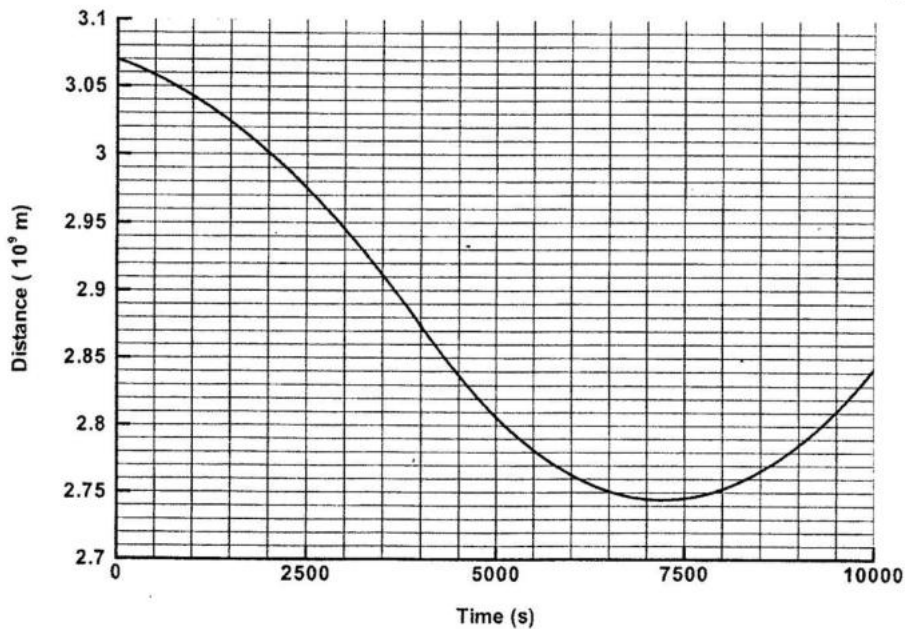
این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد

جرم خورشید $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ است.

ثابت جهانی گرانش $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ است.

درخشندگی خورشید $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26} \text{ W}$ است.

سرعت نور $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ است.





المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

صفحه ۸ از ۲۱

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

الف) سفینه در چه زمانی بادبان‌های خود را باز کرده است؟ برای پاسخ خود استدلال کافی بیاورید.



المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

صفحه ۹ از ۲۱

ب) مساحت بادبان‌های سفینه چند متر مربع است؟ حوالی ۴۰ باشد!

.....



المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

صفحه ۱۰ از ۲۱

۴) توجه: این سوال شامل دو قسمت الف و ب است.

ناظری در شهری با عرض جغرافیایی ϕ (شمالی) زندگی می‌کند. کمترین طول دایره البروجی نقطه‌ای از آسمان که در سمت‌الرأس ناظر قرار دارد، چقدر است؟ (ϵ زاویه‌ی بین دایره البروج و استوای سماوی است.)

الف) در حالتی که $\epsilon - 90 < \phi$



(۵) توجه: این سوال شامل سه قسمت الف و ب و پ است.

سرعت رصدی اجرام کیهانی برابر است با مجموع سرعت جریان هابل $v = H_0 r$ و مؤلفه‌ی سرعت خاصه در امتداد خط دید که به واسطه اثرات گرانشی موضعی پدید می‌آید.

این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد

ثابت هابل $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ است.

سرعت نور $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ است.

(الف) فرض کنید می‌خواهیم ثابت هابل را با اندازه گرفتن فاصله و انتقال به سرخ یک جرم منفرد در کیهان موضعی تخمین بزنیم. ثابت هابل چگونه به سرعت خاصه این جرم مربوط می‌شود؟

.....



المپیاد: نجوم و اختر فیزیک

صفحه ۱۳ از ۲۱

باشگاه دانش پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

ب) اگر مقدار مؤلفه‌ی در امتداد خط دید سرعتِ خاصه برابر با 600 km/s باشد در چه فاصله‌ای درصد خطای نسبی در اندازه‌گیری ثابت هابل 5% می‌شود؟

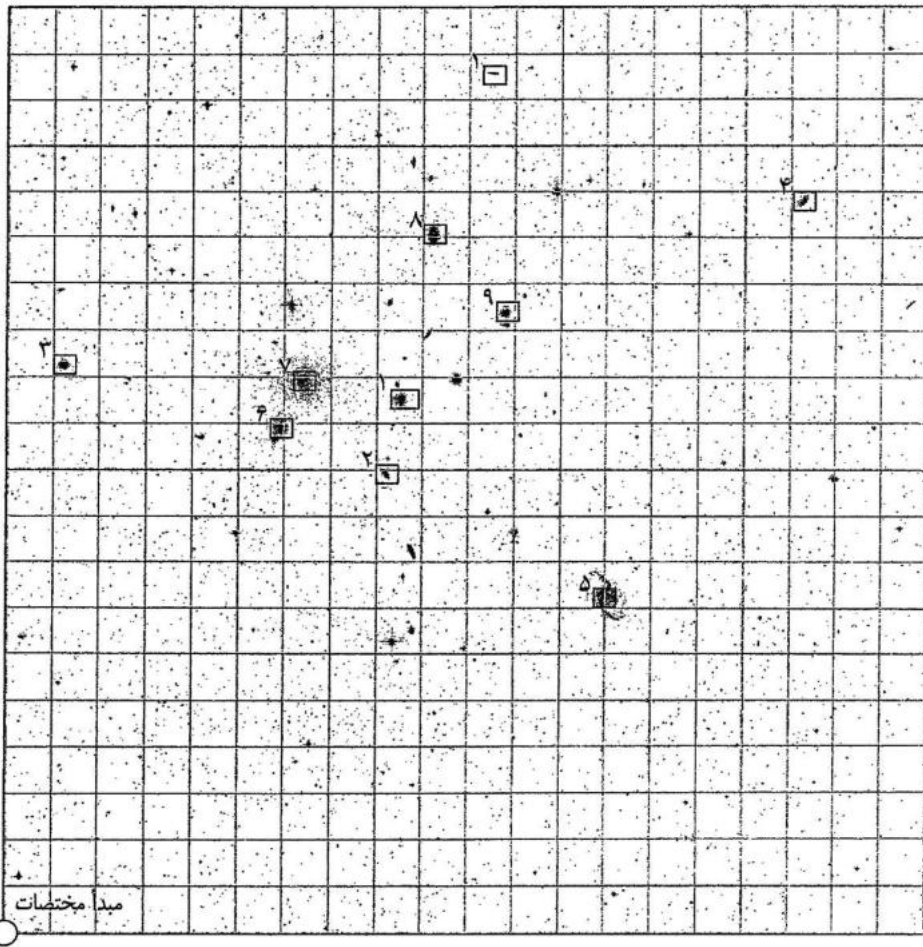
پ) اگر این جرم در انتقال به سرخ $z = 0.4$ قرار داشته باشد، در حضور سرعت خاصه ذکر شده در قسمت قبل میزان تغییر در انتقال به سرخ ناشی از انبساط هابلی چقدر است؟

.....



۶) توجه: این سوال شامل دو قسمت الف و ب است.

عکس زیر ناحیه‌ای از آسمان است که خوشه‌ای از کهکشان‌ها را نشان می‌دهد. این خوشه ۶۲ میلیون سال نوری از زمین فاصله دارد. خوشه‌ی کهکشان‌ها مجموعه‌ای از چندین کهکشان است که با یکدیگر برهم‌کنش گرانشی مستقیم دارند. مساحت این عکس برابر مساحت خوشه و مساوی ۴۷×۴۷ است.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، این عکس به $۴۰۰ = ۲۰ \times ۲۰$ ناحیه تقسیم شده است. بدین ترتیب می‌توان به هر نقطه از این عکس یک مختصات نسبت داد. مختصات گوشه‌ی چپ-پایین در این عکس $(۰, ۰)$ است. مکان ۱۰ کهکشان از اعضای این خوشه در عکس مشخص شده است. جدولی که در ادامه آمده است، مشخصات این ۱۰ کهکشان را نشان

.....



می‌دهد. ستون اول جدول، شماره‌ی کهکشانی که در عکس آمده است را تعیین می‌کند. ستون دوم و سوم مختصات کهکشان را نشان می‌دهد. ستون چهارم نسبت جرم (M) به درخشندگی در فیلتر آبی (L_B) هر کهکشان را بر حسب واحدهای خورشیدی تعیین می‌کند. یعنی برای خورشید داریم $M/L_B = 1$. ستون آخر نیز قدر ظاهری هر کهکشان در فیلتر آبی (B) را نشان می‌دهد.

شماره‌ی کهکشان	X	Y	M/L_B	B
۱	۱۰/۵۳	۱۸/۵۸	۷/۲۳	۱۹/۰۱
۲	۸/۲۱	۹/۹۳	۸/۹	۱۷/۹۱
۳	۱/۲۴	۱۲/۲۵	۷/۴	۱۴/۷۹
۴	۱۷/۲۷	۱۵/۷۹	۶/۹	۱۵/۸۸
۵	۱۳/۰۳	۷/۲۶	۴/۵	۱۰/۲۴
۶	۵/۹۵	۱۰/۹۴	۵/۱	۸/۸۱
۷	۶/۴۷	۱۱/۹۱	۹/۳	۹/۶۸
۸	۹/۲۳	۱۵/۰۸	۱۰/۰	۱۱/۹۶
۹	۱۰/۸۳	۱۳/۳۸	۳/۴	۱۳/۸۲
۱۰	۸/۵۵	۱۱/۵۳	۵/۷	۱۱/۳۶

این ثوابت ممکن است به دردتان بخورد

قدر مطلق خورشید در فیلتر آبی ۵/۴۷ است.

یک واحد نجومی $10^{11} \times 1/5$ متر است.

یک پارسک ۲۰۶۲۶۵ واحد نجومی است.



المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

صفحه ۱۶ از ۲۱

باشگاه دانش پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

الف) با توضیح مختصر و انجام محاسبات لازم، مختصات مرکز جرم خوشه را بدست آورید و مکان آن را در عکس با علامت + مشخص کنید.

.....



المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

صفحه ۱۷ از ۲۱

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

ب) اگر این ۱۰ کهکشان، تنها ۱۰ درصد از کل درخشندگی خوشه را (در فیلتر آبی) تولید کنند، قدر یک ثانیه‌ی قوسی مربع از این خوشه را در فیلتر آبی محاسبه کنید.

.....



۷) توجه: این سوال شامل پنج قسمت است.

أسطرلاب یک ابزار نجومی قدیمی است که به وسیله‌ی آن می‌توان در هر لحظه سمت و ارتفاع ستاره‌ها را برای یک ناظر بیابیم. طی قرن‌ها و اعصار گذشته، منجمان به نوشتن کتاب‌ها و مقالات فراوانی در زمینه‌ی آن پرداخته‌اند. به عنوان نمونه می‌توان به کتاب «التفهیم» از ابوریحان بیرونی اشاره کرد که فصلی از آن به توضیح و توصیف اسطرلاب و اجزای آن اختصاص یافته است. علاوه بر نوشتن این کتب، برخی از منجمان به تکمیل أسطرلاب‌ها و افزودن قابلیت‌های تازه به آنها می‌پرداختند و انواع تازه‌ای از أسطرلاب را می‌ساختند. مثلاً ابوریحان بیرونی وقتی به أسطرلاب‌های مختلف اشاره می‌کند، از أسطرلابی به نام «زورقی» نام می‌برد که توسط ابوسعید سجزی ساخته شده و بر مبنای چرخش زمین است. در یک حالت ساده، ساختن یک أسطرلاب بوسیله‌ی دو صفحه (در واقع دو دایره) امکان‌پذیر است.

صفحه‌ی ۱: این صفحه به صورت یک طلق در بسته‌ی سوالات قرار گرفته است و همان‌طور که مشاهده می‌کنید از دایره‌ای که محیط آن بر حسب ساعات شبانه روز درجه‌بندی شده، تشکیل شده است. درون آن هم در واقع نقشه‌ای از ستاره‌ها و صورت‌های فلکی آسمان است. در مرکز این دایره، ستاره‌ی قطبی قرار گرفته است که در اطراف آن برخی از صورت‌های فلکی، قابل مشاهده هستند. ضمناً برای سهولت کار دایره‌البروج نیز رسم شده که در تصویر مشخص است.

صفحه‌ی ۲: این صفحه مشخص‌کننده‌ی سمت و ارتفاع برای ناظری در شهر تهران است و محیط آن به صورتی درجه‌بندی شده است که روزهای سال را نمایش می‌دهد. خم مربوط به افق ناظر را درون این صفحه مشاهده می‌کنید. پس از خم مربوط به افق، خم‌هایی مشخص شده است که در واقع دایره‌ی هم‌ارتفاع هستند و نشان دهنده‌ی ارتفاع‌های صفر تا ۹۰ درجه (به صورت ۱۰ درجه، ۱۰ درجه) است. در نهایت، مرکز این دایره به نقطه‌ای ختم شده است که نشان‌دهنده‌ی سمت‌الرأس ناظر است. خم‌های دیگری که از سمت‌الرأس خارج شده‌اند، خم‌های هم‌سمت هستند و سمت شرقی و غربی را از صفر تا ۱۸۰ درجه (به صورت ۱۵ درجه، ۱۵ درجه) مشخص کرده‌اند. نقطه‌ی سفیدی که در سمت صفر درجه و ارتفاع ۳۶° قرار دارد، نشانگر قطب شمال سماوی است.

نحوه‌ی استفاده: مرکز این دو صفحه را بر روی هم قرار دهید. به طوری که ستاره‌ی قطبی صفحه‌ی ۱، در مکان صحیحش در صفحه‌ی ۲ قرار بگیرد. با چرخاندن این صفحه‌ها بر روی یکدیگر می‌توانید زمانی که مدنظر دارید را تنظیم کنید. مثلاً اگر قرار است اسطرلاب را برای ساعت ۱۰ شب در روز اول فروردین تنظیم کنید باید صفحات را به نحوی بر روی هم قرار دهید که ساعت ۲۲ از صفحه‌ی ۱ بر روی ۱ فروردین از صفحه‌ی ۲ منطبق شود. سپس با توجه به محل قرارگیری هر ستاره در صفحه‌ی ۲، می‌توانید سمت و ارتفاع آن را بیابید.



المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

صفحه ۱۹ از ۲۱

باشگاه دانش پژوهان جوان

اکنون با استفاده از اسطرلابی که دارید، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

(الف) پنج صورت فلکی که تماماً در نیمکره‌ی شمالی دایره‌البروج قرار دارند را نام ببرید. (این صورتهای فلکی باید در نقشه موجود باشند.)

(ب) سه صورت فلکی که در اول اسفند ماه ساعت ۱۰ شب، تمامی ستاره‌هایشان ارتفاعی بیش از ۳۰ درجه دارند را نام ببرید. (این صورتهای فلکی باید در نقشه موجود باشند.)

(پ) در ساعت ۸ شب چه روزی از سال ستاره‌ی دنب از نصف‌النهار ناظر عبور می کند؟

(ت) ارتفاع نسرطائر وقتی که سمت آن از دید ناظر ۱۲۰ درجه است، چقدر خواهد بود؟

(ث) این ناظر در فصل تابستان، خورشید را با ارتفاع ۱۰° و سمت ۸۰° مشاهده می کند. در این هنگام، خورشید در کنار کدام ستاره‌ی پر نور آسمان قرار دارد؟



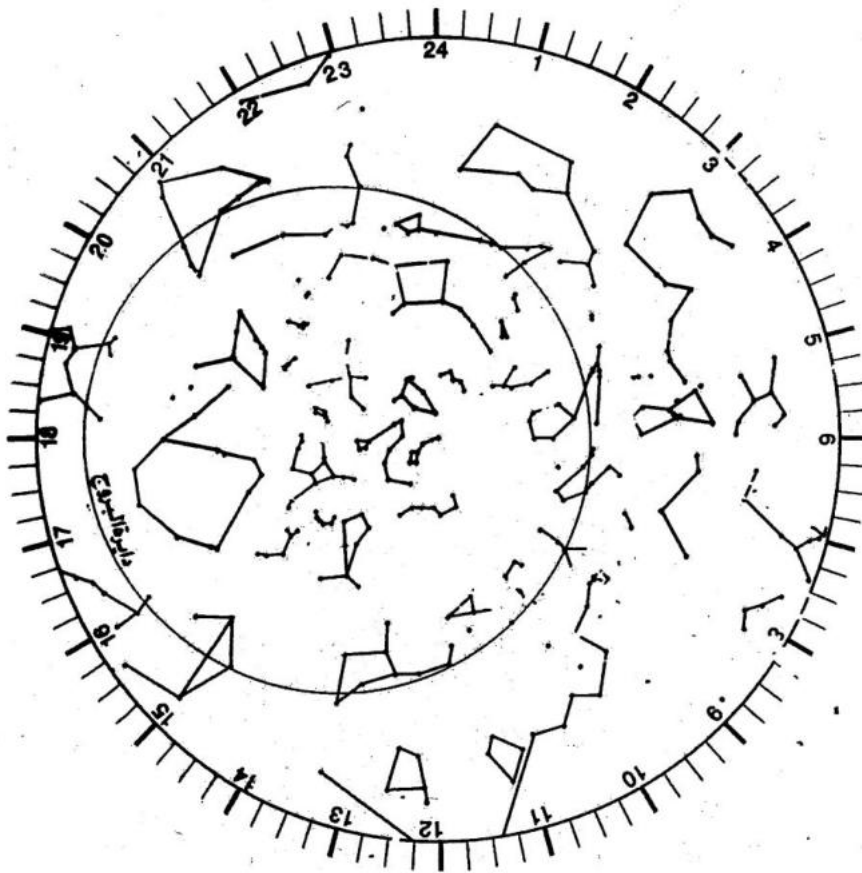
المپیاد: نجوم و اخترفیزیک

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

تاریخ آزمون: ۹۰/۲/۸

صفحه ۲۰ از ۲۱

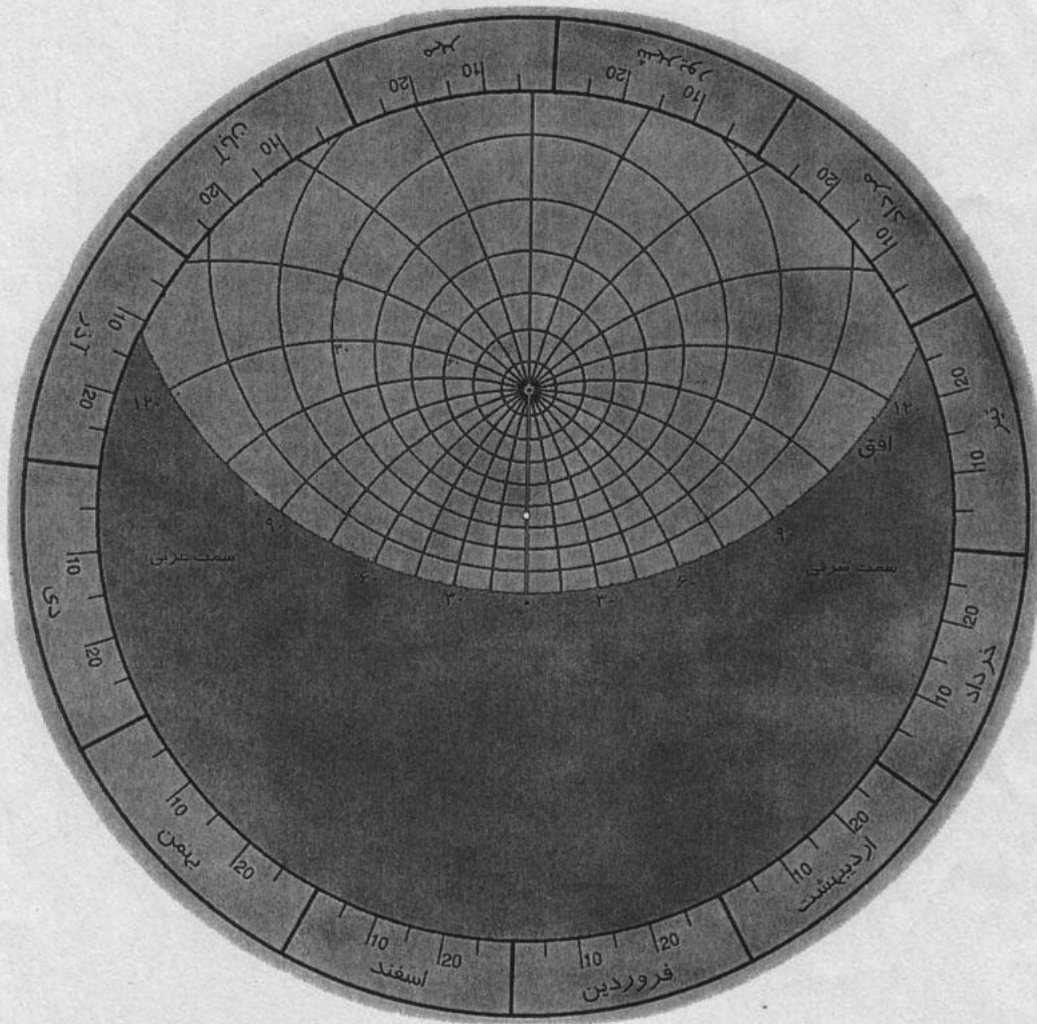
این صفحه و صفحه‌ی بعد را از دفترچه‌ی سوالات خود جدا نموده و دقت کنید که بر روی آن پاسخی ننویسید. در پایان آزمون، می‌توانید این دو صفحه را همراه خود ببرید.
صفحه ۱



طراحی و محاسبه‌ی صفحه‌های اسطرلاب از سید امیرصادات موسوی.



صفحه ۲





باسمه تعالی
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش پژوهان جوان

«مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست.»

امام خمینی (ره)

ششمین المپیاد نجوم و اختر فیزیک کشور

مرحله‌ی دوم

پنج‌شنبه ۹ اردیبهشت ۱۳۸۹

شروع: ۱۴:۰۰ الی ۱۸:۰۰

مدت آزمون: ۴ ساعت

د ف ت ر ج ه ی س ؤ ا ل ا ت

تذکرات:

- ۱- ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:
- ۲- بر روی هر برگه پیش‌نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- ۳- در زیر خط چین بالای پاسخ‌نامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
- ۴- معرفی‌نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوطه بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
- ۵- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه‌ریزی نباشد، مجاز است.
- ۶- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و الماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- ۷- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
- ۸- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

ثوابت فیزیکی و نجومی

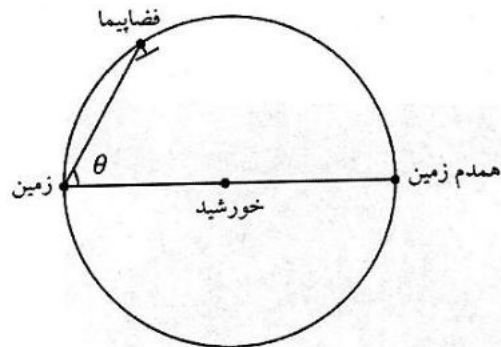
$6/67 \times 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²	G ثابت جهانی گرانش
$3/00 \times 10^8$ ms ⁻¹	c سرعت نور
$3/09 \times 10^{16}$ m	pc پارسک
$1/50 \times 10^{11}$ m	Au واحد نجومی
$9/46 \times 10^{15}$ m	Ly سال نوری
$6/96 \times 10^8$ m	R_{\odot} شعاع خورشید
$6/38 \times 10^6$ m	R_{\oplus} شعاع زمین
$1/74 \times 10^6$ m	شعاع ماه
$3/84 \times 10^8$ m	شعاع مداری ماه
$5/97 \times 10^{24}$ kg	M_{\oplus} جرم زمین
$5/79 \times 10^3$ K	T_{\odot} دمای خورشید
$3/85 \times 10^{26}$ W	L_{\odot} درخشندگی خورشید
$1/37 \times 10^3$ Wm ⁻²	ثابت خورشیدی
-26/8	m_{\odot} قدر ظاهری خورشید
70 kms ⁻¹ Mpc ⁻¹	H_0 ثابت هابل

1. یک ناظر در سطح زمین به طول جغرافیایی φ و عرض جغرافیایی λ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم زاویه‌ی مسیر مشاهده شده‌ی خورشید با سطح زمین هنگام غروب خورشید از دید این ناظر را حساب کنیم. این زاویه را با α نشان می‌دهیم. جهت خورشید هنگام غروب را با طول جغرافیایی β و عرض جغرافیایی γ نشان می‌دهیم. γ به روزی که در آن هستیم بستگی دارد. φ ، λ و γ داده‌های مساله‌اند. α زاویه‌ی بین دو صفحه است. یکی از این صفحه‌ها صفحه‌ای است که بردار عمود بر آن بردار واصل مرکز زمین به ناظر است. صفحه‌ی دوم صفحه‌ای است که شامل بردار واصل مرکز زمین به خورشید در لحظه‌ی غروب است، و بر یک مخروط مماس است. مخروطی که محور آن محور چرخش زمین، و نصف زاویه‌ی راس آن $(\frac{\pi}{2} - \gamma)$ است. این همان مخروطی است که مسیر خورشید در آن است. الف) β را حساب کنید.

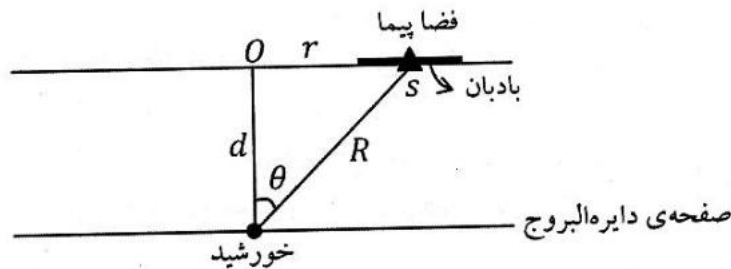
ب) جهت بردار یک‌ه‌ی عمود بر صفحه‌ی دوم را با طول جغرافیایی χ و عرض جغرافیایی ψ نشان می‌دهیم. ψ و χ را بر حسب β و γ محاسبه کنید.

ج) $\cos \alpha$ را محاسبه کنید.

۲. در یکی از نظریات عجیب در مورد موجودات فرازمینی گفته می شود که احتمالاً موجودات فرازمینی روی سیاره ی همدم زمین زندگی می کنند. همدم زمین سیاره ای است کاملاً هم شکل زمین که روی مدار فعلی زمین بدور خورشید می چرخد، به طوری که در نقطه ی مقابل قطری زمین قرار دارد، بنابراین از نظر زمینی ها همواره پشت خورشید قرار می گیرد و هیچ گاه قابل رصد نیست. فرض کنید اخترشناسان برای اینکه به وجود چنین سیاره ای پی ببرند فضایی را به فضا فرستاده اند. فضا پیما طوری به فضا پرتاب می شود که روی مدار زمین و در جهت خلاف حرکت زمین به سمت همدم زمین حرکت کند، به این فضاپیما آینه ی بزرگی به سطح A متصل است. قرار است که این آینه نور همدم زمین را به سمت رصدگران زمینی منعکس کند. اگر آینه به اندازه ی کافی بزرگ ساخته شده باشد، به طوری که اندازه ی ظاهری آن به اندازه ی کافی از قطر ظاهری همدم زمین از نظر ناظران زمینی بزرگتر باشد. قدر همدم زمین در آینه ی فضا پیما از نظر رصدگران برحسب کشیدگی فضاپیما (θ) چه قدر است؟



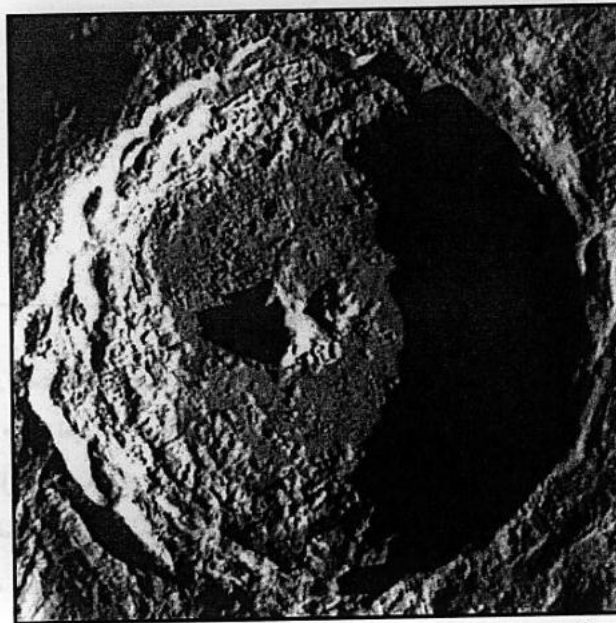
۳. بادبان خورشیدی از آینه ای بزرگ و مسطح ساخته شده، که تحت تاثیر فشار تابشی نور خورشید به جلو رانده می شود. در این مسئله می خواهیم به کمک بادبان خورشیدی فضا پیمایی را در مدار خارج از صفحه ی منظومه ی شمسی قرار دهیم. مطابق شکل فضاپیما S به جرم m به دور مدار دایره ای به مرکز O و به شعاع r می گردد. صفحه ی مداری فضاپیما موازی صفحه دایره البروج و در فاصله ی عمودی d از خورشید قرار دارد. فضاپیما برای حفظ تعادل خود از بادبان خورشیدی بهره می گیرد. مطابق شکل سطح بادبان منطبق بر صفحه ی مداری فضاپیما است. سطح بادبان را برحسب پارامترهای داده شده در صورت مساله و شکل و ثوابت فیزیکی بدست آورید.



۴. عرض جغرافیایی ناظر در چه بازه‌ای باشد تا دو ستاره که همزمان طلوع می‌کنند، بتوانند هم سمت شوند؟

۵. می‌دانیم، دمای تابش زمینی کیهان (CMB) در راستایی که با مختصات کهکشانی $b = 48^\circ$ و $l = 264^\circ$ داده می‌شود، بیشینه مقدار را دارد که به اندازه‌ی $\Delta T = 3.35 \text{ mK}$ بیشتر از متوسط است. سرعت کهکشان راه شیری نسبت به تابش زمینه چه قدر است؟ (سرعت و جهت حرکت خورشید نسبت به مرکز کهکشان 220 km در جهت مختصات کهکشانی $l_0 = 90^\circ$ و $b_0 = 0^\circ$ است.)

۶. رصدگر علاقه‌مند به ماه تصمیم می‌گیرد با استفاده از تلسکوپ رصدخانه و ابزار تصویر برداری CCD، تصویر نمای بسته از دهانه "تیکو" بگیرد. دهانه تیکو دهانه‌ای است با قطر 88 km که مطابق شکل زیر در مرکز آن قله‌ای دیده می‌شود به ارتفاع 2400 m . طول و عرض جغرافیایی ماه مرکزی تیکو 11.2° غربی و 43° جنوبی است. اگر در تصویر بدست آمده قطر دهانه‌ی تیکو 2010 پیکسل و حداکثر طول سایه قله مرکزی 272 پیکسل باشد، فاز ماه را در هنگام عکس-برداری بر حسب درصد روشن قرص ماه حساب کنید.



دهانه‌ی تیکو

طول و عرض جغرافیایی ماه مرکزی:

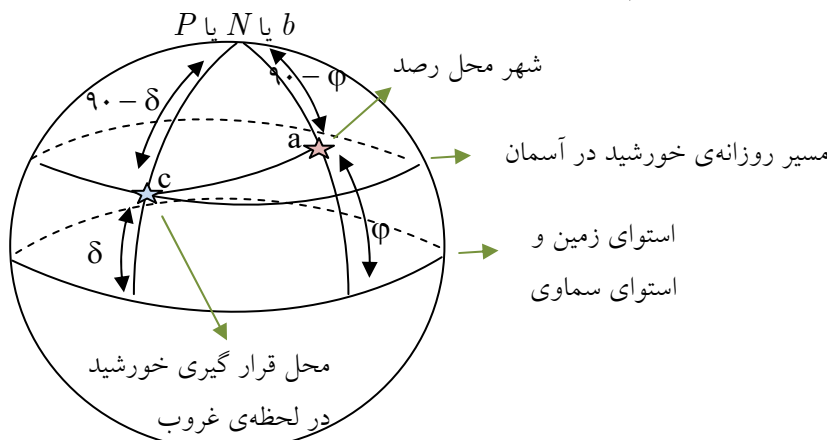
فرض می‌کنیم صفحه‌ی مداری ماه به دور زمین منطبق بر صفحه‌ی دایره البروج باشد در این صورت دایره‌ی استوای ماه عبارت است از فصل مشترک صفحه‌ی دایره البروج با سطح کره‌ی ماه. ناظر زمینی وقتی به قرص ماه نگاه می‌کند استوای ماه را به شکل قطری می‌بیند که از مرکز قرص می‌گذرد. عرض جغرافیایی همانند کره زمین به صورت زاویه‌ای که شعاع هر نقطه از کره‌ی ماه با صفحه‌ی استوای ماه (که همان صفحه‌ی دایره البروج است) می‌سازد، تعریف می‌شود. برای تعیین طول جغرافیایی به نصف النهار مبدأ نیاز داریم. نصف النهار مبدأ، نصف النهاری است که از مرکز قرص ماه از نظر ناظر زمینی می‌گذرد. به این ترتیب مرکز قرص ماه طول و عرض جغرافیایی صفر دارد. روی قرص ماه نقاطی با طول جغرافیایی صفر تا 90° غربی و صفر تا 90° درجه شرقی دیده می‌شوند. نقاطی که طول جغرافیایی آنها بیش از 90° درجه است در نیم کره پشتی ماه هستند و هرگز دیده نمی‌شوند.

یکی از روش های نامتعارفی که در طراحی این سوال مورد توجه قرار گرفته، تعویض نمادگذاری هاست که در اینجا برای فرار از این ترکیب طرح سوال، ابتدا عناوین را با علامات قراردادی و متعارفمان جایگزین می کنیم و سپس در انتهای مسئله، آن ها را با آنچه مد نظر سوال بوده جایگزین می نماییم:

عبارت	نام قراردادی	نام به کار رفته در مسئله
طول جغرافیایی محل رصد	l	φ
عرض جغرافیایی محل رصد	φ	λ
	میل δ	عرض جغرافیایی γ
$\alpha \pm x = \beta$	بُعد α	طول جغرافیایی β

صفحه‌ی عمود بر بردار واصل مرکز زمین-ناظر، همان افق است (صفحه‌ی اول)

صفحه‌ی دوم هم، همان صفحه‌ی دایره عظیمه‌ای است که خورشید در طی ۲۴ ساعت بر روی آن حرکت می کند. برای ترسیم شکل، کره‌ی زمین و کره‌ی آسمان را هم اندازه و منطبق بر یکدیگر در نظر می گیریم.



از آنجا که فاصله‌ی سمت‌الرأسی خورشید در هنگام غروب 90° است، فاصله‌ی شهر محل رصد تا محل قرارگیری خورشید هم، به صورت نظیر به نظیر همان مقدار 90° را پیدا می کند. حال اگر در مثلث abc قضیه‌ی کسینوس ها را بنویسیم؛ داریم:

$$\cos ac = \cos bc \cos aab + \sin bc \sin ab \cos abc$$

$$\Rightarrow \cos 90 = \cos(90 - \varphi) \cos(90 - \delta) + \sin(90 - \varphi) \sin(90 - \delta) \cos(\alpha - l)$$

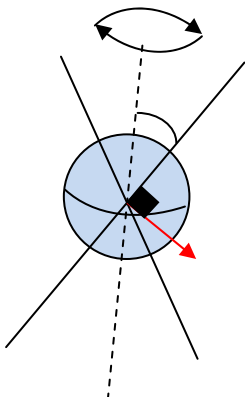
$$\Rightarrow \cos(\alpha - l) = -\tan \delta \tan \varphi$$

با جایگذاری نمادهای به کار رفته در مسأله چنین خواهیم داشت:

$$\cos(\beta - \varphi) = -\tan \gamma \tan \lambda$$

که همان پاسخ قسمت الف مسأله است.

حال به سراغ قسمت ب می رویم. همان طور که در صورت سوال هم مطرح شده، زمین در حال گردش به دور محورش است که در شکل زیر با خط چین نشان داده شده. خورشید با این محور زاویه‌ی $90 - \delta$ می سازد که با خط پر رنگ نمایش داده شده. این خطوط پرننگ همان یال های مخروط هستند پس جهت بردار عمود بر صفحه‌ی زمین-خورشید مطابق شکل با فلش قرمز نشان داده شده است.



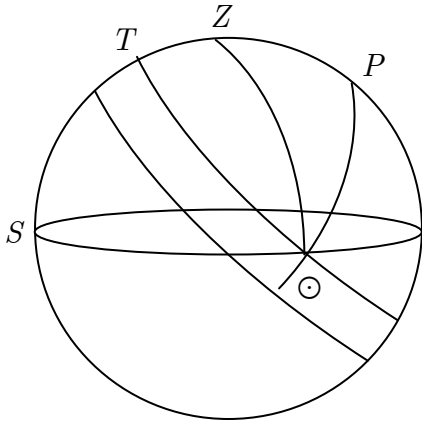
ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

بدیهیست که زاویه‌ی بردار و استوا با زاویه‌ی صفحه و استوا یکی است (یعنی هر دو، استوا را در یک نقطه قطع می‌کنند) پس طول جغرافیایی هر دو، برابر و برابر $\alpha - l$ خواهد بود.

و از طرف دیگر، به صورتی کاملاً شهودی می‌توان نتیجه گرفت که زاویه‌ی بردار با استوای سماوی $90 - \delta$ درجه است. پس داریم:

$$\psi = 90 - \gamma \quad , \quad \chi = \beta - \phi$$

و در نهایت برای بدست آوردن زاویه‌ی دایره‌ی صغیره‌ی خورشید با افق چنین عمل می‌کنیم:



مطلوب است بدست آوردن زاویه‌ی $T \odot S$ ؛ می‌دانیم $Z \odot S$ برابر 90 درجه است. پس به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که: $T \odot S = Z \odot P$. حال برای بدست آوردن $Z \odot P$ قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع $90 - \phi$ چنین می‌نویسیم:

$$\cos(90 - \phi) = \cos(90 - \delta) \cos 90 + \sin(90 - \delta) \sin 90 \cos Z \odot P$$

$$\Rightarrow \cos Z \odot P = \frac{\sin \phi}{\cos \delta}$$

با جایگزین کردن پارامترهای قرارداد شده در مسئله خواهیم داشت:

$$\cos \alpha = \sin \lambda \sec \gamma$$

(۲) IRYSC.COM با توجه به آنکه در مثلث فضاییما-زمین-همدم، ضلع زمین-همدم همان قطر دایره است؛ زاویه‌ی روبه‌رو به این ضلع برابر نصف کمان روبرویش می‌شود؛ یعنی می‌توانیم بنویسیم: زاویه‌ی زمین-فضاییما-همدم همواره برابر 90 درجه است. با توجه به این نکته طول ضلع همدم-فضاییما برابر می‌شود با: $2R \sin \theta$ که در آن R شعاع مداری زمین است. به طور مشابه داریم: ضلع زمین-فضاییما برابر است با $2R \cos \theta$. حال به سراغ حل مسئله می‌رویم. قدر همدم زمین به میزان نور رسیده به آینه و سهم بازتاب شده از آینه و در نهایت فاصله‌ی زمین تا آینه بستگی دارد؛ لذا ابتدا روشنایی همدم را در فاصله‌ی آینه تخمین می‌زنیم (از این پس همدم را با حرف اختصاری b نمایش می‌دهیم) از آنجا که سیاره مشابه زمین است، روشنایی رسیده از خورشید به سطح این سیاره نیز مشابه زمین بوده و برابر 1370 وات بر متر مربع است؛ حال برای محاسبه‌ی درخشندگی این سیاره باید سهم انرژی رسیده به کل سطح و رو به آینه را

حساب کنیم. درخشندگی بخشی از سیاره که نور دریافت می‌کند برابر می‌شود با: $L = \frac{4\pi r_{\oplus}^2}{4} \times 1370$ اما تمام بخش روشن سیاره، رو

به آینه نیست لذا باید این مقدار را ضربدر فاز سیاره از دید ناظر مستقر روی آینه کنیم؛ از طرف دیگر مطابق آنچه در ابتدا بدست آوردیم

فاصله‌ی فضاییما تا همدم برابر است با $2R \sin \theta$. پس برای روشنایی همدم در فاصله‌ی فضاییما داریم: $b_b = \frac{L \times \phi}{4\pi d^2}$ که در آن ϕ فاز

سیاره است. برای محاسبه‌ی فاز هم مطابق رابطه داریم: $\phi = \frac{1 - \cos x}{2}$ که در اینجا $\phi = \frac{1 - \cos(90 - \theta)}{2}$

پس از جایگذاری تمامی مقادیر، روشنایی سیاره از دید ناظر روی فضاپیما را چنین بدست خواهیم آورد:

$$b_b = \frac{\frac{4\pi r_{\oplus}^2}{2} \times 1370 \times \left(\frac{1 - \cos(90 - \theta)}{2}\right)}{4\pi(d)^2} = \frac{\pi r_{\oplus}^2 \times 1370 \times (1 - \sin \theta)}{4\pi(d)^2}$$

حال از آنجا که آینه یک بازتاب کننده کامل و تقریباً ایده آل است، کل روشنایی رسیده را بازتاب می دهد؛ از آنجا که در حالت متعارف مساحت آینه در کسر بازتاب شده از نور رسیده تأثیرگذار است و طبق خواسته ی صورت سوال چنین اتفاقی نباید بیافتد، تنها پارامتر تأثیرگذار توسط آینه را افزایش فاصله در نظر می گیریم! حال فاصله ی همدم تا فضاپیما و تا ناظر برابر می شود با:

$$2R \sin \theta + 2R \cos \theta$$

که همان مقدار مناسب برای d است. با جایگذاری این مقدار در عبارت b_b خواهیم داشت:

$$b_b = \frac{\pi r_{\oplus}^2 \times 1370 \times (1 - \sin \theta)}{16R^2 \pi (\sin \theta + \cos \theta)^2}$$

حال برای محاسبه ی قدر ظاهری کفایت این مقدار از روشنایی را در عبارت قدر- روشنایی جایگزین کنیم:

$$m_b - m_{\odot} = -2.5 \log \frac{\frac{\pi r_{\oplus}^2 \times 1370 \times (1 - \sin \theta)}{16R^2 \pi (\sin \theta + \cos \theta)^2}}{1370} = -2.5 \log \frac{r_{\oplus}^2 \times (1 - \sin \theta)}{16R^2 (\sin \theta + \cos \theta)^2}$$

و $m_{\odot} = -27$ پس داریم:

$$m_b = -27 - 2.5 \log \frac{r_{\oplus}^2 \times (1 - \sin \theta)}{16R^2 (\sin \theta + \cos \theta)^2}$$

(۳) IRYSC.COM مؤلفه شتاب در راستای عمود بر صفحه ی مداری صفر است، پس تنها کفایت مؤلفه عمودی ناشی از فشار تابشی با

مؤلفه عمودی ناشی از جاذبه ی گرانشی در تعادل قرار بگیرد: مؤلفه عمودی جاذبه ی گرانشی برابر است با $f_G = \frac{GmM}{R^2} \cos \theta$. حال

نوبت به محاسبه ی فشار تابشی می رسد.

$$E = P_{\odot} C \Rightarrow P_{\odot} = \frac{E}{C}$$

$$\text{انرژی} = \frac{\text{توان} \times \text{مقطع سطح} \times \text{زمان}}{\text{واحد سطح}}$$

$$E = bA\Delta t \Rightarrow P_{\odot} = \frac{bA\Delta t}{C}$$

$$P = m \Delta V = m(V_{\uparrow} - V_{\odot}) = -mV_{\odot} = -P_{\odot}$$

$$P = m\Delta V = \frac{bA\Delta t}{c} \Rightarrow m_0 \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{bA}{c} \Rightarrow ma = \frac{bA}{c} \Rightarrow f = \frac{bA}{c}$$

که مؤلفه عمود بر مدار برابر می شود با $f' = \frac{bA}{c} \cos \theta$ از طرف دیگر، بادبان بر تابش های خورشیدی عمود نیست؛ لذا برای محاسبه ی تکانه ی موثر، کل این مقدار را در $\cos \theta$ و در متمم آبدوی سفینه ضرب می کنیم تا F_{abs} را بدست آوریم. سپس این مقدار را با فشار تابشی فوتون ها که از فشار تابشی بردار پوئین تینگ ناشی می شود و برابر $\frac{r(S)A}{c} \cos^2 \theta$ است، جمع می کنیم.

$$\text{حال داریم: } f_{eff} = F_{rad} + F_{abs} = \frac{bA}{c} [r\alpha + (1 - \alpha)] \cos^2 \theta$$

$$f_G = f_{eff} \Rightarrow \frac{GmM}{R^2} \cos \theta = \frac{bA}{c} (1 + \alpha) \cos^2 \theta \Rightarrow$$

$$A = \frac{GmMc}{b(1 + \alpha) \cos \theta R^2}$$

۴) IRYSC.COM می دانیم دایره ی عظیمه ی گذرنده از دو نقطه ای که در فاصله ی کمتر از 180° درجه از هم قرار دارند، یکتا است. اگر در هنگام طلوع، هر دو ستاره روی دایره ی عظیمه ی افق قرار گرفته باشند و قرار باشد این دو ستاره هم ارتفاع شوند؛ این دایره ی عظیمه باید به واسطه ی دوران (به دور ستاره ی قطبی) در جایی از مسیر حرکتش بر افق عمود شود. در هنگامی که دایره ی عظیمه ی مورد نظر ما بر افق عمود می شود، از نقطه ی سومی هم می گذرد که همان سمت الرأس است. به عبارت دیگر در لحظه ی مطلوب ما هر سه نقطه ی ستاره ی اول، ستاره ی دوم و سمت الرأس بر یک دایره ی عظیمه قرار می گیرند. حال سوال را به این شکل ساده سازی می کنیم:

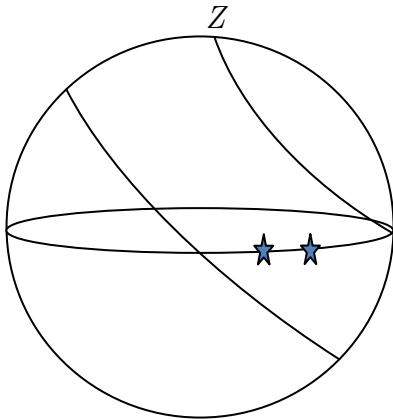
در کدام بازه از عرض های جغرافیایی ستاره ای که در سمت الرأس قرار دارد می تواند غروب کند؟

(یعنی مسیر حرکت ستاره ی واقع در سمت الرأس، افق را قطع کند)

دو مسأله نظیر به نظیر و یکسان اند.

این اتفاق در عرض های جغرافیایی 45° درجه ی شمال و جنوبی تا استوا می افتد.

$$-45 \leq \varphi \leq +45$$



۵) IRYSC.COM سرعت خورشید v به دو مؤلفه اصلی تفکیک می شود، یکی سرعت خورشید در کهکشان v_\odot و دیگری سرعت خود

$$\vec{v} = \vec{v}_\odot + \vec{v}_G$$

بردار سرعت را در دستگاه مختصاتی به مرکز مبدأ کهکشان باز می کنیم:

$$\vec{v} = v \cos b \cos l \vec{i} + v \cos b \sin l \vec{j} + v \sin b \vec{k}$$

با توجه به مقادیری که از راستای حرکت خورشید در صورت سوال آمده است، بردار سرعت خورشید هم برابر می شود با:

$$\vec{v}_{\odot} = v_{\odot} \vec{j}$$

پس برای بردار سرعت کهکشانی می توانیم چنین بنویسیم: $\vec{v}_G = v \cos b \cos l \vec{i} + (v \cos b \sin l - v_{\odot}) \vec{j} + v \sin b \vec{k}$

از آنجا که تمامی مقادیر معلوم اند تنها کافی است مقدار سرعت کل را حساب کنیم؛ با توجه به قانون وین داریم: $\lambda_{\max} T = 0.0029$

$$\text{پس: } \lambda = \frac{0.0029}{T} \text{ و برای محاسبه ی تغییرات دوپلری باید میزان تغییرات طول موج را داشته باشیم: } \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1$$

$$\text{پس از جایگذاری وین داریم: } \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{0.0029}{T} - 1 = \frac{T_0}{T} - 1 = -\frac{\Delta T}{T}$$

و دمای میانگین تابش پس زمینگی کیهان ۲/۷۳ کلوین

$$\text{است؛ پس } \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = -\frac{\Delta T}{T} = 1/2 \times 10^{-3}$$

با برابری این مقدار با معادله ی سرعت دوپلر نسبتی داریم:

$$1/2 \times 10^{-3} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

که از آنجا سرعت کل 368 km.s^{-1} بدست می آید.

مقدار سرعت کهکشانی از جمع جبری $\vec{v}_G = v \cos b \cos l \vec{i} + (v \cos b \sin l - v_{\odot}) \vec{j} + v \sin b \vec{k}$ بدست می آید، لذا:

$$\vec{v}_G = \sqrt{v_{\odot}^2 + v^2 - 2v_{\odot}v \cos b \sin l} = 542 \text{ km.s}^{-1}$$

۶) IRYSC.COM برای حل این سوال در گام اول، طول سایه ی قله را برحسب کیلومتر و با استفاده از تناسب بدست می آوریم. همان طور

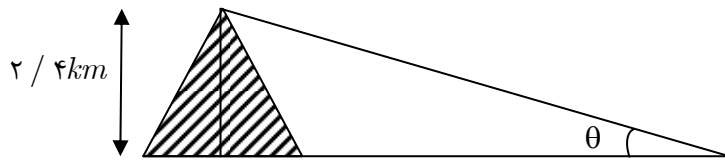
که در متن سوال هم توضیح داده شده، اگر قطر دهانه ۲۰۱۰ پیکسل باشد حداکثر طول سایه ۲۷۲ پیکسل خواهد بود، پس داریم:

طول سایه	قطر دهانه
پیکسل ۲۷۲	پیکسل ۲۰۱۰
x کیلومتر	۸۸ کیلومتر

که از اینجا مقدار x برابر $11/9 \text{ km}$ بدست می آید. توجه کنید که حتی اگر صورت سوال در مورد قطر سایه و دهانه برحسب پیکسل

چیزی نمی گفت، به سادگی و با استفاده از خط کش بر روی تصویر نمایش داده شده، می توانستید طول سایه را محاسبه کنید.

از آنجا که ارتفاع قله 240 m داده شده است، به سادگی می توانید ارتفاع خورشید را از دید ناظر واقع در آن منطقه محاسبه کنید:



$$\tan \theta = \frac{2/4 \text{ km}}{11/9 \text{ km}} \Rightarrow \theta = 11/4^\circ$$

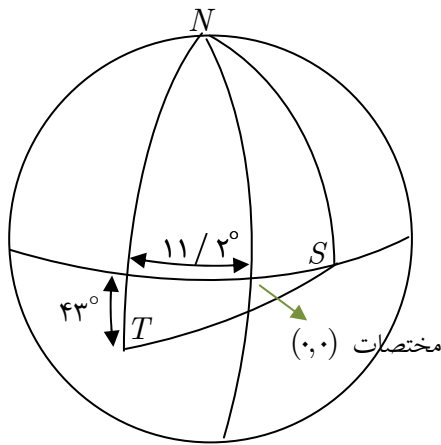
یعنی از دید ناظر واقع بر قله، ارتفاع خورشید ۱۱/۴ درجه و فاصله‌ی سمت الرأسی آن ۷۵/۶ درجه خواهد شد.

حال در ادامه‌ی کار از یک تناظر برای ساده شدن حل مسئله استفاده می‌کنیم:

از آنجا که طبق صورت سوال مدار گردش زمین و ماه، منطبق بر هم فرض شده‌اند، می‌توانیم نقاطی نظیر خورشید و زمین را بر سطح ماه،

تصویر کنیم. حال به سراغ رسم شکل می‌رویم:

که در آن T محل قرارگیری گودال تیکو است.



از آنجا که با توجه به شکل، سایه در جهت شرق به غرب کشیده شده، به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که محل خورشید در سمت شرق گودال قرار گرفته و از آنجا که خورشید روی استوای ماه حرکت می‌کند، شکل مطابق آنچه در مقابل می‌بینید ترسیم می‌شود.

حال در مثلث NST قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای ضلع TS چنین می‌نویسیم:

(کمان TS نظیر فاصله‌ی سمت الرأسی خورشید از گودال تیکو است)

$$\cos ST = \cos NS \cos NT + \sin NS \sin NT \cos SNT$$

$$\Rightarrow \cos 78/6 = \cos 90 \cos 133 + \sin 90 \sin 133 \cos SNT$$

$$\Rightarrow \hat{SNT} = 74^\circ$$

بدیهی است که زاویه‌ی SNT برابر است با مجموع طول جغرافیایی شرقی خورشید به علاوه طول جغرافیایی گودال تیکو (غربی) که

نتیجه می‌دهد:

$$SNT = \lambda_S + \lambda_T \Rightarrow \lambda_S = 74^\circ - 11/4^\circ = 62/8^\circ$$

از طرفی می‌دانیم که فاز ماه از دید ناظر زمینی، از رابطه‌ی $\phi = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \times 100$ بدست می‌آید. پس در مورد این حالت خاص داریم:

$$\phi = \frac{1 + \cos 62/8}{2} \times 100 = 72/8\%$$

توجه داشته باشید که برخی در هنگام حل این مسئله حالت دومی را برای طول جغرافیایی غربی خورشید در نظر می‌گیرند. این حالت با

توجه به تصویر داده شده در صورت سؤال، غیر قابل قبول است (یعنی خورشید لزوماً باید در سمت راست گودال باشد).



باسمه تعالی
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش پژوهان جوان

«مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست.»

امام خمینی (ره)

پنجمین المپیاد نجوم کشور
مرحله دوم
سه شنبه ۱ اردیبهشت ۱۳۸۸

شروع: ۱۴:۰۰ الی ۱۷:۳۰

مدت آزمون: ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه

دفترچه ی سؤالات

تذکرات:

- ۱- ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:
- ۲- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- ۳- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه‌ای ننویسید.
- ۴- معرفی نامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع آوری نماید.
- ۵- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
- ۶- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و الماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- ۷- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
- ۸- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

(۱) با فروپاشی α در هسته پلوتونیوم ^{238}Pu (نیمه عمر ۸۷/۷ سال، جرم هسته ۲۳۸/۰۵)، هسته اورانیوم ^{234}U به وجود می‌آید. در این فرایند مقدار $5/49 \text{ MeV}$ انرژی آزاد می‌شود. در مولدهای موسوم به رادیوگرمایی، از انرژی گرمایی این فرایند برای تولید انرژی استفاده می‌شود. فضاپیمای *Voyager ۲*، که در تاریخ ۳۰ مرداد ۱۳۵۶ به فضا پرتاب شد، در مسیر خود از نزدیکی ۴ سیاره، از جمله سیاره زحل در فاصله ۹/۵ AU از خورشید، در تاریخ ۵ شهریور ۱۳۵۸ عبور کرد. منبع تغذیه آن یک مولد رادیوگرمایی با بازدهی ۵/۵٪ بود که $4/5 \text{ kg}$ پلوتونیوم ^{238}Pu به همراه داشت. هم دوره با این فضاپیما، ایستگاه فضایی *Skylab* (سال‌های ۱۳۵۲-۱۳۵۷) بود که برای تغذیه انرژی آن پنل‌های خورشیدی با مساحت $73 \cdot \text{m}^2$ و توان $10/5 \text{ kW}$ طراحی شده بودند اما در هنگام پرتاب آسیب دیدند. اگر در فضاپیمای *Voyager ۲* نیز برای تولید انرژی از پنل‌های خورشیدی همانند ایستگاه فضایی *Skylab* استفاده می‌شد، به گونه‌ای که مقدار انرژی آن برابر با مولد رادیوگرمایی آن باشد، چه مساحتی برای این پنل‌ها باید در نظر گرفته می‌شد؟

(۲) رصد و اندازه‌گیری سرعت‌های چرخشی ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان‌های مارپیچی نشان می‌دهد که در فاصله‌های زیاد، چند کیلو پارسی، از مرکز کهکشان داریم: $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = V_{\text{const}}$. فرض کنید که در کهکشان‌های مارپیچی، نسبت جرم به درخشندگی و همچنین نسبت درخشندگی به سطح مقدار ثابتی است. رابطه‌ی زیر را با فرض توزیع کروی و متقارن برای ستاره‌ها و قانون جاذبه‌ی نیوتنی بدست آورید.

$$M = -10 \log V_{\text{const}} + \text{Const}$$

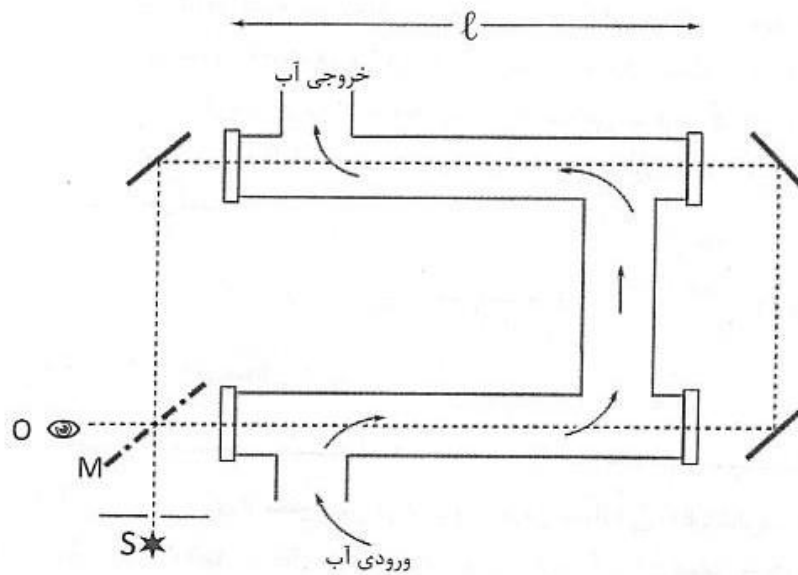
(M قدر مطلق کهکشان است.)

(۳) کوتوله‌ی سفید ستاره‌ای است که جرم آن از مرتبه‌ی جرم خورشید، و شعاع آن از مرتبه‌ی شعاع زمین است.

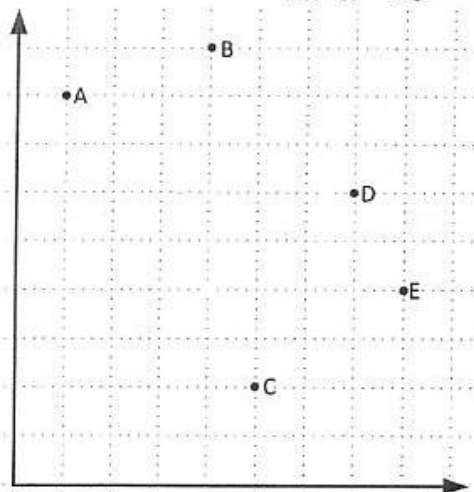
(الف) فرض کنید یک کوتوله‌ی سفید از تحول ستاره‌ای مثل خورشید ساخته شده باشد. و فرض کنید طی این تحول ماده‌ی مجاور سطح این ستاره یک رسانای بسیار خوب است، چنان‌که هر مدار فرضی که بگیریم، نیروی محرکه‌ی الکتروموتوری در آن مدار صفر است. شار مغناطیسی که از یک مدار فرضی می‌گذرد را در نظر بگیرید، انقباض مدار همراه با ستاره را دنبال کنید، و از آنجا شدت میدان مغناطیسی در سطح ستاره (B) را وقتی شعاع ستاره در حال انقباض (r) است، حساب کنید.

(ب) با استفاده از اینکه شدت میدان مغناطیسی در سطح خورشید 10^{-4} T است، شدت میدان مغناطیسی در سطح یک کوتوله‌ی سفید را تخمین بزنید.

۴) در سال ۱۸۵۱، فیزو سرعت نور را در محیط متحرک به وسیله‌ی تداخل‌سنجی که طرح آن را در شکل زیر می‌بینید، مورد بررسی قرار داد. نوری با طول موج λ از منبع S به وسیله‌ی آینه‌ی M به دو شعاع تقسیم می‌شود. شعاع‌ها به دور تداخل‌سنج در دو جهت مختلف حرکت می‌کنند و در تلسکوپ ناظر O که شکل فریز را می‌بیند با هم ترکیب می‌شوند. دو بازوی تداخل‌سنج لوله‌هایی پر از آب به طول l هستند که به صفحه‌هایی از شیشه‌ی مسطح منتهی می‌شوند. آب در لوله‌ها جاری است، به طوری که یکی از شعاع‌های نوری در جهت جریان آب و دیگری در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند. بدون در نظر گرفتن اثرات نسبیتی جمع سرعت‌ها، جابه‌جایی فریز وقتی آب با سرعت v جریان دارد چه قدر است؟



۵) شکل زیر پنج نقطه از مدار جرمی آسمانی را نشان می‌دهد که مختصات نقاط آن به صورت زیر است.



$$A: (1, 8) \quad B: (4, 9) \quad C: (5, 2) \quad D: (7, 6) \quad E: (8, 4)$$

این مدار کدامیک از مقاطع مخروطی است؟ مشخصات مدار را محاسبه کنید.

۶) مدار جسم A که به دلیل گرانش جسم B دور B می‌گردد، یک بیضی است. جسم B یک کانون این بیضی است. معادله مدار به صورت

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

است، که a نیم‌قطر بزرگ بیضی، ε خروج از مرکز بیضی، r فاصله‌ی A با B، و θ زاویه‌ی بردار واصل B به A با بردار واصل B به D (حضیض مدار A) است.

جسم A را کره‌ی کوچکی بگیرد که به دور خودش هم می‌چرخد. محور این چرخش بر مدار A عمود است، جهت چرخش همان جهت گردش مداری A است، دوره‌ی چرخش با دوره‌ی مداری برابر است و سرعت چرخش ثابت است. در این صورت اگر خروج از مرکز مدار صفر می‌بود، از B فقط نیمی از A دیده می‌شد. فرض کنید خروج از مرکز مدار بسیار کوچک‌تر از یک است و وابستگی زاویه θ با زمان t به صورت زیر است، که در آن صفر t از حضیض مدار محاسبه می‌شود. l اندازه حرکت زاویه‌ای است.

$$t = \frac{1}{\lambda} (\theta - \varepsilon \sin \theta) \quad , \quad \lambda = \frac{l}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2}$$

حالا B چه کسری از A را می‌بیند؟

۷) هواپیمایی در ارتفاع ۴۰۰۰ متری از سطح زمین در نقطه‌ای با عرض جغرافیایی 60° شمالی، با سرعت 200 km/h نسبت به سطح زمین به سمت شرق در حال پرواز است. از دید او ستاره‌ی A با افق مماس می‌شود. ستاره‌ی B که ۶ ساعت جلوتر از A است و میل آن 18° کمتر از میل ستاره‌ی A است، چند ساعت بعد، از دید خلبان غروب می‌کند؟

ثوابت فیزیکی و نجومی

$6/67 \times 10^{-11}$	$\text{m}^2 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
$5/67 \times 10^{-8}$	$\text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$	ثابت استفان بولتزمن	σ_B
$6/63 \times 10^{-27}$	J s	ثابت پلانک	h
3×10^8	ms^{-1}	سرعت نور	c
365/24	days	سال نجومی	
$3/09 \times 10^{16}$	m	پارسک	pc
$1/50 \times 10^{11}$	m	Au	
$9/46 \times 10^{15}$	m	سال نوری	Ly
$6/96 \times 10^8$	m	شعاع خورشید	R_{\odot}
$6/38 \times 10^6$	m	شعاع زمین	R_{\oplus}
$7/15 \times 10^7$	m	شعاع مشتری در استوا	
$1/74 \times 10^6$	m	شعاع ماه	
$3/84 \times 10^8$	m	شعاع مداری ماه	
$1/99 \times 10^{24}$	kg	جرم خورشید	M_{\odot}
$5/97 \times 10^{24}$	kg	جرم زمین	M_{\oplus}
$1/90 \times 10^{27}$	kg	جرم مشتری	
$5/79 \times 10^3$	K	دمای خورشید	T_{\odot}
$3/85 \times 10^{26}$	W	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
$1/37 \times 10^4$	Wm^{-2}	ثابت خورشیدی	
4/72		قدر مطلق بولومتریک خورشید	
-26/8		قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
-12/7		قدر ظاهری ماه پدر	
10^{10}	years	عمر خورشید	
70	$\text{Ks}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$	ثابت هابل	H.

(۱) IRYSC.COM با توجه به صورت سوال، در واپاشی هر اتم، مقدار $5/49$ میلیون الکترون ولت انرژی آزاد می شود. حال با توجه به جرم

اتمی و عدد اتمی هسته ای اتم؛ میزان انرژی آزاد شده به ازای هر واحد جرم را چنین بدست می آوریم:

$$n = \frac{\Delta E}{\Delta m} \Rightarrow n = \frac{5/49}{238/0.5} = 2/2 \times 10^{12} \text{ } j/kg$$

از طرفی می دانیم که:

$$m = m_0 e^{-\lambda t} \quad *$$

در این رابطه t مدت زمان، m_0 جرم اولیه و λ ثابتی است که برای تعیین نیمه عمر از آن می شود. رابطه ی فوق را می توان بر حسب λ چنین مرتب کرد:

$$\lambda = -\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau}$$

از جاگذاری رابطه ی اخیر در عبارت * خواهیم داشت:

$$m = m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t}$$

برای بدست آوردن سرعت مصرف m بر حسب زمان، از این عبارت مشتق می گیریم که آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t}$$

از طرف دیگر می دانیم که:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta m} \times \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

پس برای بازده P ، می توانیم چنین بنویسیم:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = n \times \left(\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t} \right) \times Ra$$

که در آن Ra بازده مولد است. از طرفی توان ایستگاه فضایی باید با توان فضاپیما برابر باشد پس می توانیم چنین بنویسیم (در این عبارت P' توان ایستگاه و S' مساحت ایستگاه است.)

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = P' \times \left(\frac{1}{d} \right)^2 \times \left(\frac{S}{S'} \right) = n \times \left(\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t} \right) \times Ra$$

با مرتب کردن این عبارت بر حسب S خواهیم داشت:

$$S = n \times \left(\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} m_0 e^{\frac{\ln \cdot / \Delta}{\tau} t} \right) \times Ra \times S' \times d^2 \times \frac{1}{P'}$$

از طرف دیگر، اختلاف زمان را چنین بدست می آوریم:

$$\Delta t = 1358 / 6 / 5 - 1356 / 5 / 30$$

که حاصل آن، برابر ۲ سال و ۶ روز می شود.

با جاگذاری این مدت زمان در رابطه‌ی آخر؛ مقدار مساحت فضاپیما برابر مقدار تقریبی ۸۴۰ مترمربع بدست خواهد آمد.

(۲) IRYSC.COM طبق صورت سوال می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$L \propto M, \quad L \propto R^2, \quad V^2 \propto \frac{M}{R}$$

در عبارت بالا: L درخشندگی، M جرم، R شعاع کهکشان و V دارای یک مقدار ثابت است.

پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} L &= cte \times M \\ L &= cte \times R^2 \Rightarrow \sqrt{L} = cte \times R \\ V^2 &= cte \times \frac{M}{R} \Rightarrow \frac{M}{R} = \frac{V^2}{cte} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{L} = cte \times \frac{M}{R} \left\} \Rightarrow \sqrt{L} = cte \times V^2 \Rightarrow L = V^4 \times cte$$

با جایگذاری تساوی اخیر در معادله‌ی مشهور ذیل داریم:

$$M = -2 / \Delta \log L + Const \Rightarrow$$

$$M = -2 / \Delta \log (V^4 \times cte) + Const = -1 \cdot \log V + Const$$

(۳) IRYSC.COM برای شار عبوری از سطح دلخواه A داریم:

$$\varphi = \int \vec{B} \times d\vec{A}$$

می‌دانیم $\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = 0$. از این رابطه φ (همان شار مغناطیسی) دارای مقداری ثابت است. B هم مقدار ثابتی دارد؛ پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\varphi = 4\pi r^2 B \Rightarrow B \times r^2 = B_0 \times r_0^2 \Rightarrow B = B_0 \times \left(\frac{r_0}{r} \right)^2$$

(ب)

$$B = B_0 \times \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = B_0 \times \left(\frac{r_{Sun}}{r_{White dwarf}} \right)^2 = B_0 \times \left(\frac{r_{Sun}}{r_{Earth}} \right)^2 = 2 / 4T$$

(۴) IRYSC.COM

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= 2l \left(\frac{1}{\frac{c}{n} - v} - \frac{1}{\frac{c}{n} + v} \right) = \frac{4ln^2v}{c^2} \\ c\Delta t &= \Delta x \\ \Delta x &= N \times \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \frac{4ln^2v}{c} \left\} \Rightarrow N = \frac{4ln^2v}{c\lambda}$$

در این سوال c سرعت نور و n ضریب شکست آب و N تعداد تناوب موج است.

ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

۵) IRYSC.COM می دانیم که صورت کلی معادله‌ی مقاطع مخروطی، به صورت زیر است:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

مختصات ۵ تا از نقاط واقع بر روی این مقطع مخروطی را داریم. از طرف دیگر برای حل این دستگاه به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز است. در این راه حل، از معادله‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی A و B که به صورت زیر است، استفاده می‌کنیم.

$$3y - x - 23 = 0$$

با حل عددی این دستگاه، مقادیر ذیل بدست خواهند آمد:

$$a = 508, \quad b = 382, \quad c = 578, \quad d = -7828, \quad e = -6814, \quad f = 32760$$

حال که معادله‌ی منحنی گذرنده از این ۵ نقطه را بدست آورده‌ایم باید نوع این مقطع مخروطی را نیز مشخص کنیم. برای این کار باید کل منحنی را به قدری دوران دهیم که معادله، به صورت متعارف و کلی معادله‌ی مقاطع مخروطی در بیاید، مقدار این دوران مطلوب از رابطه‌ی ذیل بدست خواهد آمد:

$$\tan 2\theta = \frac{c}{a-b} = \frac{578}{508-382} \Rightarrow \theta = 128 / 8^\circ$$

معادله‌ی دوران یافته با استفاده از ماتریس تبدیل ذیل بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

با حل این ماتریس داریم:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

با جاگذاری و حل این معادله خواهیم داشت:

$$\frac{(x' - 1/33)^2}{25/46} + \frac{(y' + 6/99)^2}{5/13} = 1$$

از مقایسه این عبارت با صورت کلی مقاطع مخروطی داریم:

$$a \cong 5$$

$$e \cong 0/89$$

از آنجا که خروج از مرکز این منحنی، کوچک‌تر از یک است؛ مقطع مخروطی مورد اشاره، بیضی است.

۶) IRYSC.COM طبق صورت سؤال، لحظه‌ی صفر را زمانی در نظر می‌گیریم که جسم اول در حضيض مداری خود قرار گرفته باشد. اگر مدار دایره‌ای بود (خروج از مرکز صفر بود) ناظری که روی جسم A ، در لحظه‌ی صفر جسم B را در سمت‌الراس خود مشاهده می‌کرد؛

همواره و بعد از گذشت زمان، مختصات سمتی - ارتفاعی جسم B را بدون تغییر می‌دید. اما با توجه به صورت سؤال، مدار جسم بیضی است. پس طبق روابط پیش‌فرض در صورت سؤال، می‌توانیم چنین بنویسیم:

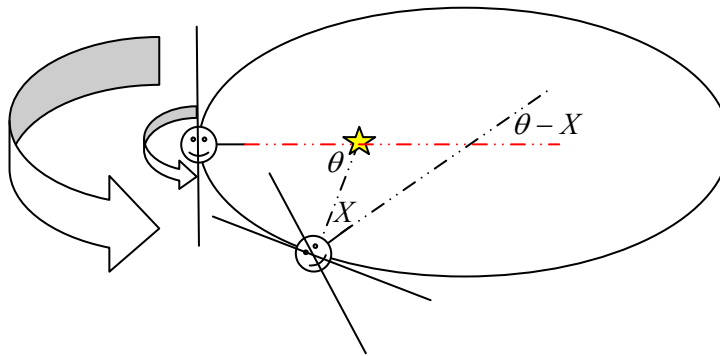
$$t = \frac{1}{\lambda}(\theta - re \sin \theta) \Rightarrow \lambda t = (\theta - re \sin \theta)$$

از طرف دیگر، در صورت مسئله داشتیم:

$$\lambda = \frac{l}{ma^{\gamma}(1-e^{\gamma})^{\gamma}}$$

بعد از گذشت این مدت زمان، جسم A هم تحت تأثیر گردش وضعی اش، کمی حول محور خود دوران کرده است. مقدار این دوران بر حسب دوره تناوب وضعی P و مدت زمان t ، بدین سان محاسبه می شود. این زاویه در شکل با امتداد دادن محل قرار گیری ناظر و با خطوط خط چین سیاه، مشخص شده است.

$$X = \frac{\gamma\pi}{P} t$$



مقدار مطلوب، زاویه ی میان دو خط سیاه رنگی است که بخش قابل مشاهده ی سطح سیاره در طی زمان را نشان می دهد. با استفاده از روش های هندسه ی مسطحه، این زاویه برابر $\theta - X$ بدست می آید. از این پس این زاویه را Y می نامیم. از طرف دیگر، طبق قانون سوم کپلر می دانستیم:

$$P^{\gamma} = \frac{4\pi^{\gamma} a^{\gamma}}{Gm}$$

پس خواهیم داشت:

$$l = \frac{2\pi m a^{\gamma} \sqrt{(1-e^{\gamma})}}{P}$$

بنابراین زاویه Y چنین بدست می آید:

$$Y = \gamma e \sin \theta$$

و حداکثر مقدار Y برابر γe (یک بار در قسمت شرقی و بار دیگر در قسمت غربی مدار) خواهد بود. پس در کل تناوب، تنها کسری از آن دیده می شود.

$$n = \frac{\pi + \gamma e}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma e}{\pi}$$

(۷) IRYSC.COM از آنجا که در صورت سؤال، سرعت هواپیما از نقطه‌ای بر سطح زمین سنجیده می‌شود، باید سرعت گردش وضعی زمین را هم اعمال کنیم:

$$\omega = \frac{v_{airplane} + v_{earth} \cos \varphi}{R_{earth} + h} = 0.294 \frac{rad}{h}$$

هواپیما در ارتفاع ۴ کیلومتری از سطح زمین پرواز می‌کند، بنابراین، میزان افق منفی ناظر واقع در هواپیما را این چنین بدست می‌آوریم:

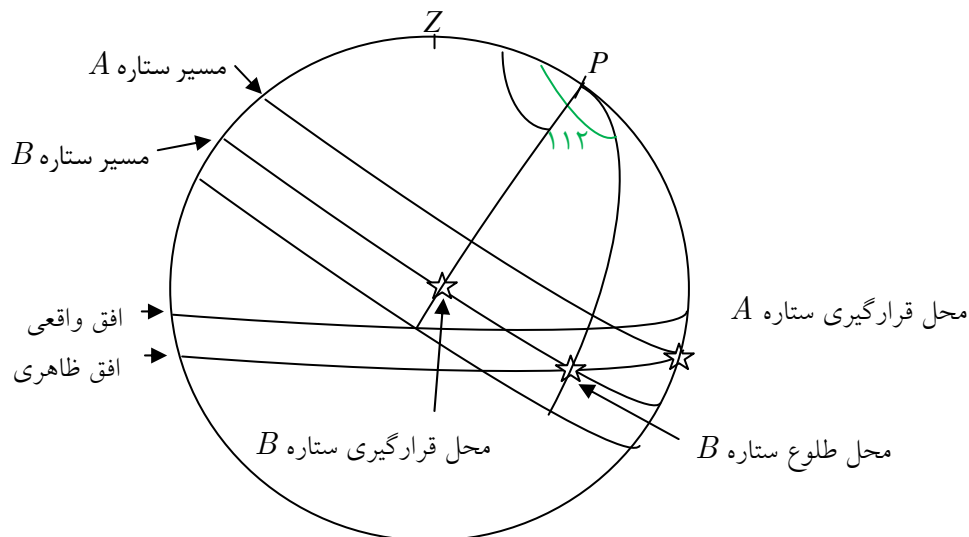
$$a = \cos^{-1} \left(\frac{r_{earth}}{r_{earth} + h_{airplane}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{6400}{6404} \right) = 2.02$$

منظور سوال از بیان این نکته که ستاره با افق مماس می‌شود، این است که ستاره -تنها- با افق مماس می‌شود و غروب نمی‌کند. با دانستن این نکته می‌توانیم میل ستاره‌ی A را چنین برآورد کنیم:

$$\delta_A = 90 - \phi - a = 28^\circ, \quad \delta_B = \delta_A - 18 \Rightarrow \delta_B = 10^\circ$$

زاویه‌ی ساعتی ستاره B در هنگام طلوع این چنین بدست می‌آید:

$$\cos 92 = \cos 30 \cos 80 + \sin 30 \sin 80 \cos H \Rightarrow H = 112^\circ$$



توجه: کمان سبز رنگ در پشت کره است.

حال می‌بینیم که ستاره‌ی B برای رسیدن به نقطه غروب در پشت کره، باید کمانی به طول $112 + 90$ درجه که برابر است با 202 درجه را طی کند. از ابتدای راه حل به یاد داریم که هواپیما در هر ساعت 0.294 رادیان را به دور مرکز زمین می‌پیماید. پس با نوشتن یک تناسب ساده برای پیمودن کمان 202 درجه‌ای، پاسخ مطلوب بدست می‌آید:

$$0.294 \text{ رادیان}$$

$$1 \text{ ساعت}$$

$$3.52 \text{ رادیان}$$

$$x \text{ ساعت}$$

$$x \approx 12h \text{ در نتیجه}$$

باسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان ، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست

«امام خمینی (ره)»

چهارمین المپیاد نجوم کشور

مرحله دوم

دوشنبه ۲ اردیبهشت ماه ۱۳۸۷

شروع: ۱۴:۰۰ الی ۱۷:۳۰

مدت آزمون: ۳ ساعت و نیم (۲۱۰ دقیقه)

دفترچه ی سؤالات

تذکرات:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی ، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید :

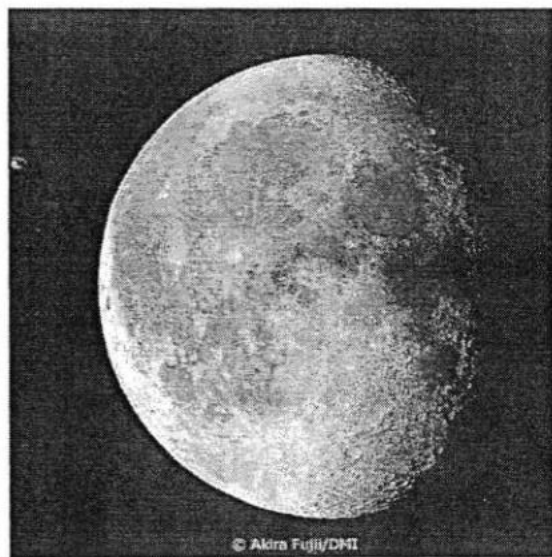
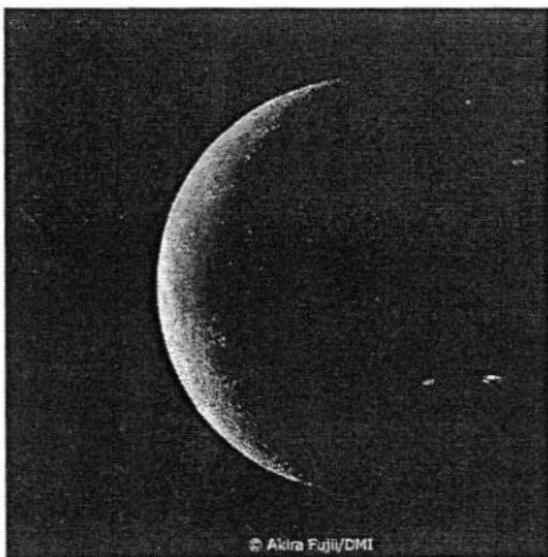
- ۱- تعداد سؤالات این آزمون ۷ سؤال و وقت آن ۳ ساعت و نیم است .
- ۲- بالای تمام برگه های داخلی پاسخ نامه ، نام ، نام خانوادگی خود را بنویسید.
- ۳- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید .
- ۴- در زیر خط چین غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه ننویسید.
- ۵- کارت معرفی نامه ، تصویر شناسنامه و کارنامه ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن ها را ملاحظه و جمع آوری نماید .
- ۶- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد ، مجاز است .
- ۷- استفاده از جدول های نجومی ، اطلس ها و الماناک ها به هر شکل که باشند ، مجاز نیست.
- ۸- هنگام آزمون همراه داشتن **تلفن همراه** (خاموش یا روشن) **تخلف محسوب می شود**. لذا تلفن همراه خود را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید .
- ۹- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

۱) یک منظومه‌ی دوتایی طیفی تک خطی (single line) را با مدار دایره‌ای، انحراف مداری ϵ و دوره‌ی تناوب سه روز در نظر بگیرید. طبق مشاهدات انجام شده، بیشترین و کمترین سرعت شعاعی این مولفه (نسبت به ناظر زمینی)، $\pm 30 \text{ km/s}$ است.

الف) حد پایین جرم مولفه‌ی غیر قابل مشاهده (m_2) را به دست آورید. این ستاره از چه نوعی است؟
 ب) مطالعات نشان می‌دهد که $\epsilon = 90^\circ$ است. ستاره‌ی قابل مشاهده از رده‌ی طیفی خورشید است. جرم ستاره‌ی دوم چه قدر می‌تواند باشد؟ (فرض کنید $m_2 \ll m_1$)
 پ) در صورتی که سرعت باد ستاره‌ای ستاره‌ی قابل مشاهده برابر با 70 km/s باشد و چگالی تعداد ذرات باد در سطح این ستاره برابر با 3×10^5 پروتون در سانتی متر مکعب باشد و تمامی ذرات این باد توسط ستاره‌ی دوم جذب شوند، فاصله‌ی دو مولفه و دوره‌ی تناوب این منظومه دوتایی پس از 10^9 سال چه مقدار تغییر می‌کند؟

۲) در یک مانور فضایی می‌خواهیم سفینه‌ای را از زمین به مریخ بفرستیم (مدار زمین و مریخ با تقریب خوبی دایره‌ای و هم‌صفحه‌اند). اقتصادی‌ترین روش حمل و نقل بین دو سیاره با شرایط زمین و مریخ، روش انتقال هوهمن (W. Hohmann) از یک مدار دایره‌ای برگرد خورشید به مدار دایره‌ای خورشید مرکز دیگری در همان صفحه است. در این روش در دو مرحله به ماهواره انرژی یا تکانه داده می‌شود. مرحله‌ی اول، سفینه را از یک مدار دایره‌ای (مدار زمین) به یک مدار انتقالی بیضوی (هم‌صفحه با مدار زمین) منتقل می‌کند که بر مدار مریخ در یک نقطه مماس است و مرحله‌ی دوم، سفینه را از مدار بیضوی به مدار مریخ منتقل می‌کند.
 الف) در یک سفر رفت از زمین به مریخ، سرعت‌هایی که باید به سفینه داده شود چه قدر و در چه جهت‌هایی هستند؟
 ب) یک سفر رفت و برگشت چند روز طول می‌کشد؟

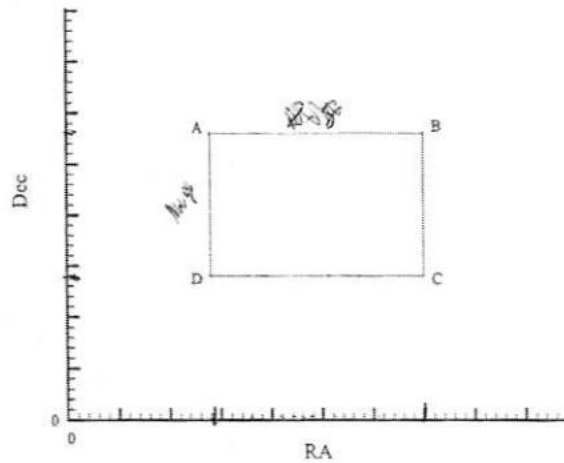
۳) تصاویر زیر از ماه، در یک دوره‌ی هلالی برداشته شده‌اند. فاصله‌ی زمانی میان این دو تصویر برداری را بر حسب روز مشخص کنید.



۲

(۴) یک ملوان از بالای دکل کشتی به ارتفاع 30° متر از سطح دریا، قله ی کوه سن پدرو را با ارتفاع 6145 متر که در طول جغرافیایی $68/40^\circ$ شرقی و عرض جغرافیایی $21/88^\circ$ جنوبی قرار دارد، در سمت 60° شرقی و در افق خویش مشاهده می کند. فاصله ی کشتی را از پای کوه و طول و عرض جغرافیایی کشتی را محاسبه کنید.

(۵) در نقشه ی تخت زیر، مقیاس محورهای بعد و میل با یکدیگر برابرند. اگر طول خط AB در آسمان $0/8152$ برابر طول خط CD در آسمان باشد، جدایی زاویه ای دو نقطه ی A و B در آسمان چه قدر است؟



(۶) فرض کنید مدارهای زمین و مریخ دایره ای و هم صفحه اند. فاصله ی زاویه ای مریخ را از نقطه ای دلخواه بر روی دایره البروج به صورت تابعی از زمان محاسبه کنید.

(۷) موقعیت 224 ستاره در ناحیه ای مشخص از آسمان در نمودار HR در صفحه ی هفت پاسخانامه، مشخص شده است. الف) ناحیه ی مربوط به ستاره هایی با شعاع بیشتر از شعاع خورشید را بر روی نمودار مشخص کنید. ب) ناحیه ی مربوط به ستاره هایی با درخشندگی کمتر از 10° برابر درخشندگی خورشید را بر روی نمودار مشخص کنید.

پ) تعداد ستاره هایی که در ناحیه ی الف و ب مشترک هستند را با شمارش معین کنید. توجه: پاسخ قسمت های الف و ب را بر روی نمودار صفحه ی هفت پاسخانامه نشان دهید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

$7,67 \times 10^{-11}$	$m^3 kg^{-1} s^{-2}$	ثابت جهانی گرانش
$5,67 \times 10^{-8}$	$W m^{-2} K^{-4}$	ثابت استفان بولتزمن
$7,63 \times 10^{-24}$	Js	ثابت پلانک
3×10^8	ms^{-1}	سرعت نور
۳۶۵/۲۶	day	سال نجومی
$3,09 \times 10^{16}$	m	پارسک
$1,50 \times 10^{11}$	m	واحد نجومی
$9,46 \times 10^{15}$	m	سال نوری
$7,97 \times 10^8$	m	شعاع خورشید
$7,38 \times 10^6$	m	شعاع زمین
$1,74 \times 10^6$	m	شعاع ماه
$3,84 \times 10^8$	m	شعاع مداری ماه
$2,28 \times 10^{11}$	m	شعاع مداری مریخ
$1,99 \times 10^{30}$	kg	جرم خورشید
$5,97 \times 10^{24}$	kg	جرم زمین
$1,67 \times 10^{-27}$	kg	جرم پروتون
$5,79 \times 10^3$	K	دمای خورشید
$3,85 \times 10^{26}$	W	درخشندگی خورشید
۴/۷۲		قدر مطلق بولومتریک خورشید
-۲۶/۸		قدر ظاهری خورشید

باسمه تعالی

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست.
«امام خمینی (ره)»

وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

سومین المپیاد نجوم کشور

مرحله‌ی دوم

جمعه ۷ اردیبهشت‌ماه ۱۳۸۶

(ویژه گروه سنی زیر ۱۵ سال)

دفترچه‌ی سؤالات

۱۳:۰۰ تا ۹:۰۰

مدت آزمون: ۴ ساعت

نام آموزشگاه:

نام خانوادگی:

نام:

شماره همدگالی:

شهر:

شماره امتدگالی:

در پایان آزمون، دفترچه‌ی سؤالات را به همراه دفترچه‌ی پاسخ‌نامه به مسئول حوزه تحویل دهید.

تذکرات:

- ۱- ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:
- ۲- تعداد سؤالات این آزمون ۷ سؤال و وقت آن ۴ ساعت است.
- ۳- بالای تمام برگه‌های داخلی پاسخ‌نامه، نام، نام خانوادگی و نام المپیاد (نجوم) را بنویسید.
- ۴- بر روی هر برگه پیش‌نویس که به شما داده می‌شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- ۵- در محل پیش‌بینی شده در هر صفحه، شماره سؤال را هم به عدد و هم به حروف خوانا بنویسید.
- ۶- در هنگام استفاده از پشت هر برگه توجه داشته باشید که از زیر خط‌چین شروع به نوشتن نمایید.
- ۷- در زیر خط‌چین غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه ننویسید.
- ۸- کارت معرفی‌نامه، تصویر شناسنامه و کارنامه‌ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن‌ها را ملاحظه و جمع‌آوری نماید.
- ۹- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه‌ریزی نباشد، مجاز است.
- ۱۰- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و الماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- ۱۱- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش با روشن) تخلف محسوب می‌شود. لذا تلفن همراه خود را قبل از شروع آزمون خاموش کنید و به مسئول حوزه تحویل دهید.
- ۱۲- نتایج این آزمون در اواخر خردادماه اعلام خواهد شد.

ثوابت فیزیکی و نجومی

$6,67 \times 10^{-11}$	$m^2 kg^{-1} s^{-2}$	ثابت جهانی گرانش
$5,67 \times 10^{-8}$	$W m^{-2} K^{-2}$	ثابت استفان بولتزمن
3×10^8	ms^{-1}	سرعت نور
$1,67 \times 10^{-27}$	kg	جرم اتم هیدروژن
$8,31$	$J K^{-1} mol^{-1}$	ثابت گازها
$3,09 \times 10^{16}$	m	پارسک
$1,5 \times 10^{11}$	m	واحد نجومی
$9,46 \times 10^{15}$	m	سال نوری
$3,85 \times 10^{26}$	W	درخشندگی خورشید
$1,27 \times 10^3$	$W m^{-2}$	ثابت خورشیدی
$1,99 \times 10^{30}$	kg	جرم خورشید
$6,96 \times 10^8$	m	شعاع خورشید
$4,72$		قدر مطلق بولومتریک خورشید
$-26,8$		قدر ظاهری خورشید
$5,79 \times 10^3$	K	دمای خورشید
$6,38 \times 10^6$	m	شعاع زمین
$1,74 \times 10^6$	m	شعاع ماه
$3,84 \times 10^8$	m	شعاع مداری ماه
$5,97 \times 10^{24}$	kg	جرم زمین
$400-700$	nm	بازهی طول موج مرئی
7	mm	حداکثر قطر مردمک چشم سالم

(۱) توسط تلسکوپ با دهانه‌ی ۲۰ سانتی‌متر و فاصله‌ی کانونی ۱۵۰ سانتی‌متر، از ماه عکسی با زمان نوردهی ۱۵/۰ ثانیه گرفته‌ایم.

الف) زمان نوردهی لازم برای تلسکوپ با دهانه‌ی ۱۵ سانتی‌متر و فاصله کانونی ۲۰۰ سانتی‌متر، برای تهیه‌ی عکسی یکسان با عکس فوق چقدر است؟

ب) اندازه‌ی تصویر ماه در صفحه‌ی کانونی هر تلسکوپ چقدر است؟

ج) هر دو تلسکوپ، جهت مشاهده‌ی ماه، با عدسی چشمی به فاصله کانونی ۲۵ میلی‌متر به کار می‌روند. بزرگنمایی این تلسکوپها چقدر خواهد بود؟

(۲) یکی از ابزارهایی که فضانوردان آپولو ۱۱ که به ماه سفر کردند روی سطح این قمر کار گذاشتند، آینه‌ی مربع شکلی بود به ابعاد ۷۰ سانتی‌متر. این آینه از حدود ۱۰۰ تکه‌ی کوچکتر ساخته شده بود. هر کدام از این آینه‌ها به شکلی طراحی شده بودند که نور را در همان راستایی که به آنها می‌تابید باز می‌تاباندند. این آینه روی پایه‌ای نصب شده بود که به کمک آن فضانوردان آینه را به سمت زمین تنظیم کردند. به کمک این آینه‌ها اخترشناسان می‌توانند فاصله‌ی زمین تا ماه را با دقت سانتی‌متر اندازه‌گیری کنند. برای این کار از روی زمین با لیزر به سمت آینه‌ها نور می‌تابانند و زمان رفت و بازگشت نور را اندازه‌گیری می‌کنند و از روی آن فاصله را به دست می‌آورند. به کمک اطلاعات بسیار دقیقی که از این طریق به دست می‌آید می‌توان آهنگ دور شدن ماه از زمین و بعضی از حرکات پوسته‌ی زمین را بررسی کرد.

رصدخانه‌ی مک دونالد در ایالت تکزاس آمریکا به طور مداوم به کمک این آینه‌ها فاصله‌ی ماه را اندازه‌گیری می‌کند. منجمان در رصدخانه‌ی مک دونالد برای اندازه‌گیری فاصله از یک لیزر قوی و یک تلسکوپ ۳۰ اینچی استفاده می‌کنند. هر چند که لیزر، نور متمرکز تولید می‌کند اما به خاطر پراش نور و اثرات جوی، قطر باریکه‌ی نور هنگامی که به سطح ماه می‌رسد در حدود ۷ کیلومتر می‌شود. حساب کنید که توان لیزر (P)، چقدر باید باشد تا نور بازتابیده از آینه‌ها درون چشمی تلسکوپ با چشم قابل مشاهده باشد. از جذب نور در جو زمین صرف نظر کنید و آینه‌ها را بازتابنده کامل در نظر بگیرید.

(۳) دنباله‌داری در مداری بیضی شکل با نیم‌قطر بزرگ برابر با یک واحد نجومی در صفحه‌ی دایره‌البروج به دور خورشید می‌گردد. چه کسری از طول مدار دنباله‌دار درون مدار زمین است؟

(۴) ماهواره‌ای که همواره بر فراز استوای زمین در حال حرکت است، توسط ناظری در عرض جغرافیایی ۳۰ درجه‌ی جنوبی مشاهده می‌شود. اگر شعاع مدار این ماهواره ۳ برابر شعاع زمین باشد، حداکثر میل آن از دید این ناظر چقدر است؟

(۵) ناظری در نقطه‌ای با طول و عرض جغرافیایی (θ, ϕ) ایستاده است و با دست به سوی نقطه‌ای روی زمین اشاره می‌کند؛ به طوری که سمت و ارتفاع امتداد دست وی به ترتیب A و α است ($\alpha < 90^\circ$). اگر بتوانیم در امتداد دست این فرد تویی مستقیم حفر کنیم، دهانه‌ی دیگر تونل در چه طول و عرض جغرافیایی (به ترتیب λ و ϕ) قرار می‌گیرد؟

(۶) تلسکوپ یک رصدخانه در عرض جغرافیایی 34° درجه‌ی شمالی، ستاره‌ای را در میل -36° درجه دنبال می‌کنند. ابزارهای الکترونیکی رصدخانه، هم‌زمان محور اپتیکی تلسکوپ را بر روی ستاره و دهانه‌ی تلسکوپ را در مرکز شکاف گنبد تنظیم می‌کنند. به علت عوارض زمینی حداقل زاویه‌ای که بالاتر از افق دیده می‌شود 10° درجه است. با فرض این که طلوع و غروب ستاره در یک شب رخ دهند، در طول مدتی که ستاره در تلسکوپ قابل رؤیت است گنبد چه زاویه‌ای (θ) را طی می‌کند؟

(۷) فرض کنیم سیاره‌ای روی دایره‌ای به شعاع a به دور خورشید می‌گردد. در یک لحظه حرم خورشید ناگهان دو برابر می‌شود؛ می‌توان نشان داد که با این تغییر، مدار سیاره تبدیل به یک بیضی می‌شود. نیم‌محور بزرگ مدار جدید (a') و خروج از مرکز آن (e') را به دست آورید.

آزمون مرحله‌ی دومِ دومین المپیاد نجوم کشور

ثوابت فیزیکی و نجومی

$$\times 10^{-11} \quad (m^3)(kg^{-1})(s^{-2})$$

$$\times 10^{26} \quad watt$$

$$\times 10^8 \quad (m)(s^{-1})$$

km

km

$$\times 10^5 \quad km$$

km

AU

AU

$$\times 10^{13} \quad km$$

$$\times 10^8 \quad km$$

$$\times 10^{30} \quad kg$$

$$\times 10^{23} \quad kg$$

$$\times 10^{24} \quad kg$$

$$\times 10^{24} \quad kg$$

day

day



..... (ΔT)

.....

.....

.....

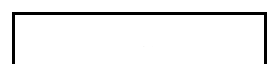
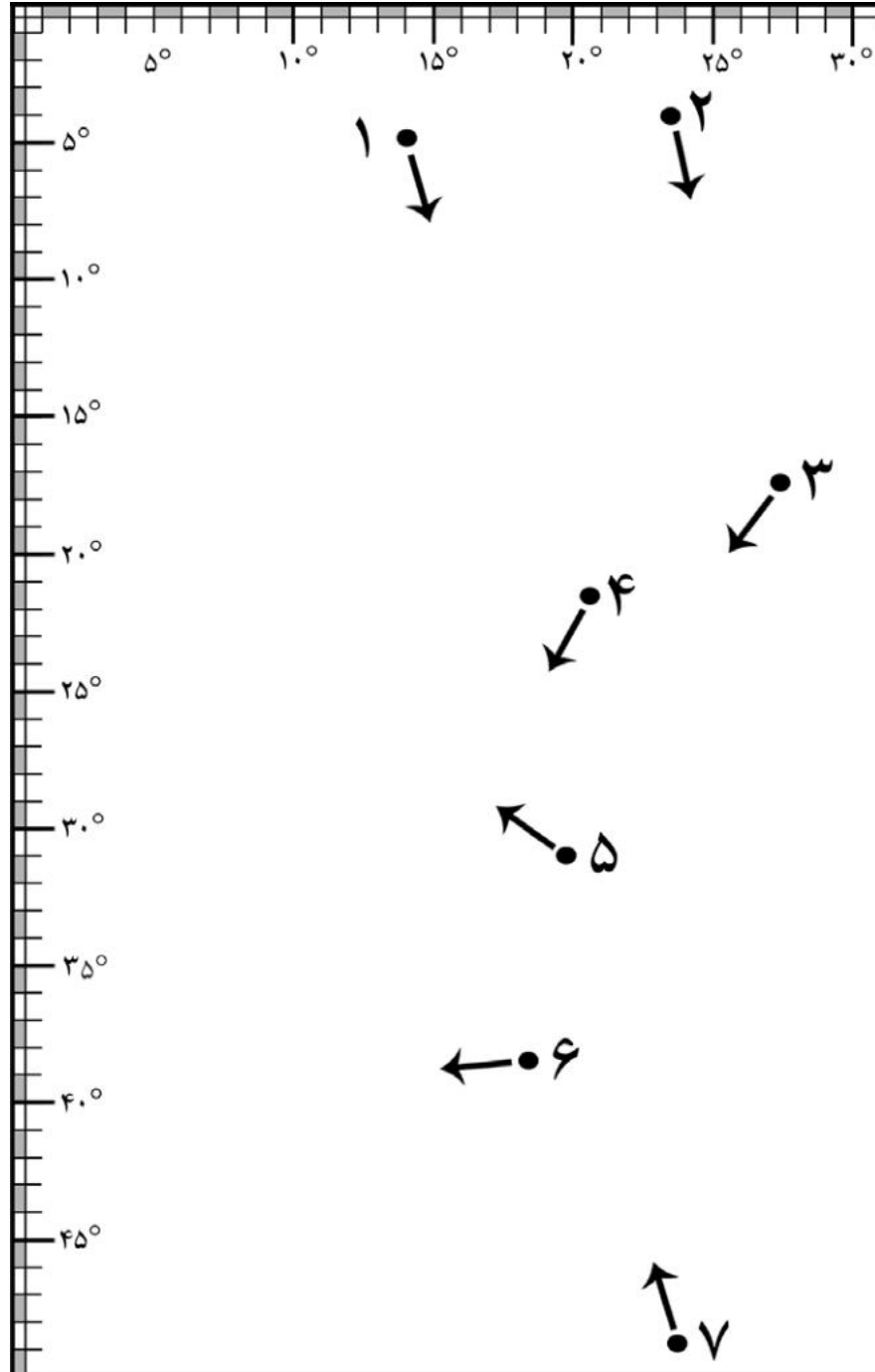
.....

.....

.....

		$\lambda_0 = 4405 \text{ \AA}$	V_s	
<i>arcsec/yr</i>	<i>arcsec</i>	\AA	<i>km/s</i>	۱
<i>arcsec/yr</i>	<i>arcsec</i>	\AA	<i>km/s</i>	۲
<i>arcsec/yr</i>	<i>arcsec</i>	\AA	<i>km/s</i>	۳
	<i>arcsec</i>	\AA	<i>km/s</i>	۴
<i>arcsec/yr</i>	<i>arcsec</i>	\AA	<i>km/s</i>	۵
<i>arcsec/yr</i>	<i>arcsec</i>	\AA	<i>km/s</i>	۶
<i>arcsec/yr</i>	<i>arcsec</i>	\AA	<i>km/s</i>	۷

arcsec/yr





.....





.....
 S $\Omega_p = 10 (km)(s^{-1})(kpc^{-1})$
 $T_s = 2 \times 10^8$
 $(\Delta\theta)$ $t = 4 \times 10^7$
 $2\pi/\Omega_p$
 $(R_s) S$ (R_o)
 R $\frac{1}{R}$





.....

.....

..... $10^{-7} cm$

r

$$F(r) = \frac{1.4 \times 10^7}{r^2} (erg)(cm^{-2})(s^{-1}),$$

..... r

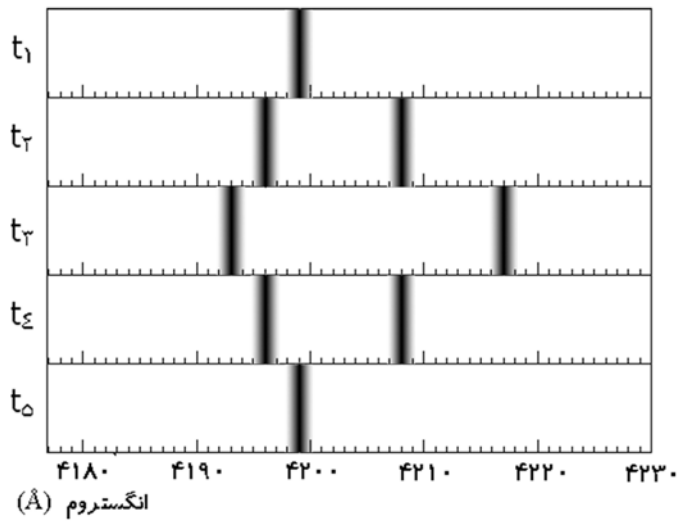
.....

..... (ρ_{min})

$\rho_{min} =$



$i = 90^\circ$ P
 t_n n
 $t_\delta =$ $t_1 =$ $t_n - t_{n-1}$
 t_ϵ t_γ (a)



$a =$

$t_\gamma =$

$t_\epsilon =$



.....

.....

..... (l) (b)

.....

.....

.....

..... $\alpha = 17^h 46^m, \delta = -29^\circ 00'$

..... $\alpha_G = 12^h 51.4^m, \delta_G = 27^\circ 08'$

..... l_N

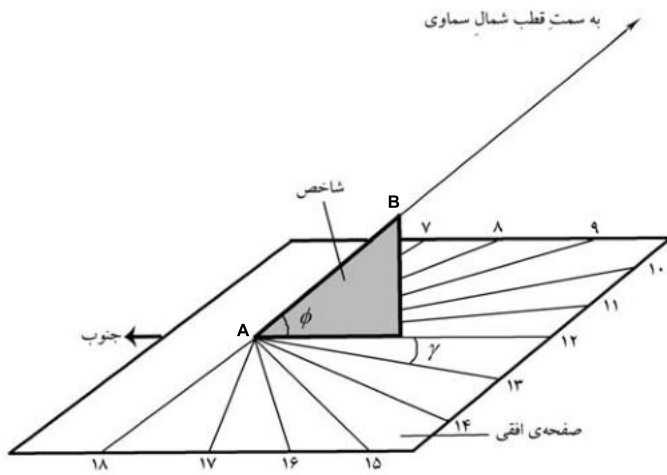
$\sin(l_N - l) \cos b =$

$\cos(l_N - l) \cos b =$

$\sin b =$



.....
..... ϕ
..... γ (h)
..... (AB)



باسمه تعالی

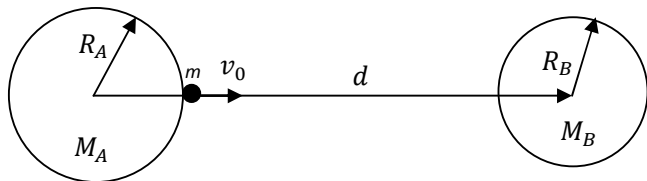
نخستین المپیاد نجوم کشور

مرحله دوم

۱۶ اردیبهشت ماه ۱۳۸۴

۱) دو کره توپر به جرمهای M_A, M_B را در نظر بگیرید، که مراکز آنها در فاصله ی ثابت d از یکدیگر قرار گرفته اند. شعاع دو کره به ترتیب R_A, R_B است و داریم: $d = 8R_B$ ، $M_A = 8M_B$.

ذره ای به جرم m را از سطح کره ی A و در جهت خط مرکزین دو کره با سرعت اولیه v_0 پرتاب می کنیم. حداقل v_0 چقدر باشد تا جرم m به کره B برسد؟



۲) می دانیم که حدود 60 درصد از ستارگان آسمان ، ستاره هایی هستند که در منظومه های دوتایی یا چند تایی به دور گرانیگاه مشترکشان می چرخند. اگر صفحه دوران ستاره تقریباً بر صفحه آسمان عمود باشد ، دو ستاره از نظر ناظر زمینی از مقابل هم می گذرند و چیزی شبیه خورشید گرفتگی رخ می دهد. به این ستارگان ستاره های دوتایی گرفتگی می گویند. ستاره های دوتایی گرفتگی ستاره هایی هستند با نورانیت متغیر که تغییرات نور آنها از روی زمین قابل اندازه گیری است ، هر چند که در اکثر موارد دو ستاره از دید تلسکوپ قابل تفکیک نیستند. معروفترین ستاره ی متغیر گرفتگی که از قدیم مورد توجه اخترشناسان بوده است ، ستاره ی راس الغول در صورت فلکی برساوش است که تغییرات نور آن به راحتی با چشم غیر مسلح نیز قابل مشاهده است. اخترشناسان به کمک بررسی نور ستاره های دوتایی به خصوصیات فیزیکی ستارگان پی می برند و صحت نظریه های اخترفیزیکی را تحقیق می کنند.

فرض کنید همه ستاره های دوتایی در آسمان از دو ستاره به جرم های $M_1 = M_2 = M_{\odot}$ و شعاع های $R_1 = R_2 = R_{\odot}$ تشکیل شده باشند و فاصله متوسط آنها در حدود 0.1 واحد نجومی است. با این حساب چند درصد ستارگان دوتایی باید متغیر گرفتگی باشند؟

۳) بازه زمانی بین غروب خورشید و زمانی که زاویه ی سمت الراس آن به 108° میرسد، اصطلاحاً شفق خوانده می شود. با توجه به این حساب کنید که در عرض جغرافیایی $60^{\circ}N$ در چه روزهایی از سال آسمان هرگز به طور کامل تاریک نمی شود.

۴) اگر زاویه تمایل محور زمین $23^{\circ}27'$ باشد، در تاریخ 16 اردیبهشت 1384 ، در شهری با طول جغرافیایی $48^{\circ}30'$ و عرض جغرافیایی $34^{\circ}48'$ ، سمت خورشید (A_{sun}) در هنگام طلوع و مدت زمان ΔT که خورشید بالای افق خواهد بود را حساب کنید. (در این سوال زوایا باید بر حسب دقیقه قوسی محاسبه شود.)

۵) فرض کنید خورشید وارد یک سحابی کروی با توضیح چگالی همگن ρ_0 شود، اگر در فاصله R_0 از مرکز سحابی سرعت خورشید v_p و جهت آن عمود بر شعاع سحابی باشد، با فرض اینکه نیروی مقاومت گاز تشکیل دهنده ی سحابی در حرکت خورشید تاثیری نداشته باشد (حرکت ایجابی است)، دوره تناوب مدار خورشید به دور مرکز سحابی (P) را بدست آورده و نیم قطر بزرگ (a) و خروج از مرکز مدار (e) را حساب کنید. دقت کنید در این سیستم مرکز بیضی مدار بر مرکز سحابی منطبق است و قوانین بقا حرکت زاویه ای و انرژی برقرار هستند، به طوری که داریم:

$$L = M_{\odot} R v_{\odot} \qquad \frac{1}{2} M (v_r^2 + v_{\theta}^2) + V(R) = E$$

که در آنها ، R فاصله از مرکز سحابی ، $V(R)$ انرژی پتانسیل گرانشی ، E انرژی مکانیکی کل و L اندازه حرکت زاویه هستند. v_r, v_{θ} به ترتیب مولفه های مماسی و شعاعی بردار سرعت خورشید، هنگام حرکت آن به دور مرکز سحابی است.

۶) نیکلای کپرنیک، ستاره شناس لهستانی در قرن پانزدهم و شانزدهم میلادی می زیست. او که معتقد نظریه خورشید مرکزی بود، تفاوت بین دوره ی هلالی و دوره ی نجومی سیارات را دریافت و توانست فاصله سیارات از خورشید را حساب کند و مدلی بر مبنای مرکزیت خورشید در عالم بنا کرد. در این مسأله شما خود را جای کپرنیک می گذارید و به روش او فاصله سیارات از خورشید را حساب می کنید.

توجه: در این مسأله نباید از قوانین کپلر، مکانیک نیوتونی و جاذبه عمومی استفاده شود.

فرض کنید شما سیاره ای را در آسمان می بینید که در اولین شب رصد در حالت مقابله است. 89 روز بعد سیاره در حالت تربیع دیده می شود و 489 روز بعد، سیاره دوباره به حالت مقابله می رسد. منجمان دیگر که معتقد به نظریه زمین مرکزی بودند می گویند که فاصله این سیاره از زمین نباید بیشتر از فاصله خورشید از زمین باشد، زیرا سرعت حرکت آن به دور زمین از خورشید کمتر است. شما برای اثبات نظر خود مینی بر اینکه خورشید در مرکز عالم است، باید فاصله این سیاره از خورشید و دوره تناوب آن به دور خورشید را حساب کنید. کپرنیک با همین اطلاعات فاصله سیارات را حساب کرد.

۷) معمولاً ستارگان از طریق باد ستاره ای جرم از دست می دهند. همچنین فرایندهای گداخت هسته ای همواره بخشی از جرم ستاره را به انرژی تبدیل می کند که از طریق تابش از ستاره خارج می شود. در نتیجه، از این طریق نیز ستارگان جرم از دست می دهند. بویژه غول های سرخ آهنگ کاهش جرم بالایی دارند. فرض کنید، یک ستاره ی غول سرخ با جرم $M = 5M_{\odot}$ ، دارای سیاره باشد که در مداری با فاصله ی $a = 10AU$ (واحد نجومی) از ستاره به دور آن می گردد. این ستاره غول با آهنگ $10^{-8}M_{\odot}/\text{year}$ جرم خود را به صورت باد ستاره ای از دست می دهد. اگر تابندگی ستاره $L = 3.83 \times 10^{39} \text{erg/s}$ باشد، آهنگ سالانه تغییر اندازه ی مدار سیاره $(\frac{da}{dt})$ در اثر کاهش جرم چقدر است؟

۸) امروزه یکی از روش های دقیق بررسی سیارات شمسی ارسال امواج رادار به سیارات نزدیک، همچون عطارد، و بررسی امواج منعکس شده از این سیارات است. با بررسی طیف امواج منعکس شده می توان سرعت حرکت وضعی یا سرعت زاویه ای سیاره را بدست آورد. فرض کنید توسط راداری متصل به یک ماهواره در مدار دایره ای به دور عطارد، یک موج تک فرکانس با فرکانس 30 گیگاهرتز به سمت عطارد ارسال می شود. از مشاهدات زمینی بدست آورده ایم که قطر این سیاره $d_M \sim 5000 \text{km}$ و زاویه تمایل محور آن تقریباً صفر است. پس از منعکس شدن امواج رادیویی از سطح سیاره بخاطر پدیده ی دوپلر، موج بازگشتی دیگر تک فرکانس نخواهد بود. در نمودار زیر طیف (منحنی شدت بر حسب تغییرات فرکانسی) موج ارسال شده را روی شکل زیر رسم کنید. توجه:

در شکل زیر محور افقی اختلاف فرکانس موج ارسالی و موج دریافتی را نشان می دهد و عدد صفر نشان دهنده فرکانس موج ارسال شده یا همان 30 گیگاهرتز است. شدت امواج ارسال شده $1W/m^2$ ، $1W m^{-2}$ بگیرد. از جذب امواج راداری در بین راه صرف نظر کنید. ماهواره در صفحه ی استوای عطارد حرکت می کند و به اندازه ی کافی از عطارد دور است.

