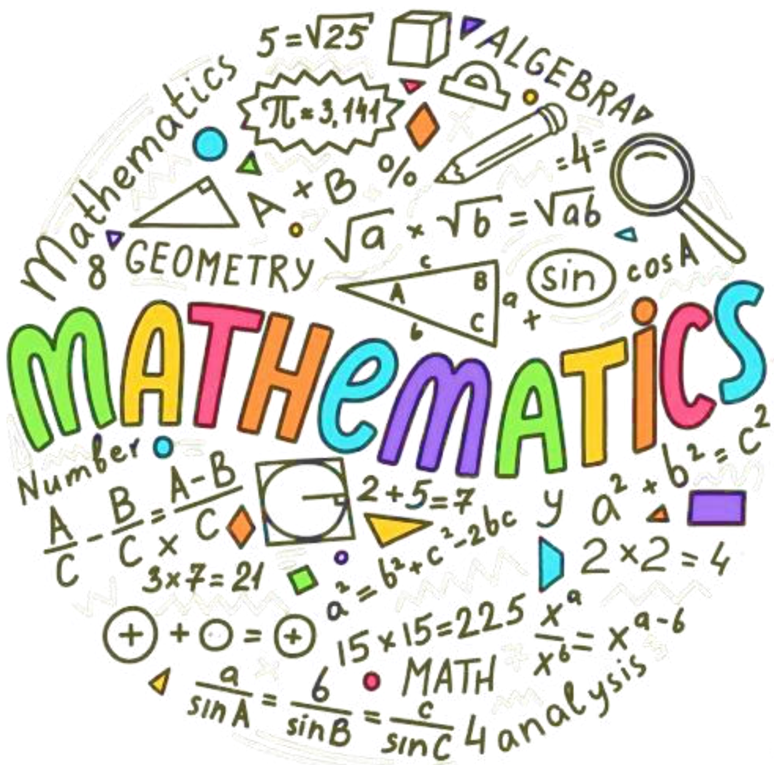
بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دفترچه سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی از ابتدا تاکنون

(همراه با پاسخنامه تشریحی)



amoozz.ir

@sampaadia

دوره حل سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی با اساتید المپیادی و برجسته

دکتر روح الله مهکام، طلای کشوری المپیاد ریاضی

دکتر علی پرتوفرد، برنز کشوری المپیاد ریاضی

مهندس سینا رضایی زارعی، برنز جهانی المپیاد ریاضی

برای هدایت به صفحه دسترسی به دوره حل سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران بر روی این متن کلیک کنید

سایر دوره های مرتبط:

- دوره حل و بررسی سوالات مرحله اول المپیاد ریاضی ایران

چهل و سومین دوره
المپیاد ریاضی ایران

کمیته ملی المپیاد ریاضی

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم ایران

۱. آیا عددی طبیعی $n > ۲$ وجود دارد که اگر با هر یک از مقسوم‌علیه‌های اول خود جمع شود عددی مربع کامل بدست آید؟

پاسخ: نشان می‌دهیم پاسخ خیر است. فرض کنید چنین عددی وجود داشته باشد و آن را n بنامید. ابتدا مشاهده کنید که n نمی‌تواند اول باشد چرا که دو برابر هیچ عدد اولی به جز ۲ مربع کامل نمی‌شود. حال فرض کنید $n = p^{\alpha}, \alpha \geq ۲$. در این صورت در تجزیه $p^{\alpha} + p$ توان عامل اول p برابر یک است و بنابراین این عدد نمی‌تواند مربع کامل باشد.
بنابراین می‌توانیم فرض کنیم n دو عامل اول متمایز همچون p, q دارد. حال باید داشته باشیم:

$$n + p = p^{۲}x^{۲}, n + q = q^{۲}y^{۲}$$

با کم کردن این دو رابطه از یکدیگر خواهیم داشت

$$p - q = (px - qy)(px + qy)$$

اما از آن جا که $|px + qy| > |p - q|$ و $p - q \neq ۰$ چنین چیزی ناممکن است. پس در هر صورت به تناقض رسیدیم.

۲. علي و شايان روي يك جدول بی‌نهايت به شكل نوبتي بازي می‌كنند. در ابتدا تمام خانه‌ها سفيد هستند. علي بازي را شروع می‌كند و در نوبت اول يكي از مربع‌هاي واحد صفحه را سياه می‌كند. در نوبت‌هاي بعد هر نفر بايد يك خانه‌ي سفيد كه مجاور ضلعي حداقل يك خانه‌ي سياه باشد را سياه كند. بازي پس از اینکه هر نفر دقيقا ۱۴۰۴ نوبت بازي كند تمام می‌شود. مجموعه‌ي خانه‌هاي سياه در انتهاي بازي را A می‌ناميم. علي و شايان به ترتيب می‌خواهند محيط شكل A را كمينه و بيشينه كنند. اگر هر دونفر بهترين بازي خود را انجام دهند محيط شكل A برابر چه مقداري خواهد بود؟ (منظور از محیط شکل A جمع طول پاره‌خط‌هایی است که مرز یک خانه سیاه و یک خانه سفید هستند.)

پاسخ: پاسخ برابر $۲۸۱۴ = ۶ + ۲۸۰۸$ است.

استراتژی شایان : کوچکترین مستطیلی که شامل همه خانه‌های سیاه است را پوش‌مستطیل شکل می‌نامیم. شایان طوری بازی می‌کند که خانه‌های سیاه‌شده توسط او همواره در یک سطر باشند در هر نوبت ابعاد پوش مستطیل شکل A یک واحد اضافه شود. به این صورت که در هر گام خانه‌ای مجاور با یکی از خانه‌های مرزی پوش مستطیل را رنگ می‌کند که خودش در پوش‌مستطیل نیست. در هر گام محیط پوش مستطیل حداقل دو واحد اضافه می‌شود و محیط هر شکلی از محیط پوش مستطیل متناظر بیشتر است(برای دیدن این موضوع محیط شکل را روی محیط پوش مستطیل تصویر کنید، کل محیط پوش مستطیل باشد پوشیده شود.) بنابراین محیط حداقل $۲۸۰۸ + ۶$ خواهد بود.

استراتژی علی: در نوبت دوم علی مانع تشکیل یک مستطیل ۳×۱ می‌شود و اگر بتواند به جز نوبت های اول و دوم در بقیه نوبت ها مربعی را انتخاب می‌کند که حداقل ۲ ضلع آن از قبل سیاه شده باشند. فرض کنید علی در T گام بتواند این کار را انجام دهد. بنابر لم اول در باقی گام‌ها که علی نمی‌تواند این کار را انجام دهد، شایان باید در گام قبلی خانه‌های سیاه را به یک مستطیل کامل تبدیل کرده است. زمانی که شایان این کار را انجام می‌دهد خانه‌ای که سیاه می‌کند باید حداقل با دو خانه سیاه مجاور باشد. پس هر گامی که علی محیط را اضافه کند، گام قبل از آن شایان به محیط اضافه نکرده است و در هر گام دیگر علی حداکثر دو واحد به محیط اضافه کرده است، بنابراین تعداد خانه‌های سیاه حداکثر $۲۸۰۸ + ۶$ می‌شود.

لم ۱. تنها شکل همبندی که هر خانه سیاه حداکثر یک مرز با خانه‌های بیرونی داشته باشد مستطیل است.

اثبات. فرض خلف می‌کنیم، پوش مستطیل شکل را در نظر بگیرید. ابتدا توجه کنید که باالترین سطر پوش محدب نمی‌تواند کاملا سیاه باشد، در غیر این صورت فرض کنید x باالاترین خانه سفید درون پوش مستطیل باشد، سطر x نمی‌تواند کاملا سفید باشد بنابراین در این سطر یک خانه سفید و سیاه مجاور وجود دارند و خانه بالایی آن خانه سفید هم سیاه است که تناقض است.

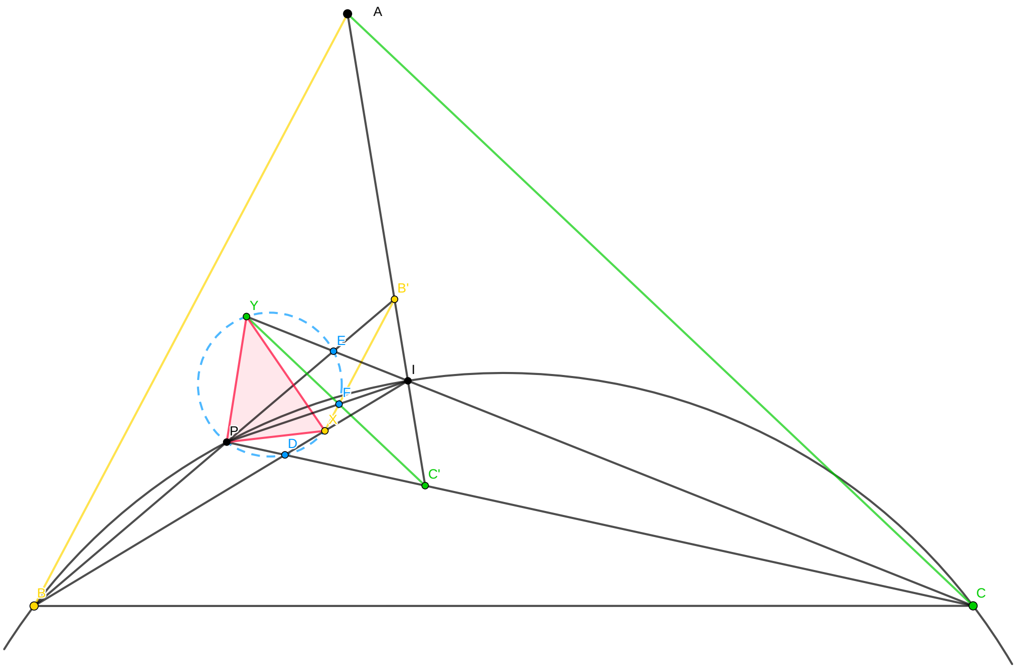
حال یک خانه سفید در بالاترین سطر در نظر بگیرید، در این سطر باید یک خانه سیاه وجود داشته باشد، بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید این خانه در سمت راست خانه سفید باشد. از خانه سفید به سمت راست حرکت کنید تا به یک مرز سیاه برخورد کنید. بنابرفرض خانه پایینی این خانه، سفید است به این خانه بروید و پایین بروید تا به یک خانه سیاه یا مرز پوش مستطیل بخورید. اگر به مرز نخوردید به سمت راست حرکت کنید تا به اولین خانه سیاه یا مرز پوش مستطیل برخورد کنید و این کار را ادامه دهید تا در نهایت به یکی از مرزهای پوش مستطیل برسید. در این حالت مسیری از خانه‌های سفید پیدا کردیم که مستطیل را به دو ناحیه تقسیم می‌کند و در هر دو قسمت هم خانه‌های سیاه وجود دارند(در غیر این صورت خانه‌های سفید نمی‌توانستند درون پوش‌مستطیل باشند). این موضوع با یکپارچگی خانه‌های سیاه در تناقض است. □

توجه ۱. توجه کنید که در چنین مسائلی، نیاز است استراتژی اثبات خود و ادعاهایی که درباره آن می‌کنید را ثابت کنید. صرف بیان کلماتی مثل این که بهترین حرکت این بازیکن فلان است یا این که اگر فلان بازیکن این حرکت را نکند موقعیتش بدتر می‌شود اثبات محسوب نمی‌شود. هم‌چنین در نظر بگیرید که حرکتی که در یک یا دو گام آینده بهینه است ممکن است شروع مسیری از حرکات باشد که در نهایت نتیجه بدتری از یک حرکت دیگر بدهد که در کوتاه مدت نتیجه بدتری دارد.

۳. P درون مثلث مختلف الاضلاع ABC با مرکز دایره محاطی I به گونه‌ای قرار دارد که :

$$۲\angle ABP = \angle BCA, ۲\angle ACP = \angle CBA$$

فرض کنید PB و PC خط AI را به ترتیب در B' و C' قطع می‌کنند. خط گذرا از B' و موازی AB خط BI را در X و خط گذرا از C' و موازی با AC خط CI را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید: مثلث‌های PXY و ABC متشابه‌اند . پاسخ:



فرض کنید F, E, D به ترتیب محل برخورد خطوط $C'Y, B'X$ و CI, BP و BI, CP باشند. ثابت خواهیم کرد تمامی ۶ نقطه P, X, Y, D, E, F روی یک دایره قرار دارند . ابتدا ثابت میکنیم B, P, I, C هم دایره اند. برای اثبات آن داریم:

$$\angle BPC = \angle A + \angle ABP + \angle PCA = \angle A + \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲} = \angle A + \angle ABI + \angle ICA = \angle BIC$$

و محاطی بودن ثابت میشود. حال ثابت میکنیم F مرکز دایره محیطی مثلث $PB'C'$ است. جهت اثبات آن داریم:

$$\angle FB'C' = \angle BAI = \angle IAC = \angle FC'B' = \frac{\angle A}{۲} = ۹۰^\circ - (۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲}) = ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \angle BIC)$$

$$= ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \angle BPC) = ۹۰^\circ - \angle B'PC'$$

و این گزاره هم ثابت میشود .

حال ثابت میکنیم F روی خط PI قرار دارد . برای اثبات آن داریم :

$$\angle C'PF = 90^\circ - \angle PB'C' = \angle PB'A - 90^\circ = \angle BB'A - 90^\circ = (180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle A}{2}) - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle A}{2}$$

$$= \frac{\angle B}{2} = \angle CBI = \angle CPI = \angle C'PI$$

پس همخطی اثبات میشود.
جهت هم دایره بودن ۶ نقطه در مرحله اول ثابت میکنیم نقاط P, D, X, F هم دایره هستند.
جهت اثبات این داریم:

$$\angle PDX = \angle PDI = 180^\circ - (\angle DPI + \angle DIP) = 180^\circ - (\frac{\angle B}{2} + (\angle C - \frac{\angle B}{2})) = 180^\circ - \angle C$$

$$\angle PFX = 180^\circ - \angle PFB' = 180^\circ - 2\angle PC'B' = 180^\circ - 2(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}) = 180^\circ - \angle B - \angle A = \angle C$$

پس این دو زاویه مکمل اند و هم دایره بودن نقاط P, D, X, F ثابت میشود.به طریق کاملا مشابه ثابت میشود نقاط P, Y, E, F نیز هم دایره هستند ، اکنون برای ثابت شدن هم دایره بودن ۶ نقطه فقط کافیست محاطی بودن چهارضلعی $PDFE$ را ثابت کنیم . برای این کار ابتدا ثابت میکنیم $DC' = DI, EB' = EI$ برای اثبات این گزاره داریم:

$$\angle DC'I = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = \angle DIC'$$

و ساقین بودن مثلث دیگر هم به طور مشابه ثابت میشود. به وسیله لم ۱ که در انتها ثابت شده است ، این محاطی بودن ثابت میشود ، پس اکنون هم دایره بودن آن ۶ نقطه را میدانیم ، به کمک زاویه بازی هایی که در بالاتر انجام دادیم به راحتی و به کمک حالت سه زاویه تشابه خواست سوال ثابت میگردد و حکم ثابت میشود .

لم ۱:
اگر در مثلث ABC نقاط P روی AB و Q روی AC و R روی BC به گونه ای قرار داشته باشند که $PB = PR, QR = QC$ و O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد ، آنگاه نقاط A, P, O, Q روی یک دایره قرار دارند .

اثبات لم ۱ :

شکل مساله به صورت زیر است

نقطه R' را قرینه نقطه R نسبت به خط PQ قرار دهید و همچنین فرض کنید O' مرکز دایره

محیطی مثلث APQ باشد . ثابت میکنیم نقاط A, P, Q, R' هم دایره اند ، زیرا که داریم :

$$\angle PR'Q = \angle PRQ = ۱۸۰^\circ - \angle BRP - \angle CRQ = ۱۸۰^\circ - \angle B - \angle C = \angle A = \angle PAQ$$

پس هم دایره بودن ثابت شد .
حال داریم که

$$\angle R'PB = ۱۸۰^\circ - \angle APR' = ۱۸۰^\circ - \angle AQR' = \angle R'QC$$

و با توجه به اینکه طبق فروض سوال دو مثلث $R'PB, R'QC$ هر دو ساقین هستند و زاویه راسشان هم یکیست ، پس متشابه هستند ، پس:

$$\angle PBR' = \angle QCR'$$

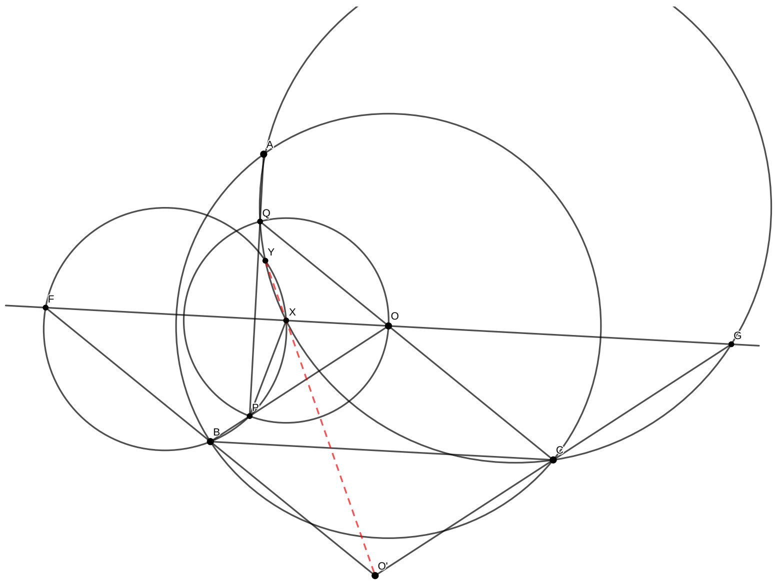
پس نقطه R' روی دایره محیطی مثلث ABC هم قرار دارد . نقاط $R'_۱$ و $R'_۲$ به ترتیب روبرو قطری های نقطه R' در دایره محیطی مثلث های ABC و APQ هستند ، نقاط $A, R'_۱, R'_۲$ همگی روی خط عمود بر $R'A$ در A هستند پس هم خط اند . حال داریم:

$$\angle AR'_۲R' = \angle APR' = ۲\angle R'BA = ۲\angle R'R'_۱A$$

پس مثلث $R'R'_۲R'_۱$ ساقین است . پس چون O', O به ترتیب وسط $R'R'_۲, R'R'_۱$ هستند ، پس مثلث $R'O'O$ هم ساقین است پس $O'R' = O'O$ پس حکم لم ثابت میشود.

۴. مثلث حاده و مختلف‌الاضلاع ABC با مرکز دایره محیطی O مفروض است. BO و CO ارتفاع وارد از A به BC را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. X مرکز دایره محیطی OPQ و O' قرینهٔ O نسبت به BC است. Y تقاطع دوم دوایر محیطی مثلث‌های BXP و CXQ است. نشان دهید نقاط X, Y, O' هم‌خطند.

پاسخ: شکل مساله مانند زیر است :



نقطه G محل برخورد $O'C$ با دایره محیطی AXC است و همچنین نقطه F محل برخورد خط $O'B$ با دایره محیطی BPX است . ابتدا ثابت میکنیم خط OX موازی خط BC است . داریم:

$$\angle POX = ۹۰^\circ - \angle OQP = \angle OCB = \angle OBC$$

و توازی ثابت میشود . حال ثابت میکنیم FX و GX موازی با BC اند . داریم :

$$\angle BFX = \angle XPO = \angle XOP = ... = \angle CBO = \angle O'BC$$

و به طور مشابه XG هم با BC موازیست. پس همگی F, X, O, G روی خطی موازی BC قرار دارند . اکنون داریم :

$$O'B = O'C, O'F = O'G \to O'B.O'F = O'C.O'G$$

پس O' روی محور اصلی دوایر BPX, QXC قرار دارد و حکم ثابت میشود

۵. همه‌ی تابع‌ها مانند $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ را پیدا کنید به طوری که برای هر $x,y,z>0$ داشته باشیم

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)\le f(x+y+z)\cdot f(xy+yz+xz)\le 3(x^3+y^3+z^3).$$

پاسخ: ابتدا با قرار دادن $x=y=z=a$ خواهیم داشت:

$$f(3a)f(3a^2)=9a^3 \qquad (1)$$

با قرار دادن $a=1$ داریم $f(3)=\pm 3$ از آن جا که ضرب تابع در منفی یک تاثیری در برقراری شرط مساله ندارد می‌توان فرض کرد $f(3)=3$.

حال قرار دهید $x+y+z=3$ باید داشته باشیم $f(xy+yz+zx)\le l$. بنابراین با استفاده از لم داریم برای هر $0<l\le 3$ ، $f(l)\le l$. از طرفی با قرار دادن $a=\frac{l}{3}$ در ۱ داریم $f(l)f(\frac{l^2}{3})=\frac{l^3}{3}$ اما $f(l)\le l, f(\frac{l^2}{3})\le\frac{l^2}{3}$ بنابراین نتیجه می‌شود برای هر $0<l\le 3$ ، $f(l)=l$.

حال قرار دهید $xy+yz+zx=3$ بنا بر لم $x+y+z$ می‌تواند هر مقدار $l>3$ ای را اتخاذ کند، بنابراین برای هر $l>3$ داریم $f(l)\le l$. این موضوع و رابطه ۱ مشابه بالا نتیجه می دهند $f(l)=l$. بنابراین جواب‌های معادله عبارتند از $f(x)=x, f(x)=-x$.

لم ۲. اگر $x,y,z>0$ باشند که $x+y+z=3$ عبارت $xy+yz+zx$ می‌تواند تمام مقادیر بازه $(0,3]$ را اتخاذ کند.

اثبات. قرار دهید

$$x=a, 0<y\le 3-a, z=3-a-y$$

که a عددی ثابت است. می‌خواهیم ببینیم با تغییر y چه مقادیری پوشش داده می‌شوند. در واقع باید برد تابع

$$-y^2+(3-a)y+a(3-a)$$

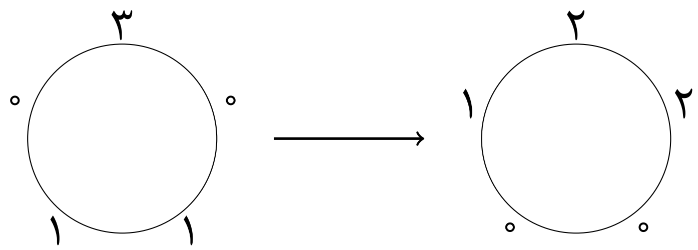
در بازه $(0,3-a)$ را بررسی کنیم که یک عبارت درجه دوست. با حل معادله درجه دو مربوطه نتیجه می‌شود که این برد برابر $(a(3-a),\frac{(3-a)^2}{4}+a(3-a)]$ است. با تغییر a بین صفر تا یک، کل اعداد بازه $(0,3]$ باید درون برد قرار بگیرند. □

لم ۳. اگر $x,y,z>0$ باشند $xy+yz+zx=3$ عبارت $x+y+z$ می‌تواند هر مقدار بزرگ‌تر از سه‌ای را اتخاذ کند.

اثبات. از لم بالا نتیجه می‌شود اگر $x+y+z=3t$ آن‌گاه $xy+yz+zx$ می‌تواند هر عددی در بازه $(0,3t^2)$ باشد. □

۶. علی یک میهمانی بزرگ ترتیب داده‌است و همراه $n-۱$ نفر از دوستانش دور یک میز دایره‌ای n-نفره نشسته‌اند؛ علی برای پذیرایی n سیب در مقابل خودش قرار داده است و می‌خواهد آن را میان همه توزیع کند. از آنجا که علی و دوستانش تک‌خوری را دوست ندارند و تا به همه سیب نرسد شروع به خوردن نمی‌کنند، در هر گام هر کسی که حداقل یک سیب دارد به طور هم‌زمان، یک سیبش را به اولین نفر بدون سیب از سمت راستش می‌دهد (در جهت پادساعت‌گرد).
به ازای چه مقادیری از n، پس از تعدادی گام، به وضعیتی می‌رسیم که هر نفر دقیقا ۱ سیب داشته باشد؟

برای مثال اگر در شکل زیر هر عدد نمایانگر تعداد سیب‌های هر نفر باشد، وضعیت سمت چپ بعد از یک گام به وضعیت سمت راست تبدیل می‌شود.



پاسخ: ادعا می‌کنیم پاسخ برابر توان‌های دوست. این موضوع را به استقرا ثابت می‌کنیم، در واقع فرض کنید $n = ۲^i$، به استقرا نشان می‌دهیم بعد از $n-۱$ گام به وضعیت همه یک می‌رسیم. فرض کنید حکم برای $۲^{i-۱}$ درست باشد، بنابراین بعد از $۲^{i-۱}-۱$ گام به وضعیتی می‌رسیم که نفر اول $۲^{i-۱}+۱$ سکه و $۲^{i-۱}-۱$ نفر بقیه یک سکه دارند، در مرحله بعد نفر اول و نفر روبروییش دور دایره هر کدام $۲^{i-۱}$ سکه دارند و بنابراین طبق فرض استقرا بعد از $۲^{i-۱}-۱$ گام دیگر همه یک سکه خواهند داشت و حکم ثابت می‌شود.

حال ادعا می‌کنیم هیچ n دیگری جواب نیست. ابتدا توجه کنید در یک مرحله به آخر هیچ دو خانه پشت سر همی نباید سکه داشته باشند چرا که در غیر این صورت به یک خانه دو سکه می‌رسد. بنابراین وضعیت قبلی باید نیمی از خانه‌ها خالی و نیم دیگر دو باشد. پس تعداد سکه ها زوج است. ادعا می‌کنیم در این حالت در نوبت‌های $۲k$ تمام جایگاه‌های فرد خالی و همه جایگاه‌های زوج مشابه گام k برای $\frac{n}{۲}$ سکه می‌شود. این مساله را با استقرا ثابت می‌کنیم، پایه بدیهی است. اگر پایه درست باشد بعد از یک گام خانه بعدی هر خانه زوج پر یک سکه می‌گیرد و گام بعد همه این سکه‌ها بعلاوه همین تعداد از خانه‌های زوج به اولین خانه خالی زوج بعدی منتقل می‌شوند که حکم را ثابت می‌کند. حال حکم سوال به استقرا از این حقیقت نتیجه می‌شود.

۱. کیمیا ساعت عجیبی دارد. عقربه ثانیه شمار این ساعت درست کار نمی‌کند و در هر لحظه به جای یک ثانیه به طور تصادفی ۳۴ یا ۴۷ ثانیه جابجا می‌شود. مثلا اگر در یک لحظه ساعت زمان ۱۲:۲۳:۰۵ را نشان دهد ممکن است در لحظات بعدی به ترتیب زمان‌های

۱۲:۲۳:۳۹, ۱۲:۲۴:۱۳, ۱۲:۲۵:۰۰, ۱۲:۲۵:۳۴, ۱۲:۲۶:۲۱,...

را نشان دهد. ثابت کنید همواره لحظه‌ای وجود دارد که عقربه ثانیه‌شمار عدد مربع کاملی را نشان می‌دهد.

۲.همه‌ی دنباله‌های $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $n \geq ۳$ داشته باشیم:

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}+\frac{۱}{a_۲a_۴}+\frac{۱}{a_۳a_۵}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۲}a_n}=۱-\frac{۱}{a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_{n-۱}^۲}$$

۳. در مثلث ABC مرکز دایره‌های محاطی داخلی، محاطی خارجی نظیر راس B و محاطی خارجی نظیر راس C را به ترتیب I ، K و L می‌نامیم. خطوط عمود بر BC در B,C به ترتیب AC, AB را در E, F قطع می‌کنند. ثابت کنید دوایر EIK, FIL, AEF همرس هستند.

۴.درمثلث ABC، M وسط AB و B' پای ارتفاع B است. دایره $CB'M$ خط BC را برای بار دوم در D قطع می‌کند. دایره‌های $ABD, CB'M$ برای بار دوم در K متقاطع هستند. خط موازی AB که از C می‌گذرد، دایره $CB'M$ را برای بار دوم در L قطع می‌کند. ثابت کنید KL پاره‌خط CM را نصف می‌کند.

۵. سهند و غلام روی جدولی ۱۴۰۳ × ۱۴۰۳ که در ابتدا همه ی خانه‌های آن سفید هستند بازی می‌کنند. به ازای هر سطر و هر ستون یک دکمه داریم (مجموعا ۲۸۰۶ دکمه). با شروع از سهند هر کس در نوبت خود یک دکمه که قبلاً فشار داده نشده را فشار می‌دهد، و سپس نوبت نفر دیگر می‌شود تا زمانی که تمام دکمه‌ها فشار داده شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط سهند تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ مشکی تبدیل می‌شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط غلام تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ قرمز تبدیل می‌شوند.

در انتها پس از این که همه دکمه‌ها فشرده شدند غلام به اندازه تعداد خانه‌های قرمز منهای تعداد خانه‌های سیاه و سهند به اندازه تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های قرمز امتیاز می‌گیرند اگر غلام و سهند هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند، غلام حداقل چند امتیاز کسب خواهد کرد. (به بیان دیگر بیشترین امتیازی که غلام با بازی خوب خود مستقل از بازی سهند می‌تواند از کسب آن مطمئن باشد را بیابید.)

۶. فرض کنید p یک عدد اول است. همه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک x, y را بیابید که داشته باشیم

$$\frac{x^۲ - ۱}{y^۲ - ۱} = (p + ۱)^۲$$

سوال ۱. کیمیا ساعت عجیبی دارد. عقربه ثانیه شمار این ساعت درست کار نمی‌کند و در هر لحظه به جای یک ثانیه به طور تصادفی ۳۴ یا ۴۷ ثانیه جابجا می‌شود. مثلا اگر در یک لحظه ساعت زمان ۱۲:۲۳:۰۵ را نشان دهد ممکن است در لحظات بعدی به ترتیب زمان‌های

$$۱۲:۲۳:۳۹, ۱۲:۲۴:۱۳, ۱۲:۲۵:۰۰, ۱۲:۲۵:۳۴, ۱۲:۲۶:۲۱, \ldots$$

را نشان دهد. ثابت کنید همواره لحظه‌ای وجود دارد که عقربه ثانیه‌شمار عدد مربع کاملی را نشان می‌دهد.

راه حل: ابتدا مشاهده کنید که اگر در لحظه‌ای عقربه ثانیه شمار روی ۳۶ یا ۴۹ قرار بگیرد به خواسته‌مان می‌رسیم، در مرحله بعدی اگر عقربه روی ۲ قرار بگیرد به خواسته‌مان می‌رسیم چرا که در گام بعدی باید روی یکی از $۴۹ = ۴۷ + ۲, ۳۶ = ۳۴ + ۲$ قرار گیرد. به طور بازگشتی دنباله اعداد خوب را این طور تعریف می‌کنیم که ۳۶, ۴۹ خوبند و در هر مرحله اگر برای عدد y ، $y + ۴۷, y + ۳۴$ هر دو خوب بودند y را به اعداد خوب اضافه می‌کنیم. قرار گرفتن ساعت روی هر عدد خوب ما را به خواسته‌مان می‌رساند چرا که بعد از تعدادی مرحله هر عدد خوب حتما به ۳۶ یا ۴۹ می‌رسد. ادعا می‌کنیم اگر y خوب باشد $y + ۱۳$ هم‌خوب است.(جمع‌ها را به پیمانه ۶۰ انجام می‌دهیم یعنی باقی‌مانده آن‌ها بر ۶۰ را در نظر می‌گیریم). داریم

$$(y + ۱۳) + ۳۴ = y + ۴۷$$

و

$$(y + ۱۳) + ۴۷ = y + ۶۰ \overset{۶۰}{\equiv} y$$

که طبق فرض هر دو خوب هستند. بنابراین باقی‌مانده تمام اعداد به فرم $۱۳k + ۳۶$ بر ۶۰ خوب هستند. باقی‌مانده اعداد

$$۳۶ + ۱۳k, ۰ \leq k \leq ۵۹$$

دوبدو بر ۶۰ متفاوت است، چرا که

$$۶۰ \nmid (۳۶ + ۱۳k) - (۳۶ + ۱۳k') = ۱۳(k - k'), ۰ \leq k, k' \leq ۵۹$$

(برای دیدن این موضوع می‌توانید از لم اقلیدس استفاده کنید) بنابراین تمامی اعداد خوب هستند و ساعت با شروع از آن‌ها حتما به یکی از اعداد ۳۶ یا ۴۹ می‌رسد.

سوال ۲. همه‌ی دنباله‌های $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $n \geq 3$ داشته باشیم:

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_n}=1-\frac{1}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2}$$

پاسخ:
ابتدا برای $n=3$ داریم

$$\frac{1}{a_1a_3}=1-\frac{1}{a_1^2+a_2^2} \tag{1}$$

این رابطه نتیجه می‌دهد $a_1=1$ چرا که در غیر این صورت خواهیم داشت $a_1 \geq 2$ و بنابراین

$$\frac{1}{a_1a_3}\leq\frac{1}{2}<\frac{4}{5}\leq 1-\frac{1}{a_1^2+a_2^2} \tag{2}$$

هم‌چنین واضح است که $a_3 \neq 1$ چرا که در غیر این صورت طرف چپ تساوی ۱ برابر یک می‌شود که به طور اکید از طرف راست بزرگ‌تر است. بنابراین مشابه نامساوی ۲ نتیجه می‌گیریم $a_2=1$.

حال با قرار دادن در رابطه بازگشتی بدست می‌آید $a_3=2, a_4=3, a_5=5, \ldots$ و دو طرف رابطه برابرند با $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{14}{15}, \ldots$. بنابراین حدس می‌زنیم $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ (دنباله معروف فیبوناچی) و دو طرف رابطه برای n برابرند با

$$\frac{a_na_{n-1}-1}{a_na_{n-1}}$$

.

این موضوع را می‌توان به استفرا ثابت کرد، پایه استقرا برقرار است فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار باشد، واضح است که رابطه بازگشتی a_n را به طور یکتا مشخص می‌کند پس کافی است چک کنیم

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

در رابطه بازگشتی صدق می‌کند. با قرار دادن در رابطه باید بررسی کنیم

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_{n-3}}+\frac{1}{a_na_{n-2}}=1-\frac{1}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2}=1-\frac{1}{a_na_{n-1}}$$

با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_{n-3}}+\frac{1}{a_na_{n-2}}=1-\frac{1}{a_{n-1}a_{n-2}}+\frac{1}{a_na_{n-2}}$$

$$=1-\frac{1}{a_n-2}\times(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}})=1-\frac{1}{a_{n-2}}\times\frac{a_n-2}{a_{n-1}a_n}=1-\frac{1}{a_{n-1}a_n}$$

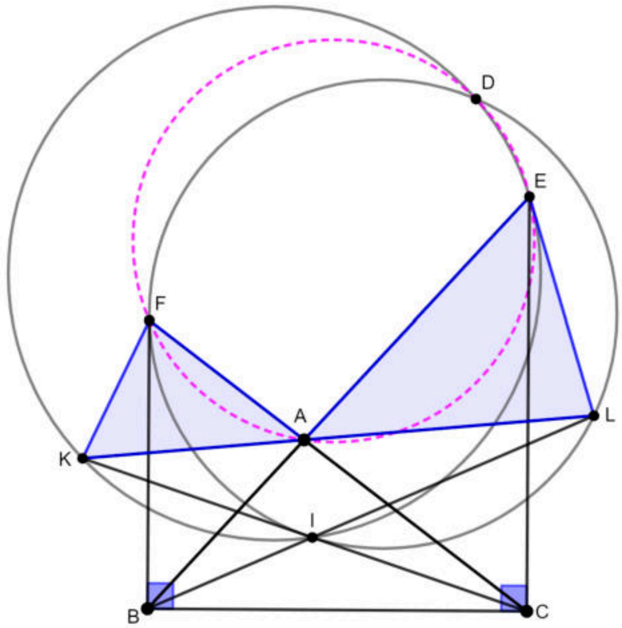
همین‌طور بنا به فرض استقرا داریم،

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-2}^2+a_{n-1}^2=a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-1}^2=a_{n-1}(a_{n-2}+a_{n-1})=a_{n-1}a_n$$

و کار تمام است.

سوال۳. در مثلث ABC مرکز دایره‌های محاطی داخلی، محاطی خارجی نظیر راس B و محاطی خارجی نظیر راس C را به ترتیب I ، K و L می‌نامیم. خطوط عمود بر BC در B,C به ترتیب AC,AB را در E,F قطع می‌کنند. ثابت کنید دوایر EIK, FIL, AEF همرس هستند.

راه‌حل:
تقاطع دوم دوایر محیطی مثلث‌های EIK و FIL را D می‌نامیم. پس داریم:



$$\angle EDI = \angle EKI$$

$$\angle FDI = \angle FLI$$

کافیست نشان دهیم $\angle FDE = ۱۸۰^\circ - \angle A$. می‌دانیم K, A, L همخط هستند. از آنجایی که $\angle ACL = ۹۰^\circ - \frac{\angle C}{۲}$ و $\angle AKB = ۹۰^\circ - \frac{\angle C}{۲}$ ، $\angle LAC = \angle BAK = \frac{\angle A}{۲}$، دو مثلث ACL و AKB متشابه بوده و داریم:

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AL}{AB}$$

همچنین از آنجایی که $CE \parallel BF$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF \times AE = AB \times AC = AL \times AK \Rightarrow \frac{AF}{AL} = \frac{AE}{AK}$$

پس $ALE \sim AFK \rightarrow ALF \sim AEK$ و داریم:

$$\begin{aligned}
\angle EKI + \angle FLI &= \angle EKL + \angle LKI + \angle FLK + \angle KLI \\
&= \angle EKL + \angle FLK + ۱۸۰^\circ - \angle LIK \\
&= \angle EKL + \angle AEK + ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} \\
&= ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} + ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} = ۱۸۰^\circ - \angle A
\end{aligned}$$

پس چهارضلعی $AEDF$ محاطی است و حکم اثبات می‌شود.

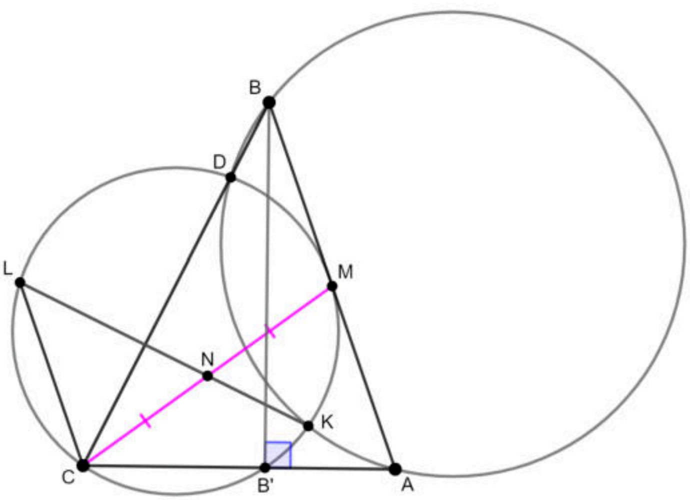
سوال ۴

ABC، M وسط AB و B' پای ارتفاع B است. دایره $CB'M$ خط BC را برای بار دوم در D قطع می‌کند. دایره‌های $ABD, CB'M$ برای بار دوم در K متقاطع هستند. خط موازی AB که از C می‌گذرد، دایره $CB'M$ را برای بار دوم در L قطع می‌کند. ثابت کنید KL پاره‌خط CM را نصف می‌کند.

راه‌حل:

از آنجایی که $AB \parallel CL$ و $ABDK$ محاطی است داریم $180^\circ - \angle AKD = \angle ABD = \angle BCL = \angle DKL$، پس A, K, L همخط هستند.

همچنین از آنجایی که $B'M$ میانهٔ وارد بر وتر است و $CB'ML$ محاطی است داریم $\angle MLC = \angle MB'A = \angle MAB'$، پس چهارضلعی $AMLC$ متوازی‌الاضلاع بوده و حکم اثبات می‌شود.



سوال ۵ سهند و غلام روی جدولی ۱۴۰۳×۱۴۰۳ که در ابتدا همه ی خانه‌های آن سفید هستند بازی می‌کنند. به ازای هر سطر و هر ستون یک دکمه داریم (مجموعا ۲۸۰۶ دکمه). با شروع از سهند هر کس در نوبت خود یک دکمه که قبلاً فشار داده نشده را فشار می‌دهد، و سپس نوبت نفر دیگر می‌شود تا زمانی که تمام دکمه‌ها فشار داده شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط سهند تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ مشکی تبدیل می‌شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط غلام تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ قرمز تبدیل می‌شوند.

در انتها پس از این که همه دکمه‌ها فشرده شدند غلام به اندازه تعداد خانه‌های قرمز منهای تعداد خانه‌های سیاه و سهند به اندازه تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های قرمز امتیاز می‌گیرند اگر غلام و سهند هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند، غلام حداقل چند امتیاز کسب خواهد کرد. (به بیان دیگر بیشترین امتیازی که غلام با بازی خوب خود مستقل از بازی سهند می‌تواند از کسب آن مطمئن باشد را بیابید.)

راه‌حل:
ادعا می‌کنیم پاسخ n است.

ابتدا استراتژی غلام برای رسیدن به این امتیاز را بیان می‌کنیم. هر گاه سهند دکمه یک سطر را فشار می‌دهد، غلام در نوبت بعد دکمه یک ستون را فشار می‌دهد و هر گاه سهند دکمه یک ستون را فشار می‌دهد غلام دکمه یک سطر را فشار می‌دهد. فرض کنید سهند در مجموع k سطر و $n-k$ ستون را انتخاب کند، در این صورت از ستونی که غلام متناظر با سطر i ام سهند انتخاب می‌کند حداقل $n-k+i$ خانه قرمز باقی می‌مانند چرا که تنها سطرهایی که سهند بعد از این انتخاب رنگ می‌کند می‌تواند رنگ یک خانه از این ستون را سیاه کند. از طرفی اگر غلام سطری انتخاب کند که در مجموع سطر j ام انتخاب‌شده باشد حداقل j خانه قرمز جدید می‌گیریم چرا که $n-j$ ستون باقی‌مانده که هر کدام از آن‌ها می‌توانند سیاه یا خانه‌ای که قبلا شمرده شده باشند بنابراین در مجموع حداقل

$$(۱ + ۲ + \cdots + n - k) + (n - k + ۱ + n - k + ۲ + \cdots + n) = \frac{n^۲ + n}{۲}$$

خانه قرمز می‌گیریم که حداقل n تا از خانه‌های سیاه بیشتر است.

برای این که نشان دهیم غلام کار بهتری نمی‌تواند بکند باید نشان دهیم سهند راهبردی دارد که امتیازش حداقل $-n$ بماند. فرض کنید سهند سطر اول را سیاه کند و از این به بعد هرگاه غلام سطری را انتخاب کرد ستونی را انتخاب کند و برعکس. مشابه قبل اگر غلام k ستون انتخاب کند و آخرین انتخابش یک ستون باشد حداقل

$$(۱ + ۲ + \cdots + n - k) + (n - k + ۱ + n - k + ۲ + \cdots + n - ۱)$$

و اگر آخرین انخابش یک سطر باشد حداقل

$$(۱ + ۲ + \cdots + (n - k - ۱)) + (n - k + ۱ + n - k + ۲ + \cdots + n - ۱ + n)$$

خانه سیاه می‌شوند که هر دو از $\frac{n^۲-n}{۲}$ بیشترمساوی‌اند.

راه‌های دیگری هم برای اثبات این قسمت وجود دارد، مثلا استقرا و تحلیل بعد از حرکت اول غلام.

سوال ۶ فرض کنید p یک عدد اول است. همه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک x, y را بیابید که داشته باشیم

$$\frac{x^2-1}{y^2-1} = (p+1)^2$$

راه‌حل:
با طرفین‌وسطین رابطه سوال داریم

$$x^2-1 = ((p+1)y)^2-(p+1)^2 \Rightarrow (p+1)^2-1 = ((p+1)y)^2-x^2 \Rightarrow p(p+2) = ((p+1)y-x)((p+1)y+x)$$

از آن‌جا که p عددی اول است باید $p|(p+1)y-x$ یا $p|(p+1)y+x$. اگر p پرانتز اول را عاد کند داریم

$$(p+1)y+x | p+2$$

با توجه به این که

$$(p+1)y+x$$

از $2p+3$ بزرگتر است به مشکل نامساوی می‌خوریم.

بنابراین $p|(p+1)y+x$ که نتیجه می‌دهد $y \overset{p}{\equiv} -x$. با قرار دادن $x = pk-y$ داریم

$$p(p+2) = (p(y-k)+2y)(py+pk) \Rightarrow p+2 = (p(y-k)+2y)(k+y)$$

اگر $k>y$ طرف راست از $3(p+4)$ بزرگتر می‌شود که تناقض است. اگر $k \le y$ از آن‌جا که $k+y \le p+2$ داریم $2y \le p+2$. حال اگر $y-k \le -2$ باشد

$$(p(y-k)+2y)(k+y) < (k+y)(-2p+2y)(k+y) \le 0$$

که تناقض است. بنابراین $k = y+1$. با جایگذاری داریم

$$(2y-p)(2y+1) = p+2 \Rightarrow 4y^2+(1-p)y-2p-2 = 0$$

که با اتحاد مربع نتیجه می‌دهد $y = \frac{p-1}{2}$ و مشاهده می‌کنیم

$$y = \frac{p-1}{2}, x = \frac{p(p+3)}{2} - \frac{p-1}{2}$$

تنها جواب‌های مساله هستند و p باید فرد باشد.

به نام خدا

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۴۰۲

---

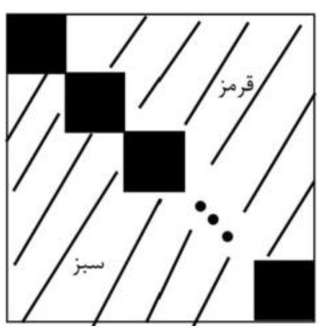
۱) در مثلث ABC می دانیم، $\angle A = 90^\circ$. Pنقطه ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می‌نامیم. PD، خطوط AC, AB را به ترتیب در F, E قطع می‌کند. همچنین دایره های APE و APF به ترتیب BP را در در X و CP را در Y قطع می‌کنند. ثابت کنید CX, BY, PD همرس هستند.

۲) ثابت کنید به ازای هر $2 \leq n \in \mathbb{N}$، یک n-تایی مرتب $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یک‌دیگر اول وجود دارد که همگی از ۱۴۰۲ بزرگ‌تر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$[\frac{a_1}{a_2}] + [\frac{a_2}{a_3}] + \cdots + [\frac{a_n}{a_1}] = [\frac{a_2}{a_1}] + [\frac{a_3}{a_2}] + \cdots + [\frac{a_1}{a_n}]$$

(منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح است که کوچک‌تر یا مساوی x باشد)

۳) یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، خانه‌ی سطر i-ام و ستون j-ام را با قاعده‌ی زیر رنگ می‌کنیم:



۱. اگر $i = j$، سیاه

۲. اگر $i < j$، قرمز

۳. اگر $j < i$، سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می‌کنیم و n-تایی مرتب $(a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n})$ را یادداشت می‌کنیم. با تکرار این کار به چند n-تایی مرتب مختلف می‌توانیم برسیم؟ (در یک n-تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند)

۴) عدد طبیعی فرد n داده شده است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه های یک جدول $3 \times k$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲. و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \cdots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

۵) یک دنباله $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدر نسبت $Q(x)$ می‌گوییم هر گاه برای هر n، $P_{n+1} = P_n + Q$.

فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله‌ی اول $P(x)$ داریم به طوری که P و Q چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه‌ی مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه‌ی صحیح دارد. ثابت کنید

آ- $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش پذیر است.

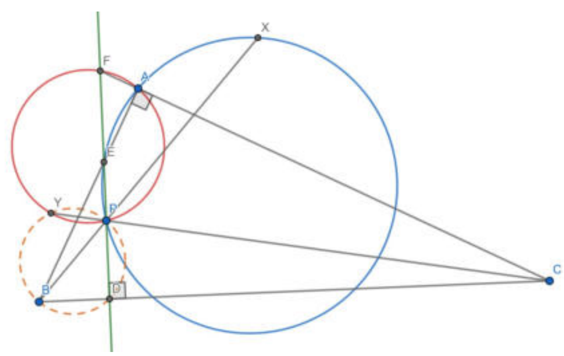
ب- چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

۶) دو دایره W_1, W_2 با شعاع های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه‌های B و C روی دایره های W_1 و W_2 طوری قرار دارند که به ترتیب داخل دایره های W_2 و W_1 هستند. همچنین نقطه‌های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_1 و W_2 طوری قرار دارند که $\angle BPQ = \angle BYQ$ و $\angle CPQ = \angle CXQ$. محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث های XPC و YPB را S می نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS همرس هستند.

به نام خدا

راه حل سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۴۰۲

۱) در مثلث ABC می دانیم، $\angle A = 90°$. Pنقطه ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می‌نامیم. PD، خطوط AC, AB را به ترتیب در F, E قطع می‌کند. همچنین دایره های APE و APF به ترتیب BP را در در X و CP را در Y قطع می‌کنند. ثابت کنید CX, BY, PD همرس هستند.



راه حل:

چهارضلعی $AFYP$ محاطی است. با نوشتن قوت C نسبت به این دایره داریم:

$$CA.CF = CP.CY$$

از طرفی دیگر چون $\angle FAB = \angle FDB = 90°$، چهارضلعی $FADB$ نیز محاطی است. قوت نقطه‌ی C نسبت به این دایره برابری زیر را می دهد.

$$CA.CF = CD.CB \implies CD.CB = CP.CY$$

در نتیجه چهارضلعی $YPDB$ محاطی است.

$$\angle PYB + \angle PDB = 180° \implies CYB = 90°$$

به طور مشابه می توان ثابت کرد $BXC = 90°$. از این دو رابطه‌ی آخر می توان نتیجه گرفت BY, CX, PD ارتفاع‌های راس‌های B, C, P در مثلث BCP هستند. پس این سه خط در مرکز ارتفاعی BPC همرس هستند.

۲) ثابت کنید به ازای هر $2 \leq n \in \mathbb{N}$، یک n-تایی مرتب $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یک‌دیگر اول وجود دارد که همگی از ۱۴۰۲ بزرگ‌تر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$[\frac{a_1}{a_2}] + [\frac{a_2}{a_3}] + \cdots + [\frac{a_n}{a_1}] = [\frac{a_2}{a_1}] + [\frac{a_3}{a_2}] + \cdots + [\frac{a_1}{a_n}]$$

(منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح است که کوچک‌تر یا مساوی x باشد)

راه حل:

ابتدا دقت کنید اگر $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ اعدادی طبیعی باشند که $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ و

$$\frac{a_2}{a_1} < 2, \frac{a_3}{a_2} < 2, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} < 2$$

و هم‌چنین داشته باشیم $n < \frac{a_n}{a_1} < n+1$ ، آن‌گاه اعداد $a_1, \cdots, a_n$ در رابطه سوال صدق می‌کنند. پس کافی است چنین اعدادی بیابیم که نسبت به هم اول باشند. برای یافتن این اعداد از لم زیر استفاده می‌کنیم:

لم. اگر c, c' اعدادی گویا و p, p' اعدادی اول و متفاوت باشند، آن گاه برای اعداد به اندازه کافی بزرگ مانند N اعداد $c \times N! + p, c' \times N! + p'$ نسبت به هم اول هستند.

فرض کنید $c = \frac{u}{v}, c' = \frac{u'}{v'}$ و فرض کنید $N > 2max(u'vp, uv'p')$ در این صورت اگر قرار دهیم $d = (cN! + p, c'N! + p')$ داریم:

$$d|(u'v(cN! + p), uv'(c'N! + p')) = (uu'N! + u'vp, uv'N! + uv'p')|u'vp - uv'p$$

بنابراین داریم $d < max(u'vp, uv'p')$ در نتیجه

$$d|cN!, c'N!$$

از طرفی

$$d|cN! + p, cN! + p'$$

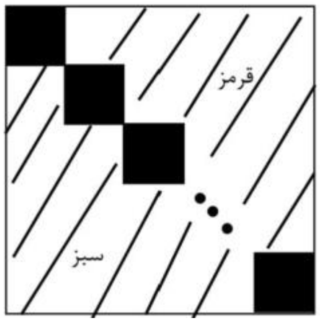
با کم کردن این روابط داریم $d|p, p'$ بنابراین $d = 1$.

اکنون به ساختن اعدادی نسبت به هم اول می‌پردازیم که در نامساوی‌های گفته شده در ابتدای راه حل صدق کنند. فرض کنید $p_1, p_2, \cdots, p_n$ ، n عدد اول ابتدایی باشند و $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اعدادی گویا ودلخواه باشند که

$$1 < c_1, c_2, \cdots, c_n < 2, n < c_1c_2 \cdots c_n < n+1$$

آنگاه کافی است برای N به اندازه کافی بزرگ قرار دهیم: $a_i = c_i \times N! + p_i$.

۳) یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، خانه‌ی سطر i-ام و ستون j-ام را با قاعده‌ی زیر رنگ می‌کنیم:



۱. اگر $i = j$، سیاه
۲. اگر $i < j$، قرمز
۳. اگر $j < i$، سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می‌کنیم و n-تایی مرتب $(a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{n,n})$ را یادداشت می‌کنیم. با تکرار این کار به چند n-تایی مرتب مختلف می‌توانیم برسیم؟ (در یک n-تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند)

راه حل:

به خانه‌های غیر سیاه روی قطر اصلی خانه‌های رنگی می‌گوییم. ادعا می‌کنیم می‌توان با حرکت مجاز مساله به یک رنگ‌آمیزی قطر اصلی رسید اگر و فقط اگر در این رنگ‌آمیزی، اولین خانه رنگی روی قطر اصلی قرمز و آخرین خانه رنگی روی قطر اصلی سبز باشد. برای اثبات این ادعا ابتدا توجه کنید که شماره سطرها بعد از انجام عمل جابجایی یک جایگشت از اعداد طبیعی کوچکتر از n تشکیل می دهند، اگر هر جایگاه این جایشگت را به رنگ خانه قطر اصلی متناظر دربیاوریم مشاهده می‌کنیم که مساله ما با مساله زیر معادل است:
جایگشتی از اعداد طبیعی کوچکتر از n مانند a_i داده شده است، اگر $a_i < i$ جایگاه i ام را سبز، اگر $a_i = i$ این جایگاه را سیاه و اگر $a_i > i$ این جایگاه را قرمز می کنیم. تعداد رنگ‌آمیزی‌های مختلفی که به ازای $n!$ جایگشت متفاوت می‌تواند ایجاد شود را بیابید.
حال به اثبات ادعا برای مساله معادل می‌پردازیم: واضح است که هر رنگ‌آمیزی مجاز باید شرایط گفته شده را داشته باشد، فرض کنید یک رنگ‌آمیزی داریم که اولین جایگاه رنگی آن قرمز و آخرین جایگاه رنگی آن سبز باشد. این رنگ آمیزی را می‌توان به تعدای بلوک متوالی سیاه و قرمز و سبز تقسیم کرد که اولین بلوک رنگی قرمز و آخرین بلوک رنگی سبز است. حال می‌خواهیم جایگشتی متناظر با این رنگ‌آمیزی بسازیم: اگر جایگاه i ام سیاه باشد عدد i را در این جایگاه قرار دهید. با حذف این جایگاه‌ها کافی است مساله را برای حالتی حل کنیم که خانه سیاهی در رنگ‌آمیزی وجود ندارد. فرض کنید $i, i+1, \cdots, j$ یک بلوک قرمز $j+1, j+2, \cdots, j+t$ بلوک سبز بعدی باشد

قرار دهید

$$a_i = i + 1, a_{i+1} = i + 2, \cdots, a_{j-1} = j$$

و $a_j = j + t, a_{j+1} = i$ قرار دهید همچنین $a_{j+2} = j + 1, a_{j+3} = j + 2, \cdots a_{j+t} = j + t - 1$ روشن است که این جایگشت رنگ‌آمیزی خواسته‌شده را تولید می‌کند.

حال می‌خواهیم تعداد این رنگ‌آمیزی‌ها را بشماریم. ابتدا دقت کنید تعداد رنگ‌آمیزی‌های مورد نظر با $k < n - 2$ خانه سیاه برابر است با $\binom{k}{n} 2^{n-k-2}$ است بنابراین تعداد کل رنگ‌آمیزی‌های مطلوب برابر است با

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{k}{n} 2^{n-k-2} = \frac{(2+1)^n - 2n - 1}{4} + 1 = \frac{3^n - 2n - 1}{4} + 1$$

۴) عدد طبیعی فرد n داده شده است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه های یک جدول $k \times 3$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲. و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \cdots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

راه حل:

ادعا می کنیم جواب $\frac{3(n+1)}{2}$ است. ابتدا مثالی از چنین جدولی ارایه می‌کنیم، فرض کنید $n = 2t+1$ سه جدول $(t+1) \times 3$ زیر را در نظر بگیرید

۰	۰	$\cdots$	۰	۰
۰	۱	$\cdots$	$t-1$	t
$2t+1$	$2t$	$\cdots$	$t+2$	$t+1$

۰	۱	$\cdots$	$t-1$	t
$2t+1$	$2t$	$\cdots$	$t+2$	$t+1$
۰	۰	$\cdots$	۰	۰

$2t+1$	$2t$	$\cdots$	$t+2$	$t+1$
۰	۰	$\cdots$	۰	۰
۰	۱	$\cdots$	$t-1$	t

جدولی که از چسباندن این سه جدول به دست می‌آید خواص مورد نظر را دارد. حال نشان می‌دهیم که جدول کوچکتری با خواص مطلوب وجود ندارد:

روش اول:

فرض کنید جدولی $k \times 3$ وجود داشته باشد،در هر سطر اعداد $1, 2, \cdots, n$ وجود دارد پس جمع خانه‌های جدول حداقل برابر با $\frac{3n(n+1)}{2}$ است. از طرفی با محاسبه ستونی جمع خانه‌های جدول دقیقا برابر است با kn. بنابراین داریم $k \geq \frac{3(n+1)}{2}$.

روش دوم:

از آن جا که جمع هر ستون $2t+1$ است، هیچ دو عددی از مجموعه $\{t+1, t+2, \cdots, 2t+1\}$ نمی‌توانند در یک ستون قرار گیرند. از آن جا که این اعداد باید در هر سه سطر بیایند پس حداقل $3t+3$ ستون نیاز داریم.

۵) یک دنباله $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدر نسبت $Q(x)$ می‌گوییم هر گاه برای هر n، $P_{n+1} = P_n + Q$.
فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله‌ی اول $P(x)$ داریم به طوری که P و Q چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه‌ی مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه‌ی صحیح دارد. ثابت کنید

آ- $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش پذیر است.

ب- چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

راه حل:
فرض کنید P,Q دو چندجمله‌ای هستند که تصاعد با جمله اول P و قدر نسبت Q در شروط مساله صدق می‌کند. ابتدا نشان می دهیم مجموعه ریشه‌های صحیح $\{P+nQ|n\in\mathbb{N}\}$ بی کران است. برای اثبات این موضوع توجه کنید برای $m\neq n$ چندجمله‌ای‌های $P+nQ, P+mQ$ ریشه مشترکی ندارند چرا که اگر x ریشه مشترک این دو چندجمله‌ای باشند داریم

$$0 = P + mQ(x) - P + nQ(x) = (m-n)Q(x) = 0 \to Q(x) = 0 \to P(x) = 0$$

که تناقض است.
حال فرض کنید معادله $P + nQ(x) = 0$ ریشه صحیح داشته باشد، این موضوع معادل این است که معادله $\frac{P}{Q}(x) = -n$ ریشه صحیح داشته باشد.
بنا بر امتحان تقسیم

$$P = TQ + R$$

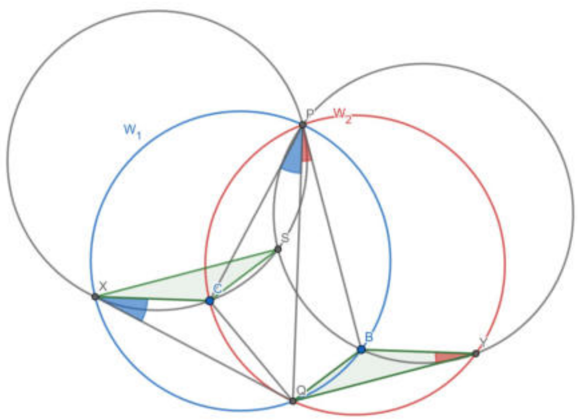
که T خارج قسمت تقسیم و R باقی‌مانده است و درجه‌ی R از درجه‌ی Q کمتر است. از آن‌جا که Q تکین است روشن است که تمام ضرایب T صحیح هستند حال فرض کنید $\frac{P}{Q}(x) = -n$ بنابراین

$$T(x) + \frac{R}{Q}(x) = -n$$

از آن‌جا که $T(x)$ عددی صحیح است پس $\frac{R}{Q}(x)$ هم عددی صحیح است. از طرفی دیدیم x می‌تواند به دلخواه بزرگ باشد بنابراین چون درجه R از درجه Q کمتر است برای x به اندازه کافی بزرگ داریم $|\frac{R}{Q}(x)| < 1$ که نتیجه می‌دهد $\frac{R}{Q} = 0$ و P بر Q بخش‌پذیر است.
حال تصاعدی با جمله اول $P' = \frac{P}{Q}$ و قدر نسبت 1 در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم این تصاعد هم در خولص مساله صدق می‌کند چراکه هر ریشه صحیح $P + nQ$ ریشه صحیح $P' + n$ هم هست(چون Q و $P + nQ$ ریشه صحیح مشترکی ندارند.)
بنابراین برای هر n صحیح معادله $P'(x) = n$ باید یک ریشه صحیح داشته باشد. اگر درجه P' بزرگتر از ۲ باشد، از جایی به بعد $P'(x+1) > P'(x) + 1$ بنابراین اگر $P'(x) = n$ باشد معادله $P'(x) = n + 1$ نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد. بنابراین درجه P' برابر ۱ است.
قسمت آخر استدلال را به روش‌های دیگری هم می‌توان انجام داد، مثلا به راحتی می‌توان دید $P' + n$ باید ریشه صحیحی بزرگتر از $\frac{n}{2}$ داشته باشد بنابراین از جایی به بعد $|P'(\frac{n}{2})| < n$ که برای چندجمله‌ای های درجه دو به بالا غیر ممکن است.

۶) دو دایره W_1, W_2 با شعاع های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه‌های B و C روی دایره های W_1 و W_2 طوری قرار دارند که به ترتیب داخل دایره های W_2 و W_1 هستند. همچنین نقطه‌های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_1 و W_2 طوری قرار دارند که $\angle BPQ = \angle BYQ$ و $\angle CPQ = \angle CXQ$. محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث های XPC و YPB را S می نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS همرس هستند.

راه حل:



چون شعاع دایره ها یکسان هستند، می‌دانیم

$$\angle PYQ = \angle PXQ,\ \angle PCQ = \angle PBQ$$

گام ۱: X مرکز ارتفاعی PCQ است.

اگر مرکز ارتفاعی PCQ را X' بنامیم، می دانیم $\angle CX'Q = \angle CPQ$ و $\angle PX'Q = 180 - \angle PCQ = 180 - \angle PBQ$. پس X' هم روی دایره‌ی PBQ است هم شرط زاویه‌ای X را دارد. طبق تعریف X، داریم $X = X'$.

به طور مشابه می توان گفت Y مرکز ارتفاعی PBQ است.

گام ۲: $CX = BY$ و $CX \parallel BY$.

از آن جایی که X مرکز ارتفاعی PCQ و Y مرکز ارتفاعی PBQ است، داریم:

$$CX \perp PQ,\ BY \perp PQ \implies CX \parallel BY$$

اگر O_1 مرکز W_1 و O_2 مرکز W_2 باشد، دایره W_1 را با یک انتقال با بردار $\overrightarrow{O_1O_2}$ می توان بر W_2 منطبق کرد. چون $O_1O_2 \perp PQ$، نتیجه می شود $CX \parallel O_1O_2$ پس بردار $\overrightarrow{XC}$ همان بردار انتقال است و $CX = O_1O_2$. به طور مشابه $O_1O_2 = YB$. این برابری مطلوب ما را اثبات می‌کند.

گام ۳: $SX = QY$ و $SX \parallel QY$.

برای اثبات این گام تغییر حکم می دهیم. S' را نقطه ای در نظر بگیرید که $S'XQY$ متوازی الاضلاع شود. خواهیم داشت $S'X = QY$ و $S'X \parallel QY$. همچنین به دلیل برابری دو ضلع و زاویه‌ی

بین (که با استفاده از توازی دو ضلع می توان آن را نتیجه گرفت) دو مثلث $S'XC$ و QYB همنهشت هستند.

$$S'XC \cong QYB \implies \angle XS'C = \angle BQY = 90 - \angle PYQ = 90 - \angle PXQ$$
$$= \angle XPC$$

این برابری محاطی بودن $PS'CX$ را نتیجه می دهد. به طور مشابه $S'PYB$ نیز محاطی است و طبق تعریف $S' = S$.

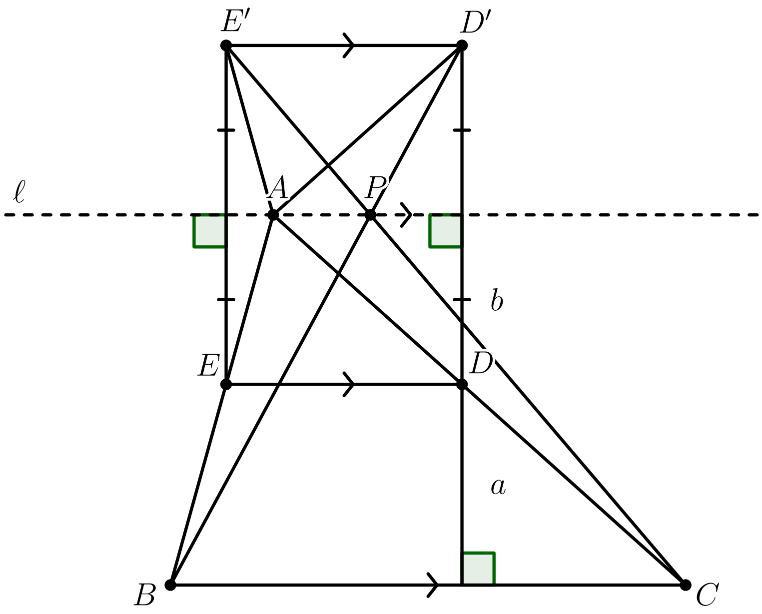
گام ۴:وسط های SQ, BC, XY یکی هستند.

به دلیل برابری و توازی دو ضلع رو به رو چهارضلعی های $SCQB$ و $SXQY$ متوازی الاضلاع هستند. می دانیم در یک متوازی الاضلاع قطر ها یک دیگر را نصف می کنند. پس وسط های سه پاره خط SQ, BC, XY همگی یک نقطه هستند. از این گام حکم سوال نتیجه می شود.

۱. مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AC و AB در نظر بگیرید به گونه‌ای که $BC \parallel DE$. حال خطی به نام ℓ از A و موازی با BC رسم می‌کنیم و قرینهٔ D و E را نسبت به آن به ترتیب D' و E' می‌نامیم. ثابت کنید $D'B$، $E'C$ و ℓ همرسند.

راه حل اول.

فاصلهٔ نقطهٔ D از BC و ℓ را به ترتیب a و b در نظر می‌گیریم. فرض کنید X نقطه‌ای دلخواه بین خطوط BC و $D'E'$ باشد. اگر X روی ℓ قرار داشته باشد آنگاه نسبت فاصله‌اش از BC و $D'E'$ برابر است با $\frac{a+b}{b}$. برای نقاط بالاتر از ℓ این نسبت بیش‌تر و برای نقاط پایین‌تر از ℓ این نسبت کم‌تر است.



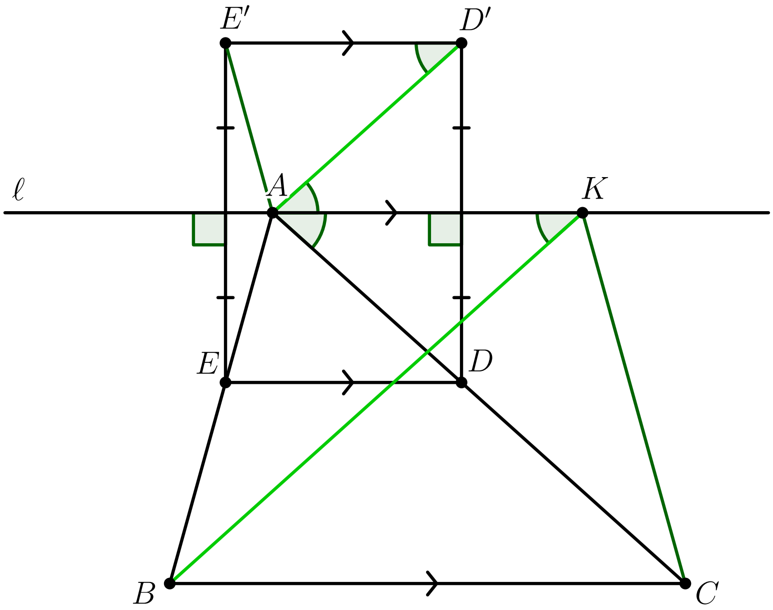
حال اگر محل برخورد خطوط $D'B$ و $E'C$ را P بنامیم آنگاه طبق قضیهٔ تالس نسبت فاصله‌ی P از خطوط BC و $D'E'$ برابر است با

$$\frac{BC}{D'E'} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{a+b}{b}.$$

طبق استدلالی که در ابتدای اثبات انجام دادیم P باید روی ℓ باشد و حکم ثابت می‌شود.

راه حل دوم.

فرض کنید K نقطه‌ای روی ℓ باشد که چهارضلعی $ABCK$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.



به وضوح $D'E' \parallel \ell$ پس می‌توان نوشت

$$\angle E'D'A = \angle D'AK = \angle KAC = \angle AKB.$$

در نتیجه $BK \parallel AD'$. به طور مشابه می‌توان نشان داد $AE' \parallel CK$ پس اضلاع مثلث‌های KBC و $AD'E'$ دوبه‌دو با یکدیگر موازی‌اند. این یعنی اگر رئوس نظیر را به یکدیگر وصل کنیم در یک نقطه همرس می‌شوند که همان خطوط $D'B$، $E'C$ و ℓ هستند.

راه حل سوم.

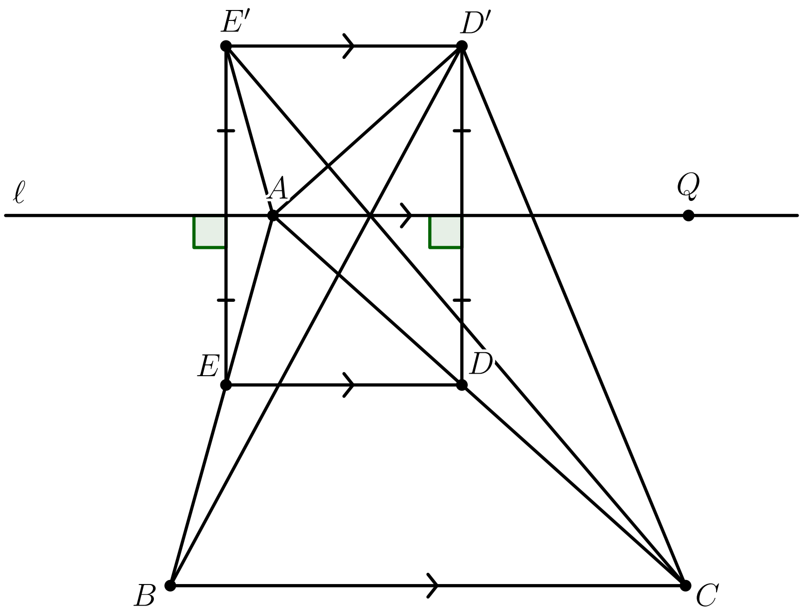
لم. *در چهارضلعی $XYZT$ می‌توان نوشت*

$$\frac{\sin \angle YXZ}{\sin \angle TXZ} = \frac{YZ}{TZ} \cdot \frac{\sin \angle XYZ}{\sin \angle XTZ}$$

برهان. دقت کنید که از قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث‌های XYZ و XTZ به دست می‌آید

$$\frac{YZ \sin \angle XYZ}{TZ \sin \angle XTZ} = \frac{XZ \sin \angle YXZ}{XZ \sin \angle TXZ} = \frac{\sin \angle YXZ}{\sin \angle TXZ}$$

که همان رابطهٔ داده‌شده است. □



فرض کنید Q نقطه‌ای دلخواه روی خط ℓ باشد. طبق قضیهٔ سوا سینوسی در مثلث $CD'A$ برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم

$$۱ = \frac{\sin \angle D'AQ}{\sin \angle QAC} \cdot \frac{\sin \angle ACE'}{\sin \angle E'CD'} \cdot \frac{\sin \angle CD'B}{\sin \angle BD'A}$$

طبق فرض‌های سوال واضح است که $\angle D'AQ = \angle QAC$. پس باید نشان دهیم

$$\frac{\sin \angle ACE'}{\sin \angle E'CD'} = \frac{\sin \angle BD'A}{\sin \angle CD'B} \qquad (۱)$$

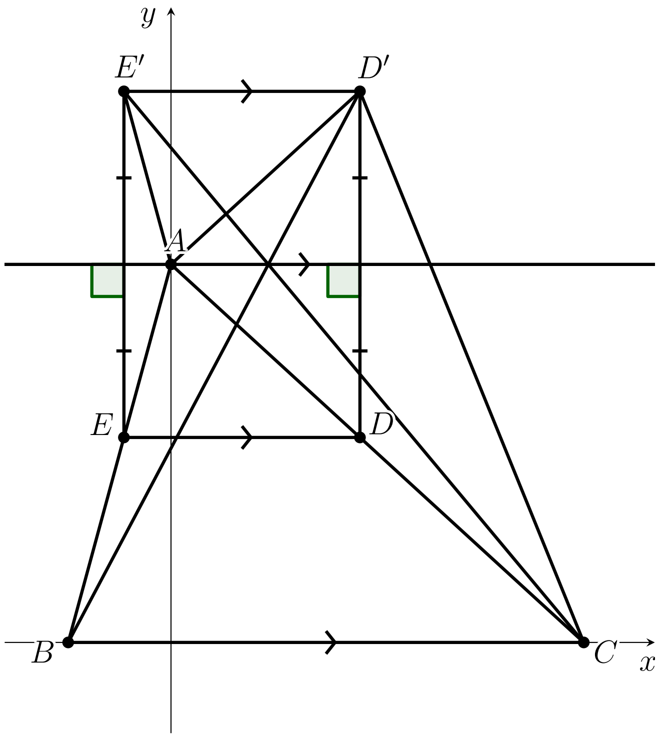
حال طبق لم می‌توانیم این دو نسبت را محاسبه کنیم:

$$\frac{\sin \angle ACE'}{\sin \angle E'CD'} = \frac{AE'}{E'D'} \cdot \frac{\sin \angle E'AC}{\sin \angle E'D'C} \quad \text{و} \quad \frac{\sin \angle BD'A}{\sin \angle CD'B} = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{\sin \angle BAD'}{\sin \angle BCD'}$$

توجه کنید که دو مثلث ABC و $AE'D'$ با یکدیگر متشابه‌اند (زیرا AED و $AE'D'$ هم‌نهشت هستند) پس $\frac{AE'}{E'D'} = \frac{AB}{CB}$ و $\angle E'AC = \angle D'AB$. همچنین طبق توازی $E'D'$ و BC داریم $\angle E'D'C +$

$\angle BCD' = ۱۸۰^\circ$ پس سینوس این دو زاویه نیز برابر است. این نتایج تساوی (۱) را نتیجه می‌دهند و حکم ثابت می‌شود.

راه حل چهارم.



محور مختصات را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که رأس A روی محور yها و رئوس B و C روی محور xها باشند. پس می‌توانیم مختصات آن‌ها را به ترتیب به شکل $(۰, a)$، $(b, ۰)$ و $(c, ۰)$ نمایش دهیم. فرض کنید عرض نقاط D و E، p باشد. به وضوح معادلهٔ خط AC برابر است با $y = -\frac{a}{c}x + a$ پس طول نقطهٔ D برابر است $\frac{c(a-p)}{a}$. از آنجا که نقطهٔ D' قرینهٔ D نسبت به خط $y = a$ است مختصات آن برابر است با $\left(\frac{c(a-p)}{a}, ۲a - p\right)$. حال مختصات محل تقاطع خطوط BD' و ℓ را پیدا می‌کنیم. شیب خط BD' برابر است با

$$\frac{۲a-p}{\frac{c(a-p)}{a} - b} = \frac{a(۲a-p)}{c(a-p)-ab} \Longrightarrow y = \frac{a(۲a-p)}{c(a-p)-ab}x - \frac{ab(۲a-p)}{c(a-p)-ab}$$:معادلهٔ خط BD'

اگر قرار دهیم $y = a$ به دست می‌آید

$$\frac{a(۲a-p)}{c(a-p)-ab}x = a + \frac{ab(۲a-p)}{c(a-p)-ab} = \frac{a(b+c)(a-p)}{c(a-p)-ab} \Longrightarrow x = \frac{(b+c)(a-p)}{۲a-p}$$

پس مختصات نقطهٔ تقاطع BD' و ℓ نسبت به b و c متقارن است و طبق تقارن خط CE' نیز از همان نقطه می‌گذرد که حکم را نتیجه می‌دهد.

۲. همهٔ تابع‌های $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y،

$$f(xf(y)+f(x)+y)=xy+f(x)+f(y) \qquad (۱)$$

راه حل اول.
نشان می‌دهیم تنها جواب مسئله $f(x)=x$ است. در تمام راه حل منظور از "قرار دادن" جایگزینی x و y با مقادیر گفته شده در تساوی (۱) است.

مرحلهٔ اول. یافتن مقدار $f(۰)$
قرار دهید $x=۰$ و $y=-f(۰)$ در این صورت به دست می‌آوریم $f(-f(۰))=۰$. پس عدد حقیقی c وجود دارد که $f(c)=۰$. با قرار دادن $x=c$، $y=c$ نتیجه می‌گیریم $c^۲=۰$. بنابراین $f(۰)=۰$ و صفر تنها عدد با این خاصیت است.

مرحلهٔ دوم. نشان دادن $f(y)^۲=y^۲$
با قرار دادن $y=۰$ به دست می‌آید $f(f(x))=f(x)$. با استفاده از این تساوی و قرار دادن $x=-\frac{y}{f(y)}$ به دست می‌آید (اگر $y\neq ۰$ این کار مجاز است زیرا $f(y)\neq ۰$)

$$f\left(-\frac{y}{f(y)}\right)=-\frac{y^۲}{f(y)}+f\left(-\frac{y}{f(y)}\right)+f(y)$$

که بعد از ساده کردن نتیجه می‌دهد $f(y)^۲=y^۲$.

مرحلهٔ سوم. نشان دادن $f(x)=x$
در قسمت قبل دیدیم که برای هر x، $f(x)=x$ یا $f(x)=-x$. با جای‌گذاری به راحتی می‌توان دید که اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x)=x$ در تساوی (۱) صدق می‌کند ولی در صورتی که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=-x$ در تساوی مسئله صدق نمی‌کند. تنها حالتی باقی می‌ماند که برای برخی xها $f(x)=x$ و برای برخی $f(x)=-x$ باشد. فرض کنید برای $a,b\neq ۰$ داشته باشیم $f(a)=a$ و $f(b)=-b$، با قرار دادن $x=a$ و $y=b$ به دست می‌آید $f(-ab+a+b)=ab+a-b$. حال دو حالت داریم. حالت اول این است که

$$-(-ab+a+b)=ab+a-b \implies a=۰$$

که با فرض $a\neq ۰$ در تناقض است. در حالت دوم داریم

$$ab+a+b=-ab+a-b \implies a=-۱$$

پس به ازای هر $x\neq -۱$ داریم $f(x)=-x$ که با جای‌گذاری در تساوی (۱) می‌توان دید صدق نمی‌کند.

راه حل دوم.

در این راه حل مرحلهٔ اول مانند راه حل قبل است و به همین دلیل تنها به بیان مراحل بعدی می‌پردازیم.

مرحلهٔ دوم. پیدا کردن f روی برد

توجه کنید با قرار دادن $y = ۰$ به دست می‌آوریم $f(f(x)) = f(x)$. پس f روی برد خود همانی است و اگر نشان دهیم f پوشا است آنگاه نتیجه می‌شود f روی کل دامنه همانی است.

مرحلهٔ سوم. اثبات همانی بودن تابع

فرض کنید جوابی غیر از تابع همانی داشته باشیم یعنی عدد c یافت شود که $f(c) \neq c$. در این صورت با قرار دادن $x = -۱$ و $y = c + f(x) + xf(c)$ به دست می‌آید

$$f(A) = -c - f(x) - xf(c) + f(-۱) + f(c + f(x) + xf(c)) \qquad (۲)$$

که $A = -f(c + f(x) + xf(c)) + f(-۱) + c + f(x) + xf(c)$. بعد از توجه به اینکه

$$f(c + f(x) + xf(c)) = cx + f(c) + f(x)$$

و جای‌گذاری در (۲) نتیجه می‌شود

$$f(A) = x(c - f(c)) - c + f(c) + f(-۱)$$

حال توجه کنید که با تغییر x طرف راست عبارت بالا تمام اعداد حقیقی را تولید می‌کند بنابراین f پوشاست. پس f روی کل دامنه همانی است که در تناقض با وجود c است. در نتیجه تنها جواب مسئله تابع همانی است.

۳. خانه‌های یک جدول $n \times n$ به صورت شطرنجی سیاه و سفید شده‌اند. به ازای چه nهایی می‌توان خانه‌های جدول را با اعداد ۱، ۲، ...، n به گونه‌ای پر کرد که هر دو شرط زیر برقرار باشد:

- در هر سطر تمامی اعداد ۱، ۲، ...، n آمده باشند و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن سطر با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.
- در هر ستون تمامی اعداد ۱، ۲، ...، n آمده باشند و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن ستون با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.

راه حل.

ادعا می‌کنیم فقط برای اعداد n که مضرب چهار هستند چنین جدولی وجود دارد.
طبق فرض سوال جمع خانه‌های هر سطر و هر ستون از این زیرجدول برابر $\frac{۱+۲+\cdots+n}{۲}$ است که باید عددی طبیعی باشد. پس باید داشته باشیم $۴ \mid n(n+۱)$ که این نتیجه می‌دهد یا $۴ \mid n$ یا $۴ \mid n+۱$.
اگر $n \mid ۴$ جدول را به این صورت می‌سازیم که ابتدا جایگشت $a_۱, \ldots, a_n$ از $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر می‌گیریم که جایگاه‌های زوج با اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده ۰ و ۱ دارند و جایگاه‌های فرد با اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده ۲ و ۳ دارند پر شده باشد. سپس برای ساختن جدول عدد A_{ij} را برابر a_k می‌گیریم که $k \equiv i+j-۱ \pmod n$. می‌توان به سادگی چک کرد که هر ستون این جدول نیز یک جایشگت است و به علاوه شرط برابری جمع اعداد خانه‌های سفید و سیاه در هر سطر و ستون برقرار است.
حال اگر $۴ \mid n+۱$، زیرمجموعه‌ای از خانه‌های جدول متشکل از A_{ij}هایی را بگیرید که i فرد و j زوج است. باز هم طبق فرض سوال جمع خانه‌های هر سطر و هر ستون از این زیرجدول برابر $\frac{۱+۲+\cdots+n}{۲}$ است.
اما چون تعداد سطرها و خانه‌های این زیرجدول برابر نیستند جمع کل خانه‌های آن از دو محاسبه مختلف بر حسب سطرها و ستون به دو جواب مختلف می‌رسد که تناقض است. به طور دقیق‌تر

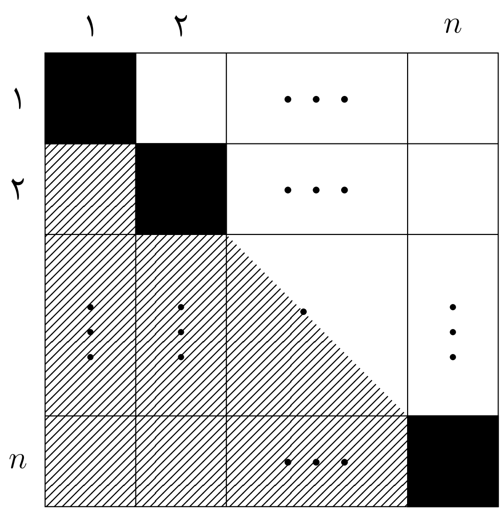
$$\sum_{i \text{ فرد}} \sum_{j \text{ زوج}} A_{ij} = \sum_{i \text{ فرد}} \Big(\sum_{j \text{ زوج}} A_{ij} \Big) = \frac{n+۱}{۲} \cdot \frac{۱+۲+\cdots+n}{۲},$$

$$\sum_{i \text{ فرد}} \sum_{j \text{ زوج}} A_{ij} = \sum_{j \text{ زوج}} \Big(\sum_{i \text{ فرد}} A_{ij} \Big) = \frac{n-۱}{۲} \cdot \frac{۱+۲+\cdots+n}{۲}.$$

پس برای چنین اعداد n هم جدول وجود ندارد (در واقع این استدلال وجود جدولی با خواص مساله برای nهای فرد را رد می‌کند) و تنها برای nهای مضرب ۴ وجود چنین جدولی ممکن است که برای آن مثالی ارائه کردیم.

۴. در یک جدول $n \times n$ بعضی از خانه‌ها سیاه شده‌اند و بقیه سفید هستند. دو نسخه از این جدول تهیه می‌کنیم و به امین و علی هر کدام یک نسخه می‌دهیم. امین و علی در اتاق‌های جداگانه، در تلاش برای قرمز کردن همهٔ خانه‌های جدول خود هستند.
روش امین به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در سطر خود تنها خانهٔ سیاه باشد، سپس ستون مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.
روش علی به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در ستون خود تنها خانهٔ سیاه باشد، سپس سطر مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.
ثابت کنید امین در نهایت موفق می‌شود همهٔ خانه‌های جدولش را قرمز کند اگر و تنها اگر علی هم موفق شود همهٔ خانه‌های جدولش را قرمز کند.

راه حل.
خانه‌هایی که امین پیدا می‌کند، که در سطر خود تنها خانهٔ سیاه هستند و سپس ستون آن‌ها را کاملاً قرمز می‌کند، را خانه‌های ویژه بنامید. وقتی یک خانهٔ ویژه انتخاب می‌شود، از آنجا که بعد از آن نیز ستونش قرمز می‌شود، دیگر خانهٔ ویژه‌ای از آن ستون انتخاب نمی‌شود. از طرف دیگر وقتی یک خانهٔ ویژه در یک سطر انتخاب می‌شود، یعنی تنها خانهٔ سیاه آن سطر است و در آن سطر در مراحل بعدی خانهٔ ویژه‌ای انتخاب نمی‌شود. پس می‌توان گفت در پایان، هیچ دو خانهٔ ویژه‌ای هم‌سطر و هم‌ستون نیستند و تنها زمانی همهٔ خانه‌های جدول قرمز می‌شود که این خانه‌های ویژه تشکیل یک قطر پراکنده بدهند.
توجه کنید که اگر سطرها با هم جابجا شوند و ستون‌ها نیز با هم جابجا شوند، حکم مسئله تغییری نمی‌کند و روش رنگ‌آمیزی علی و امین مستقل از چینش سطرها و ستون‌هاست. حال فرض کنید امین توانسته همهٔ خانه‌ها را قرمز کند. پس خانه‌های ویژه تشکیل یک قطر پراکنده می‌دهند. طوری سطرها و ستون‌ها را جابجا کنید که اولین خانهٔ ویژه‌ای که انتخاب می‌شود در مکان $(۱,۱)$، دومین خانهٔ ویژه در مکان $(۲,۲)$ و ... تا آخرین خانهٔ ویژه در (n,n).



اکنون خانه‌های ویژه قطر اصلی جدول هستند و با توجه به تعریف خانه‌های ویژه، خانه‌های بالای قطر اصلی در ابتدا همگی سفید بوده‌اند. پس به صورت یکتا علی باید ابتدا خانهٔ (n,n) را انتخاب کند، سپس $(n-۱, n-۱)$، و ... تا در نهایت $(۱,۱)$ را انتخاب کند و همهٔ جدول در روش علی نیز قرمز می‌شود.

پس اگر امین همهٔ خانه‌ها را قرمز کند، در روش علی نیز همهٔ خانه‌ها قرمز می‌شوند و از آنجا که مسئله نسبت به روش علی و امین متقارن است، اگر علی همهٔ خانه‌ها را قرمز کند، در روش امین نیز همهٔ خانه‌ها قرمز می‌شوند و در نتیجه حکم مسئله برقرار است.

۵. دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می‌شود که $a_1 = 2$ و برای هر $n \geq 1$ داریم

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$$

ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n+1}a_n a_{n-1}\dots a_1$ عددی طبیعی و مربع کامل است.

راه حل اول.

با استقرا روی n نشان می‌دهیم، $a_n = 2\cdot\frac{n^n}{n!}$. برای پایه استقرا که حکم واضح است. اگر برای n درست باشد آنگاه

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n = 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n^n}{n!} = 2\cdot\frac{(n+1)^n}{n!} = 2\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{a_n\cdots a_2a_1}{n+1} &= \frac{2^n}{n+1}\cdot\frac{n^n(n-1)^{n-1}\dots 2^2 1^1}{(n!)((n-1)!)\dots 2!1!}\\ &= \frac{2^n}{n+1}\cdot\frac{n}{1!}\cdot\frac{n(n-1)}{2!}\dots\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\dots\frac{n!}{n!}\\ &= \frac{2^n}{n+1}\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}\end{aligned}$$

توجه کنید اگر n فرد باشد،

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right)^2$$

مربع کامل است. در ادامه ثابت می‌کنیم برای بی‌نهایت n عبارت $\frac{1}{n+1}a_n\cdots a_1$ صحیح و مربع کامل است. برای رسیدن به این هدف کافی است n را به گونه‌ای انتخاب کنیم که اولاً فرد باشد و ضمناً $\frac{2^n}{n+1}$ صحیح و مربع کامل باشد.

اگر عدد n را به فرم $n = 2^k - 1$ انتخاب کنیم که k فرد باشد به وضوح

$$\frac{2^n}{n+1} = \frac{2^{2^k-1}}{2^k} = 2^{2^k-k-1}$$

صحیح و مربع کامل است. پس اثبات حکم مساله به پایان می‌رسد.

به طور خلاصه برای هر $n = 2^k - 1$ که k فرد باشد

$$\frac{1}{n+1}a_n a_{n-1}\cdots a_1 = \left(2^{2^{k-1}-\frac{k+1}{2}}\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right)^2$$

صحیح و مربع کامل است.

راه حل دوم.
مانند راه حل اول می‌توان نشان داد

$$\frac{a_n\cdots a_۲a_۱}{n+۱}=\frac{۲^n}{n+۱}\cdot\frac{n^n(n-۱)^{n-۱}\dots ۲^۲۱^۱}{(n!)((n-۱)!)\dots ۲!۱!}=\frac{۲^n}{n+۱}A$$

دقت کنید که برای هر عدد طبیعی $۱\leq i\leq n$، عدد i در مخرج کسر A، $n-i+۱$بار ظاهر می‌شود، زیرا i در حاصل ضرب‌های $i!,(i+۱)!,\dots,n!$ وجود دارد. همچنین در صورت کسر A نیز به وضوح توان i برابر با i است. در نتیجه A را به شکل زیر نیز می‌توان نمایش داد

$$A=\prod_{i=۱}^{n}i^{۲i-n-۱}$$

برای nهای فرد A مربع کامل است زیرا $۲i-n-۱$ زوج می‌شود. در ادامه نشان می‌دهیم A عددی صحیح نیز است. فرض کنید $p\leq n$ عددی اول باشد و k بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $p^k\leq n$. آنگاه به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که توان p در تجزیهٔ A به عوامل اول برابر است با

$$\sum_{j=۱}^{k}۲p^j\left(۱+۲+\cdots+\left[\frac{n}{p^j}\right]\right)-(n+۱)\sum_{j=۱}^{k}\left[\frac{n}{p^j}\right] \qquad (۱)$$

که منظور از $[x]$ جزء صحیح x است. حال برای هر $۱\leq j\leq k$ نشان می‌دهیم

$$\begin{aligned}
&۲p^j\left(۱+۲+\cdots+\left[\frac{n}{p^j}\right]\right)\geq(n+۱)\left[\frac{n}{p^j}\right]\\
\iff\quad &p^j\left[\frac{n}{p^j}\right]\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+۱\right)\geq(n+۱)\left[\frac{n}{p^j}\right]\\
\iff\quad &p^j\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+۱\right)\geq n+۱
\end{aligned}$$

طبق قضیهٔ تقسیم عدد طبیعی q و عدد صحیح $۰\leq r<p^j$ وجود دارد که $n=p^jq+r$. پس باید نشان دهیم

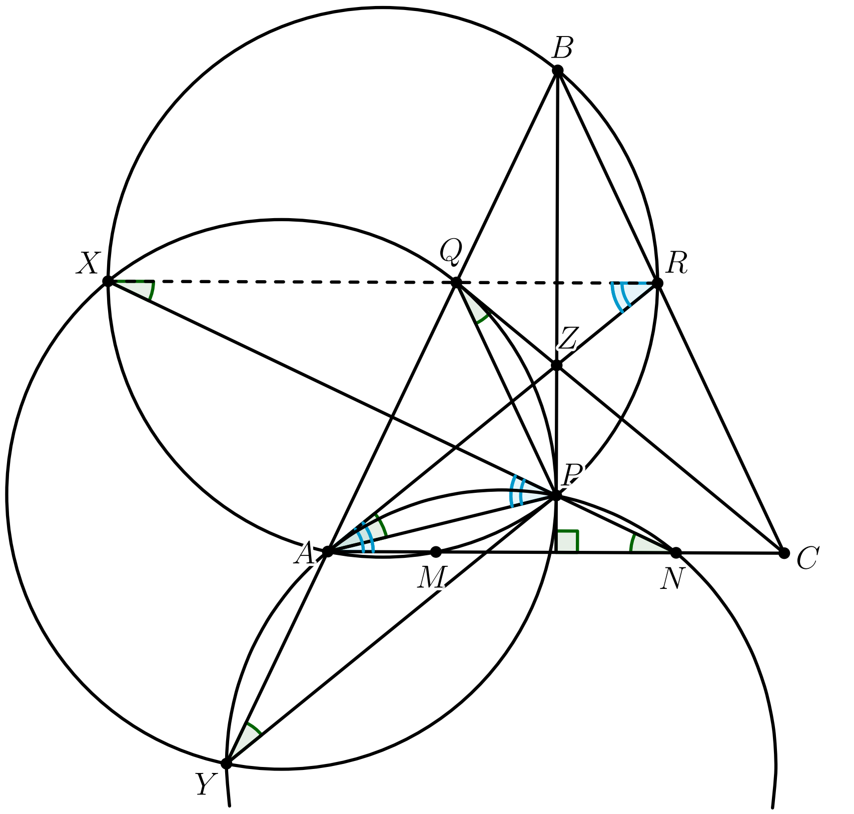
$$p^j(q+۱)\geq p^jq+r+۱\iff p^j\geq r+۱$$

که واضح است. پس مقدار (۱) نامنفی است و این یعنی A عددی طبیعی است.
ادامهٔ راه حل مانند راه حل اول است و تنها کافی است قرار دهیم $n=۲^t-۱$ که t فرد است.

۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ($BA = BC$) نقطهٔ P روی ارتفاع رأس B به طور دلخواه انتخاب شده است. فرض کنید دایرهٔ APB خط AC را برای بار دوم در M قطع می‌کند. قرینهٔ M نسبت به وسط AC را N می‌نامیم. خط NP دایرهٔ APB را در نقطهٔ X ($X \neq P$) و خط AB دایرهٔ APN را در نقطهٔ Y ($Y \neq A$) قطع می‌کند. مماس در A بر دایرهٔ APN، در نقطهٔ Z با خط BP برخورد می‌کند. ثابت کنید که CZ بر دایره محیطی مثلث PXY مماس است.

راه حل.

محل برخورد خطوط CZ و AB را Q می‌نامیم. ابتدا نشان می‌دهیم چهارضلعی $PQXY$ محاطی است. دقت کنید که $\angle PYQ = \angle PNA$ پس اگر ثابت کنیم $\angle PNA = \angle QXP$ آنگاه محاطی بودن چهارضلعی $PQXY$ نتیجه می‌شود. این نیز معادل است با توازی XQ و AN.



برای اثبات این توازی از نقطهٔ R کمک می‌گیریم که محل تقاطع AZ و BC است. می‌توان نوشت

$$\angle RAP = \angle PNA = \angle PMN = \angle PBA = \angle PBR$$

پس R نیز روی دایره محیطی مثلث APB قرار دارد. به وضوح $QR \parallel AC$ پس تنها باید نشان دهیم خط RQ از X می‌گذرد. توجه کنید که

$$\angle QRA = \angle RAN = \angle XPA = \angle XRA.$$

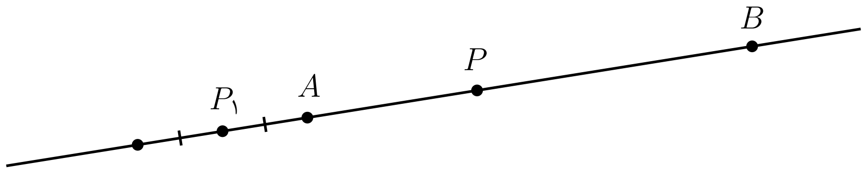
این تساوی هم‌خطی نقاط R، Q و X را نتیجه می‌دهد پس محاطی بودن $PQXY$ ثابت شد. دقت کنید که نقاط C، N و Q قرینهٔ نقاط A، M و R نسبت به خط BP هستند و از آنجا که پنج ضلعی $BRPMA$

محاطی است، $BQPNC$ نیز محاطی است. در نتیجه

$$\angle CQP = \angle PNA = \angle PXQ$$

و این یعنی CZ بر دایره محیطی PXY مماس است.

۱. روی خطی دو نقطه‌ی متمایز A و B قرار دارند. یکی از نقاط روی پاره‌خط AB، به غیر از نقاط A، B و وسط پاره‌خط AB، را قرمز می‌کنیم. در هر مرحله یک نقطه‌ی قرمز را نسبت به یکی از نقاط A و B قرینه می‌کنیم، سپس فاصله‌ی نقطه‌ی جدید تا همان نقطه را نصف می‌کنیم و نقطه‌ی حاصل را قرمز می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر اگر P یک نقطه‌ی قرمز باشد می‌توانیم P را نسبت به A قرینه کنیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی حاصل تا A را نصف کنیم تا به نقطه‌ی $P_۱$ برسیم و آن را قرمز کنیم.



آیا ممکن است پس از متناهی مرحله نقطه‌ی وسط AB قرمز شود؟

۲. عدد طبیعی n را خوب می‌نامیم اگر رقم صفر نداشته باشد و بتوانیم یکی از ارقامش را حذف کنیم به طوری که عدد حاصل مقسوم علیه n شود. برای مثال ۲۵ یک عدد خوب است زیرا اگر رقم ۲ را حذف کنیم عدد حاصل برابر با ۵ می‌شود که مقسوم علیه ۲۵ است. ثابت کنید تعداد اعداد خوب متناهی است.

۳. چهارضلعی محیطی $ABCD$ با دایره محاطی ω مفروض است. ω در نقاط E و F بر BC و AD مماس است و DE برای بار دوم ω را در X قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث DXF بر خطوط AB و CD مماس باشد، ثابت کنید چهارضلعی $AFXC$ محاطی است.

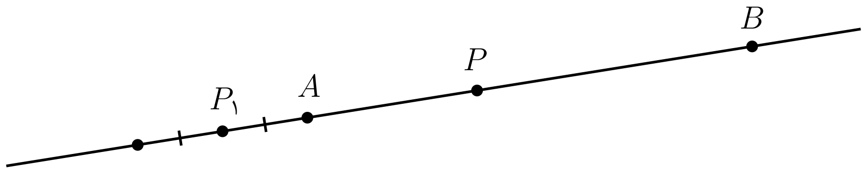
۴. n نقطه روی محیط دایره‌ی ω قرار دارند. می‌دانیم دایره‌ای با شعاع کم‌تر از ω وجود دارد که همه‌ی n نقطه داخل یا روی آن باشند. ثابت کنید قطری از ω وجود دارد که دو سر آن جزء نقاط نباشند و همه‌ی نقاط در یک سمت آن قرار گیرند.

۵. ۱۴۰۰ عدد حقیقی داده شده‌اند. ثابت کنید حداقل سه‌تا از این اعداد مانند x، y و z وجود دارند که

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^۴+y^۴+z^۴+۱}\right| < \frac{۹}{۱۰۰۰}$$

۶. آیا چینشی از ۱۴۰۰ عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) دور دایره وجود دارد به طوری که حداقل یکی از اعداد ۲۰۲۱ باشد و هر عدد برابر با مجموع ب.م.م دو عدد بعدی و ب.م.م دو عدد قبلی خود باشد؟ برای مثال اگر a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند باید داشته باشیم $c = (a, b) + (d, e)$.

۱. روی خطی دو نقطه‌ی متمایز A و B قرار دارند. یکی از نقاط روی پاره‌خط AB، به غیر از نقاط A، B و وسط پاره‌خط AB، را قرمز می‌کنیم. در هر مرحله یک نقطه‌ی قرمز را نسبت به یکی از نقاط A و B قرینه می‌کنیم، سپس فاصله‌ی نقطه‌ی جدید تا همان نقطه را نصف می‌کنیم و نقطه‌ی حاصل را قرمز می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر اگر P یک نقطه‌ی قرمز باشد می‌توانیم P را نسبت به A قرینه کنیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی حاصل تا A را نصف کنیم تا به نقطه‌ی $P_۱$ برسیم و آن را قرمز کنیم.



آیا ممکن است پس از متناهی مرحله نقطه‌ی وسط AB قرمز شود؟

راه حل.

خط داده شده را محور اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم به طوری که A منطبق بر صفر و B منطبق بر ۲ باشد. فرض کنید پس از متناهی مرحله نقطه‌ی ۱ قرمز شود. دقت کنید عمل عکسِ عمل تعریف‌شده در صورت مسئله به این شکل است: یکی از دو نقطه‌ی A و B را نسبت به یکی از نقاط قرمز قرینه می‌کنیم، سپس نقطه‌ی حاصل را نسبت به همان نقطه قرینه می‌کنیم. نقطه‌ی حاصل نیز باید یک نقطه‌ی قرمز باشد. پس اگر نقطه‌ی x قرمز شده باشد طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل باید یکی از نقاط $-۲x$ و $۲x-۶$ قرمز شده باشند. از آنجا که ۱ قرمز شده است در مرحله‌ی قبل یکی از نقاط -۲ و ۴ قرمز شده‌اند. حال نشان می‌دهیم اگر نقطه‌ی $x_۱ \in (-\infty, -۲] \cup [۴, \infty)$ قرمز باشد نقاطی که در مراحل قبل از آن قرمز شده‌اند نیز همه باید در همین بازه قرار داشته باشند. طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل از قرمز شدن $x_۱$ یکی از دو نقطه‌ی $-۲x_۱$ و $۲x_۱-۶$ قرمز شده‌اند. حال دقت کنید که

$$۶-۲x_۱ \le -۲ \quad \text{یا} \quad ۱۰ \le ۶-۲x_۱ \qquad \text{و} \qquad -۲x_۱ \le -۸ \quad \text{یا} \quad ۴ \le -۲x_۱$$

پس $-۲x_۱$ و $۲x_۱-۶$ نیز هر دو در بازه‌ی $(-\infty, -۲] \cup [۴, \infty)$ قرار دارند. در نتیجه هیچ‌گاه نمی‌توانیم از این بازه خارج شویم که با انتخاب اولین نقطه‌ی قرمز در تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و نقطه‌ی وسط AB پس از متناهی مرحله نمی‌تواند قرمز شود.

۲. عدد طبیعی n را خوب می‌نامیم اگر رقم صفر نداشته باشد و بتوانیم یکی از ارقامش را حذف کنیم به طوری که عدد حاصل مقسوم علیه n شود. برای مثال ۲۵ یک عدد خوب است زیرا اگر رقم ۲ را حذف کنیم عدد حاصل برابر با ۵ می‌شود که مقسوم علیه ۲۵ است. ثابت کنید تعداد اعداد خوب متناهی است.

راه حل.

فرض کنید n یک عدد خوب باشد. ارقام عدد طبیعی n را به شکل $\overline{abc}$ نشان می‌دهیم که b تنها یک رقم است که با حذف آن به یک مقسوم علیه n می‌رسیم اما a و c ممکن است از چند رقم تشکیل شده باشند. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $a \neq ۰$. همچنین فرض کنید b از سمت راست رقم tاُم n باشد. پس در واقع داریم $n = ۱۰^t a + ۱۰^{t-۱} b + c$ و اگر رقم b را حذف کنیم به عدد $۱۰^{t-۱} a + c$ می‌رسیم. در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l} ۱۰^{t-۱}a + c \mid ۱۰^t a + ۱۰^{t-۱} b + c \\ ۱۰^{t-۱}a + c \mid ۱۰^t a + ۱۰ c \end{array}\right\} \Longrightarrow ۱۰^{t-۱}a + c \mid ۱۰^{t-۱} b - ۹c$$

دقت کنید که $|۱۰^{t-۱}b - ۹c|$ حداکثر t رقم دارد. حال اگر a حداقل دو رقم داشته باشد، $۱۰^{t-۱}a + c$ حداقل $t + ۱$ رقم دارد پس تنها حالت ممکن این است که $۱۰^{t-۱}b - ۹c$ برابر با صفر باشد. این نیز نتیجه می‌دهد $۱۰^{t-۱} \mid c$ که امکان ندارد زیرا $c < ۱۰^{t-۱}$. در نتیجه a باید یک رقم داشته باشد. توجه کنید که

$$۲۰\left(۱۰^{t-۱}a + c\right) = ۲ \times ۱۰^t a + ۲۰ c > ۱۰^t a + ۱۰^{t-۱} b + c$$

پس اگر قرار دهیم $۱۰^t a + ۱۰^{t-۱} b + c = k\left(۱۰^{t-۱}a + c\right)$، نتیجه می‌شود $k < ۲۰$. از طرف دیگر می‌توان نوشت

$$۱۰^{t-۱}\left((۱۰ - k)a + b\right) = c(k - ۱) \Longrightarrow ۱۰^{t-۱} \mid c(k - ۱)$$

از آنجا که n رقم صفر ندارد c نسبت به حداقل یکی از دو عدد $۲^{t-۱}$ و $۵^{t-۱}$ اول است. اگر $(c, ۲^{t-۱}) = ۱$ آنگاه طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

$$۲^{t-۱} \mid k - ۱ \Longrightarrow ۲^{t-۱} \leq k - ۱ < ۱۹ \Longrightarrow t \leq ۵$$

حالتی که $(c, ۵^{t-۱}) = ۱$ نیز به طور مشابه نتیجه می‌دهد $t \leq ۲$ پس n حداکثر ۶ رقمی است. حال به سراغ حالت $a = ۰$ می‌رویم. در این حالت داریم $n = ۱۰^{t-۱} b + c$ و با حذف b به عدد c می‌رسیم. در نتیجه

$$c \mid ۱۰^{t-۱} b + c \Longrightarrow c \mid ۱۰^{t-۱} b$$

مشابه قبل دو حالت برای c داریم. اگر $(c, ۲^{t-۱}) = ۱$ طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

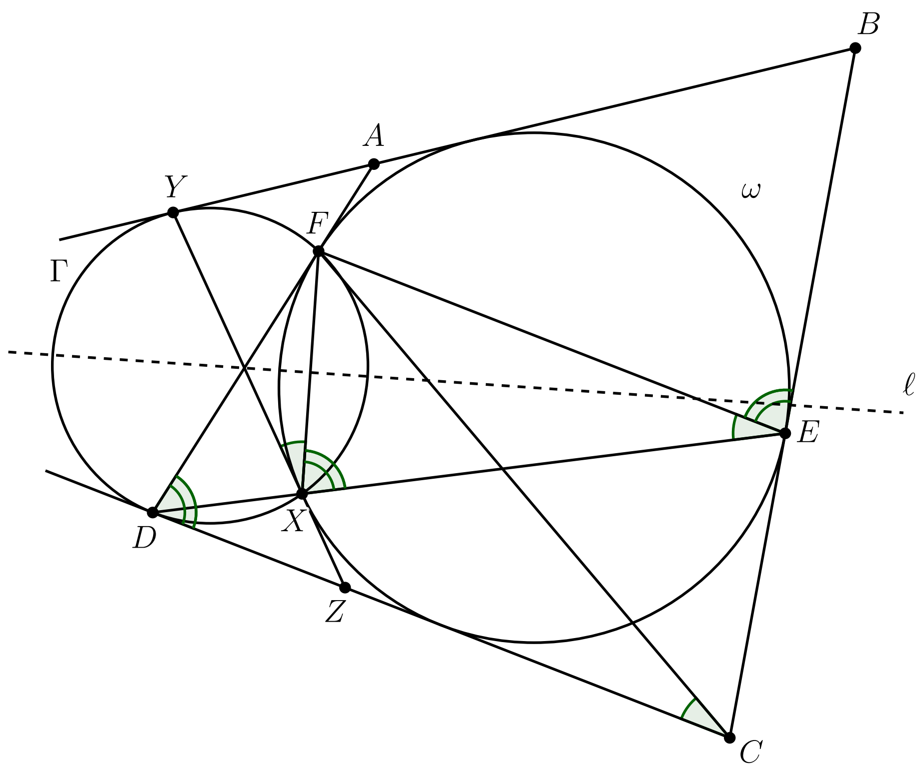
$$c \mid ۵^{t-۱} b \Longrightarrow ۱۰^{t-۲} \leq c \leq ۵^{t-۱} b \leq ۵^{t-۱} \times ۹ \Longrightarrow ۲^{t-۲} \leq ۴۵ \Longrightarrow t \leq ۷$$

برای حالت $(c, 5^{t-1}) = 1$ نیز مشابهاً نتیجه می‌شود $t \leq 3$ پس n حداکثر ۷ رقم دارد و تعداد اعداد خوب متناهی است.

۳. چهارضلعی محیطی $ABCD$ با دایره محاطی ω مفروض است. ω در نقاط E و F بر BC و AD مماس است و DE برای بار دوم ω را در X قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث DXF بر خطوط AB و CD مماس باشد، ثابت کنید چهارضلعی $AFXC$ محاطی است.

راه حل.

دایره محیطی مثلث DXF را Γ و عمودمنصف FX را ℓ می‌نامیم. دقت کنید که خطوط AB و CD مماس مشترک‌های خارجی دوایر Γ و ω هستند، پس نسبت به ℓ قرینه یکدیگرند. فرض کنید AB در Y بر Γ مماس باشد و Z قرینه A نسبت به ℓ باشد. اگر خط FD را نسبت به ℓ قرینه کنیم به خط XY تبدیل می‌شود پس از آنجا که FD از A می‌گذرد، XY نیز از Z می‌گذرد.



واضح است که چهارضلعی $AFXZ$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است پس چهار نقطه A، F، X و Z روی یک دایره قرار دارند و اگر نشان دهیم دایره محیطی مثلث FXZ از C می‌گذرد حکم ثابت می‌شود. دقت کنید که

$$\angle BEF = \angle FXE = \frac{\widehat{FXD}}{۲} = \angle FDC$$

پس چهارضلعی $FECD$ محاطی است. در نتیجه

$$\angle FCZ = \angle FCD = \angle FED = \angle FEX = \angle FXY = ۱۸۰^\circ - \angle FXZ$$

که محاطی بودن چهارضلعی $FXZC$ را نشان می‌دهد و حکم نتیجه می‌شود.

۴. n نقطه روی محیط دایره‌ی ω قرار دارند. می‌دانیم دایره‌ای با شعاع کم‌تر از ω وجود دارد که همه‌ی n نقطه داخل یا روی آن باشند. ثابت کنید قطری از ω وجود دارد که دو سر آن جزء نقاط نباشند و همه‌ی نقاط در یک سمت آن قرار گیرند.

راه حل.

فرض کنید O مرکز ω و O' مرکز دایره‌ی با شعاع کم‌تر باشد. از O خطی عمود بر OO' رسم می‌کنیم تا ω را در A و B قطع کند. نشان می‌دهیم AB قطر مورد نظر است. فرض کنید نقطه‌ی P طرف دیگر AB نسبت به O' یا روی آن قرار داشته باشد. واضح است که $\angle POO' \geq ۹۰^\circ$ در نتیجه $PO' > PO$. پس P نمی‌تواند یکی از n نقطه باشد زیرا فاصله‌ی هر یک از این نقاط از O' کم‌تر از فاصله‌ی آن از O است. این نتیجه می‌دهد همه‌ی نقاط همان طرف AB قرار دارند که O' قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

۵. ۱۴۰۰ عدد حقیقی داده شده‌اند. ثابت کنید حداقل سه‌تا از این اعداد مانند x، y و z وجود دارند که

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^۴+y^۴+z^۴+۱}\right| < \frac{۹}{۱۰۰۰}$$

راه حل.

قرار دهید $c=\frac{۹}{۱۰۰۰}$ و $n=۱۴۰۰$. فرض خلف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم برای هر سه عدد x، y و z که $x \leq y \leq z$ داشته باشیم

$$(z-y)(y-x)(z-x) \geq c\left(x^۴+y^۴+z^۴+۱\right). \tag{۱}$$

دقت کنید که برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $(a+b)^۲ \geq ۴ab$، زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \geq ۰$ که درستی آن واضح است. حال با استفاده از این نامساوی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}(z-x)^۲ \geq ۴(z-y)(y-x) \Longrightarrow (z-x)^۳ &\geq ۴(z-y)(y-x)(z-x)\\ &\overset{(۱)}{\geq} ۴c\left(x^۴+y^۴+z^۴+۱\right) \qquad (۲)\\ &\geq ۴c\left(x^۴+z^۴+۱\right)\end{aligned}$$

توجه کنید که نامساوی آخر نتیجه می‌دهد

$$z-x \geq \sqrt[۳]{۴c} \tag{۳}$$

همچنین از طرف دیگر طبق (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{(z-x)^۳}{x^۴+z^۴} > ۴c \tag{۴}$$

دقت کنید که $(a+b)^۲ \leq ۲\left(a^۲+b^۲\right)$ زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \geq ۰$. با دو بار استفاده از این نامساوی نتیجه می‌شود

$$(z-x)^۴ \leq ۴\left(x^۲+z^۲\right)^۲ \leq ۸\left(x^۴+z^۴\right) \overset{(۴)}{\Longrightarrow} \frac{۸}{z-x} > ۴c \Longrightarrow z-x < \frac{۲}{c} \tag{۵}$$

حال فرض کنید اعداد داده شده $x_۱ \leq x_۲ \leq \cdots \leq x_n$ باشند. از (۳) نتیجه می‌شود $x_{k+۲}-x_k > \sqrt[۳]{۴c}$ در نتیجه

$$\frac{۲}{c} > x_n - x_۱ > \left\lfloor\frac{n-۱}{۲}\right\rfloor \sqrt[۳]{۴c} \Longrightarrow c < \frac{۲^{\frac{۱}{۴}}}{\left\lfloor\frac{n-۱}{۲}\right\rfloor^{\frac{۳}{۴}}} \approx \frac{۸۷}{۱۰۰۰۰}$$

که تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود.

۶. آیا چینشی از ۱۴۰۰ عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) دور دایره وجود دارد به طوری که حداقل یکی از اعداد ۲۰۲۱ باشد و هر عدد برابر با مجموع ب.م.م دو عدد بعدی و ب.م.م دو عدد قبلی خود باشد؟ برای مثال اگر a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند باید داشته باشیم $c=(a,b)+(d,e)$.

راه حل.

فرض کنید ب.م.م همه اعداد دور دایره برابر با k باشد. در این صورت اگر همه اعداد را بر k تقسیم کنیم چینش جدید نیز خواص مسئله را دارد و تنها تفاوت آن این است که حداقل یکی از اعداد برابر با یکی از مقسوم علیه‌های ۲۰۲۱ است. پس فرض می‌کنیم ب.م.م اعداد دور دایره برابر با ۱ است.

لم ۱. ب.م.م هر سه عدد متوالی برابر با ۱ است.

برهان. فرض کنید a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند و سه عدد a، b و c عامل مشترک p را داشته باشند. از تساوی $c=(a,b)+(d,e)$ نتیجه می‌شود d و e نیز بر p بخش‌پذیرند و به همین ترتیب همه اعداد دور دایره بر p بخش‌پذیر می‌شوند، پس p باید برابر با ۱ باشد و این یعنی ب.م.م هر سه عدد متوالی ۱ است. □

لم ۲. اگر a، b و c سه عدد متوالی دور دایره باشند آنگاه $c>(a,b)$.

برهان. از شرط مسئله و این که ب.م.م همواره عددی مثبت است حکم نتیجه می‌شود. □

فرض کنید m عدد بیشینه بین تمام اعداد دور دایره باشد و x، y، m، z و t به همین ترتیب دور دایره قرار داشته باشند. از آنجا که مجموع دو عدد طبیعی حداقل ۲ است، ۱ نمی‌تواند در بین اعداد دور دایره ظاهر شود. همچنین $m>۴$ است زیرا ۲۰۲۱ بر هیچیک از اعداد ۲، ۳ و ۴ بخش‌پذیر نیست. طبق تساوی $m=(x,y)+(z,t)$ یکی از اعداد (x,y) و (z,t) باید حداقل $\frac{m}{۲}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $(x,y)\geq\frac{m}{۲}$. اگر $x\neq y$ آنگاه یکی از دو عدد حداقل m است و از آنجا که m عدد بیشینه بود باید برابر با m باشد. طبق لم ۲، y نمی‌تواند برابر با m باشد پس باید داشته باشیم $y=\frac{m}{۲}$ و $x=m$. این نیز نتیجه می‌دهد $(z,t)=\frac{m}{۲}$. مشابه قبل z نمی‌تواند برابر با m باشد پس $z=\frac{m}{۲}$. اما از آنجا که y، m و z متوالی هستند طبق لم ۲ به تناقض می‌رسیم. پس فرض $x\neq y$ باطل می‌شود و باید داشته باشیم $x=y\geq\frac{m}{۲}$. حال فرض کنید عدد قبل از x، w باشد. از لم ۱ نتیجه می‌شود $(w,x)=۱$ پس می‌توان نوشت

$$x=(w,x)+(m,z)=۱+(m,z)\Longrightarrow x-۱\mid m$$

اگر m فرد باشد، از آنجا که $\frac{m+۱}{۲}\leq x\leq m$ باید داشته باشیم $\frac{m-۱}{۲}\leq\frac{m}{۳}$ که نتیجه می‌دهد $m\leq ۳$ و این با فرض $m>۴$ در تناقض است. پس m باید زوج باشد و از آنجا که $\frac{m}{۲}\leq x\leq m$ تنها حالت ممکن $x=\frac{m}{۲}+۱$ است. پس $(m,z)=\frac{m}{۲}$ که نتیجه می‌دهد $z=\frac{m}{۲}$. از طرف دیگر داریم

$$m=(x,x)+(z,t)=\frac{m}{۲}+۱+\left(\frac{m}{۲},t\right)\Longrightarrow\frac{m}{۲}-۱\;\Big|\;\frac{m}{۲}\Longrightarrow\frac{m}{۲}-۱\;\Big|\;۱\Longrightarrow m=۴$$

که این نیز با فرض $m>۴$ در تناقض است. پس چنین چینشی وجود ندارد.

۱- فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه A، B و $A \cup B$ در یک دسته باشند آن‌گاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

۲- اعداد حقیقی و مثبت x، y و z با شرط $x + y + z = ۱۳۹۹$ مفروض‌اند. بیش‌ترین مقدار عبارت

$$[x]\, y + [y]z + [z]x$$

چه‌قدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست.)

۳- دایرهٔ ω_1 به مرکز O_1 مفروض است. دایرهٔ ω_2 به مرکز O_2 از نقطهٔ O_1 می‌گذرد و ω_1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر ω_1 مماس است را l می‌نامیم. دایره‌ای که از O_1 و O_2 می‌گذرد و مرکز آن روی l قرار دارد، ω_2 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینهٔ P نسبت به l روی ω_1 قرار دارد.

۴- دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B تقاطع دارند. نقطهٔ X روی $\omega_۱$ و نقطهٔ Y روی $\omega_۲$ قرار دارند به طوری‌که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. قرینهٔ B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D می‌نامیم. ثابت کنید

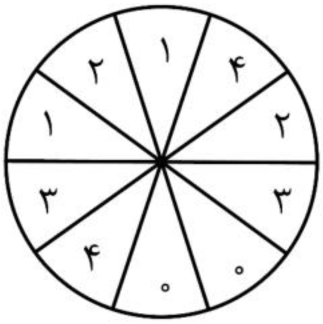
$$\angle CAD < ۹۰^\circ$$

۵- دوتایی (a, b) از اعداد طبیعی را *مربع‌ساز* گوییم هرگاه $ab + ۱$ مربع کامل باشد. تمام nهای طبیعی را بیابید که مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ را بتوان به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

این قسمت محل سرنویس است و نباید در آن چیزی نوشته شود

معاونت دانش

۶- دایره‌ای را به $۲n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد ۰، ۱، ...، $n-۱$ را بنویسیم به طوری‌که



۱. هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.

۲. برای هر عدد طبیعی i که $۰ \leq i \leq n-۱$، بین هر دو قطاع با شمارهٔ i، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

در شکل روبه‌رو این کار برای $n = ۵$ انجام شده است.

ثابت کنید برای $n = ۱۳۹۹$ این کار امکان‌پذیر نیست.

این قسمت محل زیرنویس است و نباید در آن چیزی نوشته شود

۱. فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه A، B و $A \cup B$ در یک دسته باشند آن‌گاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

راه حل.

جواب مسئله، $n + ۱$ است.

ابتدا فرض کنید برای دو مجموعهٔ A و B داشته باشیم $A \subset B$. از آن‌جا که $A \cup B = B$، اگر A و B در یک دسته قرار داشته باشند طبق شرط سوال نتیجه می‌شود $A = B$ که تناقض است. در نتیجه هر دو مجموعهٔ A و B که $A \subset B$، باید در دو دستهٔ مختلف قرار داشته باشند. حال مجموعه‌های $\phi, \{۱\}, \{۱, ۲\}, \dots, \{۱, ۲, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که هیچ دوتایی از این مجموعه‌ها نمی‌توانند در یک دسته قرار داشته باشند زیرا هر دوتایی را در نظر بگیریم یکی زیرمجموعهٔ دیگری است.
ادعا می کنیم می‌توان مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به $n+۱$ دسته با شرط مسئله افراز کرد. دسته‌ها را با شماره‌های $۰, ۱, \dots, n$ نام‌گذاری می‌کنیم. برای هر i طبیعی که $۰ \leq i \leq n$، همهٔ زیرمجموعه‌های i عضوی از S را در دستهٔ i قرار می‌دهیم. واضح است که هر زیرمجموعه از S در حداقل یکی از دسته‌ها قرار می‌گیرد. اگر دو مجموعهٔ متمایز A و B در یک دسته قرار داشته باشند تعداد اعضای یکسانی دارند پس B عضوی دارد که A ندارد و $A \cup B$ حداقل یک عضو بیش‌تر از A دارد. این نتیجه می‌دهد که $A \cup B$ نمی‌تواند در همان دسته قرار داشته باشد پس شرط افراز برقرار است و ادعا ثابت می‌شود.
در نتیجه حداقل مقدار m برابر با $n + ۱$ است.

۲. اعداد حقیقی و مثبت x، y و z با شرط $x+y+z=۱۳۹۹$ مفروض‌اند. بیش‌ترین مقدار عبارت

$$[x]\,y+[y]\,z+[z]\,x \qquad (۱)$$

چه‌قدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست.)

راه حل اول.

جواب مسئله، ۶۵۲۴۰۰ است.
دقت کنید که

$$۳(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^{۲} \qquad (۲)$$

زیرا اگر همهٔ عبارات را به طرف مثبت نامساوی ببریم، می‌توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم:

$$۰\leq\frac{۱}{۲}(x-y)^{۲}+\frac{۱}{۲}(y-z)^{۲}+\frac{۱}{۲}(z-x)^{۲}$$

که درستی آن واضح است. همچنین طبق تعریف $[x]$ داریم $[x]\leq x$، در نتیجه

$$[x]\,y+[y]\,z+[z]\,x\leq xy+yz+zx\overset{(۲)}{\leq}\frac{(x+y+z)^{۲}}{۳}=۶۵۲۴۰۰+\frac{۱}{۳} \qquad (۳)$$

فرض کنید حداقل یکی از اعداد x، y و z صحیح نباشد. از آن‌جا که $x+y+z$ صحیح است مجموع جزء اعشاری x، y و z حداقل ۱ است پس جز اعشاری یکی از آن‌ها حداقل $\frac{۱}{۳}$ است. این نتیجه می‌دهد که

$$[x]\,y+[y]\,z+[z]\,x\leq۶۵۲۴۰۰+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}=۶۵۲۴۰۰$$

اگر x، y و z هر سه اعداد صحیح باشند نیز طبق (۳) داریم

$$[x]\,y+[y]\,z+[z]\,x\leq\left[۶۵۲۴۰۰+\frac{۱}{۳}\right]=۶۵۲۴۰۰$$

از طرف دیگر برای $x=۴۶۶$، $y=۴۶۶$ و $z=۴۶۷$ مقدار (۱) برابر با ۶۵۲۴۰۰ می‌شود پس بیش‌ترین مقدار آن ۶۵۲۴۰۰ است.

راه حل دوم.
برای هر x مثبت می‌توانیم بنویسیم $x = [x] + \{x\}$ که $\{x\}$ جزء اعشاری x است. فرض کنید حداقل یکی از اعداد x، y و z صحیح نباشد. طبق تعریف $[x]$ واضح است که $0 \leq \{x\} < 1$. از آن‌جا که $x+y+z$ صحیح است مجموع جزء اعشاری x، y و z باید ۱ یا ۲ باشد. (زیرا عددی طبیعی و کم‌تر از ۳ است.) رابطهٔ (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$f(x,y,z) = [x][y] + [y][z] + [z][x] + [x]\{y\} + [y]\{z\} + [z]\{x\}$$

بدون کاسته‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد x بیش‌ترین مقدار را بین سه متغیر دارد. حال تعریف می‌کنیم

$$a = [x], \quad b = [y], \quad c = [z] + \{x\} + \{y\} + \{z\}$$

دقت کنید a، b و c سه عدد صحیح هستند به طوری‌که $a + b + c = 1399$. با حالت‌بندی روی مقدار $\{x\} + \{y\} + \{z\}$ نشان می‌دهیم $f(x,y,z) \leq f(a,b,c)$.

حالت اول. $\{x\} + \{y\} + \{z\} = 1$.
پس $c = [z] + 1$. این نتیجه می‌دهد که

$$f(a,b,c) = [x][y] + [y][z] + [z][x] + [x] + [y] \tag{۴}$$

از طرف دیگر داریم

$$[x]\{y\} + [y]\{z\} + [z]\{x\} \leq [x]\big(\underbrace{\{y\} + \{z\} + \{x\}}_{=1}\big) \leq [x] + [y]$$
$$\Longrightarrow f(x,y,z) \leq [x][y] + [y][z] + [z][x] + [x] + [y] \overset{(۴)}{=} f(a,b,c)$$

حالت دوم. $\{x\} + \{y\} + \{z\} = 2$.
اثبات مشابه حالت قبل است. دقت کنید که $c = [z] + 2$ و این نتیجه می‌دهد

$$f(a,b,c) = [x][y] + [y][z] + [z][x] + 2[x] + 2[y] \tag{۵}$$

از طرف دیگر داریم

$$[x]\{y\} + [y]\{z\} + [z]\{x\} \leq [x]\big(\underbrace{\{y\} + \{z\} + \{x\}}_{=2}\big) \leq 2[x] + 2[y]$$
$$\Longrightarrow f(x,y,z) \leq [x][y] + [y][z] + [z][x] + 2[x] + 2[y] \overset{(۵)}{=} f(a,b,c)$$

پس در هر دو حالت ادعا ثابت می‌شود. در نتیجه برای یافتن بیش‌ترین مقدار (۱) می‌توانیم فرض کنیم x،

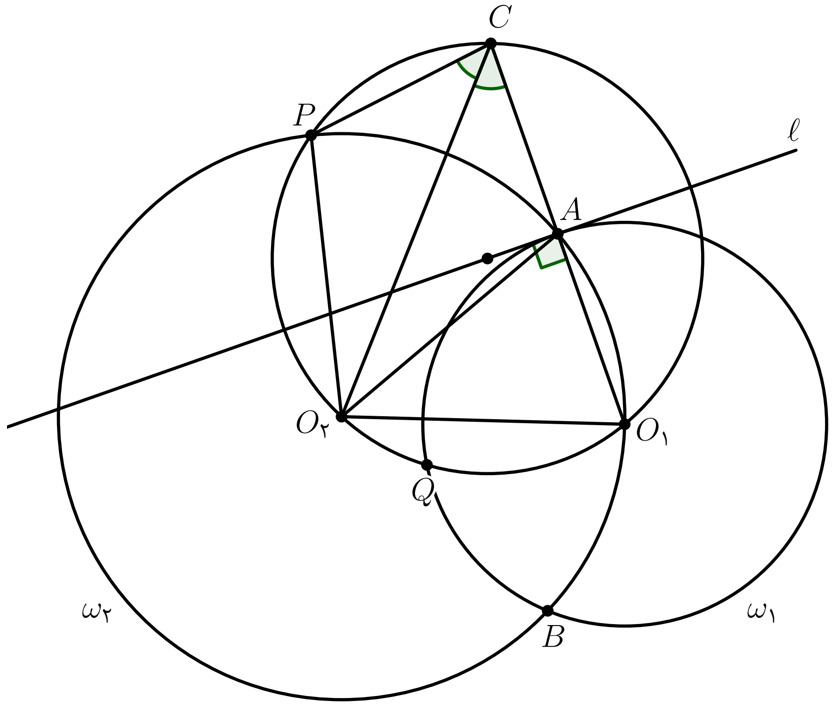
y و z اعدادی صحیح هستند. اگر $x-y\geq ۲$، به‌دست می‌آید

$$f(x-۱,y+۱,z)=(x-۱)(y+۱)+(y+۱)z+z(x-۱)=xy+x-y-۱+yz+zx$$

که از $f(x,y,z)$ بزرگ‌تر است. پس بیش‌ترین مقدار زمانی اتفاق می‌افتد که اختلاف هر دو متغیر حداکثر ۱ باشد. به سادگی می‌توان دید که تنها حالت ممکن $x=۴۶۷$، $y=۴۶۶$ و $z=۴۶۶$ و جایگشت‌های آن است در نتیجه بیش‌ترین مقدار برابر با ۶۵۲۴۰۰ است.

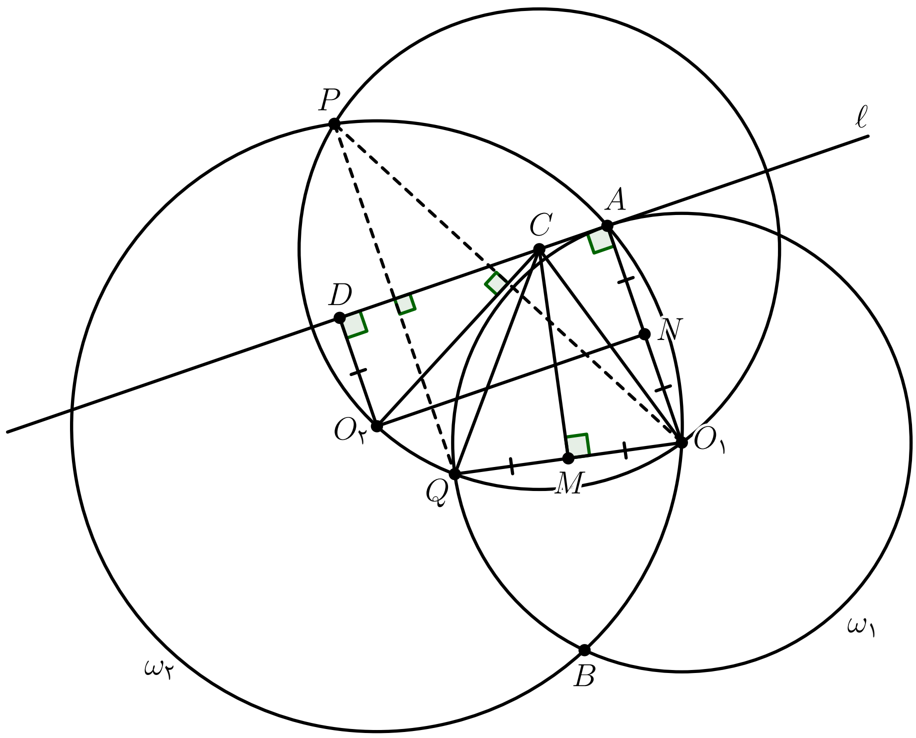
۳. دایرهٔ ω_1 به مرکز O_1 مفروض است. دایرهٔ ω_2 به مرکز O_2 از نقطهٔ O_1 می‌گذرد و ω_1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر ω_1 مماس است را ℓ می‌نامیم. دایره‌ای که از O_1 و O_2 می‌گذرد و مرکز آن روی ℓ قرار دارد، ω_2 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینهٔ P نسبت به ℓ روی ω_1 قرار دارد.

راه حل اول.



قرینهٔ نقاط P و O_1 نسبت به خط ℓ را Q و C می‌نامیم. از آن‌جا که $\ell \perp AO_1$، C روی AO_1 قرار دارد همچنین C روی دایرهٔ محیطی PO_2O_1 قرار دارد زیرا خط ℓ از مرکز آن می‌گذرد. اگر نشان دهیم $CA = CP$ آن‌گاه نتیجه می‌شود $O_1A = O_1Q$ که همان حکم سوال است. از آن‌جا که $O_2P = O_2O_1$ نتیجه می‌شود $\angle PCO_2 = \angle O_1CO_2$. دایرهٔ محیطی مثلث PCA را ω می‌نامیم. نقطهٔ O_2 از یک طرف روی نیمساز $\angle PCA$ و از طرف دیگر روی عمودمنصف PA قرار دارد، اگر $CA \neq CP$ آن‌گاه O_2 باید وسط کمان $\widehat{PA}$ از ω (کمانی که شامل راس C نیست) باشد یعنی چهارضلعی CPO_2A محاطی است که امکان ندارد زیرا A وسط CO_1 است و داخل دایرهٔ محیطی CPO_2 قرار دارد. پس فرض خلف غلط بوده و باید داشته باشیم $CP = CA$ که حکم را نتیجه می‌دهد.

راه حل دوم.



قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط ℓ را Q و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PO_1O_2 را C می‌نامیم. طبق شرط سوال خط ℓ از C می‌گذرد پس Q روی دایرهٔ محیطی مثلث PO_1O_2 قرار دارد زیرا عمودمنصف پاره‌خط PQ از C می‌گذرد. پای عمود وارد از O_2 بر ℓ را D و پای عمود وارد از C بر O_1Q را M می‌نامیم. دقت کنید که M وسط QO_1 و CM نیم‌ساز $\angle QCO_1$ است. از آن‌جا که $CO_1 = CP$ و $O_2O_1 = O_2P$ نتیجه می‌شود CO_2 عمودمنصف پاره‌خط PO_1 است. پس $CO_2 \perp PO_1$ و $CD \perp PQ$ که نتیجه می‌دهد

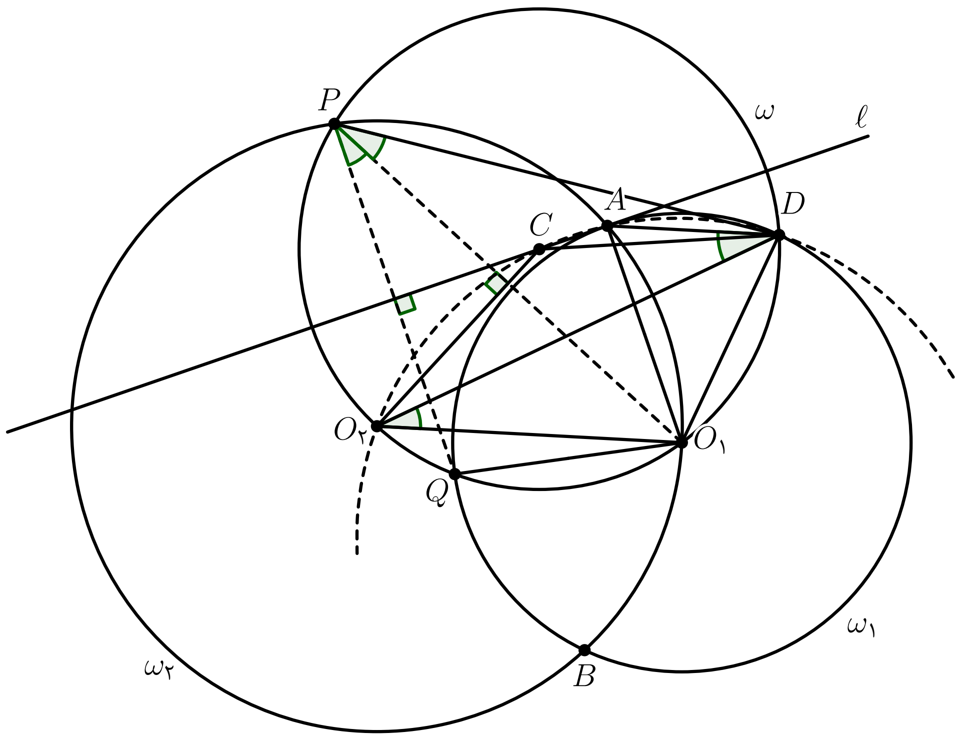
$$\angle DCO_2 = \angle QPO_1 = \frac{1}{2}\angle QCO_1 = \angle MCO_1$$

پس دو مثلث MCO_1 و DCO_2 متشابه هستند و از آن‌جا که $CO_1 = CO_2$ این دو مثلث همنهشت نیز هستند، در نتیجه $DO_2 = MO_1$. پای عمود وارد از O_2 بر AO_1 را N می‌نامیم. دقت کنید که N وسط AO_1 است زیرا مثلث AO_2O_1 متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر واضح است که چهارضلعی $DANO_2$ مستطیل است پس

$$\frac{1}{2}AO_1 = AN = DO_2 = MO_1 = \frac{1}{2}QO_1 \implies AO_1 = QO_1$$

که نتیجه می‌دهد Q روی ω_1 قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

راه حل سوم.



دایره‌ای که از $O_۱$ و $O_۲$ می‌گذرد و مرکز آن روی ℓ قرار دارد را ω می‌نامیم. از A خطی موازی با $O_۱O_۲$ رسم می‌کنیم تا $\omega_۱$ را در نقطهٔ D قطع کند، سپس دایرهٔ محیطی مثلث $ADO_۲$ را رسم می‌کنیم تا ℓ را برای بار دوم در C قطع کند. ادعا می‌کنیم که C مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $DO_۱O_۲$ است. از توازی AD و $O_۱O_۲$ و تساوی $O_۲A = O_۲O_۱$ نتیجه می‌شود

$$\angle DAO_۱ = \angle AO_۱O_۲ = \angle O_۲AO_۱ \quad (۱)$$

پس $AO_۱$ نیم‌ساز $\angle O_۲AD$ است و از آن‌جا که $AO_۱ \perp \ell$ نتیجه می‌شود ℓ نیم‌ساز خارجی $\angle O_۲AD$ است پس C باید وسط کمان $\overset{\frown}{O_۲AD}$ باشد. از این هم نتیجه می‌شود $CD = CO_۲$. حال اگر نشان دهیم $\angle O_۲CD = ۳۶۰^\circ - ۲\angle O_۲O_۱D$ ادعا ثابت می‌شود. دقت کنید که

$$\angle O_۲CD = \angle O_۲AD = \angle DAO_۱ + \angle O_۲AO_۱ \overset{(۱)}{=} ۲\angle DAO_۱ \quad (۲)$$

و

$$\angle O_۲O_۱D = \angle O_۲O_۱A + \angle AO_۱D = \angle DAO_۱ + ۱۸۰^\circ - ۲\angle DAO_۱ = ۱۸۰^\circ - \angle DAO_۱ \quad (۳)$$

از دو تساوی (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $\angle O_۲CD = ۳۶۰^\circ - ۲\angle O_۲O_۱D$ و ادعا ثابت می‌شود. از آن‌جا که $CO_۱ = CO_۲$ و C روی ℓ قرار دارد، C باید مرکز ω باشد و این یعنی D نیز روی ω قرار دارد. قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط ℓ را Q می‌نامیم. مانند راه حل دوم نتیجه می‌شود Q روی ω قرار دارد، همچنین

$PO_۱ \perp CO_۲$ و $PQ \perp CA$. پس داریم

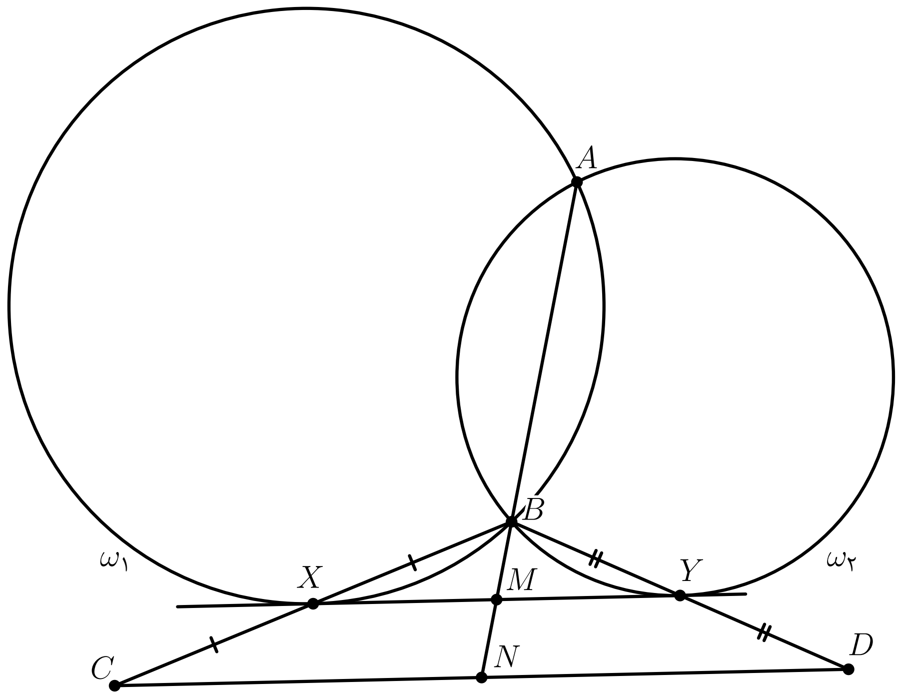
$$\angle QPO_۱ = ۱۸۰^\circ - \angle ACO_۲ = \angle ADO_۲ = \angle DO_۲O_۱ = \angle DPO_۱$$

این تساوی نتیجه می‌دهد $O_۱D = O_۱Q$ پس Q روی $\omega_۱$ قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

۴. دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B تقاطع دارند. نقطهٔ X روی $\omega_۱$ و نقطهٔ Y روی $\omega_۲$ قرار دارد طوری‌که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. اگر قرینهٔ B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D بنامیم، ثابت کنید

$$\angle CAD < ۹۰^\circ$$

راه حل.



فرض کنید خط AB خطوط XY و CD را به ترتیب در M و N قطع کند. طبق قوت M نسبت به $\omega_۱$ و $\omega_۲$ داریم

$$MX^۲ = MB \cdot MA = MY^۲ \implies MX = MY$$

از طرف دیگر طبق عکس قضیهٔ تالس داریم $XY \parallel CD$. از آن‌جا که M وسط پاره‌خط XY است طبق قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود N نیز وسط پاره‌خط CD است. برای نشان دادن $\angle CAD < ۹۰^\circ$ کافی است ثابت کنیم نقطهٔ A خارج از دایرهٔ به قطر CD قرار دارد یا معادلاً $NA > NC$. از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$NA = NM + MA = MB + MA, \quad NC = ۲MX$$

پس باید نشان دهیم $MB + MA > ۲MX$. با استفاده از قوت M نسبت به دایرهٔ $\omega_۱$ و نامساوی حسابی-هندسی داریم

$$MX^۲ = MB \cdot MA \leq \left(\frac{MB + MA}{۲}\right)^۲ \implies MB + MA \geq ۲MX$$

دقت کنید که تساوی نامساوی حسابی-هندسی تنها زمانی رخ می‌دهد که $MB = MA$ اما در این‌جا واضح است که $MA > MB$ پس حالت تساوی نمی‌تواند اتفاق بیفتد و حکم ثابت می‌شود.

۵. دوتایی (a,b) از اعداد طبیعی را *مربع‌ساز* گوییم هر گاه $ab+۱$ مربع کامل باشد. تمام nهای طبیعی را بیابید که مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۲n\}$ را بتوان به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

راه حل.

جواب مسئله، nهای زوج است.

ابتدا نشان می‌دهیم اگر n زوج باشد می‌توان مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۲n\}$ را به جفت‌های مربع‌ساز افراز کرد.
فرض می‌کنیم $n=۲m$. اکنون برای هر عدد صحیح $۰\le k\le m-۱$، دو زوج $(۴k+۲,۴k+۴)$ و $(۴k+۱,۴k+۳)$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ این زوج‌ها، اعداد $\{۱,۲,\dots,۲n\}$ را افراز می‌کنند و هر زوج نیز مربع‌ساز است زیرا

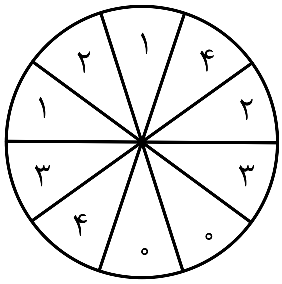
$$(۴k+۲)(۴k+۴)+۱=(۴k+۳)^۲,\quad (۴k+۱)(۴k+۳)+۱=(۴k+۲)^۲$$

حال نشان می‌دهیم اگر n فرد باشد نمی‌توان مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۲n\}$ را به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.
فرض کنید a عددی باشد که باقی‌ماندهٔ آن بر ۴ برابر با ۲ باشد. در این صورت اگر (a,b) یک دوتایی مربع‌ساز باشد، عدد صحیح c وجود دارد که $ab+۱=c^۲$. از آن‌جا که a زوج است پس c فرد است. مثلاً فرض کنید $c=۲d+۱$ که d عددی صحیح است. در نتیجه

$$ab=c^۲-۱=(۲d+۱)^۲-۱=۴d^۲+۴d=۴d(d+۱)$$

از آن‌جا که عدد $d(d+۱)$ همواره زوج است پس ab بر ۸ بخش‌پذیر است و چون a تنها یک عامل ۲ دارد، b باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد.
بنابراین نشان دادیم که اعدادی که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند تنها با اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیرند، می‌توانند دوتایی مربع‌ساز تشکیل دهند. حال فرض می‌کنیم $n=۲m+۱$. توجه کنید که در بین اعداد $\{۱,۲,\dots,۲n\}$ تعداد $m+۱$ عدد هستند که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند در حالی‌که تعداد m عدد هستند که بر ۴ بخش‌پذیرند. بنابراین نمی‌توان مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۲n\}$ را به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

۶. دایره‌ای را به $2n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد 0، 1، $\dots$، $n-1$ را بنویسیم به طوری‌که

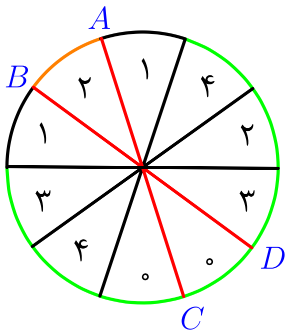


- هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.
- برای هر عدد طبیعی i که $0 \leq i \leq n-1$، بین هر دو قطاع با شمارهٔ i، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

در شکل روبه‌رو این کار برای $n=5$ انجام شده است.
ثابت کنید برای $n = 1399$ این کار امکان‌پذیر نیست.

راه حل اول.

فرض می‌کنیم این کار امکان‌پذیر باشد (برهان خلف) و یک حالت مطلوب را در نظر می‌گیریم. یک قطر از دایره را i-خوب می‌نامیم اگر دو قطاع با شمارهٔ i در دو طرف آن قطر قرار داشته باشند. ابتدا برای هر عدد طبیعی i که $0 \leq i \leq 1398$، تعداد قطرهای i-خوب را محاسبه می‌کنیم.



به عنوان مثال در شکل مقابل دو قطر AC و BD ۱-خوب هستند و هر قطر دیگری را در نظر بگیریم، دو قطاع با شمارهٔ ۱ در یک طرف آن قطر قرار می‌گیرند. دقت کنید که بین هر دو قطاع با شمارهٔ i دو کمان از دایره وجود دارد و یک قطر i-خوب است اگر و تنها اگر دو سر آن در دو کمان متفاوت قرار داشته باشند. همچنین طبق شرط سوال یکی از این دو کمان شامل دقیقاً i قطاع است. در شکل مقابل کمان‌های سبز و نارنجی نشان‌دهندهٔ دو کمان بین دو قطاع با شمارهٔ ۱ هستند و کمان نارنجی‌رنگ شامل ۱ قطاع است. آن کمانی که شامل i قطاع است را در نظر بگیرید. از آن‌جا که $i < 1399$، هر قطری که یک سرش در این کمان باشد، سر دیگرش در کمان دوم است زیرا در دو طرف هر قطر ۱۳۹۹ قطاع وجود دارد. در نتیجه یک سر همهٔ قطرهای i-خوب در این کمان قرار دارد پس تعداد آن‌ها برابر با $i+1$ است. حال تعداد دوتایی‌های (x, D) که x یک عدد طبیعی از ۱ تا ۱۳۹۸ و D یک قطر x-خوب است را S می‌نامیم. از آن‌جا که برای هر x، $x+1$ قطر x-خوب داریم نتیجه می‌شود

$$S = (0+1) + (1+1) + (2+1) + \cdots + (1398+1) = 1399 \times 700$$

پس S عددی زوج است. از طرف دیگر قطر D را به دلخواه در نظر می‌گیریم. در هر طرف این قطر ۱۳۹۹ قطاع وجود دارد. قطاع‌هایی که شمارهٔ یکسان دارند و در یک طرف D قرار دارند تعداد زوج قطاع را اشغال می‌کنند، پس تعداد فرد قطاع باقی می‌ماند که نظیرشان در طرف دیگر قطر قرار دارد. این نتیجه می‌دهد برای هر قطر D، تعداد xهایی که دو قطاع با شمارهٔ x در دو طرف D قرار دارند فرد است. از آن‌جا که تعداد کل قطرها ۱۳۹۹ و عددی فرد است نتیجه می‌شود S باید فرد باشد که تناقض است. پس فرض خلف غلط بوده و حکم اثبات می‌شود.

نکته. به طور مشابه می‌توان نشان داد که این کار برای nهایی که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۴ برابر با ۲ یا ۳ است امکان‌پذیر نیست. آیا این کار برای همهٔ nهایی که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۰ یا ۱ دارند امکان‌پذیر است؟

راه حل دوم.

مسئله را در حالت کلی و برای عدد طبیعی دلخواه n حل می‌کنیم. فرض کنید برای n حداقل یک حالت که فرض‌های سوال را برآورده کند، وجود داشته باشد. به $2n$ قطاع اعداد ۰ تا $2n-1$ را به طور متوالی نسبت می‌دهیم. فرض کنید برای هر i طبیعی که $0 \le i \le n-1$، به دو قطاع با شمارهٔ i اعداد a_i و b_i را نسبت داده باشیم. از فرض سوال نتیجه می‌شود

$$a_i - b_i \overset{2n}{\equiv} \pm(i+1) \implies a_i - b_i \overset{2}{\equiv} i+1$$

دقت کنید که $a_i + b_i \overset{2}{\equiv} a_i - b_i$ پس داریم

$$i+1 \overset{2}{\equiv} a_i - b_i \overset{2}{\equiv} a_i + b_i \qquad (1)$$

اگر برای همهٔ iهای طبیعی از ۰ تا $n-1$ دو طرف رابطهٔ (۱) را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) \overset{2}{\equiv} \sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i) = \sum_{i=0}^{2n-1} i \\
\implies &\frac{n(n+1)}{2} \overset{2}{\equiv} n(2n-1) \\
\implies &n(n+1) \overset{4}{\equiv} 2n(2n-1) \\
\implies &3n(n-1) \overset{4}{\equiv} 0
\end{aligned}$$

پس باقی‌ماندهٔ n بر ۴ باید برابر با ۰ یا ۱ باشد اما می‌دانیم باقی‌ماندهٔ ۱۳۹۹ بر ۴ برابر با ۳ است که حکم سوال را نتیجه می‌دهد.

۱- فرض کنید سطح داخلی چهار ضلع یک مستطیل از جنس آینه باشد. از یکی از نقاط گوشه‌ای پرتوی نوری به داخل مستطیل تابانده‌ایم. این پرتو بعد از چند بار انعکاس به رأس غیرمجاور رأس اول رسیده است و پیش از آن به هیچ یک از رئوس نرسیده است. ثابت کنید پرتوی نور پیش از این لحظه از مرکز مستطیل گذشته است. (توجه داشته باشید که هر گاه پرتوی نور به ضلعی برخورد می‌کند طوری منعکس می‌شود که زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتابش برابر باشند.)

۲- مثلث ABC متساوی الساقین ($AB = AC$) است و نقطه دلخواه X روی ضلع BC قرار دارد. نقاط Y و Z به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به طوریکه $\angle YXB = \angle ZXC$. از B موازی با YZ رسم می کنیم تا XZ را در T قطع کند. ثابت کنید AT نیمساز زاویهٔ A است.

۳- فرض کنید $n > ۲$. ثابت کنید معادله‌ی زیر جوابی ندارد که در آن $x_۱, \dots, x_n$ اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ باشند.

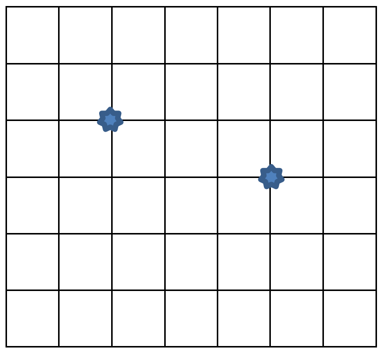
$$(x_۱ \cdots x_n)^۲ = x_۱^۳ + \cdots + x_n^۳$$

۴- دایره‌ای به قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی دایره و دو طرف متفاوت AB قرار دارند. از D موازی با AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند و از C موازی با AD رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. نقاط A، B، C و D به‌گونه‌ای هستند که نقاط E و F درون دایره ایجاد شوند. عمود وارد از E بر AB، BD را در X و عمود وارد از F بر AB، BC را در Y قطع می‌کند.

ثابت کنید اندازهٔ محیط مثلث AXY دو برابر طول پاره‌خط CD است.

۵- چندجمله‌ای $x^{۱۳۹۸} + ۱$ روی تخته نوشته شده است. روزبه و کیوان به نوبت این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا نوبت روزبه است. هر بازی‌کن در نوبت خود یک عدد صحیح $۰ \leq k \leq ۱۳۹۸$ انتخاب می‌کند و چندجمله‌ای روی تخته را با x^k جمع می‌کند. هر بار پس از اینکه کیوان حرکت خود را انجام داد اگر عدد حقیقی x موجود باشد که چندجمله‌ای روی تخته به ازای آن x منفی بشود، روزبه برنده می‌شود و کیوان می‌بازد و بازی تمام می‌شود. در غیر این صورت بازی ادامه می‌یابد. ثابت کنید روزبه هرطور بازی کند کیوان می‌تواند به نحوی بازی کند که هیچ‌گاه نبازد.

۶- جدولی با ۵۶ نقطه در ۷ ردیف ۸ تایی، با فواصل برابر، در نظر بگیرید. دو نقطه از نقاط جدول را به عنوان نقاط قرینه‌ساز مشخص می‌کنیم؛ نقطه‌ای از جدول را در نظر بگیرید و آن را نسبت به یکی از نقاط قرینه‌ساز قرینه کنید. در صورتی که نقطهٔ جدید یکی از نقاط جدول بود این کار را تکرار کنید و این تکرار را ادامه دهید. نقاطی که با این کار به آن‌ها می‌رسیم را در یک دسته قرار می‌دهیم. نقاط قرینه‌ساز را طوری انتخاب کرده‌ایم که تعداد دسته‌ها کم‌ترین مقدار ممکن شود. تعداد دسته‌ها چند تا است؟ (در شکل زیر، ۵۶ نقطه همان تقاطع‌ها هستند و یکی از انتخاب‌های ممکن برای نقاط قرینه‌ساز با دو ستاره مشخص شده است.)



بسمه تعالی

صورت و راه حل سوال‌های مرحله دوم سی و هفتمین المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۸

آزمون مرحله دوم سی و هفتمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۲ و ۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۸ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

دفترچه‌ی پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که سؤالات راه حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد.

با توجه به جنبه‌ی آموزشی این راه حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که بر اساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل خلاصه‌نویسی در این راه حل‌ها نیامده باشند.

۱. فرض کنید سطح داخلی چهار ضلع یک مستطیل از جنس آینه باشد. از یکی از نقاط گوشه‌ای پرتوی نوری به داخل مستطیل تابانده‌ایم. این پرتو بعد از چند بار انعکاس به رأس غیرمجاور رأس اول رسیده است و پیش از آن به هیچ یک از رئوس نرسیده است. ثابت کنید پرتوی نور پیش از این لحظه از مرکز مستطیل گذشته است. (توجه داشته باشید که هر گاه پرتوی نور به ضلعی برخورد می‌کند طوری منعکس می‌شود که زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتابش برابر باشند.)

راه حل:

گزاره ۱) انعکاس یافته‌های یک خط نسبت به اضلاع مستطیل با هم موازی هستند.(چرا؟)
گزاره ۲) انعکاس انعکاس یک خط نسبت به اضلاع مستطیل موازی با آن خط است.(چرا؟)
خطی که پرتو بر روی آن شروع به حرکت می‌کند را a می‌نامیم.
از انعکاس آن نسبت به یکی از اضلاع مستطیل خط b شکل می‌گیرد.
اگر موازی با خط b از دو راس ابتدایی و انتهایی مستطیل خطی بکشیم، این خطوط تماما خارج مستطیل قرار می‌گیرد. چرا که قرینه‌شان نسبت به اضلاع موازی خط a است و داخل مستطیل است.
پس خط انتهایی که از راس مستطیل خارج می‌شود موازی b نیست و موازی a است.
حال فرض کنید پرتو با سرعت ثابت در لحظه t به راس انتهایی برسد. اگر در ابتدا از هر دو راس شروع و پایان پرتویی موازی خط a تابیده می‌شد، طبق تقارن شکل در هر لحظه فاصله طولی و عرضی هر دو پرتو نسبت به مبداهای آن‌ها یکسان است. حال لحظه $t/۲$ را در نظر بگیرید. در این لحظه هر دو پرتو بر روی یک دیگر قرار دارند(چرا؟). و چون فاصله عرضی و طولی یکسانی نسبت به مبداهای خود دارند پس آن نقطه مرکز مستطیل است. پس پرتو از مرکز مستطیل عبور پیدا می کند.

۲. مثلث ABC متساوی الساقین ($AB = AC$) است و نقطه دلخواه X روی ضلع BC قرار دارد. نقاط Y و Z به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به طوریکه $\angle YXB = \angle ZXC$. از B موازی با YZ رسم می کنیم تا XZ را در T قطع کند. ثابت کنید AT نیمساز زاویهٔ A است.

راه حل:

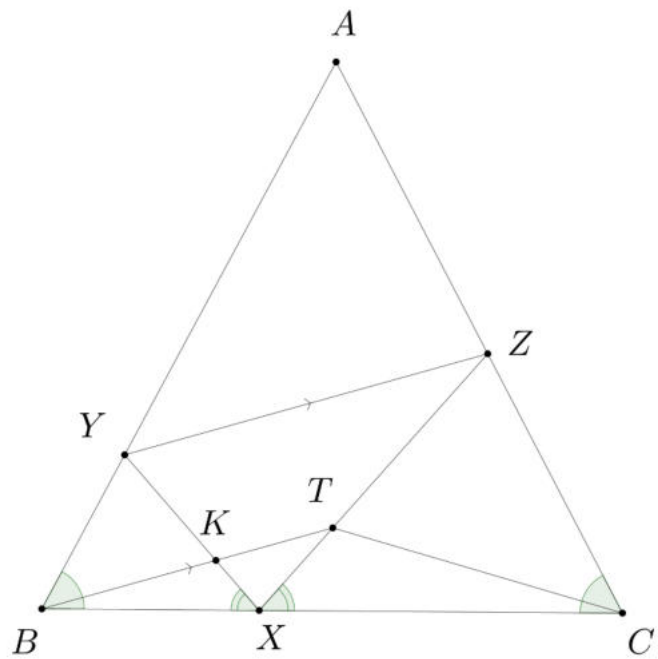
محل برخورد BT و XY را K می نامیم. دقت کنید $\Delta XYB \sim \Delta XZC$. طبق تالس می توان نوشت

$$\frac{XK}{KY} = \frac{XT}{TZ}$$

پس K و T دو نقطه متناظر در دو مثلث متشابه اند در نتیجه

$$\angle TCX = \angle KBX = \angle TBX \Longrightarrow TB = TC$$

پس T روی عمود منصف BC قرار دارد و از آن جا که مثلث متساوی الساقین است عمودمنصف BC و نیمساز $\angle A$ منطبق اند و حکم نتیجه می شود.



۳. فرض کنید $n > ۲$. ثابت کنید معادله‌ی زیر جوابی ندارد که در آن $x_۱, \dots, x_n$ اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ باشند.

$$(x_۱ \cdots x_n)^۲ = x_۱^۳ + \cdots + x_n^۳$$

راه حل:

فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ جوابی از معادله باشد که $x_i > 1$. بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.
دقت کنید از آنجا که سمت چپ بر x_n^2 بخش‌پذیر است پس سمت راست نیز بخش‌پذیر است و در نتیجه

$$x_n^2 \mid x_1^3 + \cdots + x_{n-1}^3$$

پس

$$x_n^2 \le x_1^3 + \cdots + x_{n-1}^3 \qquad (1)$$

از طرفی

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = x_1^3 + \cdots + x_n^3 \le n x_n^3$$

که نتیجه می‌دهد

$$x_n \ge \frac{x_1^2 \cdots x_{n-1}^2}{n}$$

اکنون از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$x_1^3 + \cdots + x_{n-1}^3 \ge \frac{x_1^4 \cdots x_{n-1}^4}{n^2}$$

پس

$$(n-1) x_{n-1}^3 \ge \frac{x_1^4 \cdots x_{n-1}^4}{n^2}$$

که نتیجه می‌دهد

$$x_1^4 \cdots x_{n-2}^4 x_{n-1} \le (n-1) n^2$$

از طرفی چون $x_i \ge 2$ پس نتیجه می‌شود

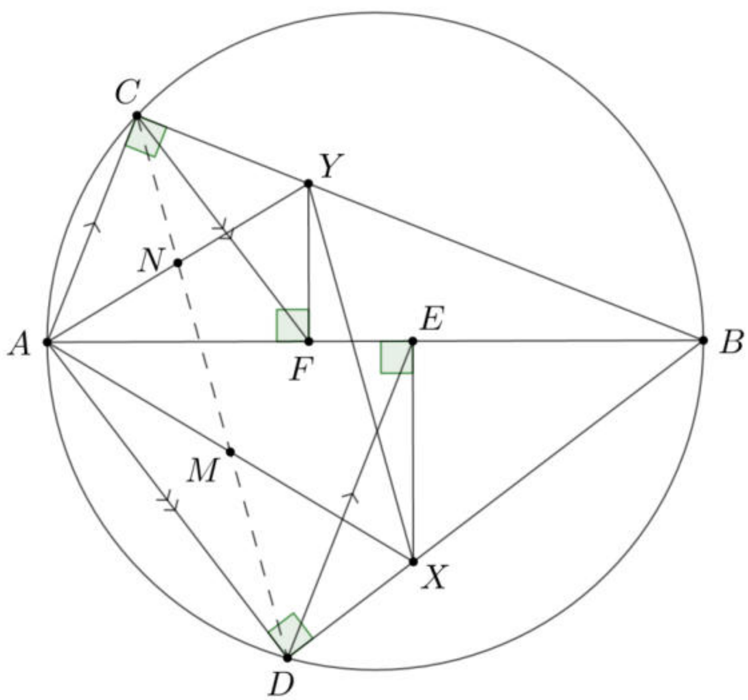
$$2^{4n-7} \le (n-1) n^2$$

ولی این نامساوی برای هر $n > 2$ غلط است. این تناقض حکم مورد نظر مسأله را ثابت می‌کند.

۴. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی دایره و دو طرف متفاوت AB قرار دارند. از D موازی با AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند و از C موازی با AD رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. نقاط A، B، C و D به‌گونه‌ای هستند که نقاط E و F درون دایره ایجاد شوند. عمود وارد از E بر AB، BD را در X و عمود وارد از F بر AB، BC را در Y قطع می‌کند.

ثابت کنید اندازهٔ محیط مثلث AXY دو برابر طول پاره‌خط CD است.

راه حل:



وسط AX را M و وسط AY را N می‌نامیم. از آن‌جا که $\angle ACY = \angle AFY = ۹۰^\circ$ چهار نقطه C, A, F, Y روی یک دایره به قطر AY قرار دارند پس N مرکز آن دایره است. در نتیجه

$$\angle ACN = ۹۰^\circ - \angle CFA = ۹۰^\circ - \angle FAD = \angle ABD = \angle ACD$$

پس N روی CD قرار دارد و به طور مشابه M نیز روی CD قرار دارد. دقت کنید که طبق قضیه تالس $۲MN = XY$ که نتیجه می‌دهد

$$2CD = 2CN + 2NM + 2MD = 2AN + XY + 2AM = AY + XY + AX = (\text{محیط } AXY)$$

که همان حکم سوال است.

۵. چندجمله‌ای $x^{۱۳۹۸}+۱$ روی تخته نوشته شده است. روزبه و کیوان به نوبت این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا نوبت روزبه است. هر بازی‌کن در نوبت خود یک عدد صحیح $۰ \leq k \leq ۱۳۹۸$ انتخاب می‌کند و چندجمله‌ای روی تخته را با x^k جمع می‌کند. هر بار پس از اینکه کیوان حرکت خود را انجام داد اگر عدد حقیقی x موجود باشد که چندجمله‌ای روی تخته به ازای آن x منفی بشود، روزبه برنده می‌شود و کیوان می‌بازد و بازی تمام می‌شود. در غیر این صورت بازی ادامه می‌یابد. ثابت کنید روزبه هرطور بازی کند کیوان می‌تواند به نحوی بازی کند که هیچ‌گاه نبازد.

راه حل:

قرار می‌دهیم $2n=1398$ و بازی‌کن‌ها را A و B می‌نامیم. ثابت می‌کنیم B می‌تواند طوری بازی کند که در هر مرحله یکی از ۱ و x^{2n} را اضافه کند و هیچ‌گاه نبازد.

لم ۱: برای هر $0 \leq k \leq 2n$ صحیح و برای هر x حقیقی، $(1-\frac{k}{2n})+x^k+\frac{k}{2n}x^{2n} \geq 0$.

اثبات لم: برای $x>0$ و نیز برای k زوج واضح است. برای k فرد از نامساوی حسابی-هندسی نتیجه می‌شود.

حال فرض کنید تا کنون t مرحله گذشته است و A جملات $x^{k_1},\ldots,x^{k_t}$ را اضافه کرده است و فرض کنید B تا کنون a بار عدد ۱ و b بار x^{2n} را اضافه کرده است. پس چندجمله‌ای روی تخته برابر است با

$$a+1+\sum_{i=1}^{t}x^{k_i}+(b+1)x^{2n}$$

حال فرض کنید A در نوبت خود $x^{k_{t+1}}$ را انتخاب می‌کند.

حال B حرکت بعدی خود را طبق این معیار انتخاب می‌کند:

اگر $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}>b+1$ آن‌گاه B جمله‌ی ۱ را اضافه می‌کند و اگر $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})>a+1$ آن‌گاه B جمله‌ی x^{2n} را اضافه می‌کند و اگر هیچ‌کدام از این دو اتفاق نیفتاد B به دلخواه یکی از دو جمله‌ی ۱ و x^{2n} را اضافه می‌کند. توجه کنید که هر دو نامساوی فوق نمی‌توانند همزمان اتفاق بیفتند زیرا مجموع سمت چپ نامساوی‌ها برابر $t+1$ است ولی چون $a+b=t$ مجموع سمت راست‌ها برابر $t+2$ است.

لم ۲: اگر B طبق روش فوق بازی کند، بعد از هر نوبت B، ضریب ثابت چندجمله‌ای حداقل $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}$ و ضریب x^{2n} حداقل $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})$ است.

اثبات لم: لم را با استقرا روی t ثابت می‌کنیم. برای $t=0$ واضح است. حال فرض کنید حکم برای t ثابت شده باشد و فرض کنید ضریب ثابت و ضریب x^{2n} پس از مرحله‌ی t برابر $a+1$ و $b+1$ باشند. پس بنابر فرض استقرا:

$$\sum_{i=1}^{t}(1-\frac{k_i}{2n})\le a+1 \text{ و } \sum_{i=1}^{t}\frac{k_i}{2n}\le b+1$$

پس به وضوح

$$\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})\le a+2 \text{ و } \sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}\le b+2$$

همانطور که قبلا اشاره شد حداکثر یکی از دو نامساوی $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}>b+1$ و $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})>a+1$ می‌تواند رخ دهد.

حالت اول: $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}>b+1$. در این حالت B یک واحد به ضریب x^{2n} اضافه می‌کند و درنتیجه ضریب x^{2n} برابر $b+2$ می‌شود که از $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}$ بزرگتر مساوی است.

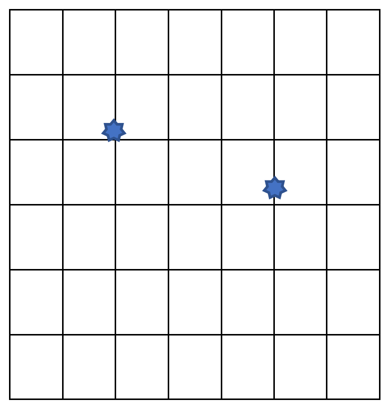
حالت دوم: $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})>a+1$. در این حالت B یک واحد به ضریب ثابت اضافه می‌کند و درنتیجه ضریب ثابت برابر $a+2$ می‌شود که از $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})$ بزرگتر مساوی است.

حالت سوم: هیچ یک از دو نامساوی فوق رخ ندهد. در این صورت به وضوح ادعا برقرار است.

پس گام استقرا ثابت می‌شود و اثبات لم پایان می‌پذیرد.

اکنون از لم ۱ و لم ۲ نتیجه می‌شود که B هیچ‌گاه نمی‌بازد.

۶. جدولی با ۵۶ نقطه در ۷ ردیف ۸ تایی، با فواصل برابر، در نظر بگیرید. دو نقطه از نقاط جدول را به عنوان نقاط قرینه‌ساز مشخص می‌کنیم؛ نقطه‌ای از جدول را در نظر بگیرید و آن را نسبت به یکی از نقاط قرینه‌ساز قرینه کنید. در صورتی که نقطهٔ جدید یکی از نقاط جدول بود این کار را تکرار کنید و این تکرار را ادامه دهید. نقاطی که با این کار به آن‌ها می‌رسیم را در یک دسته قرار می‌دهیم. نقاط قرینه‌ساز را طوری انتخاب کرده‌ایم که تعداد دسته‌ها کم‌ترین مقدار ممکن شود. تعداد دسته‌ها چند تا است؟ (در شکل زیر، ۵۶ نقطه همان تقاطع‌ها هستند و یکی از انتخاب‌های ممکن برای نقاط قرینه‌ساز با دو ستاره مشخص شده است.)



.

راه حل:

ابتدا می‌خواهیم نقطه‌هایی که از قرینه کردن یک نقطه نسبت به نقاط قرینه‌ساز در یک شبکه انتخاب میشود را بدست آوریم. این نقطه‌ها را کلاس هم‌ارزی نام‌گذاری می‌کنیم. خط موازی گذرنده از یک نقطه که موازی خط واصل نقاط قرینه‌ساز باشد را خط خوب آن نقطه می‌نامیم و قرینه آن نسبت به دو مرکز را قرینه خط خوب آن نقطه می نامیم.

لم ۱: قرینه هر نقطه نسبت به یکی از ۲ مرکز بر روی قرینه خط خوب آن می‌افتد.(چرا؟)

با توجه به لم ذکر شده نتیجه می‌گیریم با قرینه کردن متوالی، یک نقطه تنها بر روی خط خوب آن نقطه و یا قرینه خط خوب آن نقطه می‌افتد.

لم ۲: اگر مجموعه تولیدی با اعمال قرینه کردن نسبت به نقاط قرینه‌ساز برای دو نقطه، اشتراک داشته باشند، آنگاه دو مجموعه یکی بوده‌اند.(چرا؟)

با توجه به لم ذکر شده تعداد دسته‌ها، برابر با تعداد کلاس‌های هم‌ارزی است. پس کافیست برای هر دو مرکزی این تعداد را حساب کنیم تا کمینه را بیابیم.

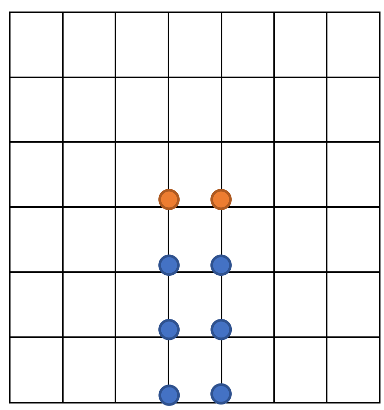
یکی از نقاط قرینه‌ساز را O و دوبرابر بردار بین نقاط قرینه‌ساز را بردار v بگیرید.

لم ۳: اگر از نقطه A با قرینه‌کردن توسط نقاط قرینه‌ساز بتوان به نقطه B رسید، می‌توان از A توسط تعدادی انتقال با بردار v یا $-v$ و سپس حداکثر یکبار قرینه نسبت به O، به B رسید.(در واقع ترکیب دو تقارن، یک انتقال است)(چرا؟)

حال از آنجا که v دوبرابر بردار واصل نقاط قرینه‌ساز است، مولفه افقی و عمودی آن زوج است. پس یکی از دو مولفه بردار v حداقل ۲ است. در نتیجه می‌توان گفت که با انتقال توسط بردار v و $-v$، نقاط به حداقل ۱۴ گروه(چرا؟) تقسیم می‌شوند به طوری که اگر دونقطه در یک گروه باشند، از هریک به دیگری با تعداد انتقال می‌توان رسید.

لم ۴: قرینه نقاط یک گروه نسبت به O، همگی در یک گروهند.(چرا؟)

در نتیجه هر کلاس هم‌ارزی یا شامل یک‌گروه است یا حداکثر دو گروه. می‌توان گفت دونقطه قرینه‌ساز در دو گروه مختلفند(چرا؟) و قرینه نقاط هر یک ازین دو گروه پس از قرینه‌شدن نسبت به O، در خود آن گروه می‌افتد. پس این دو گروه دو کلاس هم‌ارزی را تشکیل می‌دهند. هر کلاس هم‌ارزی دیگر نیز، شامل حداکثر دو گروه است. در نتیجه حداقل ۸ کلاس هم‌ارزی داریم. در شکل زیر، دو دایره نارنجی نقاط قرینه‌ساز هستند. با ۸ نقطه‌ای که دورشان دایره‌است، توسط قرینه نسبت به نقاط قرینه‌ساز، به همه نقاط جدول می‌توان رسید. پس جواب مسئله برابر با ۸ است.



به نام خدا

مرحلهٔ دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

پنج‌شنبه، ۳۰ فروردین ۱۳۹۷ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱. در ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهاست و دایره محیطی مثلث APB، BC را در X قطع می‌کند. خط گذرا از D و موازی با BC، AX را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = ۲ \times \angle YCA$$

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{۲}$ عدد مثبت به‌دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیداً صعودی $r_۱ < r_۲ < \cdots < r_n$ و $s_۱ < s_۲ < \cdots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$\left(a^{r_۱} + k\right)\left(a^{r_۲} + k\right)\ldots\left(a^{r_n} + k\right) = \left(a^{s_۱} + k\right)\left(a^{s_۲} + k\right)\ldots\left(a^{s_n} + k\right)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

به نام خدا

مرحلهٔ دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

جمعه، ۳۱ فروردین ۱۳۹۷ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

۴. همه توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^۲-xy+y^۲)=x^۳+y^۳$$

۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست‌کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

۶. دو دایره $\omega_۱$ و $\omega_۲$ یک‌دیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را به‌ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا $\omega_۱$ را در D و F و $\omega_۲$ را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

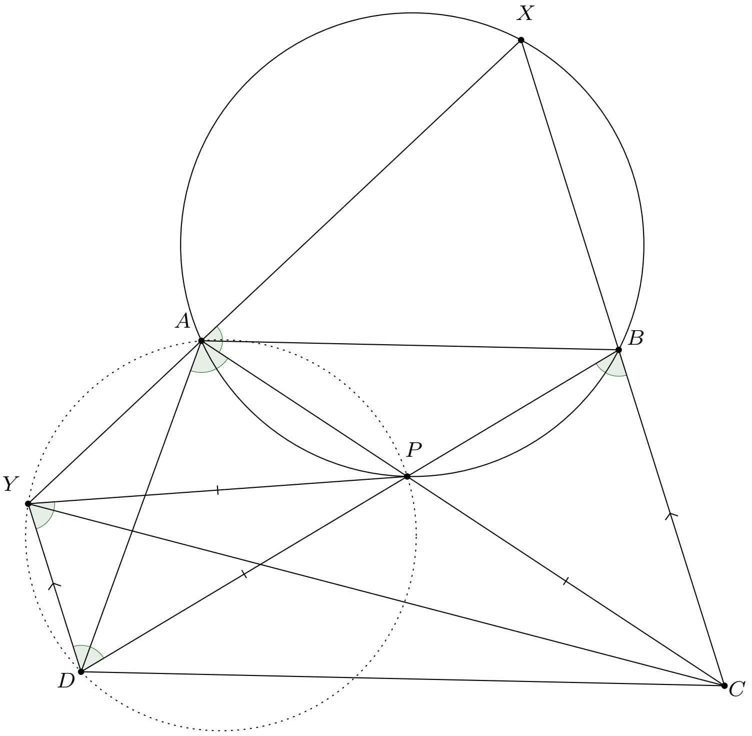
بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

۱. در ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهاست و دایره محیطی مثلث APB، BC را در X قطع می‌کند. خط گذرا از D و موازی با BC، AX را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = ۲ \times \angle YCA$$

راه‌حل اول.

سوال را با این فرض اضافه حل می‌کنیم: نقاط C و Y در دو طرف خط ناشی از امتداد پاره‌خط AD است.



از آن‌جا که $YD \parallel BC$ به‌دست می‌آید $\angle YDP = \angle CBP = \angle XAP$ در نتیجه چهارضلعی $YAPD$ محاطی است هم‌چنین دقت کنید که $ABCD$ نیز محاطی است. حالا داریم

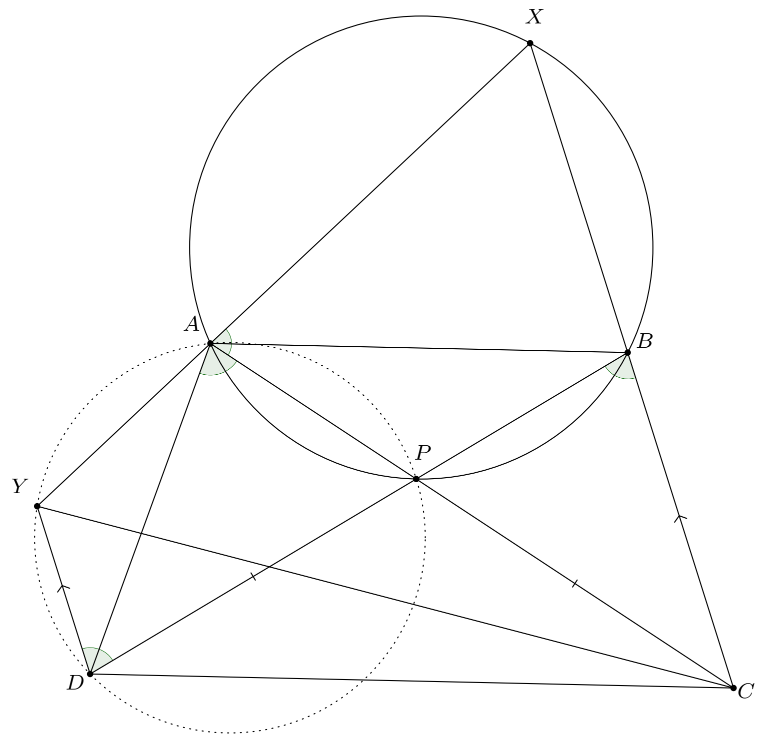
$$\angle DYP = \angle DAP = \angle DAC = \angle DBC = \angle PDY$$

پس $PY = PD$ از طرف دیگر نیز واضح است که $PD = PC$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $PY = PC$ و در نهایت به‌دست می‌آید

$$۲\angle YCA = ۲\angle YCP = \angle APY = \angle YDA$$

پس حکم ثابت شد.

راه‌حل دوم.



مشابه راه‌حل اول ثابت می‌شود $YAPD$ محاطی است. داریم

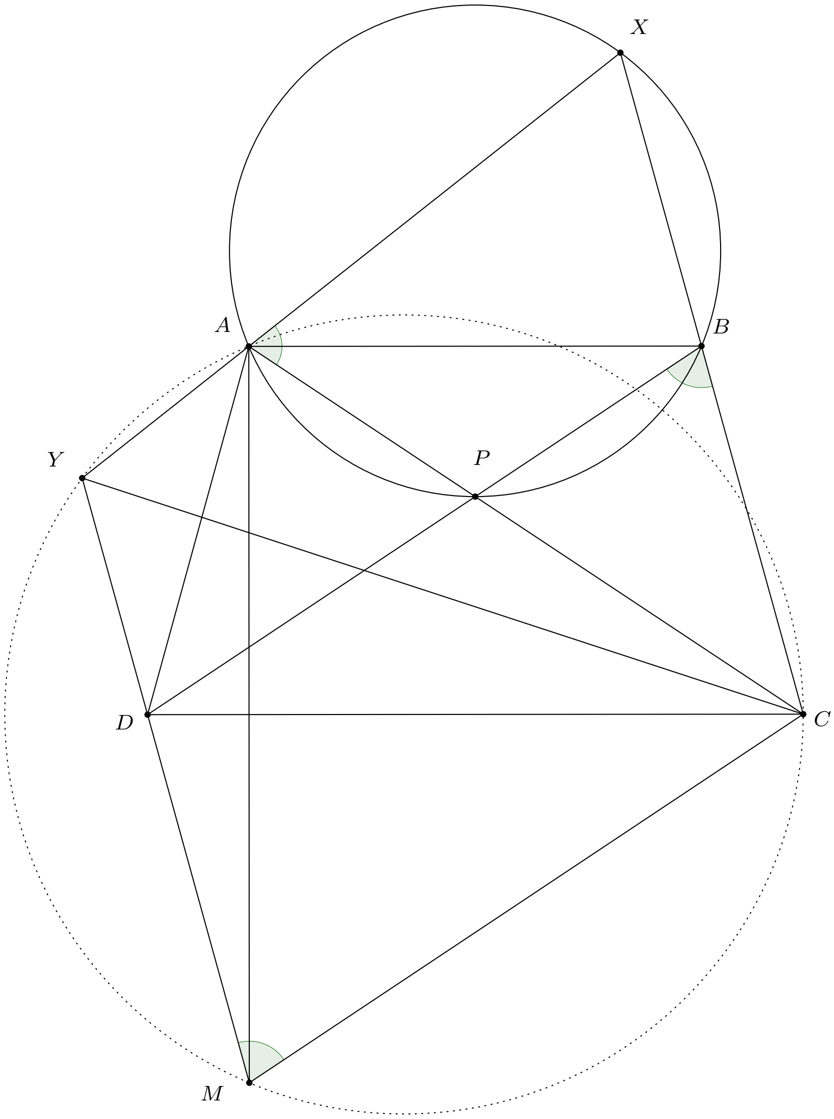
$$\angle DAC = \angle DBC = \angle YDP = \angle XAP = \angle XAC$$

پس C روی نیم‌ساز خارجی $\angle YAD$ قرار دارد. حالا از آن‌جا که $PC = PD$ به‌دست می‌آید

$$\angle ACD = \angle PCD = \frac{۱}{۲}\angle APD = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle AYD$$

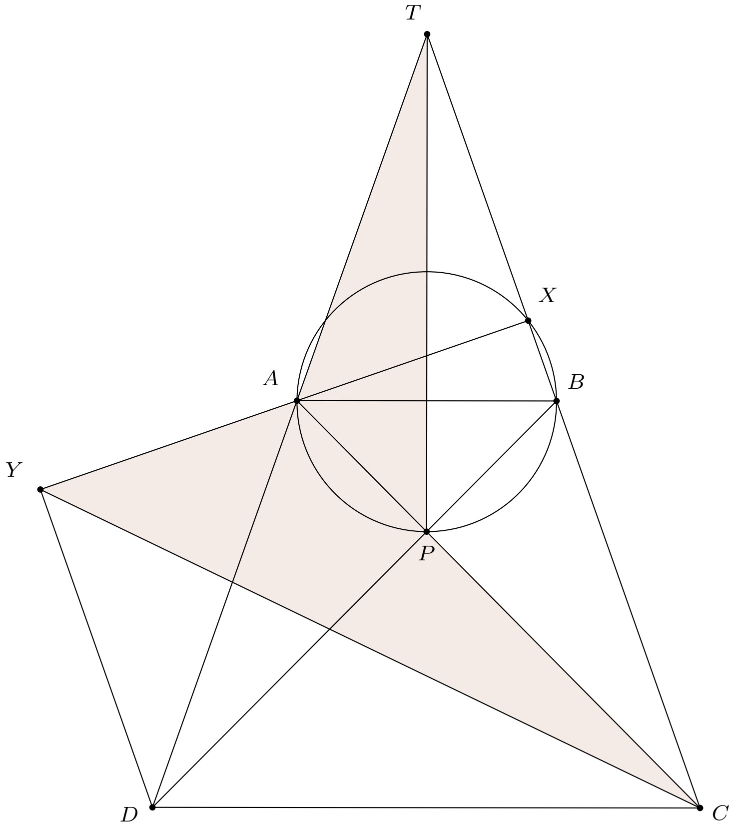
پس C دو تا از خواص مرکز دایره محاطی خارجی نظیر راس Y در مثلث DYA را دارد که نتیجه می‌دهد بر آن نقطه منطبق است. در نهایت بنابر خواص مرکز دایره‌محاطی خارجی داریم $۲\angle YCA = \angle YDA$ که همان حکم سوال است.

راه‌حل سوم.



نقطه M را روی امتداد YD و از طرف D به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = MD$. واضح است که $\angle YDA = ۲\angle DMA$ پس برای اثبات حکم کافیست نشان دهیم چهارضلعی $AYMC$ محاطی است. دقت کنید که $MD = AD = BC$ و $MD \parallel BC$ پس چهارضلعی $MCBD$ یک متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه $\angle DMC = \angle DBC = \angle XAP$ که محاطی بودن چهارضلعی $AYMC$ را نتیجه می‌دهد.

راه‌حل چهارم.



نقطه تقاطع AD و BC را T می‌نامیم. از تشابه دو مثلث CBP و CAX به‌دست می‌آید

$$\frac{BP}{AX} = \frac{CB}{CA} = \frac{AD}{CA} \Longrightarrow AX \cdot AD = CA \cdot BP \quad (۱)$$

از طرف دیگر طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{AY}{AX} = \frac{AD}{AT} \Longrightarrow AX \cdot AD = AT \cdot AY \quad (۲)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$AT \cdot AY = CA \cdot BP = CA \cdot AP \Longrightarrow \frac{AT}{CA} = \frac{AP}{AY} \quad (۳)$$

در راه‌حل اول ثابت کردیم $\angle XAP = \angle DAC$ پس $\angle YAC = \angle TAP$ و بنابر رابطه (۳) نتیجه می‌شود $\triangle YAC \sim \triangle PAT$. در نهایت داریم

$$\angle YCA = \angle ATP = \frac{۱}{۲}\angle ATX = \frac{۱}{۲}\angle YDA$$

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به‌دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

راه‌حل اول.

فرض کنید اعداد داده شده $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ باشند که n عددی فرد است. اختلاف $a_i - a_j$ که $i > j$ را اگر i و j زوجیت یکسانی داشته باشند در دسته اول و اگر i و j زوجیت متمایزی داشته باشند در دسته دوم قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول و مجموع اعداد دسته دوم با هم برابر است. فرض کنید i زوج باشد (حالت دیگر مشابه است). اختلاف‌های $a_{n-1} - a_i, a_{n-3} - a_i, \cdots, a_{i+2} - a_i$ و $a_i - a_{i-2}, a_i - a_{i-4}, \cdots, a_i - a_2$ در دسته اول شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول برابر است با

$$\frac{i-2}{2} - \frac{n-i-1}{2} = \frac{2i-n-1}{2}$$

به طور مشابه اختلاف‌های $a_n - a_i, a_{n-2} - a_i, \cdots, a_{i+1} - a_i$ و $a_i - a_{i-1}, a_i - a_{i-3}, \cdots, a_i - a_1$ در دسته دوم شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته دوم برابر است با

$$\frac{i}{2} - \frac{n-i+1}{2} = \frac{2i-n-1}{2}$$

پس ضریب a_i در مجموع اعداد هر دسته برابر است و حکم ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم.
با استقرا روی n حکم را نشان می‌دهیم. برای پایه استقرا ($n=3$) درستی حکم به‌راحتی قابل بررسی است پس فرض می‌کنیم حکم برای n درست باشد و درستی آن را برای $n+2$ نشان می‌دهیم. فرض کنید اعداد داده شده $x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}$ باشند. طبق فرض استقرا تفاضل‌های دوبه‌دوی اعداد $x_1,x_2,\ldots,x_n$ را می‌توانیم به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کنیم پس فقط کافیست حکم را برای تفاضل‌های باقی‌مانده نشان دهیم. تفاضل‌های

$$\begin{cases} x_{n+2}-x_{n+1}, x_{n+2}-x_n, \ldots, x_{n+2}-x_{\frac{n+3}{2}} \\ x_{n+1}-x_1, x_{n+1}-x_2, \ldots, x_{n+1}-x_{\frac{n+1}{2}} \end{cases}$$

را در دسته اول و تفاضل‌های

$$\begin{cases} x_{n+2}-x_1, x_{n+2}-x_2, \ldots, x_{n+2}-x_{\frac{n+1}{2}} \\ x_{n+1}-x_n, x_{n+1}-x_{n-1}, \ldots, x_{n+1}-x_{\frac{n+3}{2}} \end{cases}$$

را در دسته دوم قرار می‌دهیم. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که مجموع اعداد در هر دسته با هم برابر است پس حکم ثابت شد.

راه‌حل سوم.
فرض کنید اعداد داده شده $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ باشند که n عددی فرد است. هر مثال افراز کردن اعداد $|a_i - a_j|$ها را با ماتریسی $n \times n$ مدل می‌کنیم. فرض کنید اعداد $|a_i - a_j|$ها را به دو مجموعه A و B افراز کرده‌ایم. ماتریسی $n \times n$ در نظر بگیرید. اگر $a_i - a_j \in A$ که $i < j$ آن‌گاه در سطر iام و ستون jام A می‌نویسیم و در غیر این‌صورت B می‌نویسیم. حالا برای این‌که حکم مسئله برقرار باشد برای هر i باید داشته باشیم

$$(\text{تعداد } B\text{ها در ستون } i) - (\text{تعداد } B\text{ها در سطر } i) = (\text{تعداد } A\text{ها در ستون } i) - (\text{تعداد } A\text{ها در سطر } i)$$

یک ماتریس با این خاصیت می‌سازیم. در هر سطر $\frac{n-1}{2}$ خانه سمت چپ را A می‌گذاریم و بقیه را B (اگر کمتر از $\frac{n-1}{2}$ خانه وجود داشت همه خانه‌های آن سطر را A می‌گذاریم). مثال برای $n = 7$:

$$\begin{bmatrix} \times & A & A & A & B & B & B \\ \times & \times & A & A & A & B & B \\ \times & \times & \times & A & A & A & B \\ \times & \times & \times & \times & A & A & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & A & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که ماتریس‌هایی که به این شکل ساخته می‌شوند خاصیت بیان شده را دارا هستند.

نکته. با این روش می‌توان افرازهای مطلوب بسیاری ساخت که ما تنها یکی از آن‌ها را بیان کردیم.

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیداً صعودی $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$\left(a^{r_1}+k\right)\left(a^{r_2}+k\right)\ldots\left(a^{r_n}+k\right)=\left(a^{s_1}+k\right)\left(a^{s_2}+k\right)\ldots\left(a^{s_n}+k\right)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

راه‌حل اول.

با استقرا روی n حکم را نشان می‌دهیم. برای پایه استقرا ($n = 1$) که حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم برای $n-1$ درست باشد و درستی آن را برای n نشان می‌دهیم. بزرگترین توان عدد اول p در عدد طبیعی x را با $v_p(x)$ نشان می‌دهیم. بنابر فرض $a > k$ عددی اول مانند p وجود دارد که $v_p(a) > v_p(k)$. دو تا از خواص تابع v_p که اثبات آن‌ها نیز واضح است به شرح زیر است:

- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند که $v_p(x) < v_p(y)$ آن‌گاه $v_p(x+y) = v_p(x)$.

دو طرف تساوی فرض مسئله را باز می‌کنیم، یک k^n از دو طرف خط می‌زنیم و با استفاده از این دو خاصیت v_p دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم. طرف چپ تساوی برابر است با

$$a^{r_1+\cdots+r_n}+k\left(a^{r_1+\cdots+r_{n-1}}+\cdots+a^{r_2+\cdots+r_n}\right)+\cdots+k^{n-1}\left(a^{r_1}+\cdots+a^{r_n}\right)$$

دقت کنید که عبارت بالا به صورت مجموع n عبارت نوشته شده است پس طبق خاصیت دوم باید کم‌ترین توان p بین این n عبارت را پیدا کنیم. طبق خواص بیان شده و اکیداً صعودی بودن دنباله r_iها داریم

$$\begin{aligned}
v_p\left(k^{n-i}\left(a^{r_1+\cdots+r_i}+\cdots+a^{r_{n-i+1}+\cdots+r_n}\right)\right) &= v_p\left(k^{n-i}\right)+v_p\left(a^{r_1+\cdots+r_i}+\cdots+a^{r_{n-i+1}+\cdots+r_n}\right)\\
&= (n-i)v_p(k)+v_p\left(a^{r_1+\cdots+r_i}\right)\\
&= (n-i)v_p(k)+\left(r_1+\cdots+r_i\right)v_p(a)\\
&> (n-i)v_p(k)+ir_1v_p(a)\\
&> (n-1)v_p(k)+r_1v_p(a)
\end{aligned}$$

واضح است که رابطه آخر همان $v_p\left(k^{n-1}\left(a^{r_1}+\cdots+a^{r_n}\right)\right)$ است پس طبق خاصیت دوم بزرگ‌ترین توان p سمت چپ برابر است با $(n-1)v_p(k)+r_1v_p(a)$ و به طور مشابه بزرگ‌ترین توان p سمت راست برابر است با $(n-1)v_p(k)+s_1v_p(a)$. در نتیجه این دو عبارت باید با هم برابر باشند که به‌دست می‌آید $r_1 = s_1$. در نهایت با خط زدن عبارت‌های $a^{r_1}+k$ و $a^{s_1}+k$ از دو طرف تساوی حکم طبق فرض استقرا به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم.

مشابه راه‌حل اول فقط کافیست نشان دهیم $r_1 = s_1$ پس بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $s_1 \geq r_1 + 1$. تعریف می‌کنیم $d = (a, k)$، $a = da_1$ و $k = dk_1$. با استفاده از این روابط تساوی مسئله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(d^{r_i}a_1^{r_i} + dk_1\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(d^{s_i}a_1^{s_i} + dk_1\right) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n}\left(d^{r_i-1}a_1^{r_i} + k_1\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(d^{s_i-1}a_1^{s_i} + k_1\right)$$

حالا دو طرف تساوی آخر را به پیمانه $d^{r_1}a_1^{r_1+1}$ در نظر می‌گیریم که بنابر اکیداً صعودی بودن دو دنباله به‌دست می‌آید

$$\left(d^{r_1-1}a_1^{r_1} + k_1\right)k_1^{n-1} \equiv k_1^{n} \pmod{d^{r_1}a_1^{r_1+1}} \Longrightarrow d^{r_1}a_1^{r_1+1} \mid d^{r_1-1}a_1^{r_1}k_1^{n-1} \Longrightarrow da_1 \mid k_1^{n-1}$$

پس $a_1 \mid k_1^{n-1}$ اما دقت کنید که $(a_1, k_1) = 1$ پس $a_1 = 1$ که نتیجه می‌دهد $a \mid k$ و این با رابطه $a > k$ در تناقض است.

۴. همه توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^۲-xy+y^۲)=x^۳+y^۳ \tag{۱}$$

راه‌حل اول.

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم $x=y=۰$ و به‌دست می‌آید $f(۰)=۰$. تعریف می‌کنیم $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ برای هر $x\neq ۰$ پس رابطه (۱) تبدیل می‌شود به

$$g(x+y)g(x^۲-xy+y^۲)=۱ \tag{۲}$$

برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ که $x+y\neq ۰$ (دقت کنید که $x^۲-xy+y^۲$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود). نشان می‌دهیم برای هر a,bای که $b\geq\frac{a^۲}{۴}$ اعداد حقیقی x,y وجود دارند به‌طوری‌که $x+y=a$ و $x^۲-xy+y^۲=b$. داریم

$$b=x^۲-xy+y^۲=(x+y)^۲-۳xy=a^۲-۳xy\Rightarrow xy=\frac{a^۲-b}{۳}$$

پس x,y ریشه‌های معادله $z^۲-az+\frac{a^۲-b}{۳}=۰$ هستند که طبق فرض $b\geq\frac{a^۲}{۴}$ دلتای آن نامنفی است که وجود داشتن x,y را نتیجه می‌دهد. پس رابطه (۲) را می‌توان به شکل

$$g(a)g(b)=۱ \tag{۳}$$

نوشت که $a\neq ۰$ و $b\geq\frac{a^۲}{۴}$. فرض کنید $۰<a\leq ۴$ واضح است که $a\geq\frac{a^۲}{۴}$ پس در رابطه (۳) می‌توانیم قرار دهیم $b=a$ که نتیجه می‌دهد $g(a)=\pm ۱$. باز هم در رابطه (۳) قرار می‌دهیم $a=۴$ پس برای هر $b\geq ۴$ داریم $g(b)=\pm ۱$ در نتیجه در کل برای هر $a>۰$ داریم $g(a)=\pm ۱$. در رابطه (۳) a را عددی دلخواه قرار می‌دهیم و از آن‌جا که b مثبت است نتیجه می‌شود $g(a)=\pm ۱$ برای هر $a\neq ۰$. حالا فرض کنید r,s حقیقی وجود داشته‌باشند که $g(r)=۱$ و $g(s)=-۱$. طبق رابطه (۳) برای هر $b\geq\frac{r^۲}{۴}$ داریم $g(b)=۱$ و از طرف دیگر برای هر $b\geq\frac{s^۲}{۴}$ داریم $g(b)=-۱$ که به وضوح این دو رابطه با هم در تناقض‌اند پس g ثابت ۱ یا ثابت -۱ است که نتیجه می‌دهد $f(x)=x$ یا $f(x)=-x$ که هر دوی این توابع در رابطه (۱) صدق می‌کنند.

راه‌حل دوم.
تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. ابتدا دقت کنید که اگر عدد حقیقی a وجود داشته باشد که $f(a)=۰$، $P(a,۰)$ نتیجه می‌دهد $a=۰$. حالا داریم

$$P(x,x-y)\longrightarrow f(۲x-y)f(x^۲-xy+y^۲)=(۲x-y)(x^۲-xy+y^۲)$$

با تقسیم کردن این رابطه بر $P(x,y)$ به‌دست می‌آید (فرض می‌کنیم $x+y\neq ۰$)

$$\frac{f(۲x-y)}{f(x+y)}=\frac{۲x-y}{x+y} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم $y=۱-x$ که نتیجه می‌دهد $f(۳x-۱)=(۳x-۱)f(۱)$ و از آن‌جا که $۳x-۱$ همه مقادیر حقیقی را در بر می‌گیرد به‌دست می‌آید $f(x)=xf(۱)$. با قرار دادن این رابطه در صورت مسئله نتیجه می‌شود $f(۱)=\pm۱$ پس توابع $f(x)=x$ و $f(x)=-x$ جواب‌های مسئله‌اند.

راه‌حل سوم.

تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$\left.\begin{array}{r} P(x,0) \longrightarrow f(x)f\left(x^2\right)=x^3 \\ P(x,x) \longrightarrow f(2x)f\left(x^2\right)=2x^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(2x)=2f(x) \qquad (1)$$

هم‌چنین دقت کنید که $P(1,0)$ نتیجه می‌دهد $f(1)=\pm 1$. فرض می‌کنیم $f(1)=1$. تعریف می‌کنیم $z=x+y$ و $a=xy$ و بنابر این تعریف به‌دست می‌آید $x^2-xy+y^2=z^2-3a$ حالا می‌خواهیم همه zهایی را بیابیم که برای آن عدد حقیقی a وجود داشته باشد که $z^2-3a=1$. پس باید داشته باشیم

$$1=z^2-3a=z^2-3xy=z^2-3x(z-x)=3x^2-3zx+z^2 \Longleftrightarrow 3x^2-3zx+\left(z^2-1\right)=0$$

برای اینکه تساوی آخر در اعداد حقیقی برای x جواب داشته باشد باید دلتای آن نامنفی باشد یعنی

$$0 \leq \Delta=9z^2-12\left(z^2-1\right)=12-3z^2 \Longleftrightarrow -2 \leq z \leq 2$$

از آن‌جا که روابط بالا برگشت پذیر هستند نتیجه می‌شود اگر $-2 \leq z \leq 2$ اعداد حقیقی a، x_0 و y_0 وجود دارند که $z=x_0+y_0$، $a=x_0y_0$ و $z^2-3a=1$ پس از $P(x_0,y_0)$ به‌دست می‌آید $f(z)=z$ برای هر $-2 \leq z \leq 2$. حالا از رابطه (1) و به طور استقرایی نتیجه می‌شود $f\left(2^nx\right)=2^nf(x)$ برای هر n طبیعی. عدد حقیقی دلخواه x را در نظر می‌گیریم. واضح است که عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $|x| \leq 2^{n+1}$ پس $-2 \leq \frac{x}{2^n} \leq 2$ و در نهایت داریم

$$f(x)=2^nf\left(\frac{x}{2^n}\right)=x$$

حالت $f(1)=-1$ نیز به طور کاملا مشابه جواب $f(x)=-x$ را می‌دهد پس همه جواب‌های سوال به‌دست آمدند.

راه‌حل چهارم.
تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. مشابه راه‌حل اول داریم $f(۰)=۰$ و مشابه راه‌حل سوم می‌توان ثابت کرد $f(۲^n x)=۲^n f(x)$ برای هر n طبیعی و $f(۱)=\pm ۱$ که فرض می‌کنیم $f(۱)=۱$. داریم

$$P(x,۱-x)\longrightarrow f\left(۳x^۲-۳x+۱\right)=۳x^۲-۳x+۱$$

دقت کنید که عبارت $۳x^۲-۳x+۱$ همه اعداد بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۴}$ را می‌پوشاند پس برای هر $x\geq\frac{۱}{۴}$ داریم $f(x)=x$. عدد مثبت و دل‌خواه x را در نظر می‌گیریم. واضح است که عدد طبیعی n وجود دارد که $۲^n x\geq\frac{۱}{۴}$ و از این به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{f\left(۲^n x\right)}{۲^n}=x$$

پس برای هر عدد نامنفی داریم $f(x)=x$. از طرف دیگر با مقایسه دو تساوی $P(x,۰)$ و $P(-x,۰)$ نتیجه می‌شود f تابعی فرد است (دقت کنید که مانند راه‌حل دوم می‌دانیم $f(a)=۰$ اگر و تنها اگر $a=۰$) پس برای هر x حقیقی داریم $f(x)=x$. حالت $f(۱)=-۱$ نیز جواب $f(x)=-x$ را می‌دهد.

راه‌حل پنجم.
تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. مشابه راه‌حل اول داریم $f(۰)=۰$. فرض می‌کنیم $x_۰\neq ۰$ای وجود داشته باشد که $|f(x_۰)|>|x_۰|$. دقت کنید که

$$P(x_۰,۰)\longrightarrow f(x_۰)f\left(x_۰^۲\right)=x_۰^۳\Longrightarrow \left|f\left(x_۰^۲\right)\right|<x_۰^۲$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $\left|f\left(x_۰^۴\right)\right|>\left|x_۰^۴\right|$. دقت کنید که مشابه راه‌حل سوم برای هر n طبیعی داریم $f\left(۲^nx\right)=۲^nf(x)$ پس $\left|f\left(\frac{x_۰}{۲^n}\right)\right|>\left|\frac{x_۰}{۲^n}\right|$. مشابه راه‌حل اول α و β حقیقی وجود دارند به‌طوری‌که

$$\alpha+\beta=\frac{x_۰}{۲^n},\quad \alpha^۲-\alpha\beta+\beta^۲=x_۰^۴$$

اگر و تنها اگر $۴x_۰^۴>\left(\frac{x_۰}{۲^n}\right)^۲$ که اگر n را عددی به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم برقرار می‌شود. حالا از $P(\alpha,\beta)$ به‌دست می‌آید

$$\left|\frac{x_۰}{۲^n}\right|\cdot\left|x_۰^۴\right|=\left|f\left(\frac{x_۰}{۲^n}\right)\right|\cdot\left|f\left(x_۰^۴\right)\right|>\left|\frac{x_۰}{۲^n}\right|\cdot\left|x_۰^۴\right|$$

که تناقض است. حالت $|f(x_۰)|<|x_۰|$ نیز به‌طور مشابه رد می‌شود پس برای هر x داریم $f(x)=\pm x$ و مشابه راه‌حل اول ثابت می‌شود تنها جواب‌های مسئله توابع $f(x)=x$ و $f(x)=-x$ هستند.

۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست‌کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

راه‌حل اول.

کلیدها را با شماره‌های $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ نشان می‌دهیم. لامپی که بیش‌ترین تعداد کلید به آن متصل است را A می‌نامیم. مسئله را به پنج حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت اول. ۵ کلید به لامپ A متصل باشد.

یک لامپ دیگر مانند B را درنظر می‌گیریم. اگر حداقل سه کلید به B وصل باشند همین سه کلید را می‌زنیم. در غیر این‌صورت ۲ کلید از کلیدهایی که B وصل نیستند و ۱ کلید که B وصل است را می‌زنیم.

حالت دوم. ۴ کلید به لامپ A متصل باشد.

از آن‌جا که مجموعه لامپ‌های هیچ دو کلیدی یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که کلیدهایش با کلیدهای A اشتراک داشته باشد. اگر حداقل ۳ اشتراک داشته باشد همین ۳ کلید را می‌زنیم. در غیر این‌صورت ۱ کلید مشترک بین A و B و ۲ کلید از ۴ کلیدی که به A وصل‌اند ولی به B وصل نیستند را می‌زنیم.

حالت سوم. ۳ کلید به لامپ A متصل باشد.

فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ متصل نباشد. از آن‌جا که مجموعه لامپ‌های این دو کلید یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که فقط به یکی از این دو کلید متصل است. همچنین این لامپ به حداکثر ۳ کلید متصل است پس به حداقل یکی از کلیدهای ۳ و ۴ و ۵ مانند ۳ وصل نیست در نتیجه کلیدهای ۱ و ۲ و ۳ را می‌زنیم.

حالت چهارم. ۲ کلید به لامپ A متصل باشد.

کاملا مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم. فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ و ۳ متصل نباشد پس لامپی مانند B وجود دارد که به کلید ۱ وصل باشد ولی به کلید ۲ وصل نباشد. همچنین B حداقل به یکی از کلیدهای ۴ و ۵ مانند ۴ نیز وصل نیست پس کلیدهای ۱ و ۲ و ۴ را می‌زنیم.

حالت پنجم. ۱ کلید به لامپ A متصل باشد.

واضح است که همه لامپ‌ها به دقیقا ۱ کلید متصل‌اند و لامپی مانند B وجود دارد که به کلیدی دیگر وصل باشد پس ۲ کلید متصل به A و B و ۱ کلید دل‌خواه دیگر را می‌زنیم.

پس در همه حالات ممکن حکم مسئله برقرار است.

راه‌حل دوم.

لامپ‌ها را $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و کلیدها را $b_1, b_2, \ldots, b_5$ می‌نامیم. دقت کنید که $n \geq 3$ زیرا در غیر این‌صورت حداکثر ۴ زیرمجموعه از لامپ‌ها داریم و شرط سوال نمی‌تواند برقرار باشد. جدولی $10 \times n$ تشکیل می‌دهیم که هر سطر آن متناظر با یک سه‌تایی از کلیدها و هر ستون آن متناظر با یکی از لامپ‌ها است.

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|l}
 & a_1 & a_2 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_n & \\ \hline
(b_1, b_2, b_3) & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \longrightarrow z_1 \\ \hline
(b_1, b_2, b_4) & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \longrightarrow z_2 \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \quad \vdots \\ \hline
(b_3, b_4, b_5) & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \longrightarrow z_{10} \\ \hline
\end{array}$$

در خانه تقاطع سطر iام و ستون jام عدد ۱ را می‌نویسیم اگر پس از تغییر وضعیت ۳ کلید متناظر با سطر iام لامپ a_j روشن شود (فرض می‌کنیم همه لامپ‌ها خاموش بوده‌اند) و در غیر این‌صورت در این خانه عدد صفر را می‌نویسیم. مجموع اعداد سطر iام را با z_i نشان می‌دهیم. فرض کنید لامپ a_j به X_j کلید متصل باشد. در این‌صورت مجموع اعداد ستون jام برابر است با $\binom{X_j}{3} + \binom{X_j}{1}\binom{5-X_j}{2}$ پس باید داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{10} z_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{X_j}{3} + \binom{X_j}{1}\binom{5 - X_j}{2} \right) \qquad (1)$$

حالا دقت کنید که X_j عددی طبیعی از ۱ تا ۵ است و با بررسی این مقادیر می‌توان به‌راحتی نتیجه گرفت که عبارت $\binom{X_j}{3} + \binom{X_j}{1}\binom{5-X_j}{2}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است. پس طبق رابطه (۱) داریم

$$\sum_{i=1}^{10} z_i \geq 4n$$

در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری iای وجود دارد که $z_i \geq \lceil \frac{4n}{10} \rceil \geq 2$ و این همان حکم سوال است.

راه‌حل سوم.

مجموعه لامپ‌های متصل به هر کلید را با $A_۱, A_۲, \ldots, A_۵$ نشان می‌دهیم. می‌توانیم فرض کنیم برای هر $۱ \le i < j < k \le ۵$ داریم

$$|A_i \cup A_j \cup A_k| - (|A_i \cap A_j| + |A_j \cap A_k| + |A_k \cap A_i|) + ۳|A_i \cap A_j \cap A_k| \le ۱ \qquad (۱)$$

زیرا دقت کنید که اگر لامپی در یک یا سه تا از مجموعه‌های A_i, A_j, A_k آمده باشد در سمت چپ رابطه (۱) یک بار شمرده می‌شود و در غیر این‌صورت شمرده نمی‌شود پس اگر این عبارت بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد حکم به‌دست می‌آید. حالا همه $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ رابطه ممکن را با هم جمع می‌کنیم و به رابطه زیر می‌رسیم

$$\sum_{۱\le i<j<k\le ۵} |A_i \cup A_j \cup A_k| - ۳ \sum_{۱\le i<j\le ۵} |A_i \cap A_j| + ۳ \sum_{۱\le i<j<k\le ۵} |A_i \cap A_j \cap A_k| \le ۱۰ \qquad (۲)$$

هم‌چنین طبق اصل شمول و عدم و شمول می‌دانیم

$$|A_i \cup A_j \cup A_k| = |A_i| + |A_j| + |A_k| - (|A_i \cap A_j| + |A_j \cap A_k| + |A_k \cap A_i|) + |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

و با قرار دادن این تساوی در رابطه (۲) به‌دست می‌آید

$$۶ \sum_{۱\le i\le ۵} |A_i| - ۶ \sum_{۱\le i<j\le ۵} |A_i \cap A_j| + ۴ \sum_{۱\le i<j<k\le ۵} |A_i \cap A_j \cap A_k| \le ۱۰ \qquad (۳)$$

برای هر $۱ \le n \le ۵$، تعداد لامپ‌هایی که به دقیقا n کلید متصل‌اند را a_n می‌نامیم. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$\sum_{۱\le i\le ۵} |A_i| = \binom{۱}{۱} a_۱ + \binom{۲}{۱} a_۲ + \binom{۳}{۱} a_۳ + \binom{۴}{۱} a_۴ + \binom{۵}{۱} a_۵$$

$$\sum_{۱\le i<j\le ۵} |A_i \cap A_j| = \binom{۲}{۲} a_۲ + \binom{۳}{۲} a_۳ + \binom{۴}{۲} a_۴ + \binom{۵}{۲} a_۵$$

$$\sum_{۱\le i<j<k\le ۵} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{۳}{۳} a_۳ + \binom{۴}{۳} a_۴ + \binom{۵}{۳} a_۵$$

با قرار دادن این سه تساوی در رابطه (۳) و ساده کردن آن به‌دست می‌آید

$$۶a_۱ + ۶a_۲ + ۴a_۳ + ۴a_۴ + ۱۰a_۵ \le ۱۰ \Longrightarrow a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ \le \frac{۱۰}{۴} \qquad (۴)$$

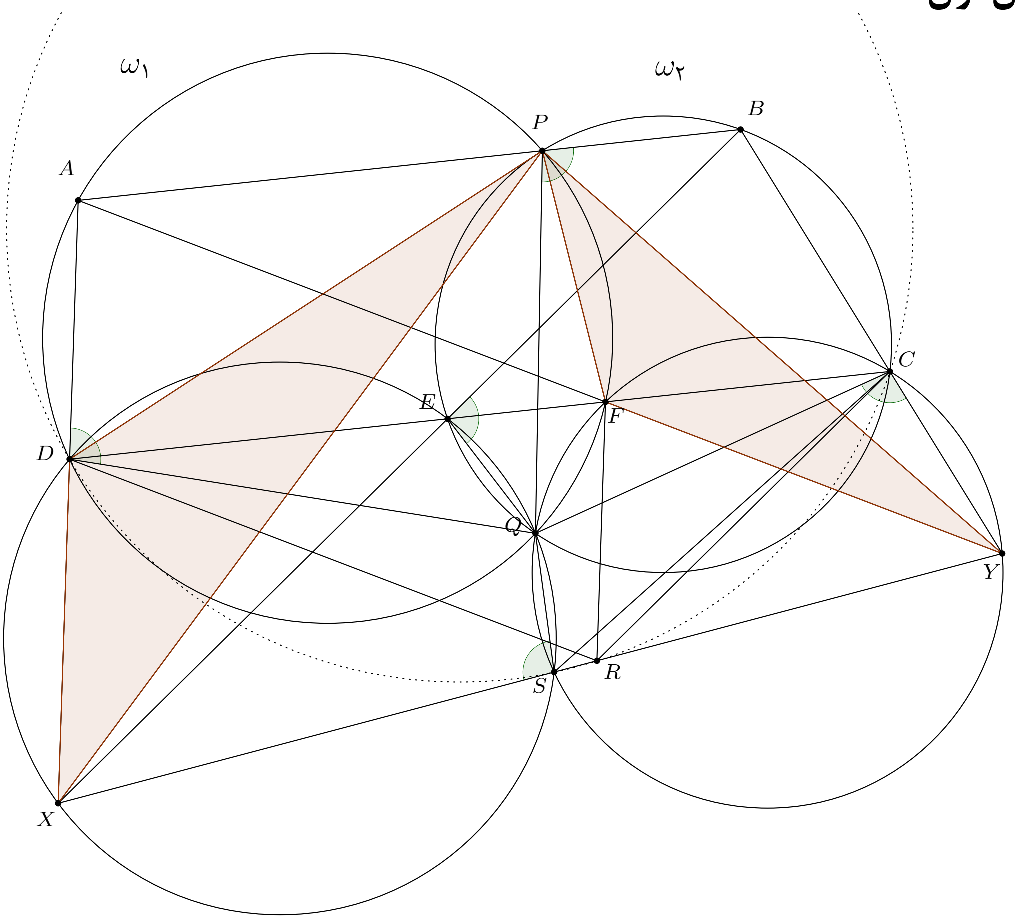
دقت کنید که مشابه راه‌حل دوم می‌دانیم اجتماع A_iها حداقل ۳ عضو دارد و از طرف دیگر تعداد اعضای اجتماع A_iها برابر است با $a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵$ که این با رابطه (۴) در تناقض است پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود.

۶. دو دایره ω_1 و ω_2 یک‌دیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و ω_1 و ω_2 را به‌ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا ω_1 را در D و F و ω_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

راه‌حل اول.



الف) دقت کنید که

$$\angle QEB = \angle QPB = \angle QDA \Longrightarrow \angle QEX = \angle QDX$$

پس چهارضلعی $XDEQ$ محاطی است و به طور مشابه چهارضلعی $YCFQ$ نیز محاطی است. محل برخورد دوم دایره محیطی این دو چهارضلعی را S می‌نامیم. واضح است که $\angle QSX = \angle QEB = \angle QCY$ پس X, S, Y هم‌خط‌اند. محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث DSC با XY را R' می‌نامیم. داریم

$$\angle R'DC = \angle R'SC = \angle YSC = \angle YFC = \angle FAP = \angle FDP = \angle CDP$$

و به طور مشابه به‌دست می‌آید $\angle R'CD = \angle DCP$ پس R' قرینه P نسبت به CD است و $R \equiv R'$

درنتیجه حکم این قسمت ثابت شد.

ب) واضح است که $FR = FP = AD$ و $RD = PD = AF$ پس $AFRD$ متوازی‌الاضلاع است و $RD \parallel AF$ و $RF \parallel AD$. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{RY}{RX} = \frac{AD}{DX} = \frac{PF}{DX}$$

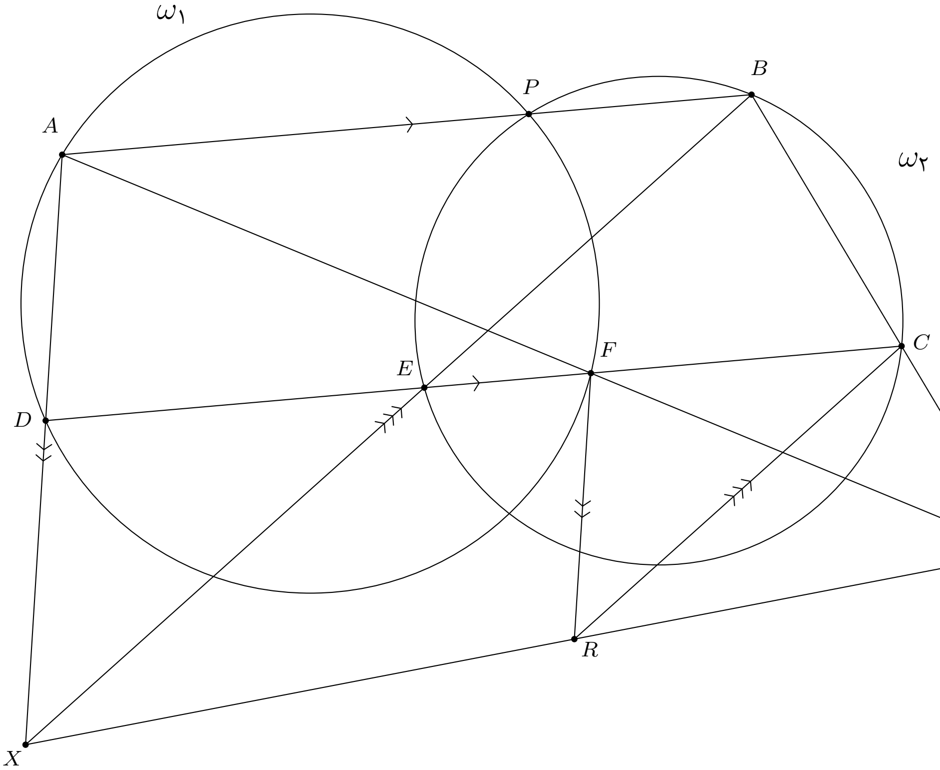
هم‌چنین طبق قضیه نیم‌ساز حکم معادل است با $\frac{PY}{PX} = \frac{RY}{RX}$ پس کافیست نشان دهیم $\frac{PF}{DX} = \frac{PY}{PX}$. ثابت می‌کنیم $\triangle PDX \sim \triangle YFP$ و از این حکم به‌دست می‌آید. دقت کنید که $\angle ADP = \angle AFP$ پس $\angle PDX = \angle PFY$ در نتیجه کافی‌است نشان دهیم

$$\frac{PD}{DX} = \frac{FY}{FP} \Longleftrightarrow \frac{AF}{FY} = \frac{DX}{AD}$$

از آن‌جا که $RD \parallel AF$ و $RF \parallel AD$ دو طرف رابطه آخر با $\frac{RX}{RY}$ برابر است و حکم این قسمت نیز ثابت می‌شود.

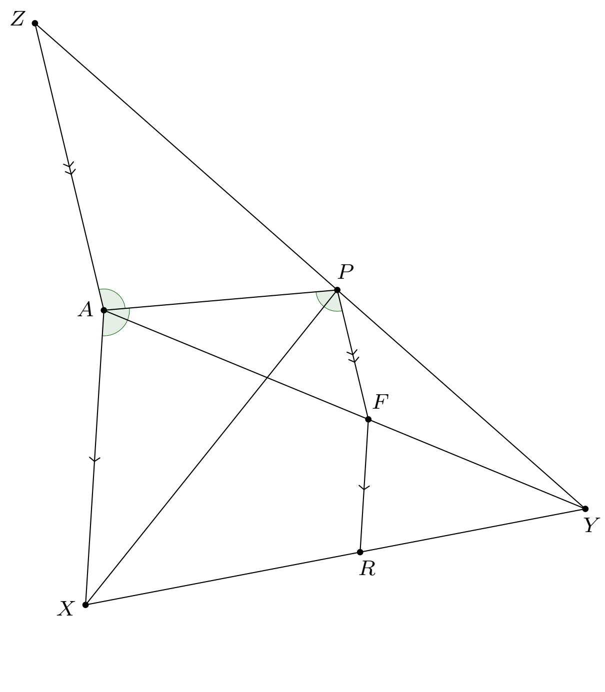
راه‌حل دوم.

الف)



دقت کنید که چهارضلعی‌های $PBCE$ و $ADFP$ ذوزنقه متساوی‌الساقین هستند در نتیجه $\angle RFD = \angle ADF = \angle PFD$ پس $AX \parallel RF$ و $\angle PBE = \angle PCF = \angle FCR$ پس $BX \parallel RC$. حالا دو مثلث RFC و XAB را در نظر بگیرید. اضلاع این دو مثلث دوبه‌دو با هم موازی‌اند پس خطوطی که رئوس متناظر را به هم متصل می‌کنند در یک نقطه همرس‌اند (به این مثلث‌ها اصطلاحاً مثلث‌های متجانس می‌گوییم و این حکم نیز با قضیه تالس به‌راحتی اثبات می‌شود) یعنی خطوط BC و AF و XR همرس‌اند که همان حکم سوال است.

ب)



از نقطه A خطی موازی با PF رسم می‌کنیم تا PY را در Z قطع کند. طبق قضیه تالس داریم

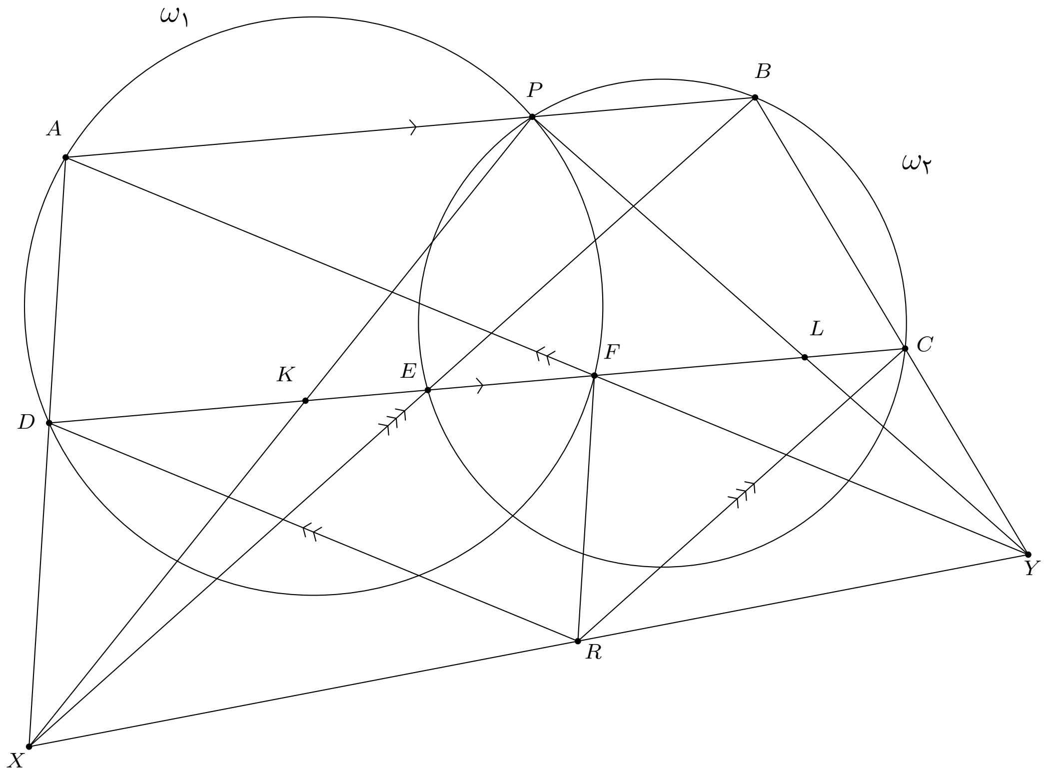
$$\frac{PF}{AZ} = \frac{YF}{YA} = \frac{FR}{AX}$$

پس از آن‌جا که $PF = FR$ نتیجه می‌شود $AX = AZ$. از طرف دیگر دقت کنید که $\angle ZAP = \angle FPA = \angle XAP$ پس دو مثلث ZAP و XAP به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت می‌شوند که نتیجه می‌دهد $ZP = PX$. در نهایت طبق قضیه تالس به‌دست می‌آید

$$\frac{PY}{PX} = \frac{PY}{PZ} = \frac{FY}{FA} = \frac{RY}{RX}$$

و حکم طبق قضیه نیم‌ساز نتیجه می‌شود.

راه‌حل سوم.

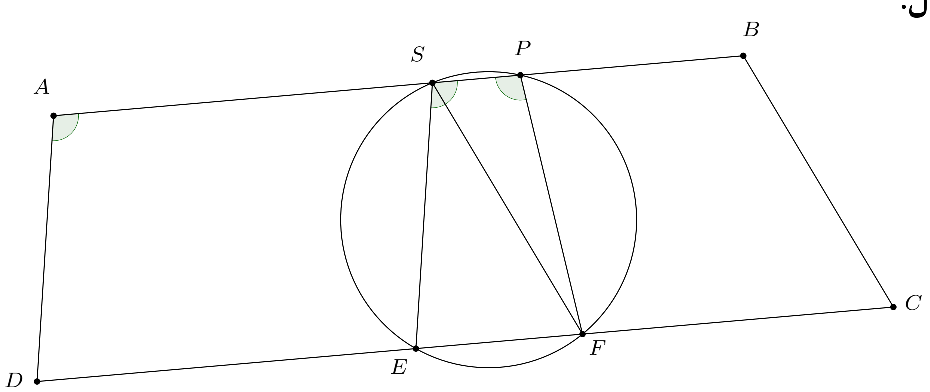


الف) مشابه راه‌حل دوم می‌توان ثابت کرد $BX \parallel RC$ و $AY \parallel RD$. حالا از C موازی با BX رسم می‌کنیم تا XY را در R' قطع کند. اگر نشان دهیم $R'D \parallel AY$ نتیجه می‌شود R' همان R است و حکم این قسمت ثابت می‌شود. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{R'Y}{YX} = \frac{YC}{YB} = \frac{CF}{AB} \qquad (۱)$$

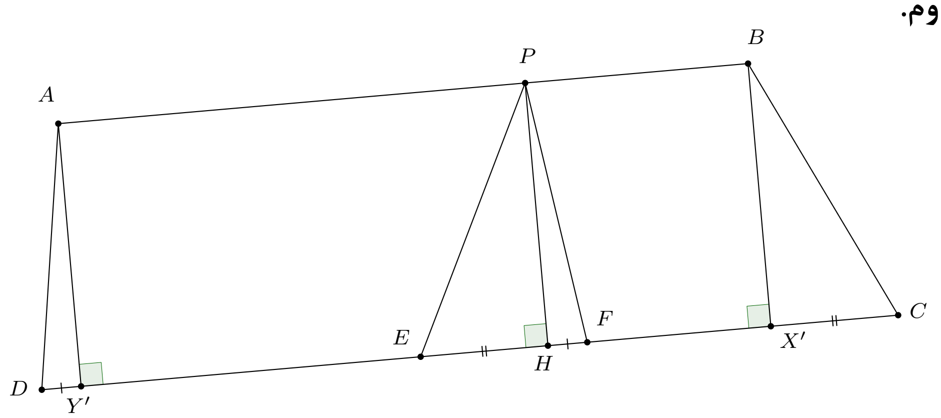
و طبق عکس قضیه تالس باید نشان دهیم $\frac{R'X}{XY} = \frac{XD}{AX}$ یا معادلاً $\frac{R'X}{XY} = \frac{DE}{AB}$ پس طبق رابطه (۱) حکم معادل است با $DE + CF = AB$. این حکم معادل را به دو روش نشان می‌دهیم:

روش اول.



محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث PEF با AB را S می‌نامیم. واضح است که چهارضلعی $SPFE$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است پس داریم $\angle DAP = \angle FPA = \angle PSE$ در نتیجه $SE \parallel AD$ از این هم به‌دست می‌آید چهارضلعی $ASED$ متوازی‌الاضلاع است و $AS = DE$. مشابهاً ثابت می‌شود $BS = CF$ و حکم معادل ثابت می‌شود.

روش دوم.



از نقاط A، B و P بر CD عمود می‌کنیم و پای عمودها را به ترتیب Y'، X' و H می‌نامیم. می‌دانیم که $PF = AD$ و $PH = AY'$ پس دو مثلث PHF و $AY'D$ هم‌نهشتند که نتیجه می‌دهد $DY' = HF$ و مشابهاً $CX' = HE$. حالا داریم

$$DE + CF = DY' + Y'E + CX' + X'F = HF + Y'E + HE + X'F = X'Y'$$

هم‌چنین $ABX'Y'$ مستطیل است پس $X'Y' = AB$ و حکم معادل به‌دست می‌آید.

ب) محل برخورد PX و PY با CD را به ترتیب K و L می‌نامیم. کافیست نشان دهیم مثلث KPL متساوی‌الساقین است. این حکم را به دو روش نشان می‌دهیم:

روش اول. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{YL}{LP} = \frac{YC}{CB} = \frac{YR}{RX}$$

پس از عکس قضیه تالس به‌دست می‌آید $LR \parallel PX$ و به‌طور مشابه $KR \parallel PY$. در نتیجه چهارضلعی $PLRK$ یک متوازی‌الاضلاع است و $PK = LR = PL$.

روش دوم. نشان می‌دهیم $KH = LH$ و از این حکم سوال به‌دست می‌آید. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{KE}{ED} = \frac{PB}{AB} \Longrightarrow KE = \frac{ED \cdot PB}{AB} \qquad (۲)$$

هم‌چنین

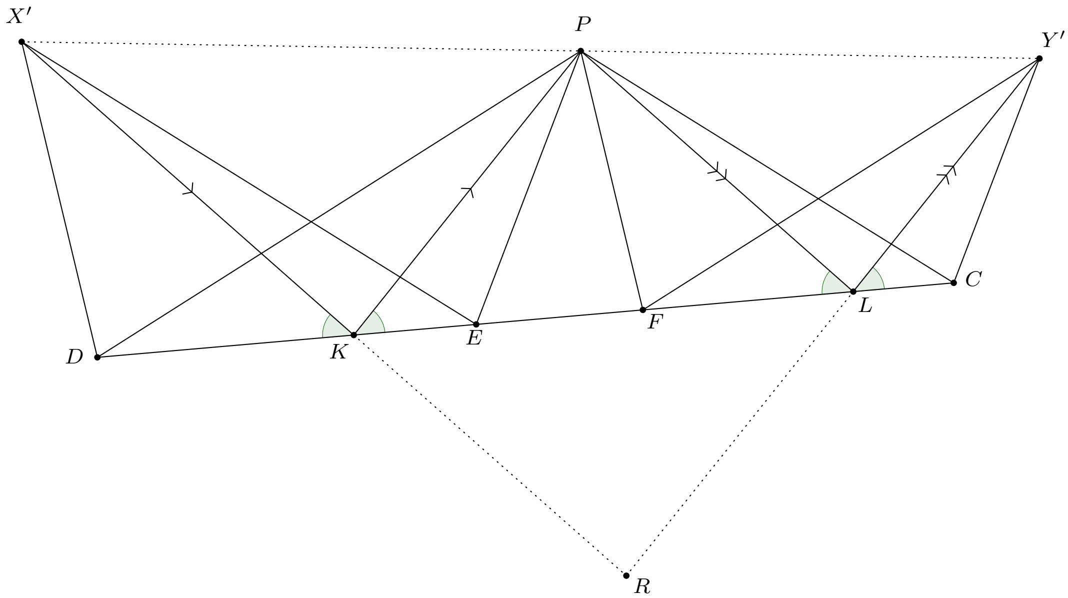
$$ED = DY' + Y'E = HF + Y'E = Y'F - EH = AP + HF - EH \qquad (۳)$$

حالا با استفاده از روابط (۲) و (۳) طول KH را محاسبه می‌کنیم:

$$KH = KE + EH \overset{(۲)}{=} \frac{ED \cdot PB}{AB} + EH \overset{(۳)}{=} \frac{AP \cdot BP + HF \cdot BP - EH \cdot BP + EH \cdot AB}{AB}$$
$$= \frac{AP \cdot BP + HF \cdot BP + HE \cdot AP}{AB}$$

به طور مشابه می‌توانیم طول LH را محاسبه کنیم و به‌راحتی می‌توان دید $KH = LH$.

راه‌حل چهارم.



الف) قرینه X و Y نسبت به CD را به ترتیب X' و Y' می‌نامیم. حکم سوال معادل با هم‌خطی X', P, Y' می‌شود. دقت کنید از آن‌جا که $\angle XDF + \angle PFD = ۱۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود $X'D \parallel PF$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $X'E \parallel PC$، $Y'F \parallel PD$ و $Y'C \parallel PE$ همچنین $DE \parallel CF$ در نتیجه دو چهارضلعی $X'DEP$ و $PFCY'$ با هم متجانس‌اند پس $X'P \parallel PY'$ که هم‌خطی X', P, Y' را نتیجه می‌دهد.

ب) از نقطه X' پرتویی به خط CD می‌تابانیم که بازتاب آن از P بگذرد هم‌چنین پرتوی دیگری از نقطه P و با همان زاویه به خط CD می‌تابانیم طبق تجانسی که بیان کردیم بازتاب این پرتو از Y' می‌گذرد. محل برخورد این دو پرتو با CD را به ترتیب K و L می‌نامیم. دقت کنید که $\angle RKL = \angle PKL = \angle X'KD$ پس $X'K$ از R می‌گذرد و به‌طور مشابه $Y'L$ نیز از R می‌گذرد. حالا واضح است که چهارضلعی $PKRL$ یک لوزی است پس نیم‌ساز زاویه $\angle KRL$ که همان نیم‌ساز زاویه $\angle X'RY'$ است از P می‌گذرد و این معادل حکم سوال است.

نکته. تمام قضایایی که با استفاده از تجانس در راه‌حل بیان شده با تشابه مثلث‌ها به‌راحتی قابل اثبات است.

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۱) در این سؤال منظور از (a,b)، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b است.

الف) ثابت کنید دنبالهٔ a_1، a_2، a_3 و... از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$ که $i < j$

$$(a_i + j, a_j + i) = 1.$$

ب) گیریم p عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید دنبالهٔ a_1، a_2، a_3 و... از اعداد طبیعی وجود دارد به‌طوری‌که هیچ‌کدام از عبارات $(a_i + j, a_j + i)$ (که $i < j$) بر p بخش‌پذیر نباشند.

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۲) نقطهٔ P داخل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، که در آن $AB \parallel CD$، طوری انتخاب شده که $\widehat{APB} > \widehat{ADC}$ و $\widehat{DPC} > \widehat{ABC}$. ثابت کنید $AB + CD > AD - BC$.

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۳) جدولی $n \times n$ داریم که n بر ۳ بخش‌پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیرجدول $m \times m$ از آن، که $m > 1$، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

۴) گیریم x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که $x^{4} - y^{4} = x - y$. ثابت کنید:

$$\frac{x-y}{x^{6}-y^{6}} \leq \frac{4}{3}(x+y).$$

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۵) پنج کودک باهوش دور میزی دایره‌ای نشسته‌اند. مربی تعدادی سیب را بین آن‌ها تقسیم می‌کند و می‌گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده‌ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هر کس علاوه بر این‌که تعداد سیب‌های خودش را می‌داند، سیب‌های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می‌بینند.» سپس او تعداد کل سیب‌ها را اعلام می‌کند و از هر کس می‌خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه‌رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب‌ها کم‌تر از ۱۶ باشد، دست‌کم یکی از کودکان می‌تواند با استدلال جواب درست را به‌دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب‌ها ۱۶ باشد، مربی می‌تواند سیب‌ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۶) X را نقطه‌ای متغیر روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم. از X بر AB و AC دو عمود رسم می‌کنیم تا خط گذرنده از BC را به‌ترتیب در P و Q قطع کنند. مرکز دایرهٔ گذرنده از X، P و Q را Y می‌نامیم. (اگر X، P و Q بر هم منطبق باشند همان نقطه را Y می‌گیریم.)

الف. ثابت کنید اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، با تغییر X روی دایرهٔ محیطی، Y روی یک دایره حرکت می‌کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر X روی دایرهٔ محیطی، Y روی یک دایره حرکت کند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

در صورت لزوم از این قسمت

به عنوان چرک نویس

استفاده کنید

مطالب این قسمت

تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد

به نام او

در ادامه، راه‌حل سؤال‌های آزمون مرحلهٔ دوم سی و پنجمین المپیاد ریاضی آمده است. در این مورد لازم است به چند نکته اشاره شود:

۱. از نظر کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی راه‌حل‌های این سؤالات محدود به این‌ها نیست و هر راه‌حل درستی مورد قبول قرار خواهد گرفت.

۲. کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی و تیم مصحح هر سؤال، تا قبل از شروع تصحیح برگه‌ها و در طول تصحیح تلاش خواهند کرد راه‌حل‌های دیگر را نیز شناسایی کنند و در بارم‌بندی به آن‌ها توجه داشته باشند.

۳. آن‌چه در ادامه می‌آید ممکن است در بیان برخی جزئیات کامل نباشد زیرا هدف این است که دبیران و دانش‌آموزان عزیز با کلیات راه‌حل‌ها آشنا شوند و اگر راه‌حل دیگری دارند آن را به اطلاع کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی برسانند.

۴. لطفاً اگر می‌خواهید راه‌حل جدیدی ارسال کنید، آن را بادقت و منظم بنویسید. حتماً راه‌حل‌های موجود را مطالعه فرمایید و از فرستادن راه‌حل تکراری اجتناب کنید.

با تشکر،
کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی
اردیبهشت ۱۳۹۶

۱. در این سؤال منظور از (a,b)، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b است.

الف) ثابت کنید دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و... از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$ که $i < j$

$$\left(a_i + j, a_j + i\right) = ۱.$$

ب) گیریم p عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و... از اعداد طبیعی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i,j \in \mathbb{N}$، که $i < j$، عبارت $\left(a_i + j, a_j + i\right)$ بر p بخش‌پذیر نباشد.

راه حل:

الف) اگر i، a_i، j و a_j همگی زوج یا همگی فرد باشند $(a_i + j, a_j + i)$ زوج می‌شود. پس به جز حداکثر دو مقدار i زوجیت i و a_i متفاوت است پس i و j وجود دارند که i فرد و j زوج باشد و a_i زوج و a_j فرد باشد که مجدداً $(a_i + j, a_j + i)$ زوج می‌شود.

ب) دنباله را چنین می سازیم:

$$a_n = pn - n + ۱$$

اگر $p|pn - n + ۱ + m$ و $p|pm - m + ۱ + n$ با کم کردن دو رابطه داریم:

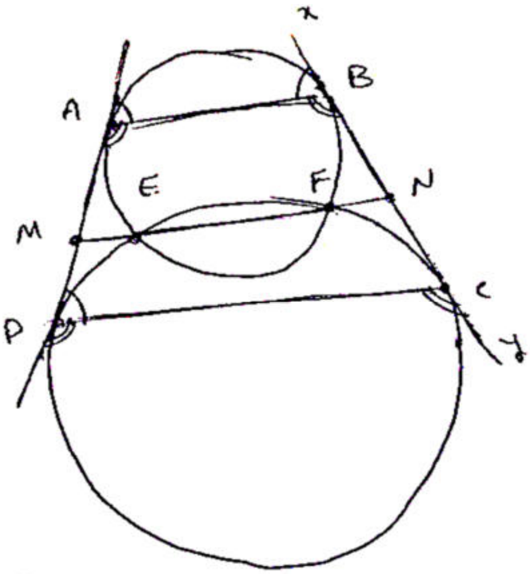
$$p|n - m$$

اگر با رابطه اول جمع کنیم $p|pn + ۱$، که تناقض است.

نکته: راه‌های دیگری هم برای ساختن این دنباله وجود دارد.

۲. نقطهٔ P داخل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، که در آن $AB \parallel CD$، طوری انتخاب شده که $\widehat{APB} > \widehat{ADC}$ و $\widehat{DPC} > \widehat{ABC}$. ثابت کنید $AB + CD > AD + BC$.

راه‌حل:



در ذوزنقه متساوی‌الساقین می‌دانیم $\hat{ADC} = \hat{ABx}$ و $\hat{ABC} = \hat{DCy}$.

اگر دایره‌ای بکشیم که در A و B بر AD و BC مماس باشند. می‌دانیم که نقطه P درون این دایره است. چرا که $\hat{APB} > \hat{ABx}$. همچنین اگر دایره‌ای بکشیم که در C و D بر BC و AD مماس باشد به دلیل مشابه می‌دانیم که نقطه P درون این دایره است. پس این دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر این دو نقطه را E و F بنامیم و EF را رسم کنیم تا AD و BC را در M و N قطع کند. داریم:

$NF \cdot NE = NB^2 = NC^2 \xRightarrow{\text{طبق نامساوی}} NF + NE > NB + NC$

$ME \cdot MF = MA^2 = MD^2 \xRightarrow{\text{حسابی هندسی}} ME + MF > MA + MD$

حال اگر دو نامساوی را با هم جمع کنیم داریم:

$2MN > AD + BC$

وچون M و N وسط دو ساق هستند داریم:

$2MN = AB + DC$

پس حکم مسئله ثابت می‌شود

$AB + DC > AD + BC$

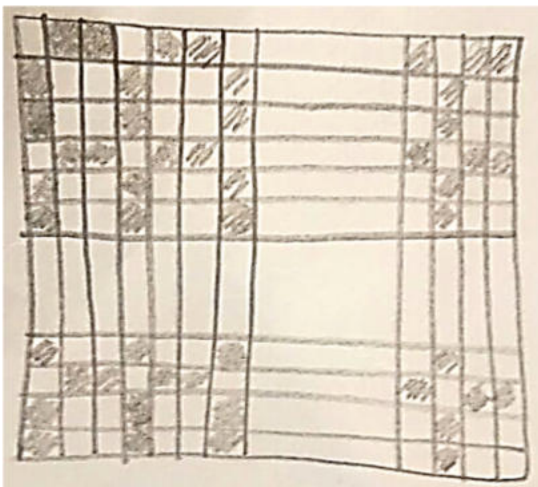
۳. جدولی $n \times n$ داریم که n بر ۳ بخش‌پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیرجدول $m \times m$ از آن، که $m > ۱$، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

راه‌حل:

فرض کنید n برابر $۳k$ باشد. نشان می‌دهیم جواب مسأله برابر $۴k^۲$ است:

اگر جدول را به مربع‌های ۳×۳ افراز کنیم، به تعداد $k^۲$ مربع به وجود می‌آید که در هر یک حداکثر ۴ خانهٔ سیاه داریم، در نتیجه حداکثر $۴k^۲$ خانهٔ سیاه داریم. (۱)

شکل زیر مثالی با $۴k^۲$ خانهٔ سیاه را نشان می‌دهد، زیرا هر جدول ۳×۳ دقیقاً ۴ خانهٔ سیاه در آن دارد.



در این شکل رنگ‌آمیزی در راستاهای افقی و عمودی تناوب ۳ دارند.

یک زیرمربع $m \times m$ دل‌خواه را در نظر بگیرید. با استقرا روی m ثابت می‌کنیم مربع $m \times m$ روی این جدول ویژگی مسأله را دارد.

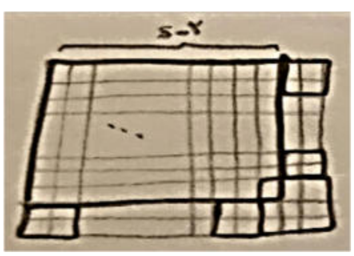
پایهٔ استقرا: $m = ۲,۳$ با بررسی ۹ حالت ۲×۲ و ۹ حالت ۳×۳ می‌بینیم که رنگ‌آمیزی ارائه‌شده این ویژگی را دارد.

حکم را برای $m = ۲,۳,\ldots,s-۱$ فرض می‌کنیم و برای $m = s$ ثابت می‌کنیم.

در حالتی که s زوج است:

زیر مربع $s \times s$ را به مربع‌های ۲×۲ افراز می‌کنیم و طبق فرض استقرا هر مربع ۲×۲ در جدول حداکثر ۲ مربع سیاه دارد، پس مربع $s \times s$ نیز حداکثر نصف خانه‌هایش سیاه است.

در حالتی که s فرد است:



با توجه به فرض استقرا تعداد خانه‌های سیاه مربع $s \times s$ کوچک‌تر یا مساوی عبارت زیر است:

$$\frac{(s-۲)^۲-۱}{۲} + ۲ \times \left(۲ \times \frac{s-۳}{۲}\right) + \frac{۳^۲-۱}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲}(s^۲ - ۴s + ۴ - ۱ + ۴s - ۱۲ + ۹ - ۱)$$
$$= \frac{s^۲-۱}{۲}$$

۴. گیریم x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که $x^۴ - y^۴ = x - y$. ثابت کنید:

$$\frac{x-y}{x^۶ - y^۶} \leq \frac{۴}{۳}\left(x+y\right).$$

راه‌حل:

می‌دانیم

$$x^۳ + x^۲y + xy^۲ + y^۳ = ۱ \Rightarrow (x^۲ + y^۲)(x+y) = ۱$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
&x^۶ - y^۶ \geq \frac{۳}{۴}\frac{(x-y)}{x+y} \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq \frac{۳}{۴}(x^۲ + y^۲)(x-y) \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq \frac{۳}{۴}(x^۲ + y^۲)(x^۴ - y^۴) \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq -۳x^۲y^۴ + ۳x^۴y^۲ \\
&\Leftrightarrow x^۶ - y^۶ \geq ۳x^۲y^۲(x^۲ - y^۲) \\
&\Leftrightarrow x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ \geq ۳x^۲y^۲ \\
&\Leftrightarrow x^۲ - y^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

در نتیجه نابرابری مورد نظر برقرار است.

۵. پنج کودک باهوش دور میزی دایره‌ای نشسته‌اند. مربی تعدادی سیب را بین آن‌ها تقسیم می‌کند و می‌گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده‌ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هر کس علاوه بر این‌که تعداد سیب‌های خودش را می‌داند، سیب‌های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می‌بیند.» سپس او تعداد کل سیب‌ها را اعلام می‌کند و از هر کس می‌خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه‌رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب‌ها کم‌تر از ۱۶ باشد، دست‌کم یکی از کودکان می‌تواند با استدلال جواب درست را به‌دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب‌ها ۱۶ باشد، مربی می‌تواند سیب‌ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

راه‌حل:

الف) فرض می‌کنیم هیچ کودکی نتواند با استدلال جواب سؤال مذکور را بدهد و مجموع تعداد سیب‌ها دست‌کم ۱۶ است و به تناقض می‌رسیم.

لم) ثابت می‌کنیم جمع تعداد سیب‌های هر دو کودک مجاور دست‌کم ۵ است.

اولاً جمع تعداد سیب‌های دو کودک مجاور ۱ نیست چرا که تنها حالت ممکن ۰ سیب و ۱ سیب است و تفاضل یکتا مشخص می‌شود.

اگر جمع ۲ باشد نیز تنها حالت ۰ و ۲ ممکن است، زیرا تعداد سیب‌های هیچ دو کودکی برابر نیست.

اگر جمع تعداد سیب‌های دو کودک مجاور ۳ باشد با توجه به این‌که تنها دو حالت $\{0,3\}$ یا $\{1,2\}$ ممکن است رخ داده باشد، پس تعداد سیب‌های کودکان دیگر نباید از اعضای مجموعهٔ $\{0,1,2,3\}$ باشد. پس جمع کل دست‌کم برابر با $6+5+4+3$ یعنی ۱۸ است که از ۱۶ بیش‌تر می‌شود.

به طور مشابه اگر جمع تعداد سیب‌های دو کودک مجاور ۴ باشد دو حالت داریم. پس تعداد سیب بقیه از مجموعهٔ $\{0,1,3,4\}$ نیست. پس جمع کل دست‌کم $17 = 6+5+2+4$ و از ۱۶ بیش‌تر است.

پس جمع تعداد سیب‌های هر دو کودک مجاور دست‌کم ۵ است. (لم اثبات شد.)

اگر ثابت کنیم یکی از کودکان دست‌کم ۶ سیب دارد مسأله حل می‌شود زیرا چهار نفر دیگر دو تا دو تا مجاورند پس طبق لم مجموعاً دست‌کم ۱۰ سیب دارند و تعداد کل سیب‌ها ۱۶ یا بیش‌تر خواهد شد.

اگر کودکی بدون سیب وجود داشته باشد طبق لم کودکان مجاورش باید ۵ و ۶ سیب داشته باشند که نتیجه مورد نظر ما را می‌دهد. لذا کافی است حالتی که تعداد سیب‌ها $\{1,2,3,4,5\}$ است را رد کنیم.

ابتدا توجه کنید در چینش این اعداد دور میز، ۱ باید مجاور ۴ و ۵ باشد که می‌دانیم $5 = 4+1$ و تنها حالات $\{0,5\}$ و $\{2,3\}$ می‌ماند که چون ۵ آمده $\{2,3\}$ نمی‌توانند بیایند، پس تناقض است و در نتیجه حکم مسأله ثابت شد.

ب) مثال $\{1,4,3,2,6\}$ جواب است چرا که جمع مجاورها ۷، ۸، ۵، ۷ و ۵ است. هر کدام از دو عدد مجاور، از نظر کودک روبه‌رویی می‌توانست یکی صفر و دیگری جمعشان باشد. مثلاً $\{4,3\}$ می‌توانست $\{0,7\}$ باشد. (توجه کنید که $\{0,5,7,8\}$ در مجموعهٔ اعداد روی دایره ظاهر نشده است.)

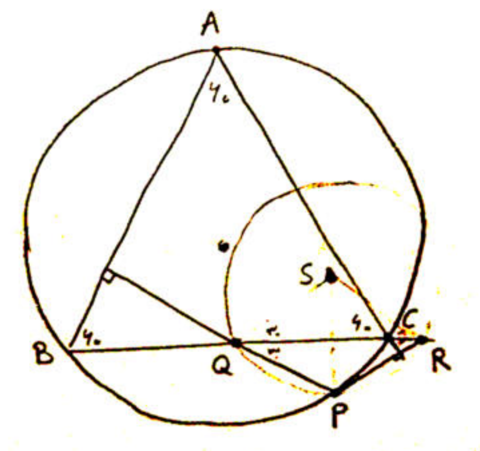
۶. X را نقطه‌ای متغیر روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم. از X بر AB و AC دو عمود رسم می‌کنیم تا خط گذرنده از BC را به‌ترتیب در P و Q قطع کنند. مرکز دایرهٔ گذرنده از X، P و Q را Y می‌نامیم. (اگر X، P و Q بر هم منطبق باشند همان نقطه را Y می‌گیریم.)

الف. ثابت کنید اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، با تغییر X روی دایرهٔ محیطی، Y روی یک دایره حرکت می‌کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر X روی دایرهٔ محیطی، Y روی یک دایره حرکت کند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

راه‌حل:

الف) چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، Q و R هر دو ۳۰ درجه هستند و در نتیجه $PQ = PR$. فرض کنید S مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PQR باشد.

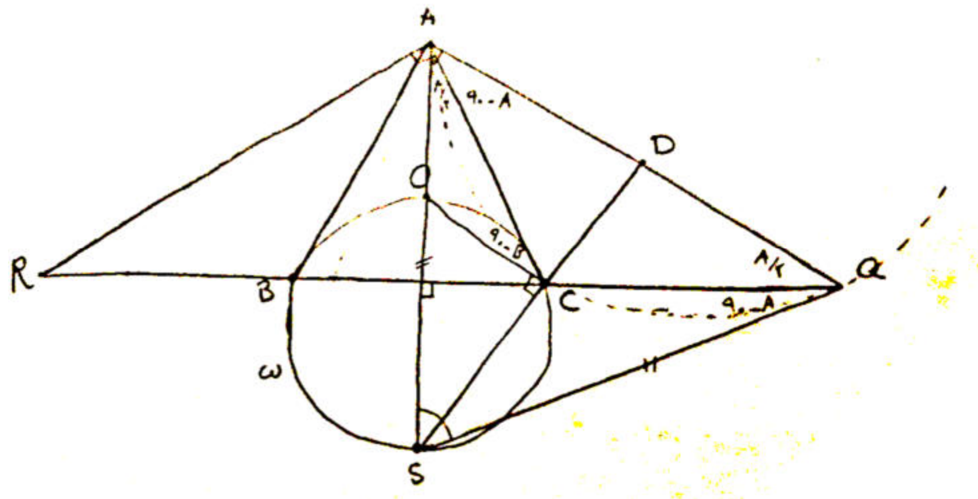


داریم $\widehat{QPR} = ۱۲۰ - ۲ \times ۳۰$ در نتیجه اندازهٔ کمان QR برابر ۱۲۰ درجه است و لذا $\widehat{QSR} = ۱۲۰$.

چون $SQ = SR$ پس SQR و SRQ هر دو ۳۰ درجه هستند. پس مثلث‌های PQR و SQR نسبت به BC قرینه‌اند پس S قرینهٔ P نسبت به BC است و حکم ثابت می‌شود.

ب) اگر P روی B یا C باشد به‌وضوح S مرکز دایرهٔ محیطی PQR روی B و C می‌افتد. اکنون اگر P روبه‌رو قطری A باشد S روی O قرار می‌گیرد. حال از روبه‌رو قطری A موازی BC رسم می‌کنیم و تقاطع آن با BC را P می‌گیریم. در این صورت مثلث PQR با حالت قبل متشابه بوده و انتقال‌یافتهٔ آن به موازات BC است در نتیجه مرکز این دایره نیز انتقال‌یافتهٔ O با بردار PP' است. اما واضح است که B و C و O و S روی یک دایره نیستند مگر این‌که PP' طول آن‌ها صفر داشت، که یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد. حال به دو روش نشان می‌دهیم اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ برابر ۶۰ درجه است.

روش اول: P را روی رأس A در نظر می‌گیریم.



چون مثلث متساوی‌الساقین است عمودمنصف RQ همان ارتفاع است. فرض می‌کنیم این عمودمنصف، دایرهٔ w، مکان هندسی را غیر از O در S قطع کند. O مرکز دایرهٔ AQR نیست چرا که در این صورت

$$OB = OA = OR$$

که ممکن نیست. پس S مرکز آن است. داریم:

$$SA = SQ \Rightarrow SAQ = SQA$$

$$\left.\begin{array}{r} CAQ = BAQ - BAC = ۹۰ - \hat{A} \\ SAC = \dfrac{\hat{A}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow SAQ = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

از عبارات بالا نتیجه می‌شود:

$$SQA = SAQ = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow ASQ = ۱۸۰ - ۲(۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}) = \hat{A}$$

$$\Rightarrow CQA = ۹۰ - ASQ = ۹۰ - \hat{A}, AQS = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow AQC = \frac{\hat{A}}{۲}$$

هم‌چنین داریم:

$$ACD = ۱۸۰ - ۹۰ - (۹۰ - B) = \hat{B}$$

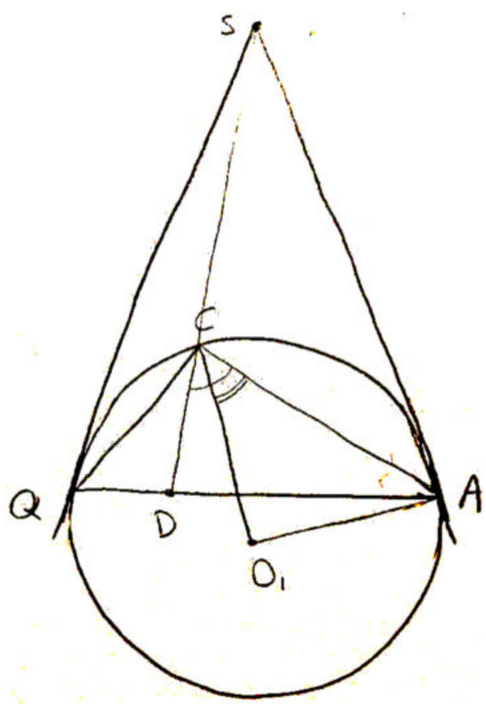
در دایرهٔ محیطی ACQ داریم:

$$CAS = \frac{\hat{A}}{۲} = AQC = \frac{\text{کمان } AC}{۲}$$

$$CQS = ۹۰ - \hat{A} = CAQ = \frac{\text{کمان } CQ}{۲}$$

در نتیجه AS و QS بر دایرهٔ محیطی ACQ مماس هستند.

اگر $O_۱$ را مرکز دایرهٔ محیطی ACQ بگیریم داریم:



$$CO_۱A = \text{کمان } AC = ۲CQA = \hat{A}$$

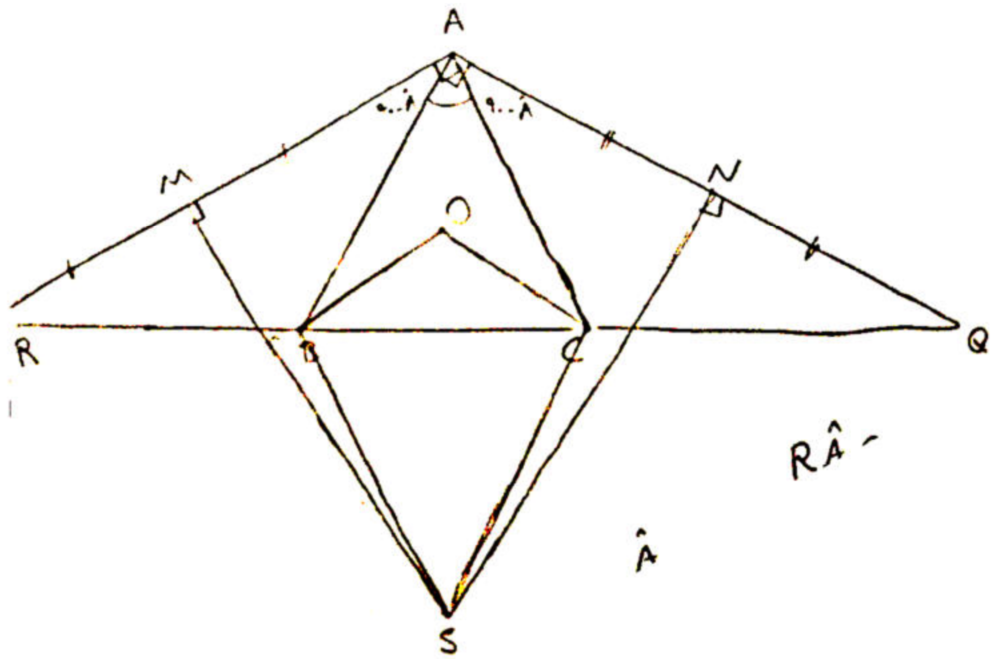
$$CAO_۱ = ACO_۱ = \frac{۱۸۰ - CO_۱A}{۲} = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

از طرفی داشتیم $ACD = \hat{B} = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$، پس $ACD = ACO_۱$. در نتیجه C روی $AO_۱$ است و

$$AC = CQ$$

و در نتیجه $CAQ = CQA$ و لذا $۹۰ - \hat{A} = \frac{\hat{A}}{۲}$ پس $\frac{۳}{۲}\hat{A} = ۹۰$ و این یعنی $\hat{A} = ۶۰$.

روش دوم: از برهان خلف استفاده می‌کنیم، فرض کنید $\hat{A} < ۶۰$.



با توجه به این‌که $RAQ = ۱۸۰ - \hat{A}$ داریم $R = Q = \frac{\hat{A}}{۲}$.

$$\hat{A} < ۶۰ \Rightarrow ۹۰ - \hat{A} > \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow RB > AB\,, QC > AC$$

در نتیجه نقاط A و B در یک طرف عمودمنصف AR، و نقاط A و C در یک طرف عمودمنصف AQ هستند پس $MSN > BSC$ و از طرفی چون $MANS$ و $BOCS$ محاطی هستند داریم:

$$\left.\begin{array}{r} MSN = ۱۸۰ - MAN = \hat{A} \\ BSC = ۱۸۰ - BOC = ۱۸۰ - ۲\hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸۰ - ۲\hat{A} < \hat{A} \Rightarrow \hat{A} > ۶۰$$

که با فرض $\hat{A} < ۶۰$ در تناقض است.

اگر هم فرض کنیم $\hat{A} > ۶۰$ این بار تمام نابرابری‌های فوق برعکس می‌شوند و نتیجه می‌شود $\hat{A} < ۶۰$ که باز تناقض است. فقط باید توجه شود که در مواقعی که S و A در یک سمت BC قرار دارند منظور از زاویهٔ BSC قسمت بزرگ آن است.

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

معاونت دانش‌پژوهان جوان

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی - روز اول

تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۹ – ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگهٔ اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوال‌ها را در برگهٔ چرک‌نویس، حل کرده و سپس در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامهٔ حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستان از بین دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

بسم الله الرحمن الرحیم

سؤالات و راه‌حل‌های مرحلهٔ دوم سی و چهارمین دورهٔ المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

آزمون مرحلهٔ دوم سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۹ و ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحلهٔ اول برگزار شد. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار و نیم ساعت به سه سؤال تشریحی پاسخ دادند.

دفترچهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه‌حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که این دفترچه صرفاً برای هدف آموزشی تهیه شده است و بارم‌بندی تصحیح آزمون، مستقلاً توسط گروهی از کارشناسان تهیه می‌شود.

۱. فرض کنید $0 < a \leq b \leq c$، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

(۷ نمره)

۲. مثلث ABC با دایرهٔ محیطی $w_۱$ مفروض است و داریم $\angle C = ۲\angle B$. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ $w_۱$ رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند. دایرهٔ $w_۲$ را طوری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس باشد و همچنین از نقطهٔ B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. از نقطهٔ E مماس EK را بر دایرهٔ $w_۲$ رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایرهٔ $w_۱$ (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

(۷ نمره)

۳. فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

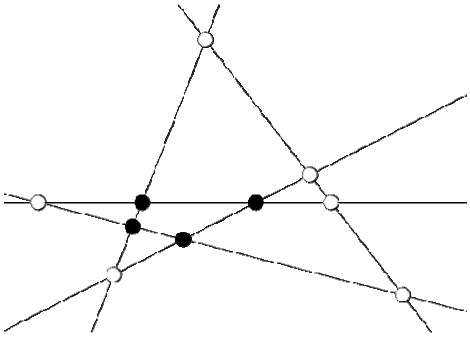
- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجهٔ نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجهٔ نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همهٔ اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجهٔ نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی w_1، w_2، ... و w_6 تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسهٔ مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $i \geq 2$، $w_i = 1$، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.

یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

(۷ نمره)

۴. در صفحه $n \geq ۳$ خط دوبه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطهٔ تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطهٔ تقاطع درونی نشان داده شده است که با دوایر توپر مشخص شده‌اند.)



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

(۷ نمره)

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطهٔ T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیم‌ساز زاویهٔ $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و هم‌چنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.

ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

(۷ نمره)

۶. همهٔ توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y، مقدار $f(x)+f(y)$ بر $x+y$ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x \geq ۱۳۹۵$، نابرابری $x^۳ \geq ۲f(x)$ برقرار است.

(۷ نمره)

۱. فرض کنید $۰ < a \leq b \leq c$، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^۲}{۶c} \leq \frac{a+b+c}{۳} - \frac{۳}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}}.$$

راه‌حل اول. صرفاً برای خلاصه شدن عبارات، تعریف می‌کنیم $S = a + c$ و $P = ac$. در این‌صورت برای سمت راست نابرابری مسأله داریم:

$$R = \frac{a+b+c}{۳} - \frac{۳}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}} = \frac{S+b}{۳} - \frac{۳Pb}{Sb+P}.$$

هدف این است که عبارت اخیر را به عنوان تابعی بر حسب متغیر b مینیمم کنیم؛ توجه کنید که عبارت مورد بحث بر حسب متغیر b شامل یک جزء خطی، یعنی $\frac{S+b}{۳}$ و یک جزء کسری است که مخرج آن $Sb + P$ است. اکنون با تغییر متغیر $t = Sb + P$ عبارت را بازنویسی می‌کنیم و با کمی محاسبهٔ ساده به عبارت زیر می‌رسیم:

$$R = \frac{S+b}{۳} - \frac{۳Pb}{Sb+P} = \frac{S^۲ - ۱۰P}{۳S} + \frac{t}{۳S} + \frac{۳P^۲}{St}.$$

اکنون توجه کنید که حاصل‌ضرب دو جملهٔ آخر، عبارتی بدون متغیر t است. پس طبق نابرابری $u + v \geq ۲\sqrt{uv}$ داریم:

$$R \geq \frac{S^۲ - ۱۰P}{۳S} + ۲\sqrt{\frac{P^۲}{S^۲}} = \frac{S^۲ - ۴P}{۳S} = \frac{(c-a)^۲}{۳(c+a)} \geq \frac{(c-a)^۲}{۶c}.$$

راه حل دوم. برای راحتی در نوشتن، به ازای هر فرمول دلخواه $F(a, b, c)$ بر حسب سه متغیر a، b و c، جمع دوریِ

$$F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b)$$

را با $\sum F(a,b,c)$ نمایش می‌دهیم. با این نمادگذاری سمت راست نابرابری مسأله را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\frac{\sum a}{۳} - \frac{۳}{\sum \frac{۱}{a}} &= \frac{\sum a}{۳} - \frac{۳abc}{\sum ab} = \frac{(\sum a)(\sum ab) - ۹abc}{۳\sum ab} \\ &= \frac{\sum(a^۲b + ab^۲) - ۶abc}{۳\sum ab} = \frac{\sum a(b-c)^۲}{۳\sum ab}.\end{aligned}$$

بنابراین نابرابری مسأله معادل با نابرابری زیر است:

$$\sum a(b-c)^۲ \geq \left(\frac{\sum ab}{۲c}\right)(c-a)^۲. \qquad (۱)$$

اما توجه کنید که با توجه به ترتیب $a \leq b \leq c$، $\frac{ab}{۲c}$ از $\frac{b}{۲}$ بیشتر نیست و در نتیجه برای سمت راست نابرابری بالا داریم:

$$\left(\frac{\sum ab}{۲c}\right)(c-a)^۲ = \left(\frac{ab}{۲c} + \frac{a+b}{۲}\right)(c-a)^۲ \leq (\frac{a}{۲} + b)(c-a)^۲. \qquad (۲)$$

برای سمت چپ نابرابری (۱) هم به دست می‌آید:

$$\sum a(b-c)^۲ \geq b(c-a)^۲ + a\left((c-b)^۲ + (b-a)^۲\right). \qquad (۳)$$

حال توجه کنید که برای هر دو عدد X و Y،

$$(X-Y)^۲ \geq ۰ \implies X^۲ + Y^۲ - ۲XY \geq ۰ \implies ۲(X^۲+Y^۲) \geq (X+Y)^۲$$
$$\implies X^۲ + Y^۲ \geq \frac{(X+Y)^۲}{۲}.$$

در نتیجه اگر قرار دهیم، $X = c-b, Y = b-a$، با استفاده از نابرابری (۳) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sum a(b-c)^۲ \geq b(c-a)^۲ + a\left((c-b)^۲ + (b-a)^۲\right) \geq b(c-a)^۲ + \frac{a}{۲}(c-a)^۲.$$

و این نابرابری به همراه نابرابری (۲)، نابرابری (۱) که معادل حکم مسأله است را نتیجه می‌دهد.

توجه. راه‌حل‌های دیگری برای این سؤال را می‌توانید در صفحهٔ زیر مشاهده کنید:

http://artofproblemsolving.com/community/c6h1234734_iran_inequality

۲. مثلث ABC با دایرهٔ محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ w_1 رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند. دایرهٔ w_2 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس باشد و همچنین از نقطهٔ B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. از نقطهٔ E مماس EK را بر دایرهٔ w_2 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایرهٔ w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه حل اول. اگر محل تقاطع FK و BC را D بنامیم، آنگاه در دایرهٔ w_2 داریم:

$$\left.\begin{array}{lcl}\widehat{ACB} & = & \frac{\widehat{BC}}{2}\\ \widehat{FBC} & = & \frac{\widehat{FC}}{2}\\ \widehat{C} & = & 2\widehat{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{BF} = \widehat{FC},$$

$$\left.\begin{array}{lcl}\widehat{CDK} & = & \frac{\widehat{BF}+\widehat{CK}}{2}\\ \widehat{DKE} & = & \frac{\widehat{FC}+\widehat{CK}}{2}\\ \widehat{BF} & = & \widehat{FC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{EDK} = \widehat{DKE} \Longrightarrow ED = EK. \qquad (4)$$

از طرفی طبق قوت نقطهٔ E نسبت به دو دایرهٔ w_1 و w_2 می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{lcl}EK^2 & = & EC\cdot EB\\ EA^2 & = & EC\cdot EB\end{array}\right\} \Longrightarrow EK = EA. \qquad (5)$$

و ترکیب (۴) و (۵) نتیجه می‌دهد که:

$$ED = EA \Longrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DAE}.$$

حال اگر AD را امتداد دهیم تا دایرهٔ w_1 را در N قطع کند، در دایرهٔ w_1 داریم:

$$\left.\begin{array}{lcl}\widehat{DAE} & = & \frac{\widehat{AC}+\widehat{CN}}{2}\\ \widehat{ADE} & = & \frac{\widehat{AC}+\widehat{BN}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{CN} = \widehat{BN}.$$

و N وسط کمان BC (یعنی همان M) است.

حال طبق قوت D در دو دایره داریم:

$$FD\cdot DK = BD\cdot DC = MD\cdot DA,$$

پس $FD\cdot DK = MD\cdot DA$، در نتیجه چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه‌حل دوم. اگر قوت نقطهٔ E را نسبت به دو دایرهٔ w_1 و w_2 بنویسیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{rcl} EC\cdot EB &=& EA^2 \\ EC\cdot EB &=& EK^2 \end{array}\right\} \implies EA=EK.$$

حال ثابت می‌کنیم که نیمساز زاویهٔ $\widehat{BAC}$ و نیمساز زاویهٔ $\widehat{BKC}$ روی ضلع BC هم‌دیگر را قطع می‌کنند. برای این منظور کافی است اثبات کنیم که $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$.

دو مثلث ECK و EKB با هم متشابه‌اند، پس $\frac{KB}{KC}=\frac{EB}{EK}$. همچنین دو مثلث EAC و EBA نیز متشابه‌اند و داریم: $\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EA}$.

و چون می‌دانیم $EK=EA$ پس $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$. حال اگر محل برخورد این نیمسازها با ضلع BC را D بنامیم، F و M وسط کمان BC از دو دایره هستند، پس K و D و F هم‌خطند و A و D و M نیز هم‌خطند.

قوت D را در دو دایره می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{rcl} BD\cdot DC &=& AD\cdot DM \\ BD\cdot DC &=& FD\cdot DK \end{array}\right\} \implies AD\cdot DM=FD\cdot DK,$$

پس چهارضلعی $AFMK$ محاطی است.

۳. فرض کنید شورایی شش نفر عضو دارد و تصمیمات در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجهٔ نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجهٔ نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همهٔ اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجهٔ نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی w_1، w_2، ... و w_6 تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسهٔ مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $i \geq 2$، $w_i = 1$، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.
یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

راه حل. اعضای شورا را با شماره‌های ۱ تا ۶، شماره‌گذاری می‌کنیم. روش زیر برای تصمیم‌گیری را در نظر بگیرید:

> اگر نفرات اول تا سوم هم‌رأی بودند، رأی آنها را به عنوان نتیجهٔ نهایی در نظر می‌گیریم و در غیر این‌صورت نتیجهٔ نهایی بر اساس اکثریت آراء نفرات چهارم تا ششم تعیین می‌شود.

این روش تصمیم‌گیری به وضوح دارای دو شرط صعودی بودن و تقارن است و بنابراین یک روش قابل قبول است. ادعا می‌کنیم که به هیچ صورتی نمی‌توان به اعضا وزن داد، به طوری که این روش از مقایسهٔ وزن اعضای موافق و مخالف حاصل شود.
با برهان خلف فرض می‌کنیم چنین نباشد و وزن‌دهی $(w_1, \dots, w_6)$ یک وزن‌دهی برای این روش باشد.(یعنی وزن نفر اول، w_1، وزن نفر دوم، w_2 و به همین ترتیب وزن نفر i-ام، w_i است) با توجه به یکسان بودن نقش سه عضو اول با یکدیگر و همچنین سه عضو آخر با هم در این روش،

$$(w_2, w_3, w_1, w_5, w_6, w_4)$$

و همین‌طور

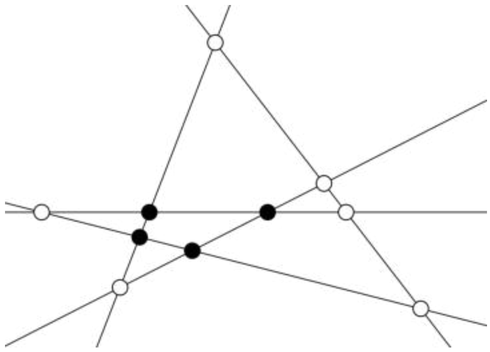
$$(w_3, w_1, w_2, w_6, w_4, w_5)$$

وزن‌دهی‌های دیگری برای این روش هستند. به سادگی می‌توان دید که اگر چند وزن‌دهی به یک روش تصمیم‌گیری منجر شوند، جمع آنها هم همان روش تصمیم‌گیری را به ما می‌دهد. پس جمع سه وزن‌دهی ذکر شده یک وزن‌دهی برای روش تصمیم‌گیری پیشنهادی ماست، یعنی اگر قرار دهیم $a = w_1 + w_2 + w_3$ و $b = w_4 + w_5 + w_6$، (a, a, a, b, b, b) یک وزن‌دهی برای این روش است.
حال ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سه نفر اول موافق و سه نفر دوم مخالف باشند. در این‌صورت در روش ما نتیجهٔ نهایی موافق است و بنابر وزن‌دهی ادعاشده، $3a > 3b$. حالت دیگری را هم می‌توان در نظر گرفت که دو نفر از سه نفر اول و یک نفر از سه نفر آخر موافق و بقیه مخالف باشند. در این حالت، تصمیم نهایی مخالف است و جمع وزن موافقان $2a + b$ و وزن مخالفان $2b + a$ است. باز اگر وزن‌دهی ادعاشده همین نتیجه را بدهد، باید داشته باشیم $2b + a > 2a + b$ و در نتیجه $b > a$. این نابرابری با نابرابری قبلی متناقض است و در نتیجه فرض خلف ما به تناقض منجر می‌شود. پس روش تصمیم‌گیری ارائه شده وزن‌دار نیست.

تذکر. روش‌های تصمیم‌گیری قابل قبول دیگری نیز می‌توان ارائه کرد که وزن‌دار نباشند. ما در اینجا به دو نمونهٔ دیگر اشاره می‌کنیم:

- اگر یک تصمیم (موافق یا مخالف)، بیشتر از سه رأی داشته باشد، به عنوان تصمیم نهایی انتخاب می‌شود و در صورت تساوی آراء موافق و مخالف، تصمیمی که تعداد موافقان آن در میان نفرات اول تا سوم، عددی فرد باشد، اتخاذ می‌شود.
- فرض کنید پنج نفر اول دور یک میز نشسته‌اند. در این‌صورت اگر سه نفر مجاور از آنها هم‌نظر بودند، نظر مشترک آنها و در غیر این‌صورت نظر نفر ششم اتخاذ می‌شود.

۴. در صفحه $n \geq ۳$ خط دوبه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها همرس نیستند. یک نقطهٔ تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطهٔ تقاطع درونی نشان داده شده است که با دایره‌های توپر مشخص شده‌اند.)



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

راه حل. گرافی در نظر بگیرید که رئوس آن نقاط تقاطع خطوط مسأله و یال‌های آن پاره‌خط‌هایی است که این خطوط روی یکدیگر جدا می‌کنند. (یعنی پاره‌خط‌هایی روی این خطوط که دو سر آن دو تقاطع است و درون آن تقاطعی وجود ندارد) این گراف را G می‌نامیم. هر دو تا از این n خط دقیقاً یک تقاطع دارند و در نتیجه تعداد رئوس گراف G برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. از طرف دیگر روی هر خط $n-۱$ تقاطع وجود دارد و در نتیجه پاره‌خط‌های مابین آن‌ها $n-۲$ یال از گراف G به ما می‌دهد. پس تعداد یال‌های گراف هم برابر $n(n-۲)$ است.

با توجه به اینکه تعداد خطوط حداقل سه تا است، درجات رئوس G، ۲، ۳ یا ۴ است که تعداد رئوس با هر یک از این درجات را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. رئوس با بیشترین درجه همان نقاط تقاطع درونی هستند. حال توجه کنید که با داشتن تعداد کل رئوس گراف G و اینکه جمع درجات رئوس در هر گراف دو برابر تعداد یال‌های آن است، دو رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$a+b+c=\frac{n(n-۱)}{۲},$$

$$۲a+۳b+۴c=۲n(n-۲).$$

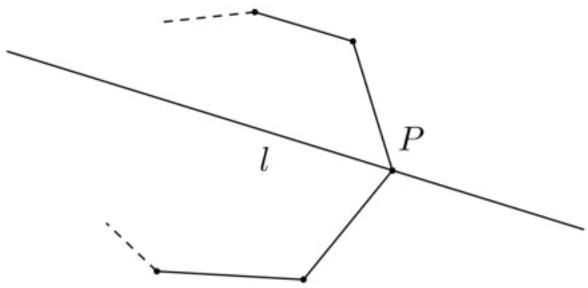
اگر ۳ برابر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$c-a=\frac{n^۲-۵n}{۲} \implies c=(a-۳)+\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}.$$

پس حکم معادل با این است که در گراف G حداقل ۳ رأس با درجهٔ ۲ داریم. برای اثبات این گزاره هم از لم زیر استفاده می‌کنیم که شهوداً واضح است و اثباتش در پایان می‌آید:

لم. برای هر تعداد نقطهٔ دلخواه در صفحه که هم‌خط نباشند، یک چندضلعی محدب وجود دارد که همهٔ این نقاط درون و یا روی اضلاع آن قرار می‌گیرند و رئوس آن از میان این نقاط باشند.

حال اگر لم را برای نقاط تقاطع خطوط مسأله استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که یک $k \geq ۳$-ضلعی محدب وجود دارد که رئوس آن از میان تقاطع‌هاست و بقیهٔ تقاطع‌ها درون و یا روی اضلاع آن قرار دارند. به راحتی می‌توان دید که درجهٔ همهٔ رئوس این چندضلعی در گراف G برابر ۲ است. زیرا اگر l یکی از دو خط گذرا از رأس P در این چندضلعی باشد، همهٔ تقاطع‌های روی آن در درون چندضلعی و در نتیجه در یک طرف P قرار دارند. پس P فقط یک رأس مجاور روی این خط دارد و با در نظر گرفتن خط دیگر گذرا از P، نتیجه می‌شود که درجهٔ P در گراف برابر ۲ است.



پس $a \geq k \geq ۳$ و اثبات کامل می‌شود.

اثبات لم. یک خط در نظر بگیرید که همهٔ نقاط در یک طرف آن باشند و با هیچ یک از خطوط واصل دو تا از نقاط داده شده موازی نباشد. حال این خط را به موازات خود به سمتی که نقاط قرار دارند حرکت دهید تا به اولین نقطه برسد. با توجه به فرضی که در مورد راستای خط کردیم، در این لحظه فقط یک نقطه روی خط قرار دارد که آن را $P_۱$ می‌نامیم. حال خطمان را در جهت ساعت‌گرد حول $P_۱$ می‌چرخانیم تا به اولین نقطهٔ دیگر برخورد کند. دورترین نقطهٔ روی خط از $P_۱$ در این وضعیت را $P_۲$ می‌نامیم. حال خط را حول $P_۲$ در جهت ساعت‌گرد بچرخانید تا به اولین نقطهٔ جدید برخورد کنید و به همین ترتیب دنبالهٔ نقاط $P_۳, P_۴, \ldots$ را بسازید. با توجه به متناهی بودن کل نقاط، جایی در این دنباله با دور مواجه می‌شویم و نقاط این دور و پاره‌خط‌های بین نقاط متوالی، چندضلعی محدب خواسته شده را به ما می‌دهد. (خیلی راحت می‌توان نشان داد که این دور کامل است، گرچه به این مطلب برای اثبات لم احتیاج نداریم. ضمناً چندضلعی محدب با شرایط لم یکتاست و به آن «پوش‌محدب» مجموعهٔ مورد نظر از نقاط می‌گویند.)

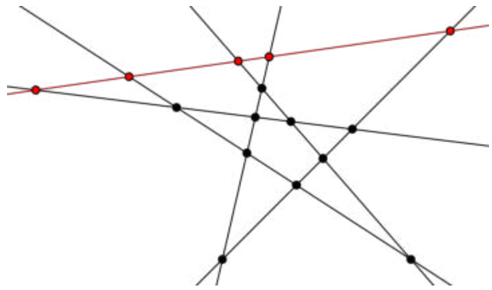
تذکر. با توجه به رابطهٔ

$$\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲} = \frac{(n-۳)(n-۴)}{۲} + n - ۳,$$

تلاش برای اثبات گزارهٔ زیر، یک ایده برای اثبات حکم مسأله با استفاده از استقراء است:

> اضافه کردن یک خط جدید به یک مجموعه از $n-1$ خط در صفحه، (که همگی دوبه‌دو متقاطع باشند و هیچ سه‌تایی همرس نباشند) حداقل $n-3$ نقطه به نقاط تقاطع درونی اضافه می‌کند.

اما متأسفانه (!) این گزاره غلط است و شکل زیر یک مثال نقض برای آن در حالت $n=6$ ارائه می‌کند: (خط قرمز، خط جدید است)

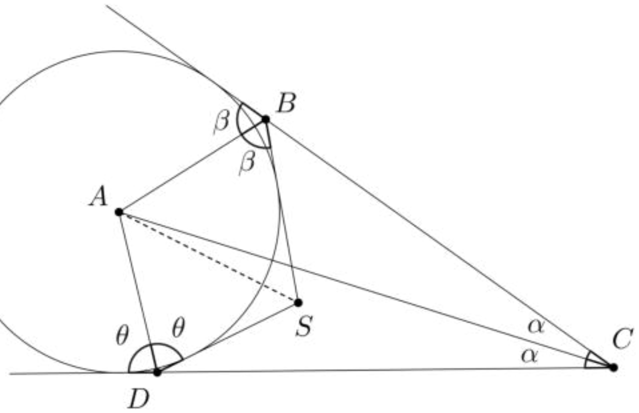


تعداد تقاطع‌های درونی قبل از اضافه کردن خط جدید، ۵ تا و بعد از اضافه کردن ۷ تا است و در نتیجه کمتر از $n-3=3$ تا زیاد می‌شود.

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطهٔ T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیمساز زاویهٔ $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و همچنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.

ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

راه حل اول. رأس A روی نیمساز زاویهٔ $\widehat{C}$ قرار دارد و از دو خط CB و CD به یک فاصله است. بنابراین می‌توان دایره‌ای به مرکز A رسم کرد که بر دو خط CB و CD مماس باشد. خطوط مماس بر دایره که از B و D رسم می‌شوند در S متقاطع‌اند.



$$\widehat{BSD} = \widehat{BCD} + \widehat{CBS} + \widehat{CDS} = ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta + ۱۸۰^\circ - ۲\theta = ۲(۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta)$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = ۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \widehat{ABC} - \widehat{ASD} & = (۱۸۰^\circ - \beta) - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) \quad = \theta - \alpha \quad = \widehat{DAC} \\ \widehat{ADC} - \widehat{ASB} & = (۱۸۰^\circ - \theta) - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) \quad = \beta - \alpha \quad = \widehat{BAC} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \widehat{ASD} & = \widehat{ATD} \\ \widehat{ASB} & = \widehat{ATB} \end{cases} \qquad (۶)$$

با توجه به تعریف نقطهٔ T و یکتا بودن آن نتیجه می‌گیریم، نقطهٔ S بر T منطبق است و در نتیجه:

$$\widehat{BAS} = ۱۸۰^\circ - \widehat{ABS} - \widehat{ASB} = ۱۸۰^\circ - \beta - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \theta - \alpha = \widehat{DAC}.$$

اگر نقاط S و T بر هم منطبق نباشند، با توجه به رابطهٔ (۶) چهارضلعی‌های $ABST$ و $ADST$ محاطی‌اند، پس $BADS$ محاطی است و داریم:

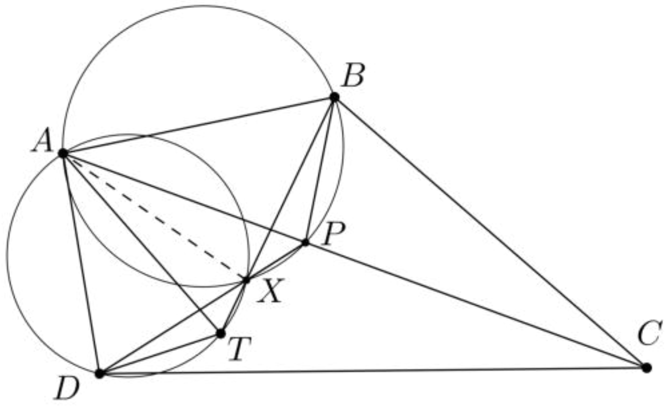
$$\beta + \theta = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \quad \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = ۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta = \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BSD} = \widehat{BSA} + \widehat{DSA} = ۲\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BTD} = \widehat{BSD} = ۲\alpha = \widehat{BCD},$$

اما طبق فرض مسأله نقطهٔ T داخل چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد و $\widehat{BTD} > \widehat{BCD}$. بنابراین S و T منطبق‌اند.

راه‌حل دوم.



$$\begin{aligned}
\widehat{BCA} = \widehat{DCA} \quad &\Longrightarrow \quad \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \widehat{ADC} + \widehat{DAC} \\
&\Longrightarrow \quad \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} \\
&\Longrightarrow \quad \widehat{ATD} = \widehat{ATB} = \alpha.
\end{aligned}$$

نقطهٔ P را بر قطر AC در نظر می‌گیریم به طوری که $\widehat{PBC} = \widehat{DAC}$. داریم:

$$\widehat{ABP} = \widehat{ABC} - \widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \alpha,$$

$$\triangle BPC \sim \triangle ADC \Longrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{DC} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccc} \frac{BC}{PC} & = & \frac{AC}{DC} \\ \widehat{BCA} & = & \widehat{DCA} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle DPC \sim \triangle ABC,$$

$$\Longrightarrow \widehat{PDC} = \widehat{BAC}$$

$$\Longrightarrow \widehat{ADP} = \widehat{ADC} - \widehat{PDC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} = \alpha.$$

نقطهٔ تقاطع DP و BT را X می‌نامیم:

$$\widehat{ADX} = \widehat{ATX} = \alpha \quad \Longrightarrow \quad ADTX \text{ محاطی است.}$$

$$\widehat{AXD} = \widehat{ATD} = \widehat{ABP} = \alpha \Longrightarrow \quad ABPX \text{ محاطی است.}$$

در نتیجه

$$\widehat{BAP} = \widehat{BXP} = \widehat{DXT} = \widehat{DAT} \Longrightarrow \widehat{BAT} = \widehat{DAC}.$$

۶. همهٔ توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y، مقدار $f(x)+f(y)$ بر $x+y$ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x \geq ۱۳۹۵$، نابرابری $۲f(x) \leq x^۳$ برقرار است.

راه حل. ابتدا توجه کنید که با قرار دادن $x=y$ در شرط اول، نتیجه می‌شود که $f(x)$ بر x بخش‌پذیر است و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم، $f(x)=xg(x)$ که $g(x)$ عددی طبیعی است. حال فرض کنیم $g(۱)=a$ و $g(۲)=b$. نشان می‌دهیم اگر x یک عدد فرد به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $g(x)$ برابر a است. برای این کار دو بار از شرط اول برای $y=۱$ و $y=۲$ استفاده می‌کنیم:

$$x+۱\mid xg(x)+a=(x+۱)g(x)+(a-g(x)) \implies x+۱\mid g(x)-a,$$

$$x+۲\mid xg(x)+۲b=(x+۲)g(x)+۲(b-g(x)) \implies x+۲\mid g(x)-b.$$

(نتیجه‌گیری آخر به این علت است که $x+۲$ فرد است) در نتیجه با توجه به نسبت به هم اول بودن $x+۱$ و $x+۲$، باقیماندهٔ $g(x)$ بر $(x+۱)(x+۲)$ با دانستن باقیمانده‌اش بر $x+۱$ و $x+۲$ به صورت یکتا به دست می‌آید. $a(x+۲)-b(x+۱)$ در دو بخش‌پذیری بالا به جای $g(x)$ صدق می‌کند، پس داریم:

$$g(x)=a(x+۲)-b(x+۱)+c(x+۱)(x+۲)=cx^۲+(۳c+a-b)x+(۲c+۲a-b).$$

که c عددی صحیح است. با توجه به فرض مسأله برای xهای به اندازهٔ کافی بزرگ $۰<g(x)\leq \frac{x^۲}{۲}$، پس c نامنفی و حداکثر $\frac{۱}{۲}$ است و چون صحیح است، $c=۰$. پس داریم:

$$g(x)=(a-b)x+(۲a-b).$$

لم. اگر X و Y نسبت به هم اول باشند، $X+Y|g(X)-g(Y)$.

اثبات لم. بنابر فرض مسأله $Xg(X)+Yg(Y)$ بر $X+Y$ بخش‌پذیر است. پس اگر $(X+Y)g(Y)$ را هم از آن کم کنیم، باز چنین است. پس $X(g(X)-g(Y))$ بر $X+Y$ بخش‌پذیر است. اما X و $X+Y$ نسبت به هم اولند، پس $g(X)-g(Y)$ بر $X+Y$ بخش‌پذیر است.

حال در ادامهٔ حل مسأله فرض کنیم x' عدد فرد به اندازهٔ کافی بزرگ دیگری باشد که نسبت به x اول است، در این‌صورت با توجه به لم:

$$x+x'|(a-b)(x-x'),$$

اما بزرگترین مقسوم علیه مشترک $x+x'$ و $x-x'$ برابر ۲ است، پس $(a-b)|\frac{x+x'}{2}$. حال اگر x' را از دو برابر قدرمطلق $a-b$ بزرگتر بگیریم، نتیجه می‌شود $a-b=0$ و در نتیجه برای xهای فرد بزرگ $g(x)=2a-b=a$ و ادعای ما ثابت می‌شود.

حال فرض کنید y یک عدد طبیعی دلخواه باشد. اگر x را یک عدد طبیعی به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم که نسبت به $2y$ اول باشد، بنابرلم:

$$x+y|g(x)-g(y)=a-g(y).$$

پس $a-g(y)$ بر تمامی $x+y$هایی که x خاصیت گفته‌شده را داشته باشد، بخش‌پذیر است. اما اگر $a-g(y)$ صفر نباشد، x نمی‌تواند از حدی بزرگتر باشد. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر y، $g(y)=a$ و $f(y)=ay$.

در نهایت با توجه به شرط دوم، $2a\leq 1395^2$، تمامی توابعی که در دو شرط مسأله صدق می‌کنند به صورت $f(x)=ax$ هستند که a عددی طبیعی کوچکتر از $\frac{1395^2}{2}$ است.

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

معاونت دانش‌پژوهان جوان

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی - روز اول

تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۹ – ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگهٔ اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوال‌ها را در برگهٔ چرک‌نویس، حل کرده و سپس در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامهٔ حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستان از بین دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

سؤالات و راه‌حل‌های مرحلهٔ دوم سی و چهارمین دورهٔ المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

آزمون مرحلهٔ دوم سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۹ و ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحلهٔ اول برگزار شد. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار و نیم ساعت به سه سؤال تشریحی پاسخ دادند.
دفترچهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه‌حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که این دفترچه صرفاً برای هدف آموزشی تهیه شده است و بارم‌بندی تصحیح آزمون، مستقلاً توسط گروهی از کارشناسان تهیه می‌شود.

معاونت دانش‌پژوهان جوان

۱. فرض کنید $0 < a \leq b \leq c$، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

(۷ نمره)

۲. مثلث ABC با دایرهٔ محیطی $w_۱$ مفروض است و داریم $\angle C = ۲\angle B$. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ $w_۱$ رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند. دایرهٔ $w_۲$ را طوری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس باشد و هم‌چنین از نقطهٔ B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. از نقطهٔ E مماس EK را بر دایرهٔ $w_۲$ رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایرهٔ $w_۱$ (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

(۷ نمره)

۳. فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

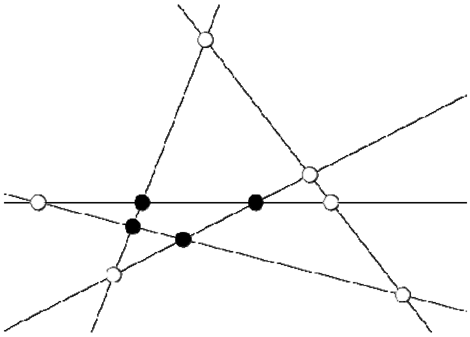
- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجهٔ نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجهٔ نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همهٔ اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجهٔ نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی $w_۱$، $w_۲$، ... و $w_۶$ تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسهٔ مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_۱ = ۲$ و برای هر $i \geq ۲$، $w_i = ۱$، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.

یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

(۷ نمره)

۴. در صفحه $n \geq ۳$ خط دوبه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطهٔ تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطهٔ تقاطع درونی نشان داده شده است که با دوایر توپر مشخص شده‌اند.)



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

(۷ نمره)

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطهٔ T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیم‌ساز زاویهٔ $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و هم‌چنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.

ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

(۷ نمره)

۶. همهٔ توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y، مقدار $f(x)+f(y)$ بر $x+y$ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x\geq ۱۳۹۵$، نابرابری $۲f(x)\leq x^۳$ برقرار است.

(۷ نمره)

۱. فرض کنید $0 < a \le b \le c$، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \le \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

راه‌حل اول. صرفاً برای خلاصه شدن عبارات، تعریف می‌کنیم $S = a+c$ و $P = ac$. در این‌صورت برای سمت راست نابرابری مسأله داریم:

$$R = \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P}.$$

هدف این است که عبارت اخیر را به عنوان تابعی بر حسب متغیر b مینیمم کنیم؛ توجه کنید که عبارت مورد بحث بر حسب متغیر b شامل یک جزء خطی، یعنی $\frac{S+b}{3}$ و یک جزء کسری است که مخرج آن $Sb+P$ است. اکنون با تغییر متغیر $t = Sb+P$ عبارت را بازنویسی می‌کنیم و با کمی محاسبهٔ ساده به عبارت زیر می‌رسیم:

$$R = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P} = \frac{S^2-10P}{3S} + \frac{t}{3S} + \frac{3P^2}{St}.$$

اکنون توجه کنید که حاصل‌ضرب دو جملهٔ آخر، عبارتی بدون متغیر t است. پس طبق نابرابری $u+v \ge 2\sqrt{uv}$ داریم:

$$R \ge \frac{S^2-10P}{3S} + 2\sqrt{\frac{P^2}{S^2}} = \frac{S^2-4P}{3S} = \frac{(c-a)^2}{3(c+a)} \ge \frac{(c-a)^2}{6c}.$$

راه حل دوم. برای راحتی در نوشتن، به ازای هر فرمول دلخواه $F(a,b,c)$ بر حسب سه متغیر a، b و c، جمع دوریِ

$$F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b)$$

را با $\sum F(a,b,c)$ نمایش می‌دهیم. با این نمادگذاری سمت راست نابرابری مسأله را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\frac{\sum a}{3} - \frac{3}{\sum \frac{1}{a}} &= \frac{\sum a}{3} - \frac{3abc}{\sum ab} = \frac{(\sum a)(\sum ab) - 9abc}{3\sum ab} \\ &= \frac{\sum(a^2b+ab^2) - 6abc}{3\sum ab} = \frac{\sum a(b-c)^2}{3\sum ab}.\end{aligned}$$

بنابراین نابرابری مسأله معادل با نابرابری زیر است:

$$\sum a(b-c)^2 \ \ge \ \left(\frac{\sum ab}{2c}\right)(c-a)^2. \qquad (1)$$

اما توجه کنید که با توجه به ترتیب $a \le b \le c$، $\frac{ab}{2c}$ از $\frac{b}{2}$ بیشتر نیست و در نتیجه برای سمت راست نابرابری بالا داریم:

$$\left(\frac{\sum ab}{2c}\right)(c-a)^2 = \left(\frac{ab}{2c} + \frac{a+b}{2}\right)(c-a)^2 \le (\frac{a}{2}+b)(c-a)^2. \qquad (2)$$

برای سمت چپ نابرابری (۱) هم به دست می‌آید:

$$\sum a(b-c)^۲ \geq b(c-a)^۲ + a\left((c-b)^۲ + (b-a)^۲\right). \qquad (۳)$$

حال توجه کنید که برای هر دو عدد X و Y،

$$(X-Y)^۲ \geq ۰ \implies X^۲ + Y^۲ - ۲XY \geq ۰ \implies ۲(X^۲+Y^۲) \geq (X+Y)^۲$$
$$\implies X^۲ + Y^۲ \geq \frac{(X+Y)^۲}{۲}.$$

در نتیجه اگر قرار دهیم، $X = c-b, Y = b-a$، با استفاده از نابرابری (۳) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sum a(b-c)^۲ \geq b(c-a)^۲ + a\left((c-b)^۲ + (b-a)^۲\right) \geq b(c-a)^۲ + \frac{a}{۲}(c-a)^۲.$$

و این نابرابری به همراه نابرابری (۲)، نابرابری (۱) که معادل حکم مسأله است را نتیجه می‌دهد.

توجه. راه‌حل‌های دیگری برای این سؤال را می‌توانید در صفحهٔ زیر مشاهده کنید:

http://artofproblemsolving.com/community/c6h1234734_iran_inequality

۲. مثلث ABC با دایرهٔ محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ w_1 رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند. دایرهٔ w_2 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس باشد و همچنین از نقطهٔ B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. از نقطهٔ E مماس EK را بر دایرهٔ w_2 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایرهٔ w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه حل اول. اگر محل تقاطع FK و BC را D بنامیم، آنگاه در دایرهٔ w_2 داریم:

$$\left.\begin{array}{lcl}\widehat{ACB} & = & \frac{\widehat{BC}}{2}\\ \widehat{FBC} & = & \frac{\widehat{FC}}{2}\\ \widehat{C} & = & 2\widehat{B}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{BF} = \widehat{FC},$$

$$\left.\begin{array}{lcl}\widehat{CDK} & = & \frac{\widehat{BF}+\widehat{CK}}{2}\\ \widehat{DKE} & = & \frac{\widehat{FC}+\widehat{CK}}{2}\\ \widehat{BF} & = & \widehat{FC}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{EDK} = \widehat{DKE} \Longrightarrow ED = EK. \tag{۴}$$

از طرفی طبق قوت نقطهٔ E نسبت به دو دایرهٔ w_1 و w_2 می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{lcl}EK^2 & = & EC\cdot EB\\ EA^2 & = & EC\cdot EB\end{array}\right\} \Longrightarrow EK = EA. \tag{۵}$$

و ترکیب (۴) و (۵) نتیجه می‌دهد که:

$$ED = EA \Longrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DAE}.$$

حال اگر AD را امتداد دهیم تا دایرهٔ w_1 را در N قطع کند، در دایرهٔ w_1 داریم:

$$\left.\begin{array}{lcl}\widehat{DAE} & = & \frac{\widehat{AC}+\widehat{CN}}{2}\\ \widehat{ADE} & = & \frac{\widehat{AC}+\widehat{BN}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{CN} = \widehat{BN}.$$

و N وسط کمان BC (یعنی همان M) است.

حال طبق قوت D در دو دایره داریم:

$$FD\cdot DK = BD\cdot DC = MD\cdot DA,$$

پس $FD\cdot DK = MD\cdot DA$، در نتیجه چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه‌حل دوم. اگر قوت نقطهٔ E را نسبت به دو دایرهٔ $w_۱$ و $w_۲$ بنویسیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{rcl} EC\cdot EB &=& EA^۲ \\ EC\cdot EB &=& EK^۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow EA=EK.$$

حال ثابت می‌کنیم که نیمساز زاویهٔ $\widehat{BAC}$ و نیمساز زاویهٔ $\widehat{BKC}$ روی ضلع BC همدیگر را قطع می‌کنند. برای این منظور کافی است اثبات کنیم که $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$.

دو مثلث ECK و EKB با هم متشابه‌اند، پس $\frac{KB}{KC}=\frac{EB}{EK}$. همچنین دو مثلث EAC و EBA نیز متشابه‌اند و داریم: $\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EA}$.

و چون می‌دانیم $EK=EA$ پس $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$. حال اگر محل برخورد این نیمسازها با ضلع BC را D بنامیم، F و M وسط کمان BC از دو دایره هستند، پس K و D و F هم‌خطند و A و D و M نیز هم‌خطند.

قوت D را در دو دایره می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{rcl} BD\cdot DC &=& AD\cdot DM \\ BD\cdot DC &=& FD\cdot DK \end{array}\right\} \Longrightarrow AD\cdot DM=FD\cdot DK,$$

پس چهارضلعی $AFMK$ محاطی است.

۳. فرض کنید شورایی شش نفر عضو دارد و تصمیمات در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجهٔ نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجهٔ نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همهٔ اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجهٔ نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی w_1، w_2، ... و w_6 تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسهٔ مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $i \geq 2$، $w_i = 1$، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.
یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

راه حل. اعضای شورا را با شماره‌های ۱ تا ۶، شماره‌گذاری می‌کنیم. روش زیر برای تصمیم‌گیری را در نظر بگیرید:

> اگر نفرات اول تا سوم هم‌رأی بودند، رأی آنها را به عنوان نتیجهٔ نهایی در نظر می‌گیریم و در غیر این‌صورت نتیجهٔ نهایی بر اساس اکثریت آراء نفرات چهارم تا ششم تعیین می‌شود.

این روش تصمیم‌گیری به وضوح دارای دو شرط صعودی بودن و تقارن است و بنابراین یک روش قابل قبول است. ادعا می‌کنیم که به هیچ صورتی نمی‌توان به اعضا وزن داد، به طوری که این روش از مقایسهٔ وزن اعضای موافق و مخالف حاصل شود.
با برهان خلف فرض می‌کنیم چنین نباشد و وزن‌دهی $(w_1, \dots, w_6)$ یک وزن‌دهی برای این روش باشد.(یعنی وزن نفر اول، w_1، وزن نفر دوم، w_2 و به همین ترتیب وزن نفر i-ام، w_i است) با توجه به یکسان بودن نقش سه عضو اول با یکدیگر و همچنین سه عضو آخر با هم در این روش،

$$(w_2, w_3, w_1, w_5, w_6, w_4)$$

و همین‌طور

$$(w_۳, w_۱, w_۲, w_۶, w_۴, w_۵)$$

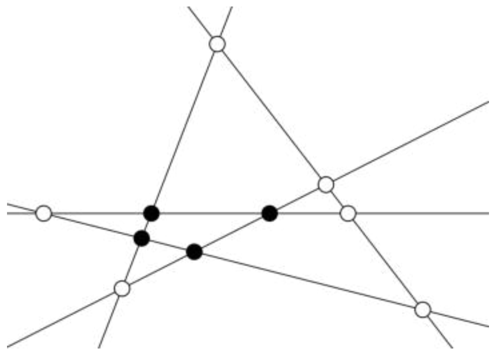
وزن‌دهی‌های دیگری برای این روش هستند. به سادگی می‌توان دید که اگر چند وزن‌دهی به یک روش تصمیم‌گیری منجر شوند، جمع آنها هم همان روش تصمیم‌گیری را به ما می‌دهد. پس جمع سه وزن‌دهی ذکر شده یک وزن‌دهی برای روش تصمیم‌گیری پیشنهادی ماست، یعنی اگر قرار دهیم $a = w_۱ + w_۲ + w_۳$ و $b = w_۴ + w_۵ + w_۶$، (a, a, a, b, b, b) یک وزن‌دهی برای این روش است.

حال ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سه نفر اول موافق و سه نفر دوم مخالف باشند. در این‌صورت در روش ما نتیجهٔ نهایی موافق است و بنابر وزن‌دهی ادعاشده، $۳a > ۳b$. حالت دیگری را هم می‌توان در نظر گرفت که دو نفر از سه نفر اول و یک نفر از سه نفر آخر موافق و بقیه مخالف باشند. در این حالت، تصمیم نهایی مخالف است و جمع وزن موافقان $۲a + b$ و وزن مخالفان $۲b + a$ است. باز اگر وزن‌دهی ادعاشده همین نتیجه را بدهد، باید داشته باشیم $۲b + a > ۲a + b$ و در نتیجه $b > a$. این نابرابری با نابرابری قبلی متناقض است و در نتیجه فرض خلف ما به تناقض منجر می‌شود. پس روش تصمیم‌گیری ارائه شده وزن‌دار نیست.

تذکر. روش‌های تصمیم‌گیری قابل قبول دیگری نیز می‌توان ارائه کرد که وزن‌دار نباشند. ما در اینجا به دو نمونهٔ دیگر اشاره می‌کنیم:

- اگر یک تصمیم (موافق یا مخالف)، بیشتر از سه رأی داشته باشد، به عنوان تصمیم نهایی انتخاب می‌شود و در صورت تساوی آراء موافق و مخالف، تصمیمی که تعداد موافقان آن در میان نفرات اول تا سوم، عددی فرد باشد، اتخاذ می‌شود.
- فرض کنید پنج نفر اول دور یک میز نشسته‌اند. در این‌صورت اگر سه نفر مجاور از آنها هم‌نظر بودند، نظر مشترک آنها و در غیر این‌صورت نظر نفر ششم اتخاذ می‌شود.

۴. در صفحه $n \geq ۳$ خط دوبه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها همرس نیستند. یک نقطهٔ تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطهٔ تقاطع درونی نشان داده شده است که با دایره‌های توپر مشخص شده‌اند.)



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

راه حل. گرافی در نظر بگیرید که رئوس آن نقاط تقاطع خطوط مسأله و یال‌های آن پاره‌خط‌هایی است که این خطوط روی یکدیگر جدا می‌کنند. (یعنی پاره‌خط‌هایی روی این خطوط که دو سر آن دو تقاطع است و درون آن تقاطعی وجود ندارد) این گراف را G می‌نامیم. هر دو تا از این n خط دقیقاً یک تقاطع دارند و در نتیجه تعداد رئوس گراف G برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. از طرف دیگر روی هر خط $n-۱$ تقاطع وجود دارد و در نتیجه پاره‌خط‌های مابین آن‌ها $n-۲$ یال از گراف G به ما می‌دهد. پس تعداد یال‌های گراف هم برابر $n(n-۲)$ است.

با توجه به اینکه تعداد خطوط حداقل سه تا است، درجات رئوس G، ۲، ۳ یا ۴ است که تعداد رئوس با هر یک از این درجات را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. رئوس با بیشترین درجه همان نقاط تقاطع درونی هستند. حال توجه کنید که با داشتن تعداد کل رئوس گراف G و اینکه جمع درجات رئوس در هر گراف دو برابر تعداد یال‌های آن است، دو رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$a+b+c=\frac{n(n-۱)}{۲},$$

$$۲a+۳b+۴c=۲n(n-۲).$$

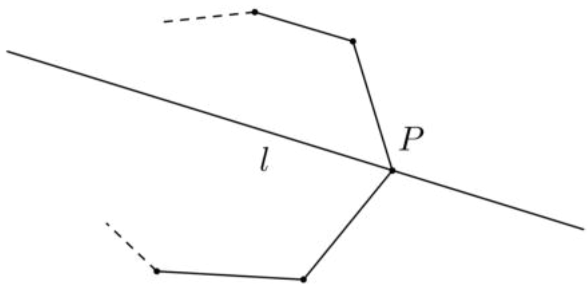
اگر ۳ برابر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$c-a=\frac{n^۲-۵n}{۲} \implies c=(a-۳)+\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}.$$

پس حکم معادل با این است که در گراف G حداقل ۳ رأس با درجهٔ ۲ داریم. برای اثبات این گزاره هم از لم زیر استفاده می‌کنیم که شهوداً واضح است و اثباتش در پایان می‌آید:

لم. برای هر تعداد نقطهٔ دلخواه در صفحه که هم‌خط نباشند، یک چندضلعی محدب وجود دارد که همهٔ این نقاط درون و یا روی اضلاع آن قرار می‌گیرند و رئوس آن از میان این نقاط باشند.

حال اگر لم را برای نقاط تقاطع خطوط مسأله استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که یک $k \geq ۳$ -ضلعی محدب وجود دارد که رئوس آن از میان تقاطع‌هاست و بقیهٔ تقاطع‌ها درون و یا روی اضلاع آن قرار دارند. به راحتی می‌توان دید که درجهٔ همهٔ رئوس این چندضلعی در گراف G برابر ۲ است. زیرا اگر l یکی از دو خط گذرا از رأس P در این چندضلعی باشد، همهٔ تقاطع‌های روی آن در درون چندضلعی و در نتیجه در یک طرف P قرار دارند. پس P فقط یک رأس مجاور روی این خط دارد و با در نظر گرفتن خط دیگر گذرا از P، نتیجه می‌شود که درجهٔ P در گراف برابر ۲ است.



پس $a \geq k \geq ۳$ و اثبات کامل می‌شود.

اثبات لم. یک خط در نظر بگیرید که همهٔ نقاط در یک طرف آن باشند و با هیچ یک از خطوط واصل دو تا از نقاط داده شده موازی نباشد. حال این خط را به موازات خود به سمتی که نقاط قرار دارند حرکت دهید تا به اولین نقطه برسد. با توجه به فرضی که در مورد راستای خط کردیم، در این لحظه فقط یک نقطه روی خط قرار دارد که آن را $P_۱$ می‌نامیم. حال خطمان را در جهت ساعت‌گرد حول $P_۱$ می‌چرخانیم تا به اولین نقطهٔ دیگر برخورد کند. دورترین نقطهٔ روی خط از $P_۱$ در این وضعیت را $P_۲$ می‌نامیم. حال خط را حول $P_۲$ در جهت ساعت‌گرد بچرخانید تا به اولین نقطهٔ جدید برخورد کنید و به همین ترتیب دنبالهٔ نقاط $P_۳, P_۴, \ldots$ را بسازید. با توجه به متناهی بودن کل نقاط، جایی در این دنباله با دور مواجه می‌شویم و نقاط این دور و پاره‌خط‌های بین نقاط متوالی، چندضلعی محدب خواسته شده را به ما می‌دهد. (خیلی راحت می‌توان نشان داد که این دور کامل است، گرچه به این مطلب برای اثبات لم احتیاج نداریم. ضمناً چندضلعی محدب با شرایط لم یکتاست و به آن «پوش‌محدب» مجموعهٔ مورد نظر از نقاط می‌گویند.)

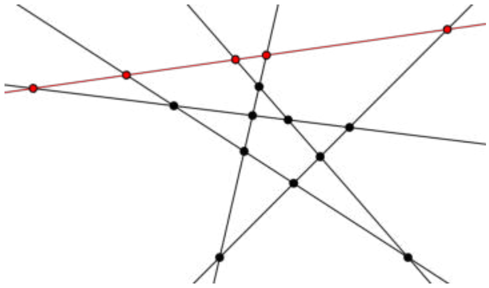
تذکر. با توجه به رابطهٔ

$$\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲} = \frac{(n-۳)(n-۴)}{۲} + n - ۳,$$

تلاش برای اثبات گزارهٔ زیر، یک ایده برای اثبات حکم مسأله با استفاده از استقراء است:

> اضافه کردن یک خط جدید به یک مجموعه از $n-۱$ خط در صفحه، (که همگی دوبه‌دو متقاطع باشند و هیچ سه‌تایی همرس نباشند) حداقل $n-۳$ نقطه به نقاط تقاطع درونی اضافه می‌کند.

اما متأسفانه (!) این گزاره غلط است و شکل زیر یک مثال نقض برای آن در حالت $n=۶$ ارائه می‌کند: (خط قرمز، خط جدید است)

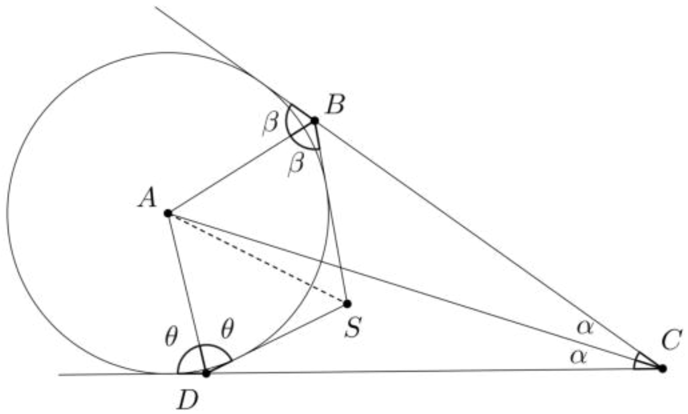


تعداد تقاطع‌های درونی قبل از اضافه کردن خط جدید، ۵ تا و بعد از اضافه کردن ۷ تا است و در نتیجه کمتر از $n-۳=۳$ تا زیاد می‌شود.

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطهٔ T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیمساز زاویهٔ $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و همچنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.

ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

راه حل اول. رأس A روی نیمساز زاویهٔ $\widehat{C}$ قرار دارد و از دو خط CB و CD به یک فاصله است. بنابراین می‌توان دایره‌ای به مرکز A رسم کرد که بر دو خط CB و CD مماس باشد. خطوط مماس بر دایره که از B و D رسم می‌شوند در S متقاطع‌اند.



$$\widehat{BSD} = \widehat{BCD} + \widehat{CBS} + \widehat{CDS} = ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta + ۱۸۰^\circ - ۲\theta = ۲(۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta)$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = ۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \widehat{ABC} - \widehat{ASD} & = (۱۸۰^\circ - \beta) - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) \quad = \theta - \alpha \quad = \widehat{DAC} \\ \widehat{ADC} - \widehat{ASB} & = (۱۸۰^\circ - \theta) - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) \quad = \beta - \alpha \quad = \widehat{BAC} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \widehat{ASD} & = \widehat{ATD} \\ \widehat{ASB} & = \widehat{ATB} \end{cases} \tag{۶}$$

با توجه به تعریف نقطهٔ T و یکتا بودن آن نتیجه می‌گیریم، نقطهٔ S بر T منطبق است و در نتیجه:

$$\widehat{BAS} = ۱۸۰^\circ - \widehat{ABS} - \widehat{ASB} = ۱۸۰^\circ - \beta - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \theta - \alpha = \widehat{DAC}.$$

اگر نقاط S و T بر هم منطبق نباشند، با توجه به رابطهٔ (۶) چهارضلعی‌های $ABST$ و $ADST$ محاطی‌اند، پس $BADS$ محاطی است و داریم:

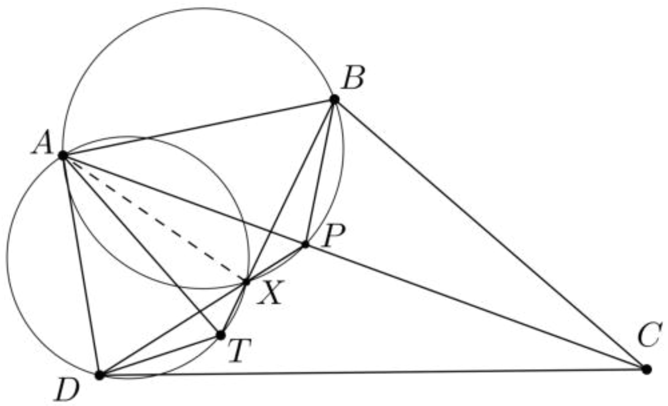
$$\beta + \theta = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \quad \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = ۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta = \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BSD} = \widehat{BSA} + \widehat{DSA} = ۲\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BTD} = \widehat{BSD} = ۲\alpha = \widehat{BCD},$$

اما طبق فرض مسأله نقطهٔ T داخل چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد و $\widehat{BTD} > \widehat{BCD}$. بنابراین S و T منطبق‌اند.

راه‌حل دوم.



$$\begin{aligned}
\widehat{BCA} = \widehat{DCA} \quad &\Longrightarrow \quad \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \widehat{ADC} + \widehat{DAC} \\
&\Longrightarrow \quad \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} \\
&\Longrightarrow \quad \widehat{ATD} = \widehat{ATB} = \alpha.
\end{aligned}$$

نقطهٔ P را بر قطر AC در نظر می‌گیریم به طوری که $\widehat{PBC} = \widehat{DAC}$. داریم:

$$\widehat{ABP} = \widehat{ABC} - \widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \alpha,$$

$$\triangle BPC \sim \triangle ADC \Longrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{DC} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{BC}{PC} & = & \frac{AC}{DC} \\ \widehat{BCA} & = & \widehat{DCA} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \triangle DPC \sim \triangle ABC,$$

$$\Longrightarrow \widehat{PDC} = \widehat{BAC}$$

$$\Longrightarrow \widehat{ADP} = \widehat{ADC} - \widehat{PDC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} = \alpha.$$

نقطهٔ تقاطع DP و BT را X می‌نامیم:

$$\widehat{ADX} = \widehat{ATX} = \alpha \quad \Longrightarrow \quad$$ $ADTX$ محاطی است.

$$\widehat{AXD} = \widehat{ATD} = \widehat{ABP} = \alpha \quad \Longrightarrow \quad$$ $ABPX$ محاطی است.

در نتیجه

$$\widehat{BAP} = \widehat{BXP} = \widehat{DXT} = \widehat{DAT} \Longrightarrow \widehat{BAT} = \widehat{DAC}.$$

۶. همهٔ توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y، مقدار $f(x) + f(y)$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x \geq ۱۳۹۵$، نابرابری $۲f(x) \leq x^۳$ برقرار است.

راه حل. ابتدا توجه کنید که با قرار دادن $x = y$ در شرط اول، نتیجه می‌شود که $f(x)$ بر x بخش‌پذیر است و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم، $f(x) = xg(x)$ که $g(x)$ عددی طبیعی است. حال فرض کنیم $g(۱) = a$ و $g(۲) = b$. نشان می‌دهیم اگر x یک عدد فرد به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $g(x)$ برابر a است. برای این کار دو بار از شرط اول برای $y = ۱$ و $y = ۲$ استفاده می‌کنیم:

$$x + ۱ \mid xg(x) + a = (x + ۱)g(x) + (a - g(x)) \implies x + ۱ \mid g(x) - a,$$

$$x + ۲ \mid xg(x) + ۲b = (x + ۲)g(x) + ۲(b - g(x)) \implies x + ۲ \mid g(x) - b.$$

(نتیجه‌گیری آخر به این علت است که $x + ۲$ فرد است) در نتیجه با توجه به نسبت به هم اول بودن $x + ۱$ و $x + ۲$، باقیماندهٔ $g(x)$ بر $(x + ۱)(x + ۲)$ با دانستن باقیمانده‌اش بر $x + ۱$ و $x + ۲$ به صورت یکتا به دست می‌آید. $a(x + ۲) - b(x + ۱)$ در دو بخش‌پذیری بالا به جای $g(x)$ صدق می‌کند، پس داریم:

$$g(x) = a(x + ۲) - b(x + ۱) + c(x + ۱)(x + ۲) = cx^۲ + (۳c + a - b)x + (۲c + ۲a - b).$$

که c عددی صحیح است. با توجه به فرض مسأله برای xهای به اندازهٔ کافی بزرگ $۰ < g(x) \leq \frac{x^۲}{۲}$، پس c نامنفی و حداکثر $\frac{۱}{۲}$ است و چون صحیح است، $c = ۰$. پس داریم:

$$g(x) = (a - b)x + (۲a - b).$$

لم. اگر X و Y نسبت به هم اول باشند، $X + Y | g(X) - g(Y)$.

اثبات لم. بنابر فرض مسأله $Xg(X) + Yg(Y)$ بر $X + Y$ بخش‌پذیر است. پس اگر $(X + Y)g(Y)$ را هم از آن کم کنیم، باز چنین است. پس $X(g(X) - g(Y))$ بر $X + Y$ بخش‌پذیر است. اما X و $X + Y$ نسبت به هم اولند، پس $g(X) - g(Y)$ بر $X + Y$ بخش‌پذیر است.

حال در ادامهٔ حل مسأله فرض کنیم x' عدد فرد به اندازهٔ کافی بزرگ دیگری باشد که نسبت به x اول است، در این‌صورت با توجه به لم:

$$x + x' | (a - b)(x - x'),$$

اما بزرگترین مقسوم علیه مشترک $x+x'$ و $x-x'$ برابر ۲ است، پس $(a-b)|\frac{x+x'}{2}$. حال اگر x' را از دو برابر قدرمطلق $a-b$ بزرگتر بگیریم، نتیجه می‌شود $a-b=0$ و در نتیجه برای xهای فرد بزرگ $g(x)=2a-b=a$ و ادعای ما ثابت می‌شود.

حال فرض کنید y یک عدد طبیعی دلخواه باشد. اگر x را یک عدد طبیعی به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم که نسبت به $2y$ اول باشد، بنابرلم:

$$x+y|g(x)-g(y)=a-g(y).$$

پس $a-g(y)$ بر تمامی $x+y$هایی که x خاصیت گفته‌شده را داشته باشد، بخش‌پذیر است. اما اگر $a-g(y)$ صفر نباشد، x نمی‌تواند از حدی بزرگتر باشد. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر y، $g(y)=a$ و $f(y)=ay$.

در نهایت با توجه به شرط دوم، $2a\leq 1395^2$، تمامی توابعی که در دو شرط مسأله صدق می‌کنند به صورت $f(x)=ax$ هستند که a عددی طبیعی کوچکتر از $\frac{1395^2}{2}$ است.

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

سوالات آزمون مرحله دوم سی و سومین دورهٔ المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۴ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند. در ادامه، سؤالات آزمون را می‌بینید.

۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست‌کم نصف کیک به او برسد.

۲. کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظهٔ خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظهٔ کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظهٔ آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظهٔ کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد (به شرط این‌که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظهٔ کامپیوتر باشند، می‌توان $f+g$ و $f-g$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند.)

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x-\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$، $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ و ...
همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنهٔ هر دو باشد، برابر باشند.)

۳. دایرهٔ دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر Pمحل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

۴. در چهارضلعی $ABCD$، AC نیمساز زاویهٔ A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است.)

۵. محیط یک دایره را با $۲n$ نقطه به $۲n$ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $n + ۱$ بازه به طول‌های ۱، ۲، ...، $n + ۱$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه‌ها کاملاً درون دیگری است.

۶. $n \geq ۵۰$ عددی طبیعی است. نشان دهید می‌توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بزرگ‌تر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می‌توان به صورت $۸۰ + ۱۴$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{۹۴}$ بزرگ‌تر نیستند.

بسم الله الرحمن الرحیم

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دورهٔ المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

آزمون مرحله دوم سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۷ و ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۴ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

دفترچهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که سؤالات راه حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد.

با توجه به جنبهٔ آموزشی این راه حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که بر اساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل واضح بودن در این راه حل‌ها نیامده باشند.

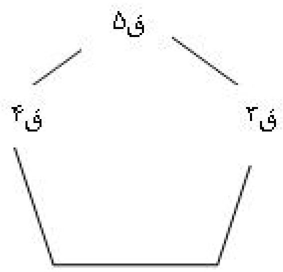
۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعهٔ مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست‌کم نصف کیک به او برسد.

راه حل.

قطعات را از سبک به سنگین، ق۱ تا ق۵ می‌نامیم. واضح است که اگر آرش (ق۵ و ق۳) یا (ق۵ و ق۴) را به دست آورد، به نیمی از کیک رسیده است زیرا بهرام دو قطعه را دارد که هر کدام از یکی از این دو قطعه سبک‌تر است.

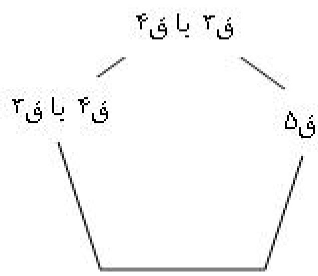
اکنون با توجه به موقعیت سه قطعهٔ سنگین‌تر نسبت به هم، مسأله را در چهار حالت مختلف حل می‌کنیم:

حالت اول. ق۳، ق۴ و ق۵ کنار هم باشند و ق۵ وسطی باشد. در این صورت کافی است آرش ق۵ را بردارد زیرا او در مرحلهٔ بعد می‌تواند یکی از ق۳ یا ق۴ را بردارد.



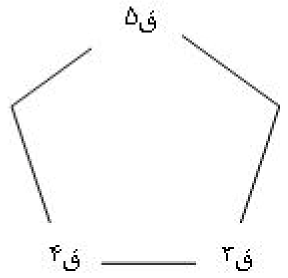
شکل ۱: حالت اول

حالت دوم. ق۳، ق۴ و ق۵ در کنار هم باشند و ق۵ وسط نباشد. در این حالت هم اگر آرش ق۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحلهٔ بعد می‌تواند یکی از ق۴ یا ق۳ را بردارد.



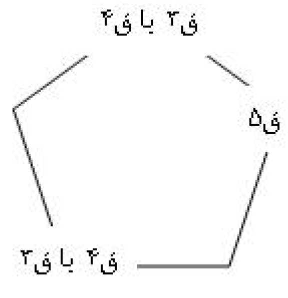
شکل ۲: حالت دوم

حالت سوم. ق۳، ق۴ هیچ‌کدام مجاور ق۵ نباشند. در این حالت هم اگر آرش ق۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحلهٔ بعد می‌تواند یکی از ق۴ یا ق۳ را بردارد.



شکل ۳: حالت سوم

حالت چهارم. یکی از ق۳ یا ق۴ مجاور ق۵ باشد و دیگری مجاور این دو نباشد. در این صورت روش آرش بستگی به این دارد که آیا جمع ق۳ و ق۴ کم‌تر از نصف است یا نه. اگر کم‌تر بود، ق۵ را برمی‌دارد و در ادامه در به‌ترین حالت بهرام به ق۳ و ق۴ می‌رسد. در غیر این صورت (یعنی حالتی که جمع ق۳ و ق۴ دست‌کم نصف کیک است.) در این صورت آرش باید از بین ق۳ و ق۴ آنی که مجاور ق۵ نیست را بردارد. هر قطعه‌ای که بهرام در نوبت بعد بردارد، آرش یا به ق۵ یا به قطعهٔ باقی‌مانده از بین ق۳ و ق۴ دست‌رسی خواهد یافت و لذا از بین ق۳، ق۴ و ق۵ دو تایش به آرش می‌رسد که طبق فرض این قسمت از نصف کم‌تر نیست.



شکل ۴: حالت چهارم

۲. کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظهٔ خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظهٔ کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظهٔ آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظهٔ کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد (به شرط این‌که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظهٔ کامپیوتر باشند، می‌توان $f+g$ و $f-g$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند.)

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x-\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$، $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ و ...
همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنهٔ هر دو باشد، برابر باشند.)

راه حل.

ثابت می‌کنیم جواب مسأله، اعداد طبیعی فرد است.
اولاً توجه کنید که هر عبارتی که بتوان در حافظه ذخیره کرد، تابعی فرد است زیرا عبارت x که در ابتدا در حافظهٔ کامپیوتر است تابعی فرد است و نیز اگر f و g توابعی فرد باشند، $\frac{1}{f}$، $f+g$ و $f-g$ نیز توابعی فرد هستند.
پس برای nهای زوج، نمی‌توان x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. اکنون نشان می‌دهیم برای n فرد، می‌توان عبارتی متحد با x^n را در حافظه ذخیره کرد.
این ادعا را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. فرض کنید $n = ۲k + ۱$. پایهٔ استقرا برای $k = ۰$ واضح است. اکنون فرض کنید توانسته‌ایم عبارت‌های x، $x^۳$، $x^۵$، ...، $x^{۲k-۱}$ (یا عبارت‌هایی متحد با آن‌ها) را در حافظه ذخیره کنیم. بنابراین می‌توانیم $x^{۲k-۱} + x^{۲k-۳}$ و نیز $\frac{۱}{x^{۲k-۱}}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم.
حال به ترتیب عبارات زیر را در حافظه ذخیره می‌کنیم:

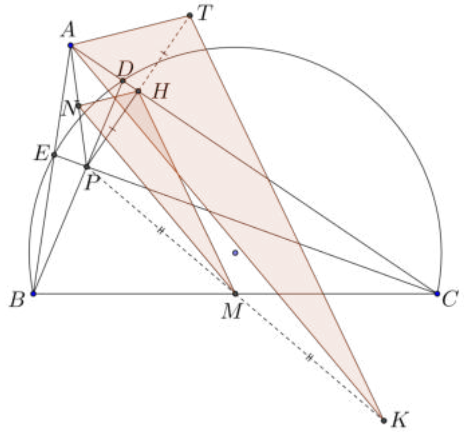
$$x^{۲k-۱}+x^{۲k-۳} \Rightarrow \frac{۱}{x^{۲k-۱}+x^{۲k-۳}} \Rightarrow \frac{۱}{x^{۲k-۱}} - \frac{۱}{x^{۲k-۱}+x^{۲k-۳}} \equiv \frac{۱}{x^{۲k+۱}+x^{۲k-۱}}$$
$$\Rightarrow x^{۲k+۱}+x^{۲k-۱} \Rightarrow x^{۲k+۱}$$

پس توانستیم $x^{۲k+۱}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم و حکم استقرا ثابت شد.

۳. دایرهٔ دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر Pمحل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

راه حل.

قرینه‌ی نقطه‌ی P نسبت به H و M را به ترتیب K و T می‌نامیم. در این صورت ادعا می‌کنیم مثلث‌های MNH و KAT هم‌نهشت هستند. برای این ادعا توجه کنید که $PN = NA$، $PH = HT$ و $PM = MK$ است. پس طبق قضیه‌ی تالس اضلاع این دو مثلث با هم موازی هستند و بنابراین ادعا ثابت شده است. از طرف دیگر با توجه به $\angle EBD = \angle ECD$ و برابری زاویه‌ی $\angle BAC$ در دو مثلث ABD و ACE این دو مثلث متشابه هستند. بنابراین برای اثبات حکم مسئله کافی است ثابت کنیم که دو مثلث AKT و ABD متشابه هستند. یعنی کافی است ثابت کنیم که $\angle BAD = \angle KAT$ و هم‌چنین $\frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AT}$.

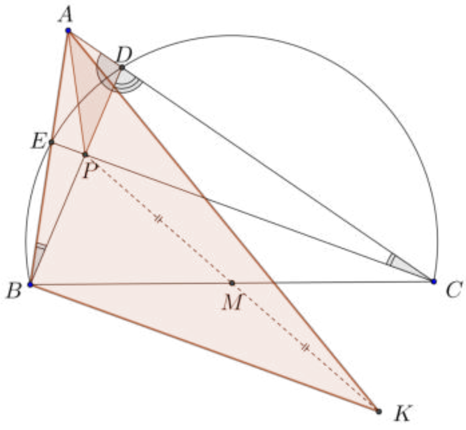


دقت کنید که این احکام معادل متشابه بودن مثلث‌های ABK و ADT است (چون $\angle BAD = \angle KAT$ اگر و تنها اگر $\angle BAK = \angle DAT$). اما با توجه به این که T از قرینه‌کردن P نسبت به ضلع AC به دست آمده‌بود، مثلث‌های ADT و ADP با هم هم‌نهشت هستند و بنابراین برای اثبات حکم باید نشان دهیم که دو مثلث ABK و ADP متشابه هستند.

چون در چهارضلعی $BKCP$ قطرها یک‌دیگر را نصف کرده‌اند، این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است و لذا $BK \parallel CE$. این نتیجه می‌دهد که

$$\angle ABK = \angle AEC = ۱۸۰^\circ - \angle BEC = ۱۸۰^\circ - \angle BDC = \angle ADP$$

از سوی دیگر توجه کنید که مجدداً با توجه به این که $BKCP$ متوازی‌الاضلاع است، $BK = CP$. پس برای کامل شدن اثبات تشابه دو مثلث باید نشان دهیم $\frac{AD}{DP} = \frac{AB}{BK} = \frac{AB}{CP}$.



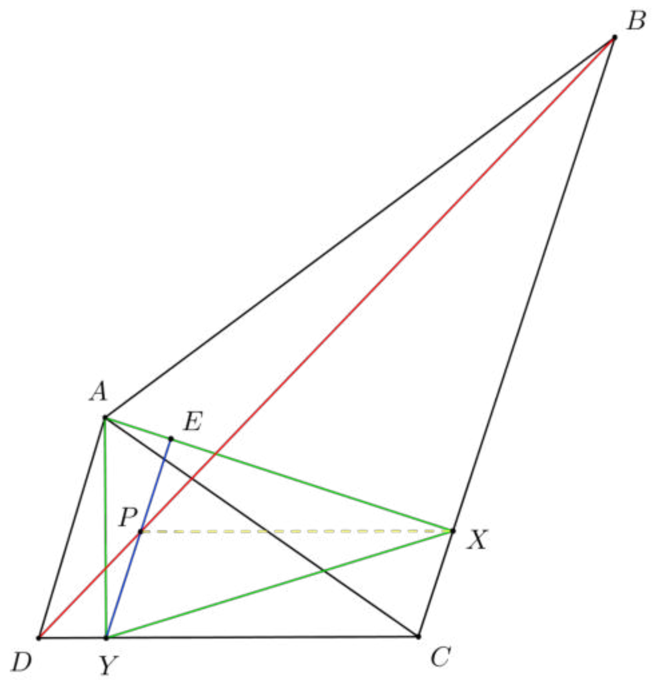
برای این هم طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های ABD و PDC باید ثابت کنیم:

$$\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle ADB)} = \frac{\sin(\angle DCP)}{\sin(\angle CDP)}$$

اما $\angle ABD = \angle DCP$ و $\angle ADB = ۱۸۰° - \angle CDP$ است، پس سینوس‌های این زوایا با هم برابر هستند و بنابراین تساوی مورد نظر ما برقرار هست و بنابراین اثبات حکم مسئله به پایان می‌رسد.

۴. در چهارضلعی $ABCD$، AC نیمساز زاویهٔ A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است.)

راه حل.



پای عمود وارد از Y بر AX را E می‌نامیم. اگر تقاطع YE با BD را P بنامیم برای اثبات حکم کافیست ثابت کنیم XP بر AY عمود است یا معادلاً XP موازی CD است. داریم:

$$YE \| CB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{DP}{PB}$$

ازطرفی

$$ADC \sim ACB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{CX}{XB}$$

پس

$$\frac{DP}{PB} = \frac{CX}{XB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه‌ی تالس XP با CD موازی است.

۵. محیط یک دایره را با $2n$ نقطه به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $n+1$ بازه به طول‌های ۱، ۲، …، $n+1$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه‌ها کاملاً درون دیگری است.

راه حل.

فرض کنید حکم برقرار نباشد. دراین‌صورت $n+1$ بازه با شرایط مسأله وجود دارد که هیچ‌کدام داخل دیگری نیست. بازهٔ به طول ۱ را در نظر بگیرید. با توجه به این‌که هیچ یک از بازه‌های دیگر شامل این بازه نیست، بقیهٔ بازه‌ها با این بازه (مگر احتمالاً در نقاط انتهایی) اشتراک ندارند و اگر درون این بازه را از دایره حذف کنیم و کمان باقی‌مانده را صاف کنیم، چنین چیزی خواهیم داشت:

> پاره‌خطی به طول $2n-1$ که $2n$ نقطه با فاصله‌های واحد روی آن علامت زده شده است. همچنین n بازه با سر و ته این نقاط و به طول‌های ۲، …، $n+1$ که هیچ کدام شامل دیگری نیست.

حال بازهٔ به طول $n+1$ را در نظر بگیرید. از آن‌جایی که هیچ بازهٔ دیگری کاملاً درون این بازه قرار ندارد و بقیهٔ بازه‌ها از آن کوچکترند، هر کدام از این $n-1$ بازه شامل یک نقطه در سمت چپ و یا یک نقطه در سمت راست بازهٔ به طول $n+1$ است و فقط یکی از این حالات اتفاق می‌افتد. حال سرهای (یعنی چپ‌ترین نقطه‌های) هر یک از بازه‌های دستهٔ اول را در نظر بگیرید. این نقاط در سمت چپ بزرگترین بازه قرار دارند و متمایز هستند، چون اگر سر دو بازه یکی باشد، بازهٔ بزرگ‌تر بازهٔ کوچک‌تر را می‌پوشاند. به همین ترتیب نقاط ته بازه‌های دستهٔ دوم را در نظر بگیرید که در سمت راست بزرگترین بازه قرار دارند و متمایزند. پس در مجموع باید $n-1$ نقطهٔ متمایز (سرهای دستهٔ اول و ته‌های دستهٔ دوم) داشته باشیم که همگی از میان نقاط علامت‌زده‌شده و بیرون بزرگترین بازه هستند. اما بزرگترین بازه خود شامل $n+2$ نقطهٔ علامت‌زده‌شده است و $n-2$ نقطهٔ علامت‌زده‌شده بیرون آن قرار دارد، پس نمی‌توان $n-1$ نقطهٔ علامت‌زده‌شده بیرون آن انتخاب کرد. پس فرض خلف به تناقض می‌انجامد و حکم ثابت می‌شود.

۶. $n \geq ۵۰$ عددی طبیعی است. نشان دهید می‌توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بزرگ‌تر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می‌توان به صورت $۸۰ + ۱۴$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{۹۴}$ بزرگ‌تر نیستند.

راه حل.

از آن‌جا که در طول راه‌حل بارها از عبارت ((عوامل اول x از y بیش‌تر نیستند))، استفاده می‌کنیم، در همین ابتدا نماد $\sqsubseteq$ را برای نمایش این مفهوم قرارداد می‌کنیم. به این صورت که $x \sqsubseteq y$ یعنی همهٔ عوامل اول x کم‌تر یا مساوی y هستند.

دو نکتهٔ ساده ما را در رسیدن به این نمایش برای عدد n کمک می‌کند.

- برای هر عدد طبیعی $r \leq m$، $r \sqsubseteq m$. (اگر r عامل اولی بزرگ‌تر از m داشته باشد، باید $r > m$.)
- اگر $r \sqsubseteq m$ و $s \sqsubseteq m$، آن‌گاه $rs \sqsubseteq m$. (هر عامل اول rs عاملی از r یا s است.)

به طور خاص این نکته‌ها نتیجه می‌دهند که اگر بتوان عدد r را به صورت حاصل‌ضرب اعدادی کم‌تر یا مساوی m نوشت $r \sqsubseteq m$، برای مثال همواره $m^۲ \sqsubseteq m$.

فرض کنید $m^۲$ و $(m+۱)^۲$ دو مربع کامل متوالی باشند که $m^۲ \leq n < (m+۱)^۲$. پس $n = m^۲ + r$ که $۰ \leq m \leq ۲m$. دقت کنید که در این صورت $[\sqrt{n}] = m$ و باید نشان دهید که n را می‌توان به صورت $a+b$ نوشت که $a \sqsubseteq m$ و $b \sqsubseteq m$.

مسئله را بر حسب زوج یا فرد بودن m به دو حالت تقسیم می‌کنیم. (توجه کنید که چون $n \geq ۵۰$ فرض شده است، $m \geq ۷$ خواهد بود.)

اگر m فرد باشد، $m+۱$ زوج است. حال $m+۱$ عدد متوالی زیر را در نظر بگیرید:

$$n-(m+۱), n-m, \ldots, n-۲, n-۱$$

از بین این $m+۱$ عدد متوالی یکی از آن‌ها مثلاً $n-j = m^۲ + r - j$ بر $m+۱$ بخش‌پذیر است. ادعا می‌کنیم که در این صورت

$$n = \underbrace{(n-j)}_{a} + \underbrace{j}_{b}$$

نمایش مطلوب برای n را به دست می‌دهد. توجه کنید که برای هر $۱ \leq j \leq m+۱$، داریم $j \sqsubseteq m$، زیرا اگر $j \leq m$ باشد، با توجه به نکتهٔ بالا این موضوع واضح است و اگر $j = m+۱$، آن‌گاه $m+۱ = ۲(\frac{m+۱}{۲})$ و چون $m \geq ۲$ و $\frac{m+۱}{۲} \leq m$، مجدداً طبق نکته‌های بالا $m+۱ \sqsubseteq m$. پس در هر صورت $j \sqsubseteq m$. از طرف دیگر با توجه به نحوهٔ تعریف m، $n-j < (m+۱)^۲$ و در نتیجه $\frac{n-j}{m+۱} < m+۱$. پس $\frac{n-j}{m+۱} \sqsubseteq m$ و این یعنی می‌توان نوشت:

$$n = \underbrace{(m+۱)(\tfrac{n-j}{m+۱})}_{a} + \underbrace{j}_{b}$$

که چون $m \sqsubseteq m + ۱$ و $\frac{n-j}{m+۱} \sqsubseteq m$ نتیجه می‌گیریم که $a \sqsubseteq m$ و بنابراین کار تمام است.
در حالتی که m زوج باشد، شبیه به حالت قبل این بار $m + ۲$ زوج خواهد بود. در این حالت $m + ۲$ عدد متوالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$n - m, n - (m - ۱), \dots, n - ۱, n, n + ۱$$

از بین این $n + ۲$ عدد متوالی حتماً یکی از آن‌ها بر $m + ۲$ بخش‌پذیر است.

- اگر $m \leq j \leq ۱$ یافت شود که $m + ۲ | n - j$، مشابه حالت قبل $\frac{n-j}{m+۲} \leq m$ و لذا $\frac{n-j}{m+۲} \sqsubseteq m$. از طرف دیگر $m + ۲ = ۲(\frac{m+۲}{۲})$ که $\frac{m+۲}{۲} \leq m$,۲. پس $m + ۲ \sqsubseteq m$. بنابراین در کل $a = n - j$ و $b = j$ نمایش مطلوب ما خواهد بود.

- اگر خود n بر $m + ۲$ بخش‌پذیر باشد، چون $m + ۲$ زوج است می‌توان نوشت:

$$n = ۲(\frac{m+۲}{۲})(\frac{n}{m+۲}) = \underbrace{(\frac{m+۲}{۲})(\frac{n}{m+۲})}_{a} + \underbrace{(\frac{m+۲}{۲})(\frac{n}{m+۲})}_{b}$$

- اگر $m+۲ | n+۱$، چون $m^۲+۱ \leq n+۱ \leq (m+۱)^۲$، $n+۱ = (m-۱)(m+۲) = m^۲+m-۲$ و یا $n + ۱ = m(m + ۲)$ (مضرب‌های دیگر $m + ۲$ بزرگ‌تر از $(m + ۱)^۲$ و یا کوچک‌تر از $m^۲$ هستند). در حالت اول چون $m - ۳ < m$، $a = m^۲$ و $b = m - ۳$ همان نمایش مطلوب است.
در حالت دوم $n = (m + ۱)^۲ - ۲$. پس می‌توان نوشت:

$$n = (m+۱)^۲ - ۲ = (m+۱)^۲ - ۹ + ۷ = (m-۲)(m+۴) + ۷ = \underbrace{۲(m-۲)(\tfrac{m+۴}{۲})}_{a} + \underbrace{۷}_{b}$$

حال چون $m \geq ۷$، $\frac{m+۴}{۲} \leq m$ و لذا $a \sqsubseteq m$ و $b \sqsubseteq m$. پس در این حالت هم نمایش مطلوب وجود دارد و بنابراین کار تمام است.

توضیح. توجه کنید که در طول راه‌حل از فرض $m \geq ۷$ تنها در آخرین استدلال استفاده شد و در مابقی استدلال‌ها فرض $m \geq ۴$ ($n \geq ۱۶$) کفایت می‌کرد. با توجه به این نکته استدلال بالا حکم مسئله را برای همهٔ اعداد طبیعی مگر اعداد به شکل $m^۲ + ۲m - ۱$ که m عددی زوج و کم‌تر از ۷ است نتیجه می‌دهد. این چنین عددی برای $m = ۶$ برابر ۴۷ است که می‌توان آن را به صورت $۱۵ + ۳۲$ نوشت. در مورد $m = ۴$ هم به عدد ۲۳ برمی‌خوریم که می‌توان به سادگی دید که چنین نمایشی ندارد. در واقع حکم مسئله برای همهٔ اعداد بزرگ‌تر از ۷ به جز ۲۳ درست است.

به نام او

روز اول

۱. فروش‌گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش‌گاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دل‌خواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همهٔ سبدها را با هم برابر کرد؟

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطهٔ N و P، به‌ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده‌اند که $PN = NC$ و نقطهٔ Q روی پاره‌خط AN طوری انتخاب شده که $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$.
ثابت کنید

$$\widehat{BCQ} = \frac{۱}{۲}\widehat{PQA}.$$

۳. اعداد حقیقی و نامنفی x، y و z مفروض هستند. می‌دانیم

$$۲(xy + yz + zx) = x^۲ + y^۲ + z^۲.$$

ثابت کنید

$$\frac{x+y+z}{۳} \geq \sqrt[۳]{۲xyz}.$$

موفق باشید

به نام او

روز دوم

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m$$

۵. زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.

الف. یک مجموعهٔ توانای چهار عضوی مثال بزنید.

ب. ثابت کنید یک مجموعهٔ توانای متناهی بیش از چهار عضو ندارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای»، اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به‌ترین عضو مشخص می‌شود و همهٔ به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و یک گروه جدید را تشکیل می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همهٔ اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر $\sqrt{۲n} + ۱$ است.

موفق باشید

سؤالات و پاسخ‌های تشریحی آزمون مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۹۳

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

معاونت دانش‌پژوهان جوان

به نام او

آزمون مرحله دوم سی و دومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۱ و ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۳ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

دفترچهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. در تدوین راه حل‌ها جنبهٔ آموزشی این امر مد نظر قرار گرفته و برای بعضی سؤالات بیش از یک راه حل ارائه شده است. لازم به ذکر است که سؤالات راه حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد.

با توجه به جنبهٔ آموزشی این راه حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که بر اساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل واضح بودن در این راه حل‌ها نیامده باشند.

۱. فروش‌گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش‌گاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دلخواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همهٔ سبدها را با هم برابر کرد؟

راه حل. پاسخ مسئله ۹۹ است. ابتدا وضعیت اولیه‌ای را در نظر بگیرید که در آن همهٔ تخم‌مرغ‌ها در یک سبد باشند. در این صورت در هر مرحله حداکثر یک سبد جدید دارای تخم‌مرغ می‌شود. بنابراین حداقل ۹۹ مرحله لازم است تا همهٔ سبدها دارای تخم‌مرغ شوند. اکنون ادعا می‌کنیم با هر وضعیت اولیه در ۹۹ مرحله می‌توان همهٔ سبدها را درست کرد. (درست یعنی شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ) در هر مرحله، از بین سبدهایی که هنوز درست نشده‌اند، سبدی با بیشترین میزان برنج و سبدی با بیش‌ترین تعداد تخم‌مرغ را در نظر بگیرید. به وضوح سبد اول حداقل ۱۰ کیلوگرم برنج دارد و سبد دوم حداقل ۳۰ عدد تخم‌مرغ دارد. (ممکن است این دو سبد یکی باشند، در این صورت همین سبد و یک سبد دل‌خواه دیگر را انتخاب کنید.) با جابجایی اجناس بین این دو سبد می‌توان یک سبد با دقیقاً ۱۰ کیلوگرم برنج و دقیقاً ۱۰ عدد تخم‌مرغ ساخت. بنابراین در هر مرحله می‌توان حداقل یک سبد را درست کرد، پس از ۹۹ مرحله ۹۹ سبد درست شده‌اند، پس سبد آخر نیز خود به خود درست شده است.

۲. مربع $ABCD$ مفروض است. دو نقطهٔ N و P، به‌ترتیب، روی اضلاع AB و AD به شکلی انتخاب شده‌اند که $PN = NC$ و نقطهٔ Q روی پاره‌خط AN طوری انتخاب شده که $\widehat{QPN} = \widehat{NCB}$. ثابت کنید:

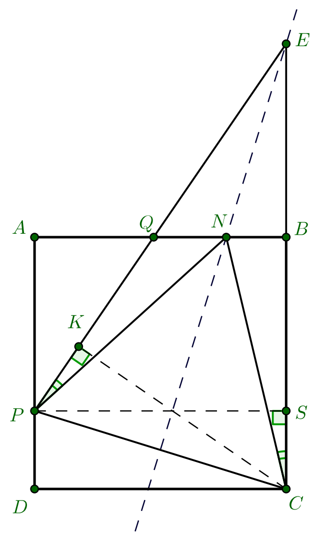
$$\widehat{BCQ} = \frac{۱}{۲}\widehat{PQA}.$$

راه حل. خط PQ را امتداد می‌دهیم تا خط BC را در نقطهٔ E قطع کند. طبق فرض $PN = NC$، پس $\angle NPC = \angle PCN$. همچنین می‌دانیم $\angle QPN = \angle NCB$. از جمع این دو رابطه درمی‌یابیم مثلث EPC متساوی‌الساقین است. در این مثلث ارتفاع‌های CK و PS را رسم می‌کنیم. چون مثلث EPC متساوی‌الساقین است $PS = CK$. از طرفی PS برابر طول ضلع مربع است پس $CK = CB$. در چهارضلعی $QBCK$ مجموع زاویه‌های $\angle QBC$ و $\angle CKQ$ برابر ۱۸۰ درجه است. در نتیجه این چهارضلعی محاطی است و

$$\angle BCK = \angle AQP.$$

توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویه CKQ و CBQ به حالت وتر و یک ضلع $(CQ = CQ, CK = CB)$ همنهشت هستند. بنابراین QC نیمساز $\angle KQB, \angle KCB$ است و

$$\angle BCQ = \frac{\angle KCB}{۲} = \frac{\angle AQP}{۲}.$$



۳. اعداد حقیقی و نامنفی x، y و z مفروض هستند. می‌دانیم:

$$2(xy+xz+zy)=x^2+y^2+z^2.$$

ثابت کنید:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{2xyz}.$$

راه حل نخست:

فرض کنید $x\geqslant y\geqslant z$

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx)\\
&\Rightarrow 1x^2+x(-2y-2z)+y^2+z^2-2yz=0\\
&\Rightarrow x=(y+z)\pm\sqrt{(y+z)^2-y^2-z^2+2yz}=(y+z)\pm 2\sqrt{yz}=(y+z)\pm 2\sqrt{yz}=(\sqrt{y}\pm\sqrt{z})^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}-\sqrt{z}$ یا $\sqrt{x}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$

که با فرض $x\geqslant y\geqslant z$ تنها حالت $\sqrt{x}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$ یا معادلا $x=y+z+2\sqrt{yz}$ رخ می‌دهد. حال با جای‌گذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y+z+2\sqrt{yz}+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{2(y+z+2\sqrt{yz})yz}$$

برای اثبات نابرابری بالا ابتدا فرض کنیم $y=0$ ولی در این حالت حکم اصلی مسئله واضح است چون سمت راست صفر و سمت چپ مثبت است. حال فرض کنید y مخالف صفر است ($y=0$ بدیهی است) و دو طرف حکم معادل بالا را بر y تقسیم کنید و فرض کنید $\frac{z}{y}=t$ پس باید ثابت کنیم:

$$\frac{2t+2\sqrt{t}+2}{3}\geqslant\sqrt[3]{2(t+1+2\sqrt{t})t}$$

که این هم با استفاده از نابرابری حسابی-هندسی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\frac{2t+2\sqrt{2t}+2}{3}=\frac{(\sqrt{t}+1)+(\sqrt{t}+1)+2t}{3}\geqslant\sqrt[3]{(\sqrt{t}+1)^2 2t}\\
&=\sqrt[3]{2(t+1+2\sqrt{t})t}
\end{aligned}$$

راه حل دوم:

فرض کنید $x \geqslant y \geqslant z$

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲(xy + yz + zx)$$
$$\Rightarrow x^۲ + x(-۲y - ۲z) + y^۲ + z^۲ - ۲yz = ۰$$
$$\Rightarrow x = (y+z) \pm \sqrt{(y+z)^۲ - y^۲ - z^۲ + ۲yz} = (y+z) \pm ۲\sqrt{yz} = (y+z) \pm ۲\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض $x \geqslant y \geqslant z$ تنها حالت $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$ یا معادلا

$$x = y + z + ۲\sqrt{yz}$$

رخ می‌دهد. حال با جایگذاری x در حکم به نابرابری معادل زیر می‌رسیم

$$\frac{y + z + ۲\sqrt{yz} + y + z}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(y + z + ۲\sqrt{yz})yz}$$

فرض کنید $A = \frac{y+z}{۲}$ و $B = \sqrt{yz}$ حال چون $A \geqslant B$ (نابرابری حسابی-هندسی) می‌توان فرض کرد $A = B + e$ که $e \geqslant ۰$ در این صورت با جای‌گذاری $A = B + e$ در رابطهٔ قبل به حکم معادل زیر می‌رسیم

$$۲B + \frac{۴e}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{۲(۴B + ۲e)B^۲}$$

حال اگر دو طرف را به توان سه برسانیم به حکم معادل زیر می‌رسیم

$$(۲B + \frac{۴e}{۳})^۳ \geqslant ۸B^۳ + ۴eB^۲$$

اما داریم:

$$(۲B + \frac{۴e}{۳})^۳ = ۸B^۳ + ۳(۲B)^۲\frac{۴e}{۳} + ۶B(\frac{۴e}{۳})^۲ + (\frac{۴e}{۳})^۳ \geqslant ۸B^۳ + ۱۶B^۲e \geqslant ۸B^۳ + ۴eB^۲$$

پس رابطهٔ مورد نظر ثابت شد.

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m.$$

راه حل نخست:

عدد طبیعی k و عدد صحیح نامنفی t را طوری انتخاب می‌کنیم که k بر n بخش‌پذیر نباشد و $m = kn^t$. (ابتدا t را بزرگ‌ترین عدد صحیح نامنفی در نظر می‌گیریم که m بر n^t بخش‌پذیر باشد، سپس k را برابر حاصل تقسیم m بر n^t در نظر می‌گیریم.) با این جای‌گذاری در تساوی اصلی خواهیم داشت

$$n^{n^n} = m^m = (kn^t)^{kn^t}$$

از دو طرف رادیکال به فرجهٔ n^t می‌گیریم

$$n^{n^{n-t}} = (kn^t)^k = k^k n^{kt}$$

دو طرف را بر n^{kt} تقسیم می‌کنیم

$$n^{n^{n-t}-kt} = k^k \qquad (۱)$$

اگر $t \geq n$ آن‌گاه $m = kn^t \geq n^t \geq n^n$، پس $n^m \geq n^{n^n}$ و در نتیجه

$$m^m = n^{n^n} \leq n^m \Rightarrow m \leq n \Rightarrow n^n \leq n \Rightarrow n \leq ۱ \Rightarrow n = ۱$$

و جواب $m = n = ۱$ به دست می‌آید.

اما اگر $n > t$ آن‌گاه $n - t$ مثبت است و $n^{n-t} - kt$ عددی صحیح. فرض کنید $s = n^{n-t} - kt$، در این صورت $n^s = k^k$. اگر $s < ۰$ آن‌گاه یک طرف تساوی اخیر ناصحیح می‌شود، در حالی که طرف دیگر صحیح است. اگر $s = ۰$ آن‌گاه $k = ۱$ که در انتها بررسی شده. فرض کنیم $s > ۰$، در این صورت اگر عدد اولی تنها یکی از n و k را بشمارد آن‌گاه این عدد اول تنها یکی از دو طرف تساوی $n^s = k^k$ را می‌شمارد که این ممکن نیست. پس عوامل اول n و k یکسان‌اند. فرض کنید $n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_r^{\alpha_r}$ و $k = p_۱^{\beta_۱} \cdots p_r^{\beta_r}$ تجزیهٔ این دو عدد به عوامل اولشان باشد، در این صورت

$$n^s = k^k \Rightarrow (p_۱^{\alpha_۱})^s \cdots (p_r^{\alpha_r})^s = (p_۱^{\beta_۱})^k \cdots (p_r^{\beta_r})^k$$

از برابری توان‌های هر عدد اول در دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم

$$p_i^{\alpha_i s} = p_i^{\beta_i k} \Rightarrow \alpha_i s = \beta_i k \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{k}{s}$$

اگر $k \geq s$ آن‌گاه $\beta_i \geq \alpha_i$ و در نتیجه k بر n بخش‌پذیر است که خلاف فرض اولیه است.

اگر $k > s$ آن‌گاه $\alpha_i > \beta_i$ و در نتیجه n بر k بخش‌پذیر است. پس n^{n-t} هم بر k بخش‌پذیر است. از دو طرف تساوی (۱) رادیکال فرجهٔ k می‌گیریم

$$n^{\frac{n^{n-t}}{k}-t} = k$$

چون توان n در این عبارت صحیح است و k مضربی از n نیست به ناچار $s = ۰$ و $k = ۱$. یعنی $n^{n-t} - t = ۰$، اما

$$t = n^{n-t} \geq n^{۱} \geq n > t$$

و به تناقض می‌رسیم.

راه حل دوم:

ابتدا توجه کنید که اگر $n = 1$ آن‌گاه $m = 1$ و جواب $m = n = 1$ به دست می‌آید. از این به بعد فرض می‌کنیم $n > 1$. فرض کنیم $r = \log_n m$، در این صورت $m = n^r$ و

$$n^{n^n} = m^m = (n^r)^{n^r} = n^{rn^r}$$

چون $n > 1$ باید توان‌های n در دو طرف برابر باشد

$$n^n = rn^r \Rightarrow r = n^{n-r} \tag{۲}$$

از طرفی با گرفتن لگاریتم (پایهٔ n) از دو طرف تساوی $n^{n^n} = m^m$ به دست می‌آوریم

$$n^n = m \log_n m \Rightarrow r = \frac{n^n}{m} \tag{۳}$$

لم. اگر به ازای عددی طبیعی مثل n و عددهایی گویا و مثبت مثل p و q تساوی $n^p = q$ برقرار شود آن‌گاه q عددی طبیعی است.

اثبات. فرض کنید $p = \frac{a}{b}$ و $q = \frac{c}{d}$ نمایش‌های کسری این دو عدد گویا باشند. در این صورت

$$n^p = q \Rightarrow n^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow n^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b} \Rightarrow d^b | c^b \Rightarrow d | c \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

ادامهٔ راه‌حل. بنابر تساوی (۲) r گویاست و بنابر تساوی (۱)، با فرض $p = n - r$ و $q = r$ داریم $n^p = q$. گویا بودن p و q نتیجهٔ مستقیم گویا بودن r است. پس بنابر لم، q باید عددی طبیعی باشد. یعنی r عددی طبیعی است.

اگر $r < n$ آن‌گاه $n^{n-r} \geq n^1 > r$ در نتیجه تساوی امکان پذیر نیست.

اگر $r > n$ آن‌گاه $n^{n-r} < 1 < r$ در نتیجه باز هم تساوی ممکن نیست.

اگر $r = n$ آن‌گاه $r = n^{n-r} = 1$ پس $n = r = 1$ که خلاف فرض $n > 1$ است.

در نتیجه تنها جواب $m = n = 1$ است.

۵. زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند S را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه a و b دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد a^b یا b^a عضو S باشند.

الف. یک مجموعهٔ توانای چهار عضوی مثال بزنید.

ب. ثابت کنید یک مجموعهٔ توانای متناهی؛ بیش از چهار عضو ندارد.

راه حل.

الف. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\}$ یک مجموعهٔ توانای ۴ عضوی است:

$$1^x = 1, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

(البته این مثال را می‌توان با تحلیل صورت کلی مجموعه‌های توانا - همان‌طور که در ادامه خواهد آمد - به دست آورد.)

ب. ابتدا چند خاصیت اساسی عمل به توان رساندن را یادآوری می‌کنیم:

- برای هر عدد مثبت x و اعداد مثبت $a < b$، $a^x < b^x$.
- اگر عدد حقیقی a بیشتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x زیاد می‌شود؛ به عبارت دیگر، اگر $x < y$، $a^x < a^y$.
- اگر عدد حقیقی مثبت a کمتر از ۱ باشد، مقدار a^x با افزایش x کم می‌شود.

حال به سراغ حل مسأله می‌رویم. ابتدا یک لم:

لم. یک مجموعهٔ توانای متناهی نمی‌تواند هم‌زمان شامل یک عضو بزرگتر از ۱ و یک عضو کمتر از ۱ باشد.

اثبات. فرض کنید چنین نباشد. در این‌صورت مجموعهٔ توانای متناهی S وجود دارد که هم شامل عضوی بزرگتر از ۱ و هم شامل عضوی کوچک‌تر از ۱ است. کوچکترین عضو مجموعهٔ S را با a و کوچکترین عضو در میان اعضای بزرگتر از ۱ را با b نمایش می‌دهیم. (بنابر متناهی بودن S چنین اعضایی وجود دارند.) در نتیجه $a < 1 < b$. داریم $a^b < a^1 = a$، اما a کوچکترین عضو S است، پس a^b نمی‌تواند در S باشد. همین‌طور $1 = b^0 < b^a < b^1 = b$، اما S شامل عضوی بین ۱ و b نیست، پس b^a هم نمی‌تواند در S باشد. پس هیچ یک از دو عدد a^b و b^a در S قرار ندارند و این توانا بودن S را نقض و لم را ثابت می‌کند. $\square$

با توجه به لم، مجموعه‌های توانای متناهی، دو نوع هستند. نوع اول آن‌هایی هستند که همهٔ اعضای آنها بیشتر یا مساوی ۱ هستند و نوع دوم آن‌هایی هستند که همهٔ اعضای آنها کمتر یا مساوی ۱ هستند.

فرض کنیم S مجموعهٔ توانایی از نوع اول و با بیش از ۳ عضو باشد. همچنین $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ اعضای بزرگتر از ۱ در S باشند. از آنجایی که S عضو کمتر از ۱ ندارد، تعداد اعضای آن حداکثر یکی از n بیشتر است و در نتیجه $n \geq 3$. برای هر $1 \leq i < n$، $a_n^{a_i}$ از a_n بیشتر است، پس در S قرار نمی‌گیرد. پس توانا بودن S ایجاب می‌کند که $a_i^{a_n}$ در S باشد. حال

$$a_1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \cdots < a_{n-1}^{a_n}$$

n عضو بزرگتر از ۱ در S هستند، از طرف دیگر $a_1 < \cdots < a_n$ همهٔ اعضای بزرگتر از ۱ در S بودند، پس

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \ldots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

حال بیایید توانا بودن S را در مورد a_1 و a_{n-1} بررسی کنیم. (با توجه به $n \geq 3$، $1 < n-1$) با توجه به $a_1 > 1$ داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_{n-1}} < a_1^{a_n} = a_2.$$

پس $a_1^{a_{n-1}}$ عددی بین a_1 و a_2 است و چنین عددی در S وجود ندارد. به طریق مشابه:

$$a_{n-1} < a_{n-1}^{a_1} < a_{n-1}^{a_n} = a_n.$$

پس $a_{n-1}^{a_1}$ هم در S قرار ندارد. پس S نمی‌تواند توانا باشد و نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های توانای نوع اول حداکثر ۳ عضو دارند.

حال فرض کنید S یک مجموعهٔ توانای متناهی از نوع دوم با بیش از ۴ عضو و $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ اعضای کمتر از ۱ در آن باشند. پس n حداقل ۴ است. $a_n < 1$ پس برای هر $1 \leq i < n$، $1 = a_n^0 > a_n^{a_i} > a_n^1 = a_n$.
پس $a_n^{a_i}$ در S قرار ندارد و $a_i^{a_n}$ عضو S است. داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \cdots < a_{n-1}^{a_n} < 1.$$

و در نتیجه مشابه استدلال حالت قبل داریم

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \ldots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

و یا معادلاً

$$a_{n-1} = a_n^{\frac{1}{a_n}},\ a_{n-2} = a_{n-1}^{\frac{1}{a_n}},\ \ldots, a_1 = a_2^{\frac{1}{a_n}}.$$

پس اگر a_n را با a نشان دهیم، اعضای S به صورت زیر هستند:

$$\cdots < a^{\frac{1}{a^2}} < a^{\frac{1}{a}} < a.$$

حال توجه کنید که $a_{n-1} < 1$، پس

$$a_n = a_{n-1}^{a_n} < a_{n-1}^{a_{n-2}} < 1.$$

پس $a_{n-2}^{a_{n-1}}$ در S قرار دارد و چون

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} > a_{n-2}^{a_n} = a_{n-1}$$

پس داریم: $a_{n-2}^{a_{n-1}} = a_n$

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} = \left(a^{1/a^2}\right)^{\left(a^{1/a}\right)} = a \implies a^{a^{(1/a)-2}} = a$$
$$\Rightarrow a^{\frac{1}{a}-2} = 1$$

که با توجه به این که $a \neq 1$ پس $\frac{1}{a} - 2 = 0$ و در نتیجه $a = \frac{1}{2}$. پس $a_n = \frac{1}{2}, a_{n-1} = \frac{1}{4}, a_{n-2} = \frac{1}{16}$. حال $n \geq 4$ پس $n - 3 \geq 1$ و $a_{n-3} = a_{n-2}^2 = \frac{1}{28}$. حال شرط توانا بودن را برای a_{n-2} و a_{n-3} بررسی می‌کنیم:

$$a_n = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{28}} = a_{n-2}^{a_{n-3}} < 1.$$

همین‌طور

$$\frac{1}{2} < a_{n-3}^{a_{n-2}} = \left(\frac{1}{28}\right)^{\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

پس هیچ یک از دو عدد $a_{n-2}^{a_{n-3}}$ و $a_{n-3}^{a_{n-2}}$ در S قرار ندارند و شرط توانا بودن نقض می‌شود. پس مجموعه‌های توانای نوع دوم حداکثر ۴ عضو دارند.

پس هر دو نوع مجموعهٔ توانای متناهی حداکثر ۴ عضو دارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای» اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به‌ترین عضو مشخص می‌شود و همهٔ به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و تشکیل یک گروه جدید را می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن n عضو دارد و در ابتدا همهٔ اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر $\sqrt{۲n} + ۱$ است.

راه حل نخست:

پیش از هر سخنی ابتدا به این نکتهٔ واضح و کلیدی دقت کنید که اگر k گروه با اعضای $۱, ۲, ..., k$ داشته‌باشیم، در مرحلهٔ بعد هم k گروه با اعضای $۱, ۲, ..., k$ خواهیم داشت. حال به حل سوال توجه کنید.

لم: اگر $n = \binom{k}{۲}$ همواره پس از $\binom{k}{۲}$ حرکت، در نهایت $k - ۱$ گروه خواهیم داشت که به ازای هر i که $۱ \leq i < k$ گروهی با i عضو موجود باشد.

اثبات لم: برای $k = ۲$ بدیهی است و برای $k = ۳$ نیز داریم $n = \binom{۳}{۲} = ۳$ که پس از یک حرکت به حالت یک گروه یک نفره و یک گروه دو نفره می‌رسیم.

فرض می‌کنیم حکم استقرا به ازای هر $۱ \leq k \leq m$ برقرار باشد، حال حکم را برای $k = m + ۱$ اثبات می‌کنیم. بنابرین فرض کنید گروه اصلی گروهی با $\binom{m+۱}{۲}$ عضو باشد. طبق فرض استقرا پس از $\binom{m}{۲}$ حرکت، $m - ۱$ گروه جدید خواهیم داشت که به ازای هر i که $۱ \leq i \leq m - ۱$ گروهی با i عضو موجود باشد. ضمناً تعداد اعضای گروه اصلی هم برابر با $m = \binom{m+۱}{۲} - \binom{m}{۲}$ است. بنابر این حکم با استقرا اثبات شد.

حال به اثبات باقیماندهٔ سوالات می‌رویم: فرض کنید $n = \binom{k}{۲} + t$ به طوری که $n \leq \binom{k+۱}{۲}$ می‌خواهیم اثبات کنیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد تعداد اعضای بزرگترین گروه n نفر است. برای این کار هم به سادگی مانند اثبات لم بالا فرض کنید $\binom{k+۱}{۲}$ معماباز داریم که $\binom{k+۱}{۲} - \binom{k}{۲} - t$ تا از آنها عضو فرعی و بقیه اصلی هستند. (در واقع تعدادی عضو فرعی اضافه نمودیم.) در هر مرحله هم اولویت برداشت عضو از هر گروه با اعضای اصلی آن گروه می‌باشد (اعضای فرعی تا جای ممکن از همه می‌بازند!). طبق لم می‌دانیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد به ازای هر $۱ \leq i \leq k$ ، گروهی با i عضو وجود دارد. در هر مرحله تعداد اعضای هر گروه از k بیشتر نمی‌شود و بدون در نظر گرفتن اعضای فرعی هم این حکم درست است. بنابراین تعداد اعضای اصلی از k بیشتر نمی‌شود. پس حکم به این صورت نتیجه می‌شود:

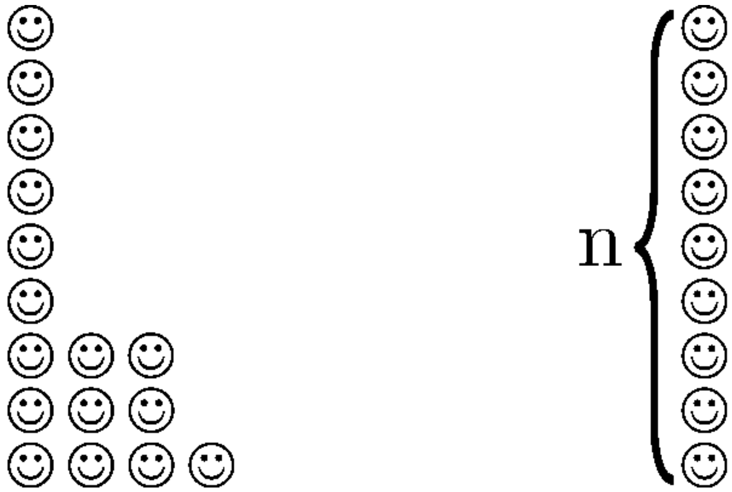
$$\frac{k^۲-k}{۲} = \binom{k}{۲} < n = \binom{k}{۲} + t \leq \binom{k+۱}{۲}$$
$$\Rightarrow k^۲ - k + \frac{۱}{۴} < ۲n \Rightarrow (k - \frac{۱}{۲})^۲ < ۲n \Rightarrow k < \sqrt{۲n} + \frac{۱}{۲} < \sqrt{۲n} + ۱$$

راه حل دوم:

توجه کنید که سوال معادل این است که ثابت کنیم اگر در ابتدا یک دستهٔ n تایی از دوایر داشته باشیم و در هر مرحله از هر دسته یک دایره انتخاب کرده و با آنها دسته‌ای جدید ایجاد کنیم، مرحله‌ای فرا خواهد رسید که از آن مرحله به بعد، هر دسته شامل حداکثر $\sqrt{۲n}+۱$ دایره باشد.

برای این که راه حل قابل فهم‌تر باشد تعدادی تعریف کرده و شهودی کلی از اثبات ارائه می‌دهیم و در انتها شهودی که ارائه دادیم را دقیق می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر دسته‌بندی از دوایر، «قیافه» این دسته‌بندی را نمایشی از دایره‌ها گوییم به طوری که هر دسته به شکل ستونی از دوایر باشد و ستون‌ها نیز بر حسب تعداد دوایرشان مرتب شده‌باشند. در شکل زیر قیافهٔ دسته‌بندی (n) را در سمت راست و قیافهٔ دسته‌بندی $(۱,۳,۹,۳)$ را در سمت چپ می‌بینید.



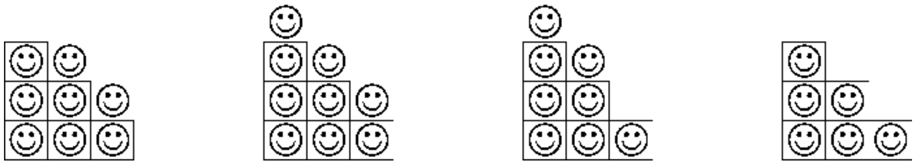
تعریف ۲: یک «پلکان به طول k» شامل $\binom{k+۱}{۲}$ دایره‌است به طوری که دایره‌ها در دسته‌های $۱,۲,۳,۴,...,k$ تایی قرار داشته‌باشند.

تعریف ۳: یک «پلکان به طول k و تاج t» (که $t \leq k$) پلکانی به طول k است که به t دستهٔ بزرگ‌تر آن یک دایره اضافه کرده‌ایم. در نتیجه شامل $\binom{k+۱}{۲}+t$ دایره‌است که در دسته‌های $۱,۲,...,k-t,k-t+۲,...,k,k+۱$ تایی قرار گرفته‌اند. اگر $t=k+۱$ پلکان به طول k و تاج t را همان پلکان به طول $k+۱$ در نظر می‌گیریم. پس پلکان به طول k و تاج ۰ یک پلکان به طول k است.

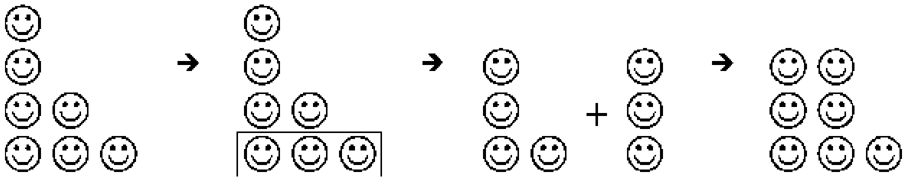
تعریف ۴: یک «ساختار پلکانی با m دایره» دسته‌بندی شامل m دایره است که اگر $\binom{k+۱}{۲} \leq m < \binom{k+۲}{۲}$ این دسته‌بندی به شکل پلکانی به طول k و تاج $m-\binom{k+۱}{۲}$ باشد.

تعریف ۵: یک «پلکان به طول k و تاج t و جایگاه r» (که $t \leq k+۱$) پلکانی با دسته‌های $x_۰,x_۱,...,x_k$ است ($x_۰$ می‌تواند ۰ باشد) که اگر $k-i$ به پیمانهٔ $k+۱$ عضو مجموعهٔ $\{r,r+۱,...,r+t-۱\}$ باشد $x_i=i+۱$ و در غیر این صورت $x_i=i$. پس پلکان به طول k و تاج t و جایگاه ۰ یک پلکان به طول k و تاج t است.

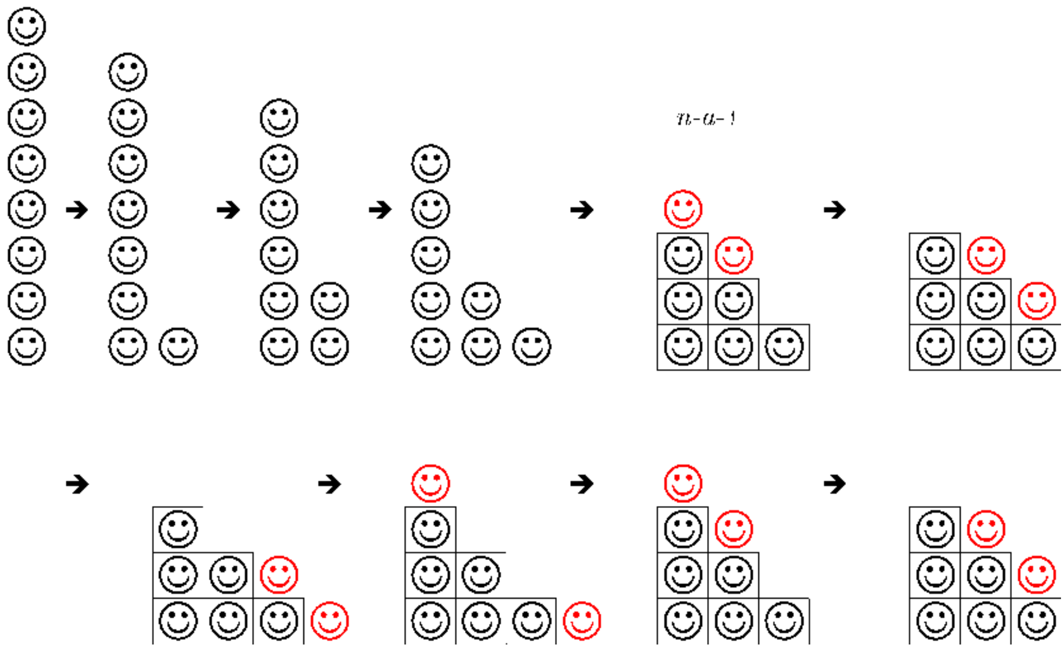
شکل زیر از راست به چپ قیافه یک پلکان به طول ۳، قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲، قیافه یک ساختار پلکانی به طول ۹ و قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲ و جایگاه ۵ را نشان می‌دهد.



نکته ۱: چنانچه یک دسته‌بندی داشته‌باشیم، در هر مرحله قیافهٔ دسته‌بندی به این شکل تغییر می‌کند: سطر پایینی جدا شده و به یک ستون جدید تبدیل می‌شود. سپس این ستون بر حسب تعداد دوایرش در جایگاه مناسب قرار می‌گیرد. برای مثال قیافهٔ دستهٔ $(۲, ۱, ۴)$ به این شکل تغییر می‌کند:



اکنون فرض کنید $\binom{a+۱}{۲} < n \le \binom{a+۲}{۲}$ و $b = n - \binom{a+۱}{۲}$ در ادامهٔ راه می‌خواهیم اثبات کنیم دایره‌ها از مرحلهٔ $n - a - ۱$ به بعد مانند شکل جمع شده و قیافه‌ها با الگوی خاصی تکرار می‌شوند.

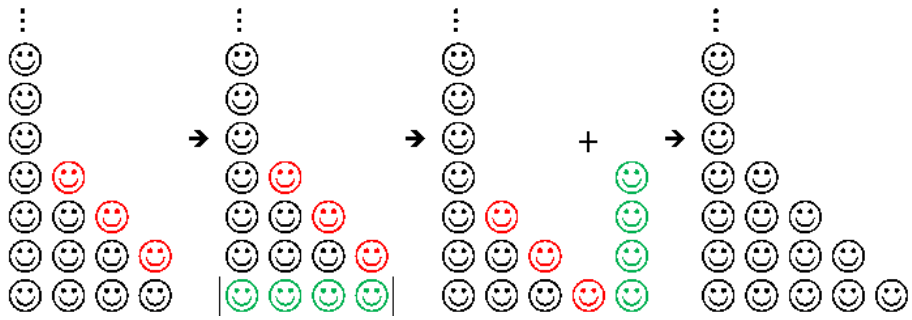


حال به اثبات دقیق می‌پردازیم.

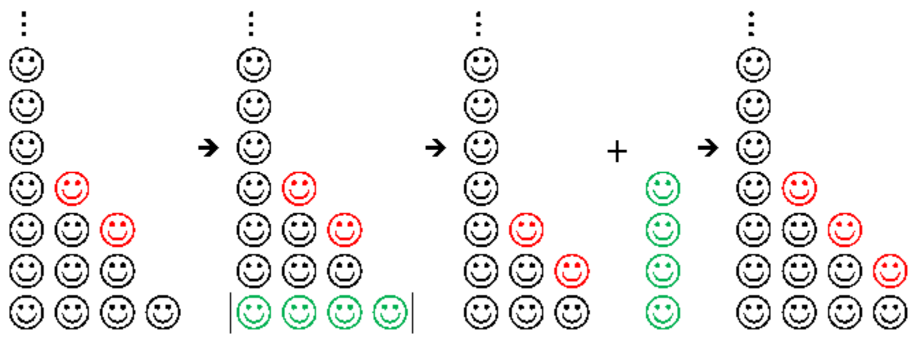
ادعا ۱: در مرحلهٔ lام $(l < n)$، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک دسته با $n - l$ دایره است.

اثبات ادعا: به استقرا روی l حکم را ثابت می‌کنیم. پایهٔ استقرا با توجه به اولین عمل واضح است. برای اثبات گام استقرا توجه می‌کنیم که طبق فرض استقرا در مرحلهٔ $l - ۱$ام، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با $l - ۱$ دایره به همراه یک دسته با $n - l + ۱$ دایره است. حال دو حالت داریم:

حالت نخست: k وجود داشته‌باشد که $\binom{k+1}{2} - 1 = l - 1$. در این حالت پلکانی به طول $k-1$ و تاج $k-1$ داریم پس دسته‌ها به طول $2, 3, \dots, k-1, k, n-l+1$ هستند. که در مرحلهٔ بعد طول دسته‌ها برابر $1, 2, 3, \dots, k-2, k-1, k, n-l$ خواهد شد. که این یک پلکان به طول $k+1$ به همراه یک ستون با $n-l$ دایره است. پس در این حالت مرحله بعد حاوی یک ستون با $n-l > 0$ دایره و یک ساختار پلکانی lتایی است.



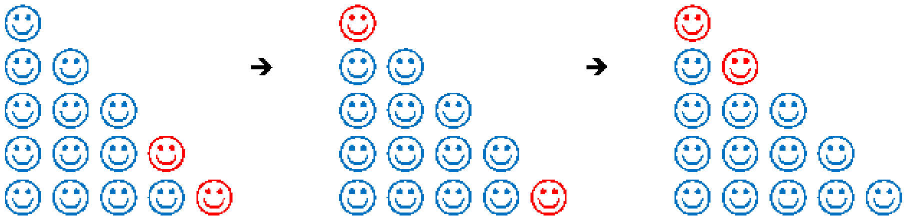
حالت دوم: $\binom{k}{2} \leq k-l < \binom{k+1}{2} - 1$ در این حالت ساختار پلکانی به شکل یک پلکان به طول $k-1$ و تاج به طول نامنفی و کم‌تر از $k-1$ است. پس در این حالت پلکان شامل دسته‌ای به طول ۱ است. پس طول دسته‌ها به شکل $(1, \dots, k-t-1, k-t+1, \dots), n-l+1$ است (طول بزرگترین دستهٔ ساختار k یا $k-1$ است.). حال با حذف یک دایره از هر دسته و ایجاد دسته‌های جدید دسته‌ای به طول k ایجاد می‌شود و دسته‌های موجود به شکل $([0,]\dots, k-t-2, k-t, \dots, k), n-l$ خواهند بود (طول کوچکترین دستهٔ ساختار ۱ یا ۲ خواهد بود.) که این یک ساختار پلکانی با l دایره به همراه یک ستون با $n-l > 0$ دایره است.



پس در هر دو حالت حکم استقرا را نتیجه گرفتیم و این موجب اثبات ادعا می‌شود.

حال می‌دانیم که ادعای ۱ برای هر $l < n$ درست است. پس این حکم برای $l = n-a-1$ نیز درست است. پس در مرحلهٔ $n-a-1$ یک ساختار پلکانی به طول $n-a-1$ و یک ستون به طول $a+1$ داریم. از آنجایی که $\binom{a+2}{2} \geq n > \binom{a+1}{2}$ پس $\binom{a+1}{2} \geq n-a-1 \geq \binom{a}{2}$ که این نشان می‌دهد که ساختار پلکانی، پلکانی به طول $a-1$ و تاج به طول مثبت (شاید a) دارد. پس با اضافه کردن دسته به طول $a+1$ پلکانی به طول a به همراه تاج به طول مثبت (شاید $a+1$) خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که پس از این، طول هیچ دسته‌ای از $a+1$ بیشتر نمی‌شود. برای اثبات کل دایره‌های موجود را آبی کرده و تعدادی دایرهٔ قرمز روی پلکان اضافه می‌کنیم تا یک پلکان به طول $a+1$ ایجاد کنند. با توجه به نکتهٔ ۱، پلکان به طول $a+1$ پس از هر مرحله به خودش

تبدیل می‌شود. پس در قیافهٔ شامل دایره‌های قرمز و آبی، طول دسته‌ها هیچ‌گاه بیشتر از $a+۱$ نمی‌شود. حال اگر در هر مرحله دایره‌های قرمز را در بالای هر دسته قرار دهیم نتیجه می‌شود که دایره‌های قرمز هیچ تأثیری در ساختار دایره‌های آبی ندارند و در نتیجه تعداد دایره‌های آبی در دسته‌هایشان همواره کم‌تر مساوی $a+۱$ است.



حال توجه کنید که

$$\binom{a+۱}{۲} < n \Rightarrow (a+۱)^۲-(a+۱) < ۲n \Rightarrow (a+۱)^۲-(a+۱)+\frac{۱}{۴} < ۲n \Rightarrow ((a+۱)-\frac{۱}{۲})^۲ < ۲n \Rightarrow$$
$$(a+۱)-\frac{۱}{۲} < \sqrt{۲n} \Rightarrow a+۱ < \sqrt{۲n}+۱$$

پس تعداد دایره‌های درون هر دسته همواره کم‌تر از $\sqrt{۲n}+۱$ است.

اکنون می‌خواهیم کمی فراتر از راه‌حل سوال رفته و ساختار دسته‌بندی‌ها را پس از مرحلهٔ $n-a+۱$ نیز به دست بیاوریم. توجه کنید که در این مرحله دسته‌بندی ها یک پلکان به طول a و تاج b و جایگاه ۰ تشکیل داده‌اند. ادعا ۲: در مرحلهٔ $a-n+۱+r$ پلکانی به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

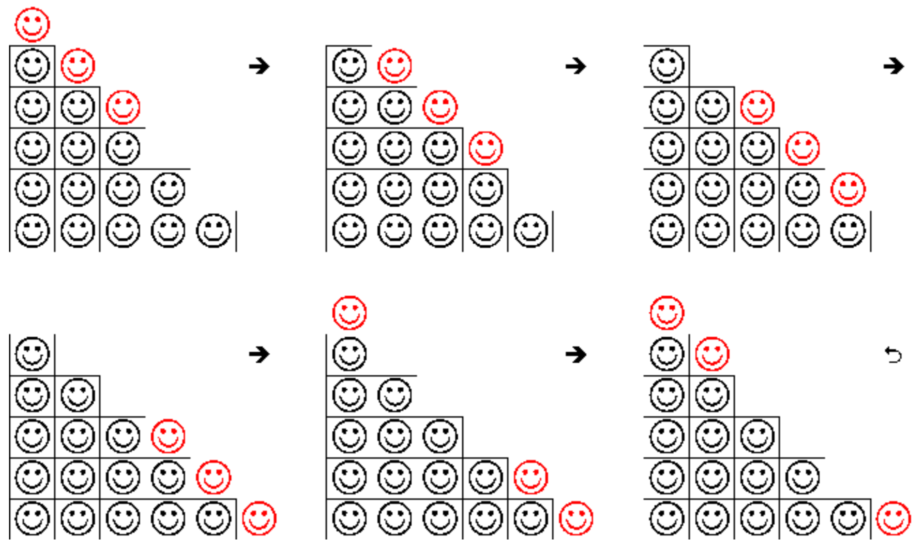
اثبات ادعا: برای اثبات ادعا روی r استقرا می‌زنیم. پایه همان نتیجهٔ ادعای ۱ است. برای تکمیل گام استقرا فرض را برای $r-۱$ در نظر گرفته و دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت نخست: a به پیمانهٔ $a+۱$ عضو مجموعهٔ $\{r-۱, r-۲, ..., r+t-۲\}$ نباشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعهٔ xـ در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای صفر دایره است. پس قیافهٔ این دسته‌بندی دارای a دایرهٔ پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دستهٔ جدید دستهٔ x_a دارای a دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دستهٔ x_i به جای دستهٔ $x_{i-۱}$ قرار گرفته‌است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر $a-j$ به پیمانهٔ $a+۱$ عضو مجموعهٔ $\{r, r+۱, ..., r+t-۱\}$ باشد $x_j=j+۱$ و در غیر این صورت $x_j=j$. پس در مرحلهٔ بعدی پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

حالت دوم: a به پیمانهٔ $a+۱$ عضو مجموعهٔ $\{r-۱, r-۲, ..., r+t-۲\}$ باشد. در این حالت یک پلکان به طول a داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعهٔ xـ در تعریف پلکان به طول a و تاج b و جایگاه r دارای ۱ دایره است. پس قیافهٔ این دسته‌بندی دارای $a+۱$ دایرهٔ پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دستهٔ جدید دستهٔ x_a دارای $a+۱$ دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دستهٔ x_i به جای دستهٔ $x_{i-۱}$ قرار گرفته‌است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر $a-j$ به پیمانهٔ $a+۱$ عضو مجموعهٔ $\{r, r+۱, ..., r+t-۱\}$ باشد $x_j=j+۱$ و در غیر این صورت $x_j=j$. پس در مرحلهٔ بعدی پلکان به طول

a و تاج b و جایگاه r خواهیم داشت.

پس ادعای ۲ نیز ثابت شد. اکنون می‌توانیم ادعا کنیم که پس از مرحلهٔ $a - n - ۱$ دسته‌بندی‌ها به نظم واضحی هر $a + ۱$ مرحله تکرار می‌شوند و چون پیش از مرحلهٔ $n - a - ۱$ دسته‌ای به طول $a + ۲$ داشتیم، پس مرحلهٔ $n - a - ۱$ اولین مرحله‌ایست که این تناوب شروع می‌شود. پس قیافه‌ی دسته‌بندی‌ها پس از مرحلهٔ $n - a - ۱$ مانند شکل زیر خواهد بود:



به نام او

روز اول

۱. همهٔ a و bهای طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که

$$\frac{a}{b} = b_/a.$$

(توضیح: اگر $a = 92$ و $b = 13$، آن‌گاه $b_/a$ برابر سیزده و نود و دو صدم است.)

۲. فرض کنید اعداد طبیعی w_1، w_2،... و w_n، وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنهٔ کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنهٔ باقی‌مانده نیز کامل است.

۳. مثلث دل‌خواه ABC داده شده است. وسط کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایرهٔ محیطی در نقطهٔ N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

موفق باشید

به نام او

روز دوم

۴. فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطهٔ K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایرهٔ محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایرهٔ C را در نقطهٔ T قطع می‌کند. قرینهٔ P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

۵. در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شمارهٔ ستون و شمارهٔ سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول 3×3 را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همهٔ اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول 9×5 زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب با علامت ↘ و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های 3×3 با علامت ❄ مشخص شده است. توجه کنید که خانهٔ گوشهٔ راست - بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به‌تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱						↘			
۲		❄	❄	❄			↘		
۳		❄	❄	❄				↘	
۴		❄	❄	❄					↘
۵									

(راهنمایی: ابتدا به این سؤال فکر کنید که اعداد یک جدول 3×3 در چه صورت قابل صفر کردن است.)

۶. دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = [\frac{2a_{n+1}}{a_n}] + [\frac{2a_n}{a_{n+1}}]$$

که در آن منظور از $[x]$، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = 4$ و $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

موفق باشید

به نام او

پاسخ‌های آزمون مرحلهٔ دوم ۱۳۹۲

---

۱. همهٔ a و b های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که $\frac{a}{b} = b/a$.

راه حل اول. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد، یعنی ($10^{k-1} \leq a < 10^k$). در این صورت $b/a = b + \frac{a}{10^k}$، بنابراین با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10^k} \Rightarrow 10^k a = 10^k b^2 + ab$$

با توجه به عبارت بالا و توجه به روابط بخش‌پذیری، $a|10^k b^2$، $b|10^k a$ و $ab|10^k$ به دست می‌آیند. از آن‌جا که a و b نسبت به هم اول هستند، با به کاربردن لم اقلیدس و استفاده از دو رابطهٔ اول قبلی به دست می‌آید $b|10^k$ و $a|10^k$. مجدداً چون ب.م.م a و b برابر یک است، خواهیم داشت $ab|10^k$. بنابراین $ab = 10^k$. حال بار دیگر با توجه به این که a و b نسبت به هم اول هستند، عامل مشترکی ندارند و لذا چهار حالت زیر ممکن است:

حالت۱. $a = 10^k$ و $b = 1$.

حالت۲. $a = 2^k$ و $b = 5^k$.

حالت۳. $a = 5^k$ و $b = 2^k$.

حالت۴. $a = 1$ و $b = 10^k$.

حالت ۱ با k رقمی بودن a تناقض دارد. ضمناً از فرض مسئله ($\frac{a}{b} = b/a$) به دست می‌آید $\frac{a}{b} > b$ و لذا $a > b^2$ و با توجه به این نکته حالت های ۲ و ۴ هم امکان ندارند ($10^{2k} > 1$, $5^{2k} > 2^k$). پس تنها حالت مورد قبول ۳ است. با توجه به k رقمی بودن a، $a = 5^k \geq 10^{k-1}$ و در نتیجه $5 \geq 2^{k-1}$. یعنی k نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد($2^{k-1} \leq 5 < 8 = 2^3 \Rightarrow k \leq 3$).

- $k = 1$. در این صورت $a = 5$ و $b = 2$ که به وضوح $\frac{5}{2} = 2/5$ و این جوابی از مسئله است.
- $k = 2$. در این صورت $a = 25$ و $b = 4$ که امکان ندارد زیرا $\frac{25}{4} > 6 > 4/25$.
- $k = 3$. در این صورت $a = 125$ و $b = 8$ که این هم ممکن نیست چون $\frac{125}{8} > 10 > 8/125$.

بنابراین تنها جواب مسئله $a = 5$ و $b = 2$ است.

راه حل دوم. فرض کنید k تعداد ارقام a باشد. پس خواهیم داشت $\frac{a}{b} = b/a = b + \frac{a}{10^k}$ و این معادل با این است که $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k}$. چون $(a, b) = 1$، پس $(a - b^2, b) = 1$ یعنی $\frac{a-b^2}{b}$ کسری تحویل‌ناپذیر و مساوی با(ساده شدهٔ) $\frac{a}{10^k}$ است. بنابراین $s \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $s(a - b^2) = a$ و $sb = 10^k$. پس خواهیم داشت $a - b^2|a$ و چون $(a - b^2, a) = 1$، $a - b^2|1$ و لذا $a - b^2 = \pm 1$. اما از آن‌جا که $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k} > 0$ تنها حالت ۱+ قابل قبول است. یعنی $a = b^2 + 1$ و $\frac{a}{10^k} = \frac{1}{b}$. حال توجه کنید که چون k تعداد ارقام a است، پس $a \geq 10^{k-1}$ و $\frac{1}{10} \leq \frac{a}{10^k} = \frac{1}{b}$، در نتیجه $b \leq 10$. از طرفی $ab = b(b^2 + 1) = 10^k$ توانی از ۱۰ است، پس عوامل اول b، ۲ یا ۵ است یعنی $b \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$. در این صورت $b^2 + 1 \in \{2, 5, 17, 26, 65, 101\}$ و چون $b^2 + 1$ هم عامل

اولی جز ۲ و ۵ ندارد تنها حالت $b = ۱$ و $b = ۲$ می‌ماند. اما اگر $b = ۱$، $b(b^۲ + ۱) = ۲$ توانی از ۱۰ نیست. پس تنها حالت $a = ۵$ و $b = ۲$ باقی می‌ماند که این هم به وضوح جوابی از مسئله است. $(b/a = ۲/۵ = \frac{۵}{۲} = \frac{a}{b})$.

۲. فرض کنید اعداد طبیعی $w_۱, w_۲, \ldots$ و w_n وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنهٔ کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنهٔ باقی‌مانده نیز کامل است.

راه حل. نشان می‌دهیم مجموعهٔ n عدد $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_n$ کامل است اگر و تنها اگر $w_۱ = ۱$ و برای هر $۲ \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i \leq w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{i-۱} + ۱$. توجه کنید اگر $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_n$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_{n-۱}$ نیز دارای آن شرط هستند پس برای اثبات حکم کافیست ادعای خود را ثابت کنیم.

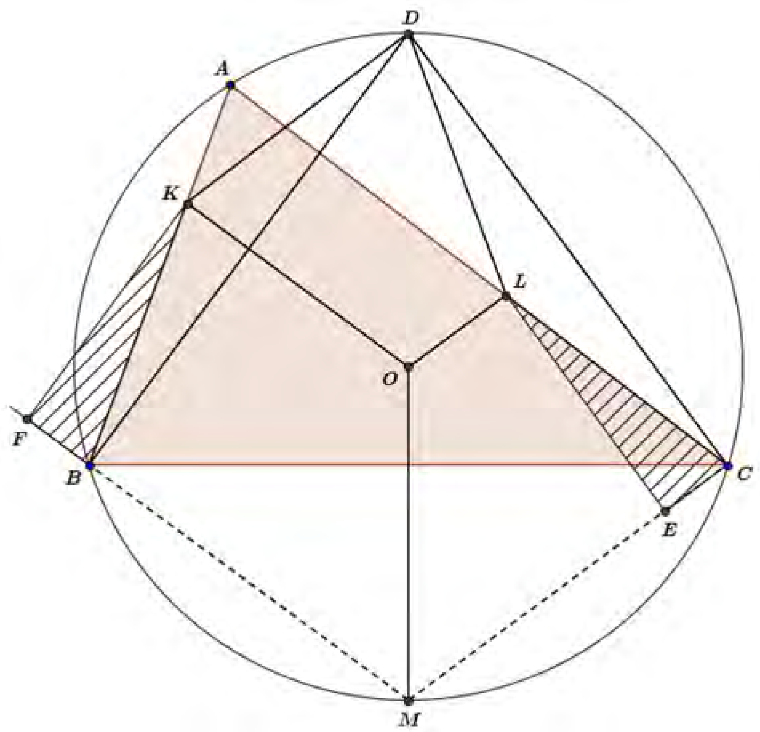
روشن است که اگر $w_۱ > ۱$ یا برای یک $۲ \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i > w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{i-۱} + ۱$ آنگاه به ترتیب عدد ۱ یا عدد $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{i-۱} + ۱$ مجموع هیچ تعدادی از وزنه‌ها نمی‌شود. پس اگر تعدادی وزنه کامل باشند شرط بالا دربارهٔ آن‌ها صادق است. حال اگر برای تعدادی وزنه شرط یاد شده برقرار باشد به استقرا روی n نشان می‌دهیم که کامل هستند. پایهٔ استقرا در حالتی که تنها یک وزنه داریم واضح است. حال حکم را برای $n = k - ۱$ فرض می‌کنیم. اگر $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_k$ دارای شرط یاد شده باشند اعداد $w_۱ \leq w_۲ \leq \cdots \leq w_{k-۱}$ نیز دارای آن شرط هستند پس طبق فرض استقرا مجموعه‌ای کاملند پس هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱}$ باشد به صورت جمع تعدادی از $w_۱, w_۲, \ldots, w_{k-۱}$ است. حال برای آن W های طبیعی که $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱} < W < w_۱ + w_۲ + \cdots + w_k$ چون $w_k \leq w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱} + ۱$ داریم:

$$-۱ \leq w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱} - w_k < W - w_k < w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱}$$

در حالت $W - w_k = ۰$ مطلوب حاصل است. در غیر این صورت $۱ \leq W - w_k < w_۱ + w_۲ + \cdots + w_{k-۱}$ پس طبق فرض استقرا $W - w_k$ به صورت جمع تعدادی از $w_۱, w_۲, \ldots, w_{k-۱}$ است. حال اگر w_k را به آن مجموعه اضافه کنیم مجموع اعضای مجموعهٔ جدید برابر W خواهد بود و حکم برای $n = k$ نیز نتیجه می‌شود.

۳. مثلث دل‌خواه $\overset{\triangle}{ABC}$ داده شده است. وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ از دایرهٔ محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، دوخط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایرهٔ محیطی در نقطهٔ N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

راه حل اول.



ابتدا ثابت می‌کنیم $KB = LC$ است. از نقاط K و L عمودهای KF و LE را بر خطوط MB و MC رسم می‌کنیم. این دو عمود، برابر فاصله O تا دو وتر برابر MB و MC از دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند و در نتیجه با هم برابرند.

از طرف دیگر داریم: $\angle KBF = \angle LCE$ (چهارضلعی $ABMC$ محاطی است.) در نتیجه $\overset{\triangle}{KBF} \cong \overset{\triangle}{LCE}$ و $KB = LC$ است.

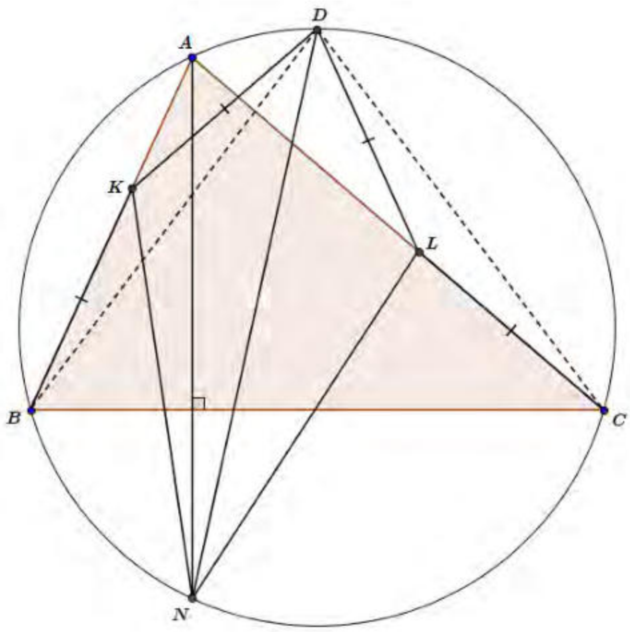
اگر D نقطهٔ وسط کمان $\overset{\frown}{BAC}$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{matrix} DB = DC \\ \angle DBA = \angle DCA \\ KB = LC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{DBK} \cong \overset{\triangle}{DCL} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \angle KDL = \angle BDC = \angle BAC \\ KD = LD \end{matrix}\right.$$

از طرفی $\angle KOL = \angle BMC$ پس نتیجه می‌شود که $AKOLD$ محاطی است و داریم:

$$\left.\begin{matrix} \angle AKD = \angle ALD = \angle AOD = \hat{B} - \hat{C} \\ \angle KBD = \angle LCD = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle KDB = \angle LDC = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$$

$$\Rightarrow KB = KD = LD = LC \quad (*)$$

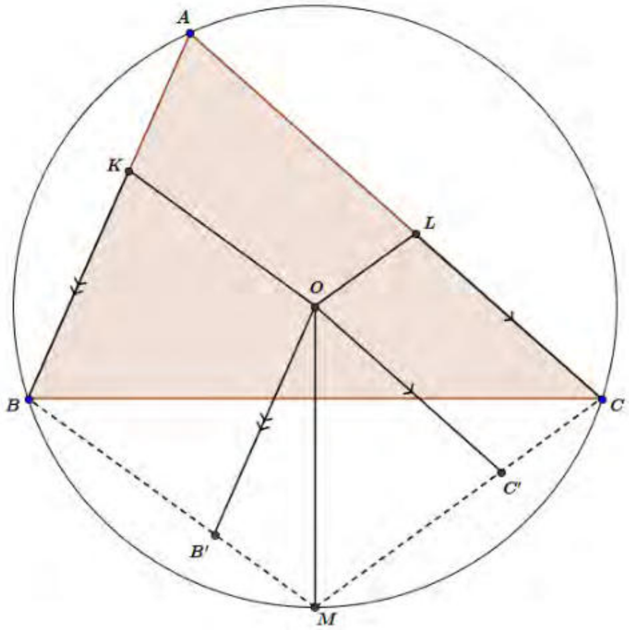


در انتها با اثبات هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\triangle}{NDK}$ و $\overset{\triangle}{NDL}$ حکم مساله اثبات خواهد شد.

$$\left.\begin{matrix} \angle NDK = \angle NDB + \angle BDK = (۹۰^\circ - \hat{B}) + (\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}) = \frac{\hat{A}}{۲} \\ \\ \angle NDL = \angle NDC - \angle CDL = (۹۰^\circ - \hat{C}) - (\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}) = \frac{\hat{A}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle NDK = \angle NDL$$

اکنون با کمک رابطهٔ $(*)$ هم‌نهشتی دو مثلث $\overset{\triangle}{NDK}$ و $\overset{\triangle}{NDL}$ اثبات می‌شود و داریم: $NK = NL$.

راه حل دوم.

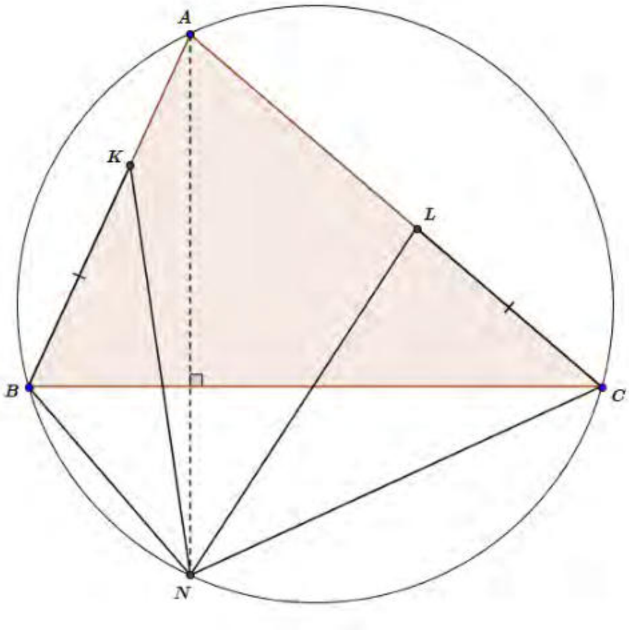


از نقطهٔ O دو خط به موازات اضلاع AB و AC مثلث رسم می‌کنیم تا MB و MC را در B' و C' قطع کنند.
طبق قضیهٔ سینوس‌ها در دو مثلث $\overset{\triangle}{OMB'}$ و $\overset{\triangle}{OMC'}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{OB'}{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})} = \frac{R}{\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})} \\ \sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲}) = \sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۲}) \\ \frac{OC'}{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})} = \frac{R}{\sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۲})} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad OB' = OC' \quad \Rightarrow \quad KB = LC = x \quad (۱)$$

طبق رابطهٔ (۱) بدست می‌آید که:

$$\frac{x}{R} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{\sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{۲})} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{\cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})} \qquad (۲)$$



اکنون طول دو پاره‌خط NK و NL را با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث $\overset{\triangle}{BNK}$ و $\overset{\triangle}{CNL}$ بدست آورده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases} NK^۲ = NB^۲ + BK^۲ - ۲NB \cdot BK \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{C} + \hat{B}) \\ \\ NL^۲ = NC^۲ + CL^۲ - ۲NC \cdot CL \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{B} + \hat{C}) \end{cases}$$

حال چون $BK = CL = x$ داریم:

$$NK = NL$$

$$\Leftrightarrow NB^۲ - ۲NB \cdot x \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{C} + \hat{B}) = NC^۲ - ۲NC \cdot x \cdot \cos(۹۰^\circ - \hat{B} + \hat{C})$$

$$\Leftrightarrow NB^۲ - ۲NB \cdot x \cdot \sin(\hat{C} - \hat{B}) = NC^۲ - ۲NC \cdot x \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) \qquad (۳)$$

از قضیه سینوس‌ها داریم:

$$NB = ۲R \cdot \sin(۹۰^\circ - \hat{B}) = ۲R \cdot \cos\hat{B} \quad , \quad NC = ۲R \cdot \sin(۹۰^\circ - \hat{C}) = ۲R \cdot \cos\hat{C}$$

حال رابطهٔ (۳) را می‌توان به صورت ساده‌تری نوشت:

$$۴R^۲ \cdot \cos^۲\hat{B} + ۴R \cdot x \cdot \cos\hat{B} \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) = ۴R^۲ \cdot \cos^۲\hat{C} - ۴R \cdot x \cdot \cos\hat{C} \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C})$$

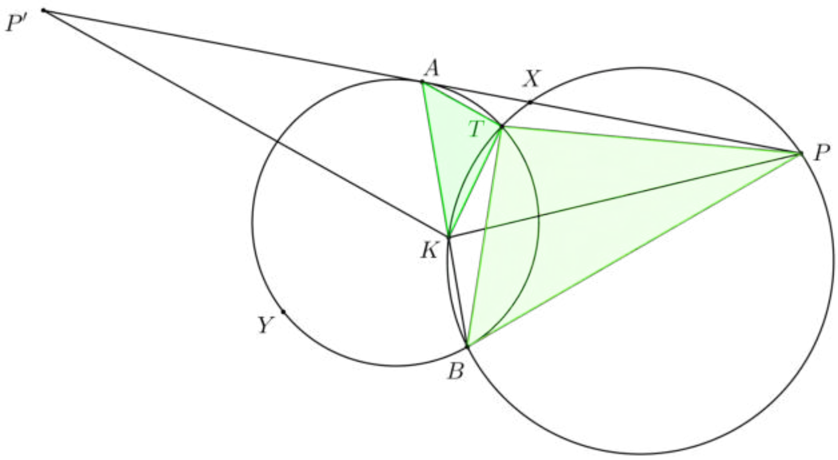
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) \cdot \left[\cos\hat{B} + \cos\hat{C}\right] = R \cdot \left[\cos\hat{C} - \cos\hat{B}\right] \cdot \left[\cos\hat{B} + \cos\hat{C}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{R} = \frac{\cos\hat{C} - \cos\hat{B}}{\sin(\hat{B} - \hat{C})} = \frac{۲\ \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})\ \sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{۲\ \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})\ \cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲})}{\cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})}$$

این تساوی، همان رابطهٔ (۲) می‌باشد و از آنجا که این مراحل بازگشت‌پذیرند خواهیم داشت: $NK = NL$.

۴. فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطهٔ K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\triangle}{PBK}$ برای بار دوم دایرهٔ C را در نقطهٔ T قطع می‌کند. قرینهٔ P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

راه حل اول. در این راه حل همهٔ کمان‌ها متعلق به دایرهٔ C هستند.

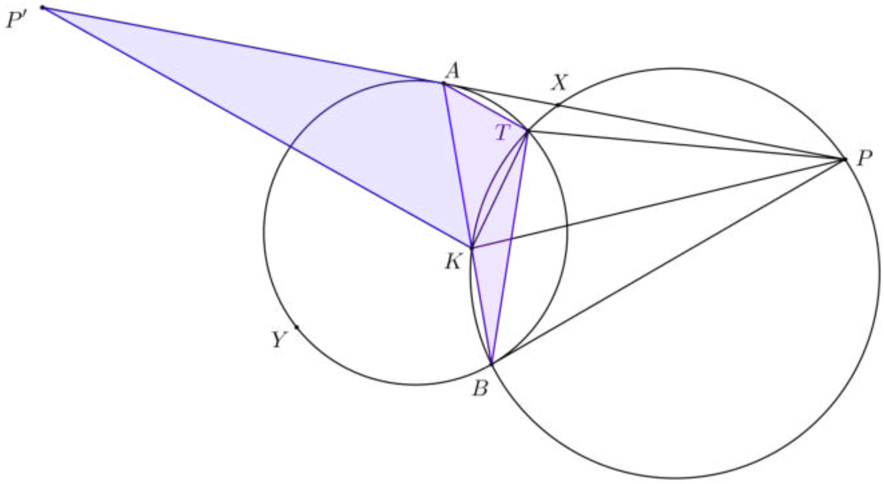


چهارضلعی $KTPB$ محاطی است بنابراین $\angle AKT = \angle BPT$:

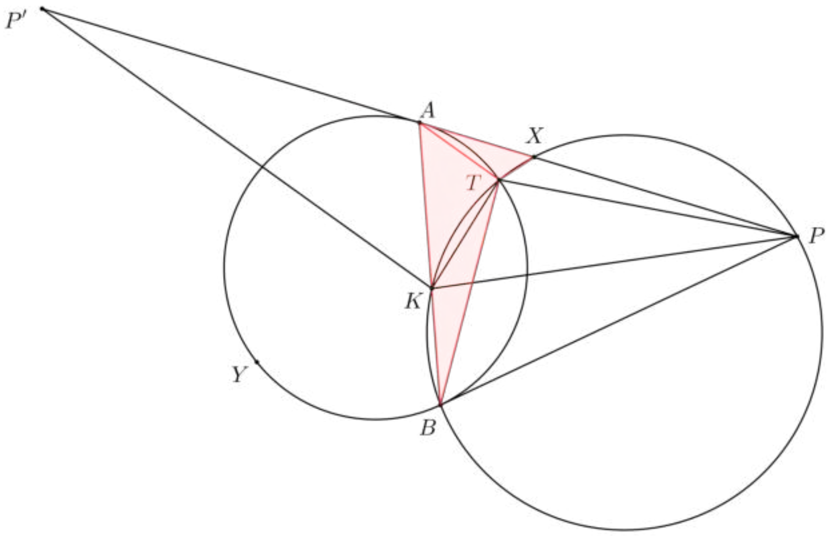
$$\left.\begin{array}{c}\angle TAK = \frac{\widehat{TB}}{۲} = \angle TBP \\ \angle AKT = \angle BPT\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{TAK} \sim \overset{\triangle}{TBP} \Rightarrow \frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA} \quad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{c}\angle P'AK = \frac{\widehat{AYB}}{۲} = \angle BTA \\ (۱)\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{P'AK} \sim \overset{\triangle}{BTA} \Rightarrow \angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT.$$



راه حل دوم. در این راه حل تنها رابطهٔ (۱) را از راه دیگری ثابت می‌کنیم. قوت نقطهٔ A را نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\triangle}{PBK}$ محاسبه می‌کنیم:

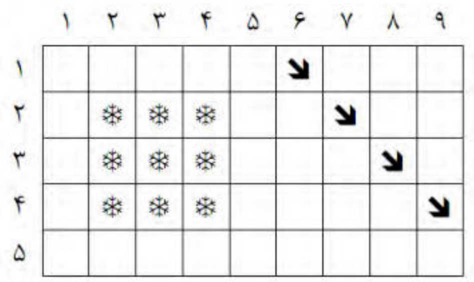


$$AX \cdot AP = AK \cdot AB \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{AP}{AK} = \frac{AP'}{AK} \quad (۱)$$

از طرفی چهارضلعی $TKBP$ محاطی است:

$$\left.\begin{array}{c} \angle TBP = \angle TXA \\ \angle TAX = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} = \angle TBA \\ \angle TAB = \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲} = \angle TBP \end{array}\right\} \Rightarrow T\overset{\triangle}{A}B \sim T\overset{\triangle}{X}A \Rightarrow \frac{AB}{XA} = \frac{TB}{TA} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{AP'}{AK} = \frac{TB}{TA} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA}$$

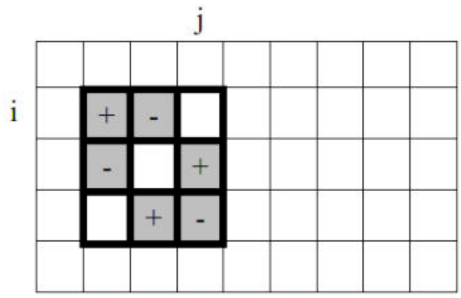
۵. در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شمارهٔ ستون و شمارهٔ سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول ۳ × ۳ را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همهٔ اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول ۹ × ۵ زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های ۳ × ۳ مشخص شده‌اند. توجه کنید که خانهٔ گوشهٔ راست-بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.



راه حل. ابتدا حکم مسأله را در حالتی که $m, n \geq ۳$ اثبات می‌کنیم. در حالتی که یکی از m و n کمتر از ۳ باشد، زیر جدول ۳ × ۳ وجود ندارد. پس می‌توان هر زیر جدول ۳ × ۳ آن را صفر کرد. در این حالت باید ثابت کنیم جدول را می‌توان با اعمال معرفی شده صفر کرد. این قسمت را در انتها ثابت می‌کنیم.

عدد نوشته‌شده در خانه‌ی سطر i و ستون j را با $A(i, j)$ نشان می‌دهیم. یک زیرجدول ۳ × ۳ در نظر بگیرید که خانهٔ گوشهٔ بالا-راست آن، (i, j) باشد. این زیرجدول را با $S(i, j)$ نشان می‌دهیم. منظور از شاخص این زیر جدول، عدد حاصل از جمع زدن اعداد خانه‌های مشخص شده در شکل زیر با علامت‌های مشخص شده است، یعنی عدد

$$A(i+۱, j) - A(i+۲, j) + A(i+۲, j-۱) - A(i+۱, j-۲) + A(i, j-۲) - A(i, j-۱)$$



خانه‌های مشخص شده در شکل بالا دارای این خاصیت هستند که هر ردیف افقی یا عمودی یا اریب، خانه‌های مشخص شده در شکل بالا را یا قطع نمی‌کند و یا در دو خانه با علامت مخالف قطع می‌کند. پس با انجام هر یک از اعمال مجاز در صورت مسأله، شاخص یک زیرجدول تغییر نمی‌کند. حال از آن‌جا که بنابر فرض، می‌توان اعداد هر

زیرجدول ۳×۳ را صفر کرد، و چون شاخص در طول این فرآیند تغییر نمی‌کند پس شاخص هر زیرجدول ۳×۳ از ابتدا صفر است و در طول فرآیند نیز صفر می‌ماند.

اکنون مقدمات لازم برای اثبات حکم را داریم. حکم را با استقرا روی $m + n$ اثبات می‌کنیم. پایهٔ استقرا در حالتی است که $m + n = ۶$، یعنی $m = n = ۳$. در این حالت حکم بدیهی است چون کل جدول یک زیرجدول ۳×۳ است. حال فرض کنید $m + n > ۶$. پس دست‌کم یکی از m و n از ۳ بیش‌تر است. فرض می کنیم $m > ۳$ (حالت $n > ۳$ مشابه است). حال زیرجدولی از جدول اصلی را در نظر بگیرید که از حذف ستون آخر به دست آمده است. فرض استقرا برای این زیرجدول $(m - ۱) \times n$ برقرار است. پس بنابر استقرا، می‌توان با استفاده از اعمال مجاز، همهٔ اعداد این زیرجدول را صفر کرد. پس به جدولی می‌رسیم که تنها ستون آخر آن ممکن است ناصفر باشد. ادعا می‌کنیم که در این حالت اعداد ستون آخر به جز عدد خانهٔ بالا-راست، باید برابر باشند. زیرجدول $S(۱, m)$ را در نظر بگیرید. شاخصِ این جدول برابر است با

$$A(۲, m) - A(۳, m) + A(۳, m-۱) - A(۲, m-۲) + A(۱, m-۲) - A(۱, m-۱) = A(۲, m) - A(۳, m)$$

از طرفی بنابر آن‌چه گفته شد، این شاخص باید صفر باشد. پس $A(۳, m) = A(۲, m)$. با در نظر گرفتن زیرجدول‌های $S(۳, m)$، $S(۴, m)$، ... و $S(n - ۲, m)$ و تکرار استدلال فوق، مشابهاً نتیجه می‌شود $A(۴, m) = A(۳, m)$، $A(۵, m) = A(۴, m)$، ... و $A(n, m) = A(n - ۱, m)$. پس در ستون آخر، مقادیر همهٔ خانه‌ها به جز خانه $(۱, m)$ با یک‌دیگر برابرند. پس با استفاده از تعدادی عمل مجاز روی ستون آخر می‌توان همهٔ آن‌ها را صفر کرد و سپس با استفاده از ردیف اریبی که تنها از خانهٔ$(۱, m)$ تشکیل شده، می‌توان خانه‌ی $(۱, m)$ را نیز صفر کرد و بنابراین کل جدول صفر می‌شود.

تنها می‌ماند حالتی را ثابت کنیم که حداقل یکی از m و n از ۳ کم‌تر باشند. مثلاً فرض کنید $m < ۳$ (حالت $n < ۳$ مشابه است). اگر $m = ۱$، به وضوح می‌توان با استفاده از سطرها، همهٔ خانه‌ها را صفر کرد. اگر $m = ۲$، روش زیر را به کار می‌بریم.

ابتدا با استفاده از سطر nام، $A(n, ۱)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه $(n, ۲)$، $A(n, ۲)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از سطر $(n - ۱)$ام، $A(n - ۱, ۱)$ را صفر می‌کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه $(n - ۱, ۲)$، $A(n - ۱, ۲)$ را صفر می‌کنیم و همین فرآیند را ادامه می‌دهیم تا همهٔ جدول صفر شود.

۶. دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+۲}=\left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right]+\left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right]$$

که در آن منظور از $[x]$، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m=۴$ و $a_{m+۱}\in\{۳,۴\}$.

راه حل.

لم۱. به ازای هر $n\geq ۳$ داریم: $a_n\geq ۳$

اثبات. فرض کنید $a_n<۳$ اگر $a_{n-۱}\geq a_{n-۲}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}\geq ۲\Rightarrow\left[\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}\right]\geq ۲\Rightarrow\left[\frac{۲a_{n-۲}}{a_{n-۱}}\right]=۰\Rightarrow a_{n-۱}>۲a_{n-۲}\Rightarrow\frac{۲a_{n-۱}}{a_{n-۲}}>۴$$

که با فرض $a_n<۳$ در تناقض است. در حالتی که $a_{n-۱}\geq a_{n-۲}$ نیز استدلال کاملاً مشابه است چون رابطهٔ بازگشتی نسبت به دو جمله قبل متقارن است.

لم۲. به ازای هر $n\geq ۳$ داریم: $a_{n+۲}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$ یا $a_{n+۱}=a_n$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a_{n+۱}\neq a_n$. همچنین به علت تقارن رابطهٔ بازگشتی بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم $a_n=\max\{a_{n+۱},a_n\}$ پس:

$$\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}<۲$$

ازطرفی

$$a_{n+۱},a_n\geq ۳\Rightarrow\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\leq\frac{۲a_n}{۳}\Rightarrow a_{n+۲}=\left[\frac{۲a_{n+۱}}{a_n}\right]+\left[\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\right]\leq ۱+\frac{۲a_n}{۳}\leq\frac{a_n}{۳}+\frac{۲a_n}{۳}=a_n$$

و با توجه به فرض $a_n\neq a_{n+۱}$ هر دوی نابرابری‌های $\frac{۲a_n}{a_{n+۱}}\leq\frac{۲a_n}{۳}$ و $۱\leq\frac{a_n}{۳}$ نمی‌توانند تساوی باشند و حکم نتیجه می‌شود.

لم۳. k وجود دارد که $a_k=a_{k+۱}$

اثبات. اگر چنین نباشد طبق لم ۲ برای هر $n\geq ۳$:

$$a_{n+۲}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$$

و

$$a_{n+۳}<\max\{a_{n+۲},a_{n+۱}\}$$

در حالتی که $a_{n+۲}<a_{n+۳}$ نتیجه می‌شود $a_{n+۳}<a_{n+۱}$ یعنی

$$\max\{a_{n+۳},a_{n+۲}\}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$$

و در حالتی که $a_{n+۲}>a_{n+۳}$ نیز نتیجه می‌شود

$$\max\{a_{n+۳},a_{n+۲}\}<\max\{a_{n+۱},a_n\}$$

یعنی ماکزیمم جفت جمله‌های متوالی همواره اکیداً نزولی است که غیر ممکن است. توجه کنید که این استدلال نتیجه می‌دهد که دو جمله برابر و متوالی بی‌نهایت بار در دنباله ظاهر می‌شود.

حال توجه کنید که همواره پس از دو جملهٔ برابر در دنباله عدد ۴ ظاهر می‌شود و اگر آن دو عدد برابر ۳ یا ۴ باشند مطلوب حاصل می‌شود چون اگر ۳ و ۴ پشت سر هم بیایند جملهٔ بعد از ۴ هم ۳ می‌شود. اما اگر آن دو عدد برابر بزرگتر از ۴ باشند مثلاً $a_k = a_{k+1} > ۴$ اگر اولین باری که دو عدد مساوی دیگر در دنباله ظاهر می‌شود $a_{k+m} = a_{k+m+1}$ باشد که m فرد است، با توجه به اثبات لم ۳ داریم:

$$a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \cdots > \max\{a_{k+m}, a_{k+m+1}\} = a_{k+m}$$

و در حالتی که m زوج است داریم:

$$a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \cdots > \max\{a_{k+m-1}, a_{k+m}\} \geq a_{k+m}$$

یعنی تا وقتی اعداد متوالی برابر بیش از ۴ باشند همواره یک جفت برابر متوالی کمتر از جفت برابر متوالی قبلی است ولی این روند نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و پس از مدتی به دو عدد ۳ یا ۴ متوالی می‌رسیم که مطلوب ما را به دست می‌دهد.

به نام او

مرحلهٔ دوم سی‌امین المپیاد ریاضی کشور

دوشنبه، ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) دایرهٔ C_1 و نقطهٔ O روی آن مفروض است. دایرهٔ C_2 به مرکز O، C_1 را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. C_3 دایره‌ای است که در نقطهٔ R بر C_2 مماس خارج و در نقطهٔ S بر C_1 مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطهٔ Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با C_1 را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

۲) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ۳ و... n را دور یک دایره قرار داد به شکلی که هر عدد مقسوم‌علیهی از مجموعِ دو عددِ مجاورش باشد؟

۳) ثابت کنید اگر t عددی طبیعی باشد عدد طبیعی $n > 1$ وجود دارد که نسبت به t اول است و هیچ‌کدام از اعدادِ

$$n+t ،n^2+t ،n^3+t \text{ و...}$$

توان کامل نیستند. (دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آن دو، یک باشد و به عدد طبیعی a توان کامل گفته می‌شود اگر اعداد طبیعی b و m موجود باشند که $m \geq 2$ و $a = b^m$.)

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

آدرس وب‌گاه معاونت دانش‌پژوهان جوان: www.ysc.ac.ir

به نام او

مرحلهٔ دوم سی‌امین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ — **روز دوم** — زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) الف) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n + ۱۳۹۱$ باشد؟

ب) آیا زیرمجموعه‌های دو عضوی $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعیِ n، مجموعِ اعضای A_n برابر $n^۲ + ۱۳۹۱$ باشد؟

۵) چندجمله‌ایِ درجهٔ دوی $x^۲ + ax + b$، با ضرایب حقیقی، را در نظر بگیرید. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این‌که بتوان آن را در اعداد حقیقی تجزیه کرد این است که دلتای آن، یعنی $a^۲ - ۴b$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. توجه کنید که دلتا نیز یک چندجمله‌ای با متغیره‌های a و b است. نشان دهید چیزی مشابه دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ چهار وجود ندارد: ثابت کنید چندجمله‌ایِ چهار متغیرهٔ $P(a,b,c,d)$ با خاصیت زیر وجود ندارد:

> چندجمله‌ای درجهٔ چهار $x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ قابل تجزیه به حاصل‌ضرب چهار چندجمله‌ایِ درجهٔ یک باشد اگر و تنها اگر $P(a,b,c,d) \geq ۰$.

۶) دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس است. قرینهٔ نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

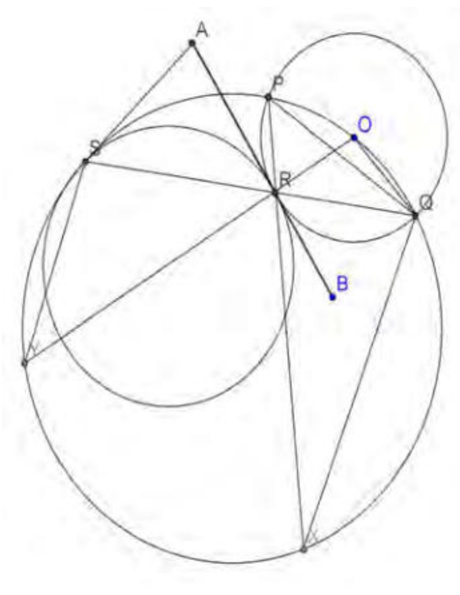
به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

---

۱. راه‌حل اول. برای اثبات موازی بودن QX و SY باید ثابت کنیم کمان های XY و SPQ روی دایره C_1 برابرند. برای این کار مماس بر دایره C_1 در نقطه S را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با مماس مشترک دایره های C_2 و C_3 در نقطه R را A می‌نامیم. حال با توجه به شکل روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
&A\hat{S}Q = \widehat{SPQ} = \widehat{SR} \\
&A\hat{S}Q = A\hat{R}S = B\hat{R}Q = \widehat{RQ} \\
&\Rightarrow \widehat{SPQ} = \widehat{SR} = \widehat{RQ} \quad (1)
\end{aligned}$$



هم‌چنین روابط زیر نیز برقرار است:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\widehat{QX} = Q\hat{P}X \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\widehat{RQ} = \frac{1}{2}Y\hat{O}Q = \frac{1}{4}\widehat{YXQ} = \frac{1}{4}(\widehat{QX} + \widehat{XY}) \\
&\Rightarrow \frac{1}{4}\widehat{QX} = \frac{1}{4}\widehat{XY} \ \Rightarrow \widehat{QX} = \widehat{XY} \quad (3) \\
&\overset{(2),(3)}{\Rightarrow} \widehat{QX} = \widehat{XY} = \widehat{RQ} \quad (4)
\end{aligned}$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۴) داریم:

$$\widehat{SPQ} = \widehat{RQ} = \widehat{XY}$$

و حکم ثابت می‌شود.

نکته:

- قسمت (۳) که برابری $\overset{\frown}{XY} = \overset{\frown}{QX}$ را ثابت می‌کند به صورت های مختلفی قابل بیان است . به طور مثال می‌توان استدلال زیر را به کار برد:

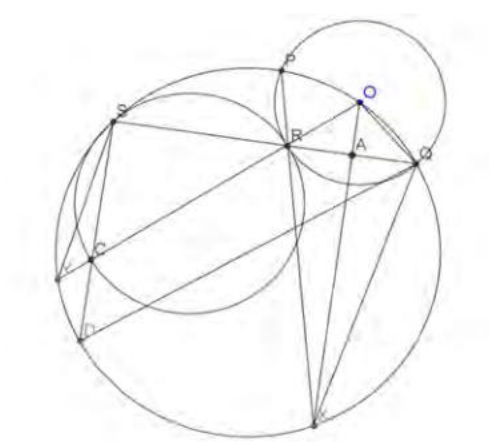
$$OP = OQ \Rightarrow \overset{\frown}{OP} = \overset{\frown}{OQ} \quad (I)$$

$$OP = OR \Rightarrow O\hat{P}R = O\hat{R}P \Rightarrow \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{OP} + \overset{\frown}{XY}) = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{OQ} + \overset{\frown}{XQ}) \overset{(I)}{\Rightarrow} \overset{\frown}{XQ} = \overset{\frown}{XY}$$

- اثبات رابطه (۱) به وسیله بیان تجانس دایره‌های $C_۱$ و $C_۳$ و همین‌طور دایره‌های $C_۲$ و $C_۳$ نیز قابل بیان است.

راه‌حل دوم. داریم

$$OP = OQ \Rightarrow \overset{\frown}{OP} = \overset{\frown}{OQ}$$
$$OP = OR \Rightarrow O\hat{P}R = O\hat{R}P$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{OP} + \overset{\frown}{XY}) = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{OQ} + \overset{\frown}{XQ}) \Rightarrow \overset{\frown}{XQ} = \overset{\frown}{XY}$$
$$\Rightarrow R\hat{O}X = Q\hat{O}X \overset{OQ=OR}{\Rightarrow} O\hat{A}R = ۹۰ \quad (۱)$$



هم‌چنین چون $C_۲$ و $C_۳$ در نقطه R مماس هستند، OR از مرکز دایره $C_۳$ نیز عبور می‌کند. پس مرکز دایره $C_۳$ روی خط RC واقع است (C محل برخورد RY و دایره $C_۳$ است) در نتیجه $(۲) \quad C\hat{S}R = ۹۰$.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $(۳) \quad SD \parallel OX$.

هم‌چنین با توجه به این‌که S مرکز تجانس $C_۱$ و $C_۳$ است، پس DQ و YQ موازی هستند (Dمحل برخورد امتداد SC با دایره $C_۱$ است) .در نتیجه $\overset{\frown}{YD} = \overset{\frown}{OQ}$. پس $(۴) \quad Y\hat{S}D = Q\hat{X}O$

حال با توجه به (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که QX و SY نیز موازی‌اند و حکم ثابت می‌شود.

۲. آرایشی از اعداد ۱ تا n با خاصیت مطلوب را یک آرایش مجاز می‌نامیم. آرایش‌هایی را که با یک دوران به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض می‌کنیم.

برای $n = ۳$ فقط دو آرایش مجاز و برای $n = ۴$ نیز فقط دو آرایش مجاز (اعداد به ترتیب ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) وجود دارد. حال با استقرا ثابت می‌کنیم که برای اعداد زوج بزرگ‌تر از ۳ دو آرایش و برای اعداد فرد بزرگ‌تر از ۳، چهار آرایش مجاز وجود دارد.

لم. در یک آرایش مجازِ ۱ تا n، مجموعِ دو عددِ مجاورِ n برابر با n است و اگر n را حذف کنیم به آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$ می‌رسیم. برعکس، اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید.

اثبات. اگر دو عدد مجاور n، a و b باشند، داریم

$$n \mid a + b \quad , \quad a + b \leq ۲n - ۳$$

پس:

$$a + b = n$$

حال اگر دو عدد مجاور a و b (به غیر از n) به ترتیب x و y باشند (یعنی حالت $x\ a\ n\ b\ y$):

$$a \mid x + n \Leftrightarrow a \mid x + a + b \Leftrightarrow a \mid x + b$$

$$b \mid y + n \Leftrightarrow b \mid y + a + b \Leftrightarrow b \mid y + a$$

پس با حذف n به آرایش مطلوبی از اعداد ۱،۲، ...،$n - ۱$ می‌رسیم و برعکس اگر در آرایشی مجاز برای ۱ تا $n - ۱$، عدد n را بین دو عدد که مجموعشان n است قرار دهیم، آرایشی مجاز برای ۱ تا n به دست می‌آید.

حال فرض می‌کنیم حکم استقرا برای عدد زوج n درست باشد، سپس حکم را برای $n + ۱$ و $n + ۲$ ثابت می‌کنیم.

بنابر فرض استقرا، تنها دو آرایش مجاز برای ۱ تا n وجود دارد که عبارت‌اند از چینش اعداد ۱ تا n به طور ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد. حال باید $n+1$ را بین دو عدد مجاور از این دو آرایش که مجموعشان $n+1$ است، قرار دهیم. به راحتی معلوم می‌شود که این دو عدد فقط می‌توانند $\{1, n\}$ یا $\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}$ باشند. پس برای عدد فرد $n+1$ چهار حالت صحیح وجود دارد که در دوتای آن اعداد به ترتیب دور دایره قرار گرفته‌اند (این دو حالت را حالات الف نام می‌گذاریم) و در دو حالت دیگر(که با حالات ب نام‌گذاری می‌کنیم) غیر از $n+1$ بقیه اعداد به ترتیب قرار گرفته‌اند. حال می‌خواهیم جواب مساله را برای عدد زوج $n+2$ بدست بیاوریم. باید عدد n+2 را بین دو عدد مجاور از آرایش‌های مجاز اعداد ۱،۲، ...، $n+1$ قرار دهیم، که مجموع آن‌ها $n+2$ باشد. به راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های الف $n+2$ فقط می‌تواند بین ۱ و $n+1$ قرار گیرد. هم‌چنین به راحتی معلوم می‌شود که در آرایش‌های ب مجموع هیچ دو عدد مجاوری $n+2$ نمی‌شود. بنابراین برای عدد زوج $n+2$ نیزفقط دو آرایش مجاز وجود دارد. پس گام استقرا اثبات شد و اثبات کامل است.

- نکته: اگر تمامی مراحل اثبات درست گفته شده باشد ولی عدد $n+1$ را بدون دلیل به آرایش‌های مجاز n عدد اضافه کند، اثبات اشتباه است و نمره‌ای نخواهد داشت.
- اگر آرایش‌هایی که با یک دوران به هم تبدیل می‌شوند یکی گرفته نشوند جواب‌های بالا در n ضرب می‌شوند و باز هم جواب مورد قبول است. همچنین اگر آرایش‌هایی که فقط جهت آن‌ها (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) با هم تفاوت دارد یکی گرفته شوند باز هم مورد قبول است.

راه‌حل دوم. حل مساله را با چند لم آغاز می‌کنیم:

لم. هیچ دو عدد زوجی در دایره کنار هم نیستند.

اثبات. واضح است اگر اعداد a_1 و a_2 و a_3 و ... و a_n به ترتیب دور دایره چیده‌شده باشند و a_1 و a_2 زوج باشند آن‌گاه a_3 هم زوج است زیرا می دانیم $a_2 \mid a_3 + a_1$ و با تکرار این روند همه‌ی اعداد زوج می‌شوند که تناقض است.

لم. اگر n زوج باشد اعداد دور دایره یکی در میان زوج هستند و اگر n فرد باشد تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی جفت‌های کنار هم زوج و فرد هستند.

اثبات. طبق لم ۱ اگر n زوج باشد چون تعداد اعداد زوج و فرد برابر است و هیچ دو عدد زوجی کنار هم نیستند پس اعداد یکی در میان زوج و فرد هستند و اگر n فرد باشد چون تعداد اعداد فرد یکی بیشتر است پس تنها دو عدد فرد کنار هم هستند و بقیه‌ی زوج‌های کنار هم زوج و فرد هستند.

حال برای اعداد زوج ثابت می‌کنیم که تنها یک چینش متوالی (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد ۱ تا n به همین ترتیب دور دایره چیده شده‌اند.

اثبات.

عدد $n-۱$ فرد است پس طبق لم ۲ اعدادِ مجاور آن زوج هستند. پس مجموع دو عدد مجاور باید مضرب زوجی از $n-۱$ باشد پس باید مجموعِ آن‌ها برابر $۲n-۲$ باشد (بیش‌تر از $۲n-۲$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعدادِ باقی‌مانده n و $n-۲$ هستند که مجموعشان $۲n-۲$ است). پس قطعاً اعدادِ مجاور $n-۱$ باید n و $n-۲$ باشند. پس اعداد n و $n-۱$ و $n-۲$ به شکل متوالی قرار دارند. حال با استقرا نشان می‌دهیم همه‌ی اعداد به شکل متوالی قرار دارند.

فرض کنید اعداد n و $n-۱$ و ... $n-k$ به طور متوالی قرار گرفته اند ($n-۲>k>۲$) نشان می دهیم عدد بعدی $n-k-۱$ است. فرض کنید عدد بعدی x باشد داریم $n-k \mid x+n-k+۱$ که نشان می‌دهد $n-k \mid x+۱$. حال چون x کم‌تر از $n-k$ است تنها عدد ممکن $n-k-۱$ است که نشان می‌دهد عدد بعدی $n-k-۱$ است که این روند متوالی بودن اعداد را اثبات می‌کند.

حال برای اعداد فرد $n>۳$ ثابت می‌کنیم که تنها دو آرایش مجاز (بدون در نظر گرفتن جهت و چرخش) وجود دارند. یعنی اعداد حتماً باید به یکی از ترتیب‌های زیر باشند

$$۱,۲,\dots,n$$

$$۱,۲,\dots\frac{n-۱}{۲},n,\frac{n+۱}{۲},\frac{n+۳}{۲},\dots,n-۱$$

لم. اگر n فرد باشد یکی از تنها دو عددِ فردِ متوالی عدد n است.

اثبات. مجموع اعداد مجاورِ n از $2n$ کم‌تر است و چون باید مضربِ n باشد باید برابر n باشد ولی اگر اعداد مجاورِ n دو عددِ زوج باشند مجموع آن‌ها نمی‌تواند n شود چون n فرد است. پس یکی از دو عددِ فردِ متوالی عدد n است .

اگر $n = 5$ حکم به راحتی اثبات می‌شود پس فرض می کنیم $n > 5$.

حال به ادامه‌ی اثبات می پردازیم:

عدد $n - 2$ فرد است پس طبق لم ۲ و لم ۳ هر دو عدد مجاورِ آن یا زوج هستند یا یکی از اعداد مجاور آن n است. اگر n مجاور $n - 2$ باشد مجاورِ دیگرِ $n - 2$ فقط می‌تواند $n - 4$ باشد چون مجموع مجاورهای $n - 2$ باید بر $n - 2$ بخش‌پذیر باشد و این مجموع حداکثر می‌تواند $2n - 1$ باشد که چون $n > 5$، $3n - 6 > 2n - 1$ پس باید $2n - 4$ باشد. پس n و $n - 2$ و $n - 4$ مجاور هستند ولی طبق لم ۲ امکان ندارد ۳ عدد فرد کنار هم باشند. پس مجاورهای $n - 2$ دو عددِ زوج هستند. حال مانندِ اثبات برای اعداد زوج مجموعِ دو عددِ مجاور باید مضرب زوجی از $n - 2$ باشد پس قطعاً باید برابر $2n - 4$ باشد (بیشتر از $2n - 4$ نمی‌تواند باشد چون بزرگ‌ترین اعدادِ باقی مانده n و $n - 1$ هستند که مجموعشان $2n - 1$ است که کمتر از $3n - 6$ است). پس اعدادِ مجاور $n - 2$ باید $n - 1$ و $n - 3$ باشند.

تا اینجا دیدیم که $n - 1$ و $n - 2$ و $n - 3$ متوالی هستند. حال اگر x مجاور $n - 1$ باشد داریم $n - 1 \mid x + n - 2$ پس دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: $x = n$.

در این حالت مشابه اثبات اعداد زوج می‌توان نتیجه گرفت اعداد متوالی و به صورت ۱، ۲، ...، n هستند.

حالت دوم: $x = 1$

فرض کنید k بزرگ‌ترین عددی است که اعداد $n - 1$و $n - 2$ و ... و $n - k$ به طور متوالی قرار گرفته‌اند ($n - 1 > k > 2$). نشان می‌دهیم $k = \frac{n-1}{2}$و عدد بعدیِ آن n است.

عدد بعدی را y بنامید. داریم$n - k \mid y + n - k + 1$ که نشان می‌دهد $n - k \mid y + 1$. از طرفی بنابر نحوه‌ی انتخابِ k، y با $n - k - 1$ برابر نیست و چون $n - k < y + 1$ پس $y = n$. حال اگر عدد دیگر مجاور n را z بگیریم داریم $n \mid z + (n - k)$. ادعا می‌کنیم $n - k \geq \frac{n+1}{2}$. زیرا در غیر

این صورت z و $n-k$ هر دو کمتر از $\frac{n}{۲}$ خواهند بود که با $n \mid z+(n-k)$ در تناقض است. پس $\frac{n+۱}{۲} \geq n-k$ و چون $n-k \mid n+۱$ پس $k=\frac{n-۱}{۲}$. حال چون مجموع اعدادِ مجاور n همان n است روشن است که عدد دیگر مجاور n باید $\frac{n-۱}{۲}$ باشد.

حال به طرز مشابه می‌توان ثابت کرد اعداد ۱ و ۲ و ... و $\frac{n-۳}{۲}$ و $\frac{n-۱}{۲}$ متوالی می‌آیند پس آرایشِ مورد نظر $۱,۲,\ldots\frac{n-۱}{۲},n,\frac{n+۱}{۲},\frac{n+۳}{۲},\ldots,n-۱$ است.

- نکته: اثبات حتی درست نحوه ی زوج و فرد قرار گرفتن نمره ای ندارد.

۳. راه‌حل اول. فرض کنید $t+۱ = q^\alpha s$ که q عددی اول است و $(s,q)=۱$. (در واقع α بزرگترین توانی از q است که $t+۱$ را می شمارد)

حال $x_۰$ را طوری انتخاب کنید که $x_۰ \equiv ۱$ (به پیمانه‌ی $q^{\alpha+۱}$) و $x_۰ > t$. قرار دهید $n = x_۰^\alpha$. ادعا می کنیم این n جواب مسئله است.

توجه کنید برای هر i،

$n^i + t \equiv ۱ + t \not\equiv ۰$ (به پیمانه ی $q^{\alpha+۱}$) ولی $n^i + t \equiv ۱ + t \equiv ۰$ (به پیمانه ی q^α)

فرض کنید به ازای i ای $n^i + t$ توان کامل شود. (فرض خلف) در نتیجه r ای وجود دارد که $r>۱$ و $n^i + t = y^r$ و چون نمای عدد اول q در تجزیه ی $n^i + t$ به عوامل اول برابر با α است، α بر r بخش‌پذیر است. در نتیجه $\alpha \geq ۲$ و $y^r = n^i + t = (x_۰^{i(\frac{\alpha}{r})})^r + t = z^r + t$. از همین تساوی نتیجه می‌شود که $y > z$.

حال توجه کنید،

$$z^r + t < z^r + x_۰ \leq z^r + z \leq \left(z+۱\right)^r \leq y^r = z^r + t$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است و این n کار می کند.

توجه کنید در اثبات نابرابری سوم از بسط دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن،

$$(z+۱)^r = z^r + rz^{r-۱} + \frac{r(r-۱)}{۲} z^{r-۲} + \ldots + rz + ۱ \geq z^r + z$$

(نابرابری بالا برای $r \geq ۲$ درست است)

راه‌حل دوم. دو حالت در نظر بگیرید.

یک) $t+۱$ توان کامل نباشد. قرار دهید $n = t(t+۱)^۲ + ۱$. ادعا می کنیم این n کار می‌کند. فرض کنید برای k ای $n^k + t$ توان کامل شود. در نتیجه با تعریف $y = t(t+۱)^۲$،

$$(t\left(t+۱\right)^۲ + ۱)^k + t = y^k + ky^{k-۱} + \ldots + ky + t + ۱ = (t+۱)(b\left(t+۱\right) + ۱)$$

(به ازای b مناسبی)

به وضوح $t+1$ و $b\left(t+1\right)+1$ نسبت به هم اول‌اند و ضربشان توان کامل است. پس بایستی هریک توان کامل باشند که خلاف فرض اولیه ما است.

دو) $t+1$ توان کامل باشد. قرار دهید $t+1=m^r$ که m توان کامل نیست. (برای این کار r را بیش‌ترین توان ممکن انتخاب کنید) قرار دهید $n_0=t(t+1)^2+1$ و $n=n_0^r$. همین n جواب مسئله است.

فرض کنید به ازای k,c,d ای $n^k+t=c^d$. مشابه روش کار در حالت (یک) نتیجه می‌گیریم $t+1$ توان d ام کامل است. پس با توجه به این که $t+1$ توان r ام کامل نیز هست و r بیش‌ترین نمای ممکن است، r بر d بخش‌پذیر است. پس $r=ld$ و

$$t=c^d-n^k=c^d-n_0^{kld}=$$
$$\left(c-n_0\right)\left(c^{d-1}+c^{d-2}n_0^{kl}+\ldots+n_0^{kl\left(d-1\right)}\right)\geq n_0>t$$

که تناقض است.

مواردی که اثبات آن ها نمره ای در بر ندارد:

- اثبات برای حالت خاص $t=4k+1$ یا $t=8k+3$ و از این قبیل.
- اثبات برای حالت خاصی که $t+1$ عامل اولی مانند p داشته باشد که $t+1$ بر p^2 بخش پذیر نباشد.

اشتباهات رایج:

- اثبات این‌که n ای وجود دارد که برای هر i ای، n^i+t توان i ام کامل نیست. در حالی که باید ثابت می‌شد n^i+t توان j ام کامل نیست حتی برای $i\neq j$.
- معرفیِ n بدون اثبات این‌که نسبت به t اول است.

۴. راه‌حل الف) با استفاده از برهان خلف نشان می دهیم چنین زیر مجموعه‌هایی یافت نمی‌شود.
فرض کنید این‌طور نباشد و بتوان اعداد طبیعی را به زیرمجموعه های دو عضوی A_1، A_2، A_3، ... افراز کرد طوری که حاصل جمع اعضای A_i برابر $1391 + i$ باشد. اگر $A_i = \{a_i, b_i\}$ باشد آنگاه چون a_i و b_i اعداد طبیعی‌اند و $a_i + b_i = 1391 + i$ پس $a_i, b_i < 1391 + i$. داریم:

$$i \leq 1391 \rightarrow a_i, b_i < 1391 + i \leq 1391 + 1391 = 2 \times 1391$$

پس همه ی اعضای A_1، A_2، A_3، ... ، A_{1391} از 2×1391 کمتر هستند، یعنی حداکثر $2 \times 1391 - 1$ عدد را می‌توان در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار داد که با فرض اولیه مبنی بر افراز به مجموعه‌های دوعضوی، که در نتیجه‌ی آن 2×1391 عدد در این ۱۳۹۱ مجموعه قرار می‌گیرد، تناقض دارد. این تناقض نشان می‌دهد فرض اولیه نادرست بوده و اعداد طبیعی را نمی‌توان به زیرمجموعه‌های دوعضوی با شرایط خواسته‌شده‌ی مسئله افراز کرد.

ب) با ارائه‌ی روشی برای ساخت این مجموعه‌ها نشان می‌دهیم جواب مثبت است.

روش به این صورت است که در مرحله‌ی i-ام، a_i، کوچک‌ترین عددی که تا به حال در هیچ مجموعه‌ای قرار نگرفته و $b_i = 1391 + i^2 - a_i$ را در مجموعه‌ی A_i قرار می‌دهیم. در مراحل زیر نشان می‌دهیم مجموعه‌های حاصل شرایط مسئله را داراست.

آ. همه ی اعداد طبیعی در حداقل یکی از این مجموعه‌ها قرار می گیرد، در غیر این صورت، فرض کنید a کوچک‌ترین عددی باشد که در هیچ مجموعه‌ای نیامده و در مرحله‌ی i-ام همه‌ی اعداد کوچک‌تر از a انتخاب شده باشند، در این صورت طبق روش فوق در مرحله i عدد a انتخاب می‌شود. پس فرض اولیه نادرست بوده و همه‌ی اعداد طبیعی در این مجموعه‌ها پوشانده می‌شوند.

بـ. در مراحل زیر ثابت می‌کنیم هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده و بدین ترتیب ثابت می‌شود خروجیِ این روش افرازی است که مورد نظر سوال است.

لم. $a_i \leq 2i - 1$.
اثبات. تا پیش از مرحله ی i-ام، $2i - 2$ عدد در مجموعه ها قرار گرفته‌اند، پس دست کم یکی از اعداد کمتر یا مساوی $2i - 1$ انتخاب نشده است در نتیجه $a_i \leq 2i - 1$.

۱. با توجه به اینکه در هر مرحله a_i کوچک‌ترین عددی است که تا به حال در هیچ مجموعه‌ای نیامده پس a_i با هیچ‌کدام از $۲i-۲$ عدد قبلی برابر نیست و هم‌چنین $a_i > a_j$ که $i > j$ باشد.

$$b_i = ۱۳۹۱ + i^۲ - a_i \geq ۱۳۹۱ + (i-۱)^۲ > ۲i - ۱ \geq a_i$$

۲. اگر $i > j$ آنگاه:

$$b_i = ۱۳۹۱ + i^۲ - a_i \geq ۱۳۹۱ + i^۲ - ۲i + ۱ = ۱۳۹۱ + (i-۱)^۲ > b_j > a_j$$

بدین ترتیب ثابت شده است که هیچ دو عدد در یک مجموعه یا در مجموعه‌های متفاوت با یکدیگر برابر نیستند در نتیجه هر مجموعه دقیقا دو عضوی است و هیچ عددی در بیش از یک مجموعه نیامده است.

۵. راه‌حل اول. ابتدا فرض کنید $Q(b,d) = P(۰,b,۰,d)$ در این صورت $Q(b,d) \geq ۰$ اگر و تنها اگر چندجمله ای $x^۴ + bx^۲ + d$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد و این مورد هم برقرار است اگر و تنها اگر $x^۲ + bx + d$ دارای دو ریشه حقیقی نامنفی باشد

(چرا که

$$x^۲ + bx + d = (x-\alpha)(x-\beta) \Rightarrow x^۴ + bx^۲ + d = (x^۲-\alpha)(x^۲-\beta)$$

و $x^۲ - \alpha$ به عوامل خطی تجزیه می شود اگر و تنها اگر $\alpha \geq ۰$) حال ثابت می کنیم $x^۲ + bx + d$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی نامنفی است اگر وتنها اگر $d \geq ۰, b \leq ۰, b^۲ - ۴d \geq ۰$.

فرض کنید $\alpha, \beta \geq ۰$ ریشه های $x^۲ + bx + d$ باشند در این صورت:

$$x^۲ + bx + d = (x-\alpha)(x-\beta) = x^۲ - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

و بنابراین $b = -(\alpha+\beta) \leq ۰, d = \alpha\beta \geq ۰$ و چون چندجمله دارای ریشه بود پس $b^۲ - ۴d \geq ۰$.

حال بر عکس فرض کنید $d \geq ۰, b \leq ۰, b^۲ - ۴d \geq ۰$ بنابراین $x^۲ + bx + d$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است فرض کنید این ریشه ها α, β باشند در این صورت مانند قبل $b = -(\alpha+\beta), d = \alpha\beta$ حال $d \geq ۰$ بنابراین α, β دارای علامت مخالف نیستند، بنابراین اگر $\alpha < ۰$ آن‌گاه $\beta \leq ۰$ و در نتیجه $b = -(\alpha+\beta) > ۰$ که خلاف فرض ماست پس داریم $\alpha, \beta \geq ۰$ وآن‌چه می‌خواستیم ثابت شد.

حال داریم

$$Q(b,d) \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4d \geq 0, b \leq 0, d \geq 0 (1)$$

حال برای هر $b < 0$ چندجمله‌ای تک متغیره‌ی $Q_b(y)$ که $Q_b(y) = Q(b,y)$ برای $0 \leq y \leq \frac{b^2}{4}$ نامنفی و برای $y < 0$ منفی است و چون هر چندجمله‌ای تابعی پیوسته است پس $Q_b(0) = 0$ پس چندجمله‌ای $L(b) = Q(b,0)$ برای هر $b < 0$ برابر صفر شده است و این یعنی این چندجمله‌ای دارای بی نهایت ریشه است و بنابراین همه جا صفر است و این یعنی $L(1) = Q(1,0) = 0$ بنابراین طبق (۱) باید داشته باشیم $1 \leq 0$ پس به تناقض رسیدیم پس حکم مسأله ثابت شد.

راه‌حل دوم. چندجمله‌ای های به شکل $(x^2+sx+t)(x^2+ux+v)$ را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای دارای چهار ریشه‌ی حقیقی است اگر و تنها اگر هر یک از x^2+sx+t و x^2+ux+v دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشند و این اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $s^2-4t \geq 0, u^2-4v \geq 0$.

توجه کنید که

$$(x^2+sx+t)(x^2+ux+v) = x^4+(s+u)x^3+(t+su+v)x^2+(sv+tu)x+tv$$

پس اگر $P(a,b,c,d)$ چند جمله‌ای با خاصیت گفته شده در فرض موجود باشد داریم:

$$P(s+u, t+su+v, sv+tu, tv) \geq 0 \Leftrightarrow s^2-4t \geq 0, u^2-4v \geq 0$$

پس اگر $Q(s,t,u,v) = P(s+u, t+su+v, sv+tu, tv)$ آن‌گاه

$$Q(s,t,u,v) \geq 0 \Leftrightarrow s^2-4t \geq 0, u^2-4v \geq 0 (1)$$

حال شبیه راه‌حل قبل عمل می‌کنیم:

اگر $m^2-4n \geq 0$ در این صورت چندجمله‌ای تک متغیره $Q_{m,n,k}(x) = Q(m,n,k,x)$ برای $x \leq \frac{k^2}{4}$ نامنفی و برای $x > \frac{k^2}{4}$ منفی است و بنابراین مثل راه‌حل قبل داریم

$Q_{m,n,k}(\frac{k^۲}{۴}) = Q(m, n, k, \frac{k^۲}{۴}) = ۰$. حال اگر $m \neq ۰$ چندجمله‌ای $P_{m,k}(y) = Q(m, y, k, \frac{k^۲}{۴})$ برای هر $y \leq \frac{m^۲}{۴}$ برابر صفر شده است و بنابراین بی نهایت ریشه دارد، پس برای هر y حقیقی $Q(m, y, k, \frac{k^۲}{۴}) = ۰$ پس به طور مثال باید $Q(۱, ۱, ۰, ۰) = ۰$ پس طبق (۱) باید $۰ \geq ۴ - ۱^۲ = ۳-$ که این ما را به تناقض می‌رساند و حکم مسأله ثابت می‌شود.

راه‌حل سوم. رض کنید α, β, δ اعدادی حقیقی باشند در این صورت چندجمله‌ای $(x - \alpha)(x - \beta)((x - \delta)^۲ + \varepsilon)$ برای هر $\varepsilon \neq ۰$ دارای چهار ریشه حقیقی نیست اما برای $\varepsilon = ۰$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی است پس اگر

$$x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d = (x - \alpha)(x - \beta)((x - \delta)^۲ + \varepsilon)$$

آن‌گاه $P(a, b, c, d) < ۰$ اگر $\varepsilon \neq ۰$ و $P(a, b, c, d) \geq ۰$ اگر پس $\varepsilon = ۰$ پس مانند قبل نتیجه می‌گیریم که اگر $x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد و یک ریشه‌ی مضاعف در این صورت $P(a, b, c, d) = ۰$ حال راه‌حل را مانند راه‌حل قبلی می‌توانیم به اتمام برسانیم.

- توجه کنید که در واقع در راه‌حل قبل هم با اثبات $Q(m, n, k, \frac{k^۲}{۴}) = ۰$ برای $m^۲ - ۴n \geq ۰$ دقیقا همان حکم بالا را ثابت کرده بودیم.

۶. راه‌حل اول. ثلث BDT متساوی‌الساقین به رأس B است. بنابراین داریم $B\hat{D}T = \frac{۱}{۲}\hat{B}$. به‌طور مشابه $C\hat{D}S = \frac{۱}{۲}\hat{C}$. بنابراین

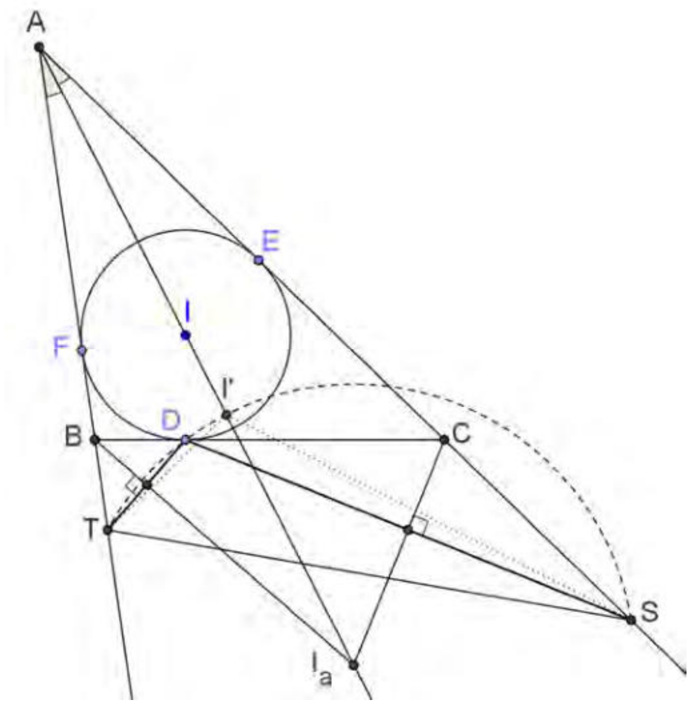
$$T\hat{D}S = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{B} - \frac{۱}{۲}\hat{C} = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}.$$

اگر مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABC و ATS را به‌ترتیب I و I' بنامیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &I'TS = \frac{۱}{۲}\hat{T}, \quad I'\hat{S}T = \frac{۱}{۲}\hat{S} \\ &\Rightarrow T\hat{I}'S = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{T} - \frac{۱}{۲}\hat{S} = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}. \end{aligned}$$

بنابراین $T\hat{D}S = T\hat{I}'S$ و چون I' و D هردو یک طرف خط TS هستند، چهارضلعی $TDI'S$ محاطی است. مرکز دایره‌ی محیطی این چهارضلعی همان محل برخورد عمودمنصف‌های TD و SD است که همان نیم‌سازهای خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از مثلث ABC هستند. پس مرکز این دایره همان مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC متناظر با رأس A است که آن را I_a می‌نامیم.

اگر دایره‌ی به مرکز I_a و شعاع I_aD را ω بنامیم، I' همان تقاطع ω با خط AI_a است. هم‌چنین I_a و D در دو طرف TS قرار دارند (چون $T\hat{D}S > ۹۰^\circ$ و I_a مرکز دایره‌ی محیطی مثلث TDS است) در حالی که I'، D و I در یک طرف TS قرار دارند. پس I' روی نیم‌خط I_aI است که خط‌المرکزین دایره‌ی محاطی و ω است. پس برای اثبات این‌که I' داخل یا روی دایره‌ی محاطی است، کافی است ثابت کنیم $I_aI - r \leq I_aI' \leq I_aI + r$ که در آن r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است. اما $r = I_aD$ و $I_aI' = I_aD$. پس نامساوی‌های فوق تبدیل می‌شوند به $I_aI - ID \leq I_aD \leq I_aI + ID$ که همان نامساوی مثلث در مثلث I_aID است و حکم ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم. فرض کنید E' نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ATS با ضلع AS باشد. با توجه به این که زاویه‌ی II' با ضلع AC برابر با $\frac{A}{2}$ است، خواهیم داشت $EE' = II'\cos(\frac{A}{2})$. پس کافی است ثابت کنیم $EE' \leq r\cos(\frac{A}{2})$. می‌دانیم

$$AE = \frac{1}{2}(AB + AC - BC),$$
$$AE' = \frac{1}{2}(AT + AS - TS) = \frac{1}{2}\big((AB + BD) + (AC + CD) - TS\big).$$

توجه کنید که $AE' > AE$، زیرا دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC کاملاً داخل مثلث ATS است و بنابراین شعاع دایره‌ی محاطی داخلی ATS بیشتر از r است. بنابراین $EE' = BC - \frac{1}{2}TS$. پس کافی‌است ثابت کنیم $BC - \frac{1}{2}TS \leq r\cos\frac{A}{2}$. اما اگر M را تقاطع EF با AI بگیریم، داریم

$$r\cos\frac{A}{2} = IE\sin M\hat{I}E = EM = \frac{1}{2}EF.$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $2BC - TS \leq EF$. داریم $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{BC}$ زیرا

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS} = (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) + (\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CS})$$

و $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CS} = ۰$. بنابراین

$$۲BC = \left|۲\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TS}\right| \leq \left|\overrightarrow{FE}\right| + \left|\overrightarrow{TS}\right| = FE + TS$$

و حکم ثابت می‌شود.

نکاتی که نوشتن آن‌ها نمره ندارد:

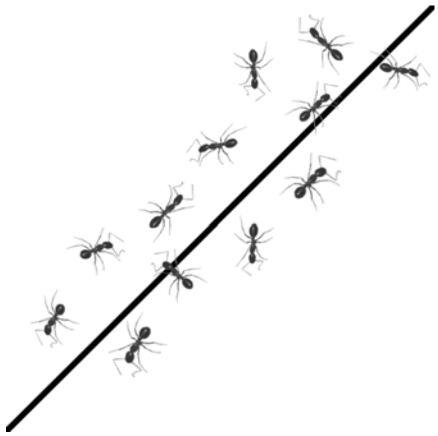
- حل مسئله در حالتی که $AB = AC$.
- تنها دو فرمول $AE = p - a$ و $AE' = p' - TS$.
- معادل کردن حکم مسئله با یک نامساوی بر حسب شعاع دایره‌ی محاطی مثلث ATS.
- $BI \parallel TD$ و $CI \parallel SD$.
- $F\hat{D}T = E\hat{D}S = ۹۰^\circ$.
- اثبات این که I' داخل مثلث TDS نیست.
- نوشتن فرمولی برای AI و AI' بر حسب اضلاع و TS و $\cos\frac{۱}{۲}\hat{A}$ و انجام کارهای مقدماتی روی این فرمول‌ها (از جمله جایگذاری کردن TS با مقدار آن با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها).

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

پنجشنبه، ۸ اردیبهشت ۱۳۹۰ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

۱) ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ سر هر کدام تا خط کم‌تر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصلهٔ سر هر دو مورچه بیش‌تر از دو سانتی‌متر باشد فاصلهٔ سر دست‌کم دو مورچه بیش‌تر از ده متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)



۲) در مثلث ABC داریم $\widehat{ABC} = ۶۰^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویهٔ $\widehat{BAC}$ را در نقطهٔ D قطع کند. هم‌چنین از رأس C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویهٔ $\widehat{ABC}$ را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید $\widehat{BED} \leq ۳۰^\circ$.

۳) همهٔ دنباله‌های صعودی $a_۱, a_۲, a_۳, \dots$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $i + j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$ آن‌گاه $a_i \leq a_j$.)

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۹ اردیبهشت ۱۳۹۰ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازهٔ $(-1,1)$ وجود داشته باشند که مجموع آن‌ها صفر و مجموع مربع‌های آن‌ها ۲۰ باشد.

۵) رنگین‌کمان نام پرنده‌ای کم‌یاب است. این پرندهٔ زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانش‌مندان حقیقت جدیدی دربارهٔ این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای iاُم، jاُم، kاُم و lاُم، که $i < j < k < l$ و این پرنده در روزهای iاُم و kاُم هم‌رنگ باشد و در روزهای jاُم و lاُم نیز هم‌رنگ و به رنگی متفاوت از روزهای iاُم و kاُم باشد. حداکثر طول عمر این پرنده بر حسب n چند روز است؟

۶) اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شدهٔ l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند. فرض کنید قرینهٔ l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD + CE = DE$ آن‌گاه $BD' + CE' = D'E'$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

---

۱. راه‌حل اول. طبق اصل لانه‌کبوتری از ۱۳۹۰ مورچه، لااقل ۶۹۵ مورچه یک طرف خط مفروض قرار دارند. فرض کنید این طرف بالای خط باشد. در ادامه تنها آن مورچه‌هایی را درنظر می‌گیریم که در بالای خط قرار دارند.

محور x را در جهت خط و محور y را عمود بر آن انتخاب می کنیم و فرض کنید که (x_i, y_i) نمایش‌گر مختصات سر یک مورچه در بالای محور باشد. در این صورت برای دو مورچه‌ی مختلف i و j داریم که:

$$(x_i - x_j)^۲ + (y_i - y_j)^۲ \geq ۲^۲ = ۴ \Rightarrow (x_i - x_j)^۲ \geq ۴ - (y_i - y_j)^۲ \geq ۳$$

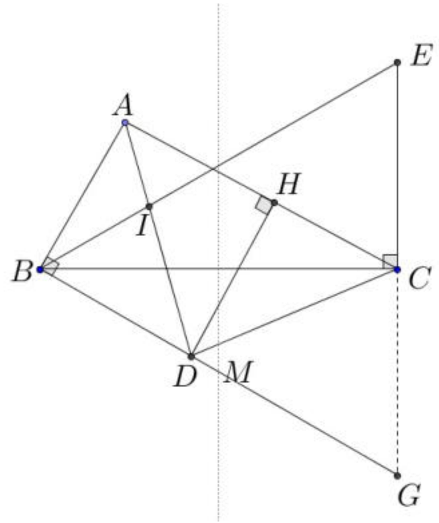
لذا برای هر دو مورچه‌ای در بالای خط داریم که $x_i - x_j \geq \sqrt{۳}$ پس اگر فرض کنیم که مورچه‌ها بر حسب مختصه x مرتب شده‌اند، یعنی: $x_۱ < x_۲ < x_۳ < \ldots < x_{۶۹۵}$ داریم که فاصله‌ی هر دو عضو متوالی از دنباله‌ی فوق لااقل $\sqrt{۳}$است پس $x_{۶۹۵} - x_۱ \geq \sqrt{۳} \times ۶۹۴ > ۱۲۰۰$ در نتیجه این دو مورچه در راستایx بیش از ۱۲ متر فاصله دارند پس کلاً فاصله‌ی آن‌ها بیش‌تر از ۱۲ متر است.

راه حل دوم. اگر به مرکز سر هر مورچه دایره‌ای به شعاع یک سانتی‌متر رسم کنیم، فرض مسئله معادل این می‌شود که هیچ دو دایره‌ای هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند و همگی خط مورد نظر را قطع می‌کنند(چرا؟) هم‌چنین این که همه‌ی دایره‌ها خط مورد نظر را قطع می‌کنند نتیجه می‌دهد که همه‌ی دایره‌ها به کلی داخل نواری به پهنای ۴ به مرکزیت خط قرار می‌گیرند.

با فرض خلف اگر فرض کنیم که سر همه‌ی مورچه‌ها درون طول ۱۰۰۰ سانتی‌متر قرار می گیرد می توان نتیجه گرفت که طول ۱۰۰۲ از نوار مورد نظر وجود دارد که همه دایره‌ها به کلی درون آن باشند. اما مساحت این ناحیه ۴۰۰۸ سانتی‌متر مربع است که از مجموع مساحت دایره‌های درون این ناحیه ($۱۳۹۰\pi \approx ۴۳۶۷$) کم‌تر است و این تناقض است.

توضیح: راه‌حل‌های دیگری نیز برای این مسئله وجود دارد که کران‌های به‌تری نیز می‌دهد.

۲. راه‌حل اول. مطابق شکل G را قرینه‌ی نقطه‌ی E نسبت به ضلع BC بگیرید. در این صورت BEG یک مثلث متساوی‌الساقین است($BE = BG$) که یک زاویه‌ی ۶۰ درجه دارد($\angle EBG = ۹۰^\circ - \frac{\angle ABC}{۲} = ۶۰^\circ$). پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر M را وسط ضلع BG از این مثلث بگیریم با توجه به این که در مثلث متساوی‌الساقین میانه همان ارتفاع است، $EM \perp BG$ و در نتیجه $\angle BEM = ۳۰^\circ$. پس کافی است نشان دهیم که $BD \leq BM$. برای این منظور توجه کنید که نقطه‌ی D روی نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle A$ است. پس اگر H پای عمود وارد از D بر AC باشد، $BD = DH$. اما از طرف دیگر با توجه به این که DH بر AC عمود است، $DH \leq DC$. پس در کل $BD \leq DC$. این نشان می‌دهد که D و B در یک طرف عمود منصف BC قرار دارند. اما می‌دانیم که عمود منصف BC، طبق قضیه‌ی تالس BG را در نقطه‌ی وسطش یعنی M قطع می‌کند. در نتیجه D روی پاره‌خط BM قرار دارد و لذا $DB \leq BM$ و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.



راه‌حل دوم. مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC که در این‌جا محل تقاطع BEو AD است را مطابق معمول با I نمایش می‌دهیم. α را برابر $\frac{1}{2}\angle BAC$ بگیرید. در این صورت داریم:

$$\angle IBD = 90^\circ - \angle IBA = 90^\circ - \frac{\angle CBA}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$
$$\angle CEB = 90^\circ - \angle CBE = 90^\circ - \frac{\angle CBA}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

بنابراین در دو مثلث BEC و BED، $\angle CEB = \angle EBD = 60^\circ$ و BE ضلع مشترک هر دو است. از آن‌جا که $\angle EBC = 30^\circ$ است، کافی است نشان دهیم که $BD \leq CE$ ولی می‌دانیم که $\tan\alpha = \frac{BD}{AB}$ و $\frac{EC}{BC} = \tan(30^\circ)$. پس

$$\begin{aligned}
BD \leq CE \quad &\Leftrightarrow \quad AB\tan\alpha \leq BC\tan 30^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{AB}{BC}.\tan\alpha \leq \tan 30^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \tan\alpha\frac{\sin(120^\circ - 2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \leq \tan 30^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin(120^\circ - 2\alpha)}{2\sin\alpha.\cos\alpha} \leq \tan 30^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(120^\circ - 2\alpha) \leq 2\cos^2\alpha.\tan 30^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad \sin 120^\circ.\cos(2\alpha) - \sin 120^\circ.\sin(2\alpha) \leq (1 + \cos(2\alpha))\tan 30^\circ \\
&\Leftrightarrow \quad (\sin 120^\circ - \tan 30^\circ).\cos(2\alpha) - \cos 120^\circ.\sin(2\alpha) \leq \tan 30^\circ
\end{aligned}$$

حال برای نشان دادن این حکم معادل آخر از نامساوی کوشی‌شوارتز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&((\sin 120^\circ - \tan 30^\circ).\cos(2\alpha) - \cos 120^\circ.\sin(2\alpha) \leq \tan 30^\circ)^2 \\
\leq\ &((\sin 120^\circ - \tan 30^\circ).\cos(2\alpha) - \cos 120^\circ.\sin(2\alpha) \leq \tan 30^\circ)^2 \\
=\ &(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\tfrac{-1}{2})^2 = \tfrac{3}{36} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{3} = \tan^2(30^\circ)
\end{aligned}$$

۳. ابتدا نشان می‌دهیم که این دنباله اکیداً صعودی است. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که برای یک عدد طبیعی i، $a_i = a_{i+1}$. حال برای یک عدد اول بزرگ مثل p، j را برابر $p - i$ قرار دهید. در این صورت $i + j$ اول است و تنها دو مقسوم‌علیه دارد. پس $a_i + a_j$ هم تنها دو مقسوم‌علیه دارد و در نتیجه اول است. اما $a_{i+1} + a_j = a_i + a_j$ و لذا $a_{i+1} + a_j$ هم اول بوده و در نتیجه دو مقسوم‌علیه دارد.

پس $i+j+1=p+1$ هم اول است که امکان ندارد.
حال i و j را برابر 2^{p-2} که p یک عدد اول است قرار دهید. در این صورت $i+j=2^{p-1}$، p مقسوم‌علیه دارد. پس $2a_i$ هم باید p مقسوم‌علیه داشته باشد. حال اگر تجزیه‌ی $2a_i$ به عوامل اول به صورت $2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)=p$$

پس تنها یکی از α_i+1ها می‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد و آن‌هم ناچاراً α_1+1 است. پس $\alpha_1=p-1$ و در نتیجه $a_i=a_{2^{p-2}}=2^{p-2}$. حال دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح داریم که در بی‌نهایت عدد صحیح مثل k، $a_k=k$ شده است. در این صورت این دنباله مجبور است برای هر عددی این خاصیت را داشته باشد. پس تنها دنباله‌ای که در این خاصیت صدق می‌کند دنباله‌ی اعداد طبیعی است.

۴. فرض کنید اعداد حقیقی $a_1,a_2,\ldots,a_n$ شرط مسئله را برآورده کنند. در این صورت

$$20=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=n$$

پس $n\geq 21$. می‌خواهیم نشان دهیم که $n=22$ جواب است. برای این منظور فرض کنید

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{21}$$

تعدادی عدد حقیقی در بازه‌ی $(-1,1)$ باشند که $a_1+a_2+\cdots+a_{21}=0$ و $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{21}^2=20$. حال دقت کنید که $a_1\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{21}}{21}\leq a_{21}$. پس $a_1\leq 0\leq a_{21}$. از طرفی با توجه به این که ۲۱ کوچک‌ترین عدد ممکن با این خاصیت است هیچ‌کدام از a_iها نمی‌توانند صفر باشند. بنابراین عدد طبیعی مشخص k وجود دارد که

$$-1<a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_k<0<a_{k+1}\leq\cdots\leq a_{21}<1$$

اگر $k\leq 10$، آن‌گاه برای هر $k+1\leq i\leq 21$ باید $0<a_i<1$ باشد و در نتیجه $0<a_i^2<a_i$. حال داریم:

$$\begin{aligned}
20 &= a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{21}^2=(a_1^2+\cdots+a_k^2)+(a_{k+1}^2+\cdots+a_{21}^2)\\
&< (a_1^2+\cdots+a_k^2)+(a_{k+1}+\cdots+a_{21})\\
&< (a_1^2+\cdots+a_k^2)+(-a_1-a_2-\cdots-a_k)\\
&< 2k\leq 20
\end{aligned}$$

که یک تناقض است. اگر هم $k\geq 11$، با در نظر گرفتن دنباله‌ی $-a_i$ به جای a_i و تکرار استدلال بالا به تناقض می‌رسیم. پس n نمی‌تواند برابر ۲۱ باشد و لذا $n\geq 22$. برای $n=22$ هم دنباله‌ی زیر شرایط خواسته شده را دارد.

$$a_1=a_2=\cdots=a_{11}=-a_{12}=-a_{13}=\cdots=-a_{22}=\sqrt{\frac{11}{10}}$$

پس پاسخ مسئله ۲۲ است.

۵. با استقرا روی n نشان می‌دهیم که حداکثر تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان برابر $2n-1$ است. برای این تعداد روز اگر رنگ‌های مختلف را با شماره‌های $1,2,\ldots,n$ نمایش دهیم، دنباله‌ی زیر از رنگ‌ها که

طول آن برابر $2n-1$ است به وضوح خاصیت خواسته شده را دارد.

$$(1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 1)$$

در حالت $n=1$ حکم کاملاً بدیهی است. حال فرض کنید که حکم برای اعداد کم‌تر از n درست باشد و می‌خواهیم حکم را در حالت n نتیجه بگیریم.
فرض کنید روز اول رنگین‌کمان R باشد و در k روز با شماره‌های $R_1, R_2, \dots, R_k$ این رنگ را داشته است.(طبیعتاً $R_1 = 1$ است!)
حال هر کدام از بازه‌های (R_1, R_2)، (R_2, R_3)،...، (R_{k-1}, R_k) و $(R_k, \dots)$ را در نظر بگیرید.(منظور از بازه‌ی (R_i, R_{i+1}) روزهای بین روز R_iام و R_{i+1}ام است.) اگر پرنده در روز در دو بازه‌ی مختلف دارای یک رنگ باشد، فرض مسئله در مورد این دو روز و سر و ته بازه‌ی شامل روز اول به هم می‌خورد. بنابراین بازه‌های مختلف رنگ‌های مختلف دارند.
C_i را برابر تعداد رنگ‌هایی بگیرید که رنگین کمان در بازه‌ای که از روز R_i شروع می‌شود به خود می‌گیرد. طبق نتیجه‌ی بالا باید $\sum_{i=1}^{k} C_i = n-1$ باشد. با توجه به این که $C_i < n$ است، طبق فرض استقرا تعداد روزهای بازه‌ای که از R_i شروع می‌شود حداکثر برابر $2C_i - 1$ است. تنها دقت کنید که تعداد روزهای بازه‌ی آخر ممکن است برابر صفر باشد که در این صورت تعداد کل روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k + \sum_{i-1}^{k-1}(2C_i - 1) = 2n-1$ است. در غیر این صورت که این تعداد ناصفر باشد تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k + \sum_{i=1}^{k}(2C_i - 1) = 2n-2 < 2n-1$ است.

۶. فرض کنید که M وسط ضلع BC و a عمود منصف این ضلع باشد. X را نقطه‌ی تقاطع a و l بگیرید و به علاوه فرض کنید $\angle MXE = \alpha$،$\angle ABC = \beta$ و $\angle ACB = \gamma$ باشد. Y را نقطه‌ای روی پاره‌خط DE بگیرید که $EY = EC$ و Z قرینه‌ی نقطه‌ی Y نسبت به عمود منصف BC باشد.(پس Z روی خط l' است.) در این صورت به وضوح چهارضلعی $BCYZ$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و در نتیجه یک چهارضلعی محاطی است. K را نقطه‌ی تقاطع دوم (غیر از Z) دایره‌ی محیطی این چهارضلعی با خط l' بگیرید.(اثبات در حالتی که این دایره بر l' مماس باشد کاملاً مشابه است. در این حالت K همان Z خواهد بود.) ادعا می‌کنیم که با این شرایط $D'B = D'K$ است.

$$\angle CED = 360^\circ - (\angle MCE + \angle CMX + \angle MXE) = 360^\circ - (180^\circ - \gamma + 90^\circ + \alpha) = 90^\circ + \gamma - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \angle CYE = \frac{180^\circ - \angle CED}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ - \gamma + \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

حال از آن‌جا که مثلث ZXY متساوی‌الساقین است، $\angle XYZ = 90^\circ - \angle MXE = 90^\circ - \alpha \ (2)$.

$$(1), (2) \quad \Rightarrow \quad \angle CYZ = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (45^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

چهارضلعی $CYKZ$ با توجه به نحوه‌ای که K را معرفی کردیم محاطی است و در نتیجه $\angle CKZ = \angle CYZ = 45^\circ + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$. پس

$$\begin{aligned} \angle CKE' &= 180^\circ - \angle CKZ = 135^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} && (3) \\ \angle CE'K &= 360^\circ - (\angle MCE' + \angle XMC + \angle MXE') \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \gamma + 90^\circ + 180^\circ - \alpha) = \alpha + \gamma - 90^\circ && (4) \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\angle KCE' &= ۱۸۰^\circ - (\angle CE'K + \angle CKE') \overset{(۳),(۴)}{=} ۱۸۰^\circ - (\alpha + \gamma - ۹۰^\circ + ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲}) \\ &= ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲} = \angle CKE' \\ &\Rightarrow \angle KCE' = \angle CKE'\end{aligned}$$

پس نشان دادیم که مثلث $CE'K$ یک مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه $CE' = KE'$. به طریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $BD' = KD'$ و بنابراین در کل $D'E' = D'K + KE' = BD' + CE'$ و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

پنجشنبه، ۹ اردیبهشت ۱۳۸۹ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - ۱$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و دو عدد $ab + ۱$ و $a - b$ نیز نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab+۱)^۲ + (a-b)^۲$ مربع کامل نیست.

۲) n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{۲}{۳}(n^۲ - n)$ بیش‌تر نیست.

۳) دایره‌های $W_۱$ و $W_۲$ در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی $W_۱$ و $W_۲$ هستند به طوریکه AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی $W_۲$ را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$D\widehat{P}M = B\widehat{D}C$$

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

آدرس وب‌گاه باشگاه دانش‌پژوهان جوان: www.ysc.ac.ir

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۱۰ اردیبهشت ۱۳۸۹ | روز دوم | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ عددهایی حقیقی‌اند و

$$\min\{d, b+d\} > \max\{|c|, |a+c|\}$$

ثابت کنید که معادله‌ی $P(x) = ۰$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ جواب ندارد.

۵) در مثلث ABC، $\widehat{A} = ۶۰^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶) مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاسِ مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n-۱)^۲$ بیشتر نیست.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

---

۱. ابتدا دقت کنید که

$$(ab+1)^2+(a-b)^2=a^2b^2+a^2+b^2+1=(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$$

ادعا می‌کنیم که تحت شرایط مسئله a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند. زیرا اگر عامل اول مشترکی مثل p داشته باشند، تفاضل آن‌ها یعنی a^2-b^2 باید بر p بخش‌پذیر باشد. پس $p|a+b$ و یا $p|a-b$.

اگر $p|a+b$، با توجه به این که $(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ بر p بخش‌پذیر است، باید $ab-1$ هم بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه نسبت به هم اول بودن $a+b$ و $ab-1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. مشابه این حالت اگر $p|a-b$، با توجه به این که $(ab+1)^2+(a-b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ هم بر p بخش‌پذیر است، باید $ab+1$ بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه به نسبت به هم اول بودن $a-b$ و $ab+1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. پس در کل a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند و اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مربع کامل باشد هر دو مربع کامل هستند. یعنی عدد صحیح x یافت می‌شود که $x^2=a^2+1$. این نتیجه می‌دهد که $(x-a)(x+a)=1$ و چون $x-a$ و $x+a$ هر دو صحیح هستند باید هر دو برابر ۱ یا هر دو برابر ۱− باشند. پس در هر صورت با هم برابرند که این نتیجه می‌دهد a برابر صفر است که با طبیعی بودن a تناقض دارد. بنابراین این حاصل‌ضرب نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۲. فرض کنید k مثلث با مساحت یک در بین مثلث‌های با رئوس در بین این نقاط موجود باشد. یک زوج از این نقاط را به دل‌خواه در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی بین این دو نقطه برابر d باشد. هر نقطه‌ی دیگری که مثلث تولید شده توسط آن و دو نقطه‌ی در نظر گرفته‌شده برابر یک باشد، باید فاصله‌ای برابر $\frac{2}{d}$ از خط شامل آن دو نقطه داشته باشد. پس این چنین نقاطی باید روی دو خط موازی(و به فاصله‌ی $\frac{2}{d}$) با پاره‌خط شامل آن دو نقطه قرار داشته باشند و از آن‌جا که طبق فرض مسئله روی هیچ خطی سه نقطه از نقاط قرار ندارند تعداد چنین نقاطی حداکثر ۴ است(روی هر کدام از دو خط حداکثر دو نقطه). حال دقت کنید که اگر برای همه‌ی $\binom{n}{2}$ زوج نقطه، تعداد این نقاط را بشماریم هر مثلث دقیقاً سه بار شمرده شده است. پس

$$4\binom{n}{2}\geq 3k\Rightarrow \frac{2}{3}(n^2-n)\geq k$$

و به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۳. فرض کنید امتداد پاره‌خط PD که محور اصلی دو دایره است، پاره‌خط AB را در نقطه‌ی N قطع کند. چهارضلعی $BDPC$ محاطی است و در نتیجه $\angle BDC=\angle BPC$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\angle DPM=\angle BPC$ یا معادلاً $\angle DPB=\angle MPC$. نقطه‌ی N روی محور اصلی دو دایره قرار دارد، بنابراین قوت آن نسبت به دو دایره برابر است:

$$NA^2=NB^2\Rightarrow NA=NB$$

حال داریم:

$$\angle PBC = \angle PDC = \frac{۱}{۲}\widehat{ADP} = \angle PAB$$

$$\angle PCB = \frac{۱}{۲}\widehat{PDB} = \angle PBA$$

پس مثلث‌های PCBو PBA متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌ی بین میانه و ضلع متناظر آن‌ها با هم برابر است. حال دقت کنید که PM میانه‌ی نظیر ضلع BC در مثلث PBC و PN میانه‌ی ضلع AB در مثلث PAB است و لذا $\angle DPB = \angle NPB = \angle MPC$ و این همان حکمی است که قصد اثبات آن را داشتیم.

۴. راه‌حل اول. به برهان خلف فرض کنید α یک ریشه‌ی حقیقی معادله باشد که $|\alpha| \leq ۱$. بنابراین:

$$P(\alpha) = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + b\alpha^۲ + c\alpha + d = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + c\alpha = -(b\alpha^۲ + d)$$

$$\Rightarrow |\alpha||a\alpha^۲ + c| = |b\alpha^۲ + d| \Rightarrow |a\alpha^۲ + c| \geq |b\alpha^۲ + d| \geq b\alpha^۲ + d$$

حال دقت کنید که بیش‌ترین مقداری که تابع $f(x)|ax + c|$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ می‌پذیرد، به ازای یکی از مقادیر انتهایی بازه است. و به عبارتی $f(x) \leq \max\{f(۰), f(۱)\} = \max\{|c|, |a + c|\}$. پس:

$$|a\alpha^۲ + c| \leq \max\{|c|, |a + c|\}$$

با استدلالی مشابه می‌توان گفت که تابع خطی $g(x) = bx + d$ نیز کم‌ترین مقدار خود را در یکی از نقاط انتهایی می‌پذیرد. پس:

$$b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

حال بنابر رابطه‌های بالا داریم:

$$\max\{|c|, |a + c|\} \geq |a\alpha^۲ + c| \geq b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

در نتیجه باید $\max\{|c|, |a + c|\} \geq \min\{d, b + d\}$ که با فرض مسئله در تناقض است، پس چنین αای وجود ندارد.

راه‌حل دوم. دقت کنید که

$$P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d = (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ + c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$$

اگر $x \notin \{-۱, ۰, ۱\}$، ثابت می‌کنیم:

الف. $(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$

ب. $c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$

برای اثبات ادعای الف، می‌دانیم که $۰ < |x| < ۱$، پس

$$(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ = x^۲((a + c)x + (b + d))$$

حال دقت کنید که:

$$b + d > |a + c \geq x(a + c)| \geq\Rightarrow (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$$

برای اثبات ادعای ب دقت کنید که $۱ - x^۲ > ۰$ و در نتیجه:

$$d > |c| > |xc| \geq -xc \Rightarrow cx + d > ۰ \Rightarrow (۱ - x^۲)(cx + d) > ۰ \Rightarrow c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲) > ۰$$

حال با جمع زدن رابطه‌های الف و ب به این نتیجه می‌رسیم که $P(x)$ ریشه‌ای در $[-۱,۱]$ ندارد، مگر احتمالاً در ۰، ۱+ و یا ۱− که این سه عدد را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$P(۰) = d > |c| \geq ۰$$

$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > a + c \Rightarrow P(-۱) > ۰$$

$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > -a - c \Rightarrow P(۱) > ۰$$

پس این نقاط هم ریشه‌ی $P(x)$ نیستند و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۵. زاویه‌ی $\angle BCT$ زاویه‌ای از مثلث متساوی‌الساقین BCE با زاویه‌ی خارجی $\angle ABC$ است، پس $\angle BCT = \frac{۱}{۲}\angle ABC$ و به طور مشابه $\angle CBT = \frac{۱}{۲}ACB$. پس:

$$\angle CTF = \angle BCT + \angle CBT = \frac{۱}{۲}\angle ABC + \angle ACB = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \angle BAC) = ۶۰^\circ$$

بنابراین چهارضلعی $ABTC$ محاطی است و در نتیجه $\angle EBF = \angle ACE = \angle AKE$. این نتیجه می‌دهد که $\angle ABF = ۱۸۰^\circ - \angle EBF = ۱۸۰^\circ - \angle AKE = \angle AKF$. پس چهارضلعی $ABKF$ محاطی است.
حال داریم که $\angle EBK = \angle CFK$ و $\angle BEK = \angle KCF$ و $BE = CF$، پس مثلث‌های KEB و KCF هم‌نهشت هستند و لذا $KE = KC$. به عنوان نتیجه دو کمان EK و KC برابر هستند و AK نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ خواهد بود.

۶. فرض کنید برای عدد طبیعی $n \geq i \geq ۲$، منظور از A_i مجموعه‌ی کلاس‌های iنفره باشد. نشان می‌دهیم که $|A_i| \leq \frac{n(n-۱)}{i(i-۱)}$. طبق فرض هر زیرمجموعه‌ی دو عضوی از دانش‌آموزان حداکثر در یک کلاس از کلاس‌های A_i می‌توانند با هم شرکت کنند، پس به عبارتی $\binom{n}{۲} \geq |A_i|\binom{i}{۲}$. پس $|A_i| \leq \frac{n(n-۱)}{i(i-۱)}$.
حال می‌دانیم که

$$m = |A_۲| + |A_۳| + \cdots + |A_n|$$

در نهایت با جای‌گذاری نامساوی به دست آمده در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m &\leq n(n-۱)\left(\frac{۱}{۲(۲-۱)} + \frac{۱}{۳(۳-۱)} + \cdots + \frac{۱}{n(n-۱)}\right) \\ &= n(n-۱)\left(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}\right) = n(n-۱)(۱ - \frac{۱}{n}) = (n-۱)^۲ \end{aligned}$$

و در نتیجه اثبات حکم به پایان می‌رسد.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۳ اردیبهشت ۱۳۸۸ — روز اول — زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دو است که قدرمطلق مقدار آن در سه نقطه‌ی ۱−، ۰ و ۱ کم‌تر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر $x \in [-۱,۱]$،

$$|p(x)| \leq \frac{۵}{۴}.$$

۲) یک باغ مربعی‌شکل را به یک شبکه‌ی ۵۰×۵۰ از قطعات ۱ متر در ۱ متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار و یک درخت سیب وجود دارد. به‌علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطعه را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.)
نشان دهید تعداد قطعات خالی از ۱۰۰۰ تا بیش‌تر نیست.

۳) فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه‌ی شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $P\widehat{A}Q \geq \widehat{A}$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۸ **روز دوم** زمان: چهار ساعت و نیم

۴) $n(n+۲)$ سرباز تازه‌کار در n ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد یا به یکی از چهار جهت یک قدم بر می‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در $n+۲$ ستون برابر، به شکل منظم، قرار گرفته‌اند، به نحوی که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.

۵) اعداد طبیعی $a_۱ < a_۲ < \ldots < a_n$ دارای این خاصیت هستند که برای هر i و j متمایز، $a_j - a_i$ بر a_i بخش‌پذیر است. نشان دهید برای هر $i < j$،

$$ia_j \leq ja_i.$$

۶) ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده‌است؛ ممکن است برخی کارتی نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاورش بدهد در صورتی که اگر شماره‌ی آن کارت i باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت $i-۱$، i و $i+۱$ تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند. (منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲ کارت شماره‌ی ۱ است!)

فرض کنید در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

---

۱. دقت کنید:

$$p(x)=ax^۲+bx+c=\frac{x(۱+x)}{۲}(a+b+c)-\frac{x(۱-x)}{۲}(a-b+c)+(۱-x^۲)c$$
$$=\frac{x(۱+x)}{۲}p(+۱)-\frac{x(۱-x)}{۲}p(-۱)+(۱-x^۲)p(۰)$$

اگر $۱\leq x\leq ۰$ باشد، آن‌گاه:

$$|ax^۲+bx+c|\leq\frac{x(۱+x)}{۲}+\frac{x(۱-x)}{۲}+(۱-x^۲)=\frac{۵}{۴}-(\frac{۱}{۲}-x)^۲\leq\frac{۵}{۴}$$

و اگر $۰\leq x\leq ۱-$:

$$|ax^۲+bx+c|\leq-\frac{x(۱+x)}{۲}-\frac{x(۱-x)}{۲}+(۱-x^۲)=\frac{۵}{۴}-(\frac{۱}{۲}+x)^۲\leq\frac{۵}{۴}$$

این نشان می‌دهد که برای هر x در بازه‌ی $[-۱,۱]$، $|p(x)|\leq\frac{۵}{۴}$. ضمناً با توجه به این نابرابری‌ها تساوی زمانی رخ می‌دهد که:

الف. $p(x)=\pm(x^۲-x-۱)$ در $x=+\frac{۱}{۲}$.

ب. $p(x)=\pm(x^۲+x-۱)$ در $x=-\frac{۱}{۲}$.

۲. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ به ترتیب نمایان‌گر تعداد درختان سیب، درختان انار، درختان هلو و خانه‌های خالی باشند. دقت کنید که هر خانه‌ی خالی، هر درخت هلو و هر درخت انار یک هم‌سایه‌ی سیب دارند. هم‌چنین با توجه به تعداد سیب‌ها که $a_۱$ است، حداکثر $۴a_۱$ زوج خانه‌ی هم‌سایه می‌توان یافت که یکی از آن‌ها درخت سیب باشد و دیگری درخت سیب نباشد. پس $۴a_۱\geq a_۲+a_۳+a_۴$. اگر شمارش مشابهی را برای تعداد زوج خانه‌های مجاوری که دقیقاً یکی از آن‌ها درخت انار و دیگری درخت هلو و یا خالی باشد انجام دهیم، می‌بینیم که هر خانه‌ی خالی و هر درخت هلو یک هم‌سایه‌ی انار دارد و از طرف دیگر با توجه به این که هر درخت انار یک هم‌سایه‌ی سیب دارد، حداکثر سه تا از هم‌سایه‌های یک درخت انار می‌توانند هلو و یا خالی باشند. در نتیجه حداکثر $۳a_۲$ زوج خانه‌ی مجاور با این خاصیت می‌توان یافت و لذا $۳a_۲\geq a_۳+a_۴$. با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $۲a_۳\geq a_۴$.

بنابراین:

$$\begin{aligned}
۲a_۳&\geq a_۴ &&\Rightarrow\quad a_۳\geq\tfrac{a_۴}{۲}\\
۳a_۲&\geq a_۳+a_۴\geq\tfrac{a_۴}{۲}+a_۴=\tfrac{۳}{۲}a_۴ &&\Rightarrow\quad a_۲\geq\tfrac{a_۴}{۲}\\
۴a_۱&\geq a_۲+a_۳+a_۴\geq\tfrac{a_۴}{۲}+\tfrac{a_۴}{۲}+a_۴=۲a_۴ &&\Rightarrow\quad a_۱\geq\tfrac{a_۴}{۲}
\end{aligned}$$

پس در کل با توجه به این که $a_۱+a_۲+a_۳+a_۴=۵۰\times۵۰=۲۵۰۰$ داریم:

$$۲۵۰۰=a_۱+a_۲+a_۳+a_۴\geq\frac{a_۴}{۲}+\frac{a_۴}{۲}+\frac{a_۴}{۲}+a_۴=\frac{۵}{۲}a_۴\Rightarrow ۱۰۰۰\geq a_۴$$

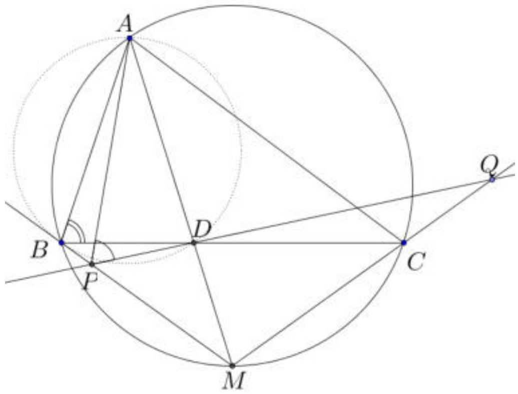
و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۳. با توجه به این که AM نیم‌ساز زاویه‌ی BAC است، داریم:

$$\angle DBM=\angle CBM=\angle MAC=\frac{\angle BAC}{۲}=\angle BAM$$

پس دایره‌ی محیطی مثلث ABD در B بر BM مماس است و در نتیجه نقطه‌ی P که روی این خط مماس قرار دارد، نمی‌تواند درون دایره باشد. بنابراین $\angle APQ = \angle APD \leq \angle ABD = \angle B$.(اگر T را نقطه‌ی دیگر تقاطع PD با دایره‌ی محیطی ABD بگیریم، زاویه‌ی $\angle ATD$ که برابر $\angle ABD$ است زاویه‌ی خارجی مثلث APT خواهد بود و بنابراین از $\angle APD$ کم‌تر نیست.
با استدلال کاملاً مشابه می‌توان فهمید $\angle AQP \leq \angle C$. پس در کل:

$$\angle PAQ = ۱۸۰^\circ - \angle APQ - \angle AQP \geq ۱۸۰^\circ - \angle B - \angle C = \angle A$$



۴. ادعا می‌کنیم این عمل برای عدد طبیعی $n > ۲$ امکان‌پذیر است، اگر و تنها اگر برای $n - ۲$ امکان‌پذیر باشد. فرض کنید برای بیان چهار جهت از چهار واژه‌ی "بالا"، "پایین"، "چپ" و "راست" استفاده کنیم. دقت کنید که اگر n ستون $n+۲$تایی بخواهند به $n+۲$ستون nتایی تبدیل شوند، نفرات سطر بالا باید حتماً یک واحد به پایین حرکت کنند و نفرات پایین باید حتماً یک واحد به بالا بروند. به همین ترتیب نفرات سمت راست باید یک قدم به سمت چپ بروند و نفرات سمت چپ یک واحد به سمت راست بیایند.(البته به غیر از نفر بالایی و پایینی این ستون‌ها که در ستون بالا و پایین هستند و حرکتشان توضیح داده شد.) حال به بقیه‌ی سربازها توجه کنید. آن‌ها شامل $n - ۲$ ستون، nتایی هستند که باید به n ستون $n - ۲$تایی تبدیل شوند. بنابراین ادعا ثابت می‌شود. بنابراین با تکرار چندباره‌ی این ادعا می‌توان دید که اگر n عددی زوج باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای $n = ۲$ قابل انجام باشد. هم‌چنین اگر n عددی فرد باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای $n = ۱$ قابل انجام باشد. این کار برای $n = ۱$ قابل انجام نیست، زیرا دو سرباز کناری هر دو تنها می‌توانند به خانه‌ی وسط بیایند و این امکان ندارد. اما در مورد $n = ۲$ به سادگی می‌توان دید که این کار قابل انجام است. پس این کار تنها زمانی ممکن است که n زوج باشد.

۵. برای هر زوج $i < j$ از اعداد طبیعی متمایز، می‌دانیم که $a_j - a_i | a_j$ و با توجه به اکیداً صعودی و طبیعی بودن a_iها:

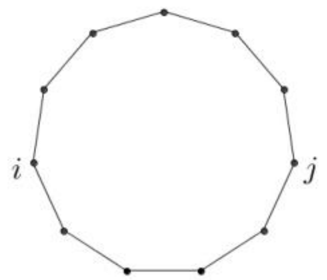
$$a_j > a_j - a_۱ > a_j - a_۲ > \cdots > a_j - a_i$$

از طرف دیگر همه‌ی جمله‌های بالا مقسوم‌علیه a_j هستند. بنابراین اگر $a_j > b_۱ > b_۲ > \cdots > b_k$ همه‌ی مقسوم‌علیه‌های a_j باشند، خواهیم داشت $a_j - a_i \leq b_i$. حال از آن‌جا که b_i، $i+۱$امین مقسوم‌علیه بزرگ

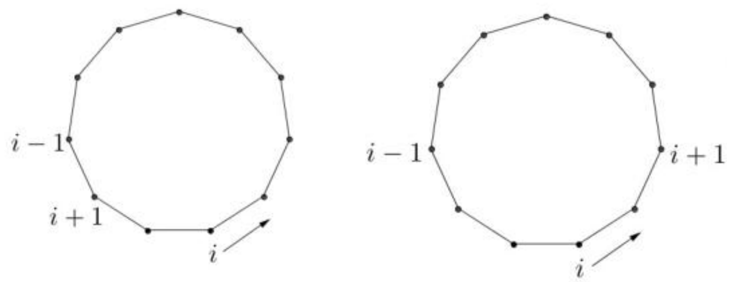
a_j است، $b_i \leq \frac{a_j}{i+۱}$ و بنابراین در کل:

$$a_j - a_i \leq b_i \leq \frac{a_j}{i+۱} \Rightarrow (i+۱)(a_j - a_i) \leq a_j \Rightarrow ia_j \leq (i+۱)a_i \leq ja_i$$

۶. ابتدا میز را به ۱۱ کمان برابر تقسیم کنید. حال اگر کارت‌های i و j در دو نقطه از جدول باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها را تعداد کمان‌های بین نقاط آن دو می‌گیریم(تعداد کمان‌های کم‌تر). به طور مثال در شکل زیر فاصله‌ی دو کارت i و j برابر ۵ است.



حال بعد از هر مرحله مجموع فاصله‌های کارت‌های با شماره‌های متوالی را محاسبه می‌کنیم.(دقت کنید که کارت ۱۱ با ۱ شماره‌ی متوالی دارند!) اگر محل کارت i در کمان کوچک‌تر بین $i+۱$ و $i-۱$ باشد، این مقدار تغییر نمی‌کند. (زیرا فاصله‌ی $i+۱$ و $i-۱$ تغییر نمی‌کند، اما در بین فاصله‌ی i و $i+۱$ و همین‌طور i و $i-۱$، از یکی یک واحد کم می‌شود و به دیگری یک واحد اضافه می‌گردد.) و در غیر این صورت دو واحد تغییر می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید.



مجموع فاصله تغییر نمی‌کند. دو واحد تغییر می‌کند.

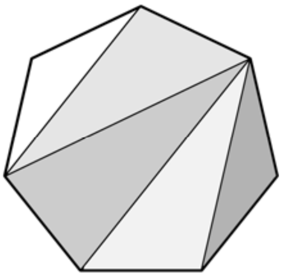
بنابراین زوجیت این مقدار همواره ثابت می‌ماند. در ابتدا این مقدار برابر ۱۱ است و اگر قرار باشد همه‌ی کارت‌ها در یک نقطه جمع شوند، این مقدار باید برابر صفر شود که امکان ندارد.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۷ — روز اول — زمان: چهار ساعت و نیم

۱) به چند طریق می‌توان $n-3$ قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً هم‌دیگر را داخل n ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده دست‌کم یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟



۲) فرض کنید I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC، متناظر با رأس A باشد و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. I_aB و I_aC، به ترتیب، $B'C'$ را در P و Q قطع می‌کنند و M نقطه‌ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

۳) a، b، c و d اعدادی حقیقی هستند و دست‌کم یکی از c و d صفر نیست. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر x، $f(x)\neq x$. نشان دهید اگر به ازای یک a، $f^{1387}(a)=a$، آنگاه برای هر x در دامنه‌ی f^{1387}، $f^{1387}(x)=x$. (f^n یعنی n بار ترکیب تابع f)

راه‌نمایی: نشان دهید برای هر تابع به شکل $g(x)=\dfrac{sx+t}{ux+v}$، اگر معادله‌ی $g(x)=x$ بیش از دو جواب داشته باشد آنگاه برای هر x، $g(x)=x$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

آدرس وب‌گاه باشگاه دانش‌پژوهان جوان: $www.ysc.ac.ir$

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

چهارشنبه، ۶ اردیبهشت ۱۳۸۷ | **روز دوم** | زمان: چهار ساعت و نیم

۴) نشان دهید تنها عدد طبیعی a، که برای هر n طبیعی $(a^n + ۱)۴$ مکعب کامل باشد، یک است.

۵) می‌خواهیم برای تلفن‌های یک شهر شماره انتخاب کنیم. شماره‌ها ده رقمی‌اند و از رقم صفر نباید در آن‌ها استفاده شود. هدف این است که از برخی از شماره‌ها استفاده نکنیم تا هر دو شماره‌ی موجود یا در بیش از یک رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند. بیش‌ترین تعداد شماره که می‌تواند استفاده شود چند تاست؟ انتخاب این بیش‌ترین تعداد شماره، به چند شکل ممکن است؟

۶) فرض کنید در مثلث ABC، H پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می‌کنیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به دست آیند. نشان دهید اگر O مرکز دایره‌ی محیطی ABC باشد و $AC = ۲\,OT$، آنگاه $AB = ۲\,OT'$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

آدرس وب‌گاه باشگاه دانش‌پژوهان جوان: $www.ysc.ac.ir$

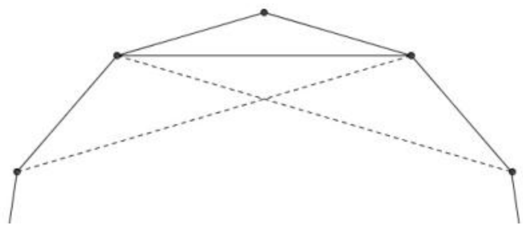
به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۷

۱. به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که هرگاه $n-۳$ قطر نامتقاطع از یک nضلعی محدب رسم شود، آن را به $n-۲$ مثلث تقسیم می‌کند. به این صورت که یکی از قطرهای رسم شده را در نظر بگیرید و nضلعی را از روی آن قطر به دو چندضلعی با تعداد ضلع‌های کم‌تر تقسیم کنید و به کمک استقرا حکم مورد نظر را نتیجه بگیرید. تنها حالت پایه‌ی $n=۳$ باقی می‌ماند که از آن‌جا که هیچ قطری رسم نشده است، چندضلعی به یک مثلث تقسیم می‌شود.

حال در مسئله‌ی اصلی هنگامی که $n>۳$ است هیچ‌کدام از مثلث‌ها نمی‌توانند با nضلعی سه ضلع مشترک داشته باشند و ضمناً هر مثلث حداقل یک و حداکثر دو ضلع مشترک با nضلعی دارد. با توجه به این که $n-۲$ مثلث و n ضلع داریم، دقیقاً دو تا از مثلث‌ها دو ضلع مشترک با nضلعی دارند و بقیه تنها یک ضلع مشترک دارا هستند.

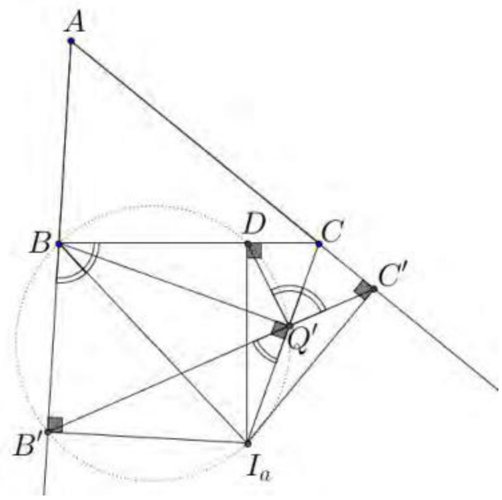
یکی از این دو مثلث را در نظر می‌گیریم. این مثلث می‌تواند یکی از n مثلثی باشد که دو ضلع مجاور از nضلعی را شامل هستند. حال سومین ضلع از این مثلث را در نظر بگیرید که حتماً یک قطر از چندضلعی است. مثلث دیگری که این قطر یکی از ضلع‌های آن است، می‌تواند یکی از دو مثلثی باشد که این قطر و یکی از دو ضلع nضلعی که مجاور ضلع‌های مثلث قبلی هستند را شامل است.(به شکل زیر دقت کنید.)



حال به همین ترتیب قطری که مثلث جدید شامل است را در نظر بگیرید. برای مثلث سوم هم با همین استدلال دو حالت داریم. با ادامه‌ی همین فرآیند برای هر مثلث جدید (به جز اولین و آخرین مثلث که به ترتیب n حالت و ۱ حالت داشتند) دو حالت محتمل است. اما دقت کنید که هر آرایش از مثلث‌ها دو بار شمرده شده است، چرا که در هر آرایش دو مثلث وجود دارد که با چندضلعی دارای دو ضلع مشترک است و شروع از هر کدام می‌تواند به همین آرایش منجر شود. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با $\frac{n\times ۲^{n-۴}}{۲}=n۲^{n-۵}$.

۲. D را نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC از مثلث بگیرید. در این صورت $CD=CC'$ چرا که دو مثلث $I_aC'C$ و I_aDC به دلیل داشتن یک زاویه‌ی ۹۰ درجه و دو ضلع برابر هم‌نهشت هستند. Q' را پای عمود وارد از B بر I_aC بگیرید. در این صورت مثلث‌های DCQ' و $C'CQ'$ هم‌نهشت هستند، زیرا $\angle Q'CD=\angle Q'CC'$ ، $Q'C=Q'C$ و $CD=CC'$. در نتیجه $\angle C'Q'C=\angle DQ'C$. از آن‌جا که زاویه‌های $\angle BQ'I_a$ و $\angle BDI_a$ قائمه هستند، چهارضلعی $BDQ'I_a$ محاطی است. در نتیجه $\angle DQ'C=\angle DBI_a$. ضمناً دقت کنید که BI_a نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle DBB'$ است

و لذا $\angle DBI_a = \angle B'BI_a$. قائمه بودن زاویه‌ی $\angle BB'I_a$ نتیجه می‌دهد که نقطه‌ی B' هم روی دایره‌ی محیطی چهارضلعی $BDQ'I_a$ قرار دارد، پس نتیجه می‌گیریم که $\angle B'BI_a = \angle B'Q'I_a$. با جمع‌بندی این رابطه‌ها می‌فهمیم که $\angle B'Q'I_a = \angle CQ'C'$ پس نقطه‌های B'، Q' و C' روی یک خط قرار دارند. در نتیجه نقطه‌ی Q' که محل تقاطع I_aC و $B'C'$ است همان نقطه‌ی Q است. پس در کل نشان دادیم که $BQ \perp I_aC$. مشابه همین استدلال نشان می‌دهد که $CP \perp I_aB$.



حال دقت کنید که CI نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی C است و در نتیجه بر CI_a که نیم‌ساز خارجی این زاویه است عمود می‌باشد. این نکته با توجه به این‌که $BQ \perp I_aC$ نشان می‌دهد که $BQ \parallel IC$ و مشابه همین نتیجه می‌شود که $CP \parallel BI$. پس چهارضلعی $BMCI$ یک متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه فاصله‌ی دو رأس M و I تا قطر BC مساوی است. اما فاصله‌ی I از BC برابر طول شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث است و بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۳. اگر $f^{۱۳۸۷}(a) = a$، آن‌گاه با اثر دادن تابع f روی دو طرف این تساوی می‌توان دید که
$$f^{۱۳۸۷}(f(a)) = f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f(a)$$

و دقت کنید که $f(a) \neq a$، پس $f(a)$ جوابی متمایز از a برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ است. با اعمال دوباره‌ی تابع f بر دو طرف عبارت بالا می‌توان دید که
$$f^{۱۳۸۷}(f(f(a))) = f^{۱۳۸۹}(a) = f(f(f^{۱۳۸۷}(a))) = f(f(a))$$

پس $f(f(a))$ هم جواب دیگری برای این معادله است. اما دقت کنید که $f(f(a)) \neq f(a)$. حال ادعا می‌کنیم که $f(f(a))$ و a هم متمایز هستند. در غیر این صورت اگر $f^{۲}(a) = a$ باشد، داریم:
$$f^{۱۳۸۸}(a) = f^{۱۳۸۶}(f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۶}(a) = f^{۱۳۸۴}(f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۴}(a) = \cdots = f^{۴}(a) = f^{۲}(f^{۲}(a)) = f^{۲}(a)$$

اما $f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f(a)$، پس باید $f^{۲}(a) = f(a)$ باشد که امکان ندارد. در نتیجه در کل سه جواب حقیقی متمایز برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ یافته‌ایم.
می‌توان به سادگی چک کرد که ترکیب دو تابع به فرم $\frac{ax+b}{cx+d}$ هم به همین فرم است(البته با a، b، c و

d متفاوت). این نتیجه می‌دهد که تابع $f^{۱۳۸۷}(x)$ تابعی به فرم $\frac{mx+n}{px+q}$ است که معادله‌ی $x = \frac{mx+n}{px+q}$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. جواب‌های این معادله به وضوح جواب‌های معادله‌ی $px^۲ + (q-m)x - n = ۰$ هم هستند که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر دو است. از آن‌جا که یک چندجمله‌ای ناصفر از درجه‌ی حداکثر دو، حداکثر دو جواب حقیقی دارد؛ این چندجمله‌ای باید متحد با صفر باشد که این نتیجه می‌دهد که $p = ۰$، $q = m$ و $n = ۰$. پس داریم $f^{۱۳۸۷}(x) = \frac{mx+n}{px+q} = \frac{mx}{m} = x$، و این یعنی برای هر عدد حقیقی x، $f^{۱۳۸۷}(x) = x$.

۴. راه‌حل اول. $۴(a^۳ + ۱)$ و $۴(a^۹ + ۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تقسیم آن‌ها یعنی $\frac{۴(a^۹+۱)}{۴(a^۳+۱)} = a^۶ - a^۳ + ۱$ هم مکعب کامل است. اگر $a > ۱$ باشد، $a^۶ - a^۳ + ۱ < a^۶ = (a^۲)^۳$ و از طرف دیگر $a^۶ - a^۳ + ۱ > a^۶ - ۳a^۴ + ۳a^۲ - ۱ = (a^۲ - ۱)^۳$، زیرا:

$$\begin{aligned} &۳a^۴ - a^۳ - ۳a^۲ + ۲ \\ &= (a^۴ - a^۳) + (۲a^۴ - ۳a^۲) + ۲ \\ &= a^۳(a-۱) + a^۲(۲a-۳) + ۲ > ۰ \end{aligned}$$

اما $(a^۲ - ۱)^۳$ و $(a^۲)^۳$ دو مکعب کامل متوالی هستند و عددی که بین آن‌ها قرار دارد نمی‌تواند مکعب کامل باشد. پس a مجبور است برابر یک باشد که در این صورت هم همه‌ی جمله‌ها برابر ۸ و در نتیجه مکعب کامل هستند.

راه‌حل دوم. اگر $a > ۱$ باشد، $۴(a^n + ۱)$ تابعی اکیداً صعودی بر حسب n است. حال دقت کنید که $۴(a^{n+۳} + ۱)$ و همین‌طور $a^۳ \times ۴(a^n + ۱) = ۴(a^{n+۳} + a^۳)$ مکعب کامل هستند. اما تفاضل این دو مقدار برابر $۴a^۳ - ۴$ است که مستقل از n است. این یعنی تفاضل دو مکعب کامل که هر دو با افزایش n زیاد می‌شوند مقداری ثابت است که امکان ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که a باید برابر یک باشد.

راه‌حل سوم. از لم زیر که حالت خاصی از گزاره‌ای است که به لم دو خط معروف است استفاده می‌کنیم:

لم. فرض کنید x عددی طبیعی و p عددی اول و فرد باشد که $p|x+۱$. اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، تعداد عوامل p در $x^n + ۱$ برابر تعداد عوامل p در $x + ۱$ به اضافه‌ی تعداد عوامل p در n است.

اثبات. تعداد عوامل p در عدد طبیعی m را با $||m||_p$ نمایش می‌دهیم و حکم را به استقرا روی $||n||_p$ ثابت می‌کنیم.

اگر n بر p بخش‌پذیر نباشد، با توجه به این که $(x^n + ۱) = (x+۱)(x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱)$ باید نشان دهیم که $p \nmid x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱$. برای این منظور دقت کنید که:

$$x^{n-۱} - x^{n-۲} + \cdots - x + ۱ \equiv (-۱)^{n-۱} - (-۱)^{n-۲} + \cdots - (-۱) + ۱ \equiv n \not\equiv ۰ \pmod p$$

اگر n تنها یک عامل p داشته باشد، باید نشان دهیم که تعداد عوامل p در $x^n + ۱$ یکی بیش‌تر از عوامل p در $x + ۱$ است. در این حالت می‌توان نوشت $n = pm$ که m بر p بخش‌پذیر نیست. حال طبق استدلال قسمت قبل

$$||x^{mp} + ۱||_p = ||(x^p)^m + ۱||_p = ||x^p + ۱||_p$$

پس کافی است حکم این قسمت را برای حالت $n=p$ ثابت کنیم. از آن‌جا که $x+۱$ بر p بخش‌پذیر است می‌توان عدد صحیح t یافت که $x=tp-۱$.

$$x^p+۱=(tp-۱)^p+۱=\sum_{i=۱}^{p}\binom{p}{i}(tp)^i(-۱)^{p-i}=tp\left(\sum_{i=۲}^{p}\binom{p}{i}(tp)^{i-۱}(-۱)^{p-i}+p\right)=(x+۱)(\cdots)$$

از آن‌جا که تمام $\binom{p}{i}$ها بر p بخش‌پذیر هستند، عبارت داخل پرانتز تنها یک عامل p دارد. این نشان می‌دهد که تعداد عوامل p در $x^p+۱$ یکی بیش‌تر از عوامل p در $x+۱$ است. حال فرض کنید که حکم برای اعدادی که k عامل p دارند ثابت شده باشد و n، $k+۱$ عامل p داشته باشد، در این صورت عدد طبیعی فرد m وجود دارد که $n=mp$ و m، k عامل p دارد. حال با توجه به فرض استقرا داریم:

$$||x^{mp}+۱||_p=||(x^p)^m+۱||_p=||x^p+۱||+||m||_p=||x+۱||_p+||p||_p+||m||_p=||x+۱||_p+||mp||_p$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی برقرار است.

□

حال دقت کنید که $۴(a^۳+۱)=۴(a+۱)(a^۲-a+۱)$. اگر $a>۱$ باشد، $a^۲-a+۱$ عدد فردی بزرگ‌تر از یک است، پس عامل اول فردی مثل p دارد. با استفاده از لم بالا داریم:

$$||۴(a^{۳p}+۱)||_p=||a^{۳p}+۱||_p=||a^۳+۱||_p+||p||_p=||۴(a^۳+۱)||_p+۱$$

اما $۴(a^۳+۱)$ و $۴(a^{۳p}+۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تعداد عوامل p در آن‌ها باید مضرب ۳ باشد که چون اختلاف این تعداد برابر یک است امکان ندارد. در نتیجه a نمی‌تواند بیش‌تر از ۱ باشد و در نتیجه تنها $a=۱$ ممکن است.

۵. مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ را S می‌نامیم. مسئله را برای شماره‌های با هر تعداد رقم مطرح می‌کنیم و سعی می‌کنیم حداکثر تعداد شماره‌های ممکن با n رقم را پیدا کنیم که هر دو شماره‌ی انتخاب‌شده یا حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم حداقل دو واحد اختلاف داشته باشند. می‌توان یک شماره‌ی n رقمی با ارقام موجود در مجموعه‌ی S را به صورت یک nتایی مرتب از اعضای مجموعه‌ی S دید که آن را با S^n نمایش می‌دهیم. به استقرا روی n نشان می‌دهیم حداکثر تعداد اعضایی از S^n که می‌توانند انتخاب شوند تا شرط مسئله را برآورده کنند برابر $\frac{۹^n+۱}{۲}$ است. حکم برای حالت $n=۱$ به سادگی و با اندکی چک‌کردن ساده به دست می‌آید.(حتی می‌شد $n=۰$ را به عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت!) حال فرض کنید که حکم برای $n-۱$ برقرار باشد و ما می‌خواهیم حداکثر nتایی‌هایی مرتب با خاصیت مطلوب را بیابیم. اعضای S^n را با توجه به عضو اول آن‌ها می‌توان به ۹ دسته تقسیم کرد. اعضایی که عضو اول آن‌ها ۱ است را $A_۱$، آن‌هایی که عضو اول آن‌ها ۲ است را $A_۲$ و... واضح است که برای هر $i\in S$ تعداد اعضای A_i برابر $۹^{n-۱}$ است(برای هر جای‌گاه یکی از عناصر S باید انتخاب شود و بنابراین ۹ حالت داریم.) بنابراین تعداد عناصر S^n هم برابر ۹^n خواهد بود. حال دقت کنید که هر عنصر $A_۱$ را می‌توان با تغییر عضو اولش از یک به دو به عنصری از $A_۲$ تبدیل کرد و بالعکس. بنابراین هر عضو از $A_۱$ را با یک عضو از $A_۲$ جفت می‌شود، به گونه‌ای که تنها در رقم اول تفاوت داشته باشند. توجه کنید

که از آن‌جا که دو شماره‌ی یک جفت در یک رقم و آن هم تنها یک واحد اختلاف دارند، نمی‌توانند هر دو جزء شماره‌های انتخابی باشند. بنابراین از هر جفت معرفی شده حداکثر یک عضو انتخاب می‌شود و در نتیجه تعداد اعضای انتخابی از $A_1 \cup A_2$ حداکثر برابر $\frac{|A_1|+|A_2|}{2} = 9^{n-1}$ است. به همین ترتیب تعداد اعضای انتخابی از $A_3 \cup A_4$، $A_5 \cup A_6$ و $A_7 \cup A_8$ هم حداکثر همین 9^{n-1} است. اما در مورد A_9 دقت کنید که رقم اول تمام اعضای A_9 یکسان است و بنابراین اگر اختلافی در دو عنصر انتخاب‌شده باشد، تفاوت در $n-1$ رقم بعدی است. دقت کنید که یک تناظر بین اعضای S^{n-1} و A_9 با اضافه کردن و یا برداشتن رقم ۹ از ابتدای شماره وجود دارد. بنابراین طبق فرض استقرا حداکثر $\frac{9^{n-1}+1}{2}$تا از اعضای A_9 را می‌توان انتخاب کرد. بنابراین در نهایت تعداد کل شماره‌های انتخابی حداکثر برابر است با:

$$9^{n-1} + 9^{n-1} + 9^{n-1} + 9^{n-1} + \frac{9^{n-1}+1}{2} = \frac{9 \times 9^{n-1}+1}{2} = \frac{9^n+1}{2}$$

بنابراین اثبات استقرا به پایان می‌رسد. دقت کنید که اگر همه‌ی nتایی‌هایی که زوجیت مجموع ارقام‌شان با n یکی است را انتخاب کنیم تعدادشان برابر همین مقدار حداکثر است. از طرفی اگر دو شماره‌ی متفاوت با این خاصیت را در نظر بگیریم، نمی‌توانند تنها در یک شماره و آن هم یک واحد اختلاف داشته باشند، زیرا در این صورت زوجیت مجموع ارقام آن‌ها متفاوت خواهد شد. بنابراین می‌توان به تعداد حداکثر معرفی‌شده عضو انتخاب کرد.

در ادامه نشان می‌دهیم که تنها یک راه (همین راه بالا) برای انتخاب $\frac{9^n+1}{2}$ شماره‌ی nرقمی با خاصیت خواسته شده وجود دارد. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. باز هم صحت گزاره در حالت $n=1$ با یک بررسی ساده قابل چک‌کردن است.(در این‌جا هم می‌توان $n=0$ را به عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت.) فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار باشد. طبق بالا برای رسیدن به حداکثر باید از A_9، $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ عضو انتخاب شود که طبق فرض استقرا تنها به یک صورت امکان دارد.(یادآوری می‌کنیم که اعضای A_9 همان اعضای S^{n-1} هستند که یک رقم ۹ به ابتدای آن‌ها اضافه شده است.) دقت کنید که اعضایی که انتخاب می‌شوند دقیقاً اعضایی از A_9 هستند که مجموع ارقام آن‌ها زوجیت متفاوتی با $n-1$ و بنابراین زوجیت یکسانی با n دارد.(زیرا با اضافه شدن رقم ۹ به ابتدای شماره زوجیت مجموع رقم‌ها تغییر می‌کند.) حال مشابه جفت کردنی که در مورد اعضای A_1 و A_2 در بالا اتفاق افتاد می‌توان اعضای A_8 و A_9 را هم با یک‌دیگر جفت کرد، به گونه‌ای که اعضای هر جفت تنها در رقم اول متفاوت باشند. برای رسیدن به حداکثر بالا باید از هر جفت دقیقاً یک عضو انتخاب شود. اما در $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ تا از جفت‌ها شماره‌ای که رقم اولش ۹ بود انتخاب شده است. بنابراین از مابقی زوج‌ها باید عنصری از A_8 انتخاب شود که باز هم دارای این خاصیت است که زوجیت مجموع ارقامش با n یکی است. در ادامه اعضای A_8 و A_7 را با هم جفت می‌کنیم و استدلال قبلی را این بار برای این دو تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این استدلال تا رسیدن به A_1 می‌بینیم که همه‌ی اعداد انتخاب‌شده باید به صورت مثالی که گفته شد باشند و بنابراین یک راه یکتا برای انتخاب این تعداد شماره وجود دارد.

۶. ابتدا باید این فرض را به صورت مسئله اضافه کرد که زاویه‌ی $\angle B$ قائمه نیست!
با استفاده از روابط مربوط به قوت نقطه‌ی T نسبت به دایره‌ی محیطی ABC می‌فهمیم $R^2 - OT^2 =$

$TA.TB$ که R شعاع دایره است. (این نتیجه را می‌شد با استفاده از رابطه‌ی استوارت در مثلث OAB و قاطع OT هم به دست آورد.) با توجه به تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ATH و BTH می‌توان نتیجه گرفت که $TA.TB = TH^۲$ و لذا:

$$OT^۲ = R^۲ - TH^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲(\angle B)$$

با استدلال‌های کاملاً مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $(OT')^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲(\angle C)$. دقت کنید که تا کنون از فرض $AC = ۲OT$ استفاده نکرده‌ایم. حال اگر این رابطه برقرار باشد، داریم:

$$OT = \frac{۱}{۲}AC = R.\sin(\angle B) \Rightarrow R^۲\sin^۲(\angle B) = R^۲ - AH^۲\cos^۲(\angle B) \Rightarrow R^۲ = AH^۲$$

پس طول ارتفاع AH برابر طول شعاع دایره یعنی R است.(دقت کنید که در این‌جا از قائمه نبودن $\angle B$ و در نتیجه صفر نبودن کسینوسش استفاده کردیم.) حال اگر روابط مشابهی را برای پاره‌خط OT' بنویسیم حکم نتیجه می‌شود:

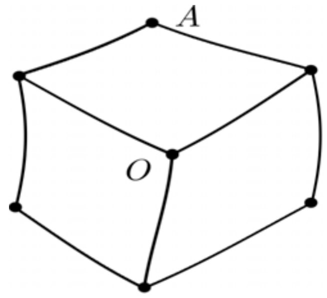
$$(OT')^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲(\angle C) = R^۲(۱ - \cos^۲(\angle C)) = R^۲.\sin^۲\angle C$$
$$\Rightarrow \quad OT' = R.\sin(\angle C) = \frac{۱}{۲} \times ۲R.\sin(\angle C) = \frac{۱}{۲}AB$$

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

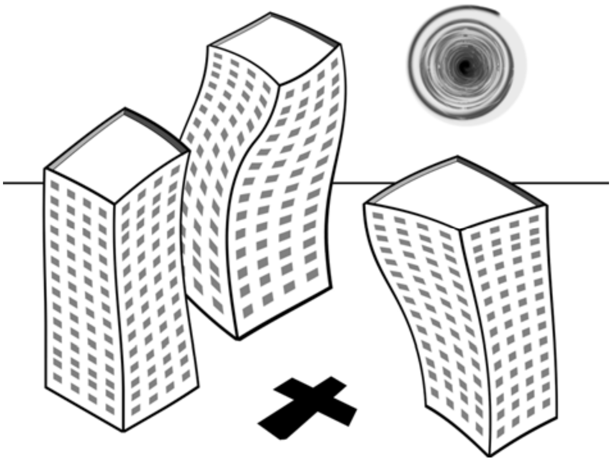
سه‌شنبه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۶ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

۱) در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD=AM$. محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیم‌ساز زاویه‌ی ACB است.



۲) دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از O به A؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n+1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند.)

۳) در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از ۴۵درجه بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان‌های قبلی به هم مشرف نباشند می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ای افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمودی بر روی صفحه در نظر بگیرید.



بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

چهارشنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۶ **روز دوم** زمان: چهار ساعت و نیم

۴) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

۵) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی C_1 را، به ترتیب، N و N' می‌نامیم. نشان دهید

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

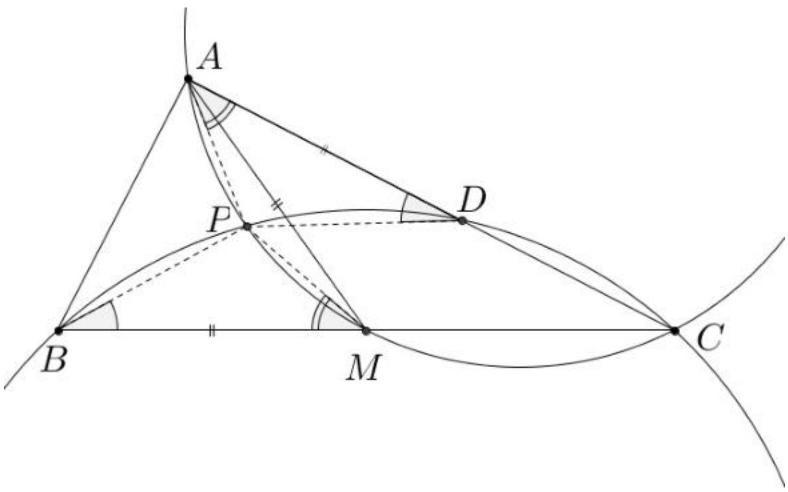
۶) فرهاد برای جشنواره خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n دقیقاً یکی از سه عدد n، $2n$ و $3n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید عدد ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۶

۱. از آن‌جا که نقطه‌های B، P، D و C روی یک دایره قرار دارند نتیجه می‌گیریم $\angle PBC = \angle ADP$. هم‌چنین نقطه‌های A، P، M و C هم‌دایره هستند، درنتیجه $\angle CAP = \angle PMB$. از آن‌جایی که مثلث ABC قائم‌الزاویه است، میانه‌ی وارد بر وتر (AM) نصف وتر است. پس $AM = MB$ و لذا $BM = AD$. از نتایج بالا به دست می‌آید که دو مثلث PMB و PAD با یک‌دیگر هم‌نهشت هستند. پس طول ارتفاع رسم‌شده از P در این دو مثلث برابر است که نتیجه می‌دهد نقطه‌ی P از دو ضلع زاویه‌ی $\angle ACB$ به یک فاصله است و در نتیجه روی نیم‌ساز این زاویه قرار دارد.



۲. راه‌حل اول. فرض کنید a_n تعداد مسیرهای به طول n از O به خودش(یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به خودش)، و b_n تعداد مسیرهای به طول n از O به A باشد (یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به رأس غیرمجاور در یک وجه).
یک مسیر از O به خودش را در نظر بگیرید. به $n-1$امین رأس این مسیر توجه کنید. طبق شرط مسئله این رأس باید خود O و یا رأسی باشد که فاصله‌اش از O برابر ۲ است. می‌دانیم که فاصله‌ی سه رأس از O برابر با ۲ است و هم‌چنین تعداد مسیرهای به طول دو بین دو رأس که در یک وجه روبه‌رو به یک قطر هستند برابر ۲ و تعداد مسیرهای به طول ۲ از یک رأس به خودش برابر ۳ است. در نتیجه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_n = ۲\left(b_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}\right) + ۳a_{n-۲}$$

به همین ترتیب به سادگی به دست می‌آید که:

$$b_n = ۲\left(a_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}\right) + ۳b_{n-۲}$$

با کم کردن این دو رابطه از یک‌دیگر داریم:

$$a_n - b_n = a_{n-۲} - b_{n-۲}$$

در نتیجه:

$$a_{۱۳۸۶} - b_{۱۳۸۶} = a_{۱۳۸۴} - b_{۱۳۸۴} = \ldots = a_{۰} - b_{۰} = ۱$$

بنابراین $a_{۱۳۸۶} > b_{۱۳۸۶}$.

راه‌حل دوم. چهار رأس از رئوس مکعب روی عمود منصف OA واقع هستند. این چهار رأس را رئوس میانی می‌گوییم. هر مسیر به طول ۱۳۸۶ از O به A از یکی از این رئوس میانی می‌گذرد. حال با فرآیند زیر از هر مسیر O به A مسیری از O به O می‌سازیم.

بعد از اولین باری که مسیر از یک رأس میانی عبور کرد، قرینه‌ی حرکت‌هایی که انجام داده‌ایم را نسبت به صفحه‌ی عمود منصف OA انجام می‌دهیم تا این بار به نقطه‌ی O برسیم.

پس هر مسیر از O به A به مسیری یکتا از O به O تبدیل می‌شود. دقت کنید که از آن‌جا که می‌توان عکس این کار را انجام داد هیچ دو مسیری به یک مسیر تبدیل نمی‌شود. پس تعداد مسیرهای از O به O بیش‌تر یا مساوی مسیرهای O به A است. اما دقت کنید که مسیری که از تعدادی پایین و سپس بالا رفتن از رأس O تشکیل شده است هیچ‌گاه از رئوس میانی نمی‌گذرد و بنابراین تبدیل یافته‌ی هیچ مسیری از O به A نیست.، بنابراین در کل تعداد مسیرهای از O به O بیش‌تر است.

۳. فرض کنید ارتفاع ساختمان در نقطه‌ی X از صفحه را با h_X نمایش دهیم. اگر ساختمان‌های بناشده در دو نقطه‌ی A و B بر یک‌دیگر مشرف نباشند، با توجه به تعریف مشرف بودن این معادل آن است که زاویه‌ای که خط واصل بین دو سر ساختمان‌ها می‌سازند با زمین کم‌تر یا مساوی ۴۵° باشد. اگر این زاویه را θ بنامیم، داریم:

$$۱ = |\tan(۴۵^\circ)| \geq |\tan\theta| = \frac{|h_A - h_B|}{|A - B|} \Leftrightarrow |h_B - h_A| \leq |B - A|$$

که منظور از $|B - A|$ فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B در صفحه‌ی شهر است. فرض کنید که نقطه‌ای که می‌خواهیم در آن ساختمان جدید را بنا کنیم، نقطه‌ی P باشد و ارتفاع ساختمان مورد نظر را با h نمایش‌دهیم. شرط مشرف نبودن هیچ دو ساختمانی بعد از بنای این ساختمان ایجاب می‌کند که بعد از بنای این ساختمان برای هر ساختمان دیگر مثل ساختمان نقطه‌ی A داشته باشیم $|h - h_A| \leq |P - A|$ و معادلاً $h \in [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$.

کافی است نشان دهیم که اشتراک این بازه‌ها برای ساختمان‌های مختلف شامل نقطه‌ای مثبت است، زیرا در این صورت h را برابر این نقطه می‌گیریم و بنابراین همه‌ی شرط‌های مورد نیاز برای مشرف نبودن‌ها برآورده می‌شود.

h را برابر کوچک‌ترین عدد در بین کران بالایی بازه‌های بالا برای ساختمان‌های مختلف بگیرید(دقت کنید که از آن‌جا که تعداد ساختمان‌های شهر متناهی است، حتماً کوچک‌ترین عددی وجود دارد). فرض کنید این عدد مربوط به ساختمانی باشد که در نقطه‌ی B بنا شده است. پس $h = h_B + |P - B|$.

مثبت بودن این عدد واضح است. حال باید نشان دهیم که این عدد در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که این عدد در بازه‌ی مربوط به ساختمان A نباشد.

$$h \notin [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$$

با توجه به این که h کوچک‌ترین کران بالایی در بین کران بالای بازه‌ها بود، تنها حالت ممکن برای این که h در این بازه نباشد، این است که h از کران پایین آن کم‌تر باشد.($h < -|p-A|+h_A$) اما این با توجه به نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که:

$$h_B + |P-B| < -|P-A| + h_A \Rightarrow h_A - h_B > |P-A| + |P-B| \geq |A-B|$$

پس $|h_A - h_B| > |A-B|$ و بنابراین این دو ساختمان قبلاً به هم مشرف بوده‌اند که خلاف فرض مسئله است. این تناقض نشان می‌دهد که h معرفی‌شده در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۴. . برای اثبات حکم کافی است که به ازای هر عدد طبیعی n، n عدد طبیعی با شرایط مسئله بیابیم. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$۱^۳, ۲^۳, \ldots, n^۳$$

می‌دانیم که هر کدام از این اعداد مکعب کامل هستند. در نتیجه حاصل‌ضرب آن‌ها نیز مکعب کامل است. همچنین به کمک استقرا اثبات می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ است و در نتیجه مربع کامل است. این حکم برای $n = ۱$ به وضوح درست است. حال فرض کنید که حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد، یعنی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + (n-۱)^۳ = \left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲$$

برای نتیجه گرفتن حکم در حالت n باید نشان دهیم که:

$$\left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \left(\frac{n\,(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

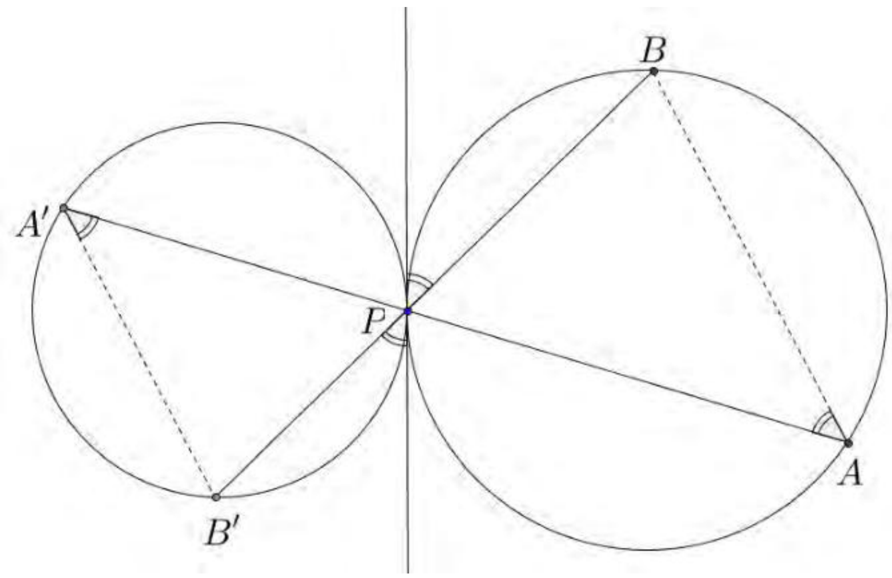
که این هم به سادگی قابل بررسی است:

$$\left(\frac{n\,(n-۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \frac{n^۴ - ۲n^۳ + n^۲}{۴} = \left(\frac{n\,(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۵. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ در P مماس خارجی باشند. دو قاطع گذرا از P، به ترتیب $C_۱$ را در A و B، و $C_۲$ را در A' و B' قطع می‌کند(برای بار دوم). در این صورت دو مثلث ABP و $A'B'P$ متشابه هستند.



اثبات.

مماس مشترک دو دایره در P را رسم می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی $\angle PAB$ با زاویه‌ی ظلی به رأس P که مربوط به کمان BP است برابر است.(کمانی که شامل A نیست.) این زاویه‌ی ظلی با زاویه‌ی ظلی مربوط به کمان $B'P$ در $C_۲$ با رأس P متقابل به رأس است و لذا با هم برابر هستند. در نهایت این زاویه‌ی ظلی جدید هم با زاویه‌ی $\angle PA'B'$ که روبه‌رو به همین کمان است برابر است. پس در کل $\angle PA'B' = \angle PAB$. با استدلال کاملاً مشابه $\angle PBA = \angle P'B'A'$ و بنابراین حکم اثبات می‌شود. $\square$

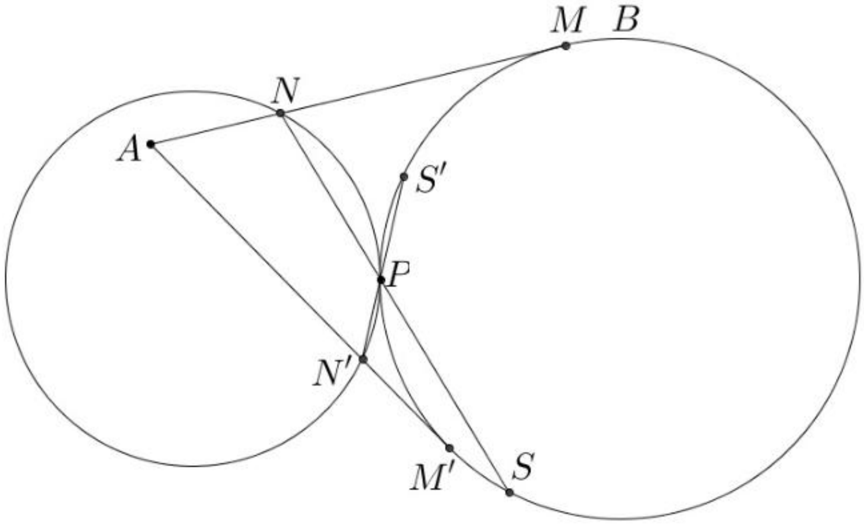
فرض کنید S و S' به ترتیب، محل تقاطع دوم NP و $N'P$ با دایره‌ی $C_۲$ باشند. در این صورت با توجه به این که $N'M'$ و NM بر $C_۲$ مماس هستند، برای قوت N و N' نسبت به $C_۲$ می‌توان نوشت:

$$NM^۲ = NP.NS, \quad N'M'^۲ = N'P.N'S'$$

حال دقت کنید که طبق لم بالا دو مثلث PSS' و PNN' متشابه هستند و لذا $\frac{N'P}{PS'} = \frac{NP}{PS}$ که این نتیجه می‌دهد $\frac{N'P}{N'S'} = \frac{NP}{NS}$. حال با ترکیب این نتایج داریم:

$$\left(\frac{NM}{N'M'}\right)^۲ = \frac{NM^۲}{N'M'^۲} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NS}{N'S'} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NP}{N'P} = \left(\frac{NP}{N'P}\right)^۲$$

در نهایت گرفتن جذر از دو طرف حکم را نتیجه می‌دهد.



۶. برای حل سؤال ابتدا دو لم را ثابت می‌کنیم:

لم ۱. اگر n عددی طبیعی باشد و $۶n$ چاپ شود، n نیز چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات کاملاً سرراست است.

بین سه عدد $۲n$، $۴n$ و $۶n$، عدد $۶n$ چاپ شده است، پس $۲n$ و $۴n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۳n$، $۶n$ و $۹n$، عدد $۶n$ چاپ شده است، پس $۳n$ و $۹n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد n، $۲n$ و $۳n$، عددهای $۳n$ و $۲n$ چاپ نمی‌شوند، پس n باید چاپ شود.

□

لم ۲. اگر n عددی طبیعی باشد و $۲n$ چاپ شود، $۸n$ چاپ نمی‌شود ولی $۱۶n$ چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات این لم هم مشابه لم قبلی است.

بین سه عدد n، $۲n$ و $۳n$، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس n و $۳n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۲n$، $۴n$ و $۶n$، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۳n$، $۶n$ و $۹n$، عددهای $۳n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۹n$ باید چاپ شود.

بین سه عدد $۹n$، $۱۸n$ و $۲۷n$، عدد $۹n$ چاپ شده است، پس $۱۸n$ و $۲۷n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۶n$، $۱۲n$ و $۱۸n$، عددهای $۶n$ و $۱۸n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۲n$ باید چاپ شود.

بین سه عدد $۴n$، $۸n$ و $۱۲n$، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۸n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۱۲n$، $۲۴n$ و $۳۶n$، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۲۴n$ و $۳۶n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۸n$، $۱۶n$ و $۲۴n$، عددهای $۸n$ و $۲۴n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۶n$ باید چاپ شود.

□

حال در مورد مسئله‌ی اصلی به برهان خلف فرض کنید $۱۳۸۲۴ = ۲^۹ \times ۳^۳$ چاپ شود. با سه بار استفاده از لم ۱ این نتیجه می‌دهد که باید عدد ۶۴ هم چاپ بشود. از طرف دیگر با توجه به این که ۲ چاپ شده است، طبق لم ۲ عدد ۱۶ هم باید چاپ شود. استفاده‌ی دوباره از لم ۲ نتیجه می‌دهد که $۶۴ = ۴ \times ۱۶$ چاپ نمی‌شود که با صحبت‌های بالا متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که ۱۳۸۲۴ نباید چاپ بشود.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز اول

---

۱. فرض کنید دایره‌ی $C_۲$ از مرکز دایره‌ی $C_۱$ گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دل‌خواهی از $C_۱$ و A' و B' محل تقاطع خط‌های AM و BN با دایره‌ی $C_۲$ باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایره است.

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی $P(x,y)$ را بیابید که برای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$P(x+y,x-y)=۲P(x,y)$$

۳. در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رؤیت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k>۱$)، دست‌کم دوتایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k-۱$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستاره‌ی iام در آسمان دیده می‌شود بازه‌ی بسته‌ی $[a_i,b_i]$ بنامید که در آن $a_i<b_i$).

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز دوم

۴. الف) عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn+1$ بر $m+n$ بخش‌پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m,n>2$ ثابت کنید دنباله‌ی $(a_0,a_1,\dots,a_k)$ از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ موجود است که $a_0=m$ و $a_k=n$ و برای هر $(i=0,1,\dots,k-1)$ داریم

$$a_i+a_{i+1}\,|\,a_ia_{i+1}+1$$

۵. نقاط A، B، C و D با همین ترتیب، روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M که $\frac{MA}{MB}=\frac{MD}{MC}$ چهار تاست و به علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمود هستند.

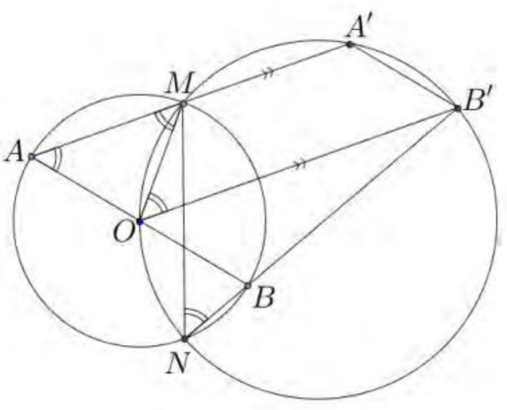
۶. تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. سپس دو کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند. بعد سه کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند و الی آخر. پس از این‌که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعداد جابه‌جایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضع اول برمی‌گردند.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۵

۱. مرکز دایره‌ی C_1 را O نام‌گذاری کنید. کافی است نشان دهیم $MA' \parallel OB'$. زیرا در این صورت چهارضلعی محاطی با رئوس M، O، A' و B' یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین خواهد بود و در نتیجه‌ی آن $MO = A'B'$ و حکم ثابت می‌شود. برای اثبات توازی MA' و OB' هم داریم:

$$\angle OMA = \angle OAM = \angle BAM = \angle BNM = \angle B'NM = \angle B'OM \Rightarrow B'O \parallel MA'$$



۲. با دو مرتبه استفاده از فرض مسئله داریم:

$$P(x,y) = ۲P(\frac{x+y}{۲}, \frac{x-y}{۲}) = ۴P(\frac{\frac{x+y}{۲}+\frac{x-y}{۲}}{۲}, \frac{\frac{x+y}{۲}-\frac{x-y}{۲}}{۲}) = ۴P(\frac{x}{۲}, \frac{y}{۲})$$

حال دقت کنید که اگر ضریب جمله‌ی $x^i y^j$ در $P(x,y)$ برابر A باشد، ضریب آن در $۴P(\frac{x}{۲}, \frac{y}{۲})$ برابر $۴A \times ۲^{-i-j}$ است و بنابراین در جملات با ضریب ناصفر باید $i + j = ۲$ باشد، یعنی $P(x,y)$ می‌تواند شامل سه جمله‌ی $x^۲$، $y^۲$ و xy باشد.

اگر $P(x,y) = ax^۲ + bxy + cy^۲$، با توجه به رابطه‌ی صورت مسئله خواهیم داشت:

$$۲P(x,y) = ۲ax^۲ + ۲bxy + ۲cy^۲ = P(x+y, x-y) = (a+b+c)x^۲ + ۲(a-c)xy + (a+c-b)y^۲$$

پس $a + b + c = ۲a$، $۲(a-c) = ۲b$ و $a + c - b = ۲c$ که از هر سه نتیجه می‌شود $a = b + c$ پس چندجمله‌ای جواب باید به فرم $P(x,y) = (b+c)x^۲ + bxy + cy^۲$ باشد که به راحتی می‌توان چک کرد که این چندجمله‌ای در صورت مسئله صرق می‌کند.

۳. حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. پایه‌ی استقرا در پایان ثابت می‌کنیم. برای گام استقرا فرض کنید b_1 کوچک‌ترین عدد در بین b_iها باشد. ادعا می‌کنیم اگر ستاره‌ی مربوط به بازه‌ی $[a_1, b_1]$(که آن را در طول راه‌حل ستاره‌ی ۱ می‌نامیم) و همه‌ی ستاره‌هایی که با آن لحظه‌ای در آسمان دیده شده اند را در نظر نگیریم، فرض مسئله برای ستاره‌های باقی‌مانده و $k - ۱$ برقرار است. برای این منظور $k - ۱$ ستاره‌ی دل‌خواه را از بین ستاره‌هایی در نظر بگیرید که در هیچ لحظه‌ای با ستاره‌ی ۱ در آسمان نبوده‌اند. این $k - ۱$ ستاره به همراه ستاره‌ی ۱، k ستاره هستند، پس طبق فرض مسئله لحظه‌ای وجود دارد که دو تا از

آن‌ها در آسمان با هم دیده می‌شوند. دقت کنید که ستاره‌ی ۱ نمی‌تواند در بین این دو ستاره باشد، پس در نهایت در بین $k-1$ ستاره‌ی اولیه دو ستاره یافت می‌شدند که در یک زمان در آسمان ظاهر بودند و فرض مسئله برای $k-1$ برقرار است. حال طبق استقرا می‌توان $k-2$ عکس گرفت به طوری که همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره‌ی ۱ در آسمان دیده نشده‌اند دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شوند. حال اگر در لحظه‌ی b_1 هم عکسی بگیریم، همه‌ی ستاره‌هایی که با ستاره‌ی ۱ اشتراک دارند در این عکس دیده می‌شوند، چرا که b_1 کوچک‌ترین مقدار در بین b_iها فرض شده بود و لذا هر بازه‌ی دیگری که با $[a_1, b_1]$ اشتراک دارد، باید شامل b_1 باشد.

در مورد پایه‌ی استقرا، استدلال قسمت پایانی بند بالا کار می‌کند. در این حالت هم فرض کنید b_1 کوچک‌ترین عدد در بین b_iها باشد. از آن‌جا که طبق فرض استقرا در این حالت بازه‌ی حضور هر دو ستاره در آسمان با هم اشتراک دارند، پس باید بازه‌ی حضور هر ستاره‌ی دیگری شامل b_1 باشد و بنابراین اگر در این لحظه (b_1) عکسی بگیریم همه‌ی ستاره‌ها در آن دیده می‌شوند.

۴. الف.

$$\left.\begin{array}{l} m+n \,|mn+1 \\ m+n \,|m^2+nm \end{array}\right\} \Rightarrow m+n \,|m^2-1$$

پس $m+n$ باید مقسوم‌علیه m^2-1 باشد. اما m^2-1 تنها متناهی مقسوم‌علیه دارد و لذا متناهی عدد این‌چنینی یافت می‌شوند.

ب. راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که اگر m و n دو عدد فرد متوالی باشند، آن‌گاه $m+n|mn+1$. با توجه به متقارن بودن رابطه می‌توان فرض کرد $n>m$. در این صورت به راحتی می‌توان چک کرد که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1, 2m+1, 2m+3, \ldots, 2n+1, n^2-n-1, n)$$

شرط مسئله را برآورده می‌کند.

راه‌حل دوم. این راه‌حل هم کاملاً مشابه راه‌حل قبلی است. تنها دقت کنید که اگر $3 \le m < n$، آن‌گاه $m^2-m-1 < n^2-n-1$. پس می‌توان به راحتی دید که دنباله‌ی

$$(m, m^2-m-1, m^2-m+1, m^2+m+3, \ldots, n^2-n-3, n^2-n-1, n)$$

هم شرایط مسئله را دارد.

۵. برای حل این مسئله ابتدا یک لم معروف را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید مثلثی با اضلاع به طول a، b و c، دارای مساحت S بوده و شعاع دایره‌ی محیطی آن برابر R باشد. نشان دهید که $4RS = abc$.

اثبات. فرض کنید A زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع a باشد، در این صورت با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} \Rightarrow 4RS = abc$$

□

حال در مسئله‌ی اصلی فرض کنید L محل تقاطع AC و BD باشد. M را نقطه‌ای دل‌خواه روی دایره بگیرید. طبق لم بالا در مثلث‌های AMC و BMD داریم: (شعاع دایره را برابر R گرفتیم و مساحت مثلث‌ها را با S نمایش می‌دهیم.)

$$MA.MC.AC = ۴R.S_{AMC},\ MB.MD.BD = ۴R.S_{BMD}$$

اگر نقطه‌ی M در شرط مسئله صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$MA.MC = MB.MD \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{AC}{BD}$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو پاره‌خط AC و BD باید برابر باشد و در نتیجه باید روی نیم‌ساز یکی از چهار زاویه‌ای که دو خط AC و BD با ایجاد می‌کنند، واقع است. حال دقت کنید که این چهار نیم‌ساز دایره را در ۴ نقطه قطع می‌کنند که به راحتی با توجه به نتایج بالا می‌توان چک کرد این چهار نقطه، همان ۴ نقطه‌ی خواسته شده در صورت مسئله هستند.

۶. تعداد کتاب‌ها را برابر n بگیرید. دقت کنید که ترتیب کتاب‌ها حداکثر $n!$ حالت مختلف می‌تواند به خود بگیرد. به علاوه با توجه به این که هر کتاب دو وضعیت می‌تواند داشته باشد حداکثر $۲^n n!$ آرایش مختلف برای کتاب‌ها محتمل است. بعد از n، $۲n$، $۳n$ و ... جابه‌جایی وضعیت کتاب‌ها را نگاه کنید. چون تعداد این مرحله‌ها نامتناهی است و تعداد آرایش‌های ممکن کتاب‌ها متناهی دو مرحله‌ی مختلف هستند که آرایش کتاب‌ها در آن‌ها یکسان است. توجه کنید که اگر در آرایش کتاب‌ها را در یک مرحله بدانیم، آرایش کتاب‌ها در n مرحله قبل با برعکس انجام دادن عمل‌ها تعیین می‌شود. پس با توجه به دو مرحله‌ای که وضعیت کتاب‌ها یکسان است و با برگشت به عقب می‌توان به مرحله‌ای رسید که وضعیت کتاب‌ها همان وضعیت اولیه‌شان باشد.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز اول

---

۱. n عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و p عددی اول است که $n \big| p-1$ و $p \big| n^{3}-1$. نشان دهید $4p-3$ مربع کامل است.

۲. در مثلث ABC، $\angle A = 60^\circ$. نقطه‌ی متغیر D روی پاره‌خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید O_1 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و O_2 مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع BO_1 و CO_2 را M و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث DO_1O_2 را N می‌نامیم. ثابت کنید خط MN از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوغی(!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دوبه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید.)

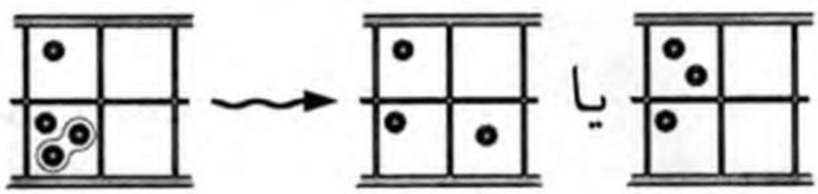
به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز دوم

۴. در برخی از خانه‌های یک جدول $n \times ۲$ تعدادی مهره قرار دارد.

اگر درخانه‌ای بیش از یک مهره باشد، می‌توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست‌کم ۲^nمهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵. BC قطر یک دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط P و M به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته اند که $PB \parallel CY$ و $MP \parallel CX$. محل تقاطع CX و PB را K می‌نامیم. ثابت کنید $PB \perp MK$.

۶. تمام توابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$،

$$(x+y)f(f(x)y) = x^۲ f(f(x) + f(y))$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست!)

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۴

۱. راه‌حل اول. ابتدا دقت کنید که از آن‌جا که p عددی اول است و $p|(n-۱)(n^۲+n+۱)$، پس $p|n-۱$ و یا $p|n^۲+n+۱$. اگر $p|n-۱$، باید $p \leq n-۱$ و از طرف دیگر طبق فرض مسئله $n|p-۱$ و بنابراین $n \leq p-۱$. پس این حالت امکان ندارد و در نتیجه $p|n^۲+n+۱$.

$n|p-۱$، پس عدد طبیعی t وجود دارد که $p=tn+۱$. ادعا می‌کنیم $t=n+۱$. می‌دانیم:

$$p|n^۲+n+۱ \Rightarrow tn+۱|n^۲+n+۱ \Rightarrow tn+۱|n^۲+n+۱-tn-۱$$

$$\Rightarrow tn+۱|(n+۱-t)n \Rightarrow tn+۱|n+۱-t$$

که آخرین نتیجه‌گیری با استفاده از لم اقلیدس و به این دلیل است که $(tn+۱,n)=(n,۱)=۱$. حال اگر $t \neq n+۱$، $n+۱-t$ صفر نیست و لذا $tn+۱ \leq |n+۱-t|$. برای $|n+۱-t|$ دو حالت داریم:

$$n+۱-t>۰ \quad \Rightarrow \quad n+۱ \leq tn+۱ \leq n+۱-t<n+۱$$
$$n+۱-t<۰ \quad \Rightarrow \quad t<tn+۱ \leq t-(n+۱)<t$$

که هر دو تناقض است. پس $t=n+۱$. حال داریم:

$$t=n+۱ \Rightarrow p=tn+۱=n^۲+n+۱ \Rightarrow ۴p-۳=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$$

پس $۴p-۳$ مربع کامل است.

راه‌حل دوم. ابتدای راه‌حل مشابه راه‌حل اول است. حال فرض کنید که $p|n^۲+n+۱$. از آن‌جا که $n|p-۱$ عدد طبیعی k یافت می‌شود که $p=kn+۱$. پس باید عدد طبیعی t موجود باشد که $n^۲+n+۱=(kn+۱)t$. با در نظر گرفتن دو طرف عبارت اخیر به پیمانه‌ی n نتیجه می‌گیریم (به پیمانه‌ی n) $t \equiv ۱$، پس عدد صحیح نامنفی s یافت می‌شود که $t=sn+۱$. اگر $s>۰$ باشد، آن‌گاه $(sn+۱)(tn+۱)>n^۲+n+۱$ که تناقض است، پس $s=۰$ و لذا $t=۱$. بنابراین $p=n^۲+n+۱$. قسمت آخر راه‌حل هم مشابه است.

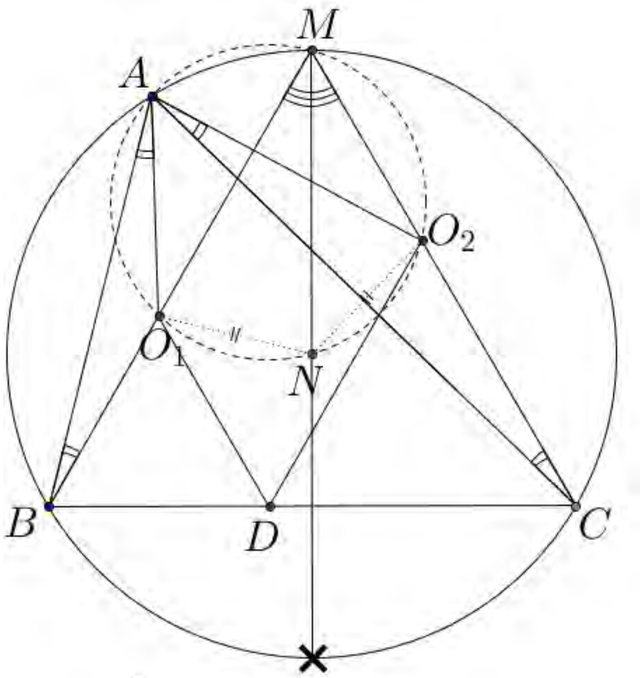
۲. دقت کنید که در بین زاویه‌های $\angle ADB$ و $\angle ADC$ یکی کم‌تر یا مساوی ۹۰° و دیگری بیش‌تر یا مساوی ۹۰° است که بدون کاسته شدن از کلیت مسئله و به دلیل تقارن می‌توان فرض کرد $\angle ADC \geq ۹۰^\circ$. در این صورت با توجه به خواص مرکز دایره‌ی محیطی داریم:

$$\angle ABO_۱=۹۰^\circ-\angle ADB=\angle ADC-۹۰^\circ=\angle ACO_۲$$

پس $BO_۱$ و $CO_۲$ یک‌دیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند. با استدلال مشابه بالا می‌توان نشان داد که $\angle BAO_۱=\angle CAO_۲$ و بنابراین $\angle O_۱AO_۲=\angle BAC=۶۰^\circ$.

نقطه‌ی D قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به $O_۱O_۲$(عمود منصف AD) است. پس $\angle O_۱DO_۲=۶۰^\circ$ لذا $\angle O_۱NO_۲=۱۲۰^\circ$ و با توجه به این‌که M روی دایره‌ی محیطی ABC قرار دارد $\angle O_۱MO_۲=۶۰^\circ$ است و

این نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی M، N، $O_۱$ و $O_۲$ روی یک دایره قرار دارند. از طرفی $O_۱N = O_۲N$ پس MN نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle O_۱MO_۲ = \angle BMC$ است. می‌دانیم که نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BMC$ از وسط کمان BC در دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گذرد که یک نقطه‌ی ثابت است.



۳. فرض کنید $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ همه‌ی فاصله‌های ظاهر شده در بین این سیارات باشند. به برهان خلف فرض کنید که $r \leq ۷۸$. یکی از ستاره‌های فضا را به دل‌خواه انتخاب کنید و کره‌های به مرکز این ستاره و شعاع‌های $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ را در نظر بگیرید. طبق فرض ما هر کدام از ستاره‌های دیگر باید روی یکی از این r کره باشند. پس طبق اصل لانه‌کبوتری روی یکی از این کره‌ها باید حداقل $۱۲۸۲۱ = \left\lceil \frac{۱۰^۶-۱}{۷۸} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{۱۰^۶-۱}{r} \right\rceil$ ستاره باشد. حال تنها این کره را در نظر بگیرید و یکی از ستاره‌های روی آن را به دل‌خواه انتخاب کنید. مجدداً به مرکز این ستاره‌ی جدید r کره با شعاع‌های $d_۱ < d_۲ < \cdots < d_r$ در نظر بگیرید. تمام ستاره‌های آسمان غیر از ستاره‌ای که مرکز این کره‌هاست روی این r کره قرار دارند، پس باید طبق اصل لانه کبوتری یکی از این کره‌ها باشد که از بین ۱۲۸۲۱ ستاره‌ای که روی کره‌ی اول قرار داشتند شامل حداقل $۱۶۵ = \left\lceil \frac{۱۲۸۲۰}{۷۸} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{۱۲۸۲۰}{r} \right\rceil$ تا از ستاره‌ها باشد. حال دقت کنید که این ۱۶۵ ستاره روی دو کره‌ی غیرهم‌مرکز قرار گرفته‌اند، پس باید روی اشتراک آن‌ها که یک دایره است باشند. در نهایت تنها این ۱۶۵ ستاره را در نظر بگیرید. اگر یکی از این ۱۶۵تا را به دل‌خواه انتخاب کنیم برای هر $۱ \leq i \leq r$ حداکثر دو ستاره از بین ۱۶۴ ستاره‌ی باقی‌مانده دارای فاصله‌ی d_i با این ستاره هستند. پس تعداد این ستاره‌ها روی این دایره باید حداکثر $۱۵۷ = ۱ + ۷۸ \times ۲$ باشد که این طور نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض اولیه‌ی ما اشتباه است و حداقل ۷۹عدد متمایز در بین فواصل دوبه‌دوی این یک میلیون سیاره وجود دارد.

۴. ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر حداقل $۲^{n-۱}$ مهره در یک جدول $۱ \times n$ داشته باشیم و حرکات

مجاز ما این باشد که اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره قرار داشت بتوانیم دو مهره از آن خارج کنیم و یک مهره در خانه‌ی سمت راستش قرار دهیم، می‌توانیم با جابه‌جایی مهره‌ها در نهایت مهره‌ای را به آخرین خانه‌ی سمت راست برسانیم. این حکم برای $n = ۱$ بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای k درست باشد و ما ۲^k مهره در یک جدول $(k + ۱) \times ۱$ داریم. اگر از ابتدا مهره‌ای در آخرین خانه‌ی سمت راست باشد، چیزی برای ثابت کردن باقی نمی‌ماند. پس فرض می‌کنیم که این خانه خالی باشد. حال ۲^k مهره را که همگی در یک جدول $k \times ۱$ قرار دارند به دو دسته‌ی $۲^{k-۱}$ تایی تقسیم می‌کنیم. حال طبق فرض استقرا می‌توان با جابه‌جایی مهره‌ها در هر دسته یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست رساند. پس در نهایت حداقل دو مهره به این خانه می‌رسد و با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی سمت راست برد.

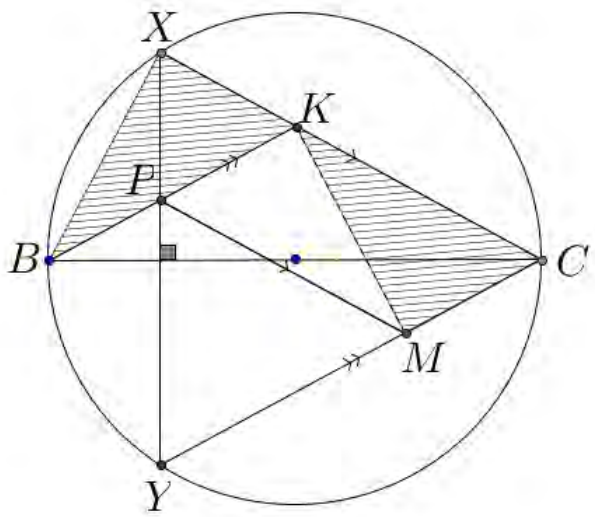
حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

حکم مسئله‌ی اصلی را هم شبیه به بالا به کمک استقرا ثابت می‌کنیم. باز هم حالت $n = ۱$ به سادگی قابل بررسی است. حال فرض کنید که حکم برای k برقرار باشد و ما $۲^{k+۱}$ مهره در یک جدول $(k + ۱) \times ۲$ داشته باشیم. مشابه بالا اگر در ابتدا مهره‌ای در خانه‌ی بالا سمت راست(خانه‌ی ستاره‌ای) باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. این بار اگر حداقل دو مهره در خانه‌ی پایین سمت راست باشد می‌توان دو مهره از این خانه برداشت و یک مهره به خانه‌ی بالا راست منتقل کرد که باز مسئله حل است. پس باید فرض کنیم که در خانه‌ی پایین راست حداکثر یک مهره قرار دارد. حال بر حسب تعداد مهره‌های این خانه مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم.

اگر در خانه‌ی پایین راست مهره‌ای نباشد، همه‌ی $۲^{k+۱}$ مهره در یک جدول $k \times ۲$ قرار دارند. حال اگر مشابه بالا $۲^{k+۱}$ مهره را به دو دسته‌ی ۲^kتایی به دل‌خواه تقسیم کنیم، طبق فرض استقرا می‌توان با هر کدام از این دسته‌ها یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست از ردیف بالایی رساند. حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند.

اگر در خانه‌ی پایین سمت راست یک مهره قرار داشته باشد. $۲^{k+۱} - ۱$ مهره در بقیه‌ی جدول قرار دارند. پس طبق اصل لانه‌کبوتری یا ۲^k در ردیف بالایی قرار دارد که طبق استدلال قسمت اول راه‌حل می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند و یا ۲^k مهره در ردیف پایینی غیر از خانه‌ی سمت راست آن قرار دارد. در این جا باز با استفاده حکمی که در ابتدای راه‌حل ثابت شد می‌توان یک مهره‌ی دیگر به خانه‌ی پایین راست اضافه کرد که در این صورت ۲ مهره در این خانه قرار می‌گیرد و حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی بالا راست رساند.

۵. راه‌حل اول. دقت کنید که BC قطر دایره و لذا عمود منصف XY است، پس $\angle BCY = \angle BCX$، و $\angle YBC = \angle XBC$. از آن‌جا که $BK \parallel CY$، $\angle KBC = \angle BCY = \angle BCK$ و بنابراین $BK = KC$. هم‌چنین $\angle XPK = \angle XYC = \angle YXC$ و لذا $KX = KP$. از آن‌جا که $KCPM$ متوازی‌الاضلاع است، $KP = CM$. از طرف دیگر $\angle BKX = \angle MCK$ و لذا دو مثلث XKB و CMK هم‌نهشت هستند. از آن‌جا که BC قطر دایره است، $\angle BXC = ۹۰^\circ$ و با توجه به هم‌نهشتی این دو مثلث $\angle KMC$ قائمه است و $KM \perp YC$. در نهایت باز با توجه به موازی بودن PB و CY حکم مورد نظر ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم. برای اثبات حکم از قضیه‌ی کارنو استفاده می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم تحت شرایط مسئله $BM^۲ - PM^۲ = BK^۲ - PK^۲$. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BYM، $BM^۲ = BY^۲ + YM^۲$. دقت کنید که $PM \parallel XC$ و لذا $\angle YPM = \angle YXM = \angle CYP$. پس مثلث PMY متساوی‌الساقین است و $PM = MY$. در راه‌حل اول هم نشان دادیم که $KP = XK$ و $BK = KC$. در نهایت با ترکیب این روابط و استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث BXK داریم:

$$BM^۲ - PM^۲ = (BY^۲ + YM^۲) - YM^۲ = BY^۲ = BX^۲ = BK^۲ - KX^۲ = BK^۲ - KP^۲$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶. ابتدا نشان می‌دهیم f تابعی یک به یک است. اگر $f(a) = f(b)$ باشد، با قرار دادن $y = ۱$ در معادله و یک بار جای‌گذاری a و بار دیگر b به جای x داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(a+۱)f(f(a)) = a^۲ f(f(a)+f(۱))\\(b+۱)f(f(b)) = b^۲ f(f(b)+f(۱))\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^۲}{a+۱} = \frac{b^۲}{b+۱} \Rightarrow \cdots \Rightarrow (a-b)(ab+a+b) = ۰$$

حال با توجه به این که a و b و در نتیجه $ab+a+b$ مثبت است، نتیجه می‌گیریم $a = b$ و بنابراین تابع یک به یک است. اگر برای یک $x > ۱$ در رابطه‌ی اصلی به جای y، $x^۲ - x$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rc}& (x+(x^۲-x))f(f(x)(x^۲-x)) = x^۲ f(f(x)+f(x^۲-x))\\ \Rightarrow & f(f(x)(x^۲-x)) = f(f(x)+f(x^۲-x))\\ \Rightarrow & f(x)(x^۲-x) = f(x)+f(x^۲-x)\\ \Rightarrow & f(x)(x^۲-x-۱) = f(x^۲-x)\end{array}$$

در خط دوم به سوم از یک به یکی تابع f استفاده شده است. در نهایت دقت کنید که معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - x - ۱$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد که یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. حال اگر این ریشه را α بنامیم، با قرار دادن $x = \alpha$ در معادله‌ی آخر به $f(۱) = ۰$ می‌رسیم که با فرض این که مقادیر F مثبت هستند تناقض دارد. پس چنین تابعی اصلاً وجود ندارد.

سؤالات بیست ودومین المپیاد ریاضی کشور سال ۱۳۸۳ (مرحله‌ی دوم)

۱) در مثلث قائم الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ ($\widehat{A} = ۹۰^\circ$)، نقطهٔ D محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ A با ضلع BC و نقطهٔ I_a مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر زاویهٔ A است. (I_a محل برخورد نیمسازهای زوایای خارجی B و C است.) ثابت کنید

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{۲} - ۱$$

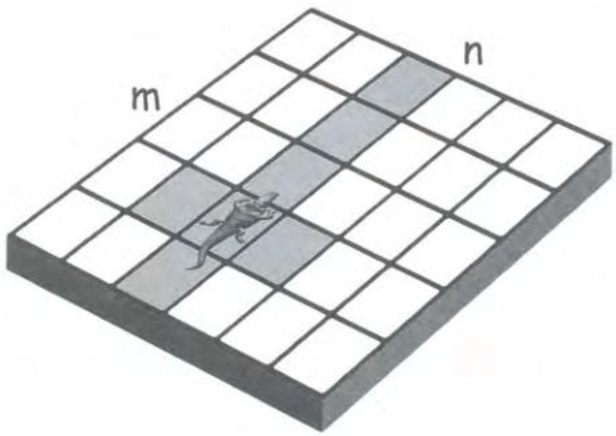
۲) فرض کنید $f : [۰,\infty) \longrightarrow R$ دارای این خاصیت است که $f(x) - ۳x$ و $f(x) - x^۳$ توابعی صعودی اند. نشان دهید $f(x) - x^۲ - x$ نیز صعودی است. (تابع g را صعودی گوییم هر گاه اگر $x \leq y$ آنگاه $g(x) \leq g(y)$)

۳) وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یکدیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفهٔ مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که دست کم در یکی از دو سرش نمایندگی دارد به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.

۴) همهٔ توابع $f: N \longrightarrow N$ را بیابید که برای هر m, n طبیعی، $m+n$ بر $f(m)+f(n)$ بخش پذیر باشد.

۵) نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، ضلع BC و دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را، به ترتیب، در D و M قطع می‌کند.
خطی گذرنده از نقطهٔ D دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MB را در X و Y قطع کرده است.
ثابت کنید خط AD زاویهٔ $\widehat{XAY}$ را نصف می‌کند.

۶) مهرهٔ تمساح در جدول $m \times n$ ($m \geq 4$) می‌تواند همهٔ خانه‌های هم‌ستون خودش و همین طور خانه‌های مجاور هم‌سطر خودش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهرهٔ تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که همهٔ تمساح ها باید عمودی باشند.)



به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۳

---

۱. BI نیم‌ساز زاویه‌ی B است، بنابر قضیه‌ی نیم‌سازها داریم:

$$\frac{DI}{IA} = \frac{BD}{AB}, \quad \frac{DI}{IA} = \frac{I_aD}{I_aA}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{I_aA}{I_aD} = \frac{AD}{I_aD} + ۱$$

بنابرای کافی است نشان دهیم $\frac{BD}{AB} \geq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، داریم

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin(۴۵^\circ) = \frac{BH}{AB} \leq \frac{BD}{AB}$$

که در آن H پای عمود وارد از B بر AD می‌باشد و در نتیجه طول آن از طول BD بیش‌تر نیست، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۲. فرض کنید $x \leq y$، باید نشان دهیم $f(x) - x^۲ - x \leq f(y) - y^۲ - y$. بنابر فرضیات مسئله داریم:

$$f(x) - ۳x \leq f(y) - ۳y, \quad f(x) - x^۳ \leq f(y) - y^۳$$

پس

$$f(y) - f(x) \geq ۳y - ۳x, \quad f(y) - f(x) \geq y^۳ - x^۳$$

حال اگر نشان دهیم $f(y) - f(x) \geq y^۲ + y - x - x^۲$، حکم ثابت می‌شود. برای این کار کافی است نشان دهیم $y^۲ + y - x - x^۲$ از حداقل یکی از دو عبارت $۳y - ۳x$ و $y^۳ - x^۳$ کوچک‌تر یا مساوی است، فرض کنید مطلب اخیر درست نباشد، در این صورت

$$y^۲ + y - x^۲ - x > ۳y - ۳x, \quad y^۲ + y - x^۲ - x > y^۳ - x^۳$$

پس

$$(y - x)(y + x + ۱) > ۳(y - x), \quad (y - x)(y + x + ۱) > (y - x)(y^+xy + x^۲)$$

که با توجه به مثبت بودن $y - x$ داریم:

$$x + y + ۱ > ۳, \quad y + x + ۱ > y^۲ + xy + x^۲$$

اگر بگیریم $S = x + y$ و $P = xy$، نتایج بالا به شکل زیر در می‌آیند:

$$S > ۲, \quad S + ۱ > S^۲ - P$$

از طرفی با استفاده از نامساوی حسابی‌هندسی می‌توان دید که $P \leq \frac{S^۲}{۴}$، با استفاده از این رابطه و دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$S + \frac{S^۲}{۴} + ۱ > S + P + ۱ > S^۲$$

در نتیجه $۳S^۲ - ۴S - ۴ < ۰$ که این مطلب با توجه به این‌که $S > ۲$ غلط می‌باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد $y^۲ + y - x^۲ - x$ از حداقل یکی از دو عبارت $۳y - ۳x$ و یا $y^۳ - x^۳$ کم‌تر یا مساوی است و این مطلب حکم را ثابت می‌کند.

۳. در صورت مسئله باید یک تصحیح به این شکل انجام شود که ((هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی دارد را به عهده گرفته است.)) حال به حل مسئله می‌پردازیم. اگر فرض کنیم یک شرکت در n شهر نمایندگی دارد، آن‌گاه حداکثر $\binom{n}{۲}$ جاده را می‌تواند مرمت کند. بنابراین باید داشته باشیم $۳۰ \geq \binom{n}{۲}$، که این رابطه نشان می‌دهد $n \geq ۹$، یعنی هر شرکت حداقل در ۹ شهر نمایندگی دارد.
بنابراین حداقل $۹ \times ۸۰ = ۷۲۰$ نمایندگی در شهرها وجود دارد، پس شهری وجود دارد که در آن حداقل

$$\left\lceil \frac{۷۲۰}{۱۰۰} \right\rceil = ۸$$

نمایندگی وجود دارد.

۴. اگر قرار دهیم $m = n$، داریم $۲f(n)|۲n$ پس $f(n)|n$. در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی n باید $f(n) \leq n$. حال فرض کنید m عدد طبیعی دل‌خواهی باشد، در این صورت چون تعداد اعداد اول نامتناهی است پس عدد اول $P > m$ وجود دارد، حال به جای n در رابطه‌ی اصلی $P - m$ را قرار می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$f(m) + f(P-m)|P \Rightarrow f(m) + f(P-m) = P$$

اما چون $f(m) \leq m$ و $f(P-m) \leq P - m$ پس با توجه به رابطه‌ی بالا در هر دو نامساوی اخیر تساوی برقرار است. پس $f(m) = m$ برای هر عدد طبیعی برقرار است. این مطلب نشان می‌دهد که تنها تابع مورد نظر تابع همانی است.

۵. در مسئله چهار نقطه‌ی B، C، X و Y روی یک دایره قرار دارند.(توجه کنید که چون AD نیم‌ساز است، پس دو کمان MB و MC روی دایره‌ی محیطی با هم برابر هستند، در نتیجه $MB = MC$. پس دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB از C هم می‌گذرد.) پس داریم:

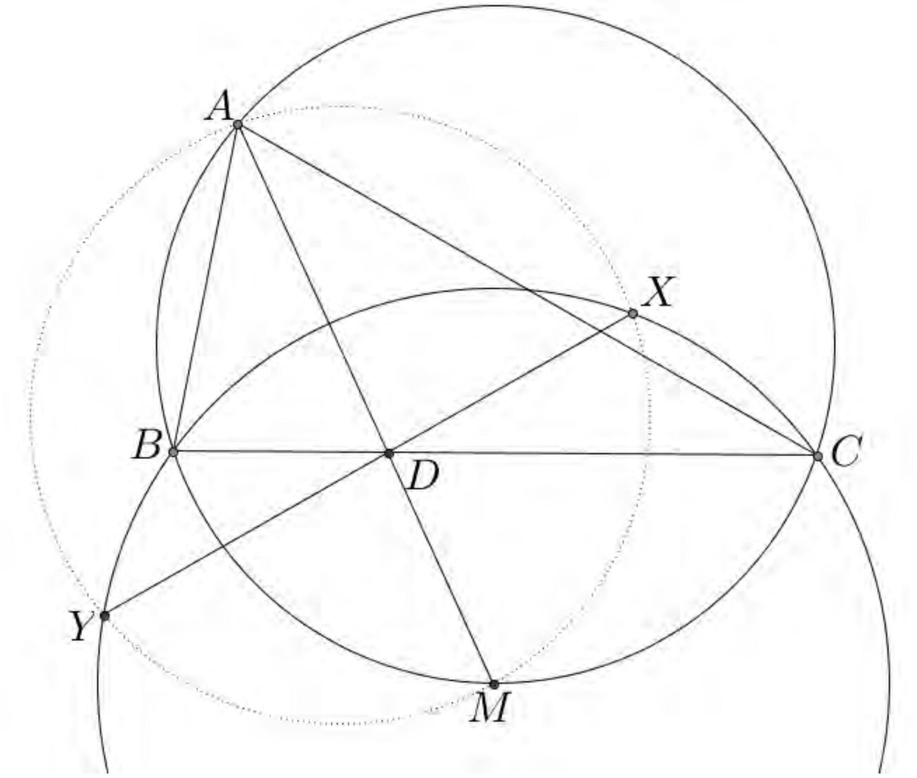
$$BD \times DC = DX \times DY$$

از طرفی چهار نقطه‌ی A، B، C و M نیز روی دایره‌ی محیطی قرار دارند. پس

$$AD \times DM = BD \times DC$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$AD \times DM = DX \times DY$$



پس چهارضلعی $AXMY$ محاطی است، در نتیجه $\angle YXM = \angle YAM$ ، $\angle XYM = \angle XAM$. با توجه به روابط اخیر و این که مثلث XYM متساوی‌الساقین است(M مرکز دایره‌ای است که از X و Y می‌گذرد). داریم $\angle YAM = \angle MAX$ که همان حکم مسئله می‌باشد.

۶. اگر در هر ستون یک مهره‌ی تمساح قرار دهیم تمام خانه‌ها تهدید می‌شوند، یعنی با n تمساح تمام صفحه تهدید می‌شود. نشان می‌دهیم که این کار با کم‌تر از n تمساح امکان‌پذیر نیست. فرض کنید α_i $(1 \leq i \leq n)$ نشان‌دهنده‌ی تعداد تمساح‌ها در ستون iام باشد. اگر تعداد مهره‌ها در ستون‌های i_1، i_2، ... و i_k صفر باشد، باید داشته باشیم:

$$\alpha_{i_1-1} + \alpha_{i_1+1} \geq m$$
$$\alpha_{i_2-1} + \alpha_{i_2+1} \geq m$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{i_k-1} + \alpha_{i_k+1} \geq m$$

دلیل این مطلب این است که اگر در یک ستون تعداد مهره‌ها صفر باشد چون هر کدام از خانه‌های این ستون باید تهدید شود، باید در دو ستون مجاور آن حداقل m تمساح وجود داشته باشد.(اگر ستون اول و یا آخر مهره نداشته باشد تنها یک ستون مجاور دارد و باید در همه‌ی خانه‌های آن ستون تمساح باشد.) اگر همه‌ی این نامساوی‌ها را جمع کنیم، نتیجه می‌شود جمع همه‌ی آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی mk است. پس حداقل یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j-1} \geq \frac{mk}{2}, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j+1} \geq \frac{mk}{2}$$

(منظور از $\alpha_۰$ و یا $\alpha_{n+۱}$ در صورت نیاز صفر است.)
بنابراین k تا از α_iها موجود هستند که مجموع آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{۲}$ است. (توجه کنید که اگر ستون اول یا آخر تعداد مهره‌هایش صفر باشد، آن‌گاه ممکن است که $k-۱$تا از α_iها مجموع‌شان بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{۲}$ باشد که این مطلب در تخمین ما به‌تر خواهد بود.)
حال در عبارت $\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i$ که نشان‌دهنده‌ی تعداد مهره‌ها است، k جمله برابر صفر است و مجموع حداکثر k جمله‌ی دیگر حداقل $\frac{mk}{۲}$ است و $n-۲k$ جمله‌ی دیگر هم هر کدام حداقل یک هستند. پس

$$\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \geq \frac{mk}{۲} + (n-۲k)$$

چون $m \geq ۴$، داریم $\frac{mk}{۲} \geq ۲k$ پس

$$\frac{mk}{۲} + (n-۲k) \geq n$$

بنابراین حداقل به m تمساح نیاز داریم و این مطب اثبات را تمام می‌کند.

مرحلهٔ دوم بیست ویکمین المپیاد ریاضی کشور

۱) عدد طبیعی n را **سه لایه‌ای** می نامیم هر گاه بتوان مجموعهٔ مقسوم علیه های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف) عددی سه لایه‌ای مثال بزنید ،
ب) ثابت کنید بی نهایت عدد سه لایه‌ای وجود دارد.

۲) دریک روستا n خانه وجود دارد $(n \geq ۳)$ به طوری که همهٔ آن ها روی یک خط قرار ندارند. می خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم . برای این کار نقطهٔ A مناسب تر از نقطهٔ B است اگر مجموع فواصل A تا خانه ها کم تر از مجموع فواصل B تا خانه ها باشد .
نقطه ای را ایده‌آل می گوییم که هیچ نقطه ای مناسب تر از آن وجود نداشته باشد . ثابت کنید حداکثر یک نقطه ایده‌آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

۳) n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده‌اند . برای هر دو تیم متمایز مانند B, A دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم B, A باخته اند . ثابت کنید $n = ۴t + ۳$.
(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد .)

۴) برای هر سه عدد حقیقی x, y, z با شرط $xyz = -1$ ، نامساوی زیر را ثابت کنید:

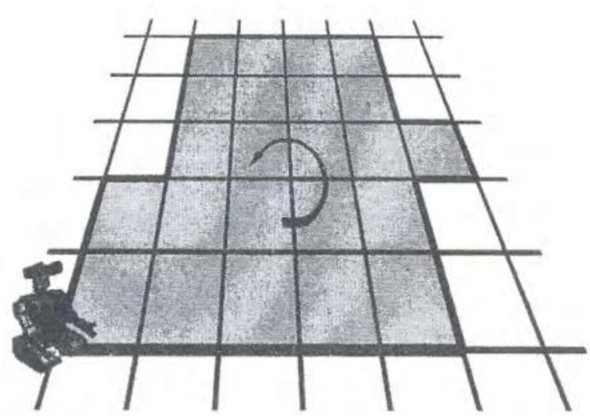
$$x^4 + y^4 + z^4 + 3(x + y + z) \geq x^2/y + x^2/z + y^2/z + y^2/x + z^2/x + z^2/y$$

۵) زاویهٔ $\widehat{A}$ کوچک ترین زاویهٔ مثلث ABC می باشد . نقطهٔ D روی کمان کوچک تر BC از دایره محیطی مثلث ABC واقع است .
عمود منصف های AC, AB با خط AD به ترتیب در نقاط N, M برخورد می نمایند. نقطه T محل برخورد CN, BM است . ثابت کنید

$$BT + CT \leq 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث ABC است .

٦) یک روبات از یک رأس دل خواه روی صفحهٔ شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت های اصلی روی اضلاع صفحهٔ شطرنجی حرکت می کند . این روبات دارای دو خانهٔ حافظهٔ B, A است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد .
در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال ، جنوب ، شرق یا غرب باشد ، به ترتیب ، به خانهٔ A یکی اضافه می شود ، از خانهٔ A یکی کم می شود ، به خانهٔ B به اندازهٔ عدد خانهٔ A اضافه می شود یا از خانهٔ B به اندازهٔ عدد خانهٔ A کم می شود . فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود بازگردد . ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانهٔ حافظهٔ B ، برابر با مساحت درون شکلی است که روبات پیموده .



به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۲

---

۱. الف. با اندکی محاسبه و در نظر گرفتن حالت‌های مختلف می‌توان مشاهده کرد که اگر عددی حداکثر دو عامل اول داشته باشد، نمی‌تواند سه‌لایه‌ای باشد. به علاوه با تلاش بیش‌تر می‌توان دید که ۱۲۰ عددی سه لایه‌ای است، زیرا $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۲۰, ۲۴, ۳۰, ۴۰, ۶۰, ۱۲۰\}$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ است و $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۵ + ۲۴ + ۳۰ = ۲۰ + ۴۰ + ۶۰ = ۱۲۰$.

ب. فرض کنید p عددی اول بزرگ‌تر از ۵ باشد. در این صورت هر مقسوم‌علیه $۱۲۰p$ یا مقسوم‌علیهی از ۱۲۰ است و یا p برابر یک مقسوم‌علیه ۱۲۰. پس می‌توان با استفاده از استدلال بالا و اضافه کردن p برابر اعضای هر دسته(که در سه‌لایه‌ای بودن ۱۲۰، مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ را به آن‌ها افراز کردیم) به آن دسته، نشان داد که $۱۲۰p$ هم سه لایه‌ای است. حال چون تعداد چنین اعداد اولی نامتناهی است، نامتناهی عدد سه لایه‌ای داریم.

۲. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید A، B و C سه نقطه در صفحه باشند و Mنقطه وسط BC باشد. در این صورت $AM \leq \frac{AB+AC}{۲}$.

اثبات. اگر سه نقطه هم‌خط باشند که به سادگی می‌توان دید که تساوی برقرار است. حال اگر این سه نقطه تشکیل یک مثلث بدهند، فرض کنید نقطه‌ی $A_۱$ قرینه‌ی A نسبت به M باشد. در این صورت در چهارضلعی $ABA_۱C$ قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند و بنابراین یک متوازی‌الاضلاع است. به علاوه دقت کنید که $AA_۱ = ۲AM$ و $AB = CA_۱$. حال با توجه به نامساوی مثلث در مثلث $AA_۱C$، $AA_۱ < AC + CA_۱$ و در نتیجه $۲AM < AB + AC$ که همان چیزی است که می‌خواستیم. $\square$

حال فرض کنید خانه‌های روستا را با $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n نمایش دهیم. به برهان خلف فرض کنید X و Y دو نقطه‌ی ایده‌آل باشند و M وسط XY. حال با استفاده از لم بالا در مثلث‌های $A_۱XY$، $A_۲XY$، $\cdots$ و A_nXY(البته ممکن است در بعضی حالت‌ها سه نقطه هم‌خط باشند که باز هم لم درست است) داریم:

$$A_۱M \leq \frac{A_۱X+A_۱Y}{۲}, A_۲M \leq \frac{A_۲X+A_۲Y}{۲}, \ldots, A_nM \leq \frac{A_nX+A_nY}{۲}$$
$$\Rightarrow \quad A_۱M + A_۲M + \cdots A_nM \leq \frac{۱}{۲}(A_۱X + \cdots + A_nX + A_۱Y + \cdots + A_nY)$$

اما دقت کنید که از آن‌جایی که همه‌ی خانه‌های روستا نمی‌توانند روی یک خط و در نتیجه روی خط واصل بین X و Y واقع باشند. پس حداقل یکی از نامساوی‌ها اکید است و لذا مجموعه‌ی فاصله‌ی خانه‌های روستا تا M کم‌تر از مجموع فاصله‌ی آن‌ها تا X و یا Y است که این با ایده‌آل بودن آن‌ها تناقض دارد.

۳. برای این مسابقه‌ها به این صورت یک گراف جهت‌دار درست می‌کنیم که به ازای هر تیم یک رأس قرار می‌دهیم و اگر تیم A از B برده باشد، یالی جهت‌دار از A به B رسم می‌کنیم. حال فرض کنید مجموعه‌ی تیم‌هایی که از تیم خاصی مثل A باخته‌اند(متناظراً به زبان گراف یعنی رأس‌هایی که یال

بین آن‌ها و رأس A، از یال A خارج شده باشد) را با نماد S_A نمایش می‌دهیم. حال برای هر تیم B در S_A باید دقیقاً t تیم موجود باشند که از هر دوی A و B باخته‌اند. بنابراین رأس متناظر با این تیم‌ها باید در S_A باشد. در نتیجه از بین یال‌هایی که یک سر آن‌ها به B متصل است و یک سر دیگرشان در S_A قرار دارد دقیقاً t یال از B خارج می‌شوند. از آن‌جا که B رأس دل‌خواهی از S_A بود، برای هر تیم دیگری در این مجموعه وضعیت مشابه است. بنابراین تعداد یال‌هایی که هر دو سر آن‌ها در S_A است، برابر $|S_A|t$ است که منظور از $|S_A|$ تعداد تیم‌های موجود در S_A است. از طرف دیگر تعداد کل این یال‌ها برابر $\frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲} = \binom{|S_A|}{۲}$ است. (بین هر دو یالی در S_A یک یال وجود دارد.) پس $t|S_A| = \frac{|S_A|(|S_A|-۱)}{۲}$ و در نتیجه $|S_A| = ۲t + ۱$. این استدلال نشان می‌دهد که تعداد تیم‌هایی که به هر تیم باخته‌اند مساوی $۲t + ۱$ است. بنابراین از هر رأس در گراف دقیقاً $۲t + ۱$ یال خارج می‌شود. پس تعداد کل یال‌ها برابر $n(۲t + ۱)$ است. از طرف دیگر با توجه به این که هر دو تیمی با هم بازی کرده‌اند، بین هر دو رأسی یک یال قرار دارد. بنابراین از طرف دیگر تعداد کل یال‌ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$. پس $n(۲t + ۱) = \frac{n(n-۱)}{۲}$ و در نتیجه $n = ۲(۲t + ۱) + ۱ = ۴t + ۳$ است.

.۴

$$
\begin{aligned}
& x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x+y+z) - \left(\tfrac{x^۲}{y} + \tfrac{x^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{y}\right) \\
&= x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x+y+z) + (xyz)\left(\tfrac{x^۲}{y} + \tfrac{x^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{z} + \tfrac{y^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{x} + \tfrac{z^۲}{y}\right) \\
&= x^۴ + y^۴ + z^۴ + ۳(x+y+z) + x^۳z + x^۳y + y^۳x + y^۳z + z^۳y + z^۳x \\
&= x^۳(x+y+z) + y^۳(x+y+z) + z^۳(x+y+z) + ۳(x+y+z) \\
&= (x+y+z)(x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۳) \\
&= (x+y+z)(x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz) \\
&= (x+y+z)^۲(x^۲ + y^۲ + z^۲ - xy - yz - zx) \\
&= \tfrac{۱}{۲}(x+y+z)^۲((x-y)^۲ + (y-z)^۲ + (z-x)^۲) \geq ۰
\end{aligned}
$$

دقت کنید که در خط اول به دوم و خط پنجم به ششم از فرض مسئله($xyz = -۱$) و در خط ششم به هفتم از اتحاد اویلر استفاده کرده‌ایم. ضمناً نامساوی آخر نشان می‌دهد که حالت تساوی زمانی است که یا مجموع متغیرها صفر باشد و یا هر سه برابر باشند که با توجه به $xyz = -۱$ نتیجه می‌شود هر سه باید برابر -۱ باشند.

۵. CT را امتداد می‌دهیم تا دایره را برای بار دوم در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت:

$$\angle XBT = \angle XBA + \angle ABM = \angle XBA + \angle ABM = \angle NCA + \angle ABM$$

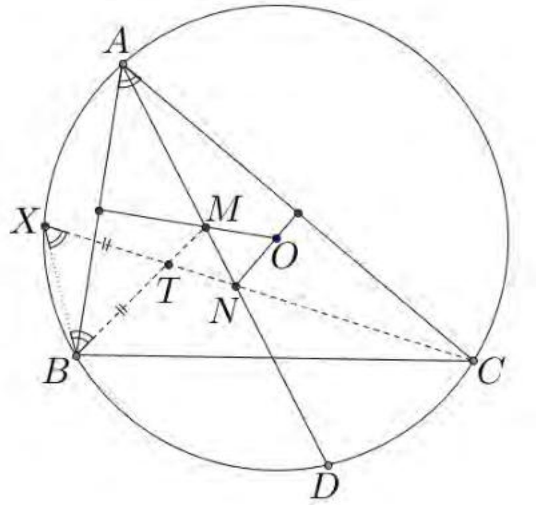
با توجه به این که M روی عمود منصف AB و N روی عمود منصف AC قرار دارد، $\angle MBA = \angle MAB$ و $\angle ACN = \angle CAN$. بنابراین

$$\angle XBT = \angle CAN + \angle MAB = \angle BAC = \angle CXB$$

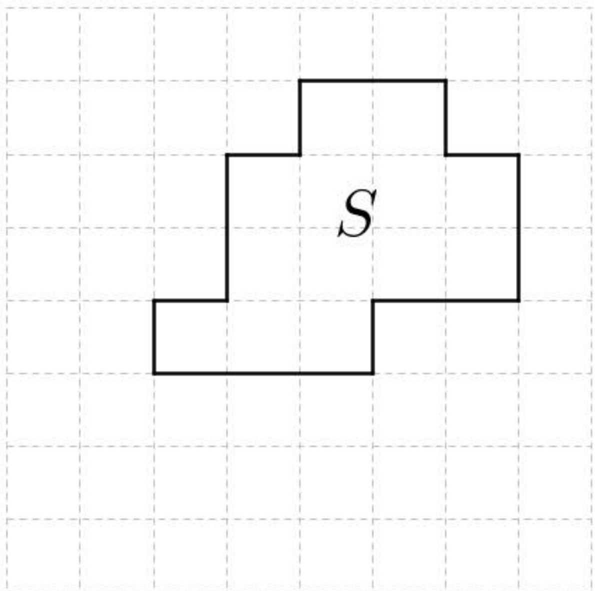
پس مثلث TXB متساوی‌الساقین است و لذا $XT = TB$. در نهایت

$$BT + CT = XT + TC = CX = ۲R.\sin(\angle XBC) \leq ۲R$$

بنابراین اثبات حکم به پایان رسید.



۶. نقطهٔ شروع حرکت روبات را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و شکلی که محیط آن را پیموده S می‌نامیم. عدد خانه‌یA هم‌واره مؤلفه‌ی دوم مختصات روبات را نشان می‌دهد زیرا در ابتدا صفر است و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی اضافه می‌شود، A نیز یکی اضافه می‌شود و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی کم می‌شود، A نیز یکی کم می‌شود . بنابر این می‌توان تغییرات عدد خانه‌ی B را این طور بیان کرد که هرگاه روبات به سمت شرق حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه به B اضافه می‌شود و هرگاه روبات به سمت غرب حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه از B کم می‌شود.



ابتدا فرض می‌کنیم ربات مسیر طی‌شده را در جهت ساعت‌گرد طی کرده باشد. همه‌ی مربع‌های شبکه‌ای که درون S قرار دارند را در نظر بگیرید و آن‌ها را $M_1, M_2, \ldots, M_k$ بنامید. فرض کنید مختصات

رأس پایین سمت چپ M_i، (x_i, y_i) باشد. به ازای هر مربع M_i به هر یک از دو ضلعِ آن یک عدد نسبت می‌دهیم. به ضلع پایینیِ مربع M_i، عدد $-y_i$ را نسبت دهید و به ضلع بالاییِ M_i، عدد $y_i + ۱$ را نسبت دهید. دقت کنید که چون بعضی از ضلع‌های افقی در دو مربع حضور دارند به آن‌ها دو بار عدد نسبت داده می‌شود.

اکنون اعداد نسبت داده شده به همه‌ی ضلع‌های مذکور را با هم جمع می‌کنیم و مجموع آن‌ها را D می‌نامیم. اکنون D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم.

اولاً دقت کنید که مجموع دو عددی که به ضلع‌های هر مربع نسبت داده‌ایم برابر یک است. پس D برابر می‌شود با تعداد مربع‌ها که همان مساحت S است.

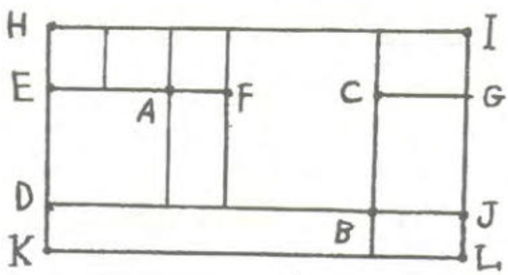
از طرف دیگر ضلع‌های افقی‌ای که روی مرز S قرار ندارند، در دو مربع حضور دارند، در یکی با علامت مثبت و در دیگری با علامت منفی و مجموع این دو عدد صفر می‌شود. در نتیجه تنها جملاتی باقی می‌مانند که مربوط به یال‌های افقی روی مسیر روبات هستند. که این مقادیر دقیقاً همان مقادیری هستند که هنگام حرکت روبات روی مسیر به عدد خانهٔ B اضافه می‌شوند. بنابراین مجموعِ این مقادیر دقیقاً همان عدد نهایی خانهٔ B است. پس حکم ثابت شد.

در حالتی که ربات در جهت پادساعت‌گرد حرکت کند، مقادیر نسبت داده شده به اضلاع مرزی، منفیِ مقادیری هستند که با B جمع می‌شوند، پس در این حالت B برابر است با منفیِ D $-D$ و در نتیجه قدر مطلق آن همان D می‌شود که برابر با مساحتِ S است.

سؤالات آزمون مرحله دوم بیستمین المپیاد ریاضی سال ۸۱

۱) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را یک «جایگشت» از اعداد $1, 2, \ldots, n$ می‌نامیم هرگاه $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالاً ترتیب آنها تغییر کرده است). تمام جایگشت‌های ۱ تا n مانند $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را بیابید که برای هر $1 \leq i \leq n$، $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_i)$ بر $i + 1$ بخش‌پذیر باشد.
برای مثال $a_1 = 3$ و $a_2 = 1$ و $a_3 = 4$ و $a_4 = 2$ یک جایگشت از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

۲) یک مستطیل را به وسیله‌ی تعدادی مستطیل (کوچک‌تر) پوشانده‌ایم به طوری که مستطیل‌ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل‌های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، هم‌چنین هیچ قسمتی از این مستطیل‌ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی‌گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت‌ها را نشان می‌دهد:



بنابراین هر طور که مستطیل را به وسیله‌ی مستطیل‌های کوچک‌تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط (پاره‌خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره‌خط‌ها دیده می‌شود، یک نقطه‌ی برخورد را یک «چهارراه» می‌گوییم هرگاه محل تقاطع دو پاره‌خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهار راه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، هم‌چنین در این شکل ۵ خط افقی (KL, DJ, CG, EF, HI) و ٦ خط عمودی دیده می‌شود، در ضمن شکل به

وسیله‌ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.
نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط‌های افقی، عمودی و تعداد چهارراه‌ها را در نظر بگیریم و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل‌های پوشاننده به اضافه‌ی عدد سه.

۳) در چهار ضلعی محدب $ABCD$ داریم $\angle ABC = \angle ADC = ۱۳۵^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می‌باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = ۹۰^\circ$، هم‌چنین K محل برخورد دوم دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و AMN می‌باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴) A و B دو نقطه‌ی ثابت در صفحه می‌باشند. چهار ضلعی محدّب $ABCD$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه‌ی $\angle ADC = ۹۰^\circ$. ثابت کنید نقطه‌ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهار ضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می‌گذرد.

۵) مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ‌تری توسعه داده‌ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می‌دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a + b\delta$ هستند که $a, b \in R$. (R نشان دهنده‌ی مجموعه اعداد حقیقی است.)
قرار داد می‌کنیم که $a + b\delta = a' + b'\delta$ اگر و تنها اگر $a = a'$ و $b = b'$.
δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^۲ = ۰$!
روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a + b\delta) + (a' + b'\delta) = (a + a') + (b + b')\delta$$
$$(a + b\delta)(a' + b'\delta) = aa' + ab'\delta + ba'\delta + bb'\delta^۲ = aa' + (ab' + ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید این چند جمله‌ای در R ریشه‌ای مضاعف دارد اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشه‌ای غیر حقیقی داشته باشد. (ریشه‌ی غیر حقیقی یعنی ریشه‌ای به شکل $a + b\delta$ که $b \neq ۰$).
توضیح: می‌گوییم a ریشه‌ی مضاعف چند جمله‌ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x - a)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

۶) در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه‌ی تنیس روی میز بین بچه‌های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده‌اند. بچه‌های کلاس می‌خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می‌دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف

امکان‌پذیر است. ثابت کنید همه‌ی بچه‌های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده‌اند.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۱

---

۱. ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای هر $n \geq 3$، اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ جای‌گشتی با خاصیت مورد نظر باشد، آن‌گاه $a_n = n$. برای اثبات دو حالت را در نظر می‌گیریم:

الف. اگر n فرد باشد. آن‌گاه بنابه فرض مسئله،

$$n|2(a_1 + \cdots + a_{n-1}) = 2(1 + 2 + \cdots + n - a_n) = n(n+1) - 2a_n$$

در نتیجه $n|2a_n$ و چون n فرد است، $n|a_n$ که با توجه به این‌که $a_n \leq n$ نتیجه می‌گیریم $a_n = n$.

ب. اگر n زوج باشد($n = 2k$)، آن‌گاه همانند قسمت قبل $n|2a_n$، لذا $k|a_n$ و $a_n \leq n$، بنابراین $a_n = 2k$ یا $a_n = k$.

اگر $a_n \neq n$، آن‌گاه باید $a_n = k$. اما بنابه فرض مسئله ($i = n - 2$) می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n-1|2(a_1 + \cdots + a_{n-2}) &= 2(1 + 2 + \cdots + n - a_n - a_{n-1}) \\ &= n(n+1) - 2a_n - 2_{n-1} \\ &= n(n-1) + 2n - 2k - 2a_{n-1} \\ &= n(n-1) + n - 2a_{n-1} \end{aligned}$$

پس $n - 1|n - 2a_{n-1}$ و یا معادلاً $2k - 1|2k - 2a_{n-1}$ و در نتیجه $2k - 1|k - a_{n-1}$، اما به وضوح $|k - a_{n-1}| < 2k - 1$ و بنابراین $k - a_{n-1} = 0$ و یا $a_{n-1} = k$ که تناقض است (چون a_n هم برابر k بود). بنابر مطالب بالا در هر جای‌گشت با شرایط مسئله $a_n = n$. حال a_n را از دنباله حذف می‌کنیم. دنباله‌ی به دست آمده نیز جای‌گشتی از ۱ تا $n - 1$ با خاصیت مورد نظر مسئله است، در نتیجه جمله‌ی آخر این دنباله یعنی a_{n-1} هم باید برابر $n - 1$ باشد. به همین ترتیب مشخص است که برای هر $3 \leq k \leq n$ باید داشته باشیم $a_k = k$. برای a_1 و a_2 هم به وضوح می‌توان دو حالت ۱ و ۲ یا ۲ و ۱ را در نظر گرفت. به این ترتیب تنها دو جای‌گشت $(1, 2, \dots, n)$ و $(2, 1, 3, \dots, n)$ خاصیت مورد نظر مسئله را دارند.

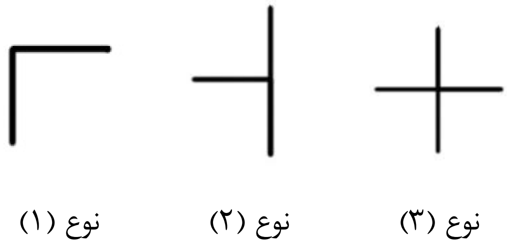
۲. قرار دهید

R : تعداد مستطیل‌ها، H : تعداد خطوط افقی

V : تعداد خطوط عمودی، X : تعداد چهارراه‌ها

می‌خواهیم ثابت کنیم $H + V + X = R + 3$. برای کار مجموع زاویه‌های مستطیل‌های پوشاننده را از دو روش محاسبه می‌کنیم. اولاً چون تعداد مستطیل‌ها R و جمع زوایای هر مستطیل $360°$ است، پس این مقدار برابر است با $R \times 360°$. ثانیاً گره‌های شکل به صورت یکی از انواعی است که در شکل ۱ (ابتدای صفحه‌ی بعد) می‌بینید.

تعداد گره‌های نوع (۱) یعنی رأس‌های مستطیل بزرگ فقط ۴تا است. تعداد گره‌های نوع (۳) هم که Xتا است. اما تعداد گره‌های نوع (۲) چندتا است؟ اگر به شکل دقت کنید متوجه خواهید شد که هر یک از دو سر یک پاره‌خط افقی و عمودی به غیر از چهار ضلع مستطیل بزرگ به گره از نوع (۲) ختم



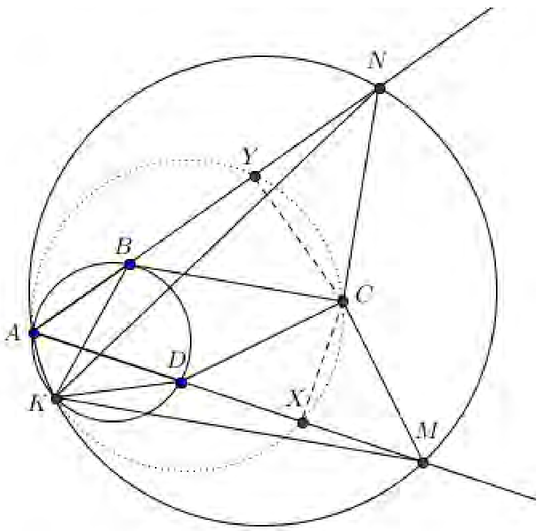
شکل ۱: انوع مختلف گره‌های موجود در شکل

می‌شود. بنابراین تعداد گره‌های نوع (۲) برابر است با $۲ \times (H + V - ۴)$. حال توجه کنید که گره‌های نوع (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب زوایای ۹۰°، ۱۸۰° و ۳۶۰° تولید می‌کنند. پس مجموع زاویه‌های مستطیل برابر است با:

$$۴ \times ۹۰^\circ + ۲ \times (H + V - ۴) \times ۱۸۰^\circ + X \times ۳۶۰^\circ = (H + V + X - ۳) \times ۳۶۰^\circ$$

از مقایسه‌ی این مقدار با مقداری که در ابتدا به دست آوردیم حکم مسئله نتیجه می‌شود.

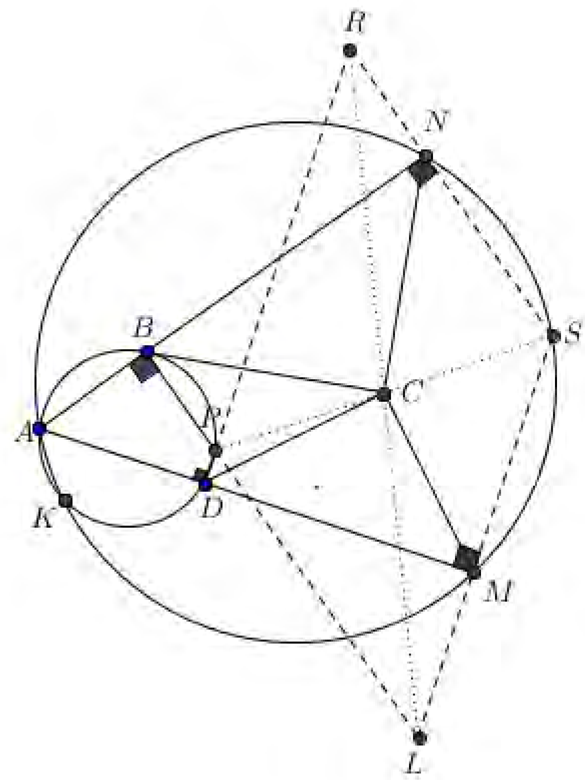
۳. راه‌حل اول. نقطه‌های X و Y را به ترتیب وسط DM و BN بگیرید. با توجه به این که دو دایره در نقطه‌ی K متقاطع هستند، زاویه‌های $\angle KNB$ و $\angle KMD$ در دایره‌ی محیطی AMN روبه‌رو به کمان AK هستند و در نتیجه با هم برابرند. به همین ترتیب زاویه‌های $\angle KBA$ و $\angle KDA$ در دایره‌ی محیطی ABD روبه‌رو به کمان AK هستند و لذا با هم برابر هستند. برابری این زاویه‌ها نتیجه می‌دهد که دو مثلث KMD و KNB با هم متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌های $\angle KYB$ و $\angle KXD$ که زاویه‌های بین میانه و ضلع متناظر در این دو مثلث هستند با هم برابر می‌شوند. این برابری نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی A، K، Y و X روی یک دایره قرار دارند.



از طرف دیگر با توجه به این‌که $\angle ABC = ۱۳۵^\circ$ و $\angle BCN = ۹۰^\circ$ نتیجه می‌شود که مثلث BCN

قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است و لذا میانه‌ی آن یعنی YC ارتفاع هم هست و این یعنی $\angle AYC = ۹۰^\circ$. با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $\angle AXC$ هم قائمه است. پس چهارنقطه‌ی A، Y، X و C هم روی یک دایره قرار دارند. بنابراین در کل پنج نقطه‌ی A، K، Y، C و X هم‌دایره هستند و در نتیجه $\angle AKC = \angle AYC = ۹۰^\circ$. بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

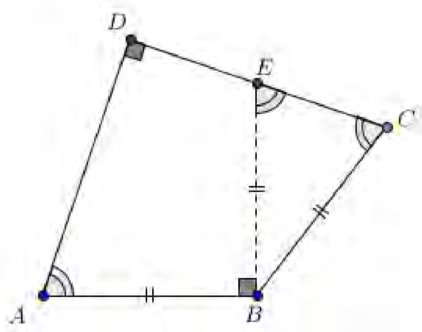
راه‌حل دوم. باید ثابت کنیم دایره‌ی محیطی مثلث ABD، دایره‌ی محیطی مثلث AMN و دایره‌ی به قطر AC، غیر از A در نقطه‌ی دیگری (K) هم‌رس هستند. برای این منظور کافی است ثابت کنیم مرکزهای این سه دایره هم‌خط هستند. (چرا؟)



برای اثبات هم‌خطی مرکزهای این سه دایره، کافی است ثابت کنیم متجانس این مرکزها نسبت به A و به نسبت تجانس ۲ هم‌خط هستند. متجانس مرکز دایره به قطر AC، C می‌باشد. متجانس مرکزهای دایره‌های محیطی ABD و AMN را که البته نقطه‌ی مقابل قطری A در این دایره‌ها می‌باشند، به ترتیب P و S می‌گیریم. پس کافی است نشان دهیم سه نقطه‌ی P، S و C هم‌خط هستند. از آن‌جایی که زاویه‌های $\angle SMA$، $\angle PBA$، $\angle SNA$ و $\angle PDA$ قائمه هستند، لذا $SN \parallel PB$ و $SM \parallel PD$. بنابراین اگر محل برخورد PB با SM را L و محل برخورد PD و SN را R بنامیم، چهارضلعی $PRSL$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. حال به موقعیت نقطه‌ی C توجه کنید. فاصله‌ی C تا SL برابر فاصله‌ی C تا PD و هم‌چنین فاصله‌ی C تا SRوبرابر با فاصله‌ی C تا PL است. بنابراین C محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع، و در

نتیجه نقطه‌های P، C و S هم‌خط هستند و حکم ثابت می‌شود.

۴. مطابق شکل در نقطه‌ی B عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند. چون $\angle B = \angle D = 90^\circ$، بنابراین $ADEB$ محاطی است و لذا $\angle BEC = \angle DAB$. از طرفی با توجه به فرضیات مسئله در مورد چهارضلعی $ABCD$، $\angle DAB = \angle BCD$، بنابراین $\angle BEC = \angle BCD$ و در نتیجه $BE = BC = AB$ بنابراین نقطه‌ی E روی CD نقطه‌ای ثابت در صفحه است، که مکان آن تنها به A و B بستگی دارد.



۵. فرض کنید $a + b\delta$ $(\delta \neq 0)$، یک ریشه‌ی $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ باشد. پس

$$0 = P(a + b\delta) = a_0 + a_1(a + b\delta) + \cdots + a_n(a + b\delta)^n$$

اما با توجه به این که $\delta^2 = 0$ با استفاده از بسط دو جمله‌ای یا به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$(a + b\delta)^k = a^k + ka^{k-1}b\delta$$

بنابراین

$$0 = (a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n) + b\delta(a_1 + 2a_2a + \cdots + na_na^{n-1})$$

توجه کنید که اگر $u + \delta v = 0$، آن‌گاه با توجه به قرارداد ذکر شده در صورت مسئله $u = 0$ و $v = 0$. پس

$$a_0 + a_a + \cdots + a_na^n = P(a) = 0$$

و می‌توان نوشت $P(x) = (x - a)Q(x)$. حال باید نشان دهیم که a ریشه‌ی $Q(x)$ هم می‌باشد. برای این کار Q را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم، $Q(x) = (x - a)R(x) + c$ و

$$\begin{aligned} & P(x) = (x - a)((x - a)R(x) + c) \\ \Rightarrow \quad & 0 = P(a + b\delta) = b\delta(b\delta R(a + b\delta) + c) \\ & = b(b\delta^2 R(a + b\delta) + c\delta) = bc\delta \end{aligned}$$

پس $bc\delta = 0$، و در نتیجه $bc = 0$ و چون $b \neq 0$، پس $c = 0$. بنابراین $P(x) = (x - a)^2R(x)$.
برای اثبات طرف دیگر چون a ریشه‌ی مضاعف $P(x)$ است، پس $P(x) = (x - a)^2R(x)$. در این صورت برای هر $x = a + b\delta$ $(b \neq 0)$ خواهیم داشت،

$$P(a + b\delta) = (b\delta)^2R(a + b\delta) = 0$$

۶. فرض کنید این ۲۰ نفر به ترتیب x_1، x_2،...، x_{20} بازی انجام داده باشند. چود در مجموع ۱۰۰ بازی انجام شده است، لذا $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 200$.

تعداد راه‌های انتخاب دو تیم دو نفره با شرایط مسئله برابر است با $\binom{100}{2} - \sum_{k=1}^{20}\binom{x_k}{2}$. زیرا برای انتخاب دو تیم دو نفره، که دو نفر هم‌تیمی با هم بازی کرده باشند، باید دو تا از ۱۰۰ بازی انجام‌شده را انتخاب کنیم (به $\binom{100}{2}$ روش) و دو نفر شرکت‌کننده در هر بازی را به عنوان یک تیم بگیریم. اما از این تعداد، باید حالاتی را که دو تیم عضو مشترک پیدا می‌کنند کم کنیم. تعداد حالت‌ها برابر $\sum_{k=1}^{20}\binom{x_k}{2}$ است، زیرا اگر عضو مشترک دو تیم، نفر k باشد، دو عضو دیگر تیم‌ها باید از بین x_k نفری انتخاب شوند که با نفر k بازی کرده‌اند. پس،

$$4050 = \binom{100}{2} - \sum_{k=1}^{20}\binom{x_k}{2} = 4950 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} x_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} x_k$$

بنابراین $\sum\limits_{k=1}^{20} x_k^2 = 2000$. پس

$$\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20} x_k^2 = \left(\frac{\sum_{k=1}^{20} x_k}{20}\right)^2$$

اما می‌دانیم که برای هر n عدد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right)^2$$

و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. بنابراین در مسئله‌ی فوق هم باید $x_1 = x_2 = \cdots = x_{20}$ باشند.

به نام او

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز اول

---

۱. فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، به طوری که $np + ۱$ یک مربع کامل است. ثابت کنید می‌توان $n + ۱$ را به صورت مجموع p تا مربع کامل نوشت.

۲. مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC مفروض است. روی اضلاع آن سه مثلث $B'AC$، $C'AB$ و $A'BC$ را به سمت خارج می‌سازیم، به طوری که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = ۳۰^\circ$$
$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = ۶۰^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد، نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

۳. تمام nهایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آن‌ها افقی و عمودی باشند و شکل حاصل حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

به نام او

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز دوم

---

۴. تمام چندجمله‌ای‌های P با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی x، داشته باشیم:

$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2$$

۵. در مثلث ABC $(AB > AC)$ نیم‌سازهای رأس‌های B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. هم‌چنین نقطه‌ی تقاطع دو نیم‌ساز را نقطه‌ی I می‌گیریم. اگر $IP = IQ$ باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

۶. جدولی با یک سطر و تعدادی نامتناهی خانه در نظر بگیرید، که از سمت چپ متناهی باشد(نظیر شکل زیر)

							....

در این جدول تعدادی متناهی مهره قرار داده‌ایم به گونه‌ای که در بعضی خانه‌ها تعدادی مهره قرار گرفته است. (در یک خانه می‌تواند بیش‌تر از یک مهره باشد.) دو عمل زیر را می‌توان روی مهره‌ها انجام داد:

۱) اگر در دو خانه‌ی مجاور، در هر یک تعدادی مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌های خانه‌ی سمت چپ را دو خانه به راست برد و یک مهره از خانه‌ی سمت راست را حذف کرد.

۲) در حالتی که در یکی از خانه‌های سوم به بعد بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌ها را یک خانه به راست و یک مهره‌ی دیگر را دو خانه به سمت چپ برد.

الف) ثابت کنید که با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.

ب) فرض کنید در هر یک از خانه‌های اول تا nاُم یک مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکر شده هیچ‌گاه مهره‌ای از خانه‌ی $n+1$اُم جلوتر نخواهد رفت.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم نوزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۰

---

۱. فرض کنید x عدد صحیحی باشد که $x^۲ = np + ۱$. پس $p|x^۲ - ۱$ و در نتیجه $p|(x-۱)(x+۱)$. با توجه به این که p یک عدد اول است، $p|x - ۱$ و یا $p|x + ۱$. بنابراین عدد طبیعی k یافت می‌شود که $x = kp + ۱$ و یا $x = kp - ۱$. از این‌جا مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

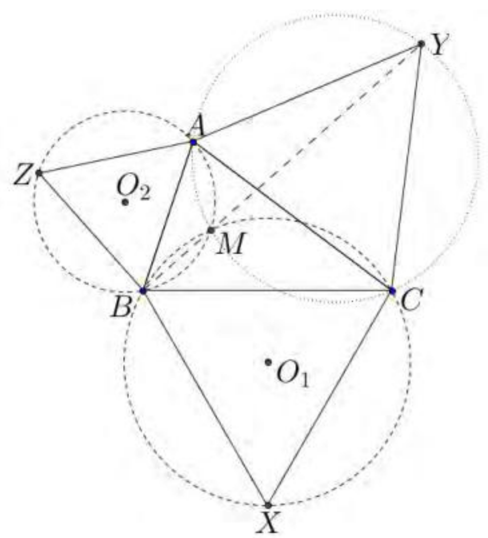
$$\begin{aligned} x = kp + ۱ \quad &\Rightarrow \quad ۱ + np = (kp+۱)^۲ = k^۲p^۲ + ۲kp + ۱ \\ &\Rightarrow \quad n = k^۲p + ۲k \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = pk^۲ + ۲k + ۱ = (p-۱)k^۲ + (k+۱)^۲ \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = \underbrace{k^۲ + \cdots + k^۲}_{p-۱} + (k+۱)^۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = kp - ۱ \quad &\Rightarrow \quad ۱ + np = (kp-۱)^۲ = k^۲p^۲ - ۲kp + ۱ \\ &\Rightarrow \quad n = k^۲p - ۲k \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = pk^۲ - ۲k + ۱ = (p-۱)k^۲ + (k-۱)^۲ \\ &\Rightarrow \quad n + ۱ = \underbrace{k^۲ + \cdots + k^۲}_{p-۱} + (k-۱)^۲ \end{aligned}$$

پس در هر صورت $np + ۱$ مجموع p مربع کامل است.

۲. ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. اگر بر روی اضلاع مثلث حاده‌الزاویه ABC و در خارج از آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع BCX، CAY و ABZ را بنا کنیم و $O_۱$ و $O_۲$ به ترتیب مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های BCX و ABZ باشند، در این صورت $BY \perp O_۱O_۲$.

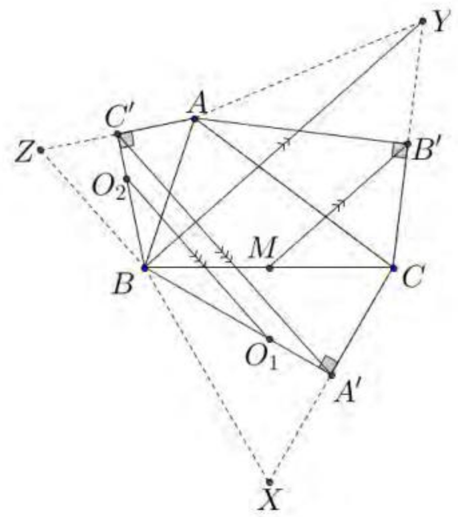


اثبات. فرض کنید M نقطه‌ی برخورد این دو دایره غیر از B باشد. در این صورت روشن است که $\angle BMC = \angle AMB = ۱۲۰^\circ$ و در نتیجه $\angle CMA = ۱۲۰^\circ$. حال با توجه به این‌که $\angle AYC = ۶۰^\circ$، چهارضلعی $AMCY$ محاطی است. پس:

$$\angle AMY = \angle ACY = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle AMB + \angle AMY = ۱۲۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین نقطه‌های B، M و Y هم‌خط هستند. از طرفی BM وتر مشترک دو دایره به مرکز $O_۱$ و $O_۲$ است و بنابراین بر خط‌المرکزین دو دایره یعنی $O_۱O_۲$ عمود است. در نتیجه $BY \perp O_۱O_۲$. □

حال با در نظر داشتن لم فوق به حل مسئله می‌پردازیم.
مثلث‌های ساخته‌شده روی اضلاع مثلث ABC را طبق شکل زیر کامل می‌کنیم تا به مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع تبدیل شوند. در این صورت به وضوح نقطه‌های A'، B' و C' وسط‌های سه ضلع از ضلع‌های این مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند.



حال دقت کنید که اگر $O_۱$ مرکز دایره‌ی محیطی BCX و $O_۲$ مرکز دایره‌ی محیطی ABZ باشد، $O_۱$ روی BA' و $O_۲$ روی BC' واقع است و به علاوه:

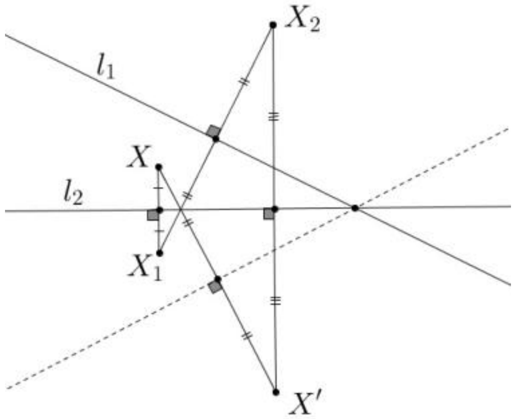
$$\frac{BO_۱}{O_۱A'} = \frac{BO_۲}{O_۲C'} = ۲$$

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس $O_۱O_۲ \parallel A'C'$.
هم‌چنین از آن‌جایی که M وسط ضلع BC است و B' وسط YC، $MB' \parallel BY$. اما طبق لم می‌دانیم که $O_۱O_۲ \perp BY$، بنابراین $A'C' \perp MB'$.

۳. ابتدا به بیان و اثبات چند لم می‌پردازیم:
لم. اگر $l_۱$ و $l_۲$ دو محور تقارن از شکلی باشند، آن‌گاه قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ نیز محور تقارنی از شکل خواهد بود.

اثبات. چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی X نسبت به $l_۲$ که آن را با $X_۱$ نمایش می‌دهیم هم متعلق به شکل است و چون $l_۱$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۱$ نسبت به $l_۱$ که آن را با $X_۲$ نمایش می‌دهیم

هم متعلق به شکل است. در نهایت چون $l_۲$ محور تقارن است، قرینه‌ی $X_۲$ نسبت به $l_۲$ که از X' برای نمایشش استفاده می‌کنیم هم نیز متعلق به شکل است. اما به سادگی می‌توان دید که X' قرینه‌ی X نسبت به خطی است که از قرینه کردن $l_۱$ نسبت به $l_۲$ به دست آمده است. پس در کل برای هر نقطه‌ی X در شکل، قرینه‌ی X نسبت به این خط هم در شکل قرار دارد و بنابراین این خط هم محور تقارنی از شکل است.



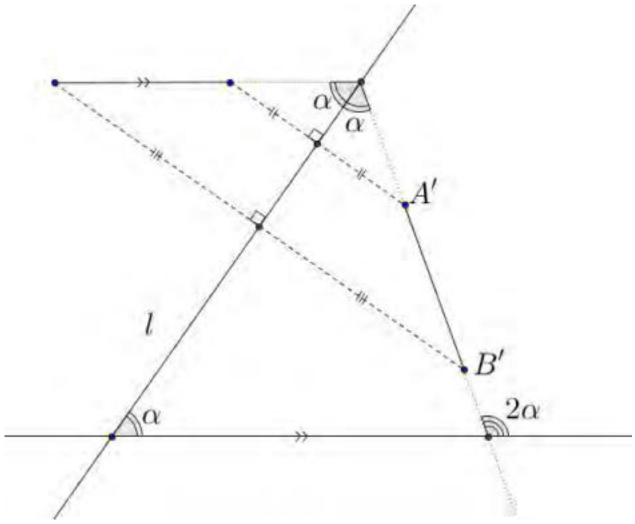
□

لم. هر مجموعه از اشکال که در ناحیه‌ای کران‌دار از صفحه(یعنی ناحیه‌ای که بتوان برای آن دایره‌ای با شعاع هر چند بزرگ یافت که به تمامی درون آن دایره قرار بگیرد.) باشد، نمی‌تواند دو محور تقارن موازی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو محور تقارن موازی برای مجموعه باشند. طبق لم ۱ قرینه‌ی $l_۱$ نسبت به $l_۲$ که آن را $l_۳$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب قرینه‌ی $l_۲$ نسبت به $l_۳$ که آن را $l_۴$ می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب نامتناهی خط موازی باید محور تقارن شکل باشند. اما به وضوح از جایی به بعد مجموعه‌ی ما در یک طرف این خطوط واقع خواهد شد و لذا این خط‌ها از جایی به بعد امکان ندارد که محور تقارن ما باشند. بنابراین چنین مجموعه‌ای دو محور تقارن موازی نمی‌تواند داشته باشد. □

لم. محور تقارن تعدادی مربع با اضلاع عمودی و افقی، خطی است افقی، عمودی و یا با زاویه‌ی ۴۵ درجه یا ۱۳۵ درجه نسبت به محور افقی.

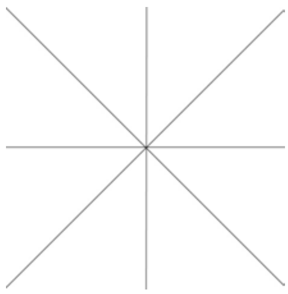
اثبات. فرض کنید خط l محور تقارنی از این شکل باشد و با قسمت مثبت محور x زاویه‌ی α بسازد. در این صورت اگر $A'B'$ قرینه‌ی یکی از اضلاع افقی یکی از مربع‌ها نسبت به l باشد، می‌توان به سادگی دید که باید با محور x زاویه‌ی ۲α بسازد. اما چون ضلع مربع‌ها عمودی و یا افقی است، $A'B'$ هم باید عمودی و یا افقی باشد. پس $۲\alpha \in \{۰, ۹۰^\circ, ۱۸۰^\circ, ۲۷۰^\circ\}$ و در نتیجه $\alpha \in \{۰, ۴۵^\circ, ۹۰^\circ, ۱۳۵^\circ\}$.



□

حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

طبق لم‌های دوم و سوم، سه محور تقارن ما باید دارای سه زاویه‌ی مختلف از چهار زاویه‌ی معرفی شده در بالا باشند. حال با یک بررسی ساده می‌توان دید که در هر کدام از این حالت‌ها می‌توان دو خط یافت که زاویه‌ی آن‌های نسبت به هم برابر ۴۵ درجه باشد. حال از لم اول استفاده کنید، با قرینه کردن این دو محور نسبت به هم‌دیگر شکل ما چهار محور تقارن هم‌رس به صورت زیر پیدا می‌کند.



بنابراین مجموعه‌ی مطرح‌شده در صورت سؤال حتماً ۴ محور تقارن به این صورت دارد. حال وضعیت مربع‌ها را نسبت به این چهار محور بررسی می‌کنیم.

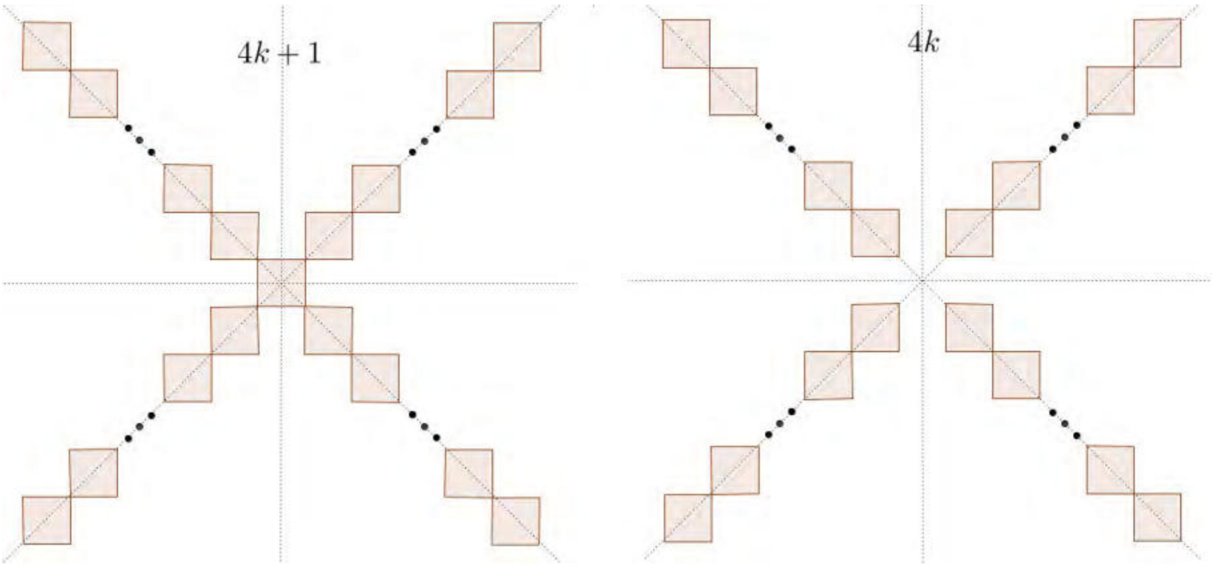
مرکز هر مربع یا در ناحیه‌های بین محورها است یا روی محورها و نه در نقطه‌ی تقاطع آن‌ها و یا در نقطه‌ی تقاطع است.

اگر مرکز مربع در ناحیه‌های بین محورها باشد، قرینه‌کردن این مربع نسبت به محورها، ۸ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر روی محورها (و نه نقطه‌ی تقاطع آن‌ها) باشد، قرینه کردن این مربع نسبت به محورها، ۴ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند.

اگر به این ترتیب با کنار گذاشتن مربع‌های به مرکز نقطه‌ی تقاطع، بقیه‌ی مربع‌ها را می‌توان به دسته‌هایی

با تعداد اعضای ۴ یا ۸ تقسیم کرد. به مرکز نقطه‌ی تقاطع هم صفر یا یک مربع وجود دارد. لذا اگر بتوانn مربع یکسان با اضلاع افقی و عمودی در صفحه قرار داد که حداقل سه محور تقارن داشته باشد، n باید به یکی از دو صورت $۴k$ و یا $۴k+۱$ باشد. مثال‌های زیر نشان می‌دهد که برای همه‌ی مقدارهای k می‌توان $۴k$ و یا $۴k+۱$ مربع با این خاصیت یافت.



۴. فرض کنید n درجه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ باشد. در این صورت P به فرم زیر است.

$$P(x) = a_n x^x + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰ \quad (a_n \neq ۰)$$

حال ضریب بزرگ‌ترین توان x را در دو طرف عبارت داده‌شده در صورت مسئله محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P(۲P(x)) &= P(۲(a_n x^n + \cdots + a_۰)) \\ &= a_n(۲(a_n x^n + \cdots + a_۰))^n + \cdots + a_۰ \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن $x^{n^۲}$ است و ضریب این جمله برابر $۲^n a_n^{n+۱}$ است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} ۲P(P(x)) &= ۲P(a_n x^n + \cdots + a_۰) \\ &= ۲a_n(a_n x^n + \cdots + a_۰)^n + \cdots + a_۰ \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در این‌جا هم همان $x^{n^۲}$ است که ضریب آن برابر $۲a_n^{n+۱}$ است. در نهایت

$$۲P(x)^۲ = ۲(a_n x^n + \cdots + a_۰)^۲$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن برابر $x^{۲n}$ بوده و ضریب این جمله $۲a_n^۲$ است.

حال اگر $n > ۲$ باشد، $n^۲ > ۲n$ و لذا بزرگ‌ترین توان x در دو سمت عبارت $x^{n^۲}$ خواهد بود. از برابر قرار دادن ضریب این جمله در دو طرف تساوی به دست می‌آوریم $۲^n a_n^{n+۱} = ۲a_n^{n+۱}$ که با فرض $a_n \neq ۰$ و $n > ۲$ هیچ‌گاه نمی‌تواند برقرار باشد. به این ترتیب سه حالت برای درجه‌ی $P(x)$ محتمل است.

حالت اول. $n = ۰$. در این صورت $P(x) = a_۰$ است و باید داشته باشیم:

$$a_۰ = ۲a_۰ + ۲a_۰^۲ \Rightarrow ۲a_۰^۲ + a_۰ = ۰ \Rightarrow a_۰(۲a_۰ + ۱) = ۰$$

پس $a_0 = 0$ و یا $a_0 = -\frac{1}{2}$ و بنابراین تنها جواب‌های آن $P(x) \equiv 0$ و $P(x) \equiv -\frac{1}{2}$ هستند.
حالت دوم. $n = 1$. در این صورت $P(x) = ax + b$ که $a \neq 0$، و باید داشته باشیم:

$$a(2(ax+b)) + b = 2a(ax+b) + 2b + 2(ax+b)^2$$

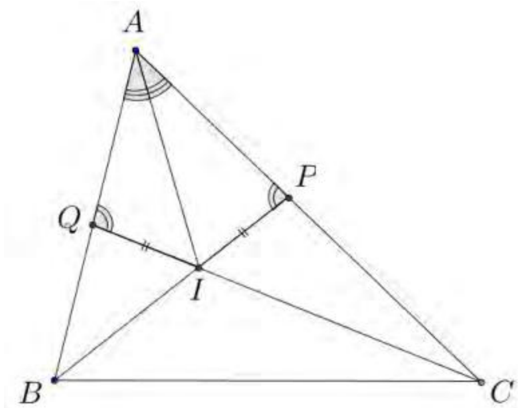
ضریب x^2 در طرف چپ صفر است، در حالی‌که در سمت راست ضریب x^2 برابر $2a^2$ است. پس باید a برابر صفر باشد که در این حالت فرض کرده‌ایم این طور نیست.
حالت سوم. $n = 2$. در این صورت $P(x) = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$، و باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} & P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2 \\ \Rightarrow\quad & 4aP(x)^2 + 2bP(x) + c = 2aP(x)^2 + 2bP(x) + c + 2P(x)^2 \\ \Rightarrow\quad & 2aP(x)^2 = c + 2P(x)^2 \end{aligned}$$

از برابر قرار دادن ضریب x^4 در دو طرف نتیجه می‌شود که $2a^3 = 2a^4$ و که چون $a \neq 0$ باید $a = 1$ باشد. حال تساوی بالا نشان می‌دهد که $c = 0$. بنابراین جواب این قسمت به صورت $x^2 + bx$ است که می‌توان دید در شرط مسئله صدق می‌کند.
بنابراین همه‌ی جواب‌های مسئله به دست آمد.

۵. در دو مثلث AIP و AIQ از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\frac{IP}{\sin(\frac{\angle A}{2})} = \frac{AI}{\sin(\angle P)}, \qquad \frac{IQ}{\sin(\frac{\angle A}{2})} = \frac{AI}{\sin(\angle Q)}$$



بنابراین اگر $IP = IQ$، آن‌گاه $\sin(\angle P) = \sin(\angle Q)$. پس یا این دو زاویه با هم برابر هستند و یا مکمل یک‌دیگرند. اما $\angle P = \angle C + \frac{1}{2}\angle B$ و $\angle Q = B + \frac{1}{2}\angle C$. بنابراین اگر $\angle P = \angle Q$ آن‌گاه $\angle B = \angle C$ که خلاف فرض $AB > AC$ است. پس $\angle P + \angle Q = 180^\circ$. در نتیجه

$$\angle C + \frac{1}{2}\angle B + \angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = \frac{2}{3}180^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ$$

۶. الف) خانه‌های این جدول را از چپ به راست با عددهای ۱، ۲، ۳،... شماره‌گذاری می‌کنیم. در هر حالت تعداد مهره‌های موجود در خانه‌ی kام را با a_k نمایش می‌دهیم. در هر گام از فرآیند مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k + \text{تفاضل تعداد مهره‌ها}$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هر عمل (چه از نوع یک و چه از نوع دو) حداقل یک واحد کاهش می‌یابد. زیرا:

اگر عمل از نوع یک باشد، و این دو خانه، خانه‌های iام و $i+1$ام باشند، از S به اندازه‌ی $i+(i+1)+1$ واحد کم‌شده و $i+2$تا به S اضافه می‌شود. بنابراین S به $S-i$ تبدیل می‌شود و در نتیجه حداقل یک واحد کاهش می‌یابد.

اگر عمل از نوع دو باشد، و این خانه، خانه‌ی iام باشد، از S به اندازه‌ی $2i$ کم‌شده و $(i+1)+(i-2)$ جای‌گزین آن می‌شود. پس S به $S-1$ تبدیل شده و یک واحد کاهش می‌یابد.

اما دقت کنید که هم‌واره باید $S \geq 0$. بنابراین اگر مقدار S را در ابتدای کار S_0 بنامیم.(دقت کنید که چون تعداد مهره‌ها در آغاز کار متناهی است، لذا مقدار S_0 نیز متناهی است) ما قادر به انجام بیش‌تر از S_0 عملیات نیستم و بنابراین حداکثر بعد از انجام S_0 عمل، عملیات به پایان می‌رسد.

ب) دنباله‌ی اعداد فیبوناتچی را که به شکل زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید.

$$f_1 = f_2 = 1, \ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \ n \geq 0$$

ابتدا دقت کنید که به راحتی می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی n،

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

حال برای حل مسئله، مجموع S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هیچ‌یک از دو عمل ذکرشده در صورت مسئله تغییر نمی‌کند. زیرا اگر عمل نوع ۱ باشد و روی خانه‌های n و $n+1$ام انجام شود، تغییرات S برابر است با $f_{n+2} - f_n - f_{n+1} = 0$.
و اگر عمل از نوع ۲ باشد و روی خانه‌ی nام انجام شود، تغییرات S برابر است با

$$\begin{aligned} f_{n+1} + f_{n-2} - 2f_n &= f_n + f_{n-1} + f_{n-2} - 2f_n \\ &= f_{n-1} + f_{n-2} - f_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

مقدار S در ابتدای کار برابر با $S_0 = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$ است و طبق آن‌چه گفته شد، مقدار S در همه‌ی مرحله‌ها همین مقدار $f_{n+2} - 1$ باقی خواهد ماند. بنابراین اگر در مرحله‌ای، مهره‌ای از خانه‌ی $n+1$ام جلوتر برود، مقدار S باید حداقل f_{n+2} بشود که این‌گونه نخواهد بود.

بسمه تعالی

باشگاه دانش پژوهان جوان

کمیته ملی المپیاد ریاضی ایران

۱) ۲۱ عدد متمایز از بین اعضای مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\dots,۲۰۴۶\}$ انتخاب شده‌اند. نشان دهید که می‌توان سه عدد متمایز a، b و c از بین آن ۲۱ عدد انتخاب کرد به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$bc < ۲a^۲ < ۴ac$$

۲) نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و فقط اگر

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

(مرکز ثقل یک مثلث محل تلاقی سه میانه‌ی آن مثلث است.)

۳) مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰۰۰\}$ را M می‌نامیم. نشان دهید که می‌توان ۱۶ زیرمجموعه از M انتخاب کرد به طوری که برای هر $a \in M$، ۸ تا از این مجموعه‌ها باشند که اشتراک آنها دقیقاً برابر $\{a\}$ باشد.

۴) همه‌ی عددهای طبیعی n را بیابید که مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\dots,n\}$ را بتوان به سه مجموعه‌ی مجزای A، B و C تقسیم کرد به طوری که مجموع اعضای این سه مجموعه با هم برابر باشد.

۵) می‌دانیم در چهاروجهی $ABCD$، مجموع زاویه‌های هر رأس برابر ۱۸۰° درجه است. (مثلاً در رأس A: $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = ۱۸۰°$) نشان دهید که وجوه این چهاروجهی، چهار مثلث برابرند.

۶) «اَبَر عدد» تعمیمی از مفهوم عدد است. همان‌طور که می‌دانید هر عدد طبیعی به صورت دنباله‌یی متناهی از ارقام صفر تا نه نوشته می‌شود. یک «ابر عدد» دنباله‌ای از سمت چپ نامتناهی از ارقام صفر تا نه است، مثلاً ...۳۰۳۰۳۰۴ یک ابر عدد است. توجه کنید که هر عدد خود یک ابر عدد است (که از جایی به بعد ارقام آن همگی صفرند). با همان روشی که دو عدد با هم جمع یا در هم ضرب می‌شوند، می‌توان دو «ابر عدد» را نیز با هم جمع و یا در هم ضرب کرد. مثال:

```
     ۱    ۱
 ...۳۰۳۰۳۰۴
+...۴۵۷۱۳۷۸
-----------
 ...۷۶۰۱۶۸۲

 ...۳۰۳۰۳۰۴
×...۴۵۷۱۳۷۸
-----------
 ...۴۲۴۲۴۳۲
 ...۲۱۲۱۲۸
 ...۹۰۹۱۲
 ...۰۳۰۴
 ...۱۲۸
 ...۲۰
 ...۶
-----------
 ...۵۰۳۸۹۱۲
```

الف) فرض کنید A یک ابر عدد است. ثابت کنید ابرعدد B وجود دارد که $A+B=\overleftarrow{0}$ (منظور از $\overleftarrow{0}$ «ابرعدد»ی است که همه‌ی رقم‌های آن صفر است).

ب) تمام ابر عددهای A را پیدا کنید که وارون ضربی دارند، یعنی ابرعدد B وجود دارد که $A\times B=\overleftarrow{0}1$ (منظور از $\overleftarrow{0}1$ «ابرعدد» ۱ ۰۰۰ ... است).

ج) آیا درست است که اگر $A\times B=\overleftarrow{0}$ آن‌گاه $A=\overleftarrow{0}$ و یا $B=\overleftarrow{0}$؟ چرا؟

۱) اعداد مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲۰۴۶\}$ را به ۱۰ مجموعه به صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$A_۱ = \{۱, ۲, ۳\}$
$A_۲ = \{۴, ۵, ۶, ۷\}$
$A_۳ = \{۸, ۹, \ldots, ۱۵\}$
$A_k = \{۲^k, ۲^k + ۱, \ldots, ۲^{k+۱} - ۱\}$
$A_{۱۰} = \{۱۰۲۴, \ldots, ۲۰۴۶\}$

تعداد این مجموعه‌ها ۱۰ تا و تعداد اعضای انتخاب شده ۲۱ است. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری، ۳ تا از این اعداد از یک مجموعه انتخاب شده‌اند. این سه عدد را به ترتیب از کوچک به بزرگ c، a و b می‌نامیم. ادعا می‌کنیم که این سه عدد در رابطه‌ی مورد نظر مسأله صدق می‌کنند.
اگر این سه عدد متعلق به $A_۱$ باشند، که به وضوح $bc < ۲a^۲ < ۴bc$.
حال فرض کنید که این سه عدد متعلق به یکی دیگر از مجموعه‌ها باشند. مجموعه‌های $A_۲$،...،$A_{۱۰}$ چه خاصیت جالبی دارند؟ دقت کنید که در همه‌ی این مجموعه‌ها، بزرگ‌ترین عضو مجموعه از دو برابر کوچک‌ترین عضو مجموعه کمتر است. پس برای هر دو عدد مثل x و y در این مجموعه‌ها $x < ۲y$. با توجه به این خاصیت و ترتیبی که برای a و b و c قائل شدیم $(c < a < b)$، داریم

$$\left.\begin{matrix} c < a \\ b < ۲a \end{matrix}\right\} \Rightarrow bc < ۲a^۲, \quad \left.\begin{matrix} a < b \\ a < ۲c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^۲ < ۲bc \Rightarrow ۲a^۲ < ۴bc$$

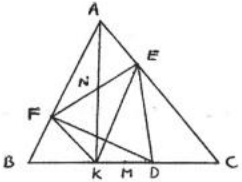
بنابراین $bc < ۲a^۲ < ۴bc$.

۲) ابتدا فرض کنید $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$. M را وسط BC و K را قرینه‌ی D نسبت به M بگیرید. در این‌صورت $BD = KC$ و $DC = BK$ و بنابراین

$$\frac{CK}{KB} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

و در نتیجه طبق قضیه تالس $KE || AB$ و $KF || AC$. پس چهارضلعی $AFKE$ متوازی الاضلاع است، و بنابراین قطرهای این چهارضلعی، یعنی AK و EF،

هم‌دیگر را در نقطه‌ی N نصف می‌کنند.



حالا به مثلث $\overset{\triangle}{AKD}$ توجه کنید. میانه AM از ضلع BC و میانه‌ی DN از ضلع EF، میانه‌های این مثلث نیز هستند و بنابراین مرکز ثقل این مثلث (که آن‌را G می‌نامیم)، AM و DN را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. لذا G مرکز ثقل دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ نیز هست. اثبات طرف عکس نیز مشابه است. فرض کنید مراکز ثقل این دو مثلث بر هم منطبق باشند، بنابراین میانه AM از ضلع BC و DN از ضلع EF، هم‌دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند. محل برخورد AN با BC را K بنامید. در این صورت چون در مثلث $\overset{\triangle}{AKD}$، AM و DN هم‌دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کرده‌اند، لذا باید میانه باشند. پس

$$AN = NK, KM = MD$$

حال با توجه به این‌که $AN = NK$ و $FN = NE$، چهار ضلعی $AFKE$ باید متوازی الاضلاع باشد و لذا $KF \| AC$ و $KE \| AB$. بنابراین طبق قضیه تالس

$$\frac{AF}{FB} = \frac{CK}{KB} = \frac{CE}{EA}$$

اما ثابت کردیم $KM = MD$، پس $CK = BD$ و $KB = DC$ و رابطه‌ی فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA}$$

۳) مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$ را به روش زیر می‌سازیم:
ابتدا ۸ تا از این مجموعه‌ها را انتخاب کرده و ۱ را در آنها می‌گذاریم، سپس ۸ تای دیگر را (که دقیقاً همان ۸ تای قبل نباشند) انتخاب کرده و ۲ را در آنها می‌گذاریم و به همین ترتیب کار را ادامه می‌دهیم؛ یعنی برای هر یک از اعضای M، مثل a، ۸

تا از این مجموعه‌ها که برای هیچ‌یک از اعضای قبلی دقیقا همین ۸ تا را انتخاب نکرده‌ایم، انتخاب می‌کنیم و a را در این ۸ تا قرار می‌دهیم. چنین کاری قطعاً ممکن است؛ چون تعداد حالاتی که می‌توان ۸ تا از این ۱۶ مجموعه را انتخاب کرد برابر است با $\binom{16}{8} = 12870 > 10000$. بنابراین می‌توان ۸ مجموعه را برای هر یک از ۱۰۰۰۰ عضو M چنان انتخاب کرد، که این ۸ تایی‌ها برای هیچ دو عضوی یکسان نباشند.

حال واضح است که مجموعه‌های $A_1, \ldots, A_{16}$ خاصیت مورد نظر را دارند. زیرا برای هر $a \in M$، اگر همان ۸ مجموعه‌ای که a را در آنها قرار داده‌ایم در نظر بگیریم، همه‌ی آنها a را دارند و هیچ چیز مشترک دیگری ندارند، زیرا طبق نحوه‌ی ساختن ما، برای هیچ عضو دیگری، دقیقاً همین ۸ مجموعه را انتخاب نکرده‌ایم.

۴) فرض کنید مجموع اعضای A، B و C برابر k باشد. در این‌صورت

$$1 + 2 + \cdots + n = 3k \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 3k \Rightarrow n(n+1) = 6k$$

در این صورت واضح است که n باید به یکی از فرم‌های $6t$، $6t+2$، $6t+3$ و $6t+5$ باشد. و n نمی‌تواند به فرم‌های $6t+1$ و $6t+4$ باشد (چون در این‌صورت $n(n+1)$ مضرب ۶ نخواهد شد). بنابراین لازم است که $n = 6t, 6t+2, 6t+3$ یا $6t+5$.

حال دقت کنید که اگر n خاصیت مورد نظر را داشته باشد، $n+6$ هم خاصیت مورد نظر را خواهد داشت. زیرا کافیست اعداد $\{n+1, \ldots, n+6\}$ را به سه زوج $(n+1, n+6)$، $(n+2, n+5)$ و $(n+3, n+4)$ دسته‌بندی کرده و هر زوج را به یکی از مجموعه‌های A، B و C اضافه کنید. بنابراین،

چون $n = 6$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = 6t$ها $(t \in N)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون $n = 8$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = 6t+2$ها $(t \in N)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون $n = 9$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = 6t+3$ها $(t \in N)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون $n = 5$، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه $n = 6t+5$ها $(t \geq 0)$ خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

اعداد $۲ + ۰ \times ۶ = ۲$ و $۳ + ۰ \times ۶ = ۳$ هم که به وضوح خاصیت مورد نظر را ندارند. پس، اعدادی که خاصیت مورد نظر مسأله را دارند عبارتند از:

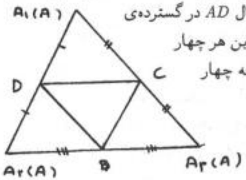
$n = ۶t, t \in N$

$n = ۶t + ۲, t \in N$

$n = ۶t + ۳, t \in N$

$n = ۶t + ۵, t \in N \cup \{۰\}$

۵) چهار وجهی را از رأس A باز کنید. چون مجموع سه زاویه‌ی موجود در هر یک از رئوس B، C و D برابر ۱۸۰° است، گسترده‌ی این چهار وجهی، همان‌طور که در شکل می‌بینید، بصورت یک مثلث خواهد بود، که نقاط B، C و D وسط‌های اضلاع آن هستند (دقت کنید که مثلاً یال AD در گسترده‌ی چهار وجهی دو بار ظاهر می‌شود.) بنابراین هر چهار مثلث موجود در شکل، یعنی هر چهار وجه چهار وجهی، با هم برابرند (چرا؟).



۶) الف) فرض کنید $A = \cdots a_۲a_۱a_۰$.
A ممکن است در جلوی خود تعدادی صفر داشته باشد، a_i را اولین رقم غیر صفر A بگیرید. ابر عدد $B = \cdots b_۲b_۱b_۰$ را به این صورت می‌سازیم:

$$b_n = \begin{cases} ۰ & n < i \\ ۱۰ - a_i & n = i \\ ۹ - a_n & n > i \end{cases}$$

در این صورت واضح است که $A + B = \overleftarrow{۰}$.

ب) مشخص است که رقم یکان A باید فرد و مخالف ۵ باشد. زیرا اگر رقم یکان A زوج و یا ۵ باشد، رقم یکان $A \times B$ نیز یا زوج خواهد شد و یا ۵، و به هر حال ۱ نخواهد شد.

ادعا می‌کنیم که شرط فوق، کافی نیز هست. یعنی اگر $A = \cdots a_۲a_۱a_۰$ و $a_۰$ فرد و $a_۰ \neq ۵$ باشد، در این‌صورت A حتماً وارون ضربی دارد.

برای اثبات ادعای خود سعی می‌کنیم عدد $B = \cdots b_۲b_۱b_۰$ را طوری بسازیم که $A \times B = \overleftarrow{۰}۱$. اولاً چون $a_۰$ فرد و مخالف ۵ است، پس $(a_۰, ۱۰) = ۱$،

در نتیجه $\exists\, \circ \leq b_\circ \leq ۹ \;:\; a_\circ b_\circ \overset{۱\circ}{\equiv} ۱$

به این ترتیب با انتخاب $b_\circ$ به صورت فوق، رقم یکان $A \times B$، برابر ۱ خواهد شد.

حال فرض کنید ارقام $b_\circ, b_۱, \dots, b_k$ را چنان ساخته باشیم که $k + ۱$ رقم اول $A \times B$، برابر $\underbrace{\circ\circ \dots \circ}_{k \text{ تا}}۱$ باشد. نشان می‌دهیم می‌توان $b_{k+۱}$ را طوری انتخاب کرد که $k + ۲$ رقم اول $A \times B$ برابر $\underbrace{\circ\circ \dots \circ}_{k+۱ \text{ تا}}۱$ باشد.

ابتدا فرض کنید $A \times b_k b_{k-۱} \cdots b_\circ = \cdots c_{k+۲} c_{k+۱} \overbrace{\circ\circ \dots \circ\circ}^{k \text{ تا}} ۱$

در این‌صورت

$$\begin{aligned} A \times b_{k+۱} b_k b_{k-۱} \cdots b_\circ &= \cdots c_{k+۲} c_{k+۱} \overbrace{\circ\circ \dots \circ\circ}^{k \text{ تا}} ۱ \\ &\quad + ۱\circ^{k+۱} A \times b_{k+۱} \\ &= \cdots c_{k+۲} c_{k+۱} \overbrace{\circ\circ \dots \circ\circ}^{k \text{ تا}} ۱ \\ &\quad + (A \times b_{k+۱}) \quad \circ \dots \quad \circ\circ \end{aligned}$$

رقم یکان $A \times b_{k+۱}$ برابر است با باقی‌مانده‌ی $a_\circ \times b_{k+۱}$ بر ۱۰. بنابراین اگر $b_{k+۱}$ را طوری انتخاب کنیم که

$$a_\circ \times b_{k+۱} + c_{k+۱} \overset{۱\circ}{\equiv} \circ \qquad (\star)$$

در این‌صورت $k + ۲$ رقم اول $A \times B$ برابر $\underbrace{\circ\circ \dots \circ}_{k+۱ \text{ تا}}۱$ خواهد شد. برای ارضای معادله‌ی $(\star)$ کافیست $b_{k+۱}$ را برابر باقی‌مانده‌ی $-c_{k+۱}.b_\circ$ بر ۱۰ بگیرید. در این صورت

$$a_\circ \times b_{k+۱} + c_{k+۱} \overset{۱\circ}{\equiv} a_\circ(-b_\circ.c_{k+۱}) + c_{k+۱}$$

اما $b_\circ$ چنان بود که $a_\circ b_\circ \overset{۱\circ}{\equiv} ۱$، بنابراین

$$a_\circ \times b_{k+۱} + c_{k+۱} \overset{۱\circ}{\equiv} -a_\circ b_\circ.c_{k+۱} + c_{k+۱} \overset{۱\circ}{\equiv} -c_{k+۱} + c_{k+۱} \overset{۱\circ}{\equiv} \circ$$

به این ترتیب دیدیم که دنباله‌ی $b_۰، b_۱، b_۲، \ldots$ را می‌توان طوری گسترش داد که ارقام اول $A \times b_{k+1} \ldots b_۰$ برای هر $k \in N$ برابر $\underbrace{۰ \ldots ۰۰}_{k+1 \text{ تا}}۱$ شوند، پس

$$A \times B = \cdots ۰۰۰ \ldots ۰۱ = \overleftarrow{۰}۱$$

ج) سعی می‌کنیم ابر عددهای ناصفر $A = \cdots a_۲a_۱a_۰$ و $B = \cdots b_۲b_۱b_۰$ را طوری بسازیم که همه ارقام حاصل‌ضرب $C = A \times B = \cdots c_۲c_۱c_۰$ برابر صفر باشد.

می‌گیریم $a_۰ = ۵$ و $b_۰ = ۲$، در این‌صورت $c_۰ = ۰$. حال می‌خواهیم a_nها و b_nها را بگونه‌ای پیدا کنیم که برای هر n، $c_n = ۰$. این کار را به شیوه‌ی استقرایی انجام می‌دهیم. به حاصل‌ضرب $A \times B$ توجه کنید؛

$$\begin{array}{r} \ldots r_۳r_۲r_۲\,۱ \\ \ldots a_۲a_۲a_۱۵ \\ \times \ldots b_۲b_۲b_۱۲ \\ \hline \ldots c_۲c_۲c_۱۰ \end{array}$$

که در بالای هر طبقه ده بر یک نقلی از طبقه‌ی قبل را نوشته‌ایم. یکان $A \times B$ که با انتخاب $a_۰ = ۵$ و $b_۰ = ۲$ صفر می‌شود و البته ۱ ده بر یک برای رقم دهگان ایجاد می‌کند.

رقم دهگان $A \times B$ برابر است با باقی‌مانده‌ی $۲a_۱ + ۵b_۱ + ۱$ بر ۱۰. پس برای صفر کردن $c_۱$ باید $۰ \leq a_۱, b_۱ \leq ۹$ را چنان پیدا کنیم که

$$۲a_۱ + ۵b_۱ + ۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

مثلاً کافیست قرار دهیم $a_۱ = ۲$ و $b_۱ = ۱$.

حال فرض کنید a_iها و b_iها را برای $i < n$ طوری ساخته‌ایم که برای $i < n$، $c_i = ۰$؛ و سعی می‌کنیم a_n و b_n را طوری پیدا کنیم که رقم بعدی C، یعنی c_n هم صفر شود. اما c_n برابر است با باقی‌مانده‌ی عبارت زیر بر ۱۰ (چرا؟)

$$۵b_n + a_۱b_{n-۱} + \cdots + a_{n-۱}b_۱ + ۲a_n + r_n$$

که در آن r_n رقم نقلی از طبقه‌ی قبلی است. باید نشان دهیم اعداد $۰ \leq a_n, b_n \leq ۹$ موجودند، به طوری که

$$۵b_n + ۲a_n \overset{۱۰}{\equiv} -(a_۱b_{n-۱} + \cdots + a_{n-۱}b_۱ + r_n) = c$$

اگر $c = ۲k$، می‌گیریم $b_n = ۰$ و $a_n \overset{۱۰}{\equiv} k$.
اگر $c = ۲k + ۱$، می‌گیریم $b_n = ۱$ و $a_n \overset{۱۰}{\equiv} k - ۲$.
به این ترتیب می‌توانیم ابر عددهای ناصفر A و B را طوری تکمیل کنیم که برای هر n، $c_n = ۰$.

آزمون مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی از ۲ باشد وجود دارد که با جابه‌جایی ارقامش توان دیگری از ۲ حاصل شود؟ چرا؟

۲. مثلث ABC را با فرض $\angle B > ۴۵^\circ$ و $\angle C > ۴۵^\circ$ در نظر می‌گیریم. مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین CAM و BAN را در خارج ABC طوری می‌سازیم که $\angle CAM = \angle BAN = ۹۰^\circ$، و در داخل ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین BPC را طوری می‌سازیم که $\angle P = ۹۰^\circ$. ثابت کنید که مثلث MPN نیز یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۳. یک زمین مربع‌شکل به شبکه‌ای ۱۰۰×۱۰۰ از نقاط متساوی‌الفاصله تقسیم شده و تعداد ۱۰۰۰۰ عدد درخت هر کدام در یکی از نقاط این شبکه کاشته شده است. ماکزیمم تعداد درختهایی که می‌توانیم قطع کنیم را پیدا کنید که اگر در محل هر درخت بریده شده‌ای قرار بگیریم هیچ درخت بریده‌شده‌ی دیگری را نبینیم. (یعنی روی پاره‌خط واصل بین هر دو درخت بریده‌شده، درخت بریده نشده‌ای واقع باشد.)

۴. همه‌ی عددهای طبیعی m به‌صورت زیر

$$m = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۲}{a_۲} + \cdots + \frac{۱۳۷۸}{a_{۱۳۷۸}}$$

را پیدا کنید که در آن $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و $a_{۱۳۷۸}$ اعدادی صحیح و مثبت باشند.

۵. مثلث ABC مفروض است. نقاط P، Q، و R به‌ترتیب روی AB، BC و CA قرار دارند. حال نقاط A'، B' و C' را به‌ترتیب روی PR، QP و RQ طوری در نظر می‌گیریم که AB با $A'B'$، BC با $B'C'$ و CA با $C'A'$ موازی باشند. ثابت کنید که

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{مساحت}PQR}{\text{مساحت}A'B'C'}$$

۶. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n، n نقطه‌ی متمایز در صفحه باشند ($n \geq ۲$). همه‌ی پاره‌خطهایی که از اتصال دوبه‌دوی این نقاط به‌دست می‌آیند را در نظر می‌گیریم و وسط هر یک از این پاره‌خطها را به رنگ قرمز، رنگ می‌کنیم. حداقل تعداد نقاط قرمز به‌دست‌آمده چند تاست؟

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۸

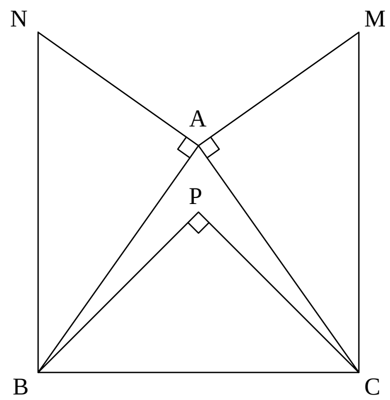
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. خیر وجود ندارد. فرض کنید $a = ۲^m$ و $b = ۲^n$ دو توان ۲ باشند که رقمهای آنها یکسان باشند. بدون کم شدن از کلیت مسأله، فرض کنید که $m < n$. چون $a < b$ و تعداد رقمهای a و b در نمایش ده‌دهی آنها برابر است، پس $\frac{b}{a} < ۱۰$ و درنتیجه، $۲^{n-m} < ۱۰$. پس $n - m$ یکی از اعداد ۱، ۲، یا ۳ خواهد بود. اما چون رقمهای a و b یکسان هستند، پس a و b به پیمانه‌ی ۹ همنهشت‌اند؛ یعنی

$$۹|b - a = ۲^m(۲^{n-m} - ۱)$$

اما چون ۹ و ۲ نسبت به‌هم اول‌اند، پس باید $۹|۲^{n-m} - ۱$. اما با توجه به اینکه $n - m \in \{۱, ۲, ۳\}$، چنین چیزی ممکن نیست.

۲. فرض کنید که $R(X, \alpha)$ دوران حول نقطه‌ی X به اندازه‌ی زاویه‌ی α را نشان دهد.



توجه کنید که $T = R(P, ۹۰^\circ) \circ R(A, ۹۰^\circ)$ دورانی به اندازه‌ی ۱۸۰° حول نقطه‌ای مانند E است. پس $T \circ T$ تابع همانی است. یعنی

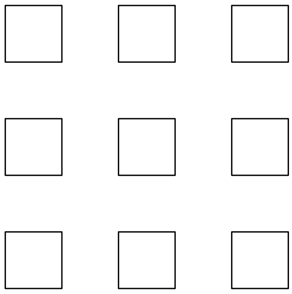
$$R(P, ۹۰^\circ) \circ R(A, ۹۰^\circ) \circ R(P, ۹۰^\circ) \circ R(A, ۹۰^\circ)(Q) = Q$$

حال اثر سمت چپ تساوی را بر نقطه‌ی N پیدا می‌کنیم. روشن است که $R(A,۹۰^\circ)(N) = B$، $R(P,۹۰^\circ)(B) = C$ و $R(A,۹۰^\circ)(C) = M$. پس،

$$R(P,۹۰^\circ)(M) = N$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳. فرض کنید که درختها در صفحه‌ی مختصات، در نقطه‌های (i,j) که $۰ \le i,j \le ۹۹$ قرار گرفته باشند. درختها را مطابق شکل به گروههای چهارتایی تقسیم می‌کنیم.



یعنی هر گروه از چهار درخت

$$(۲i,۲j),(۲i,۲j+۱),(۲i+۱,۲j),(۲i+۱,۲j+۱), \quad ۰ \le i,j \le ۴۹$$

تشکیل شده است. روشن است که دو درخت که در یک گروه قرار داشته باشند یکدیگر را می‌بینند. پس از هر گروه حداکثر یک درخت را می‌توان قطع کرد. پس حداکثر ۲۵۰۰ درخت را می‌توان قطع کرد که خاصیت مورد نظر مسأله برقرار بماند.

اکنون نشان می‌دهیم که می‌توان ۲۵۰۰ درخت را قطع کرد به‌طوری که از محل هر یک از درختهای قطع شده نتوان درخت قطع شده‌ی دیگری را دید. برای این کار کافی است درختهایی که مختصات آنها را از دو عدد زوج تشکیل شده است، یعنی درختهای $(۲i,۲j)$ به ازای $۰ \le i,j \le ۴۹$. فرض کنید که $(۲i,۲j)$ و $(۲i',۲j')$ محل دو درخت قطع شده باشند. تعریف کنید

$$a = ۲i - ۲i', \quad b = ۲j - ۲j'$$

فرض کنید بزرگترین توانهای ۲ را که a و b را می‌شمارند به‌ترتیب با m و n نشان دهیم. اگر $a = ۰$ قرار دهید $m = \infty$. و اگر $b = ۰$ قرار دهید $n = \infty$. فرض کنید $m \le n$. در این‌صورت نقطه‌ی $(\frac{a}{۲^m}, \frac{b}{۲^m})$ نقطه‌ای با مختصات صحیح است که دست‌کم یکی از مختصهای آن عددی فرد است. اما توجه کنید که نقطه‌ی $(۲i' + \frac{a}{۲^m}, ۲j' + \frac{b}{۲^m})$ روی پاره‌خطی قرار دارد که دو نقطه‌ی $(۲i,۲j), (۲i',۲j')$ را به‌هم وصل می‌کند و دست‌کم یکی از مختصهای آن عددی فرد است.

۴. ادعای کلی‌تر زیر را به استقرا ثابت می‌کنیم:
برای عدد طبیعی n، همه‌ی اعدادی که می‌توان آنها را به شکل

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۲}{a_۲} + \cdots + \frac{n}{a_n}, \quad (۱ \le i \le n, a_i \in \mathbb{N})$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

نمایش داد عبارتند از ۱، ۲، . . . و $\frac{n(n+1)}{2}$.
روشن است که اگر x را بتوان به‌صورت بالا نمایش داد، از $a_i \geq 1$ نتیجه می‌شود

$$x \leq 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

برای اثبات عکس این مطلب، از استقرا استفاده می‌کنیم. درستی حکم به‌ازای $n=1$ روشن است. فرض کنید حکم به‌ازای $n-1$ درست باشد. پس اگر $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$، آنگاه k را می‌توان به‌صورت

$$k = \frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{n-1}{a_{n-1}}$$

نمایش داد. اما اگر قرار دهیم $a_n = 1$، نتیجه می‌شود

$$k+n = \frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{n}{a_n}$$

و چون $n+1 \leq k+n \leq \frac{n(n+1)}{2}$، پس همه‌ی اعداد طبیعی مانند k را که $n+1 \leq k\frac{n(n+1)}{2}$ می‌توان به‌صورت بالا نمایش داد. کافی است نشان دهیم که اعداد ۱، ۲، . . . و n را نیز می‌توان به شکل بالا نشان داد. برای $k=1$ نمایش زیر به‌دست می‌آید:

$$1 = \frac{1}{n}+\frac{2}{2n}+\cdots+\frac{n}{n^2}$$

به‌ازای $2 \leq k \leq n$ تعریف کنید،

$$a_{k-1}=1, \quad a_i=(n-1)i, \quad i \neq k-1$$

پس،

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{2}{a_2}+\cdots+\tfrac{n}{a_n} &= \tfrac{k+1}{a_{k-1}}+\sum_{i\neq k-1}\frac{i}{a_i} \\
&= k-1+\sum_{i\neq k-1}\frac{i}{(n-1)i} \\
&= k-1+\tfrac{n-1}{n-1} \\
&= k
\end{aligned}$$

۵. مثلثهای $A'B'C'$ و ABC که اضلاع موازی دارند، متشابه و درنتیجه متجانس‌اند. یعنی خطهای AA'، BB' و CC' در نقطه‌ای مانند K همرس‌اند. فرض کنید

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=\lambda$$

فرض کنید که P_1 محل تلاقی KP و $A'B'$ باشد. چون AB و $A'B'$ موازی‌اند، نتیجه می‌شود

$$\frac{KP_1}{PP_1}=\frac{KP_1}{KP-KP_1}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$$

بنابراین، اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{[KAB']}{[KA'PB']} = \frac{[KAB']}{[KA'B'] + [A'PB']} = \lambda$$

به همین ترتیب،

$$\frac{[KB'C']}{[KB'QC']} = \frac{[KC'A']}{[KC'RA']} = \lambda$$

بنابراین،

$$\frac{[A'B'C']}{[PQR]} = \frac{[KA'B] + [KB'C'] + [KC'A']}{[KA'PB'] + [KB'QC'] + [KC'RA']} = \lambda$$

که حکم مسأله را اثبات می‌کند.

۶. ادعا می‌کنیم که حداقل تعداد نقاط به‌دست آمده برابر $۲n - ۳$ است. ابتدا ثابت می‌کنیم که دست‌کم $۲n - ۳$ نقطه به‌وجود می‌آید. اثبات را در دوگام انجام می‌دهیم:

گام نخست. نقاط $A_۱$، ...، A_n روی یک خط قرار دارند.

نقطه‌ی دلخواه O را روی این خط به‌عنوان مبدأ و یک جهت را به‌عنوان جهت محور انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که نقاط فوق متناظر با اعداد حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n شوند. بدون کم شدن از کلیت مسأله، می‌توان فرض کرد که $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$. اما چون

$$\frac{a_۱ + a_۲}{۲} < \frac{a_۱ + a_۳}{۲} < \cdots < \frac{a_۱ + a_n}{۲} < \frac{a_۲ + a_n}{۲} < \cdots < \frac{a_{n-۱} + a_n}{۲}$$

نقاط وسط پاره‌خطهای $A_۱A_۲$، ...، $A_۱A_n$، $A_۲A_n$، ... و $A_{n-۱}A_n$، $۲n - ۳$ نقطه‌ی متمایزند.

گام دوم. خط l را در صفحه طوری انتخاب می‌کنیم که تصویر نقاط A_i بر l متمایز باشند. برای این کار کافی است خط l را چنان بگیریم که بر هیچ یک از خطوط A_iA_j عمود نباشد. اگر $B_۱$، ... و B_n تصویرهای نقاط $A_۱$، ... و A_n بر l باشند، بنابر استدلال گام نخست، وسطهای B_iB_j ها دست‌کم $۲n - ۳$ نقطه را مشخص می‌کنند. پس وسطهای A_iA_jها نیز دست‌کم $۲n - ۳$ نقطه را مشخص می‌کنند.

همچنین اگر $A_۱$، ... و A_n را نقاط متناظر با اعداد ۱، ۲، ... و n روی خط راست بگیریم، هر نقطه قرمز مختصی به‌صورت $\frac{a}{۲}$ خواهد داشت که $۳ \le a < ۲n - ۱$. پس $۲n - ۳$ نقطه‌ی قرمز وجود دارد.

آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$، n تا عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \geq a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4$$

۲. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. I مرکز دایره‌ی محاطی آن و D نقطه‌ی تقاطع AI با دایره‌ی محیطی مثلث ABC است. فرض کنید E و F به‌ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{1}{2}AD$، زاویه‌ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۳. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. nتایی $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از اعداد طبیعی را «خوب» می‌نامیم، اگر داشته باشیم $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n$ و نیز حاصل جمع هیچ تعدادی از a_iها برابر n نشود. تمام n تاییهای «خوب» را پیدا کنید.

(به‌عنوان مثال ۳تایی $(1, 1, 4)$ «خوب» است ولی ۵تایی $(1, 2, 1, 2, 4)$ «خوب» نیست، زیرا حاصل‌جمع مو�لفه‌های اول، دوم، چهارم برابر ۵ است.)

۴. فرض کنید که عدد طبیعی n حداقل چهار مقسوم‌علیه متمایز داشته باشد و $0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ چهار کوچکترین مقسوم‌علیه آن باشند. کلیه‌ی اعداد طبیعی n را پیدا کنید که $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

۵. مثلث ABC که در آن $BC > CA > AB$ مفروض است. نقطه‌ی D را روی ضلع BC، و نقطه‌ی E را روی امتداد ضلع AB (نزدیک A) طوری در نظر می‌گیریم که $BD = BE = AC$. دایره‌ی محیطی مثلث BED ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع می‌کند و BP نیز دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی Q قطع می‌کند. ثابت کنید $AQ + CQ = BP$.

۶. اگر $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ دو nتایی از صفر و یک باشند، فاصله‌ی A و B را برابر تعداد iهایی می‌گیریم که $a_i \neq b_i$، $(1 \leq i \leq n)$.

(به‌عنوان مثال اگر $A = (0, 1, 1)$ و $B = (1, 1, 0)$، فاصله‌ی A و B برابر ۲ است.) حال فرض کنید که A، B و C سه nتایی از صفر و یک باشند، به‌طوری که فاصله‌ی دو به دوی آنها d است.

الف) نشان دهید که d زوج است.

ب) ثابت کنید که یک nتایی از صفر و یک، مثل D، وجود دارد که فاصله‌اش با A، B و C برابر $\frac{d}{2}$ است.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. ابتدا حکم را به‌ازای $n=3$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید x، y و z سه عدد طبیعی باشند و $x<y<z$. قرار دهید

$$\begin{aligned} S &= xy^4+yz^4+zx^4 \\ T &= yx^4+zy^4+xz^4 \end{aligned}$$

در این‌صورت،

$$\begin{aligned} S-T &= (x-z)y^4+y\left(z^4-x^4\right)+xz\left(x^3-z^3\right) \\ &= (x-z)\left(y^4-y\left(z^2+x^2\right)(z+x)\ +xz\left(x^2+xz+z^2\right)\right) \\ &= (x-z)\left(y^4-yz^3-yz^2x-yzx^2-yx^3+x^3z+x^2z^2+xz^3\right) \\ &= (x-z)\left(y\left(y^3-x^3\right)+z^3(x-y)\ +x^2z(x-y)+xz^2(x-y)\right) \\ &= (x-z)(x-y)\left(-y\left(x^2+xy+y^2\right)\ +z^3+x^2z+xz^2\right) \\ &= (x-z)(x-y)\left(-yx^2-xy^2-y^3+z^3+x^2z+xz^2\right) \\ &= (x-z)(x-y)\left((z-y)\left(z^2+zy+y^2\right)+x^2(z-y)+x\left(z^2-y^2\right)\right) \\ &= (x-z)(x-y)(z-y)\left(z^2+zy+y^2+x^2+xz+yz\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(x-z)(x-y)(z-y)\left((x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2\right)\geq 0 \end{aligned}$$

حال فرض کنید که حکم به‌ازای عدد طبیعی n برقرار باشد و اعداد $a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}$ مفروض باشند. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} S_n &= a_1a_2^4+\cdots+a_{n-1}a_n^4+a_na_1^4 \\ S_{n+1} &= a_1a_2^4+\cdots+a_{n-1}a_n^4+a_na_{n+1}^4+a_{n+1}a_1^4 \end{aligned}$$

T_n و T_{n+1} نیز به‌همین ترتیب تعریف می‌شوند. روشن است که

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n+a_na_{n+1}^4+a_{n+1}a_1^4-a_na_1^4 \\ T_{n+1} &= T_n+a_{n+1}a_n^4+a_1a_{n+1}^4-a_1a_n^4 \end{aligned}$$

پس

$$S_{n+۱} - T_{n+۱} = S_n - T_n +$$

$$\left(a_۱ a_n^۴ + a_n a_{n+۱}^۴ + a_{n+۱} a_۱^۴ - a_n a_۱^۴ - a_{n+۱} a_n^۴ - a_۱ a_{n+۱}^۴\right)$$

بنابر فرض استقرا $S_n - T_n \geq ۰$ و همچنین، بنابر حالت $n = ۳$ (که در بالا ثابت کردیم) و توجّه به این نکته که $a_۱ < a_n < a_{n+۱}$، جمله‌ی دوّم نیز نامنفی است و بنابراین، حکم به استقرا ثابت می‌شود.

یادداشت. این مسأله در واقع حالت خاصی از قضیه‌ای کلی‌تر در مورد توابع محدّب است. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را محدّب می‌نامیم هر گاه، به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $۰ \leq \alpha \leq ۱$.

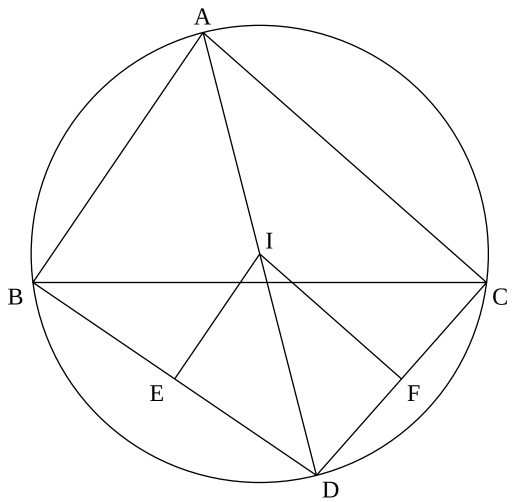
$$f\left(\alpha x + (۱-\alpha) y\right) \leq \alpha f(x) + (۱-\alpha) f(y)$$

اکنون با استدلالی مشابه استدلال گفته شده می‌توان ثابت کرد که اگر f تابعی محدّب باشد و $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n$ اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

$$x_۱ f(x_۲) + x_۲ f(x_۳) + \cdots + x_n f(x_۱) \geq$$

$$x_۲ f(x_۱) + x_۳ f(x_۲) + \cdots + x_۱ f(x_n)$$

۲. صورت صحیح مسأله: مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. I مرکز دایره‌ی محاطی آن و D نقطه‌ی برخورد AI با دایره محیطی ABC است. فرض کنید E و F به‌ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{۱}{۲} AD$، زاویه‌ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.



راه حل. بنابر قضیه‌ای از هندسه‌ی مقدماتی، $DI = DB = DC$. بنابراین، اگر R شعاع دایره‌ی محیطی ABC باشد،

$$\begin{aligned} IE &= ID \cdot \sin\angle BDI = ID \cdot \sin C \\ &= BD \cdot \sin C = ۲R \sin\frac{A}{۲} \sin C \end{aligned}$$

به‌همین ترتیب،

$$IF = ۲R \sin \frac{A}{۲} \sin B$$

و

$$AD = ۲R \sin \angle ACD = ۲R \sin \left(C + \frac{A}{۲} \right)$$

بنابر فرض مسأله،

$$۲R \sin \frac{A}{۲} \sin B + ۲R \sin \frac{A}{۲} \sin C = R \sin \left(C + \frac{A}{۲} \right)$$

و بنابراین،

$$\sin \frac{A}{۲} (\sin B + \sin C) = \frac{۱}{۲} \sin \left(C + \frac{A}{۲} \right)$$

قرار می‌دهیم $X = C + \frac{A}{۲}$. با جایگذاری X در معادله‌ی بالا به‌دست می‌آوریم

$$\sin \frac{A}{۲} \left(\sin \left(X + \frac{A}{۲} \right) + \sin \left(X - \frac{A}{۲}) \right) \right) = \frac{۱}{۲} \sin X$$

یا

$$۲ \sin \frac{A}{۲} \sin X \cos \frac{A}{۲} = \frac{۱}{۲} \sin X$$

و چون $\sin X \neq ۰$، نتیجه می‌شود

$$۲ \sin \frac{A}{۲} \cos \frac{A}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

یا $\sin A = \frac{۱}{۲}$ و درنتیجه، $\angle A = ۳۰^\circ$.

۳. دنباله‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$a_۱, a_۱ + a_۲, a_۱ + a_۲ + a_۳, \dots, a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

ادعا می‌کنیم که هیچ دو جمله‌ی این دنباله به پیمانه‌ی n، همنهشت نیستند. در واقع، اگر $i < j$ و

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_i \equiv a_۱ + a_۲ + \cdots + a_j \pmod n$$

آنگاه، $n | a_{i+۱} + \cdots + a_j$ که خلاف فرض مسأله است. چون دنباله‌ی بالا n عضو دارد، پس این n عضو یک رده‌ی کامل مانده‌های به پیمانه‌ی n را تشکیل می‌دهند. به دلیل مشابه دنباله‌ی

$$a_۲, a_۱ + a_۲, a_۱ + a_۲ + a_۳, \dots, a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

نیز یک رده‌ی کامل مانده‌های به پیمانه‌ی n است. اما چون جملات دوم به بعد این دو دنباله یکی هستند، پس جملات اول باید به پیمانه‌ی n همنهشت باشند. یعنی، $a_۱ \overset{n}{\equiv} a_۲$. با توجه به تقارن موجود در مسأله $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n همگی به پیمانه‌ی n، همنهشت‌اند. فرض کنید

$$a_۱ \equiv a_۲ \equiv ۲ \cdots \equiv a_n \equiv k \pmod n$$

در این‌صورت، به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$، $a_i \geq k$. بنابراین،

$$kn \leq a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۲n$$

پس، $k = ۱$ یا $k = ۲$. اگر $k = ۲$، باید برای هر i داشته باشیم $a_i = ۲$ و بنابراین به جواب $(۲, ۲, \dots, ۲)$ می‌رسیم که به سادگی می‌توان دید که به‌ازای مقادیر فرد n یک جواب است. اگر $k = ۱$، باید $n - ۱$ تا از a_iها برابر ۱ و یکی از آنها برابر $n + ۱$ باشد و به سادگی می‌توان بررسی کرد که برای هر عدد طبیعی مانند n، به تعداد n جواب به‌دست می‌آید:

$$(n + ۱, ۱, ۱, \dots, ۱)$$

$$(۱, n + ۱, ۱, \dots, ۱)$$

$$\vdots$$

$$(۱, ۱, ۱, \dots, n + ۱)$$

۴. ادعا می‌کنیم که n عددی زوج است. در غیر این‌صورت، $d_۱^۲$، $d_۲^۲$، $d_۳^۲$ و $d_۴^۲$ اعدادی فرد خواهند بود و $d_۱^۲ + \cdots + d_۴^۲$ عددی زوج است که با فرد بودن n تناقض دارد. بنابراین، $d_۱ = ۱$ و $d_۲ = ۲$.

اکنون، ادعا می‌کنیم که $d_۳$ یا ۴ است یا عددی اول. در واقع، اگر $d_۳ = ۲^\alpha(۲m + ۱)$، آنگاه $۲m + ۱$ مقسوم علیه n خواهد بود. پس، یا $۲m + ۱ = ۱$ که نتیجه می‌دهد که $d_۳ = ۲^\alpha$ و با توجّه به تعریف $d_۳$ نتیجه می‌شود $d_۳ = ۴$ یا $\alpha = ۰$ که در این صورت، با توجّه به این که $d_۳$ کوچکترین مقسوم علیه n بعد از ۲ است، $d_۳$ باید عددی اول باشد.

حالت اول. فرض کنید، $d_۳ = ۴$، در این صورت،

$$n = ۱ + ۴ + ۱۶ + d_۴^۲$$

پس، چون $d_۴|n$ و $d_۴|d_۴^۲$ نتیجه می‌شود $d_۴|۲۱$. بنابراین، $d_۴ = ۷$ یا $d_۴ = ۲۱$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که جوابهای $n = ۷۰$ و $n = ۴۴۲$ به‌دست آمده، قابل‌قبول نیستند.

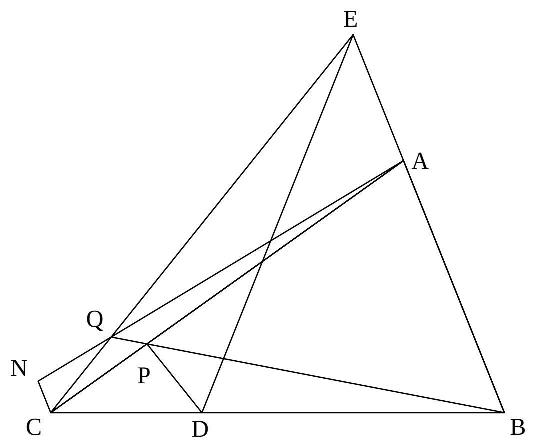
حالت دوم. فرض کنید، $d_۳ = p$ و p عددی اول باشد. در این حالت، تساوی $n = ۵ + p^۲ + d_۴^۲$ ایجاب می‌کند که $d_۴$ زوج باشد. پس، $d_۴ = ۴$ یا $d_۴ = ۲p$. اگر $d_۴ = ۴$ آنگاه $d_۳ = ۳$ و $n = ۳۰$ به‌دست می‌آید که قابل‌قبول نیست. پس، $d_۴ = ۲p$. بنابراین،

$$n = ۱ + ۴ + p^۲ + ۴p^۲ = ۵(۱ + p^۲)$$

و چون $p|n$ پس، $p|۵$. بنابراین، $p = ۵$ و جواب $n = ۱۳۰$ به‌دست می‌آید که در معادله‌ی اصلی نیز صدق می‌کند و تنها جواب مسئله است.

۵. بنابر فرض مسأله، چهار ضلعی $ABCQ$ چهار ضلعی محاطی است و در نتیجه،

$$\angle QAC = \angle QBC \qquad (۱)$$



همچنین از

$$\angle AQC + \angle ABC = ۱۸۰^\circ$$

نتیجه می‌شود

$$\angle ABC = \angle CQN$$

در اینجا، N نقطه‌ای روی AQ (نزدیک به Q) است که $QC = QN$. دو مثلث EBD و CQN دو مثلث متساوی‌الساقین هستند که زاویه‌ی رأس آنها نیز مساوی است؛ یعنی، داریم:

$$\angle CNQ = \angle DEB \qquad (۲)$$

حال، چون چهار ضلعی $EBDP$ محاطی است،

$$\angle BPD = \angle DEB = \angle CNQ \qquad (۳)$$

رابطه‌های (۱) و (۳) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \angle QAC + \angle CNQ &= \angle QBC + \angle DPB \\ ۱۸۰^\circ - \angle NCA &= ۱۸۰^\circ - \angle PDB \\ \angle NCA &= \angle PDB \qquad (۴) \end{aligned}$$

حال، از رابطه‌های (۱) و (۴) و تساوی $AC = BD$، نتیجه می‌شود که دو مثلث BDP و ACN برابرند. پس،

$$BP = AN = AQ = QN \qquad (۵)$$

و چون $QN = QC$، نتیجه می‌شود $BP = AQ + QC$ که همان حکم مسئله است.

۶. الف) فرض کنید $A = (a_۱, \ldots, a_n)$، $B = (b_۱, \ldots, b_n)$ و $C = (c_۱, \ldots, c_n)$. توجّه کنید که اگر هر سه مولفه‌ی a_i، b_i و c_i را تغییر دهیم (یعنی از صفر به یک و از یک به صفر تبدیل کنیم)، در فاصله‌ی دوبه‌دوی این دنباله‌ها تغییری ایجاد نمی‌شود. پس، بدون کم شدن از کلیّت مسئله، می‌توان فرض کرد که $A = (۰, ۰, \ldots, ۰)$. همچنین فرض کنید

$$\begin{aligned} B' &= \{i | ۱ \le i \le n, b_i = ۱\} \\ C' &= \{i | ۱ \le i \le n, c_i = ۱\} \end{aligned}$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

بنابر فرض مسأله، فاصله‌ی A از B و C به‌ترتیب برابر $|B'|$، $|C'|$ و فاصله‌ی C و B برابر $|B'\Delta C'|$ است ($X\Delta Y$، تفاضل متقارن دو مجموعه، مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی است که درست به یکی از X و Y تعلّق دارند). پس،

$$|B'| = |C'| = |B'\Delta C'| = d$$

فرض کنید

$$x = |B' - C'|, \quad y = |C' - B'|, \quad z = |B' \cap C'|$$

در این‌صورت،

$$x + y = x + z = y + z = d \quad (*)$$

پس، $۳d = ۲(x + y + z)$ و بنابراین، $۳d$ زوج است. درنتیجه d زوج است.

ب) از دستگاه $(*)$، نتیجه می‌شود که

$$x = y = z = \frac{d}{۲}$$

حال اگر قرار دهیم $D' = B' \cap C'$، آنگاه

$$|D' \cap B'| = x = \frac{d}{۲}$$

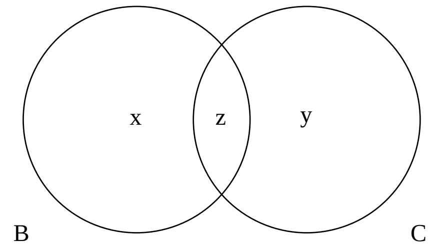
$$|D' \cap C'| = y = \frac{d}{۲}$$

$$|D'| = z = \frac{d}{۲}$$

پس، اگر دنباله‌ی

$$D = (d_۱, \dots, d_n)$$

را چنان بسازیم که $d_i = ۱$، اگر و فقط اگر $i \in D'$، آنگاه، فاصله‌ی D از هر یک از A، B و C برابر $\frac{d}{۲}$ است.



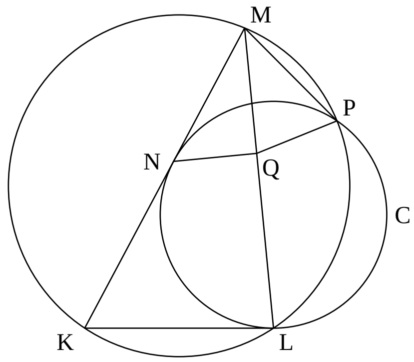
آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که داشته باشیم: $3x^2 + x = 4y^2 + y$، آنگاه ثابت کنید که $x - y$ یک مربع کامل است.

۲. فرض کنید KL و KN بر دایره‌ی C مماس باشند. M نقطه‌ای در امتداد KN بوده و P نقطه‌ی دیگر تقاطع دایره‌ی C با دایره‌ی محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می‌گیریم. ثابت کنید: $\angle MPQ = 2\angle KML$.



۳. یک جدول $n \times n$ از اعداد ۰، ۱+ و ۱− داریم به‌طوری که در هر سطر و ستون فقط یک عدد ۱+ و یک عدد ۱- وجود دارد. ثابت کنید با تعدادی متناهی جابه‌جایی سطرها با یکدیگر و ستونها با یکدیگر می‌توان جای ۱+ ها را با ۱- ها عوض کرد.

۴. فرض کنید x_1، x_2، x_3 و x_4، چهار عدد حقیقی مثبت باشند که $x_1x_2x_3x_4 = 1$. ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right\}$$

($\max\{a, b\}$ یعنی بزرگترین عضو مجموعه‌ی $\{a, b\}$).

۵. در مثلث ABC زاویه‌های B و C حاده‌اند. ارتفاع خارج شده از رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. همچنین فرض کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C ارتفاع AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید: اگر $BE = CF$، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۶. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ یک عدد اول باشد، بزرگترین مقدار p را با ذکر دلیل، پیدا کنید.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۶

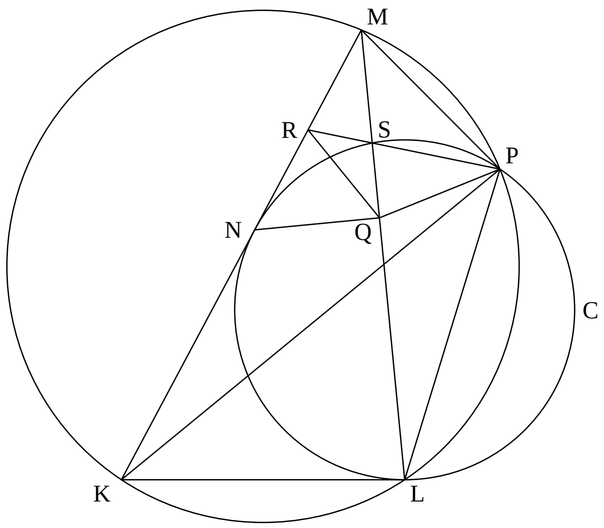
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله هم ارز است با $3(x^2 - y^2) + (x - y) = y^2$ و یا

$$(x - y)(3(x - y) + 6y + 1) = y^2$$

قرار می‌دهیم $d = (x - y, 3(x - y) + 6y + 1)$. اگر $d > 1$، p را عدد اولی درنظر بگیرید که $p|d$. چون $p|x - y$، از رابطه‌ی قبل داریم $p|y^2$ و از آنجا $p|y$. درنتیجه $p|3(x - y) + 6y$ و چون $p|d$، پس $p|3(x - y) + 6y + 1$. بنابراین، $p = 1$ که غیرممکن است. پس $d = 1$. در این صورت چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $3(x - y) + (6y + 1)$ و $(x - y)$ برابر یک است و حاصل‌ضرب این دو عدد مربعی کامل است بنابراین هر دو مربع کامل‌اند و این حکم را ثابت می‌کند.

۲. فرض کنید S نقطه‌ی تقاطع دوم خط ML با دایره‌ی C و R نقطه‌ی تقاطع امتداد SP با MN باشد.



توجه کنید که

$$\angle KPL = \angle KLM = \angle LPS$$

و

$$\angle SPM = \angle LPK = \angle KML$$

بنابراین، دایره‌ی محیطی مثلث SMP بر KM در M مماس است. پس،

$$(RM)^۲ = RS \cdot RP = (RN)^۲$$

بنابراین، $RN = RM$؛ یعنی R وسط MN و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث MNQ است. در نتیجه،

$$\angle MPS = \angle SMR = \angle MQR$$

پس M، R، P و Q روی یک دایره قرار دارند و بنابراین،

$$\angle MPQ = \angle MPS + \angle RPQ = \angle KML + \angle KML = ۲\angle KML$$

۳. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حکم به‌ازای $n = ۲$ بدیهی است. فرض کنیم حکم به‌ازای عددهای طبیعی کوچکتر از n درست باشد.

درایه‌ی واقع در سطر a و ستون b جدول را با $A(a, b)$ نشان می‌دهیم. حال دنباله‌های $\{\alpha_i\}$ و $\{\beta_i\}$ از اعداد طبیعی با شرط $۱ \leq \alpha_i \leq n$ و $۱ \leq \beta_i \leq n$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A(\alpha_۱, \beta_۱) = -۱, \quad A(\alpha_i, \beta_i) = -۱, \quad A(\alpha_{i+۱}, \beta_i) = ۱$$

(چون در هر سطر و هر ستون فقط یک عدد ۱ و یک عدد ۱- وجود دارد α_iها و β_iها به طور یکتا تعریف می‌شوند) اما چون عضوهای دنباله‌ی $\{\alpha_i\}$ فقط n مقدار متمایز را می‌توانند اختیار کنند، عددهای طبیعی k و e به‌طوری $e < k$ وجود دارند که $\alpha_k = \alpha_e$. در این‌صورت، از

$$A(\alpha_k, \beta_{k-۱}) = A(\alpha_e, \beta_{e-۱}) = ۱$$

نتیجه می‌شود $\beta_{k-۱} = \beta_{e-۱}$ و سپس از

$$A(\alpha_{k-۱}, \beta_{k-۱}) = A(\alpha_{e-۱}, \beta_{e-۱}) = ۱$$

نتیجه می‌شود $\alpha_{k-۱} = \beta_{e-۱}$ و به همین ترتیب می‌توانیم ادامه دهیم و ثابت کنیم $\alpha_۱ = \alpha_{k-e+۱}$ و $\beta_۱ = \beta_{k-e+۱}$.

حال اگر $k - e < n$ حکم با استقرا درست است.

اگر $k - e = n$ آنگاه $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n$ و $\beta_۱, \ldots, \beta_n$ جایگشتی از شماره‌ی سطرها و ستونهای جدول‌اند. پس کافی است سطرهای جدول را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله‌ی $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n$ به دنباله‌ی $\alpha_۱, \alpha_n, \alpha_{n-۱}, \ldots, \alpha_۲$ تبدیل شود و سپس ستونهای جدول را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله‌ی $\beta_۱, \ldots, \beta_n$ به دنباله‌ی $\beta_n, \beta_{n-۱}, \ldots, \beta_۱$ تبدیل شود.

۴. توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sum_{i=۱}^{۴} x_i{}^۳ &= \tfrac{۱}{۳}\left(x_۱{}^۳ + x_۲{}^۳ + x_۳{}^۳\right) + \tfrac{۱}{۳}\left(x_۱{}^۳ + x_۲{}^۳ + x_۴{}^۳\right) \\ &\quad + \tfrac{۱}{۳}\left(x_۱{}^۳ + x_۳{}^۳ + x_۴{}^۳\right) + \tfrac{۱}{۳}\left(x_۲{}^۳ + x_۳{}^۳ + x_۴{}^۳\right) \end{aligned}$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی

$$\frac{x_۱{}^۳ + x_۲{}^۳ + x_۳{}^۳}{۳} \geq \sqrt[۳]{x_۱{}^۳ x_۲{}^۳ x_۳{}^۳} = \frac{۱}{x_۴}.$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

به‌همین ترتیب با اعمال این نامساوی بر جمله‌های دیگر مجموع $\sum_{i=۱}^{۴} x_i^{۳}$، نتیجه می‌شود

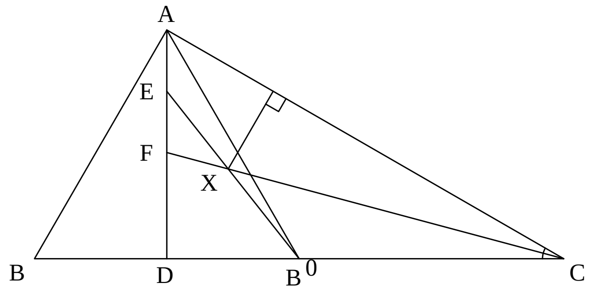
$$\sum_{i=۱}^{۴} {x_i}^{۳} \geq \sum_{i=۱}^{۴} \frac{۱}{x_i}$$

برای اثبات قسمت دیگر، با توجه به نامساوی توانی می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{۴} {x_i}^{۳} \geq \left(\frac{\sum_{i=۱}^{۴} x_i}{۴}\right)^{۳}.$$

که هم ارز است با $\sum {x_i}^{۳} \geq \frac{۱}{۱۶}\left(\sum x_i\right)^{۳}$. پس کافی است ثابت کنیم $(\sum_{i=۱}^{۴} x_i)^{۳} \geq ۱۶\sum_{i=۱}^{۴} x_i$.
چون $\sum_{i=۱}^{۴} x_i > ۰$ پس باید ثابت کنیم $\sum_{i=۱}^{۴} x_i \geq ۴$ و این نیز با توجه به نامساوی حسابی‌ـ هندسی و تساوی $\Pi_{i=۱}^{۴} x_i = ۱$ روشن است.

۵. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد، مثلاً $AB < AC$. در این‌صورت $BD < CD$. پس اگر B' قرینه‌ی B نسبت به D باشد، B' بین D و C خواهد بود.
نقطه‌ی E نمی‌تواند بین F و D باشد زیرا در این‌صورت نتیجه می‌شود $B'E < CE \leq CF$



و چون $BE = B'E$ می‌توان نتیجه گرفت $BE < CF$ است که خلاف فرض است. پس E بین A و F است. درنتیجه دو پاره‌خط EB' و FC یکدیگر را در نقطه‌ای مانند X قطع می‌کنند. X روی نیمساز $\angle C$ است. پس X از AC و DC به یک فاصله است. ضمناً X روی نیمساز $\angle AB'D$ قرار دارد. پس از AB' و DC نیز به یک فاصله است. ولی این نامکن است زیرا اگر از X به AC عمود کنیم، خط عمود خارج شده از X قبل از برخورد با AC، AB' را قطع می‌کند. پس فاصله‌ی X تا AC بیشتر از فاصله‌ی X تا AB' است. ولی بنابر استدلال بالا این دو فاصله باید برابر باشند.

۶. روشن است که b عددی زوج است. اگر $b = ۲c$ آنگاه $p = \frac{c}{۲}\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$ یعنی $\frac{۴p^۲}{c^۲} = \frac{a-c}{a+c}$. قرار می‌دهیم $\frac{۴p^۲}{c^۲} = \frac{m^۲}{n^۲}$ که $(m,n) = ۱$. حال اگر $(a-c, a+c) = k$ آنگاه خواهیم داشت $a + c = km^۲$ و $a - c = kn^۲$. پس $۲c = k(n^۲ - m^۲)$ و چون داشتیم $۲p = \frac{cm}{n}$، نتیجه می‌شود $۴p = \frac{k(n^۲-m^۲)m}{n}$.

حال m و n یا هر دو فردند یا فقط یکی از آنها فرد است. اگر m و n هر دو فرد باشند آنگاه $۸|n^۲ - m^۲$ پس $۸|۴p$. پس $p = ۲$. اگر m و n دارای زوجیت متفاوت باشند از رابطه‌ی $۲c = k(n^۲ - m^۲)$ نتیجه می‌شود که k زوج است. پس $k = ۲r$. و چون $(n^۲ - m^۲, n) = ۱$ نتیجه می‌شود $n|k$. پس

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

$r = ns$. بنابراین، $۲p = s(n-m)(n+m)m$. اما $۲p$ فقط به دو شکل به‌صورت حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح نوشته می‌شود (ترتیب را درنظر نمی‌گیریم)

$$۲p = ۲p \times ۱ \times ۱ \times ۱, \quad ۲p = p \times ۲ \times ۱ \times ۱$$

حال اگر

$$(n-m)(n+m)m = ۲p \times ۱ \times ۱ \times ۱$$

آنگاه چون $n+m > m$ پس $n+m = ۲p$ بنابراین، $n+m = ۲p$، $m = ۱$ و $n-m = ۱$. پس $n+m = ۳ \neq ۲p$. در نتیجه، در این حالت نمی‌توانیم داشته باشیم $n+m = ۲$ زیرا در این‌صورت نتیجه می‌شود $n = m = ۱$ و $n-m = ۰$ که ناممکن است. پس $n+m = p$. اگر $m = ۲$ و $n-m = ۱$ آنگاه $p = ۵$ و اگر $m = ۱$ $n-m = ۱$ نتیجه می‌شود $p = ۳$ و به‌ازای $n-m = ۲$ نتیجه می‌شود $p = ۴$ که ممکن نیست. پس $p = ۵$ بزرگترین مقدار p است.

آزمون مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲ > ۲(a^۴ + b^۴ + c^۴)$$

ثابت کنید a، b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

۲. فرض کنید a، b، c و d اعدادی طبیعی باشند به‌طوری که،

$$ab = cd$$

آیا $S = a + b + c + d$ می‌تواند عددی اول باشد؟

۳. مثلث ABC مفروض است. نقاطی مانند D و E خارج مثلث ABC در نظر می‌گیریم به‌طوری که مثلثهای ADB و AEC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشند ($\angle D = ۹۰^\circ$ و $\angle E = ۹۰^\circ$).

اگر F نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد ثابت کنید مثلث DFE نیز قائم‌الزاویه‌ی متساوی الساقین است.

۴. روی یک خط راست n نقطه‌ی قرمز و n نقطه‌ی آبی نه لزوماً متمایز به‌طور دلخواه قرار گرفته‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای متفاوت از مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای یکسان کمتر نیست.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. به آسانی می‌توان ثابت کرد که نابرابری داده شده معادل است با

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c) > ۰$$

اگر این رابطه برقرار باشد، بدون کم شدن از کلیت مسأله فرض کنید $a \leq b \leq c$. در این‌صورت، جمله‌های دوم، سوم و چهارم مثبت‌اند. بنابراین جمله‌ی اول نیز باید مثبت باشد. یعنی $a + b > c$ و این همان نابرابری مثلث است. دو نابرابری دیگر مثلث نیز به روشنی برقرارند.

۲. ابتدا لم زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

لم. اگر a، b، c و d عددهایی طبیعی باشند به‌طوری که $ab = cd$، آنگاه عددهای طبیعی x، y، z و t وجود دارند که

$$a = xy, \quad b = zt, \quad c = xz, \quad d = yt$$

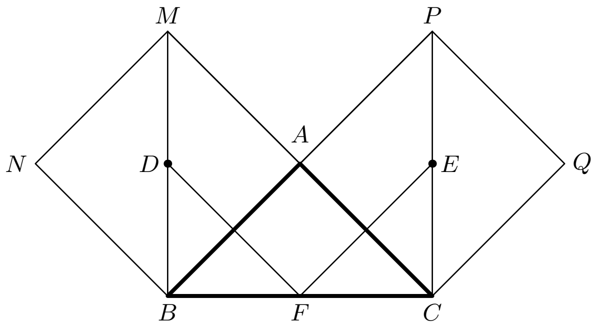
برهان. فرض کنید که $x = (a, c)$ (که در این‌جا (m, n) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n را نشان می‌دهد). فرض کنید $a = xa'$ و $c = xc'$. در این‌صورت، $a'b = c'd$. چون $a'|a'b$ پس $a'|c'd$ و چون $(a', c') = ۱$ پس $a'|d$. بنابراین، $d = a'u$. به دلیل مشابه $b = c'v$ و با جایگذاری در معادله نتیجه می‌شود $u = v$. حال کافی است قرار دهیم $y = a'$، $z = c'$ و $t = u = v$.$\square$

حال بنابر لم بالا،

$$a + b + c + d = xy + zt + xz + yt = (x + t)(y + z)$$

و بنابراین، S عددی مرکب است.

۳. برای اثبات، دو مربع $AMNB$ و $APQC$ را روی اضلاع AB و AC بنا می‌کنیم.



واضح است که E و F مراکز این دو مربع‌اند. حال دو مثلث ABP و ACM را درنظر می‌گیریم. روشن است که

$$AB = AM, \quad AC = AP, \quad \angle MAC = \angle BAP$$

پس این دو مثلث مساوی‌اند. بنابراین $BP = MC$.

با توجه به اینکه $AM \perp AB$ و $AP \perp AC$، روشن است که مثلث ABP از دوران مثلث AMC به اندازه‌ی ۹۰° به‌دست می‌آید. بنابراین $MC \perp BP$.

روشن است که FE وسطهای دو ضلع مثلث BCP را به هم وصل کرده است بنابراین EF موازی BP و برابر نصف آن است. به دلیل مشابه FD نیز موازی MC و برابر نصف آن است. چون BP و MC مساوی و عمود بر هم‌اند، نتیجه می‌شود که DF و FE نیز برابر و بر هم عمودند و این حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴. فرض کنید که $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n نقاط قرمز و $B_۱$، $B_۲$، ... و B_n نقاط آبی را نمایش دهند. نقطه‌ی دلخواه O را روی این خط انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $a_i = |OA_i|$ و $b_i = |OB_i|$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که

$$a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_n$$

و

$$b_۱ \leq b_۲ \leq \cdots \leq b_n$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} |a_i - a_j| + \sum_{i<j} |b_i - b_j| &= \sum_{i<j} (a_j - a_i) + \sum_{i<j} (b_j - b_i) \\
&= \sum_{i<j} (a_j - b_i) + \sum_{i<j} (b_j - a_i) \\
&\leq \sum_{i<j} |a_j - b_i| + \sum_{i<j} |b_j - a_j| \\
&\leq \sum_{i,j} |a_i - b_j|.
\end{aligned}$$

و این دقیقاً همان حکم مسأله است.

یادداشت. اگر نقاط را به‌جای اینکه روی خط بگیریم، در یک فضای nـ بعدی اقلیدسی نیز درنظر بگیریم، کماکان حکم مسأله درست خواهد بود. این مطلب با به‌کار بستن قضیه‌ی لوی برای این حالت خاص مسأله که بررسی کردیم نتیجه می‌شود. این قضیه را بیان می‌کنیم

قضیه. فرض کنید که

$$(۱ \leq i \leq p, ۱ \leq j \leq r) a_{ij}, \quad (۱ \leq i \leq q, ۱ \leq j \leq r) b_{ij}$$

اعدادی حقیقی و دلخواه باشند. اگر نابرابری

$$\sum_{i=۱}^{p} \left| \sum_{j=۱}^{r} a_{ij} v_j \right| \leq \sum_{i=۱}^{q} \left| \sum_{j=۱}^{r} b_{ij} v_j \right|$$

برای مقادیر حقیقی $(۱ \leq j \leq r) v_j$ درست باشد، آنگاه این نابرابری برای بردارهای یک فضای ضرب داخلی حقیقی (مانند $\mathbb{R}^n$) نیز برقرار خواهد ماند.

آزمون مرحله‌ی دوم سیزدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عباداالله محمودیان

۱. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۳$، دو مجموعهٔ $A = \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ و $B = \{y_۱, y_۲, \dots, y_n\}$ از اعداد صحیح وجود دارد به طوری که

$$A \cap B = \varnothing \qquad (۱)$$

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = y_۱ + y_۲ + \cdots + y_n \qquad (۲)$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ = y_۱^۲ + y_۲^۲ + \cdots + y_n^۲ \qquad (۳)$$

۲. مثلث ABC که زوایای آن حاده هستند و خط L واقع در صفحهٔ مثلث مفروضند. قرینه‌های خط L را نسبت به هریک از اضلاع مثلث ABC به‌دست می‌آوریم تا یکدیگر را در A'، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار می‌گیرد.

۳. $۱۲k$ نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر نفر دقیقاً با $۳k + ۶$ نفر دیگر از مهمانان دست می‌دهد. همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که با (هر دوی) هر دو نفر دست می‌دهند، عددی ثابت است. تعداد افراد شرکت کننده در این مهمانی را تعیین کنید.

۴. فرض کنید $S = \{۲^m ۳^n \mid m, n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}\}$. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان برحسب حاصلجمع اعضای متمایزِ S نوشت که هیچ‌یک از عواملِ جمع مضربی از عامل دیگری نباشد. (مثلاً $۱۹ = ۹ + ۶ + ۴$).

۵. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant ۰$ داریم:

$$\left\lceil \sqrt{n} + \sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{۹n+۸} \right\rceil$$

منظور از $\lceil x \rceil$، کوچکترین عدد صحیحی است که بزرگتر از x یا مساوی با آن است.

۶. در چهاروجهی $ABCD$ فرض کنید A'، B'، C' و D' به‌ترتیب مراکز دوایر محیطی مثلث‌های BCD، CDA، DAB و ABC باشند. اگر صفحه‌ای را که از نقطهٔ X بر خط YZ عمود می‌شود، به $S(X, YZ)$ نمایش دهیم ثابت کنید چنانچه A'، B'، C' و D' در یک صفحه نباشند چهار صفحه $S(A, C'D')$، $S(B, A'D')$، $S(C, A'B')$ و $S(D, B'C')$ از یک نقطه می‌گذرند.

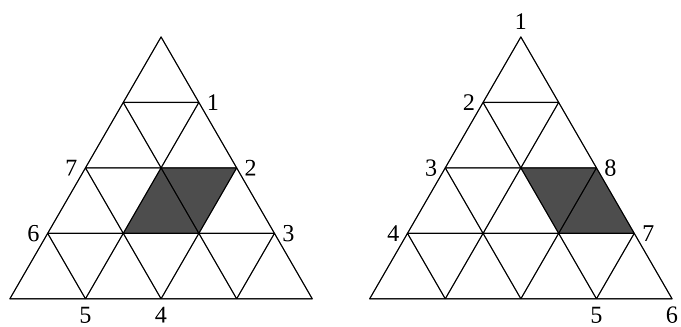
حل مسائل مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: دی ماه ۱۳۷۳

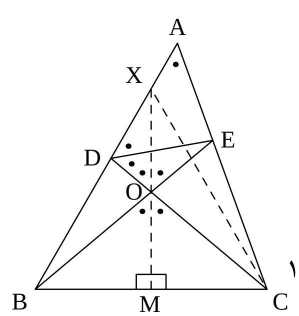
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عباداالله محمودیان

۱. هر متوازی‌الاضلاع از برخورد دو زوج خط موازی به‌دست می‌آید و این خطها اضلاع مثلث را در ۷ یا ۸ نقطه قطع می‌کنند (زیرا ممکن است دو خط روی یک ضلع به‌هم برسند) در واقع دو ضلع دو نقطه تقاطع دارند و یک ضلع ۳ یا ۴ نقطه، لذا هر متوازی‌الاضلاع با انتخاب یک ضلع و ۳ یا ۴ نقطه روی آن مشخص می‌شود، چون روی هر ضلع $n+۱$ نقطه موجود است، داریم

$$\text{تعداد متوازی‌الاضلاعها} = ۳ \times \left(\binom{n+۱}{۴} + \binom{n+۱}{۳}\right) = ۳ \times \binom{n+۲}{۴}$$



۲.



حل مسائل مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد ریاضی

عمودمنصف BC را رسم می‌کنیم تا AB را در X قطع کند، آنگاه دو مثلث ODX و DOE برابرند (زض‌ز) و مثلث BOD متساوی‌الساقین است، پس اگر $BX = BE = k$ و $BC = a$ باشد، داریم

$$\angle BXC = ۳۶۰^\circ - ۶\alpha \Longrightarrow \angle BCX = ۳\alpha - ۹۰^\circ$$

و

$$\angle BEC = ۵\alpha - ۱۸۰^\circ \quad \text{و} \quad \angle BCA = ۲۷۰^\circ - ۴\alpha$$

حال در مثلث BXC می‌گوییم

$$k < a \Longrightarrow ۳\alpha - ۹۰^\circ < ۳۶۰^\circ - ۶\alpha \Longrightarrow \alpha < ۵۰^\circ$$

و در مثلث EBC داریم

$$k < a \Longrightarrow ۲۷۰^\circ - ۴\alpha < ۵\alpha - ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \alpha > ۵۰^\circ$$

به‌همین ترتیب برای $k > a$ نیز تناقض مشابهی حاصل می‌شود، لذا زاویهٔ α برابر ۵۰ درجه می‌شود.

۳. ادعا می‌کنیم f، تابعِ ثابت است.

$$f(۱) = f\left(\frac{۱+۲}{۳}\right) = f(۱) + f(۲)۲ \Longrightarrow f(۱) = f(۲)$$
$$f(۲) = f\left(\frac{۳+۳}{۳}\right) = \frac{f(۳)+f(۳)}{۲} \Longrightarrow f(۲) = f(۳)$$

فرض کنید

$$f(۱) = f(۲) = \cdots = f(۳k)$$

پس

$$f(۲) = f(k+۱) = f\left(\frac{۳k+۱+۲}{۲}\right) = \frac{f(۳k+۱)+f(۲)}{۲} \Longrightarrow f(۳k+۱) = f(۲)$$
$$f(۱) = f(k+۱) = f\left(\frac{۳k+۲+۱}{۳}\right) = \frac{f(۳k+۲)+f(۱)}{۲} \Longrightarrow f(۳k+۲) = f(۱)$$
$$f(۳) = f(k+۲) = f\left(\frac{۳k+۳+۳}{۳}\right) = \frac{f(۳k+۳)+f(۳)}{۲} \Longrightarrow f(۳k+۳) = f(۳)$$

در نتیجه

$$f(۱) = f(۲) = f(۳) = \cdots = f(۳k) = f(۳k+۱) = f(۳k+۲) = f(۳k+۳)$$

پس f روی اعداد صحیح و مثبت ثابت است، اگر $x > ۰$ آنگاه $-x + ۳ > ۰$ پس

$$f(۱) = f\left(\frac{x + (-x + ۳)}{۳}\right) = \frac{f(x) + f(-x + ۳)}{۲}$$
$$= \frac{f(x) + f(۱)}{۲}$$

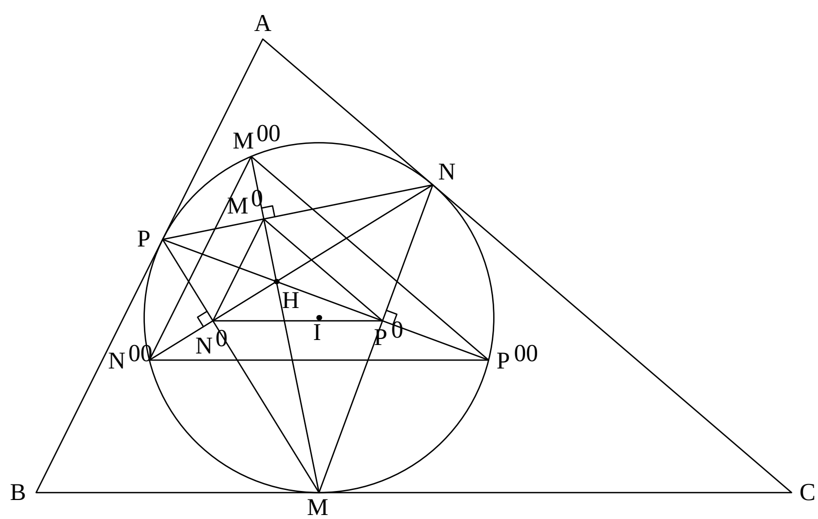
پس $f(x) = f(۱)$ و f ثابت است.

۴. فرض کنید b_i تعداد تکرار رقم iام باشد اگر b_j و b_i موجود باشند که

$$b_i \equiv b_j \not\equiv ۰ \pmod{۳}$$

آنگاه تعریف می‌کنیم $f(j) = ۸$ و $f(i) = ۷$، این روند را روی بقیهٔ ارقام ادامه می‌دهیم و به‌جای $f(i)$ و $f(j)$ به‌ترتیب ۴ و ۵، و ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم، بعد از اتمام این روند یا تعداد ارقام باقیمانده کوچکتر یا مساوی ۴ است یا فقط یک a_k و یک a_l موجودند که $a_k \equiv ۱$ و $a_l \equiv ۲$. در حالت اول ارقام باقیمانده را با ۰، ۳، ۶ و ۹ جایگزین می‌کنیم و در حالت دوم k و l را با ۰ و ۳ جایگزین خواهیم کرد (در هر حالت رقم اول را با غیرصفر جایگزین می‌کنیم)، برقراری شرطهای مسأله واضح است.

۵. $M'N'P'$ را مثلث ارتفاعی MNP می‌گیریم، به‌راحتی دیده می‌شود که اضلاع متناظر دو مثلث $M'N'P'$ و ABC موازیند، پس یک نقطه مانند G وجود دارد که دو مثلث با تجانس مرکزی نسبت به‌آن، به هم تبدیل می‌شوند.



پس مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $P'N'M'$، I (مرکز دایره محاطی ABC) و G روی یک خط راست قرار دارند، یعنی H، I و G روی یک خط هستند، همچنین مرکز دایرهٔ محیطی $M'N'P'$، G و O نیز روی یک خط واقعند، حال توجه می‌کنیم که دو مثلث $M'N'P'$ و $M''N''P''$ با تجانس به مرکز H به‌هم تبدیل می‌شوند. پس مرکز دایرهٔ محیطی $M'N'P'$ (مثلاً نقطهٔ O') و مرکز دایرهٔ محیطی $M''N''P''$ (نقطهٔ I)، و H روی یک خط واقع می‌شوند.

پس ثابت شد که G، I، H، O و O' روی یک خط قرار دارند.

۶. واضح است که $m \mid ۲^k$، پس خواهیم داشت:

$$۲^m - ۱ = t^{۲^k} - ۱$$

که در آن $t > ۳$ و t زوج است. حال داریم

$$۲^m - ۱ = t^{۲^k} - ۱ = (t - ۱) \prod_{i=۰}^{k-۱} \left(t^{۲^i} + ۱\right)$$

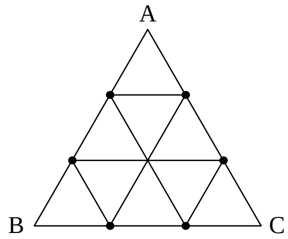
یعنی $۲^m - ۱$ دارای $k + ۱$ عامل است که به شکل $t - ۱$ و $t^{۲^i} + ۱$ هستند و دوبه‌دو نسبت به هم اولند ولی n دارای k عامل اول است پس $\exists p, p \mid ۲^m - ۱$ و $P \nmid n$.

آزمون مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

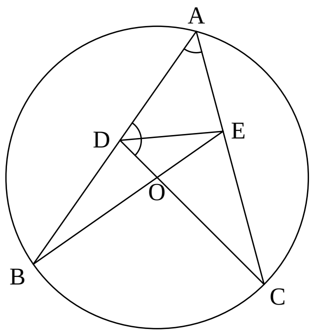
زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث دلخواه ABC هر ضلع را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم ($n \geqslant ۲$). از هر نقطه تقسیم روی هر ضلع، خطوطی به موازات دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. مثلاً برای $n = ۳$ شکل زیر حاصل می‌شود.
برای هر $n \geqslant ۲$ تعداد متوازی‌الاضلاعهای به‌وجود آمده را مشخص کنید.



۲. در شکل نقطهٔ O مرکز دایره است. زاویهٔ α چند درجه است؟



آزمون مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی

۳. $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح و $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویاست. تمام توابع $f : \mathbb{Z} - \{۰\} \to \mathbb{Q}$ را طوری پیدا کنید که در معادلهٔ تابعی زیر صدق کنند.

$$f\left(\frac{x+y}{۳}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{۲}$$

۴. اگر $\overline{a_۱ \dots a_n}$ یک عدد n رقمی باشد ثابت کنید تابعی یک‌به‌یک مانند

$$f : \{۰, ۱, \dots, ۹\} \to \{۰, ۱, \dots, ۹\}$$

وجود دارد به طوری که $f(a_۱) \neq ۰$ و $\overline{f(a_۱)\dots f(a_n)}$ بر ۳ بخشپذیر باشد.

۵. فرض کنید در مثلث ABC نقاط M، N و P به‌ترتیب نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی ABC با اضلاع AB، AC و BC باشند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث MNP، مرکز دایرهٔ محیطی]مثلث ABC[و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

۶. اگر $n > ۳$ فرد باشد و داشته باشیم $n = \prod_{i=۱}^{k} p_i^{\alpha_i}$ (p_iها اعداد اول]هستند[) و

$$m = n\left(۱ - \frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱ - \frac{۱}{p_۲}\right)\cdots\left(۱ - \frac{۱}{p_k}\right)$$

نشان دهید عدد اولی مانند p وجود دارد به طوری که $p \mid ۲^m - ۱$ ولی $p \nmid n$.

حل مسائل مرحله‌ی دوم یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. چون p عددی اول است پس $p \equiv \pm ۱ \pmod{۶}$.

$$\begin{aligned} ۶^۶ &\equiv ۱ \pmod{۴۳} & \qquad ۷^۶ &\equiv ۱ \\ ۶^{۶k} &\equiv ۱ \pmod{۴۳} & \qquad ۷^{۶k} &\equiv ۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &۷ \equiv ۱+۶ \Longrightarrow ۷^{۶k+۱} \equiv ۶^{۶k+۱}+۱ \pmod{۴۳} \\ &۷^۵ \equiv ۶^۵+۱ \pmod{۴۳} \\ &\qquad \Longrightarrow ۷^{۶t+۵} \equiv ۷^۵ \equiv ۱+۶^۵ \equiv ۱+۶^{۵+۶t} \pmod{۴۳} \\ &\qquad \Longrightarrow ۷^p \equiv ۶^p+۱ \pmod{۴۳} \qquad \text{برای هر } p \end{aligned}$$

۲. شرط غلط است. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که

$$a=b=c=۱,\ x=y=\frac{\sqrt{۳}}{۳},\ z=\frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$$

مثلثی به اضلاع a، y و z وجود دارد که‌مساحت آن برابر است با $S_۱=\sqrt{۳}/۱۲$. به همین ترتیب مثلثهایی به اضلاع b، x و z و مساحت $\sqrt{۳}/۱۲$ و c، x و y و مساحت $\sqrt{۳}/۱۲$ وجود دارد. اما نمی‌توان P را داخل ABC یافت که $PA=x$، $PB=y$ و $PC=z$ زیرا طول PC که باید درون مثلث باشد از طول بزرگترین ضلع مثلث یعنی ۱، بیشتر است.

۳. اگر $m \geqslant rn+r$، اعداد rn، $rn+۱$، ... و $rn+r$ را در نظر می‌گیریم. دو تا از این اعداد در یکی از A_iها قرار دارند پس

$$\left.\begin{aligned} a,b \in A_i \\ a>b \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{rn+i}{rn+j} \leqslant \frac{rn+r}{rn}=۱+\frac{۱}{n}$$

برای $m=rn+r-۱$ یک مثال می‌آوریم.

برای هر $1 \leqslant i \leqslant r$ تعریف می‌کنیم

$$A_i = \{x \mid x \equiv i \pmod{i}\}$$

ادعا می‌کنیم A_iها دارای شرایط مسأله هستند. a و b را دو عضو از A_i می‌گیریم که $a > b$. اگر $i \neq r$، k و l وجود دارند به طوری که $a = kr + i$ و $b = lr + i$.

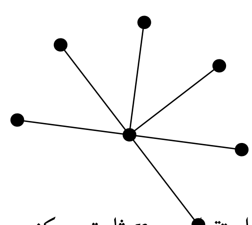
$$\frac{a}{b} = \frac{kr+i}{lr+i} \geqslant \frac{(l+1)r}{lr+i} = 1 + \frac{r}{lr+i}$$
$$\geqslant 1 + \frac{r}{lr} = 1 + \frac{1}{l}$$
$$> 1 + \frac{1}{n}$$

اگر $r = i$، k و l وجود دارند که $a = kr$ و $b = lr$.

$$\frac{a}{b} = \frac{kr}{lr} = \frac{k}{l} \geqslant \frac{l+1}{l} = 1 + \frac{1}{l}$$
$$> 1 + \frac{1}{n}$$

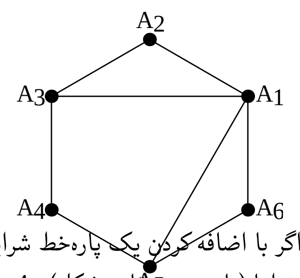
پس در هر صورت اگر $\frac{a}{b}$ بزرگتر از ۱ باشد، از $1 + \frac{1}{n}$ نیز بیشتر است و حکم برقرار نمی‌شود.
پس $m = r(n+1)$.

۴. الف) $n - 1$. شکل نشان می‌دهد که با $n - 1$ پاره‌خط مسأله قابل حل است.



این ادعا را که اقلاً $n - 1$ پاره‌خط لازم است با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = 2$ مسأله بدیهی است فرض کنیم برای $n = k$ درست باشد. اکنون $k + 1$ نقطهٔ A_1، A_2، ... و A_{k+1} را که دارای شرایط مسأله باشند در نظر می‌گیریم به طوری که تعداد کل پاره‌خطهای شکل کمتر از k باشد. در این صورت دست‌ِکم به یکی از این نقاط فقط یک پاره‌خط وصل شده است (چرا؟). اگر این نقطه و این پاره‌خط را از شکل حذف کنیم در نتیجه k نقطه خواهیم داشت (با حفظ شرایط مسأله) که با کمتر از $k - 1$ پاره‌خط به هم وصل شده‌اند که مخالف فرض استقراست.

ب) با توجه به شکل با اضافه کردن دو پاره‌خط شرایط مسأله برقرار می‌شود.



اولاً باید به‌وضوح پاره‌خطّی اضافه کنیم ولی اگر با اضافه کردن یک پاره‌خط شرایط مسأله برقرار شود بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود این پاره‌خطها (با توجه به تقارن شکل) A_1A_3 یا A_1A_4 هستند. که در هر دو صورت نقاط A_2 و A_5 دارای شرایط مسأله نیستند. پس با اضافه کردن تنها یک پاره‌خط نمی‌توان شرایط مسأله را برقرار کرد.

۵. نقطهٔ دلخواه M را روی D_2 در نظر می‌گیریم. از M خط Δ را موازی با D_1 رسم می‌کنیم. صفحهٔ نیمساز زاویهٔ بین D_2 و Δ، (P) را با صفحهٔ هم فاصلهٔ Δ و D_1، (Q)، قطع می‌دهیم. محل تقاطع P و Q را δ می‌نامیم . اگر A نقطه‌ای از δ باشد چون A در P است از D_2 و Δ به یک فاصله است و چون A در Q است از Δ و D_2 به یک فاصله است. پس هر نقطهٔ δ از D_2 و D_1 به یک فاصله است. با تغییر دادن M بینهایت خط به‌دست می‌آید.

۶. روش اول. اثبات را با استقرا روی مجموع درجات صورت و مخرج انجام می‌دهیم. اگر درجهٔ f را n و درجه g را m بگیریم استقرا روی $m+n$ انجام می‌شود (فرض می‌کنیم $n \geqslant m$). اگر $m+n=1$، حکم واضح است. f به یکی از دو صورت زیر است.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}(x+a)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q(x+a)}$$

فرض کنیم حکم برای همه اعداد کمتر از $m+n$ درست باشد. ثابت می‌کنیم برای $m+n$ درست است. x_0 را یکی از اعدادی می‌گیریم که $\frac{f(x)}{g(x)}$ گویاست و $t(x)$ را می‌گیریم $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ پس

$$t(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = 0 \Longrightarrow (x-x_0) \mid t(x_0)$$

$$\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x_0)g(x)} = t(x) = (x-x_0)\,u(x)$$

$u(x_0)$ به‌ازای هریک از اعداد گویایی که t گویاست گویا می‌شود. (زیرا $x-x_0$ هم گویاست.) و مجموع درجه‌های صورت و مخرج u برابر $m+n-1$ است. پس $u(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که p و q دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا هستند. اما

$$\frac{f(x)}{g(x)} = t(x) + \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$= (x - x_0)\, u(x) + \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$
$$= \frac{(x - x_0)\, p(x) + \big(f(x_0)/g(x_0)\big) q(x))}{q(x)}$$

اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر بود، به جای $\frac{f}{g}$، $\frac{g}{f}$ را که در شرایط صدق می‌کند در نظر می‌گیریم، و کار را ادامه می‌دهیم.

روش دوم. فرض می‌کنیم f از درجهٔ n و g از درجهٔ m باشد. ثابت می‌کنیم اگر $\frac{f}{g}$ به‌ازای $n+m+1$ مقدار گویا، گویا شود آنگاه $\frac{f}{g}$ را می‌توان به صورت تقسیم دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.

$$n = \deg(f), m = \deg(g), t = n + m + 1$$
$$\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{Q}, \quad \frac{f}{g}(\alpha_1), \dots, \frac{f}{g}(\alpha_t) \in \mathbb{Q}, \quad \frac{f}{g}(\alpha_i) = \beta_i$$

p را یک چندجمله‌ای از درجهٔ n با ضریب بزرگترین درجه برابر ۱ و q را یک چندجمله‌ای از درجهٔ m می‌گیریم به طوری که

$$p(\alpha_i) = \beta_i q(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, t$$

چنین چندجمله‌ایهایی وجود دارند زیرا اگر f و g را بر ضریب x^n در f تقسیم کنیم دو چندجمله‌ای جدید در t تساوی بالا صدق می‌کنند.

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

و مجموعهٔ معادلات

$$\alpha_i^n + a_{n-1} \alpha_i^{n-1} + \cdots + a_0 = \beta_i (b_m \alpha_i^m + b_{m-1} \alpha_i^{m-1} + \cdots + b_0)$$

برای $i = 1, 2, \dots, m + n - 1$ دارای جواب است (a_jها و b_jها مجهولند) و چون ضرایب دستگاه گویا هستند، دستگاه دارای ریشهٔ گویاست. پس ضرایب p و q گویا هستند. از

$$\frac{p(\alpha_i)}{q(\alpha_i)} = \frac{f(\alpha_i)}{g(\alpha_i)}, \quad i = 1, \dots, m + n + 1$$

نتیجه می‌شود

$$pg(\alpha_i) \equiv fq(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, m + n + 1$$

درجهٔ fq و pg، $m+n$ است و به‌ازای $m+n+1$ مقدار برابرند؛ پس

$$pg \equiv fq \Longrightarrow \frac{p}{q} \equiv \frac{f}{g}$$

آزمون مرحله‌ی دوم یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، آنگاه ثابت کنید عدد $A = 7^p - 6^p - 1$ بر ۴۳ بخشپذیر است.

۲. مثلث ABC به اضلاع a، b و c و مساحت S داده شده است. اثبات یا رد کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌ای مانند P درون آن وجود داشته باشد به گونه‌ای که فاصلهٔ آن از سه رأس مثلث مزبور به ترتیب x، y و z باشد، آن است که مثلثی به اضلاع a، y و z و مساحت S_1، مثلثی به اضلاع b، x و z و مساحت S_2 و مثلثی به اضلاع c، x و y و مساحت S_3 وجود داشته باشد که $S_1 + S_2 + S_3 = S$.

۳. فرض می‌کنیم n و r دو عدد طبیعی باشند. کوچکترین عدد طبیعی m را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشد که برای هر افراز مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, m\}$ به r زیرمجموعهٔ A_1، A_2، ... و A_r، در یکی از A_iها ($1 \leqslant i \leqslant r$) دو عدد a و b پیدا شوند به گونه‌ای که $1 < \frac{a}{b} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ باشد.

۴. تعداد $n \geqslant 2$ نقطه A_1، A_2، ... و A_n در صفحه داده شده‌اند به گونه‌ای که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست واقع نیستند و هر دو نقطهٔ A_i و A_j یا با پاره‌خط A_iA_j به هم متصلند و یا نقطه‌ای مانند A_k وجود دارد که با پاره‌خطهای A_iA_k و A_jA_k به این دو نقطه متصل است.

الف) حداقل تعداد پاره‌خطهای لازم را پیدا کنید.

ب) در حالتی که $n = 6$ و $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ یک شش‌ضلعی محدب باشد، حداقل چند پاره‌خط لازم است افزوده شود تا شرایط بالا برقرار گردد.

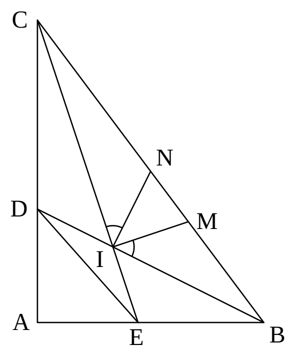
۵. اگر D_1 و D_2 دو خط متنافر باشند، آنگاه ثابت کنید بینهایت خط راست وجود دارد که]همهٔ[نقاط روی آنها از این دو خط به یک فاصله‌اند.

۶. اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشند به گونه‌ای که کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ برای بینهایت عدد گویای x مقداری گویا گردد، آنگاه ثابت کنید $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می‌توان به شکل نسبت دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.

حل مسائل مرحله‌ی دوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان



.۱

چون BD و CE نیمسازهای $\angle B$ و $\angle C$ هستند پس $\angle BIC = 135^\circ$. خطوط IN و IM را چنان می‌سازیم که $\angle CIN = 45^\circ$ و $\angle BIM = 45^\circ$. پس $\angle MIN = 45^\circ$.

به‌سادگی معلوم می‌شود که $\triangle BMI = \triangle BEI$ و $\triangle INC = \triangle IDC$ (زضز) پس

$$S(\triangle IMB) = S(\triangle IEB) \quad (1)$$
$$S(\triangle INC) = S(\triangle IDC) \quad (2)$$

و نیز

$$\begin{aligned} S(\triangle IMN) &= \frac{IM \cdot IN \cdot \sin(180^\circ - 135^\circ)}{2} \\ &= \frac{IE \cdot ID \cdot \sin(135^\circ)}{2} = S(\triangle IED) \end{aligned} \quad (3)$$

با جمع طرفین (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$S(\triangle BIC) = S(\triangle IEB) + S(\triangle IDC) + S(\triangle IED)$$

پس

$$2S(\triangle BIC) = S(\triangle BEDC)$$

۲. قرار می‌دهیم $b_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. با استقرا ثابت می‌کنیم

$$a_1 = b_1 = 2 \quad \text{و} \quad a_n = b_n$$

اگر $a_n = b_n$، پس

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}} = a_n + \frac{1}{a_n}$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_n$$

پس $a_{n+1} = b_{n+1}$. پس $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. بنابراین از

$$a_{n-1}^2 + 3 > a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 > a_{n-1}^2 + 2$$

نتیجه می‌شود

$$a_{i-1}^2 + 3 \geqslant a_i^2 > a_{i-1}^2 + 2 \qquad (1)$$

با جمع طرفین نامساوی (۱) برای iهای از ۱ تا n خواهیم داشت

$$2n + 1 < a_n^2 < 3n + 2$$

بنابراین،

$$\sqrt{2n+1} < a_n < \sqrt{3n+2}$$

با قرار دادن $n = 1371$ خواهیم داشت

$$52 < a_n < 65$$

۳. فرض کنید با حذف خط قایقرانیِ بین شهرهای A و B (که در دو طرف رودخانه واقعند) ارتباط بین این شهرها قطع شود. تمام شهرهایی را که بتوان به آنها از A با قایق رفت و آمد کرد، با S نشان می‌دهیم. فرض کنید n_1 عضو از S در آن سمت از رودخانه که A قرار دارد (مثلاً سمت چپ) باشند و n_2 عضو در طرف دیگر؛ پس $B \notin S$. تعداد کل خطوط قایقرانی که از شهرهای سمت چپ از S دایر هستند، مساوی $(n_1 - 1)k + (k-1)$ و تعداد کل خطوط قایقرانی که از شهرهای سمت راست از S دایر هستند برابر $n_2 k$ است. پس

$$(n_1 - 1)k + (k - 1) = n_2 k$$

که امکان ندارد، زیرا طرف راست بر k بخشپذیر است و طرف چپ بر k بخشپذیر نیست.

۴. حکم به‌ازای $t = 1$ برقرار است. به‌ازای $t > 1$ داریم

$$\begin{aligned} A &= 1^t + 2^t + \cdots + 9^t - 3(1 + 6^t + 8^t) \\ &= 2^t + 3^t + 4^t + 5^t + 7^t + 9^t \\ &\quad - 2 - 2 \times 6^t - 2 \times 8^t \end{aligned}$$

که به‌وضوح بر ۲ بخشپذیر است. پس باید نشان بدهیم A بر ۹ بخشپذیر است.
چون $t > ۱$، پس باید نشان دهیم

$$\begin{aligned} A &\equiv ۲^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t - ۲ - ۲ \times ۸^t \\ &\equiv (۷^t + ۲^t) + (۵^t + ۴^t) - ۲(۱ + ۸^t) \pmod{۹} \end{aligned}$$

بر ۹ بخشپذیر است. در حالت t فرد حکم برقرار است. (زیرا $a^t + b^t$ بر $a + b$ بخشپذیر خواهد بود.) اگر t زوج باشد،

$$\begin{aligned} A \equiv\ & ۷(۷^{t-۱} + ۲^{t-۱}) - ۵ \times ۲^{t-۱} + ۵(۵^{t-۱} + ۴^{t-۱}) \\ & - ۴^{t-۱} - ۱۶(۸^{t-۱} + ۱) + ۱۴ \pmod{۹} \end{aligned}$$

چون $t - ۱$ فرد است پس عبارات داخل پرانتز بر ۹ بخشپذیر است. بنابراین،

$$\begin{aligned} -A &\equiv ۵ \times ۲^{t-۱} + ۴^{t-۱} - ۱۴ \overset{۹}{\equiv} (۲^{t-۱} + ۷)(۲^{t-۱} - ۲) \\ &\equiv (۲^{t+۱} + ۱ + ۶)(۲^{t-۱} - ۲) \pmod{۹} \end{aligned}$$

که بنابر فرد بودن $t - ۱$ خواهیم داشت

$$۲^{t-۱} - ۲ \equiv ۰, ۲^{t-۱} + ۱ + ۶ \equiv ۰ \pmod{۳}$$

پس $-A \equiv ۰$ یا $A \equiv ۰$ پس عدد A هم بر ۹ و هم بر ۲ بخشپذیر است پس بر ۱۸ بخشپذیر است.

۵. در مثلث ADC داریم $\angle MDC = \angle MAC + \frac{۱}{۲}\angle C$. پس

$$۲\angle MDC = ۲\angle MAC + \angle C$$

و چون $\angle AMB = \angle MAC + \angle C$ پس

$$۲\angle MDC = \angle MAC + \angle AMB \qquad (۱)$$

حال نقطهٔ برخورد نیمساز درونی $\angle B$ با AC را E می‌نامیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین خواهد بود. پس EM ارتفاع وارد بر BC خواهد شد. از E عمود EH را بر AB رسم می‌کنیم پس $EH = EM$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ EHA داریم $EA \geqslant EH$. در مثلث AEM خواهیم داشت

$$EA \geqslant EM \Longrightarrow \angle EMA \geqslant \angle MAC$$

پس $MAC \geqslant AMB - ۹۰^\circ$؛ یعنی $۹۰^\circ \geqslant \angle MAC + \angle AMB$ و بنابراین $۹۰^\circ \geqslant ۲\angle MDC$ و $۴۵^\circ \geqslant \angle MDC$.

حالت تساوی $\angle MDC = ۴۵^\circ$ هنگامی برقرار است که $EH = EA$، یعنی $\angle A = ۹۰^\circ$. آنگاه $\angle B = ۶۰^\circ$ و $\angle C = ۳۰^\circ$ خواهد شد.

۶. رابطهٔ $\sim$ را روی X چنین تعریف می‌کنیم $a \sim b \Longleftrightarrow \exists i, f^i(a) = b$. این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است زیرا

الف) $a \sim a$ زیرا $f^p(a) = a$.

ب) اگر $a \sim b$ پس i هست که $f^i(a) = b$. پس

$$f^{p-i}(b) = f^{p-i}\big(f^i(a)\big) = f^p(a) = a$$

و خاصیت تقارنی هم برقرار است.

ج) اگر $a \sim b$ و $b \sim c$ آنگاه i_1 و i_2 هستند که

$$\left.\begin{array}{r} b = f^{i_1}(a) \\ c = f^{i_2}(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow c = f^{i_2}\big(f^{i_1}(a)\big) = f^{i_1+i_2}(a) \Longrightarrow a \sim c$$

پس رابطهٔ فوق ترایایی است.

پس مجموعهٔ X به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌شود. حال می‌گوییم اگر یک دستهٔ هم‌ارزی بیش از یک عضو داشته باشد حتماً p عضو دارد. یعنی باید ثابت کنیم اعضای مجموعهٔ $\{f(a), \dots, f^p(a)\}$ متمایزند. بنابر برهان خلف اگر چنین نباشد i و j هستند که (می‌توان فرض کرد که $(a \neq f(a))$ $1 \leqslant i \leqslant p$ و $1 \leqslant j \leqslant p$)

$$f^i(a) = f^j(a) \Longrightarrow f^{i-j}(a) = a$$

از طرفی چون $1 \leqslant j - i < p$، پس r و s هستند که $rp + s(j-i) = 1$. در نتیجه $f(a) = f^{rp+s(j-i)}(a) = a$ (که $f(a) \neq a$.) پس تعداد اعضای هر دستهٔ هم‌ارزی بر p بخشپذیر است. Z را زیر مجموعه‌ای از Y شامل سردسته‌های این مجموعه‌های p عضوی می‌گیریم. بنابراین

$$Y = \bigcup_{a \in Z} X_a \Longrightarrow |Y| = \sum_{a \in Z} |X_a| \Longrightarrow p \,\big|\, |y|$$

آزمون مرحله‌ی دوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\angle A = ۹۰^\circ)$ نیمسازهای درونی زاویه‌های B و C یکدیگر را در نقطهٔ I و ضلعهای روبرو را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی $BCDE$ دو برابر مساحت مثلث BIC است.

۲. دنبالهٔ

$$a_{n+۱} = a_n + a_{n-۱}۱ + a_{n-۱}^۲ \quad (n \geqslant ۱)$$

به طوری که $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$، داده شده است. ثابت کنید که

$$۵۲ < a_{۱۳۷۱} < ۶۵$$

۳. در طرفین رودخانه‌ای چند شهر وجود دارد. چند خط قایقرانی بین این شهرها دایر است. هر خط قایقرانی دقیقاً بین یک شهر از یک سمت رودخانه به یک شهر در سمت دیگر دایر است. از هر شهر دقیقاً به k شهر در طرف دیگر خط قایقرانی دایر است. اگر بین هر دو شهر بتوان به‌وسیلهٔ این قایقها رفت و آمد کرد، آنگاه ثابت کنید که با حذف هریک از این خطهای قایقرانی باز هم می‌توان بین هر دو شهر با استفاده از این خطوط قایقرانی، رفت و آمد کرد $(k > ۱)$.

۴. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی t، عدد

$$A = ۱^t + ۲^t + \cdots + ۹^t - ۳(۱ + ۶^t + ۸^t)$$

بر ۱۸ بخشپذیر است.

۵. در مثلث ABC داریم $\angle A \leqslant ۹۰^\circ$ و $\angle B = ۲\angle C$. اگر نیمساز درونی زاویهٔ C میانهٔ AM را در نقطهٔ D قطع کند (M وسط BC است)، ثابت کنید که $\angle MDC \leqslant ۴۵^\circ$. با چه شرطی $\angle MDC = ۴۵^\circ$؟

۶. فرض می‌کنیم $X \neq \varnothing$ یک مجموعهٔ متناهی و $f : X \to X$ تابعی باشد که برای هر x در X، $f^p(x) = x$، که در آن p عددی است اول و ثابت و

$$f^p(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ مرتبه}}(x)$$

اگر $Y = \{x \in X \mid f(x) \neq x\}$، آنگاه ثابت کنید که تعداد عناصر مجموعهٔ Y بر p بخشپذیر است.

حل مسائل مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عباداله محمودیان

۱. فرض می‌کنیم $a = (y, x-y)$؛ بنابراین،

$$y = ba,\ \ x - y = ca,\ \ (b,c) = 1$$

در نتیجه،

$$ab + ac + a^2b^2 + a^2c^2 + 2a^2bc = ab + a^2b^2 + a^3b^3$$

اگر $a = 0$، آنگاه $x = y = 0$ که خف فرض مثبت بودن x و y است. اگر $a \neq 0$، آنگاه $c + ac^2 + 2abc = a^2b^3$. پس $c \mid a^2b^3$، یعنی $c \mid a^2$. پس $a^2 = dc$ و بنابراین،

$$1 + ac + 2ab = db^3$$

در نتیجه $(d,a) = 1$. اما $a^2 = dc$ و اگر $d \neq 1$ باشد آنگاه $(d,a) \neq 1$. پس $d = 1$ و $c = a^2$.

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 2ab = b^3 \\ c = a^2 \Longrightarrow (b,a^2) = 1 \end{cases}$$

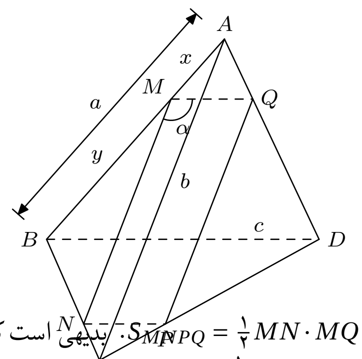
پس $(a,b) = 1$. از $b^3 = 1 + a^3 + 2ab$ نتیجه می‌شود $b > a$ و

$$(b-a)\big((b-a)^2 + 3ab\big) = 1 + 2ab$$

$$\left.\begin{aligned} b - a = s \\ ab = p \end{aligned}\right\} \Longrightarrow s(s^2 + 3p) = 1 + 2$$

اما $a,b \neq 1$ و در نتیجه $p > 1$ و بنابراین، $1 + 2p < 3p$؛ در نتیجه، تساوی فوق نمی‌تواند برقرار باشد.

۲. الف) فرض می‌کنیم $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع باشد در این صورت $MQ \parallel NP$ و چون $NP \subset BCD$ پس $MQ \parallel BD$ (چرا؟) و به دلیل مشابه $MN \parallel AC$ یعنی صفحهٔ (p) با دو یال AC و BD موازی است. به عکس اگر (p) با دو یال AC و BD موازی باشد به سهولت ثابت می‌شود که $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.



ب) اکنون می‌نویسیم $S_{MNPQ} = \frac{۱}{۲} MN \cdot MQ \sin\alpha$. بدیهی است که چون α ثابت است (زاویهٔ بین دو یال متنافر AC و BD) پس $\frac{۱}{۲}\sin\alpha$ مقداری است ثابت و در نتیجه باید $MN \cdot MQ$ ماکزیمم گردد. داریم

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BD} \qquad \frac{x}{a} = \frac{MQ}{c} \qquad MQ = \frac{cx}{a}$$
$$\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC} \qquad \frac{y}{a} = \frac{MN}{b} \qquad MN = \frac{by}{a}$$

در نتیجه،

$$MN \cdot MQ = \frac{cx}{a} \times \frac{by}{a} = \frac{bcxy}{a^{۲}}$$

چون $x + y = a$، پس ماکزیمم xy در صورتی پیش می‌آید که $x = y$ باشد یعنی M باید وسط AB باشد. در نهایت رأسهای متوازی‌الاضلاع با مساحت ماکزیمم وسطهای AB، BC، CD و DA است.

ج) اگر $MNPQ$ لوزی باشد داریم

$$MN = MQ, \quad \frac{cx}{a} = \frac{by}{a}, \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

یعنی باید نقطهٔ M یال AB را به نسبت $\frac{b}{c}$ تقسیم کند. در این صورت

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}, \frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c}, \frac{a}{y} = \frac{b+c}{c}, y = \frac{ac}{b+c}$$

پس

$$MN = \frac{by}{a} = \frac{b \times \frac{ac}{b+c}}{a} = \frac{bc}{b+c}$$

۳. واضح است که $f(۰) = ۰$ و $f(n) = n$ (استقرا) و همچنین $f(\frac{۱}{n}) = \frac{۱}{f(n)} = \frac{۱}{n}$ و در نتیجه، به‌ازای هر $r \in \mathbb{Q}$، $f(r) = r$. از طرفی f یک‌به‌یک است زیرا اگر $f(x) = f(y)$ آنگاه،

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x)$$

و در نتیجه، $f(y-x)=0$. حال اگر $y-x=\alpha\neq 0$ آنگاه

$$f(\alpha)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=1$$

و در نتیجه، $1=0$ که تناقض است. بنابراین $y=x$. و همچنین واضح است که $f(-x)=-f(x)$.
حال نشان می‌دهیم که $f(x^2)=f(x)^2$. واضح است که اگر $f(x)=f(x^2)$ آنگاه این رابطه با توجه به یک‌به‌یک بودن f ($x=\{0$ یا $1\}$) برقرار است و اگر $f(x)\neq f(x^2)$، آنگاه داریم

$$\frac{1}{f(x)-f(x^2)}=\frac{1}{f(x-x^2)}=\frac{1}{f\big(x(1-x)\big)}$$

$$=f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)=f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{1-f(x)}$$

$$=\frac{1}{f(x)-f(x)^2}\Longrightarrow f(x^2)=f(x)^2$$

بنابراین، اگر $x>0$ آنگاه $f(x)>0$ و در نتیجه f صعودی است (چرا؟). حال با توجه به اینکه برای هر x دو دنباله از اعداد گویا مانند r_n و s_n وجود دارد که به‌ازای هر n، $r_n<x<s_n$؛ و x تنها عددی است که در آن نامساوی صدق می‌کند، داریم

$$r_n=f(r_n)<f(x)<f(s_n)=s_n$$

در نتیجه $f(x)=x$.

۴. می‌گیریم $a=1370^{685}$. اگر $x=0$ آنگاه

$$A(0,a),\quad B(0,-a)$$

ضریب زاویهٔ مماس در A برابر است با $y'=\frac{1}{2a}$ پس معادلهٔ مماس در A می‌شود $y=\frac{x}{2a}+a$. محلّ دیگر تقاطعِ مماس با منحنی را می‌یابیم.

$$\left(\frac{x}{2a}+a\right)^2=x^3+x+1370^{1370}$$

پس $x=\frac{1}{4a^2}$ و در نتیجه،

$$C\left(\frac{1}{4a^2},\frac{1+8a^4}{8a^3}\right),\quad D\left(\frac{1}{4a^2},-\frac{1+8a^4}{8a^3}\right)$$

حال خط BC را با منحنی قطع می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که این خط در C بر منحنی مماس نیست پس در یک نقطهٔ E ($E\neq B$) با مختصات گویا منحنی را قطع می‌کنند. زیرا

$$BC \text{ ضریب زاویهٔ } =\frac{\frac{1+8a^4}{8a^3}+a}{\frac{1}{4a^2}}=\frac{1+16a^4}{2a}$$

$$2yy'=3x^2+1\Longrightarrow y'=\frac{\frac{3}{16a^4}+1}{2\left(\frac{1+8a^4}{8a^3}\right)}=\frac{3+16a^4}{4a(1+8a^4)}$$

که شیب مماس در C است. حال واضح است که

$$\frac{۱+۱۶a^۴}{۲a} \neq \frac{۳+۱۶a^۴}{۴a(۱+۸a^۴)}$$

$$۲(۱+۱۶a^۴)(۱+۸a^۴) > ۳+۱۶a^۴$$

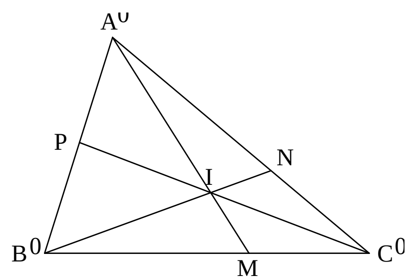
همچنین خط DA به همین دلیل منحنی را در نقطهٔ دیگری مانند F با مختصات گویا قطع می‌کند.

۵. برای هر سه خط همرس داریم

$$\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geqslant ۶ \qquad (۱)$$

زیرا با در نظر گرفتن مساحتها داریم

$$\frac{IM}{MA'}+\frac{IN}{NB'}+\frac{IP}{PC'} = ۱$$



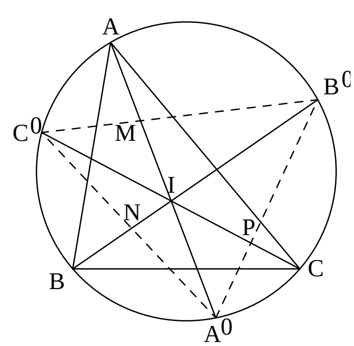
پس بنابر نامساوی کوشی،

$$\frac{A'M}{IM}+\frac{B'N}{IN}+\frac{C'P}{IP} \geqslant ۹$$

و یا

$$\frac{A'I+IM}{IM}+\frac{B'I+IN}{IN}+\frac{C'I+IP}{IP} = ۳+\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geqslant ۹$$

و در نتیجه رابطهٔ (۱) برقرار است.



M، N و P را وسطهای پاره‌خطهای AI، BI و CI می‌گیریم. با توجه به شکل بدیهی است که $A'C'$ عمودمنصف IB و $A'B'$ عمودمنصف IC و $B'C'$ عمودمنصف IA است. پس

$$\frac{IA'}{IM}+\frac{IB'}{IN}+\frac{IC'}{IP}\geqslant ۶$$

و از آنجا

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geqslant ۳$$

اکنون طبق نامساوی «اردیش‌ـمردل» داریم

$$IA'+IB'+IC'\geqslant ۲(IM+IN+IP)$$

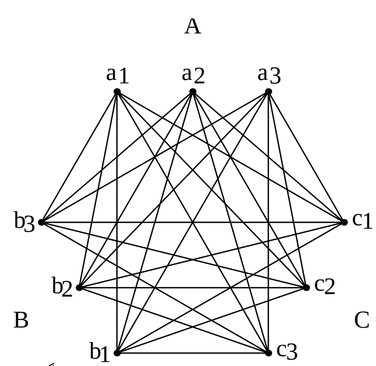
یا

$$IA'+IB'+IC'\geqslant IA+IB+IC$$

۶. فرض کنید دانشمندان مجموعه‌های

$$A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_m\},B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_n\},C=\{c_۱,c_۲,\dots,c_p\}$$

باشند. برای هریک از اعضای مجموعه‌ها نقطه‌ای روی صفحه متناظر می‌کنیم (شکل برای $m=n=p=۳$ نشان داده شده است). اگر یک دانشمند مثلاً a_i با یک دانشمند دیگر مثلاً b_j در یک جلسه شرکت داشته باشد یک خط بین a_i و b_j رسم می‌کنیم. تمام نقاط A را به هریک از نقاط B و C وصل می‌کنیم و همین‌طور هریک از نقاط B را به هریک از نقاط C متصل می‌نماییم. منظور مسأله، افراز خطوط حاصل به مثلثهایی مانند $a_ib_jc_k$ است.



الف) هر مثلث $a_ib_jc_k$ از هر قسمت $\{A,B\}$، $\{B,C\}$ و $\{A,C\}$ دقیقاً یک خط دربر دارد. پس باید تعداد خطوط بین این قسمتها با هم مساوی باشند. پس

$$mn=mp,\quad mn=np$$

یعنی

$$m=n=p$$

ب) مثلثها می‌توانند به صورت زیر باشند

$$a_1b_1c_1,\ a_1b_2c_2,\ a_1b_3c_3,\ \ldots,\ a_3b_3c_3$$

جدول زیر بیانگر حل این حالت از مسأله است (a_i و b_j با c_k که از جدول به‌دست می‌آید یک جلسه تشکیل خواهند داد، c_k در ستون a_i و سطر b_j قرار دارد.)

$$\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline b_1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ b_2 & c_2 & c_3 & c_1 \\ b_3 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

ج) در حالت کلی نیز کافی است از جدول زیر استفاده کنیم.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \hline b_1 & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n-1} & c_n \\ b_2 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_n & c_1 \\ b_3 & c_3 & c_4 & c_5 & \ldots & c_1 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n & c_n & c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{array}$$

در داخل این جدول در هر سطر هیچ c_i تکرار نشده است و همین طور در هر ستون.

برای هر دو نفر a_i و b_j، c_k را از جدول پیدا کرده و جلسه $a_ib_jc_k$ را تشکیل می‌دهیم.

آزمون مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت کنید معادلهٔ $x + x^۲ = y + y^۲ + y^۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت جواب ندارد.

۲. چهاروجهی $ABCD$ داده شده است.

الف) اگر صفحه‌ای مانند (P) این چهاروجهی را قطع کند، شرط لازم و کافی برای اینکه مقطع حاصل متوازی‌الاضلاع گردد چیست؟ نشان دهید در این صورت مسأله دارای سه دسته جواب است.

ب) اکنون یکی از این سه دسته جواب را در نظر می‌گیریم. وضع صفحهٔ (P) را چگونه باید انتخاب کرد تا مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل ماکزیمم گردد.

ج) صفحهٔ (P) را به گونه‌ای اختیار کنید که مقطع حاصل لوزی گردد و در این صورت اندازهٔ ضلع لوزی را بر حسب اندازه‌های یالهای چهاروجهی به‌دست آورید.

۳. فرض می‌کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده است، $f(۱) = ۱$،

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

و برای $x \in \mathbb{R} - \{۰\}$ داریم $f\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۱}{f(x)}$. همهٔ توابع $f(x)$ را به‌دست آورید.

۴. نشان دهید حداقل شش نقطه با مختصات گویا روی منحنی

$$y^۲ = x^۳ + x + ۱۳۷۰^{۱۳۷۰}$$

وجود دارد.

۵. مثلث ABC در دایرهٔ (C) محاط است. نیمسازهای درونی زوایای مثلث مزبور دایرهٔ (C) را مجدداً در A'، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I نقطهٔ برخورد نیمسازها باشد ثابت کنید که

$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} \geqslant ۳$$
$$IA' + IB' + IC' \geqslant IA + IB + IC$$

۶. سه گروه A، B و C از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف در (یک) کنفرانس گرد آمده‌اند. می‌خواهیم جلسات سه نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به طوری که از هر گروه فقط یک نفر شرکت داشته باشد و هر دو نفر دقیقاً در یک جلسه (با هم) شرکت کرده باشند.

آزمون مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی

الف) اگر این عمل امکانپذیر باشد نشان دهید تعداد افراد هر سه گروه مساویند.
ب) در حالتی که تعداد افراد هر گروه سه باشد نشان دهید این عمل امکانپذیر است.
ج) ثابت کنید در حالت کلیِ تساویِ تعداد اعضای سه گروه، این عمل امکانپذیر است.

حل مسائل مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. مثلث AMQ را با موربهای DNR و BPS قطع می‌دهیم؛ خواهیم داشت

$$\frac{RA}{RM} \times \frac{NM}{NQ} \times \frac{DQ}{DA} = ۱, \quad \frac{SA}{SQ} \times \frac{PQ}{PM} \times \frac{BM}{BA} = ۱$$

و از مساوی قرار دادن آنها نتیجه می‌شود

$$\frac{RA}{RM} \times \frac{NM}{NQ} \times \frac{DQ}{DA} = \frac{SA}{SQ} \times \frac{PQ}{PM} \times \frac{BM}{BA} \qquad (۱)$$

چون $AQ \parallel BN$ و $AB \parallel DP$، پس

$$\begin{cases} \dfrac{NM}{NQ} = \dfrac{BM}{BA} \\ \dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{PQ}{PM} \end{cases} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت $\frac{RA}{RM} = \frac{SA}{SQ}$ یعنی $RS \parallel \Delta$.

۲. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود $y \geqslant ۰$ می‌گیریم.
حال اگر قرار دهیم $x = X + ۱$ خواهیم داشت

$$(X^۲ + X)(X^۲ + ۱) = y^۲ - ۱$$
$$\Longrightarrow \left(X^۲ + \frac{X}{۲} + \frac{X}{۲}\right)\left(X^۲ + \frac{X}{۲} + ۱ - \frac{X}{۲}\right) = y^۲ - ۱$$
$$\Longrightarrow \left(X^۲ + \frac{X}{۲}\right)^۲ = y^۲ - \left(\frac{۳}{۴}X^۲ + X + ۱\right)$$

با توجه به اینکه $\frac{3}{4}X^2 + X + 1 > 0$ پس $X^2 + \frac{X}{2} < y$ و نتیجه می‌گیریم که $y \geqslant X^2 + \frac{X}{2} + \frac{1}{2} > 0$ (y عدد صحیح است). بنابراین،

$$\begin{aligned} y^2 &\geqslant X^4 + \frac{X^2}{4} + \frac{1}{4} + X^3 + X^2 + \frac{X}{2} \\ &= y^2 + \frac{1}{4}(X^2 - 2X - 3) \end{aligned}$$

در نتیجه، $X^2 - 2X - 3 \leqslant 0$ پس $-1 \leqslant X \leqslant 3$ و بنابراین فقط $X = 0, -1, 3$ در معادلهٔ سیالهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$\begin{aligned} x &= 0, 1, 4 \\ y &= \pm 1, \pm 1, \pm 11 \end{aligned}$$

۳. الف) داریم

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \quad (k > 1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

پس

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

پس

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

ب) از آنجا که $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i}$ مجموع همهٔ $1\big/\left(\prod_{x \in A_i} x\right)$ هاست، پس همهٔ کسرهایی به شکل $1/(b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_k)$ که در آنها b_iها اعضای مختلف مجموعهٔ X هستند، در آن ظاهر می‌شوند. می‌توان این اعداد را اینگونه شمرد که بگوییم هر $1 \leqslant i \leqslant n$ یا ظاهر می‌شود که باعث ضرب‌شدن عدد قبلی در $\frac{1}{i}$ می‌گردد ویا ظاهر نمی‌شود که دارای همان مجموع قبلی است. پس اضافه‌شدن هر i، مجموع قبلی را $1 + \frac{1}{i}$ برابر می‌کند؛ البته با این روش ما حالتی را که هیچ iای در مخرج نباشد یعنی ۱ را نیز

می‌شماریم که باید از مجموع کل کم شود. پس داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i} &= \left(۱+\frac{۱}{۱}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\cdots\left(۱+\frac{۱}{n}\right)-۱\\ &= \frac{۲}{۱}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}\times\cdots\times\frac{n+۱}{n}-۱\\ &= \frac{n+۱}{۱}-۱=n\end{aligned}$$

چون $\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{j^۲}<۲$ و $\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i}=n$ پس

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i\times j^۲}\ \sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{j^۲}\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i}<۲n$$

بنابراین

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱}{a_i\times j^۲}<۲n+۱$$

۴. اگر P نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ مثلث باشد، آنگاه

$$PA^۲+PB^۲+PC^۲=\frac{AB^۲+AC^۲+BC^۲}{۳}+۳PG^۲$$

که G محل تلاقی میانه‌هاست. حال اگر مرکز دایره را O بگیریم،

$$OA^۲+OB^۲+OC^۲-۳OG^۲=\frac{۱}{۳}(AB^۲+AC^۲+BC^۲)$$

بدیهی است که $AB^۲+BC^۲+AC^۲$ وقتی ماکزیمم است که $OG=۰$ یعنی مرکز دایره بر محل تلاقی میانه‌ها منطبق باشد. پس

$$OA^۲+OB^۲+OC^۲=۳R^۲\Longrightarrow AB^۲+AC^۲+BC^۲=۹R^۲$$

همچنین اگر P نقطه‌ای دلخواه در فضا و $ABCD$ یک چهاروجهی دلخواه باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}&PA^۲+PB^۲+PC^۲+PD^۲=\\ &\qquad ۴PG^۲+\frac{۱}{۴}(AB^۲+AC^۲+AD^۲+BD^۲+BC^۲+CD^۲)\end{aligned}$$

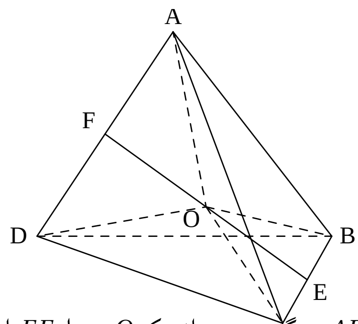
در نتیجه اگر P مرکز کره اختیار شود،

$$\sum_{X\in\{A,B,C,D\}}OX^۲=۴OG^۲+\frac{۱}{۴}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}}XY^۲$$

یا

$$۴R^۲-۴OG^۲=\frac{۱}{۴}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}}XY^۲$$

وقتی مقدار $\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^2$ ماکزیمم است که OG^2 مینیمم باشد یعنی G بر O منطبق باشد. پس باید مرکز ثقل چهاروجهی بر مرکز کره منطبق گردد. در این صورت ماکزیمم $\sum XY^2$ برابر $16R^2$ خواهد بود.



E و F را وسطهای BC و AD می‌گیریم. می‌دانیم که O وسط EF است. چون مثلثهای BOC و AOD متساوی‌الساقیند پس OE و OF که ارتفاعهای نظیر قاعده‌های آنها هستند نیز برابرند؛ در نتیجه، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OEC و OFD برابرند. پس $CE = DF$ یعنی $BC = DA$. پس یالهای روبه‌رو برابرند و به عبارت دیگر وجوه با هم برابرند.

۵. معادلهٔ $x^3 - 5x + 3 = 0$ ریشهٔ گویا ندارد پس قابل تجزیه نیست. در نتیجه، α در هیچ معادله‌ای با ضرایب گویا و از درجهٔ کمتر از ۳ صادق نخواهد بود. حال اگر معادلهٔ

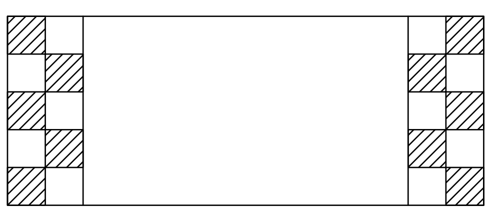
$$f(x)^3 - 5f(x) + 3 = 0$$

را در نظر بگیریم، طبق فرض α ریشه این معادله نیز هست. در نتیجه،

$$f(x)^3 - 5f(x) + 3$$

بر $x^3 - 5x + 3$ بخشپذیر است. یعنی تمام ریشه‌های معادلهٔ $x^3 - 5x + 3 = 0$ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)^3 - 5f(x) + 3 = 0$ نیز خواهند بود. پس $f(\alpha)$ نیز ریشهٔ معادلهٔ اخیر است یعنی $f\big(f(\alpha)\big)^3 - 5f\big(f(\alpha)\big) + 3 = 0$. در نتیجه $f\big(f(\alpha)\big)$ ریشهٔ معادلهٔ $x^3 - 5x + 3 = 0$ خواهد بود.

۶. فرض می‌کنیم که مستطیل مورد نظر با شکلهای ۱ تا ۵ پوشانده شده باشد. خانه‌های مستطیل را یک در میان سیاه و سفید می‌کنیم.



حل مسائل مرحله‌ی دوم هشتمین المپیاد ریاضی

از آنجا که تعداد مربعها فرد است پس تفاضل سیاه‌ها با سفیدها برابر ۱ خواهد بود. شکلهای ۱، ۴ و ۵ دارای رنگهای سیاه و سفید مساوی هستند. در مورد شکل ۲، یا چهار سفید و یک سیاه داریم یا برعکس، در مورد شکل ۳، یا پنج سیاه و دو سفید داریم یا برعکس. حال فرض کنیم که

تعداد شکل ۲ با چهار خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه = x_1

تعداد شکل ۲ با چهار خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید = x_2

تعداد شکل ۳ با پنج خانهٔ سفید و دو خانهٔ سیاه = x_3

تعداد شکل ۳ با پنج خانهٔ سیاه و دو خانهٔ سفید = x_4

با توجه به اینکه

۱ = تعداد مربعهای سفید − تعداد مربعهای سیاه

و اینکه شکلهای ۱، ۴ و ۵ در طرف دوم حذف می‌شوند، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} 1 &= (4x_2 + x_1) + (2x_3 + 5x_4) - (4x_1 + x_2) - (5x_3 + 2x_4) \\ &= -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه طرف دوم بر ۳ بخشپذیر است، به‌تناقض رسیده‌ایم.

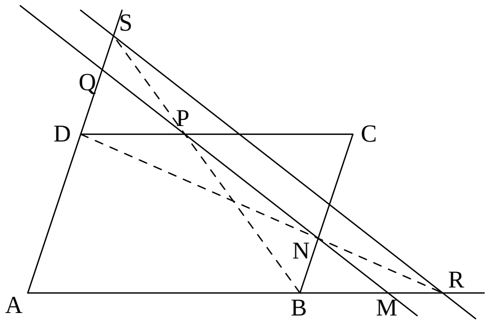
آزمون مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است، خط Δ خطوط AB، BC، CD و DA را به ترتیب در نقاط M، N، P و Q قطع می‌کند. اگر محل برخورد AB و DN را R و محل برخورد AD و BP را S بنامیم، ثابت کنید که

$$RS \parallel \Delta$$



۲. جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$(x^{۲} - x)(x^{۲} - ۲x + ۲) = y^{۲} - ۱$$

۳. الف) ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant ۱$ داریم

$$۱ + \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{n^{۲}} < ۲$$

ب) برای مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ که در آن $n \geqslant ۱$، زیرمجموعه‌های ناتهی X را A_k، ($k = ۱, ۲, ۳, \ldots, m$) می‌نامیم. (بدیهی است که $m = ۲^{n} - ۱$). اگر حاصلضرب تمام عضوهای مجموعهٔ

آزمون مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی

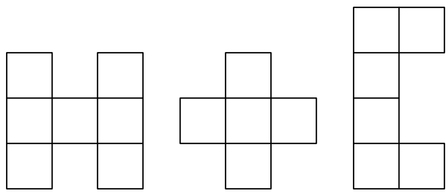
A_k را با a_k نشان دهیم، ثابت کنید که

$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{a_i \times j^۲} < ۲n+۱$$

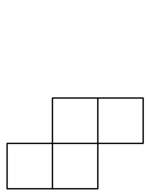
۴. مجموعهٔ مثلثهای ABC را در نظر می‌گیریم که در دایره‌ای به شعاع R محاطند، در چه صورت $AB^۲ + AC^۲ + BC^۲$ ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را حساب کنید. همچنین مجموعهٔ چهاروجهیهای $ABCD$ را که در کره‌ای به شعاع R محاط باشند در نظر می‌گیریم؛ در چه صورت مجموع مربعات ۶ یال آنها ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را نیز محاسبه کنید و ثابت کنید در این حالت وجوه با هم برابرند.

۵. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ - ۵x + ۳ = ۰$ و $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد، نشان دهید که هرگاه]اگر[$f(\alpha)$ ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم بالا باشد، آنگاه $f(f(\alpha))$ نیز ریشهٔ معادله خواهد بود.

۶. می‌خواهیم زمینی مستطیل شکل به ابعاد ۱۳۷×۵ را با موزاییکهایی به اشکال زیر فرش کنیم. نشان دهید این عمل امکانپذیر نیست.



شکل ۳ شکل ۲ شکل ۱



شکل ۵ شکل ۴

«در پنج شکل فوق هریک از مربعها به ضلع واحد است.»

حل مسائل مرحله‌ی دوم هفتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. الف)

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}=\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\frac{۱}{۲\sqrt{n}}$$

چون $\sqrt{n+۱}=\sqrt{n}$.

ب) لم.

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}=\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}>\frac{۱}{۲\sqrt{n+۱}}$$

حال ثابت می‌کنیم اگر $N=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۴۸}}$، آنگاه $\lfloor N\rfloor=۱۲$.

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}N&=\frac{۱}{۲\sqrt{۴۸}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۴۷}}+\cdots+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}\\&>\sqrt{۴۹}-\sqrt{۴۸}+\sqrt{۴۸}-\sqrt{۴۷}+\cdots+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۱\\&=\sqrt{۴۹}-۱\\&=۶\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}N&=\frac{۱}{۲\sqrt{۴۸}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۴۷}}+\cdots+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}\\&<\sqrt{۴۸}-\sqrt{۴۷}+\sqrt{۴۷}-\sqrt{۴۶}+\cdots+\sqrt{۲}-۱+\frac{۱}{۲}\\&=\sqrt{۴۸}-\frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{۱}{۲}N>۶&\Longrightarrow N>۱۲\\\frac{۱}{۲}N<\sqrt{۴۸}-\frac{۱}{۲}&\Longrightarrow N<۱۳\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\lfloor N\rfloor=۱۲$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم هفتمین المپیاد ریاضی

۲. ادعا می‌کنیم مرکز میانه‌ای مثلث نقطهٔ ثابتی است که روی OP قرار دارد و $PM = \frac{۲}{۳}PO$. می‌گیریم $\vec{x} = \overrightarrow{PX}$، $\vec{y} = \overrightarrow{PY}$، $\vec{z} = \overrightarrow{PZ}$ و $\vec{r} = \overrightarrow{PO}$. به وضوح

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}}{۳}$$

کافی است ثابت کنیم $\overrightarrow{PM} = \frac{۲}{۳}\vec{r}$. برای این کار ثابت می‌کنیم بردار

$$\vec{a} = ۳(\overrightarrow{PM} - \frac{۲}{۳}\vec{r}) = \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}-۲\vec{r}$$

مساوی صفر است. حاصلضرب این بردار در بردار $\vec{x}$ صفر است زیرا

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{x} &= (\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}-۲\vec{r})\cdot\vec{x}\\ &= \vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{x}+\vec{z}\cdot\vec{x}-۲\vec{r}\cdot\vec{x}\\ &= \vec{x}\cdot\vec{x}-۲\vec{r}\cdot\vec{x}\\ &= |\vec{x}|^{۲}-۲|r|\cdot|x|\cdot\cos\angle OPX\\ &= PX^{۲}-۲PX\cdot PO\cdot\cos\angle OPX\end{aligned}$$

اما مثلث OPX متساوی‌الساقین به رأس O است پس $PX = ۲PO\cdot\cos\angle OPX$ که از اینجا برابر صفر بودن $\vec{a}\cdot\vec{x}$ معلوم می‌شود. به همین ترتیب $\vec{a}\cdot\vec{y} = \vec{a}\cdot\vec{z} = ۰$. حال که حاصلضرب $\vec{a}$ در سه بردار متعامد صفر است، این بردار خود برابر صفر است که درستی حکم را نتیجه می‌دهد.

۳. ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم

$$a_n = ۱ + \prod_{i=۱}^{n-۱} a_i$$

واضح است که $a_۲ = ۱ + a_۱$. حال فرض می‌کنیم $a_n = ۱ + a_۱a_۲\dots a_{n-۱}$.

$$\begin{aligned}a_{n+۱} &= ۱ + a_۱a_۲\dots a_{n-۱} + (a_۱a_۲\dots a_{n-۱})^{۲}\\ &= ۱ + a_۱a_۲\dots a_{n-۱}(۱ + a_۱a_۲\dots a_{n-۱})\\ &= ۱ + a_۱a_۲\dots a_{n-۱}a_n\end{aligned}$$

در نتیجه، $a_{n+۱} = ۱ + (a_n - ۱)a_n$ یا $a_{n+۱} = a_n^{۲} - a_n + ۱$.

حالا به استقرا ثابت می‌کنیم

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{a_i} = ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱}-۱}$$

واضح است که $\frac{۱}{a_۱} = ۲ - \frac{۱}{a_۲-۱}$. فرض کنیم $\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{a_i} = ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱}-۱}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n+۱}\frac{۱}{a_i} &= \sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{a_i} + \frac{۱}{a_{n+۱}}\\ &= ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱}-۱} + \frac{۱}{a_{n+۱}}\\ &= ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱}^{۲}-a_{n+۱}} = ۲ - \frac{۱}{a_{n+۲}-۱}\end{aligned}$$

چون دنبالهٔ $S_i = \sum_{j=۱}^{i} a_j$ صعودی است و ۲ کران بالای آن است، پس حد دارد.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = k \leqslant ۲$$

اگر $k < ۲$ باشد، از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ پس $\exists n, a_n > ۱ + \frac{۱}{۲-k}$.

$$a_n > ۱ + \frac{۱}{۲-k} \Longrightarrow a_n - ۱ > \frac{۱}{۲-k}$$
$$\Longrightarrow \frac{۱}{a_n - ۱} < ۲ - k$$
$$\Longrightarrow k < ۲ - \frac{۱}{a_n - ۱} = S_{n-۱}$$

که تناقض است. پس $k = ۲$.

۴. فرض کنیم x تیمی باشد که بیشترین تعداد «بُرد» را داشته است. ثابت می‌کنیم برای هر تیم y، یا x از y برده است، یا تیم z وجود دارد که x از z برده است و z از y. اگر x این‌طور نباشد، یک تیم y وجود دارد که اولاً x از y نبرده است و ثانیاً برای هر تیم z که به x باخته است، y از z برده است. پس y کلیهٔ تیمهایی را که x از آنها برده است، برده و خود x را نیز برده و در نتیجه، تعداد بردهای y از x بیشتر است که تناقض است.

۵. ابتدا ثابت می‌کنیم حداکثر توان عدد اول $p \geqslant ۲$ در $k!$ برابر $k - ۱$ است.

$$\text{توان } p \text{ در } k! = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^۳} \right\rfloor + \cdots$$
$$< \frac{k}{p} + \frac{k}{p^۲} + \frac{k}{p^۳} + \cdots = \frac{k}{p-۱} \leqslant k$$

پس توان p در $k!$ حداکثر $k - ۱$ است.

حالا اگر $۱ + \frac{x}{۱!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = ۰$،

$$x^n + \frac{n!}{(n-۱)!}x^{n-۱} + \cdots + \frac{n!}{۲!}x^۲ + \frac{n!}{۱!}x + n! = ۰$$

اگر $x_۰$ جواب معادله باشد و $p \mid x_۰$، آنگاه توان p در $\frac{n!}{i!}x^i$ از توان p در $n!$ حداقل یکی بیشتر است یعنی در $\frac{x^i}{i!}$ حداقل یک عامل p وجود دارد. پس در هریک از x^n، $\frac{n!}{(n-۱)!}x^{n-۱}$، … و $\frac{n!}{۱!}x$ حداقل توان p برابر توان p در $n!$ به‌اضافهٔ یک است. یعنی اگر $p^t \mid n!$، هریک از جملات دیگر بر $p^{t+۱}$ بخشپذیر است. پس مجموع آنها نیز بر $p^{t+۱}$ بخشپذیر است. ولی $n!$ بر $p^{t+۱}$ بخشپذیر نیست. تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض اولیهٔ ما اشتباه بوده است.

۶. آشکار است که هر ارتفاع خطی وفادار است. حال اگر d یک خط وفادار باشد، $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع باشند، P نقطهٔ تقاطع $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ باشد و M، N و O پاهای عمود از P به سه ضلع مثلث باشند آشکار است که قرینه‌های P نسبت به سه ضلع روی خط d قرار می‌گیرند پس M، N و O روی خطی موازی خط d قرار می‌گیرند. در نتیجه طبق قضیهٔ سِمسون، P روی دایرهٔ

محیطی مثلث قرار می‌گیرد. از طرفی طبق خاصیت خط سمسون، مجانس خط ONM به مرکز P و نسبت تجانس ۲، از محل تقی ارتفاعات می‌گذرد. پس خط وفادار باید از محل تقی ارتفاعات مثلث بگذرد. ونیز به‌راحتی می‌توان نشان داد هر خطی که از محل تقی ارتفاعات مثلث بگذرد خطی است وفادار. حال اگر محل تقی ارتفاعات دو مثلث یکسان باشد، هر خط که از این نقطه بگذرد برای هر دو مثلث وفادار است و در نتیجه تعداد آنها نامتناهی است. و اگر محل تلاقی ارتفاعهای دو مثلث دو نقطهٔ متمایز باشند، فقط خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، می‌تواند برای هر دو وفادار باشد.

آزمون مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. الف) نشان دهید برای هر m و n طبیعی،

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$$

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید وقتی که n به سمت بینهایت میل کند،

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} P(k)}{n^{m+1}}$$

دارای حد است.

۲. اگر در چهارضلعی محیطی $ABCD$، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I، J و O بر یک استقامتند.

۳. ثابت کنید که تابع همانی، تنها تابع پوشا مانند f از $\mathbb{N}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی) به $\mathbb{N}$ است که در شرط

$$f\big(f(n)+f(m)\big) = n+m \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

صدق می‌کند.

۴. دنبالهٔ $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=1 \text{ اگر } \\ \left(\frac{2n-3}{2n}\right) a_{n-1} & n \geqslant 2 \text{ اگر } \end{cases}$$

ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant 1$، $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$.

۵. اگر در چهاروجهی $ABCD$ ارتفاعهای وارد از هر رأس بر وجه مقابل را با h_a، h_b، h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

آزمون مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی

۶. تعداد ۱۳۶۹^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروضند که با کنار گذاشتن هریک از این اعداد بقیه را می‌توان به ۱۳۶۸ دستهٔ مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصلضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساویند.

حل مسائل مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. الف) داریم

$$\begin{aligned} & k(k+1)\cdots(k+m-1) \\ &\quad = k(k+1)\cdots(k+m-1)\times\frac{k+m-k+1}{m+1} \\ &\quad = \frac{1}{m+1}\big(k(k+1)\cdots(k+m)-(k-1)k\cdots(k+m-1)\big) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) &= \frac{1}{m+1}\big(n(n+1)\cdots(n+m)-0\big) \\ &= \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1} \end{aligned}$$

ب) ابتدا نشان می‌دهیم که بزرگترین توان n در $\sum\limits_{k=1}^{n} P(k)$ برابر $m+1$ است. اثبات با استقرا نسبت به m است. واضح است که هر چندجمله‌ای از درجهٔ m را می‌توان به صورت

$$ax(x+1)\cdots(x+m-1)+P_{m-1}(x)$$

نوشت که در آن a عددی است ثابت و P_{m-1} چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $m-1$ است.

حال اگر $m=1$، آنگاه $P(x)$ به صورت $ax+b$ $(a\neq 0)$ است و در نتیجه،

$$\begin{aligned} P(1)+P(2)+\cdots+P(n) &= a(1+2+\cdots+n)+nb \\ &= a\frac{n(n+1)}{2}+nb \end{aligned}$$

واضح است که درجهٔ آن نسبت به n، $m+1=2$ است و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}P(k)}{n^2}=\frac{a}{2}$$

اگر حکم فوق در مورد چندجمله‌ایهای با درجهٔ کمتر از m برقرار باشد آنگاه

$$P_m(x) = ax(x+1)\cdots(x+m-1) + P_{m-1}(x)$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{n} P(k) = a\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) + \sum_{k=1}^{n} P_{m-1}(k)$$

جملهٔ دوم بنابر فرض استقرا از درجهٔ حداکثر m است و جملهٔ اول بنابر (الف) برابر

$$\frac{a}{m+1}n(n+1)\cdots(n+m-1)$$

است که توان n در آن $m+1$ است و بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} P(k)}{n^{m+1}} = \frac{a}{m+1}$$

موجود است.

۲. مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به S و مساحت هر مثلث مانند IAB را به S_{IAB} نمایش می‌دهیم. واضح است که

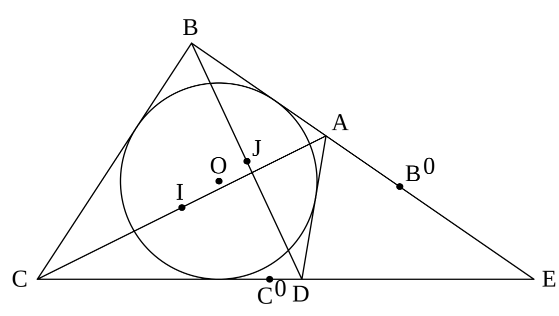
$$S_{IDC} + S_{IBA} = \frac{1}{2}S \qquad (1)$$

$$S_{JDC} + S_{JBA} = \frac{1}{2}S \qquad (2)$$

$$S_{ODC} + S_{OBA} = \frac{1}{2}S \qquad (3)$$

می‌دانیم که در چهارضلعی محیطی $ABCD$،

$$AB + DC = AD + BC$$



AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در E یکدیگر را قطع کنند. آنگاه روی خط AB نقطهٔ B' و روی خط CD نقطهٔ C' را طوری انتخاب می‌کنیم که $EB' = AB$ و $EC' = DC$ باشد. داریم

$$S_{IEC'} + S_{IEB'} = \frac{1}{2}S$$

و

$$S_{IC'EB'} = S_{IC'B'} + S_{EC'B'}$$

در نتیجه،

$$S_{IC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \qquad (۴)$$

اگر نظیر عملیات فوق را نسبت به J و O انجام دهیم تساویهای زیر به‌دست می‌آیند.

$$S_{JC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \qquad (۵)$$

و

$$S_{OC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \qquad (۶)$$

از (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

$$S_{IC'B'} = S_{JC'B'} = S_{OC'B'} \qquad (۷)$$

از این رو سه نقطهٔ O ،J و I بر یک استقامتند.

۳. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \geqslant ۲$ باشد، آنگاه $f(n) \geqslant ۲$. اگر $n \geqslant ۲$، آنگاه $n = (n-۱) + ۱$،
چون $n-۱, ۱ \in \mathbb{N}$ و f پوشاست پس اعدادی طبیعی مانند α و β وجود دارند که $f(\alpha) = n-۱$
و $f(\beta) = ۱$ و بنابراین،

$$f(n) = f(n-۱+۱) = f\big(f(\alpha) + f(\beta)\big) = \alpha + \beta$$

واضح است که $\alpha + \beta \geqslant ۲$. پس $f(۱) = ۱$. حال به استقرا، بدیهی است که $f(n) = n$.

۴. از رابطهٔ

$$a_n = \left(\frac{۲n-۳}{۲n}\right) a_{n-۱}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$۲k a_k = (۲k-۳) a_{k-۱}, \quad (k \geqslant ۲)$$

از این رو داریم

$$a_{k-۱} = (۲k-۲) a_{k-۱} - ۲k a_k$$

بنابراین

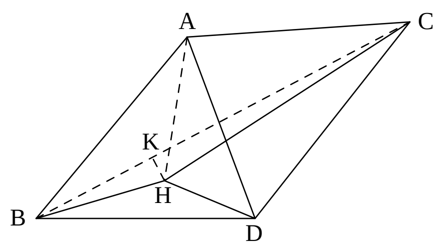
$$\begin{aligned} \sum_{k=۱}^{n} a_k &= \sum_{k=۲}^{n+۱} a_{k-۱} \\ &= \sum_{k=۲}^{n+۱} \big((۲k-۲)\, a_{k-۱} - ۲k a_k\big) \\ &= ۲a_۱ - ۲(n+۱)\, a_{n+۱} \end{aligned}$$

به استقرا روشن است که به‌ازای هر n، $a_n > ۰$. پس

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k < ۲a_۱ = ۱$$

۵. در چهاروجهی $ABCD$ مساحت هریک از وجه‌ها را به صورتهای زیر نمایش می‌دهیم $S_{BCD} = S_a$، $S_{ACD} = S_b$، $S_{ABD} = S_c$ و $S_{ABC} = S_d$.
حال اگر حجم هرم را با V نمایش دهیم خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۳}S_a h_a = \frac{۱}{۳}S_b h_b = \frac{۱}{۳}S_c h_c = \frac{۱}{۳}S_d h_d = V$$



از این رو داریم $S_a = \frac{۳V}{h_a}$، $S_b = \frac{۳V}{h_b}$، $S_c = \frac{۳V}{h_c}$ و $S_d = \frac{۳V}{h_d}$.
حال ثابت می‌کنیم که

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

برای اثبات از A ارتفاع AH را بر وجه BCD رسم می‌کنیم، H را به رئوس B، C و D وصل کرده و از H عمود HK را بر یال BC رسم می‌کنیم. از K به A وصل می‌کنیم. AK بر BC عمود است زیرا $AH \perp BCD$، پس $AH \perp BC$ و $HK \perp BC$ پس $AHK \perp BC$. به بیان دیگر، در صفحهٔ AHK دو خط AH و HK بر BC عمودند پس BC بر صفحهٔ AHK عمود است و در نتیجه بر کلیهٔ خطوط آن و به‌خصوص بر AK عمود است. از طرفی داریم

$$S_{ABC} = S_d = \frac{AK \cdot BC}{۲}$$
$$S_{HBC} = \frac{KH \cdot BC}{۲}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه AHK، AK وتر است، پس $AK > KH$ و در نتیجه $S_d > S_{HBC}$. به دلیل مشابه ثابت می‌شود که $S_b > S_{HCD}$ و $S_c > S_{HBD}$. از جمع این سه نامساوی داریم

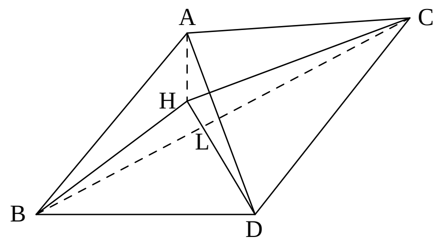
$$S_a < S_b + S_c + S_d$$
$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

این حالتی بود که H در داخل مثلث BCD باشد. در حالتی که H خارج مثلث BCD باشد، فرض می‌کنیم H در طرف BC باشد و L را محل تقاطع BC و HD می‌گیریم. خواهیم داشت

$$S_b > S_{HCD} > S_{LCD}$$
$$S_c > S_{HBD} > S_{LBD}$$



پس

$$S_b + S_d > S_{LCD} + S_{LBC}$$

و از این رو داریم

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

یعنی،

$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

پس حکم برقرار است.

۶. بدون اینکه از کلّیت مسأله کاسته شود تمام اعداد را می‌توان طبیعی در نظر گرفت (کافی است تمام اعداد را در کوچکترین مضرب مشترک مخرجها ضرب کنیم). آشکار است که هریک از اعداد را که برداریم، بقیهٔ اعداد را می‌توان به دو دستهٔ مساوی تقسیم کرد که حاصلضرب هر دو دسته یکسان گردد.

تمام اعداد اولی را که در تجزیه این اعداد به کار رفته است به $p_۱$، $p_۲$، ... و p_k نشان می‌دهیم. با ضرب تمام اعداد در $p_۱ p_۲ \cdots p_k$ می‌توان فرض کرد که در تجزیهٔ تمام اعداد، اعداد اول یکسان به کار رفته است. حال کافی است نشان دهیم که توان هریک از این اعداد اول در هریک از این اعداد یکسان است. اگر توانهای عدد اول $p_۱$ را به ترتیب با $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و α_m نشان دهیم که $m = ۱۳۶۹^n$ است ادعا می‌کنیم که $\alpha_۱ = \alpha_۲ = \cdots = \alpha_m$ و برای سایر p_iها نیز چنین است. حال توجه می‌کنیم که α_iها دارای این خاصیت هستند که هریک را کنار بگذاریم، بقیه را می‌توان به دو دستهٔ مساوی تقسیم کرد که حاصلجمع اعداد هر دسته یکسان گردند و توجه می‌کنیم که اگر هر α_i را به یک عدد تقسیم، یا در یک عدد ضرب ویا با یک عدد جمع کنیم این خاصیت باقی می‌ماند.

آشکار است که همه α_iها با هم یا زوج هستند یا فرد، زیرا اگر یکی را کنار می‌گذاشتیم مجموع بقیه به ۲ بخشپذیر می‌شد. حال فرض می‌کنیم که α_k کوچکترین این اعداد باشد پس اعداد $\alpha_۱ - \alpha_k$، $\alpha_۲ - \alpha_k$، ... و $\alpha_n - \alpha_k$ نیز دارای این خاصیت α_iها هستند. حال فرض می‌کنیم که $\alpha_i - \alpha_k = ۲^{m_i}\gamma_i$ که γ_iها فرد هستند آنگاه همهٔ $\alpha_i - \alpha_k$ها را به ۲^p تقسیم می‌کنیم (p کوچکترین m_iهاست). بنابراین در بین اعداد $\frac{\alpha_۱ - \alpha_k}{۲^p}$، ... و $\frac{\alpha_n - \alpha_k}{۲^p}$ یک عددِ فرد و یک عددِ زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد که غیر ممکن است مگر اینکه به‌ازای هر i، $\alpha_i = \alpha_k$.

آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اعداد صحیح و مثبت a، b و c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

۲. فرض کنید تابع حقیقی f در فاصلهٔ $[0,\infty)$ تعریف شده و f' و f'' در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم

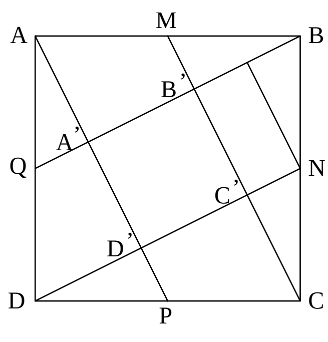
$$f''(x) = \frac{1}{x^2 + f'(x)^2 + 1}; \quad f(0) = f'(0) = 0$$

ثابت کنید تابع g با ضابطهٔ

$$g(0) = 0, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$

کراندار است.

۳. در شکل زیر نقاط M، N، P و Q به ترتیب در وسط اضلاع مربع $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{1}{5}$ مساحت مربع $ABCD$ است.



آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی

۴. مطلوب است محاسبهٔ عبارت

$$A = \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \cdots \times \sin 89^\circ$$

۵. تابع پیوستهٔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را چنان تعیین کنید که به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x^2 - y^2) = f(x)^2 - f(y)^2$$

۶. چهار خط متمایز L_1، L_2، L_3 و L_4 را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه‌تای آنها در یک صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط L_1 و L_2 نقطهٔ A، محل تقاطع خطوط L_2 و L_3 نقطهٔ B و محل تقاطع خطوط L_3 و L_4 نقطهٔ C باشد. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهار خط فوق را قطع می‌نمایند تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

آنالیز و ریاضی جدید

۰۱ تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}}{\sin \pi x} \\ &= \frac{x-1}{\sin \pi x}\left((x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $h(x) = (x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sin \pi x}$، داریم

$$f(x) = g(x)h(x)$$

اما با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin \pi x} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi\cos \pi x} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

در ضمن، ثابت می‌کنیم که $\lim\limits_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$. باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ را طوری پیدا کرد که

$$0 < |t| < \delta \Longrightarrow \left|t\sin\frac{1}{t}\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

اما $|\sin\frac{1}{t}| \leqslant 1$. بنابراین،

$$\left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |t|$$

پس اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ قرار دهیم $\varepsilon = \delta$ نامساوی (۱) به وضوح درست خواهد بود. بنابراین،

$$\lim_{x\to ۱} h(x) = \lim_{x\to ۱}(x-۱)\sin\frac{۱}{x-۱} = ۰$$

و در نتیجه،

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} g(x) \times \lim_{x\to ۱} h(x) = \frac{-۱}{\pi} \times ۰ = ۰$$

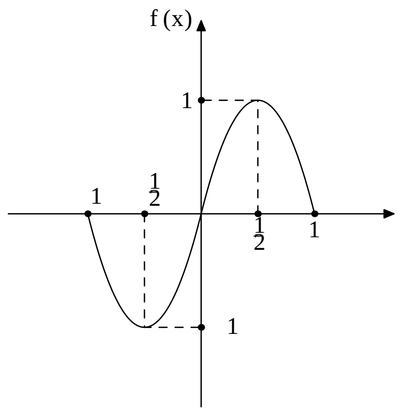
۲. الف)

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۰ \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = ۴x + ۴x^۲ \Longrightarrow f'(x) = ۴ + ۸x \Longrightarrow f'\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \\ g(x) = \frac{f(x)}{x} = ۴ + ۴x \end{cases}$$

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱ \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = ۴x - ۴x^۲ \Longrightarrow f'(x) = ۴ - ۸x \Longrightarrow f'\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \\ g(x) = \frac{f(x)}{x} = ۴ - ۴x \end{cases}$$



ب)

مشتق چپ f در صفر $= ۴ + ۸ \times ۰ = ۴ = ۴ - ۸ \times ۰$

$=$ مشتق راست f در صفر

پس f در صفر مشتق دارد.

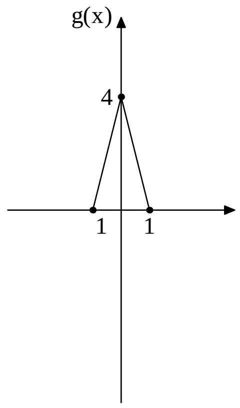
ج)

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} ۴(۱ - |x|) = ۴ = g(۰)$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

پس g در صفر پیوسته است.

د)



۳. می‌گیریم $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$. داریم

$$\overline{a_0 a_k \cdots a_1} = \frac{3}{2} \times \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$$

m را تعریف می‌کنیم

$$m = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1}$$

پس

$$\begin{aligned} 10^k a_0 + m = \frac{3}{2} \times (10m + a_0) = 15m + \frac{3a_0}{2} & \\ & \Longrightarrow 10^k a_0 \times 2 + 2m = 30m + 3a_0 \\ & \Longrightarrow 28m = (10^k \times 2 - 3)a_0 \\ & \Longrightarrow 0 \equiv \pm a_0 \Longrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod 4 \\ & \Longrightarrow a_0 = \{0 \text{ یا } 4 \text{ یا } 8\} \end{aligned}$$

اما $m > 0$، پس $a_0 \neq 0$ و $a_0 = \{4 \text{ یا } 8\}$.

$$\begin{aligned} 10^k \times 2 - 3 \equiv 28m \equiv 0 & \Longrightarrow 3 \equiv 3^k \times 2 \\ & \Longrightarrow 1 \equiv 3^{k-1} \times 2 \\ & \Longrightarrow -3 \equiv 3^{k-1} \\ & \Longrightarrow -1 \equiv 3^{k-2} \pmod 7 \end{aligned}$$

پس

$$\min(k-2) = 3 \Longrightarrow \min(k) = 5$$

و

$$\begin{aligned}\min(n) &= \min(۱۰m + a_۰)\\ &= ۱۰\min(m) + \min(a_۰)\\ &= ۱۰\min\left(\frac{۱۰^k \times ۲ - ۳}{۲۸}\right)a_۰ + ۴\\ &= ۱۰ \times \left(\frac{۱۰^۵ \times ۲ - ۳}{۲۸}\right) \times ۴ + ۴ = ۲۸۵۷۱۴\end{aligned}$$

پس حداقل n با این شرایط، عبارتست از ۲۸۵۷۱۴.

۴. الف) می‌گیریم

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n\times n}$$

حالا از $A, B \in S$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\text{مجموع درایه‌های سطر } i \text{ از } A \times B &= \sum_{j=۱}^{n}\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik} \times b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=۱}^{n}\Big(\sum_{j=۱}^{n} a_{ik} \times b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=۱}^{n}\Big(a_{ik}\sum_{j=۱}^{n} b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} \times ۱\\ &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} = ۱\end{aligned}$$

پس $A \times B$ نیز در S است.

ب) بله. $I_{n\times n}$، یعنی ماتریس واحد $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱\end{bmatrix}$$

ج) خیر. کافی است یکی از سطرهای ماتریس A دوبار ظاهر شود تا دترمینان آن صفر شود و A عضو معکوس نداشته باشد.

۵. اگر $n \leqslant ۴$ باشد، وقتی که $n = ۱$ یا $n = ۳$ است، این عبارت مجذور کامل می‌شود و در حالتی که $n > ۴$ باشد،

$$\begin{aligned}۱! + ۲! + ۳! + ۴! + \cdots + n! &\equiv ۱! + ۲! + ۳! + ۴!\\ &\equiv ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ \equiv ۳ \pmod{۵}\end{aligned}$$

ولی هیچ مجذوری به پیمانهٔ ۵ همنهشت ۳ نیست، پس تنها $n = ۱$ و $n = ۳$ جوابهای مسأله‌اند.

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

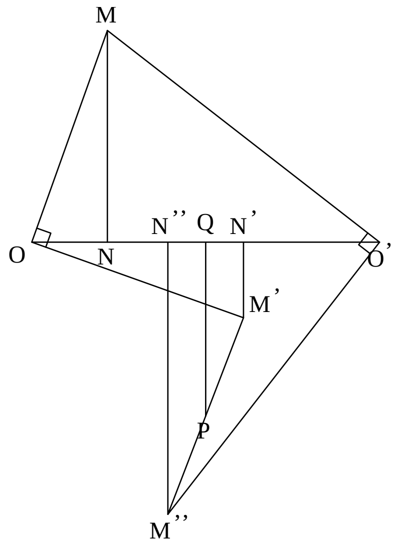
۶. برای تقسیم n چیز بین دو نفر باید ببینیم n را به چند طریق می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد نوشت. روشن است که پاسخ این پرسش $n+1$ است. اما در دوتا از این تقسیمها، یک نفر سهمی از تقسیم ندارد ($n = n + 0 = 0 + n$). بنابراین، اگر چیزها را به ترتیب تقسیم کنیم، خودنویسها را به ۴ طریق، مدادها را به ۳ طریق، دفترچه‌ها را به ۱ طریق و خودکارها را به ۲ طریق می‌توان تقسیم کرد. بنابراین، تعداد کلِّ حالات ممکن عبارت است از

$$4 \times 3 \times 1 \times 2 = 24$$

هندسه و مثلثات

۱. از P، M، M' و M'' بر OO' عمود می‌کنیم و پای ارتفاعها را Q، N، N' و N'' می‌نامیم. داریم

$$2PQ = M'N' + M''N''$$



پس

$$\left.\begin{array}{r} OM = OM'' \\ \angle N = \angle N' = 90^\circ \\ \angle OMN = \angle M'ON' = 90 - \angle MON \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ONM' = \triangle OMN$$

و به همین ترتیب، $\triangle M''N''O' = \triangle O'NM$. پس

$$ON = M'N' \quad \text{و} \quad MN = ON' = N''O' \quad \text{و} \quad M''N'' = NO' \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2PQ = M'N' + M''N'' = ON + NO' = OO' \\ ON' - QN' = N''O' - N''Q = \frac{1}{2}OO' \end{cases}$$

بنابراین، PQو OQ هر دو ثابتند و نقطهٔ P ثابت است.

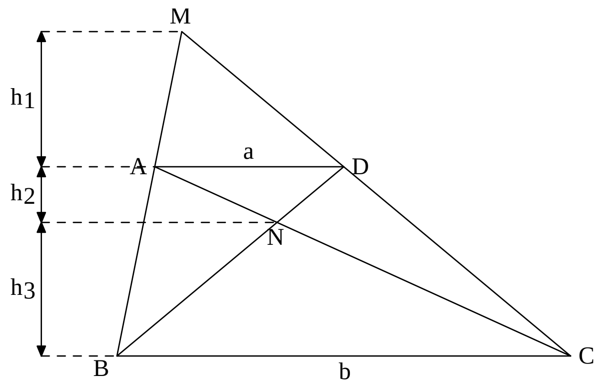
حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

۲. داریم

$$\frac{S_{AMD}}{S_{AND}}=\frac{ah_۱}{ah_۲}=\frac{h_۱}{h_۲}=x$$
$$\frac{a}{b}=\frac{h_۱}{h_۱+h_۲+h_۳}$$
$$=\frac{\frac{h_۱}{h_۲}}{\frac{h_۱}{h_۲}+۱+\frac{h_۳}{h_۲}}$$
$$=\frac{x}{x+۱+\frac{b}{a}}$$

پس

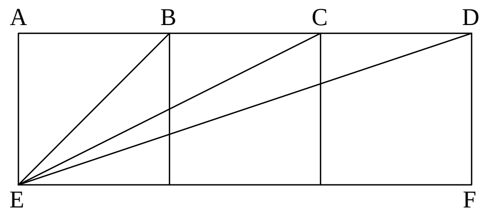
$$\frac{a}{b-a}=\frac{x}{۱+\frac{b}{a}}\Longrightarrow x=\frac{b+a}{b-a}\quad(b>a)$$



۳. برای اینکه هرگاه مرکبدان واژگون شود، مرکب نریزد باید حجم قسمت حاوی مرکب برابر حجم بقیهٔ مرکبدان منهای حجم مخروط باشد، یعنی

$$(h-h')S=h'S-\frac{۱}{۳}h'S\Longrightarrow h-h'=\frac{۲}{۳}h'$$
$$\Longrightarrow\frac{h'}{h}=\frac{۳}{۵}$$

۴. مستطیل $ADEF$ با طول ۳ و عرض ۱ را مطابق شکل در نظر می‌گیریم.



$$FB^۲ = ۲ = BC \cdot BD \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{FB}{BD} = \dfrac{BC}{FB} \\ \angle B = \angle B \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle BFD \sim \triangle BCF$$

پس

$$\angle BCF = \angle BFD \Longrightarrow \angle BDF + \angle BCF = \angle BDF + \angle BFD = \frac{\pi}{۴}$$

یعنی

$$\operatorname{Arctg}\frac{۱}{۲} + \operatorname{Arctg}\frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

آنالیز و ریاضی جدید

۱. حد تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{(x^{۲}-۲x+۱)\sin\frac{۱}{x-۱}}{\sin\pi x}$$

را در نقطهٔ $x_{۰}=۱$ تعیین کنید.

۲. الف) نمودار تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=۴x(۱-|x|),\qquad |x|\leqslant ۱$$

را رسم کنید.

ب) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق دارد؟

ج) آیا تابع

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & x\neq ۰ \text{ اگر}\\ ۴ & x=۰ \text{ اگر}\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

د) نمودار تابع فوق را رسم کنید.

۳. کوچکترین عدد درست]صحیح[مثبتی را تعیین کنید که چون آخرین رقم سمت راست آن به سمت چپ برده شود عدد حاصل $\frac{۳}{۲}$ عدد قبلی باشد.

۴. اگر مجموعهٔ S شامل تمام ماتریسهای حقیقی $n\times n$ باشد، به طوری که مجموع هریک از سطرهای آنها برابر ۱ شود، یعنی

$$S=\left\{[a_{ij}]_{n\times n}\,\middle|\, a_{ij}\in\mathbb{R}\wedge\forall i,\ \sum_{j=۱}^{n}a_{ij}=۱\right\}$$

آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی کشور

الف) ثابت کنید S نسبت به عمل ضرب ماتریسها بسته است.

ب) آیا S عضو بی‌اثر دارد؟

ج) آیا همهٔ عناصر S معکوسپذیرند؟

۵. تعیین کنید به‌ازای چه مقادیری از عدد طبیعی n عبارت زیر مجذور کامل است؟

$$۱! + ۲! + ۳! + \cdots + n!$$

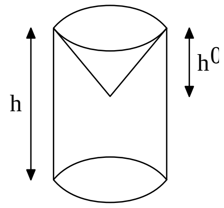
۶. پنج خودنویس، چهار مداد، دو دفترچه و سه خودکار را می‌خواهیم بین دو نفر طوری تقسیم کنیم که به هریک حداقل یکی از نوشت‌افزارهای فوق تعلق گیرد. مطلوب است تعداد حالات ممکن این تقسیم. (اشیاء غیر متمایز هستند).

هندسه و مثلثات

۱. در یک صفحه نقطهٔ O' را به دلخواه روی محور Ox در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه M را یک بار حول نقطهٔ O به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطهٔ M' به‌دست آید. بار دوم نقطهٔ M را حول نقطهٔ O' به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطهٔ M'' به‌دست آید. ثابت کنید نقطهٔ P، وسط $M'M''$، نقطه‌ای ثابت است.

۲. ذوزنقهٔ $ABCD$ را در نظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم امتداد ساقهای AB و DC در M و قطرهای AC و BDدر N متقاطع باشند. اگر طول قاعده‌های AD و BC را به ترتیب مساوی a و b قرار دهیم نسبت مساحت مثلثهای AMD و AND را بر حسب a و b محاسبه کنید.

۳. مرکّبدان استوانه‌ای شکلی دارای یک مجرای مخروطی است به طوری که رأس مخروط بر سطح مرکّب مماس است. مطلوب است تعیین نسبت ارتفاع مخروط به ارتفاع مرکّبدان، برای آنکه هرگاه مرکّبدان واژگون شود، مرکّب آن نریزد.



۴. مطلوب است اثبات هندسی تساوی

$$\text{Arctg}\,\frac{۱}{۲} + \text{Arctg}\,\frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

آنالیز و ریاضی جدید

۱. تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1}}{\sin \pi x} \\ &= \frac{x-1}{\sin \pi x}\left((x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $h(x) = (x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sin \pi x}$، داریم

$$f(x) = g(x)h(x)$$

اما با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin \pi x} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi \cos \pi x} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

در ضمن، ثابت می‌کنیم که $\lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$. باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ را طوری پیدا کرد که

$$0 < |t| < \delta \Longrightarrow \left|t\sin\frac{1}{t}\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

اما $|\sin\frac{1}{t}| \leqslant 1$. بنابراین،

$$\left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |t|$$

پس اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ قرار دهیم $\varepsilon = \delta$ استنتاج (۱) به وضوح درست خواهد بود. بنابراین،

$$\lim_{x\to ۱} h(x) = \lim_{x\to ۱}(x-۱)\sin\frac{۱}{x-۱} = ۰$$

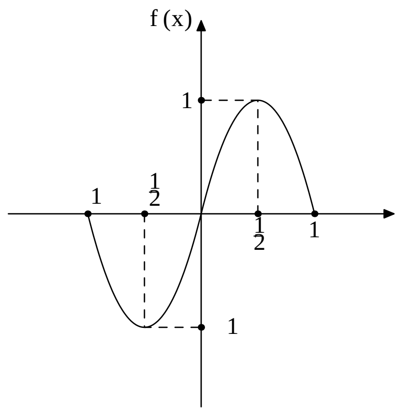
و در نتیجه،

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} g(x) \times \lim_{x\to ۱} h(x) = \frac{-۱}{\pi} \times ۰ = ۰$$

۲. الف)

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۰ \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} f(x) = ۴x + ۴x^۲ \Longrightarrow f'(x) = ۴ + ۸x \Longrightarrow f'\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \\ g(x) = \frac{f(x)}{x} = ۴ + ۴x \end{cases}$$

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱ \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} f(x) = ۴x - ۴x^۲ \Longrightarrow f'(x) = ۴ - ۸x \Longrightarrow f'\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \\ g(x) = \frac{f(x)}{x} = ۴ - ۴x \end{cases}$$



ب)

$$\text{مشتق چپ } f \text{ در صفر} = ۴ + ۸ \times ۰ = ۴ = ۴ - ۸ \times ۰ = \text{مشتق راست } f \text{ در صفر}$$

پس f در صفر مشتق دارد.

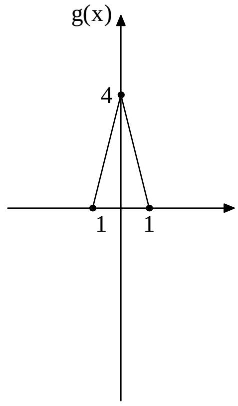
ج)

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} ۴(۱ - |x|) = ۴ = g(۰)$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

پس g در صفر پیوسته است.

د)



۳. می‌گیریم $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$. داریم

$$\overline{a_0 a_k \cdots a_1} = \frac{3}{2} \times \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$$

m را تعریف می‌کنیم

$$m = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1}$$

پس

$$\begin{aligned} 10^k a_0 + m = \frac{3}{2} \times (10m + a_0) &= 15m + \frac{3a_0}{2} \\ &\Longrightarrow 10^k a_0 \times 2 + 2m = 30m + 3a_0 \\ &\Longrightarrow 28m = (10^k \times 2 - 3)a_0 \\ &\Longrightarrow 0 \equiv \pm a_0 \Longrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod{4} \\ &\Longrightarrow a_0 = \{\text{۸ یا ۴ یا ۰}\} \end{aligned}$$

اما $m > 0$، پس $a_0 \neq 0$ و $a_0 = \{\text{۸ یا ۴}\}$.

$$\begin{aligned} 10^k \times 2 - 3 \equiv 28m \equiv 0 &\Longrightarrow 3 \equiv 3^k \times 2 \\ &\Longrightarrow 1 \equiv 3^{k-1} \times 2 \\ &\Longrightarrow -3 \equiv 3^{k-1} \\ &\Longrightarrow -1 \equiv 3^{k-2} \pmod{7} \end{aligned}$$

پس

$$\min(k-2) = 3 \Longrightarrow \min(k) = 5$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

و

$$\begin{aligned}\min(n) &= \min(۱۰m + a_۰)\\ &= ۱۰\min(m) + \min(a_۰)\\ &= ۱۰\min\left(\frac{۱۰^k \times ۲ - ۳}{۲۸}\right)a_۰ + ۴\\ &= ۱۰ \times \left(\frac{۱۰^۵ \times ۲ - ۳}{۲۸}\right) \times ۴ + ۴ = ۲۸۵۷۱۴\end{aligned}$$

پس حداقل n با این شرایط، عبارتست از ۲۸۵۷۱۴.

۴. الف) می‌گیریم

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n\times n}$$

حالا از $A, B \in S$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\text{مجموع درایه‌های سطر } i \text{ از } A\times B &= \sum_{j=۱}^{n}\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\times b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=۱}^{n}\Big(\sum_{j=۱}^{n} a_{ik}\times b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=۱}^{n}\Big(a_{ik}\sum_{j=۱}^{n} b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\times ۱\\ &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} = ۱\end{aligned}$$

پس $A\times B$ نیز در S است.

ب) بله. $I_{n\times n}$، یعنی ماتریس واحد $n\times n$.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱\end{bmatrix}$$

ج) خیر. کافی است یکی از سطرهای ماتریس A دوبار ظاهر شود تا دترمینان آن صفر شود و A عضو معکوس نداشته باشد.

۵. اگر $n \leqslant ۴$ باشد، وقتی که $n = ۱$ یا $n = ۳$ است، این عبارت مجذور کامل می‌شود و در حالتی که $n > ۴$ باشد،

$$\begin{aligned}۱! + ۲! + ۳! + ۴! + \cdots + n! &\equiv ۱! + ۲! + ۳! + ۴!\\ &\equiv ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ \equiv ۳ \pmod{۵}\end{aligned}$$

ولی هیچ مجذوری به پیمانهٔ ۵ همنهشت ۳ نیست، پس تنها $n = ۱$ و $n = ۳$ جوابهای مسأله‌اند.

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

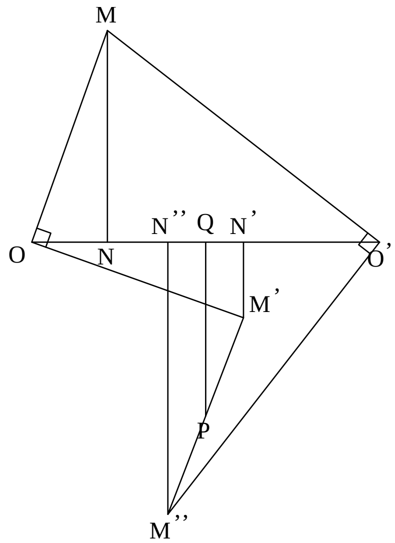
۶. برای تقسیم n چیز بین دو نفر باید ببینیم n را به چند طریق می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد نوشت. روشن است که پاسخ این پرسش $n+1$ است. اما در دوتا از این تقسیمها، یک نفر سهمی از تقسیم ندارد ($n = n + 0 = 0 + n$). بنابراین، اگر چیزها را به ترتیب تقسیم کنیم، خودنویسها را به ۴ طریق، مدادها را به ۳ طریق، دفترچه‌ها را به ۱ طریق و خودکارها را به ۲ طریق می‌توان تقسیم کرد. بنابراین، تعداد کلِّ حالات ممکن عبارت است از

$$۴ \times ۳ \times ۱ \times ۲ = ۲۴$$

هندسه و مثلثات

۱. از P، M، M' و M'' بر OO' عمود می‌کنیم و پای ارتفاعها را Q، N، N' و N'' می‌نامیم. داریم

$$۲PQ = M'N' + M''N''$$



پس

$$\left.\begin{aligned} OM &= OM'' \\ \angle N = \angle N' &= ۹۰^\circ \\ \angle OMN = \angle M'ON' &= ۹۰ - \angle MON \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \triangle ONM' = \triangle OMN$$

و به همین ترتیب، $\triangle M''N''O' = \triangle O'NM$. پس

$$ON = M'N' \quad \text{و} \quad MN = ON' = N''O' \quad \text{و} \quad M''N'' = NO' \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۲PQ = M'N' + M''N'' = ON + NO' = OO' \\ ON' - QN' = N''O' - N''Q = \frac{۱}{۲}OO' \end{cases}$$

بنابراین، PQو OQ هر دو ثابتند و نقطهٔ P ثابت است.

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

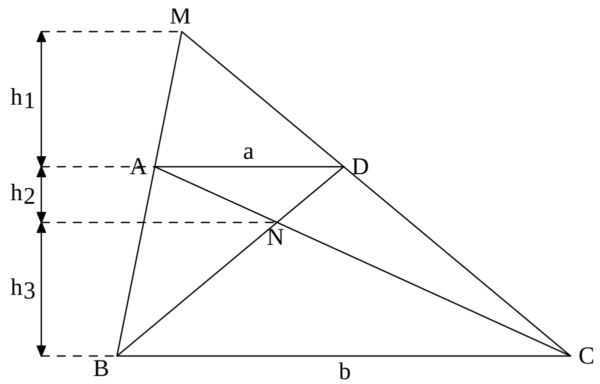
۲. داریم

$$\frac{S_{AMD}}{S_{AND}} = \frac{ah_۱}{ah_۲} = \frac{h_۱}{h_۲} = x$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h_۱}{h_۱ + h_۲ + h_۳} = \frac{\frac{h_۱}{h_۲}}{\frac{h_۱}{h_۲} + ۱ + \frac{h_۳}{h_۲}} = \frac{x}{x + ۱ + \frac{b}{a}}$$

پس

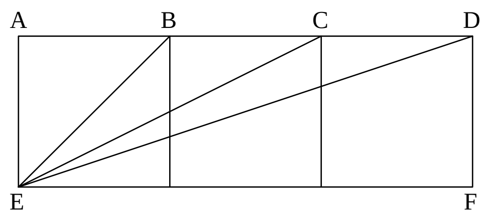
$$\frac{a}{b-a} = \frac{x}{۱ + \frac{b}{a}} \Longrightarrow x = \frac{b+a}{b-a} \quad (b > a)$$



۳. برای اینکه هرگاه مرکبدان واژگون شود، مرکب نریزد باید حجم قسمت حاوی مرکب برابر حجم بقیهٔ مرکبدان منهای حجم مخروط باشد، یعنی

$$(h-h')S = h'S - \frac{۱}{۳}h'S \Longrightarrow h - h' = \frac{۲}{۳}h'$$
$$\Longrightarrow \frac{h'}{h} = \frac{۳}{۵}$$

۴. مستطیل $ADEF$ با طول ۳ و عرض ۱ را مطابق شکل در نظر می‌گیریم.



حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

$$FB^{۲} = ۲ = BC \cdot BD \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{FB}{BD} = \dfrac{BC}{FB} \\ \angle B = \angle B \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \triangle BFD \sim \triangle BCF$$

پس

$$\angle BCF = \angle BFD \Longrightarrow \angle BDF + \angle BCF = \angle BDF + \angle BFD = \frac{\pi}{۴}$$

یعنی

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۲} + \mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

آزمون مرحله‌ی اول سومین دوره مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. توابع زیر مفروضند:

$$f(x)=\frac{1}{\lfloor |x| \rfloor - 1} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{1}{|\lfloor x \rfloor| - 1}$$

اولاً قلمرو هریک از توابع فوق را به‌دست آورید. ثانیاً ثابت کنید که

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$$

۲. تابع زیر مفروض است:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\lfloor x \rfloor\right)$$

اولاً دورهٔ تناوب آن را تعیین کنید و نمودار آن را در یک دورهٔ تناوب رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید که حدهای یکطرفی (چپ و راست) $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)$ هر دو موجودند، ولی $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نیست (با روش ε و δ]با استفاده از تعریف حد[).

۳. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ چنان تعریف شده است که به‌ازای هر x و y از $\mathbb{R}$ رابطهٔ زیر برقرار است.

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

اگر $f(0)\neq 0$ و $f'(0)$ موجود و متناهی]مخالف بینهایت[باشد، ثابت کنید f در هر نقطه دارای مشتق است.

۴. تعیین کنید بسط $(a+b+c)^{99}$ در حالت کلی چند جمله می‌تواند داشته باشد.

۵. اگر داشته باشیم

$$S_n=\frac{5}{9}\times\frac{14}{20}\times\frac{27}{35}\times\cdots\times\frac{2n^2-n-1}{2n^2+n-1}$$

مطلوب است تعیین حد S_n، وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند.

آزمون مرحله‌ی اول سومین المپیاد ریاضی کشور

۶. دو خط D و D' به معادله‌های

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z-۱}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۲}{۴}=\frac{z-۱}{۳}$$

مفروضند. طول عمود مشترک این دو خط را محاسبه کنید.

۷. دو نقطهٔ ثابت B و C در صفحهٔ P مفروضند مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحهٔ P را به‌دست آورید به طوری که داشته باشیم $MB^۲+kMC^۲=a^۲$ (a و k دو عدد معلومند و $k>۰$).

۸. عمل دوتایی $\oplus$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall x, y\in\mathbb{R}, \quad x\oplus y=x+y-xy$$

که در آن اعمال سمت راست، جمع، تفریق و ضرب معمولی‌اند. اولاً ثابت کنید $\oplus$ در $\mathbb{R}$ شرکتپذیر است؛ ثانیاً عضو بی‌اثر در این عمل را تعیین کنید.

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین دوره مسابقات ریاضی

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اثبات با استقرا روی n. برای پایهٔ استقرا داریم

$$n = 1 \Longrightarrow q\cos\alpha = q\frac{p}{q} = p$$

حکم را برای اعداد کمتر یا مساوی n می‌پذیریم و در مورد $n+1$ ثابت می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\alpha &= \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha\\ &= \cos n\alpha\cos\alpha\\ &\quad + \frac{1}{2}\big(\cos(n+1)\alpha - \cos(n-1)\alpha\big)\end{aligned}$$

از آنجا

$$\cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha$$

در نتیجه

$$q^{n+1}\cos(n+1)\alpha = 2(q^n\cos n\alpha)(q\cos\alpha) - q^2(q^{n-1}\cos(n-1)\alpha)$$

بنابر فرض، $q^n\cos n\alpha$، $q\cos\alpha$ و $q^{n-1}\cos(n-1)\alpha$ اعداد صحیحند، در نتیجه $q^{n+1}\cos(n+1)\alpha$ عددی صحیح بوده و به حکم استقرا برقرار است.

۲.

$$x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx \Longrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$$

نتیجه اینکه $x=y=z$.
از آنجا

$$p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

۳.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\leqslant g(x)$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

چون f صعودی است،

$$f\big(f(x)\big) \leqslant f\big(g(x)\big) \qquad (۱)$$

همچنین با توجه به فرض داریم

$$f\big(g(x)\big) \leqslant g\big(g(x)\big) \qquad (۲)$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$f\big(f(x)\big) \leqslant g\big(g(x)\big)$$

و به همین ترتیب قسمت دوم نامساوی نیز حاصل می‌شود. پس

$$f\big(f(x)\big) \leqslant g\big(g(x)\big) \leqslant \varphi\big(\varphi(x)\big)$$

۴. اگر x صحیح باشد، داریم

$$\lfloor x\rfloor = x,\ \lfloor x+y\rfloor = x+\lfloor y\rfloor\ \lfloor -x\rfloor = -x,\ \lfloor -x-y\rfloor = -x+\lfloor -y\rfloor$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor = x+\lfloor y\rfloor = \lfloor x+y\rfloor$$

و به همین ترتیب، داریم

$$\lfloor -x\rfloor + \lfloor -y\rfloor = -x+\lfloor -y\rfloor = \lfloor -x-y\rfloor$$

حال اگر تساویهای فوق هر دو برقرار باشند، ثابت می‌کنیم باید حداقل یکی از دو مقدار x و y صحیح باشد؛ زیرا اگر x و y هیچ‌کدام صحیح نباشند خواهیم داشت

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = -۱ \quad , \quad \lfloor y\rfloor + \lfloor -y\rfloor = -۱$$
$$\lfloor x+y\rfloor + \lfloor -x-y\rfloor = \{\text{۱ – یا}\,۰\}$$

و در نتیجه با جمع دو تساوی $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor = \lfloor x+y\rfloor$ و $\lfloor -x\rfloor + \lfloor -y\rfloor = \lfloor -x-y\rfloor$ خواهیم داشت

$$-۲ = \{\text{۱ – یا}\,۰\}$$

که امکانپذیر نیست. از این تناقض حکم نتیجه می‌شود.

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

۵. بنا بر تعریف مشتق f،

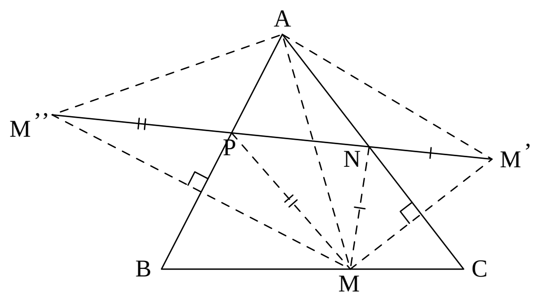
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x)\big(f(h)-۱\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x)\big(۱+hg(h)-۱\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{hf(x)g(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} f(x)g(h) \\ &= f(x)\lim_{h\to ۰} g(h) \\ &= f(x)\cdot ۱ = f(x) \end{aligned}$$

۶. اگر نقطهٔ دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم، از بین مثلثهایی به رأس M که دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث باشند، محیط مثلثی مینیمم است که به شرح زیر حاصل شود.

قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به اضلاع ACو AB، به ترتیب M'و M'' می‌نامیم؛ خط $M'M''$ دو ضلع ACو AB را به ترتیب در نقاط Nو P قطع می‌کند. مثلث MNP، با محیط $M'M''$، جواب این قسمت از مسأله است. (چرا؟)

اما مثلث $AM'M''$ متساوی‌الساقین به زاویهٔ رأس $\angle M'AM'' = ۲\angle A$ است.

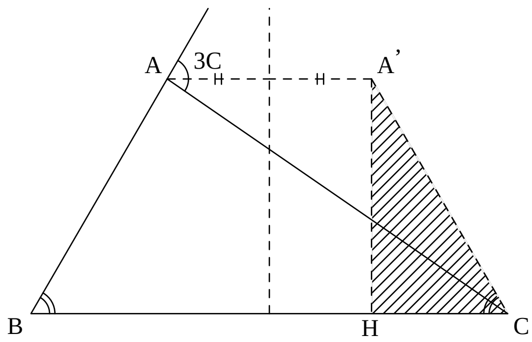
حال مسأله به تعیین نقطهٔ M به طوری که قاعدهٔ مثلث حاصل ($M'M''$) مینیمم شود، تبدیل می‌شود. چون مثلثهای حاصل ($AM'M''$) متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $۲\angle A$ هستند، پس قاعده $M'M''$ در مثلثی مینیمم است که ساق آن مینیمم باشد (چرا؟)، و این در حالتی است که $AM = AM' = AM''$ مینیمم باشد، یعنی M پای ارتفاع از رأس A باشد. با تعویض M با نقاطی روی اضلاع ACو AB، نتیجه می‌گیریم که مثلث مورد نظر همان مثلث ارتفاعی محاط در مثلث ABC است.



۷. **روش اول.** فرض کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مطلوب است. اگر قرینهٔ A را نسبت به عمودمنصف BC، A' بنامیم مثلث $AA'C$ متساوی‌الساقین است (چرا؟). اما $AA'CB$ ذوزنقهٔ

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

متساوی‌الساقین است، از آنجا $AB = AA' = A'C$.



حال اگر از نقطهٔ A' عمود $A'H$ را بر BC رسم کنیم، مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'HC$ قابل رسم است زیرا اگر $A'C = x$ فرض شود، داریم $A'H = h$ و $BC = a$ (a و h معلومند) پس

$$HC = \frac{a-x}{۲}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'HC$ می‌توان نوشت

$$x^۲ = h^۲ + \frac{(a-x)^۲}{۴}$$

یا

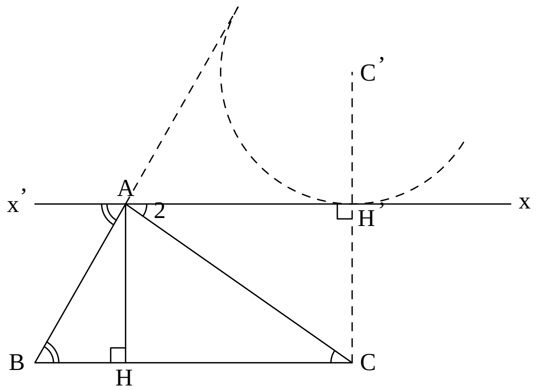
$$۳x^۲ + ۲ax - ۴h^۲ - a^۲ = ۰$$

چون طولهای a و h معلومند، $a^۲$ و $h^۲$ قابل رسمند؛ از آنجا ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم قابل ترسیمند (مجموع و حاصلضرب آنها معلومند)؛ با تعیین x و رسم مثلث $A'HC$، CH را به اندازه a امتداد می‌دهیم. به مرکز B و شعاع $A'C$ دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ محل تلاقی این دایره با خطی که موازی CB و به فاصلهٔ h از آن، رسم می‌شود نقطهٔ A را به‌دست می‌دهد.

روش دوم. اگر از نقطه A خط $x'x$ را به موازات BC رسم کنیم بنابر خاصیت توازی، زاویه $\angle x'AB$ دو برابر زاویه $\angle xAC$ است (زیرا $\angle B = ۲\angle C$). چون ارتفاع AH معلوم است، پس خط $x'x$ معلوم است، و مسأله به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود.

دو نقطهٔ B و C و خط $x'x$ مفروض است. نقطهٔ A را بر خط $x'x$ چنان بیابید که $\angle A_۳ = ۲\angle A_۲$. (یا $\angle x'AB = ۲\angle xAC$).

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی



برای حل مسألهٔ اخیر، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط $x'x$ را C' و محلّ تقی CC' با xx' را H' می‌نامیم. به مرکز C' و شعاع $C'H'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ B مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم. محل تلاقی خطّ مماس، با خط $x'x$ نقطهٔ A است (چرا؟).

۸. ابتدا تقاطع صفحه و سطح مخروطی را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۴x^۲-y^۲+۳z^۲=۰ \\ ۲x+y-z=۰ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} ۴x^۲-y^۲+۳(۲x+y)^۲=۰ \\ ۲x+y-z=۰ \end{cases}$$

از طرفی،

$$۴x^۲-y^۲+۳(۲x+y)^۲=۲(۲x+y)(۴x+y)=۰$$

بنابراین، از این رابطه و دستگاه فوق نتیجه می‌شود که صفحهٔ $۲x+y-z=۰$ سطح مخروطی را در دو صفحهٔ $۲x+y=۰$ و $۴x+y=۰$ قطع می‌کند. بنابراین، فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی، دو خط d و d'، به معادلات زیر است.

$$d\left|\begin{array}{l} ۲x+y=۰ \\ ۲x+y-z=۰ \end{array}\right. \qquad d'\left|\begin{array}{l} ۴x+y=۰ \\ ۲x+y-z=۰ \end{array}\right.$$

اینک پارامترهای هادی دو خط d و d' را تعیین می‌کنیم. پارامتر هادی خط d، $(-۱,۲,۰)$، و پارامتر هادی خط d'، $(-۱,۴,۲)$ است. زاویهٔ بین این دو خط را α می‌نامیم و چنین محاسبه می‌شود:

$$\cos\alpha=\frac{۱+۸}{\sqrt{۵}\sqrt{۲۱}}=\frac{۳\sqrt{۱۰۵}}{۳۵}$$

۹. **روش اول.** فرض کنیم که x و y دو عضو G_a باشند. بنابراین، m و n در $\mathbb{Z}$ وجود دارند به طوری که

$$x=a^n,\ y=a^m$$

پس

$$xy=a^na^m=a^{n+m}$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

چون $n+m$ عضو $\mathbb{Z}$ است، پس $xy \in G_a$، بنابراین، G_a نسبت به عمل ضرب (عمل گروه) بسته است. از طرف دیگر $e = a^\circ$ عضو همانی G_a است زیرا به‌ازای هر $x \in G_a$ داریم

$$xe = a^n a^\circ = a^{n+\circ} = a^n = x$$
$$ex = a^\circ a^n = a^{\circ+n} = a^n = x$$

همچنین وارون هر عضو $x = a^n$ در G_a عبارت است از $y = a^{-n}$ که متعلق به G_a است زیرا $-n \in \mathbb{Z}$ و

$$xy = a^n a^{-n} = a^\circ = e$$
$$yx = a^{-n} a^n = a^\circ = e$$

بالاخره اگر $x = a^n$، $y = a^m$ و $z = a^t$ اعضایی در G_a باشند آنگاه

$$x(yz) = a^n(a^m a^t) = a^n a^{m+t} = a^{n+m+t}$$
$$(xy)z = (a^n a^m)a^t = a^{n+m} a^t = a^{n+m+t}$$

و عمل ضرب در G_a شرکتپذیر بوده و در نتیجه G_a زیرگروه G است.

روش دوم. برای اثبات زیرگروه بودن G_a از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

شرط لازم و کافی برای اینکه زیر مجموعهٔ ناتهی G_a از G، یک زیرگروه G باشد آن است که به‌ازای هر x و y از G_a،

$$xy^{-1} \in G_a$$

بدیهی است که $G_a \neq \varnothing$. زیرا $e \in G_a$. فرض کنیم x و y عضوهایی از G_a باشد. بنابراین، m و n در $\mathbb{Z}$ وجود دارند به طوری که

$$y = a^m,\ x = a^n$$

اینک،

$$xy^{-1} = a^n(a^m)^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m}$$

بنابراین، $xy^{-1} \in G_a$. در نتیجه، G_a زیرگروه G است.

۱۰. الف) در حالت کلی پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم و احتمال هریک را می‌نویسیم.

پیشامد A: گلوله به هدف بخورد $P(A) = p$
پیشامد B: گلوله به هدف نخورد $P(B) = q$

پیشامدهای فرعی عبارتند از

A:	پرتاب اول به هدف بخورد	احتمال p
BA:	پرتاب دوم به هدف بخورد	احتمال qp
	$\vdots$	$\vdots$
$\underbrace{BB\cdots B}_{n-1\ \text{بار}}A$:	پرتاب nام به هدف بخورد	احتمال $q^{n-1}p$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

در نتیجه،

$$P(\text{در پرتاب } n\text{ام به هدف بزنیم}) = q^{n-1}p$$

پس احتمال آنکه دقیقاً سه گلوله مصرف شود برابر $q^{2}p$ یعنی

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2} \times \left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9}{1000}$$

است.

ب) این پیشامد اجتماع پیشامدهای متمایزِ «سه گلوله مصرف شود»، «چهار گلوله مصرف شود» و ... است و با نمادگذاری فوق می‌شود

$$BBA \cup BBBA \cup \cdots \cup BB\cdots BA \cup \cdots$$

پس احتمال این پیشامد برابر جمع احتمالهای متمایز فوق است.

$$\begin{aligned} &P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) \\ &= P(BBA) + P(BBBA) + \cdots \\ &= P(B)P(B)P(A) + P(B)P(B)P(B)P(A) + \cdots \\ &= q^{2}p(1 + q + q^{2} + \cdots) \\ &= q^{2}p \times \frac{1}{1-q} = q^{2} \end{aligned}$$

و با جایگذاری مقدار عددی،

$$P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

نکته. در قسمت (ب)، پیشامد مورد نظر را می‌توان بر حسب مکمل پیشامد تعریف کرد.

$$P(\text{سه گلوله مصرف شود}) = 1 - P(\text{یک یا دو گلوله مصرف شود})$$

و چون مصرف یک گلوله و مصرف دو گلوله پیشامدهای متمایزند،

$$P(\text{یک یا دو گلوله مصرف شود}) = P(\text{یک گلوله مصرف شود}) + P(\text{دو گلوله مصرف شود})$$

با جایگذاری مقادیر عددی

$$\begin{aligned} P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) &= 1 - (p + qp) \\ &= 1 - p(1+q) \\ &= 1 - \frac{90}{100}\left(1 + \frac{1}{10}\right) \\ &= 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

۱۱. **روش اول.** فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$؛ داریم

$$\begin{aligned}(x+x)^{۲} &= x+x\\ (x+x)(x+x) &= x+x\\ x^{۲}+x^{۲}+x^{۲}+x^{۲} &= x+x\\ x+x+x+x &= x+x\\ x+x &= ۰\\ x &= -x\end{aligned}$$

بنابراین، قرینهٔ هر عضو با خودش برابر است.
حال فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}$؛ چون $x+y \in \mathbb{R}$، داریم

$$\begin{aligned}(x+y)^{۲} &= x+y\\ (x+y)(x+y) &= x+y\\ x^{۲}+xy+yx+y^{۲} &= x+y\\ x+xy+yx+y &= x+y\\ xy+yx &= ۰\end{aligned}$$

چون $y=-y$ پس $xy-yx=۰$. از آنجا $xy=yx$ و حلقه، جابجایی است.
روش دوم. از $a(-b)=(-a)b=-ab$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$x = x^{۲} = (-x)(-x) = (-x)^{۲} = -x$$

پس هر عضو با قرینه‌اش برابر است. بنابراین،

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y) = (x-y)^{۲} &= x-y\\ x^{۲}+x(-y)+yx+y(-y) &= x-y\\ x-xy+yx-y &= x-y\\ xy &= yx\end{aligned}$$

۱۲. فرض کنیم $a<b$، چون $c>۰$، پس $ac<bc$. به طرفین نامساوی مقادیر مساوی ab را می‌افزاییم

$$\begin{aligned}ab+ac &< ab+bc\\ a(b+c) &< b(a+c)\end{aligned}$$

چون $b+c>۰$، پس

$$a < \frac{b(a+c)}{b+c}$$

و چون $b>۰$،

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \qquad (۱)$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

حالت $a > b$ نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. حال داریم

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c \Longrightarrow \frac{a+c}{b+c} < ۱$$

و با توجه به نامساوی (۱) داریم

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < ۱$$

برای قسمت آخر مسأله، با فرض $a < b$ داریم $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < ۱$، با انتخاب c به عنوان عددی گنگ، ثابت می‌کنیم $x = \left(\frac{a+c}{b+c}\right) b$، عددی گنگ خواهد بود. از آنجا $a < x < b$ جواب مطلوب ماست.

حال فرض کنیم c عددی گنگ بوده ولی $\left(\frac{a+c}{b+c}\right) b$ گنگ نباشد پس

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+c}{b+c}\right) b &= \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{Z}) \\ (a+c)bq &= p(b+c) \\ abq + cbq &= bp + pc \\ c &= \frac{b(aq-p)}{p-bq} \end{aligned}$$

چون

$$a < b \Longrightarrow \frac{a+c}{b+c} \neq ۱ \Longrightarrow p \neq bq$$

و a، b، p و q اعداد صحیحند، c عددی گویاست که متناقض فرض گنگ بودن آن است. از این تناقض نتیجه می‌شود که اگر c گنگ باشد، $\frac{a+c}{b+c}$ نیز گنگ است و حکم خواسته شده برقرار است.

آزمون مرحله‌ی دوم اولین دوره مسابقات ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. هرگاه $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک‌به‌یک باشد ثابت کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نیز یک‌به‌یک است.

۲. ثابت کنید عدد $x = \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$ اصم (گنگ) است.

۳. ماتریس $A_{(۲\times ۲)}$ را چنان بیابید که داشته باشیم

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴. نقطهٔ M چنان حرکت می‌کند که مجموع مربعات فواصل آن از وجوه مکعب مقداری است ثابت. مکان هندسی نقطهٔ M را به‌دست آورید.

۵. با استفاده از حروف لغت «احتمال» چند کلمهٔ چهارحرفی (با معنی یا بدون معنی) می‌توان ساخت؟

۶. ۱۰ کیسه از گلوله‌های هم‌شکل داریم که وزن هریک از گلوله‌های ۹ تا از این کیسه‌ها ۱۰ گرم است ولی وزن هریک از گلوله‌های یکی از کیسه‌ها ۹ گرم است. با یک بار توزین]با ترازوی عقربه‌ای[تعیین کنید کدام‌یک از کیسه‌ها از گلوله‌های ۹ گرمی تشکیل شده است.

۷. حاصل عبارت $S_n = \text{Arctg}\,\frac{۱}{۲} + \text{Arctg}\,\frac{۱}{۸} + \cdots + \text{Arctg}\,\frac{۱}{۲n^۲}$ را به‌دست آورید. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ را نیز پیدا کنید.

۸. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{اگر } x = \frac{۱}{n} \text{ و } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع فوق در چه نقاطی دارای حد است؟

ب) نشان دهید حد تابع f در صفر موجود نیست.

۹. سه نقطهٔ A، B و C را به ترتیب بر خط مفروض l اختیار می‌کنیم ($AB \neq BC$). دایرهٔ متغیری در نقطهٔ B بر خط l همواره مماس است. از نقاط A و C مماسهایی بر این دوایر]دایره[رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M محل تلاقی این مماسها را تعیین کنید.

آزمون مرحله‌ی دوم اولین دوره مسابقات ریاضی

۱۰. با الهام گرفتن از اشکال زیر مجموع $\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۸} + \frac{۴}{۱۶} + \cdots$ را به‌دست آورید.