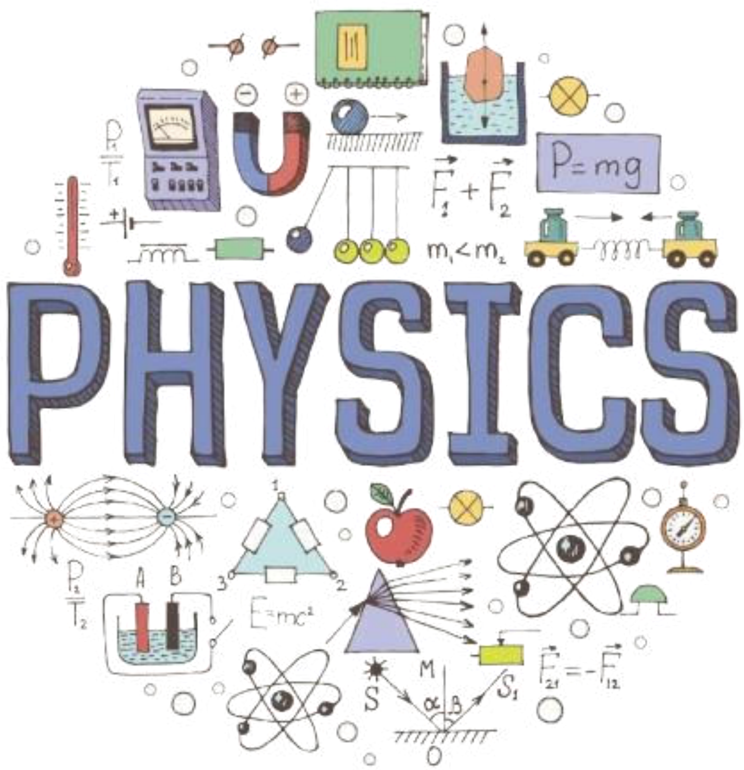
بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دفترچه سوالات مرحله دوم المپیاد فیزیک از ابتدا تاکنون

(همراه با کلید)



amoozz.ir

sampaadia.ir

- برای هدایت به صــفحه راهکارهای مؤثر برای موفقیت در المپیاد: از برنامه‌ریزی تا مدیریت زمان بر روی این متن کلیک کنید

- برای هدایت به صفحه امتیاز و تسـهیلات کسـب مدال در المپیادهای علمی دانش آموزی چیست؟ بر روی این متن کلیک کنید

- برای هدلیت‌به صــفحه نمره کف قبولی المپیاد چیســـت؟ بر روی این متن کلیک کنید

سایر مطالب مرتبط:

- آشنایی با المپیاد فیزیک
- تاریخچه المپیاد فیزیک در ایران و جهان
- دانلود سوال و پاسخ‌نامه آزمون‌های مرحله اول و مرحله دوم المپیادهای فیزیک ایران
- آزمون های آنلاین مرحله اول المپیاد فیزیک
- منبع، مراجع و سوالات مرحله اول و دوم المپیاد فیزیک

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ دوم

سی و هشتمین دورهٔ المپیاد فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۴- ۱۴۰۳

تاریخ: ۱۴۰۴/۱/۲۴ - ساعت : ۸:۰۰ - مدت: ۳۰۰ دقیقه - نوع:تشریحی

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۲- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۳- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

٤- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از برش سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید.در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۵- از مخدوش کردن **بارکدها و مربع‌ها در چهارگوشهٔ صفحه در دفترچهٔ پاسخ‌برگ** جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

٦- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

۷- در این آزمون کلیه موارد درخواست شده برای هر سوال در قسمت‌های مستطیلی قرار داده شده است. لطفاًدر برگه های پاسخ ،دقیقاً مشخص کنید که جواب کدام پرسش را می دهید.

۸- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

۹- این دفترچه شامل۷ سوال و با احتساب جلد ۸ برگ است.

سوال ۱) ابر کنار کوه

در شرایط جوی مناسب، هنگام وزش باد مرطوب و برخورد آن به یک کوه، ابر تشکیل می‌شود. شکل ۱ تصویری از این رویداد را نشان می‌دهد. در این فرایند جریان هوا ضمن بالا رفتن از دامنهٔ یک رشته کوه دچار کاهش فشار و دما می‌شود. در این مسئله با تحلیل یک مدل ساده نشان می‌دهیم که چگونه این پدیده به میعان بخار آب و تشکیل ابر منجر می‌شود.

شکل ۱. تصویر ابر تشکیل شده در کنار کوه

در ابتدا توضیح مختصری در مورد هوای اشباع شده و تشکیل ابر می‌دهیم. اگر مقدار بخار آب موجود در هوا از آستانهٔ مشخصی بیشتر شود بخار آب اضافه تبدیل به آب می‌شود. به این پدیده میعان گفته می‌شود. در این فرایند ملکول‌های آب حول ریزذرات معلق در هوا جمع می‌شوند و تبدیل به ریزقطرات آب (یا بلور یخ) می‌شوند، این ریزقطرات به‌صورت ابر دیده می‌شوند.

به وضعیتی که بخار آب موجود در هوا در آستانهٔ میعان است حالت اشباع گفته می‌شود. در یک دما و فشار معین اندازهٔ جرم بخار آب اشباع در $۱/۰\,m^۳$ هوای اشباع شده مقدار معینی دارد که در جدول ۱ این مقدار بر حسب **گرم** برای چند فشار و دما داده شده است. در طی حل این مسئله می‌توانید از داده‌های جدول استفاده کنید.

دما (C)	فشار $۱/۰\,bar$	فشار $۰/۸\,bar$
۱۲	۱۰/۹۹	۱۱/۰۸
۱۷	۱۴/۹۶	۱۵/۰۷
۲۲	۲۰/۱۲	۲۰/۲۲
۲۷	۲۶/۷۷	۲۶/۹۴

جدول ۱. میزان جرم موجود بخار آب در یک **متر مکعب** هوای اشباع بر حسب **گرم**، در دما و فشارهای مختلف هوا

* در کل مسئله هوای اشباع را گاز آرمانی در نظر بگیرید.

* چگالی هوا در دمای C ۲۷ و در فشار bar ۱٫۰ با چشم‌پوشی از جرم بخار آب موجود در آن برابر $\mathrm{kg/m^3}$ ۱٫۲ است. (Pa ۱۰^۵ bar ۱)

* هوا را می‌توان یک گاز دو اتمی گرفت که انرژی درونی آن از رابطهٔ $U \quad \frac{5}{2}PV$ به دست می‌آید.

* گرمای نهان تبخیر آب در شرایط این مسئله به طور میانگین برابر $\mathrm{J/g}$ ۲۴۰۰ است.

* میزان جرمی از یک شاره با چگالی ، که در واحد زمان از یک سطح مقطع فرضی با مساحت A و با سرعت u به صورت عمود از آن می‌گذرد برابر Au است.

آ) اگر $\mathrm{m^3}$ ۱۰۰ (تقریبا اندازهٔ یک اتاق) هوا با دمای C ۲۷ در فشار bar ۱٫۰ به گونه‌ای سرد شود که دمای آن به C ۱۷ و فشار آن به bar ۰٫۸ برسد، حجم نهایی این گاز چقدر می‌شود؟

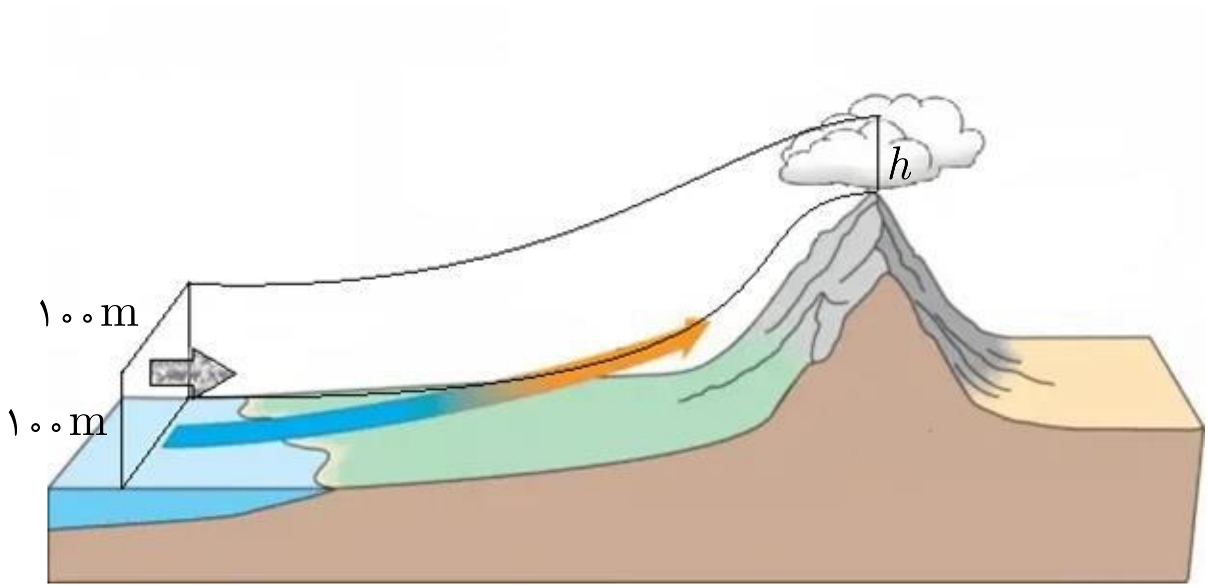
ب) تغییر انرژی درونی گاز در فرایند بخش آ چقدر است؟

پ) فرض کنید در تحول بخش آ، هوای اولیه و نهایی هر دو در حالت اشباع باشند. در این فرایند چه جرمی از بخار آب به مایع تبدیل می‌شود؟

ت) این مقدار بخار آب برای تبدیل شدن به مایع چقدر گرما به محیط داده است؟

حال رشته کوهی را مانند شکل ۲ فرض کنید که در نزدیکی ساحل دریا واقع شده و به موازات آن است. بادی با سرعت $\mathrm{m/s}$ ۱۰ از روی سطح دریا تا ارتفاع ۱۰۰ متری با دمای C ۲۷ و فشار bar ۱٫۰ به سمت رشته کوه می‌وزد که باعث می‌شود هوا از بخار آب اشباع شود. سرعت این باد در بالای کوه و در هنگام عبور از رشته کوه $\mathrm{m/s}$ ۳۰ می‌شود. دما و فشار آن در بالای رشته کوه به ترتیب برابر C ۱۷ و bar ۰٫۸ است. ارتفاع جریان هوا بالای رشته کوه h است.

ث) محاسبه کنید به ازای خط فرضی به طول ۱۰۰ متر موازی دامنه کوه، مانند شکل ۲، چه جرمی از بخار آب در هر ثانیه از بالای این خط فرضی می‌گذرد؟



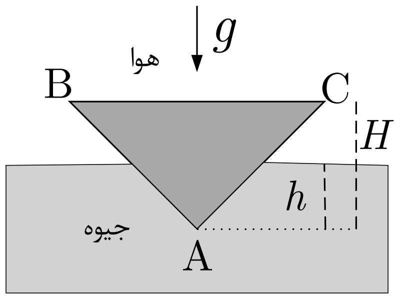
شکل ۲

ج) با توجه به قسمت ث، در هر ثانیه بالای رشته کوه چه جرمی از ابر تشکیل می‌شود؟

چ) با توجه به شکل ۲ و مقادیر به دست آمده در قسمت های قبل، مقدار h چقدر است ؟

ح) با استفاده از پایستگی انرژی، تغییر ارتفاع هوا را در دو حالت ذکر شده حساب کنید.

سوال ۲) دماسنج الکتریکی



شکل ۱

منشوری از جنس یک آلیاژ به خصوص با قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین مطابق شکل ۱ در جیوه شناور است. یال‌های منشور افقی و عمود بر صفحهٔ شکل هستند. چگالی جیوه و آلیاژ در دمای معین T به ترتیب $_{\mathrm{Hg}}$ و $_{\mathrm{A}}$ است. ارتفاع مثلث یاد شده در این دما H و فاصلهٔ رأس A تا سطح آزاد جیوه h است.

آ) h را بر حسب سایر داده‌ها به دست آورید.

می‌خواهیم از دستگاه فوق به عنوان یک دماسنج استفاده کنیم. ضریب انبساط طولی آلیاژ $_{\mathrm{A}}$ و ضریب انبساط حجمی جیوه $_{\mathrm{Hg}}$ است. اگر دما به مقدار T افزایش یابد، فاصلهٔ رأس A از سطح جیوه به اندازهٔ h تغییر می‌کند که نسبت به h بسیار کوچک است. فرض کنید ضریب انبساط ظرف جیوه به‌گونه‌ای است که بر اثر تغییر دما ارتفاع سطح جیوه در ظرف تغییر محسوسی ندارد.

نکته) بر اثر تغییر کوچک x در کمیت x، کمیت وابستهٔ $f(x)$ به صورت زیر تغییر می‌کند

$$f \quad f(x \quad x) \quad f(x) \quad f\ (x) \quad x$$

که در آن $f\ (x)$ مشتق تابع $f(x)$ است.

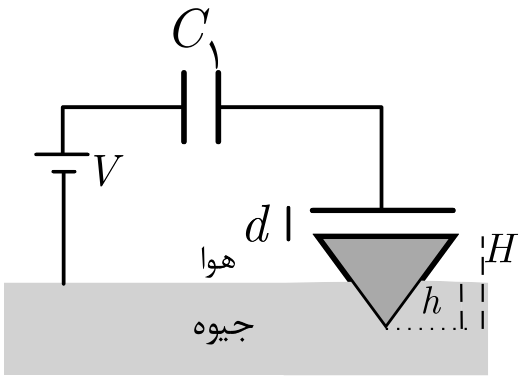
ب) h را برحسب داده‌های مسئله به دست آورید.

پ) به ازای مقادیر زیر تغییر ارتفاع h را برای افزایش دما به اندازهٔ T ۲۵K به دست آورید. $_{\mathrm{Hg}}$ ۱۳٫۶g/cm³ ، $_{\mathrm{A}}$ ۳٫۴g/cm³ ، H ۲۰cm ، $_{\mathrm{Hg}}$ ۱۸ ۱۰ ⁵ K ¹ و $_{\mathrm{A}}$ ۲٫۰ ۱۰ ⁵ K ¹ .

به منظور اندازه‌گیری h ، از سطح افقی منشور به عنوان صفحهٔ یک خازن متغیر استفاده می‌کنیم، به طوری که جابه‌جایی آن منجر به تغییر ظرفیت خازن شود. سپس این خازن را در یک مدار مطابق شکل ۲ با خازن ثابت دیگری به ظرفیت معلوم C_1 سری می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم سی و هشتمین دورهٔ المپیاد فیزیک، ۱۴۰۴

در دمای T ظرفیت خازن متغیر C و فاصلهٔ بین صفحات آن d است. بین صفحات خازن هوا است. ولتاژ دو سر باتری ثابت و برابر V است. از نیرویی که صفحات خازن به یکدیگر وارد می‌کنند چشم پوشی کنید.



شکل ۲

ت) اگر ظرفیت خازن به ازای افزایش دمای T به اندازهٔ کوچک C تغییر کند نسبت C / C را بر حسب T و سایر داده‌های مسئله به دست آورید. فرض کنید تغییر ظرفیت خازن عمدتاً به واسطهٔ تغییر فاصلهٔ صفحات است و تغییر مساحت صفحات اثر ناچیزی دارد.

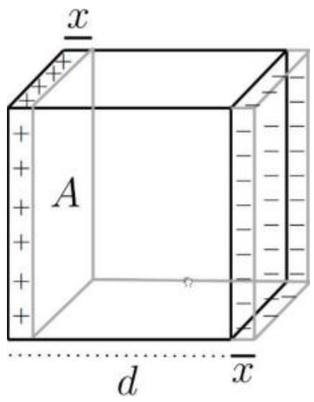
ث) اگر $۲/۰\,\mathrm{V}$ V، C $C_۱$ و $۱/۰\,\mathrm{mm}$ d باشد ولتاژ دو سر خازن متغیر با افزایش دما به اندازهٔ $۲۵\,\mathrm{K}$ T چه مقدار تغییر می‌کند؟

سوال ۳) نوسان پلاسما

پلاسما حالتی از ماده است که در آن مخلوطی گاز مانند از ذرات باردار در جایی تجمع کرده‌اند. در طبیعت چنین وضعیتی در مرکز ستاره‌ها برقرار است. معمولاً بارهای منفی الکترون‌ها هستند که جرم هر یک از آن‌ها m_e و اندازهٔ بار الکتریکی هر یک از آن‌ها e است. بارهای مثبت در پلاسمای بسیار داغ، هسته‌ها و در پلاسمای نه چندان داغ، یون‌ها هستند. در این مسئله فرض می‌کنیم بارهای مثبت، اتم‌های یک بار یونیده‌اند. در حالت تعادل تعداد بارهای مثبت و منفی در یک واحد حجم در همه جا یکسان و برابر n است. با توجه به این که جرم الکترون‌ها بسیار کمتر از جرم یون‌هاست، می‌توان در دماهای نه چندان بزرگ، عملاً یون‌ها را ساکن فرض کرد. در این صورت پلاسما شبیه یک رسانا خواهد بود.

در صورت انحراف از حالت تعادل، دستگاه پلاسما، مشابه یک دستگاه جرم و فنر، نوسان می‌کند. در این مسئله می‌خواهیم با ارائهٔ مدل‌های ساده‌ای نوسان پلاسما را بررسی کنیم. این کار را در سه وضعیت کاملاً مجزا انجام می‌دهیم.

حالت اول – پلاسمای سرد



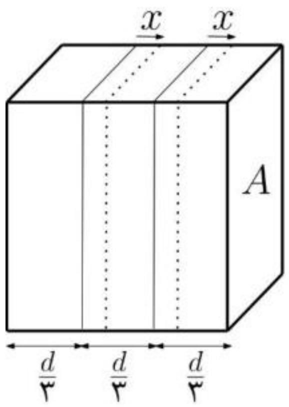
شکل ۱

در این حالت از حرکت کاتوره‌ای (گرمایی) الکترون‌ها چشم می‌پوشیم. فرض کنید در مکعب مستطیلی به سطح مقطع A و طول کوچک d پلاسما وجود دارد. فرض کنید تمام الکترون‌ها، مطابق شکل ۱، به اندازهٔ بسیار کوچک x (در مقایسه با d) به یک سمت (مثلا سمت راست)کشیده شده باشند. در این صورت دستگاه مشابه یک خازن تخت عمل می‌کند. فرض کنید ضریب گذردهی پلاسما، تقریباً همان ضریب گذردهی خلاء، ، است.

آ) نیروی بازگرداننده بر روی کل مجموعهٔ الکترون‌ها را حساب کنید و در مشابهت با دستگاه جرم و فنر بسامد نوسان پلاسمای سرد را به دست آورید.

حالت دوم – گاز الکترونی

در این حالت فرض می‌کنیم الکترون‌ها بار ندارند و مشابه به یک گاز آرمانی در ظرفی به سطح مقطع A و طول d محصور هستند. فرض کنید دمای این گاز آرمانی T، فشار حالت تعادل آن P و چگالی جرمی حالت تعادل آن باشد. نوسانات طولی گاز در این ظرف مشابه یک لولهٔ صوتی است که دو سر آن بسته باشد. در هماهنگ اول در دو سر لوله گره و در طول لوله



شکل ۲

فقط یک شکم در وسط آن وجود دارد. به این ترتیب گاز در کناره‌ها به طور متناوب منقبض و منبسط می‌شود ولی فشار در نقطهٔ وسط همان فشار P است. به منظور ساده کردن ریاضیات مسئله مدل ساده‌ای در نظر می‌گیریم که در آن گاز را مطابق شکل ۲ و در طول لوله به سه بخش به طول d / ۳ تقسیم کرده‌ایم. گاز در هر کدام از این سه بخش فشار یکسانی دارد و بین بخش‌ها دیواره‌های فرضی وجود دارد که در طی نوسان دستگاه به چپ و راست حرکت می‌کنند. فرض کنیم یک سوم وسطی به اندازهٔ x (که بسیار از d کوچکتر است) از حالت تعادل منحرف شده و فشار گاز سمت راست خود را به مقدار کوچک P افزایش داده است. در سمت چپ نیز فشار گاز به اندازهٔ P کاهش یافته است. برای سهولت فرض می‌کنیم تحول فوق در دمای ثابت اتفاق افتاده است.

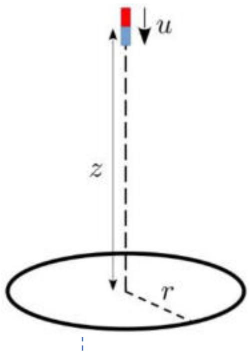
ب) نیروی بازگرداننده بر روی گاز بخش وسط را حساب کنید و در مشابهت با دستگاه جرم و فنر بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب دمای T، طول موج و جرم الکترون، m_e، به دست آورید. لازم به ذکر است که R / N_A k_B ثابت بولتزمن نام دارد که R ثابت گازها و N_A عدد آووگادرو است.

حالت سوم - پلاسمای داغ

در این حالت پلاسمای داغ را در نظر می‌گیریم که در آن هم بار الکتریکی الکترون‌ها مؤثر است و هم مجموعهٔ آن‌ها مثل یک گاز آرمانی عمل می‌کند. به عبارت دیگر هر دو اثر بازگردانندهٔ حالت‌های قبلی با هم مؤثرند. فرض کنید نیروی بازگرداننده به ازای واحد جرم ناشی از دو حالت قبلی با هم جمع شوند.

پ) بسامد نوسان پلاسمای داغ را بر حسب n، e، m_e، ، k_B، T و به دست آورید.

سوال ۴) سقوط آهنربا در لولهٔ فلزی



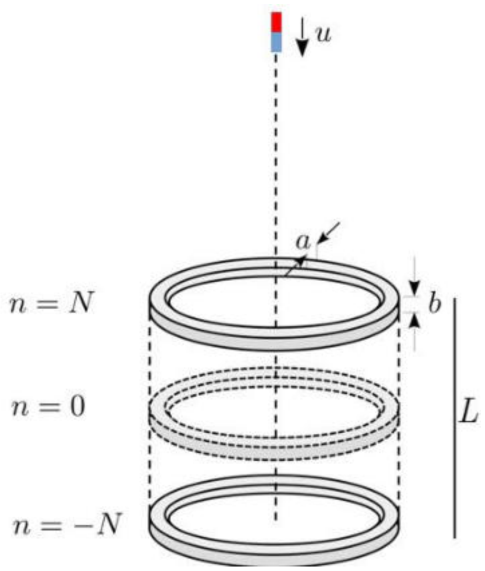
شکل ۱

حلقه‌ای رسانا به شعاع r در یک صفحه افقی ثابت است. یک آهن‌ربای کوچک میله‌ای به جرم نامعلوم در حالی که همواره محور آن با محور حلقه یکی است در راستای محور حلقه حرکت می‌کند. سرعت آهن‌ربا متغیر است. در لحظه‌ای که مرکز آهن‌ربا در فاصلهٔ z از مرکز حلقه است سرعت لحظه‌ای آن را u بگیرید. فرض کنید شار مغناطیسی که از سطح حلقه می‌گذرد تابع معلوم (z) باشد. روشن است که با داشتن تابع (z) مشتق آن، $\frac{d}{dz}(z)$ ، نیز معلوم خواهد بود. در تمام بخش‌های این مسئله به جز بخش ت میدان گرانش در کار نیست.

یادآوری قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای: اگر تابعی از متغیر z باشد و z نیز به نوبهٔ خود تابعی از متغیر t باشد، مشتق نسبت به t از رابطهٔ $\frac{d}{dt} \quad \frac{d}{dz}\frac{dz}{dt}$ به دست می‌آید.

آ) انرژی که در هر ثانیه آهن‌ربا از دست می‌دهد، توان تلف شده نام دارد که مقدار آن در هر لحظه برابر با حاصل‌ضرب اندازهٔ نیرو در اندازهٔ سرعت است. این کمیت را با انرژی گرمایی تولید شده در حلقه برابر قرار دهید و از این طریق نیروی وارد شده از طرف حلقه به آهن‌ربا را بر حسب مقاومت حلقه، R، و دیگر داده‌های مسئله به دست آورید.

حال پوسته‌ای استوانه‌ای به طول L در نظر بگیرید که از رسانایی با مقاومت ویژهٔ ساخته شده است. ضخامت پوسته را a بگیرید که از شعاع آن، r، بسیار کوچک‌تر است. این دستگاه را در یک مدل می‌توان با برش‌های فرضی افقی به صورت ۱ $2N$ حلقه با طول کوچک ۱) $b \quad L/(2N$ فرض کرد که b از L و r بسیار کوچکتر است، به گونه‌ای که حلقهٔ میانی با شماره ۰ n، آخرین حلقه پایینی با شماره $N \quad n$ و آخرین حلقه‌ی بالایی با شماره $N \quad n$ نام‌گذاری شده باشند. در این حالت z را فاصلهٔ لحظه‌ای مرکز آهن‌ربا و مرکز حلقهٔ میانی بگیرید.



شکل ۲

کماکان فرض کنید محور آهن‌ربا بر محور استوانه منطبق است و با سرعت لحظه‌ای u در راستای آن حرکت می‌کند. در تمام این مسئله از شار میدان مغناطیسی حلقه‌ها در حلقه‌های دیگر صرف نظر کنید و فقط شار میدان مغناطیسی آهن‌ربا را در نظر بگیرید.

ب) با همان رویکرد ذکر شده در بخش آ، نیروی وارد شده از طرف استوانه به آهن‌ربا را بر حسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

پ) در حالتی که آهن‌ربا در داخل یک استوانهٔ بسیار طویل با سرعت ثابت در راستای محور در حال حرکت باشد و فاصلهٔ آن از دو انتها زیاد باشد، نیروی وارد شده از استوانه به آهن‌ربا ثابت است. آن را به دست آورید.

حال فرض کنید شتاب گرانش در راستای محور استوانه برقرار است و اندازهٔ آن g است. اگر آهن‌ربا را در شرایط ذکر شده در بخش پ رها کرده باشیم، بعد از مدتی سرعت آن به سرعت ثابتی موسوم به سرعت حد می‌رسد.

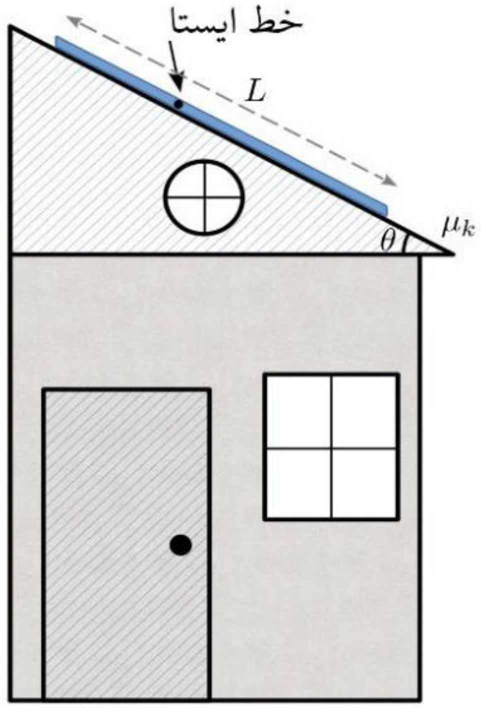
ت) اگر u_{Cu} و u_{Al} به ترتیب سرعت حدی سقوط آهن‌ربا در استوانه‌های مشابه مسی و آلومینیومی باشد، نسبت $u_{\mathrm{Cu}} / u_{\mathrm{Al}}$ را به دست آورید.

مجدداً فرض کنید گرانش در کار نیست. در یک مدل دیگر می‌توان استوانه را به صورت یک مارپیچ فرضی گرفت که حلقه‌های آن تنگ در کنار یکدیگر قرار دارند و ابتدا و انتهای مارپیچ با یک سیم بدون مقاومت به هم وصل شده‌اند. حلقه‌ها را مثل حالت قبل شماره‌گذاری می‌کنیم، فقط در نظر داشته باشید که انتهای هر حلقه به ابتدای حلقه‌ی بعدی متصل شده است.

ث) نیروی وارد شده از طرف این مارپیچ فرضی به آهن‌ربا را بر حسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ج) در حالتی که آهن‌ربا در داخل مارپیچ بسیار طویل با سرعت ثابت در راستای محور در حال حرکت باشد و فاصلهٔ آن از دو انتها زیاد باشد، نیروی وارد شده از استوانه به آهن‌ربا ثابت است. آن را به دست آورید. می‌توانید از این حقیقت استفاده کنید که تابع تابع زوجی از z، $(z$ $)$ (z) ، است.

سوال ۵) کِرم ابریشم فلزی



شکل ۱

مطابق شکل ۱، سقف یک خانهٔ ویلایی به صورت شیروانی است که با افق زاویهٔ می‌سازد. بر روی سقف، صفحه‌ای فلزی به ابعاد b و L و ضخامت یکنواخت قرار گرفته است. ضلع L در امتدا شیب و ضلع b افقی است. نیروی عمودی سطح که سقف به صفحه وارد می‌کند به طور یکنواخت توزیع شده است، به طوری که نیروی عمودی وارد شده به واحد سطح صفحه در همه جای آن یکسان است. ضریب اصطکاک جنبشی بین صفحه و سقف $_k$ است و $\tan$ $_k$، در نتیجه در حالت عادی صفحه روی سقف سُر نمی‌خورد.

در طی شبانه‌روز دمای محیط بین دمای سرد T_c، قبل از سپیده‌دم و دمای گرم T_h، در بعد از ظهر تغییر می‌کند و سقف و صفحه در همان دمای محیط هستند. ضریب انبساط حرارتی طولی سقف ناچیز و ضریب انبساط حرارتی طولی صفحه است. صفحه و سقف به یکدیگر گیر نیستند به طوری که در ضمن انبساط و انقباض صفحه اندکی نسبت به سقف حرکت می‌کند. این حرکت بسیار آرام و بدون شتاب است و در هر لحظه می‌توان دستگاه را در حالت تعادل گرفت.

در حین انبساط بخش‌های پایینی صفحه به طرف پایین و بخش‌های بالایی آن به طرف بالا حرکت می‌کنند. در این فرایند نقاطی از صفحه در طول خطی به موازات ضلع b که به فاصلهٔ $x_۱$ از لبهٔ پایینی است ساکن می‌مانند. به این نقاط خط ایستا می‌گوییم (که اگر سقف شیب نداشت خط ایستا وسط صفحه قرار می‌گرفت). در حین انقباض جای خط ایستا عوض می‌شود و در فاصلهٔ $x_۲$ از لبهٔ پایینی قرار می‌گیرد.

آ) دستگاه صفحه را مشابه دو جرم مجزا که بر روی سطح شیب‌دار در تماس با هم هستند در نظر بگیرید و با فرض حرکت بدون شتاب، برای هر یک از آن‌ها معادلات حرکت را در دو حالت انبساط و انقباض بنویسید.

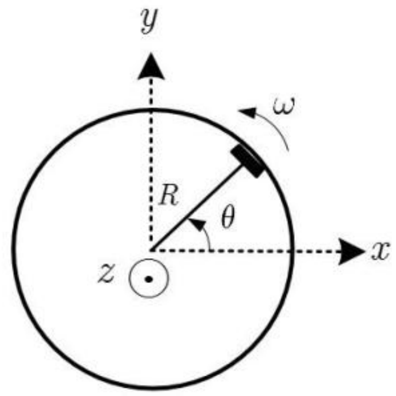
ب) با حل معادلات بخش آ در حالت انبساط، فاصلهٔ لبهٔ پایینی صفحه از خط ایستا (یعنی طول $x_۱$) را بر حسب L_c (طول صفحه در دمای T_c)، $\tan$ و $_k$ به دست آورید.

پ) با حل معادلات بخش آ در حالت انقباض، فاصلهٔ لبهٔ پایینی صفحه از خط ایستا (یعنی طول $x_۲$) را بر حسب L_c (طول صفحه در دمای T_c)، $_k$ و $\tan$ به دست آورید.

چنان که ملاحظه می‌کنید تفاوت محل خط ایستا در ضمن انبساط و انقباض صفحه باعث حرکت آن مشابه کرم ابریشم بر روی سقف می‌شود.

ت) جابجایی لبهٔ پایینی صفحه نسبت به سقف را پس از یک فرایند انبساط و انقباض به دست آورید. پاسخ خود را بر حسب L_c، $_k$ ، T_h، T_c، و $\tan$ به دست آورید. پاسخ نهایی خود را با چشم‌پوشی از جملاتی که به صورت حاصل‌ضرب مقادیر بسیار کوچک هستند، ساده کنید.

سوال ۶) استوانهٔ چرخان



شکل ۱

استوانه‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ثابت دور محور خود می‌چرخد. بلوک کوچکی به جرم m بر سطح داخلی استوانه تکیه دارد و می‌تواند همراه آن بچرخد. ضریب اصطکاک ایستایی بلوک با سطح استوانه $_s$ است. از اندازهٔ بلوک نسبت به شعاع استوانه چشم‌پوشی کنید. شکل ۱ مقطع استوانه را نشان می‌دهد که در آن محور استوانه محور z است و محورهای x و y دو محور عمود بر هم در مقطع استوانه هستند. شعاع واصل از محور z به بلوک با محور x زاویهٔ می‌سازد. شتاب گرانش g است.

مسئله را در سه حالت متفاوت زیر دنبال می‌کنیم:

حالت اول: محور z قائم باشد.

با فرض اینکه شتاب گرانش در جهت z باشد.

آ) اندازهٔ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک ایستایی را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ب) کمینهٔ را بر حسب داده‌های مسئله چنان تعیین کنید که بلوک سُر نخورد.

حالت دوم: محور y قائم باشد.

با فرض اینکه محورهای x و z افقی هستند و شتاب گرانش در جهت y باشد.

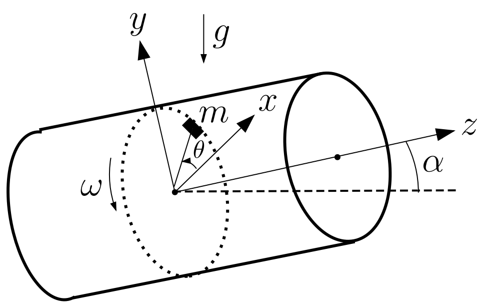
پ) اندازهٔ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک ایستایی را بر حسب زاویهٔ و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

ت) در یک زاویهٔ معین، برای آن که بلوک سُر نخورد باید $F(\ )$ ^{۲} باشد. تابع $F(\ )$ را بر حسب و سایر داده‌های مسئله تعیین و نمودار آن را در بازهٔ $[۰, ۲\ ]$ رسم کنید.

ث) $_{min}$ را بر حسب R، $_s$ و g چنان تعیین کنید که برای $_{min}$ ، بلوک در تمام زاویه‌ها سُر نخورد.

حالت سوم: محور z مایل باشد.

با فرض اینکه مطابق شکل ۲، محور z با افق زاویه بسازد و شتاب گرانش در صفحهٔ z y باشد.



شکل ۲

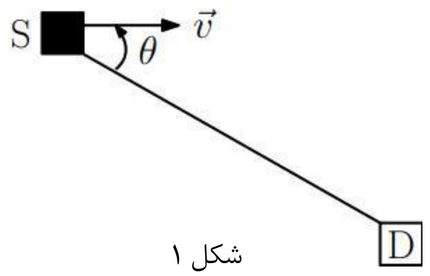
ج) نیروی وزن را در راستای محور z و عمود بر آن تجزیه کنید و سپس اندازهٔ نیروی عمودی سطح و مؤلفه‌های نیروی اصطکاک ایستایی را در راستاهای محور z و مماس بر دایره مسیر بر حسب و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

چ) در یک زاویهٔ معین، برای آن که بلوک سُر نخورد باید $G( )$ ۲ باشد. تابع $G( )$ را بر حسب و سایر داده‌های مسئله تعیین و نمودار آن را در بازهٔ [۰, ۲] رسم کنید. با توجه به مقادیر پارامترها ممکن است نمودار شکل‌های متفاوتی داشته باشد.

راهنمایی: برای رسم تابع، توصیه می‌شود مقدار تابع $G( )$ و مشتق آن را در زوایای ۰, , ۲ حساب کنید و با توجه به علامت آن‌ها و ریشه‌های مشتق تابع، رفتار کلی آن را حدس بزنید. توجه کنید که با توجه به مقدار پارامترها ممکن است تابع شکل‌های متفاوتی داشته باشد.

ح) $_{\min}$ را بر حسب R، $_s$ ، g و چنان تعیین کنید که برای $_{\min}$ ، بلوک در تمام زاویه‌ها سُر نخورد. ممکن است مسئله بیش از یک حالت داشته باشد.

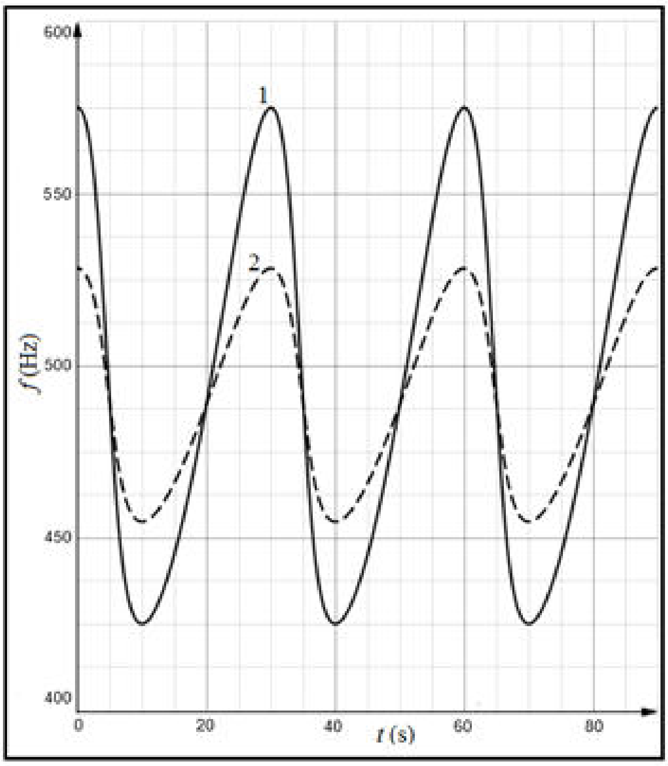
سوال ۷) چشمهٔ صوتی چرخان



شکل ۱

یک چشمهٔ صوتی، S، در حالت ساکن امواج صوتی با بسامد f تولید می‌کند که با سرعت c منتشر می‌شوند. اگر این چشمه با سرعت v حرکت کند، و گیرنده، D، ساکن باشد بسامدی که گیرنده ثبت می‌کند به صورت $f \quad \dfrac{f}{۱ \quad (v\,/\,c)\cos}$ است، که در آن مطابق شکل ۱، زاویهٔ بین خط واصل از مکان لحظه‌ای چشمه به گیرنده با امتداد سرعت v و c سرعت صوت است.

حال فرض کنید یک چشمه صوتی روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت یکنواخت v می‌چرخد. دو گیرندهٔ ۱ و ۲ در صفحهٔ دایره‌ای که چشمه روی آن می‌چرخد قرار دارند. بسامد f دریافت شده توسط دو گیرنده به صورت تابعی از زمان t مطابق شکل ۲ است.



شکل ۲

آ) فرض کنید گیرندهٔ D بیرون دایره و به فاصلهٔ d از نقطهٔ O، مرکز دایره، باشد ($d \quad R$).

آ۱- با رسم شکل نشان دهید بیشینه و کمینهٔ بسامد دریافت شده توسط گیرنده متناظر با چه موقعیتی از چشمهٔ صوتی روی دایره است؟

آ۲- بسامد بیشینه، $f_{\max}$، و بسامد کمینه، $f_{\min}$، دریافت شده توسط گیرنده را بر حسب f، v و c به دست آورید.

آ۳- با اشاره به ویژگی مشخصی از نمودارهای شکل۲ معین کنید که آیا ممکن است هر دو گیرندهٔ ۱ و ۲ خارج از دایره باشند؟

ب) فرض کنید گیرندهٔ D داخل دایره و به فاصلهٔ d از نقطهٔ O، مرکز دایره، باشد ($d \quad R$).

ب۱- در مثلث OSD زاویهٔ ODS را بنامید و بسامد f را بر حسب ، f، v / c، d و R به دست آورید.

ب۲- با رسم شکل نشان دهید بیشینه و کمینهٔ بسامد دریافت شده توسط گیرنده متناظر با چه موقعیتی از چشمهٔ S روی دایره است؟

ب۳- بسامد بیشینه، $f_{\max}$ و بسامد کمینه، $f_{\min}$ را بر حسب f، v / c، d و R به دست آورید.

ب۴- با اشاره به ویژگی مشخصی از نمودارهای شکل ۲ معین کنید که آیا ممکن است هر دو گیرندهٔ ۱ و ۲ داخل دایره باشند؟

پ) با اشاره به ویژگی‌های مشخصی از نمودارهای شکل ۲ و نتایج بخش‌های آ و ب معلوم کنید کدام گیرنده خارج و کدام گیرنده داخل دایره است؟

ت) با توجه به مقادیر عددی نمودارهای شکل ۲ و اندازهٔ سرعت صوت، $c \quad ۳۳۰\,\mathrm{m/s}$، مقدار عددی کمیت‌های زیر را به دست آورید.

ت۱- بسامد، f

ت۲- سرعت چشمه صوتی، v

ت۳- شعاع دایره، R

ت٤- زاویهٔ بین خط واصل مرکز دایره به گیرندهٔ ۱ و شعاع‌های واصل از مرکز دایره به چشمهٔ صوتی در موقعیت‌های $f_{\max}$ و $f_{\min}$ مربوطه.

ت٥- زاویهٔ بین خط واصل مرکز دایره به گیرندهٔ ۲ و شعاع‌های واصل از مرکز دایره به چشمهٔ صوتی در موقعیت‌های $f_{\max}$ و $f_{\min}$ مربوطه.

ت٦- فاصلهٔ گیرندهٔ ۱ از مرکز دایره، $d_۱$

ت۷- فاصلهٔ گیرندهٔ ۲ از مرکز دایره، $d_۲$

ت۸- فاصلهٔ دو گیرنده از یکدیگر، L **(فقط نوشتن روابطی که بتوان از آن‌ها L را به دست آورد کافی است.)**

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

«مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست.» امام خمینی (ره)

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و هفتمین دورهٔ المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: ۰

کد ملی: ۰

نام پدر: ----

نام مدرسه: ----

استان: ----

منطقه: ----

پایه تحصیلی: ----

حوزه: ----

شماره صندلی

....

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱. این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳. پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴. با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵. عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگه به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶. از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و مارک‌ها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸. آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.

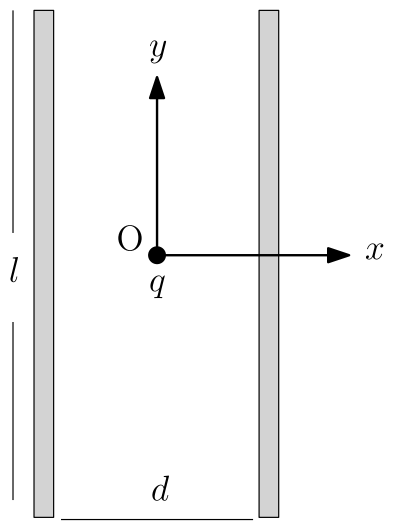
۹. هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

نکات زیر در برخی از مسائل این آزمون به کار می‌رود.

۱) وقتی می‌نویسیم $x \ll y$ منظور این است که x خیلی از y کوچکتر است.

۲) برای $|\epsilon| \ll 1$ و عدد حقیقی a می‌توان نوشت $(1+\epsilon)^a \approx 1 + a\epsilon$.

۳) ثابت گرانش را در همهٔ مسائل $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ بگیرید.



۱) دو صفحهٔ یک خازن به فاصلهٔ d از یکدیگرند و هر صفحه به شکل مربعی با طول ضلع l است ($l \gg d$). خازن در ابتدا بدون بار الکتریکی است. تا قبل از لحظهٔ $t = 0$ ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی آزمون q در مبدأ مختصات دستگاه $x-y$ ساکن است. صفحه‌های خازن نیز در این دستگاه مختصات در $x = \pm\frac{d}{2}$ و مرکز خازن نیز درست در مبدأ مختصات است. پس از لحظهٔ $t = 0$ اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن (راست منهای چپ) $V(t)$ است و صفحه‌ها از حال سکون با شتاب a در جهت مثبت محور y شروع به حرکت می‌کنند. در کل سوال از گرانش صرف‌نظر کنید. پس از لحظهٔ $t = 0$

آ) معین کنید ذره حداکثر در چه مدت زمانی ممکن است با صفحه‌های خازن برخورد کند؟

ب) شتاب ذره را به دست آورید.

پ) اگر $V(t) = V_0 \sin\omega t$ باشد که در آن V_0 و ω کمیت‌های ثابتی هستند، مکان لحظه‌ای ذره به صورت $x(t) = At + B\sin\omega t$ به دست می‌آید. مقادیر A و B را به دست آورید.

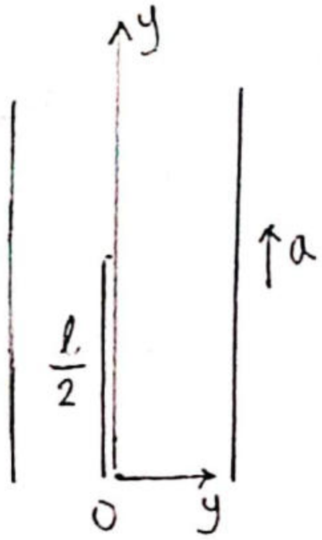
از این به بعد $V(t)$ را به صورت $V(t) = V_0 \sin\omega t$ در نظر بگیرید.

ت) فرض کنید $\omega \gg \sqrt{\frac{a}{l}}$ است. کمترین مقدار بسامد زاویه‌ای، $\omega_{\min}$، چقدر باشد تا ذره به صفحه‌های خازن برخورد نکند؟

ث) فرض کنید $\omega \ll \sqrt{\frac{a}{l}}$ است. بیشترین مقدار بسامد زاویه‌ای، $\omega_{\max}$، چقدر باشد تا ذره به صفحه‌های خازن برخورد نکند؟

توجه: برای $|\epsilon| \ll 1$ می‌توان نوشت $\sin\epsilon \approx \epsilon - \epsilon^3/6$.

مسئله ۱



آ) در مدتی که لبه‌ی پایین صفحه‌های خازن از محور x عبور می‌کند حداکثر زمانی است که امکان برخورد ذره با صفحه‌ها وجود دارد. پس

$$\frac{l}{2} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t_{max} = \sqrt{\frac{l}{a}}$$

ب) میدان در جهت ‎-x‎ است:

$$ma_x = -qE$$

$$ma_x = -q\frac{v(t)}{d} \Rightarrow a_x = -\frac{qv(t)}{md}$$

پ)

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x(t) = A + B\omega\cos\omega t$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x(t) = -B\omega^2\sin\omega t$$

بنابراین

در نتیجه $-\frac{q}{md}v_0\sin\omega t = -B\omega^2\sin\omega t$

$$B = \frac{qv_0}{m\omega^2 d}$$

در لحظه‌ی $t=0$ ، $v_{x(0)}=0$ است. پس

و $A + B\omega = 0$

$$A = \frac{-qv_0}{m\omega d} \Rightarrow x = \frac{qv_0}{m\omega d}\left(-t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

ت) برای این که ذره به خازن برخورد نکند باید $x(t=t_{max}) > -\frac{d}{2}$.

$\frac{qv_0}{m\omega d}\left(-t_{max} + \frac{1}{\omega}\sin\omega t_{max}\right) > -\frac{d}{2}$. از آنجایی که $t_{max} \gg \frac{1}{\omega}$ است

پس باید

$\frac{qv_0}{m\omega d}t_{max} < \frac{d}{2}$ و $\frac{2qv_0 t_{max}}{md^2} < \omega$

و لذا

$$\omega_{min} = \frac{2qv_0}{md^2}\sqrt{\frac{l}{a}}$$

ث) باید $\frac{qV_0}{m\omega d}\left(-t_{max}+\frac{1}{\omega}\sin\omega t_{max}\right)>-\frac{d}{2}$

این بار $\omega t_{max} \ll 1$ است. در نتیجه

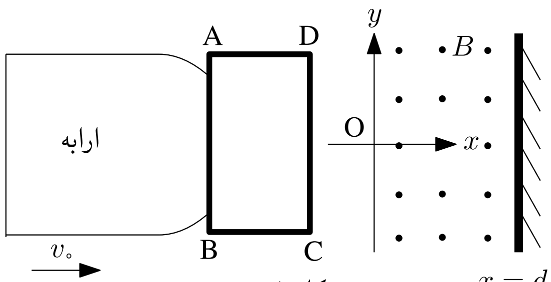
$$\sin\omega t_{max} \approx \omega t_{max} - \frac{1}{6}(\omega t_{max})^3$$

بنابراین

$$\frac{qV_0}{m\omega d}\left(\frac{1}{6}\omega^2 t_{max}^3\right) < \frac{d}{2}$$

$$\omega < \frac{3md^2}{qV_0 t_{max}^3}$$

$$\omega_{max} = \frac{3md^2}{qV_0}\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$



شکل ۱

۲) در شکل ۱ تصویر ارابهٔ متحرکی از بالا نشان داده شده است که با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ به سمت راست در حرکت است. در پیشخوان این ارابه حلقهٔ رسانای مستطیل شکل ABCD به مقاومت الکتریکی R قرار دارد. جرم کل ارابه و حلقه m است. در لحظهٔ $t = \circ$ ضلع DC وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان مغناطیسی ثابت B عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت بیرون وجود دارد. فرض کنید $\mathrm{AB} = w$ و $\mathrm{AD} = h$.

در دستگاه مختصات نشان داده شده میدان مغناطیسی در فاصلهٔ $\circ < x < d$ برقرار است به طوری که $d > h$. در محل $x = d$ دیوار محکمی قرار دارد. شرایط مسئله طوری است که دستگاه قبل از رسیدن به دیوار متوقف می‌شود. مکان ضلع DC نسبت به مبدأ O، سرعت و شتاب لحظه‌ای دستگاه در لحظهٔ دلخواه $t > \circ$ را به ترتیب x، v و a بگیرید.

آ) شتاب ارابه را بر حسب x، v و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

ب) برای به دست آوردن جواب معادلهٔ قسمت آ، فرض کنید رابطهٔ سرعت و مکان تابعی به صورت زیر است

$$v(x) = \alpha x^۳ + \beta x^۲ + \gamma x + \lambda$$

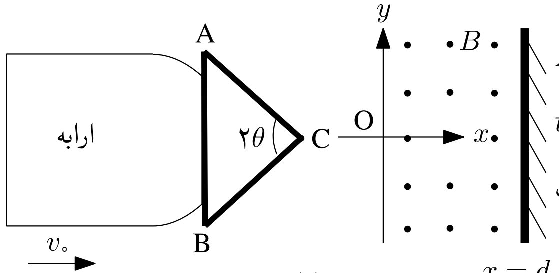
ثابت‌های α، β، γ و λ را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

(**یادآوری تعریف سرعت و شتاب:** سرعت ارابه از رابطهٔ $v = \frac{dx}{dt}$ به دست می‌آید که به معنی مشتق مکان x نسبت به زمان t است. همچنین شتاب از رابطهٔ $a = \frac{dv}{dt}$ به دست می‌آید که به معنی مشتق سرعت v نسبت به زمان t است.)

(**یادآوری قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای:** اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبهٔ خود تابعی از متغیر s باشد، مشتق f نسبت به s از رابطهٔ $\frac{df}{ds} = \frac{df}{du}\frac{du}{ds}$ به دست می‌آید.)

پ) به ازای چه مقداری از x سرعت دستگاه نصف می‌شود؟

ت) بیشینهٔ $v_\circ$ برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟



شکل ۲

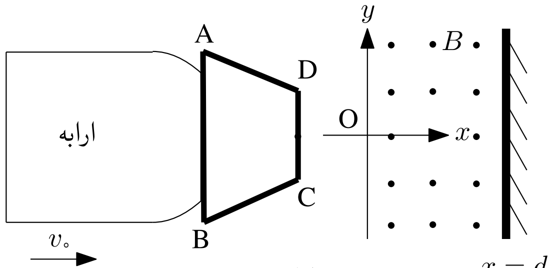
مشابه مسئلهٔ فوق دستگاهی مطابق شکل ۲ که در آن مثلث متساوی‌الساقین ABC به جای مستطیل ABCD شکل ۱ قرار داده شده، در نظر بگیرید. در لحظهٔ $t = 0$ رأس C به نقطهٔ $x = 0$ می‌رسد. زاویهٔ رأس C از مثلث را 2θ بگیرید. ارتفاع مثلث h است که از d کوچکتر است.

ث) برای $t > 0$ شتاب ارابه، a، را بر حسب x مکان نقطهٔ C نسبت به مبدأ O، سرعت لحظه‌ای دستگاه، v، و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

ج) برای $t > 0$ تابع $v(x)$ را همان تابع داده شده در بخش ب بگیرید و ضرایب ثابت α، β، γ و λ را بر حسب داده‌های مسئله تعیین کنید.

چ) به ازای چه مقداری از x سرعت دستگاه نصف می‌شود؟

ح) بیشینهٔ v_0 برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟



شکل ۳

مشابه مسئلهٔ فوق دستگاهی مطابق شکل ۳ که در آن ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD به جای مستطیل ABCD شکل ۱ قرار داده شده، در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathrm{CD} = l$ و ارتفاع ذوزنقه h است که از d کوچکتر است. زاویهٔ ساق‌های ذوزنقه با محور x را θ بگیرید. در لحظهٔ $t = 0$ ضلع CD به نقطهٔ $x = 0$ می‌رسد.

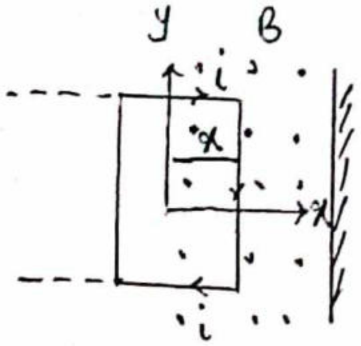
خ) برای $t > 0$ شتاب ارابه، a، را بر حسب x مکان ضلع DC نسبت به مبدأ O، سرعت لحظه‌ای دستگاه، v، و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

د) $v(x)$ را برای $t > 0$ همان تابع داده شده در بخش ب بگیرید و ضرایب ثابت α، β، γ و λ را تعیین کنید.

ذ) بیشینهٔ v_0 برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟

مسئله ۲

الف)



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = xWB$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{vWB}{R}$$

$$F = -iWB$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{W^2B^2}{R}v \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -\frac{W^2B^2v}{mR}$$

ب) اما سرعت لحظه‌ای $v(t)$ و مکان لحظه‌ای ضلع CD یعنی $x(t)$ با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای به هم مربوط‌اند

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

بنابراین

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{W^2B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\frac{dv}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

یعنی باید $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ و $\gamma = \frac{-W^2B^2}{mR}$ باشد. پس

$$v(x) = \frac{-W^2B^2}{mR}x + \lambda$$

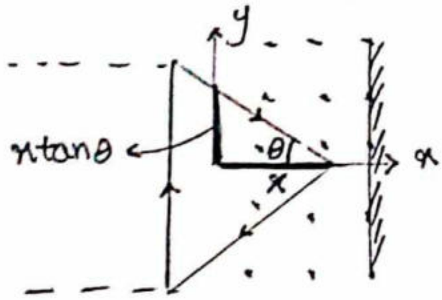
به‌ازای $x = 0$ باید $v(0) = v_0$ باشد پس $\lambda = v_0$.

$$v(x) = v_0 - \frac{W^2B^2}{mR}x$$

پ) $x = \frac{mRv_0}{2W^2B^2}$

ت) باید به‌ازای $x = h$ ، $v(h) = 0$ $\Leftarrow$ $v_{0max} = \frac{W^2B^2}{mR}h$

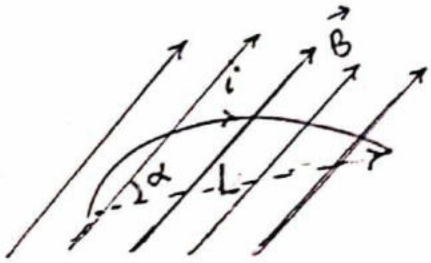
ث)



$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(x)(2x\tan\theta)B$$

$$i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{2xBv\tan\theta}{R}$$



در یک میدان مغناطیسی یکنواخت نیروی وارد بر یک سیم خمیده مطابق شکل، $F = iLB\sin\alpha$ است.

بنابراین برای مثلث فوق $F = -i(2x\tan\theta)B$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2 v}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2 v}{mR}$$

ج) مانند قسمت ت: بنابراین $a = v\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$\alpha = -\dfrac{4}{3}\dfrac{B^2\tan^2\theta}{mR}$ ، $\beta = 0$ ، $\gamma = 0$ ، $\lambda = v_0$

$$v(x) = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}x^3 + v_0$$

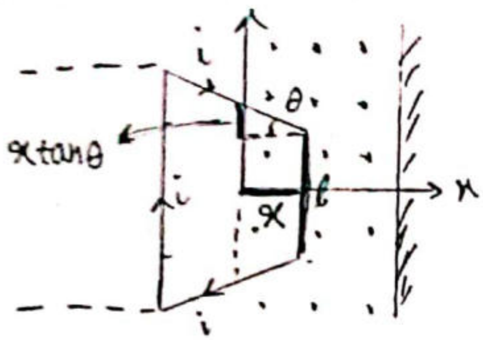
چ)

$$x = \left(\frac{3\, mR v_0}{8\, B^2\tan^2\theta}\right)^{1/3}$$

ح) باید به ازای $x = h$، $v(h) = 0$ باشد $\Leftarrow$

$$v_{0\,max} = \frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}h^3$$

ج)



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = [\ell + (\ell + 2x\tan\theta)]\frac{x}{2}B$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = (\ell + 2x\tan\theta)\frac{vB}{R}$$

$$F = -i\,(\ell + 2x\tan\theta)B$$

$$m\frac{dv}{dt} = -(\ell + 2x\tan\theta)^2\frac{vB^2}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -\frac{(\ell+2x\tan\theta)^2B^2v}{mR}$$

د)

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{(\ell+2x\tan\theta)^2B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\alpha = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}$$

$$\beta = -2\frac{B^2\ell\tan\theta}{mR}$$

$$\gamma = \frac{-B^2\ell^2}{mR}$$

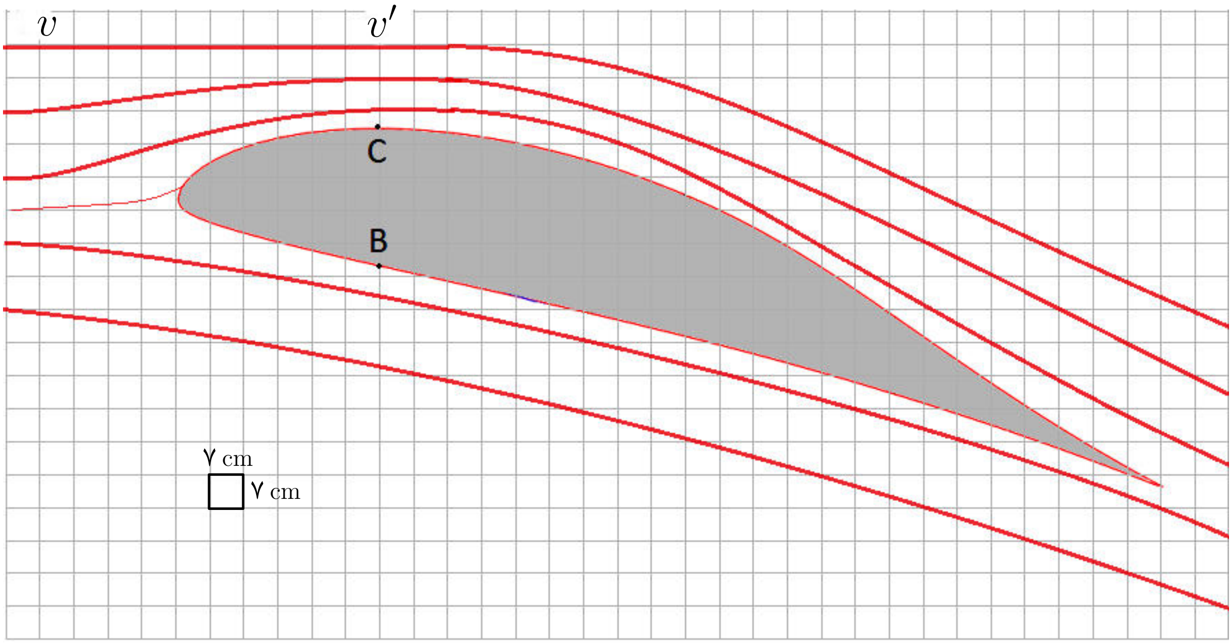
$$\lambda = v_0$$

$$\Rightarrow v(x) = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}x^3 - 2\frac{B^2\ell\tan\theta}{mR}x^2 + -\frac{B^2\ell^2}{mR}x + v_0$$

ه) به ازای $x = h$ باید $v(h) = 0$ باشد

$$v_{0\,max} = \frac{B^2}{mR}\left(\frac{4}{3}\tan^2\theta\, h^3 + 2\tan\theta\,\ell h^2 + \ell^2 h\right)$$

۳) هوابُرد (Airfoil) اصطلاحی است که به شکل هندسی سطح مقطع بال هواپیما نسبت می‌دهند. شکل ۱ نشان دهنده نوعی هوابُرد است. با گذر هوا از بالا و پایین بال و تغییر جهت و اندازه سرعت هوای عبوری، نیرویی رو به بالا و عقب، به بال هواپیما وارد می‌شود. در این مسئله قصد داریم با مدل‌سازی گفته شده در صورت سوال، نیروی رو به بالای وارد شده به بال هواپیما را به دست آوریم.



شکل ۱: هوابرد (مقطع بال هواپیما)، در این شکل طول هر ضلع مربع ۷ cm است .

طبق اصل برنولی برای شاره‌ای تراکم‌ناپذیر (با چگالی ثابت) و بدون اصطکاک که به صورت لایه‌ای و پایا حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد. ارتباط بین فشار هر نقطه، P، و تندی شاره در همان نقطه، v، در مسیر جریان به صورت زیر خواهد بود

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{ثابت}$$

که در آن ρ چگالی شاره، y ارتفاع و g شتاب گرانش زمین است. در تمام مسئله هوای پیرامون هوابُرد را شارهٔ تراکم‌ناپذیر فرض کنید.

برای بالابری هواپیما دو نیروی موثر وجود دارد، که یکی نیروی ناشی از اصل برنولی و دیگری نیروی ناشی از تغییر جهت سرعت هوا در ابتدا و انتهای هوابُرد است. از اثرات تلاطمی هوا در انتهای بال‌ها صرف نظر کنید.

طراحی هوابُرد چنان است که تندی هوا روی بال بیشتر شده و فشار آن کاهش یابد، در حالی که زیر بال تندی هوا تغییر چندانی ندارد و در این مسئله قابل چشم‌پوشی است. مسئله را از دید فردی که داخل هواپیما نشسته است در نظر بگیرید.

در پاسخ تمام قسمت‌های مسئله ابتدا رابطهٔ پارامتری مربوطه را به دست آورید و سپس عددگذاری آن را انجام دهید.

آ) با توجه به خطوط جریان رسم شده در شکل ۱ اگر تندی هوا نسبت به هواپیما قبل از رسیدن به هوابُرد، v، باشد، تندی هوا بالای نقطهٔ C که در شکل مشخص شده است، v'، چقدر خواهد بود؟

ب) با توجه به شکل ۱ و مقیاس آن و با فرض آن که چگالی هوا هنگام برخاستن هواپیما $\rho = ۱/۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$ باشد، اندازهٔ اثر $\rho g y$ یعنی مقدار تفاوت آن بین بالاترین و پایین‌ترین نقطهٔ هوابُرد چقدر است؟

با توجه به کوچکی مقدار به دست آمده در قسمت ب در ادامهٔ مسئله از اثر جملهٔ $\rho g y$ چشم‌پوشی می‌کنیم.

پ) اندازهٔ سرعت هوا نسبت به هواپیما هنگام برخاستن $v = ۲۱۶\ \mathrm{km/h}$ است. تفاوت فشار هوا روی بال در نقطهٔ C با فشار زیر بال در نقطهٔ B، $\Delta P_{\mathrm{BC}} = P_{\mathrm{C}} - P_{\mathrm{B}}$ چقدر است؟

در ادامهٔ مسئله فرض کنید اثر نیروی برنولی طوری است که اگر هر یک از دو بال هواپیما را به شکل یک مستطیل افقی به طول $l = ۲۰/۰\ \mathrm{m}$ و عرض $w = ۲/۰\ \mathrm{m}$ بگیریم اختلاف فشار متوسط رو و زیر آن معادل $\frac{۲}{۳}\Delta P_{\mathrm{BC}}$ است .

ت) نیروی برنولی بالابر وارد بر این هواپیما در هنگام برخاستن، $F_۱$، چقدر است؟

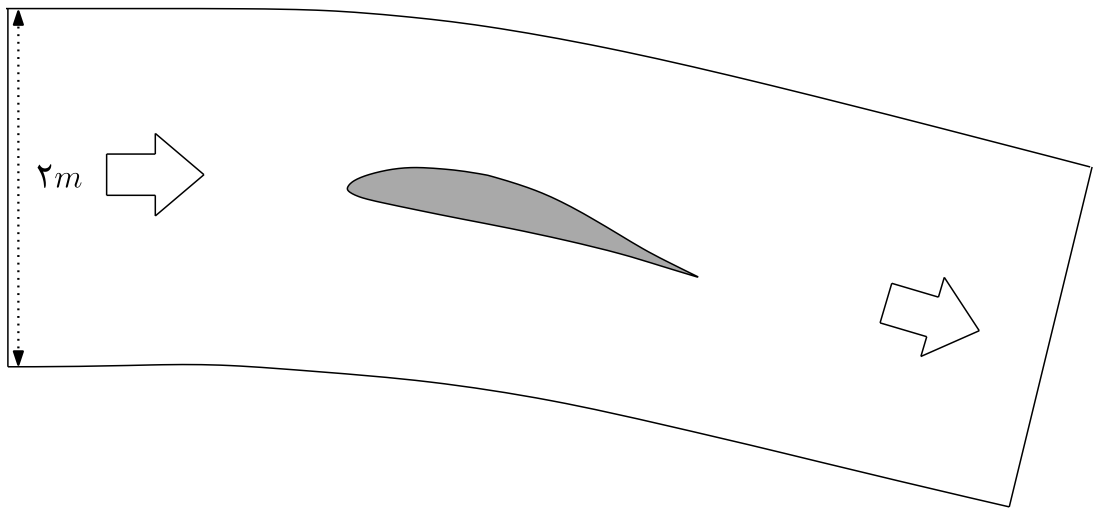
نیروی دیگری هم به دلیل تغییر تکانهٔ هوای عبوری، به بال‌ها وارد می‌شود. این نیرو مانند شکل ۲ معادل تغییر تکانهٔ یک لایه از هوا به ضخامت $h = ۲/۰\ \mathrm{m}$ و طول $۲l = ۴۰/۰\ \mathrm{m}$ است که قبل و بعد از هوابُرد به اندازهٔ $\theta = ۱۴/۵^\circ$ تغییر جهت می‌دهد ولی اندازهٔ سرعت هوا تغییر نمی‌کند. $\sin(۱۴/۵^\circ) = ۰/۲۵۰$.

ث) آهنگ شارش جرمی هوای عبوری (جرم هوای عبوری در واحد زمان) را برای این لایه برحسب اندازه سرعت، v، و چگالی هوا، ρ، به دست آورید.

ج) اندازهٔ نیروی ناشی از تغییر تکانهٔ هوا که هنگام برخاستن به هواپیما وارد می‌شود، $F_۲$، را به دست آورید.

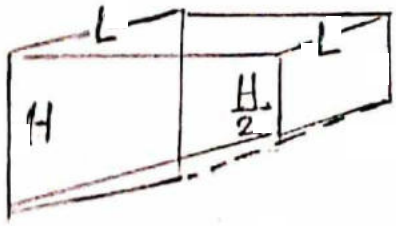
چ) حداکثر جرم این هواپیما چقدر باشد تا با شرایط فوق بتواند از روی زمین بلند شود؟

ح) فرض کنید جرم این هواپیما همان جرم به دست آمده در قسمت چ است و حداکثر سرعت این هواپیما در تمامی ارتفاع‌ها برابر $v_{\mathrm{m}} = ۷۲۰\,\mathrm{km/h}$ است، همچنین شکل و زاویه بال تغییر نمی‌کند. با افزایش ارتفاع چگالی هوا کاهش می‌یابد و این کاهش باعث محدودیت ارتفاع می‌شود. کمترین چگالی هوا که این هواپیما بتواند با فرض‌های فوق و در ارتفاع ثابت حرکت کند را محاسبه کنید.



شکل ۲: تغییر تکانهٔ هوای عبوری

مسئله ۳



$$A v = A' v'$$

الف) چگالی هوا را ثابت فرض کرده‌ایم ، بنابراین

$$A v = A' v' \Rightarrow L H v = L \cdot \frac{H}{2} v'$$

بنابراین $v' = 2v$

ب) $\Delta P = \rho g y$

که y فاصله عمودی بین بالا و پایین لایه هوا است. مطابق شکل ۱ :

$$y \simeq 10\,(7\,cm) = 70\,cm \Rightarrow \Delta P = (1\ kg/m^3)(10\ m/s^2)(0.7\ m)$$

$$\Delta P = 7\ Pa$$

پ) با صرف نظر از جمله $\rho g y$ ،

$$\Delta P_{BC} = \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho v'^2$$

$$= -\frac{3}{2}\rho v^2 = \frac{-3}{2}(1\ kg/m^3)(60\ m/s)^2$$

$$\Delta P_{BC} = -5400\ Pa$$

ت)

$$F_1 = \frac{2}{3}|\Delta P_{BC}|\,(lw)\,2$$

$$= \frac{2}{3}(5400\ Pa)(40\ m^2)\times 2$$

ث)

$$F_1 = 288000\ N$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v = \rho(2lh)v = (1\ kg/m^3)(40\ m)(2\ m)(60\ m/s)$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4800\ kg/s$$

ج)

$$F_2 = \frac{\text{تغییر تکانه هوا}}{\Delta t} = \frac{\Delta m\, v \sin\theta}{\Delta t} = (4800\ kg/s)(60\ m/s)(0.25)$$

$$F_2 = 72000\ N$$

چ)

$$F_1 + F_2 = mg \Rightarrow m = 36000\ kg$$

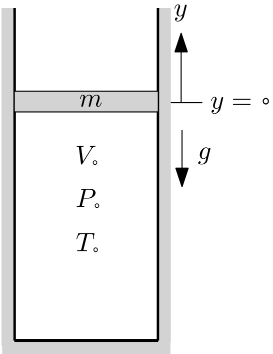
ح)

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\rho' v_m^2\right)(2lw) + \rho' v_m^2 (2lh)\sin\theta = mg$$

$$\rho' = \frac{mg}{v_m^2 (2l)(w + h\sin\theta)} = \frac{360\,000}{(200)^2(40)(2 + 2(0.25))}$$

$$\rho' = 0.09\ kg/m^3$$

۴) مطابق شکل ۱ پیستونی به جرم m می‌تواند داخل استوانهٔ ته‌بسته‌ای به سطح مقطع A بدون اصطکاک حرکت کند. درون استوانه گازی آرمانی محبوس است که در حالت تعادل پیستون، حجم آن V_0، فشار آن P_0 و دمای آن T_0 است. در این حالت، نقطهٔ وسط پیستون را $y = 0$ بگیرید. دستگاه با محیط خارج تبادل گرما ندارد. لازم به اطلاع است که در طی تحول بی‌دررو گاز آرمانی کمیت PV^γ ثابت می‌ماند که در آن ثابت γ ضریب اتمیسیتهٔ گاز نامیده می‌شود. پیستون را اندکی از حالت تعادل منحرف و رها می‌کنیم.



شکل ۱

آ) اگر پیستون به اندازهٔ y از حالت تعادل منحرف شود فشار، P، حجم، V، و دمای گاز، T، را بر حسب y، V_0، P_0، T_0 و سایر ثابت‌های داده شده به دست آورید.

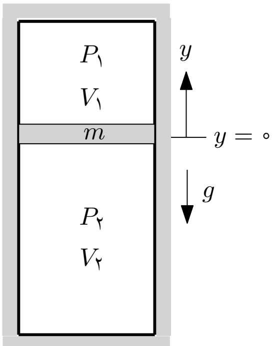
ب) برای y کوچک مقدار تقریبی کمیت $P - P_0$ را تا مرتبهٔ اول (توان یک) y به دست آورید.

حال پیستون را از حالت تعادل خود به اندازهٔ کوچک y_0 منحرف و رها می‌کنیم.

پ) معادلهٔ حرکت پیستون را بنویسید و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ حرکت جرم و فنر، بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب ثابت‌های داده شده به دست آورید.

ت) فرض کنید سرعت پیستون هنگام عبور نقطهٔ وسط آن از نقطهٔ $y = 0$ برابر با v_0 باشد. ضریب فنر معادل این دستگاه را بر حسب y_0، v_0 و m به دست آورید.

اکنون یک استوانهٔ دو سربسته مطابق شکل ۲ در نظر بگیرید که پیستونی به جرم m می‌تواند بدون اصطکاک داخل آن حرکت کند. در وضعیت تعادل پیستون، $y = 0$، دمای گاز دو طرف یکسان و حجم و فشار گاز دو طرف به ترتیب V_1، V_2، P_1 و P_2 است. گاز دو طرف پیستون آرمانی و دارای ضریب اتمیسیته γ است. گازها با محیط خارج و با یکدیگر تبادل گرما ندارند. سطح مقطع پیستون را A بگیرید.



شکل ۲

ث) پیستون را از حالت تعادل خود به اندازهٔ کوچک $y_۰$ منحرف و رها می‌کنیم. نیروی وارد بر پیستون وقتی به اندازهٔ y از حالت تعادل منحرف است را بنویسید و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ حرکت جرم و فنر، بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ج) با فرض این که وزن پیستون $۲/۸۸\ \mathrm{N}$، فشار گاز در محیط اول $P_۱ = ۷۲/۰\ \mathrm{cmHg}$، سطح مقطع پیستون $۴/۰۰\,\mathrm{cm}^۲$ و رابطهٔ بین تعداد ذرات گاز در دو محیط به صورت $\frac{N_۱}{N_۲} = \frac{۱}{۲}$ باشد حساب کنید پیستون در چه ارتفاعی در حالت تعادل‌اش قرار می‌گیرد؟ از ضخامت پیستون چشم‌پوشی کنید و ارتفاع استوانه را $۲۰۹\ \mathrm{cm}$ در نظر بگیرید. چگالی جیوه $\rho_{\mathrm{Hg}} = ۱۳/۶\ \mathrm{g/cm}^۳$ است.

مسئله ٤

آ)

$$V = V_0 + Ay$$

$$P_0V_0^{\gamma} = PV^{\gamma} \Rightarrow P = P_0\left(1+\frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

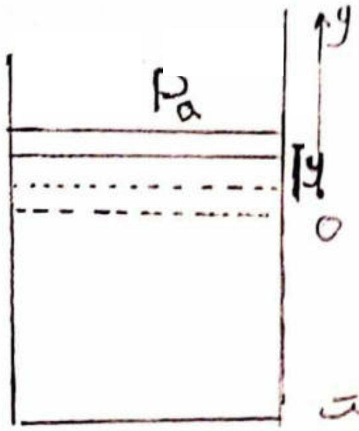
$$P_0V_0 = nRT_0 \quad \text{و} \quad PV = nRT \Rightarrow T = T_0\frac{PV}{P_0V_0}$$

$$T = T_0\left(1+\frac{Ay}{V_0}\right)^{1-\gamma}$$

ب) $\left(1+\frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx 1 - \frac{\gamma Ay}{V_0}$ که برای y ها کوچک درست است. بنابراین

$$P - P_0 \approx -\frac{\gamma A P_0}{V_0}y$$

پ) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالاتر است. نیروی وارد به پیستون $F_y = PA - mg - P_aA$ است که P_a فشار هوای بیرون است.



در حالت تعادل پیستون $P_0A - mg - P_aA = 0$ است

بنابراین

$$F_y = PA - P_0A = ma_y$$

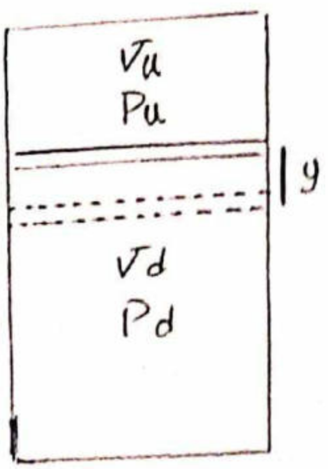
$$ma_y = -\frac{\gamma A^2P_0}{V_0}y$$

این معادله شبیه معادله حرکت یک جرم و فنر به ثابت $k = \frac{\gamma A^2P_0}{V_0}$ است. بنابراین

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2P_0}{mV_0}}$$

ت) $\frac{1}{2}ky_0^2 + \frac{1}{2}m(0)^2 = \frac{1}{2}k(0)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow k = \frac{mv_0^2}{y_0^2}$

ث) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالاتر است.



بالایی $V_u = V_1 - Ay$

پایینی $V_d = V_2 + Ay$

$$P_uV_u^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma} \quad \text{و} \quad P_dV_d^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$$

$$P_u = P_1\left(1-\frac{Ay}{V_1}\right)^{-\gamma} \approx P_1\left(1+\frac{A\gamma y}{V_1}\right)$$

$$P_d = P_2\left(1+\frac{Ay}{V_2}\right)^{-\gamma} \approx P_2\left(1-\frac{A\gamma y}{V_2}\right)$$

$$F_y = P_d A - P_u A - mg$$

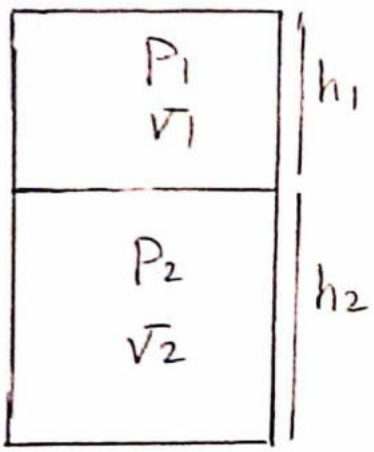
$$ma_y = P_2 A - \frac{P_2\gamma A^2}{V_2}y - P_1 A - \frac{P_1\gamma A^2}{V_1}y - mg$$

در حالت تعادل $P_2 A - P_1 A - mg = 0$ است ولذا

$$ma_y = -\gamma A^2\left(\frac{P_1}{V_1}+\frac{P_2}{V_2}\right)y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2}{m}\left(\frac{P_1}{V_1}+\frac{P_2}{V_2}\right)}$$

ج)



$$P_1 = (13600\ kg/m^3)(10\ m/s^2)(0.72 m)$$

$$P_1 = 97920\ Pa$$

در حالت تعادل پیستون $P_2 A - P_1 A - mg = 0$

در نتیجه

$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{A}$$

$$= 97920\ Pa + \frac{2.88}{4\times10^{-4}}\ Pa$$

$$P_2 = 105120\ Pa$$

$$P_1 V_1 = n_1 RT \qquad V_1 = Ah_1 \qquad , \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$$

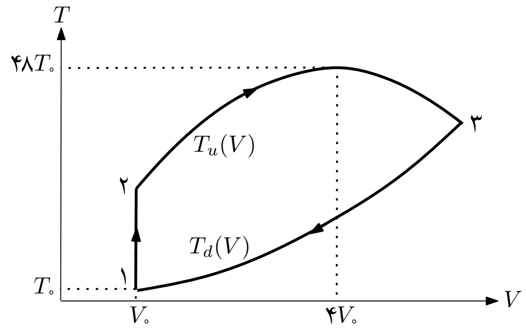
$$P_2 V_2 = n_2 RT \qquad V_2 = Ah_2$$

از تقسیم دو معادله حالت:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{P_1} = \frac{105120}{2(97920)} = \frac{73}{136}$$

از طرفی $h_1 + h_2 = 209 cm$ ، بنابراین

$$h_1 = 73\ cm \quad , \quad h_2 = 136\ cm$$



۵) n مول گاز آرمانی تک‌اتمی چرخهٔ ایستاوار ۱ $\to$ ۳ $\to$ ۲ $\to$ ۱ شکل مقابل را طی می‌کند که در آن کمیت های V_0 و T_0 معلوم‌اند. فرایند ۲ $\to$ ۱ هم حجم است و معادلهٔ فرایندهای ۳ $\to$ ۲ و ۱ $\to$ ۳ به ترتیب با روابط $T_u(V) = aV + bV^2$ و $T_d(V) = cV^2$ داده شده‌اند. بیشینهٔ دمای چرخه $48T_0$ است. یادآوری می‌شود انرژی داخلی n مول گاز آرمانی تک اتمی با دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است که در آن R ثابت گازها است. پاسخ کلیهٔ بخش‌های این مسئله را بر حسب V_0 ، T_0 ، R و n بدهید

آ) با استفاده از نقاط داده شده روی نمودار، ثابت های a، b و c را به دست آورید.

ب) مختصات ترمودینامیکی، (V, P, T)، نقاط ۱ ، ۲ و ۳ نشان داده شده روی نمودار را به دست آورید.

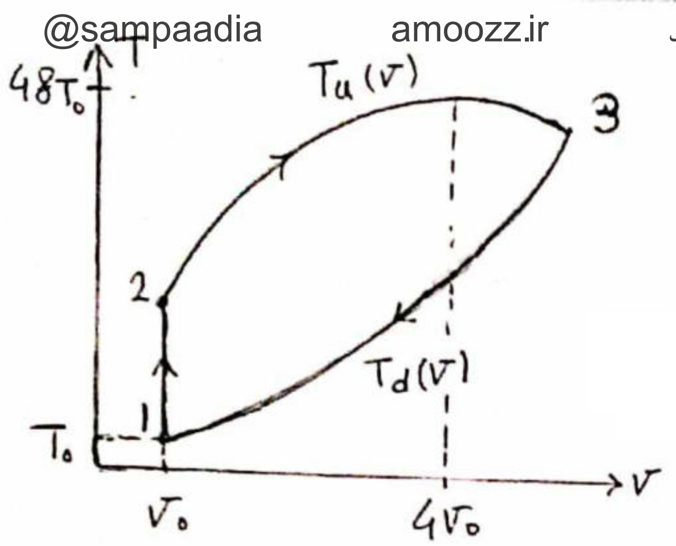
پ) کار محیط روی گاز را در هر یک از فرایندهای ۲ $\to$ ۱ ، ۳ $\to$ ۲ و ۱ $\to$ ۳ به دست آورید.

ت) کار محیط روی گاز در کل چرخه را به دست آورید.

ث) گرمای داده شده به گاز منهای اندازهٔ گرمای گرفته شده از گاز را در هر یک از فرایندهای ۲ $\to$ ۱ ، ۳ $\to$ ۲ و ۱ $\to$ ۳ به دست آورید.

ج) در چرخهٔ بالا گرمای (انرژی) داده شده به چرخه (ماشین) را به دست آورید.

چ) بازدهٔ چرخه را محاسبه کنید.



مسئله ۵

آ) $T_d(V)=cV^2$

$\Downarrow$

$\boxed{c=\frac{T_0}{V_0^2}}$ و $T_0=cV_0^2$

نقطه $(4V_0, 48T_0)$ بیشینهٔ منحنی $T_u(V)=aV+bV^2$ است، در نتیجه

$$\left.\frac{dT_u}{dV}\right|_{(4V_0,48T_0)}=0 \Rightarrow a+2b(4V_0)=0 \Rightarrow \boxed{a=-8bV_0}$$

و نیز $\boxed{48T_0=a(4V_0)+b(4V_0)^2}$

از دو معادله بالا

$$T_d(V)=T_0\frac{V^2}{V_0^2} \quad \text{و} \quad T_u(V)=3T_0\left(\frac{8V}{V_0}-\frac{V^2}{V_0^2}\right)$$

ب) $PV=nRT$

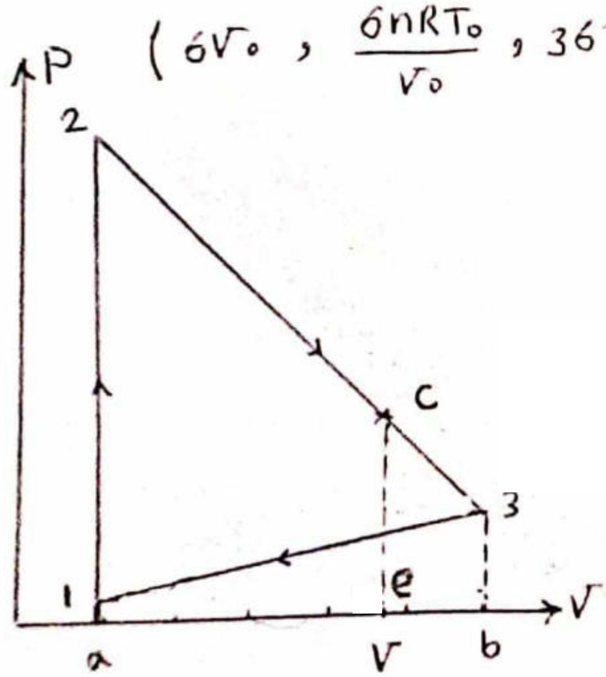
(V, P, T)

$\Downarrow$

نقطه ۱: $\left(V_0, \frac{nRT_0}{V_0}, T_0\right)$

نقطه ۲: $\left(V_0, \frac{21nRT_0}{V_0}, 21T_0\right)$

نقطه ۳: $\left(6V_0, \frac{6nRT_0}{V_0}, 36T_0\right)$ $\Leftarrow T_u(V)=T_d(V)$



پ) نمودار P-V چرخه

$$P_uV=nRT_u \Rightarrow P_u=\frac{3nRT_0}{V_0}\left(8-\frac{V}{V_0}\right)$$

$$P_dV=nRT_d \Rightarrow P_d=\frac{nRT_0}{V_0}\frac{V}{V_0}$$

$$W_{1\to 2}=0$$

$$W_{2\to 3}=-(a23b \text{ مساحت ذوزنقه })$$

$$=-\left(P_2+P_3\right)\left(\frac{V_b-V_a}{2}\right)=-\frac{27nRT_0}{V_0}\left(\frac{5}{2}V_0\right)=-\frac{135}{2}nRT_0$$

$$W_{3\to 1}=(a13b \text{ مساحت ذوزنقه })$$

$$=\left(P_1+P_3\right)\left(\frac{V_b-V_a}{2}\right)=\frac{7nRT_0}{V_0}\left(\frac{5}{2}V_0\right)=\frac{35}{2}nRT_0$$

ت)

$$W_{\text{چرخه}}=W_{1\to 2}+W_{2\to 3}+W_{3\to 1}=-50nRT_0$$

ث) قانون اول ترمودینامیک:

$$Q_{1\to 2}=U(2)-U(1)-W_{1\to 2}$$

$$=\frac{3}{2}nRT_2-\frac{3}{2}nRT_1-W_{1\to 2}=30nRT_0$$

$$Q_{2\to 3}=U(3)-U(2)-W_{2\to 3}$$

$$=\frac{3}{2}nRT_3-\frac{3}{2}nRT_2-W_{2\to 3}=90nRT_0$$

$$Q_{3\to 1}=U(1)-U(3)-W_{3\to 1}$$

$$=\frac{3}{2}nRT_1-\frac{3}{2}nRT_3-W_{3\to 1}=-70nRT_0$$

ج) گرمای داده شده به چرخه $120nRT_0$ نیست، و بلکه:

برای نقطهٔ دلخواهی مانند c به حجم V، فشار $P_u(V)$ و دمای $T_u(V)$

$Q_{2\to c}$ را به دست می‌آوریم:

$$W_{2\to c}=-(a2ce \text{ مساحت ذوزنقه })$$

$$=-\left(P_2+P_c\right)\left(\frac{V_d-V_a}{2}\right)$$

$$=-\left(\frac{21nRT_0}{V_0}+\frac{3nRT_0}{V_0}\left(8-\frac{V}{V_0}\right)\right)\frac{1}{2}\left(V-V_0\right)$$

$$U(c)-U(2)=\frac{3}{2}nRT_u(V)-\frac{3}{2}nRT_2$$

$$U(c)-U(2)=\frac{3}{2}nR\,3T_0\left(\frac{8V}{V_0}-\frac{V^2}{V_0^2}\right)-\frac{3}{2}nR(21T_0)$$

در نتیجه

$$Q_{2\to c}=U(c)-U(2)-W_{2\to c}$$
$$=-6nRT_0\left(\frac{V^2}{V_0^2}-10\frac{V}{V_0}+9\right)$$

$$\frac{dQ_{2\to c}}{dV}=0 \Rightarrow V=5V_0$$

یعنی در فرآیند $2\to 3$ در بخش $2\to c$
گرما به چرخه داده می‌شود و در بخش $3\to c$ از آن گرفته می‌شود

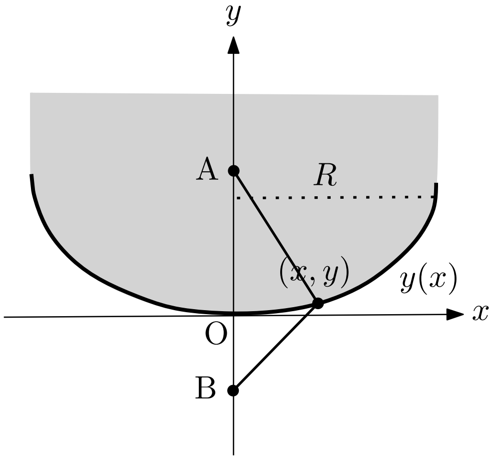
$$Q_{2\to c}\Big|_{V=5V_0}=96\,nRT_0$$

گرمای داده شده به چرخه $96\,nRT_0+30\,nRT_0$ ، یعنی $126\,nRT_0$ است.

د)

$$\text{بازده چرخه}=\frac{|W_{\text{کل}}|}{\text{گرمای داده شده به چرخه}}$$

$$=\frac{50\,nRT_0}{126\,nRT_0}=\frac{25}{63}$$



۶) شکل مقابل مقطعی از یک استوانهٔ شفاف به ضریب شکست n و شعاع R را نشان می‌دهد. این مقطع از محور استوانه، محور y می‌گذرد. مقطع ناحیهٔ انتهایی استوانه با تابع $y(x)$ داده شده است. بیرون این جسم هوا با ضریب شکست یک است. سرعت نور در خلاء (و تقریبا هوا) برابر c است و در یک مادهٔ شفاف با ضریب شکست n برابر c/n است. در این سوال هر جا از مرز نام می‌بریم، منظور ما ناحیهٔ انتهایی استوانهٔ شفاف یا همان منحنی $y(x)$ است.

آ) نقطهٔ A داخل ماده شفاف و نقطهٔ B در فضای پایین و روی محور y قرار دارند و فاصلهٔ آن‌ها تا مبدأ مختصات O به ترتیب a و b است. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا یک پرتو نور از نقطهٔ A به خط مستقیم به نقطهٔ (x, y) روی مرز رفته و از آنجا به خط مستقیم به نقطهٔ B برود؟

طبق اصل فرما در نورشناخت هندسی، پرتو نوری که از یک نقطهٔ ثابت به نقطهٔ ثابت دیگر می‌رود، مسیری را می‌پیماید که زمان لازم برای پیمودن آن، در مقایسه با مسیرهای نزدیک آن، کمینه است (یا تغییری نمی‌کند). چنانچه برای دو نقطهٔ خاص دسته‌ای از مسیرها همگی دارای کوتاهترین زمان باشند شعاع‌های نور ارسال شده از یکی از این نقاط در نقطهٔ دیگر کانونی می‌شوند (جمع می‌شوند).

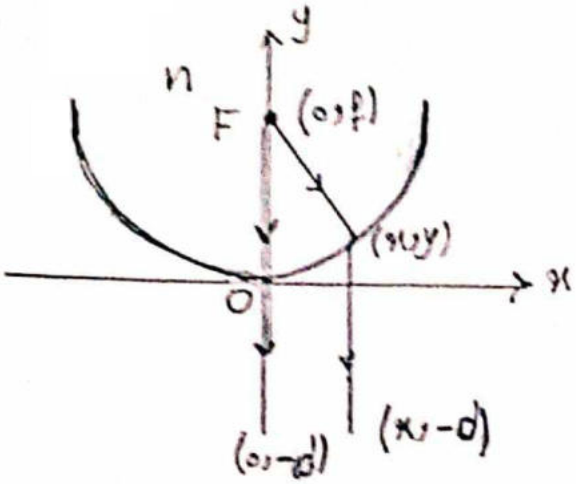
ب) نقطه‌ی F را روی محور y و داخل مادهٔ شفاف به فاصلهٔ f از مبدأ O در نظر بگیرید. تابع $y(x)$ را چنان تعیین کنید که تمام پرتوهای نور تابیده شده از این نقطه به مرز $y(x)$ بعد از خروج از مادهٔ شفاف، موازی محور y باشند.

پ) فرض کنید خاصیت ذکر شده در قسمت ب برای $R > x > ۰$ برقرار است. R را بر حسب n و f به دست آورید.

ت) شکل تقریبی تابع $y(x)$ را برای x های کوچک به دست آورید. به این تقریب، تقریب پیرامحوری می‌گویند.

ث) بر روی محور y نقطهٔ A را داخل ماده شفاف و نقطهٔ B را بیرون مادهٔ شفاف در نظر بگیرید که فاصلهٔ آن‌ها تا مبدأ O به ترتیب a و b باشد. چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا پرتوهای نور تابیده شده از نقطهٔ A به نقاط پیرامون محور با شرط $R \gg x$، همگی در نقطهٔ B کانونی شوند؟

مسئله ۶



آ)

$$\Delta t = \frac{n}{c}\sqrt{x^2+(y-a)^2} + \frac{1}{c}\sqrt{x^2+(y+b)^2}$$

ب) برای این که پرتوها هنگام خروج از مرز موازی باشند باید همزمان به صفحه‌ی دلخواهی مانند $y=-d$ برسند، یعنی مثلاً

$$\Delta t_{(0,f)\to(x,y)\to(x,-d)} = \Delta t_{(0,f)\to(0,0)\to(0,-d)}$$

$$\frac{n}{c}\sqrt{x^2+(f-y)^2} + \frac{1}{c}(y+d) = \frac{n}{c}f + \frac{1}{c}d$$

$$\Downarrow$$

$$n^2\left(x^2+(f-y)^2\right) = (nf-y)^2$$

$$(n^2-1)y^2 - 2nf(n-1)y + n^2x^2 = 0$$

$$y = \frac{n}{n^2-1}\left(f(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2f^2-(n^2-1)x^2}\right)$$

علامت − قابل قبول است چون منحنی باید از $(0,0)$ بگذرد. پس

$$y = \frac{nf}{n+1}\left(1-\sqrt{1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}}\right)$$

پ) باید زیر رادیکال همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی

$$1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{n-1}{n+1}f^2$$

$$x \leq \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,f \Rightarrow x_{max} = R \equiv \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,f$$

ت) برای $\frac{x}{f} \ll 1$

$$\sqrt{1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}$$

در نتیجه

$$y \approx \frac{nf}{n+1}\left(1-1+\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}\right)$$

$$y \approx \frac{1}{2}\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{f}$$

ث) می خواهیم

$$\Delta t_{(0,a)\to(x,y)\to(0,-b)} = \Delta t_{(0,a)\to(0,0)\to(0,-b)}$$

$$\frac{n}{c}\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\frac{1}{c}\sqrt{x^2+(y+b)^2} = \frac{n}{c}a+\frac{1}{c}b$$

$$n\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+y^2+b^2+2by} = na+b$$

داریم $y \approx \frac{1}{2}\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{f}$ که $\frac{x}{f} \ll 1$

$$n\sqrt{x^2+a^2-\frac{n}{n-1}\frac{x^2a}{f}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\frac{x^4}{f^2}} + \sqrt{x^2+b^2+\frac{n}{n-1}\frac{x^2b}{f}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\frac{x^4}{f^2}} = na+b$$

از جملهٔ $\frac{x^4}{f^4}$ در مقابل $\frac{x^2}{f^2}$ صرفنظر می‌کنیم و در نتیجه

$$na\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{af}}+b\sqrt{1+\frac{x^2}{b^2}+\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{bf}} \approx na+b$$

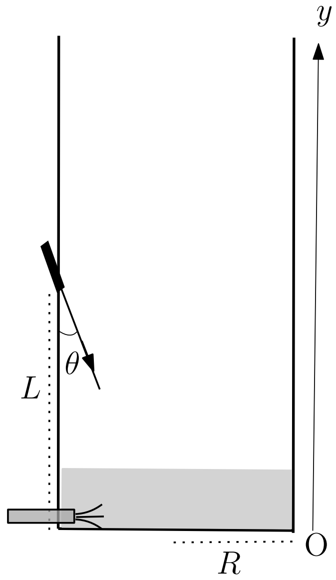
اما $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1+\frac{\epsilon}{2}$ اگر $|\epsilon| \ll 1$. بنابراین

$$na\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{af}\right)\right)+b\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{bf}\right)\right) \approx na+b$$

$$\Downarrow$$

پس از ساده کردن:

$$\frac{n}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{f}$$



۷) یک مخزن استوانه‌ای خالی به شعاع قاعدهٔ R مطابق شکل در نظر بگیرید. کف استوانه آینه و دیواره‌های آن کدر است. آب از لحظهٔ $t = ۰$ به آرامی از طریق لوله‌ای واقع در کف مخزن وارد آن می‌شود. سطح آب همواره افقی است و با سرعت ثابت $v_۰$ در راستای قائم بالا می‌آید. ضریب شکست آب n و ضریب شکست هوا یک است. در ارتفاع L روی سطح جانبی مخزن یک چشمهٔ نور قرار داده شده که می‌تواند باریکه‌ای از نور را تحت زاویه θ با امتداد قائم به سمت کف مخزن گسیل کند به طوری که $\tan\theta < R/L$ و $\sin\theta < ۱/n$. پرتو نور گسیل شده وارد آب می‌شود و پس از انعکاس از آینهٔ واقع در کف مخزن از آب خارج می‌شود. سپس به نقطه‌ای واقع بر سطح جانبی مخزن می‌تابد و نقطه‌ای روشن ایجاد می‌کند. کلیهٔ پرتوها را در صفحهٔ شکل در نظر بگیرید. در این مسئله بازتاب داخلی کلی نداریم و از بازتاب نور از سطح آب صرف‌نظر می‌کنیم.

آ) در بازهٔ زمانی $۰ < t < L/v_۰$ مکان لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $y(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ب) در بازهٔ زمانی $۰ < t < L/v_۰$ سرعت لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $v(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

پ) در بازهٔ زمانی $t > L/v_۰$ مکان لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $y(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

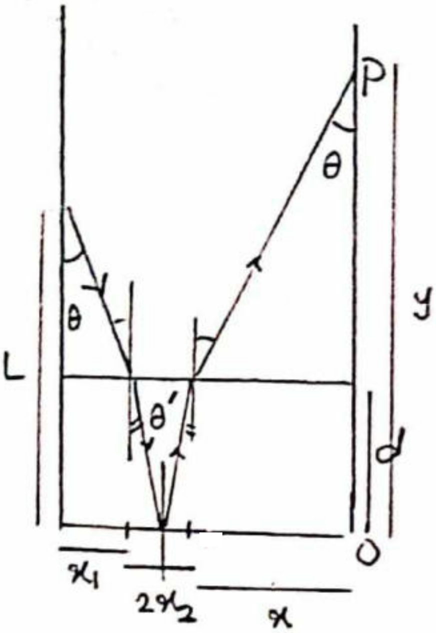
ت) در بازهٔ زمانی $t > L/v_۰$ سرعت لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $v(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ث) به ازای مقادیر عددی $L = R = ۲۴/۰\ \mathrm{cm}$، $\theta = ۳۰^\circ$، $n = ۱/۳۰$، و $v_۰ = ۰/۱۲۰\ \mathrm{cm/s}$ در بازهٔ زمانی $۰ < t < ۶۰۰\ \mathrm{s}$ کمیت‌های $y(t)$ و $v(t)$ را بر حسب t به دست آورید. بیشینهٔ کمیت‌های $y(t)$ و $v(t)$ یعنی $y_{\max}$ و $v_{\max}$ چقدر است؟
$\sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$

ج) نمودار مکان، $(y/y_{\max})$، و سرعت لحظه‌ای، $(v/v_{\max})$، نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه بر حسب زمان را در کاغذ مدرج موجود در پاسخ‌نامه رسم کنید.

مسئله ۷

در بازه زمانی $0<t<L/v_0$



۱) در لحظه t ، $d=v_0t$ است

مطابق شکل : $OP=y$ و $y=d+x\cot\theta$

که $x_1+2x_2+x=2R$

و $x_1=(L-d)\tan\theta$

$x_2=d\tan\theta'$

و طبق قانون اسنل $\sin\theta=n\sin\theta'$

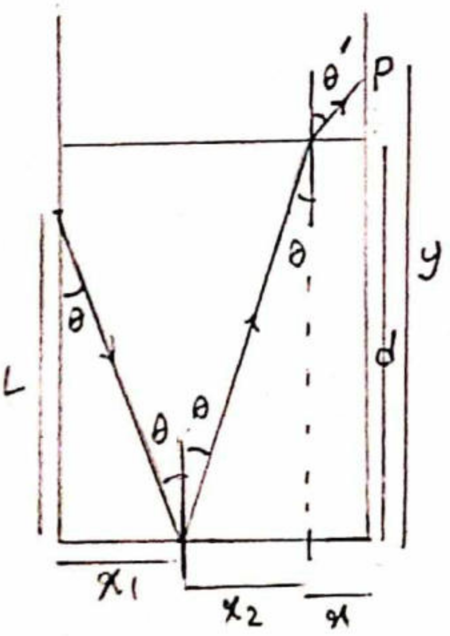
$$1+\cot^2\theta'=\frac{1}{\sin^2\theta'} \Rightarrow \tan\theta'=\frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

$$y=d+\left(2R-(L-d)\tan\theta-2d\frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)\cot\theta$$

$$y=2d-L+2R\cot\theta-2d\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

$$y(t)=2R\cot\theta-L+2v_0t\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)$$

ب) $$v(t)=2v_0\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)$$



پ) در لحظه t که $d=v_0t$ ، $\frac{L}{v_0}<t<t_0$

است و $y=d+x\cot\theta'$

که $x_1+x_2+x=2R$

$x_1=L\tan\theta$

$x_2=d\tan\theta$

و طبق قانون اسنل $n\sin\theta=\sin\theta'$

t_0 زمانی است که $x=0$ می‌شود.

$$1+\cot^2\theta' = \frac{1}{\sin^2\theta'} \Rightarrow \cot\theta' = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta}$$

$$y = d + (2R - L\tan\theta - d\tan\theta)\cot\theta'$$

$$y = (2R - L\tan\theta)\cot\theta' + d(1-\tan\theta\cot\theta')$$

$$y(t) = (2R - L\tan\theta)\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta} + v_0 t\left(1-\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

این جواب برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$ درست است که $x(t)\Big|_{t=t_0} = 0$

$$2R - L\tan\theta - v_0 t_0 \tan\theta = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{v_0}(2R\cot\theta - L)$$

برای $t > t_0$ نقطهٔ P روی دیواره استوانه جابجا نمی‌شود و

$$y(t) = (2R - L\tan\theta)\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta} + v_0 t_0\left(1-\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

$$y(t) = 2R\cot\theta - L$$

ج) برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$

$$v(t) = v_0\left(1-\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

و برای $t > t_0$:

$$v(t) = 0$$

ث) برای $0 < t < 200s$

برحسب cm: $y(t) = (2(1.73)-1)24.0 + 2(0.120)t\left(1-\frac{1.73}{2(1.20)}\right)$

$$y(t) = (59.0 + 0.067\,t)\ \text{cm}$$

برحسب $\frac{cm}{s}$: $v(t) = 2(0.120)\left(1-\frac{1.73}{2(1.20)}\right) = 0.067\ m/s$

$$t_0 = \frac{1}{0.12}\left(2(1.73)-1\right) 24.0 = 492\,s$$

برای $200s < t < 492s$

$$y(t) = \left(2 - \frac{1.73}{3}\right) 24.0 \frac{\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(0.5)} + 0.120\,t\left(1 - \frac{2\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(1.73)}\right)$$

به ازای $|\epsilon|<1$ $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1-\frac{\epsilon}{2}$ بنابراین $\sqrt{1-0.4225} \approx 0.789$

$$y(t) \approx 41.5 + 0.036t$$

بین 38 تا 42 قبول است

بین 0.033 تا 0.039 قبول است.

برای $492s < t < 600s$

$$y(t) = \left(2(1.73)-1\right) 24.0 = 59.0\ cm$$

$$v(t) = 0$$

ج)

$y_{max} = 59.0 + 0.067(200) = 72.4\ cm$ ، $v_{max} = 0.067\ cm/s$

بنابراین :

برای $0 < t < 200s$: $59.0\,cm < y < 72.4\,cm$ و $0.8 < \frac{y}{y_{max}} < 1$

برای $200s < t < 492s$: $48.7\,cm < y < 59.0\,cm$ و $0.7 < \frac{y}{y_{max}} < 0.8$

بین 44 تا 50 قبول است

بین 54 تا 61 قبول است.

بین 0.60 تا 0.70 قبول است

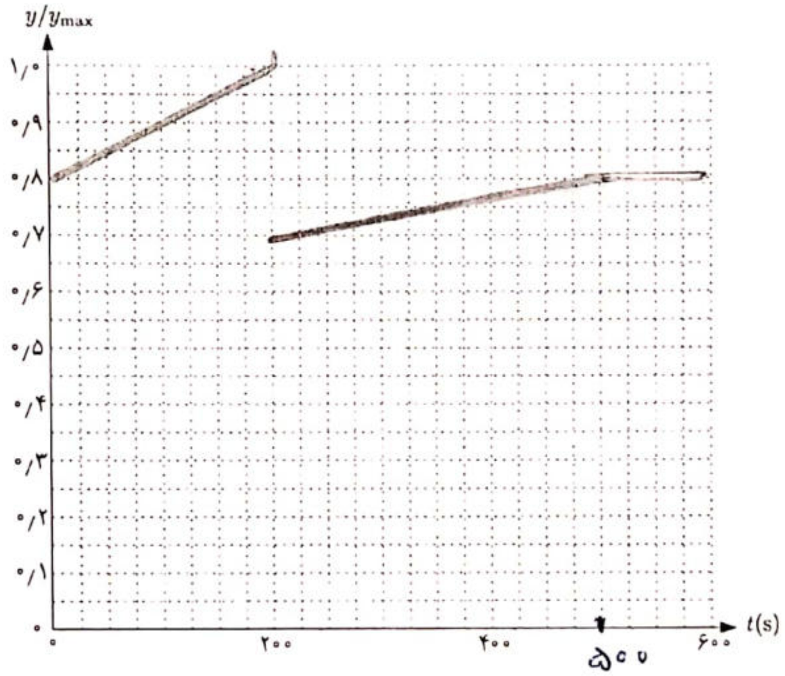
بین 0.75 تا 0.85 قبول است

برای $0 < t < 200$ $\frac{v}{v_{max}} = 1$

برای $200s < t < 492s$ $\frac{v}{v_{max}} \approx 0.54$

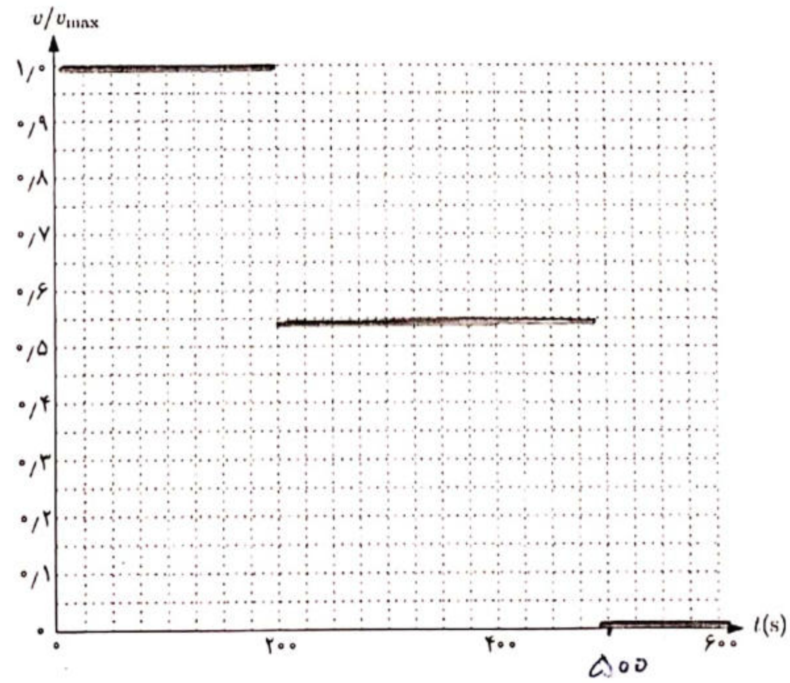
بین 0.5 تا 0.6 قبول است

$$\begin{cases} 0 < t < 200\,s \\ 0.8 < \dfrac{y}{y_{max}} < 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 200\,s < t < 492\,s \\ 0.7 < \dfrac{y}{y_{max}} < 0.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 492\,s \\ \dfrac{y}{y_{max}} = 0.8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 < t < 200\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 200\,s < t < 492\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} \approx 0.54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 492\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} = 0 \end{cases}$$

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

وزارت آموزش و پرورش سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۸ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و ششمین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۲/۱۰ – ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: ۰
کد ملی: ۰
نام پدر: ----
نام مدرسه: ----
استان: ----
منطقه: ----
پایه تحصیلی: ----
حوزه: ----

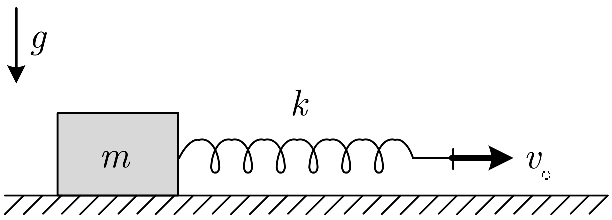
شماره صندلی
۰۰۰۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱. این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
۲. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
۳. پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
۴. با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
۵. عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۶. از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۷. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۸. آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.
۹. هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱

۱) جعبه‌ای به جرم m روی یک سطح افقی ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به ترتیب μ_s و μ_k است ($\mu_s > \mu_k$). یک سر فنری با ثابت k به سمت راست جعبه متصل است و در ابتدا با طول آزاد به طور افقی نگه داشته شده است. سر آزاد فنر را طوری می‌کشیم که همواره این سر فنر با سرعت ثابت v_0 حرکت کند. جرم فنر ناچیز و شتاب گرانش g است.

آ) فنر چقدر کشیده شود تا جعبه شروع به حرکت کند؟

ب) فرض کنید مکان اولیهٔ جعبه $x = 0$ است و در لحظهٔ $t = 0$ شروع به حرکت کند، شتاب جعبه را بر حسب x (مکان لحظه‌ای جعبه)، t و سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید.

پ) می‌توان نشان داد که مکان لحظه‌ای جعبه، x، بر حسب زمان به صورت زیر است

$$x(t) = A(\omega t - \sin \omega t) + B(1 - \cos \omega t),$$

A، B و ω را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ت) بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار طول فنر برای اولین بار در چه زمان‌هایی رخ می‌دهد؟

ث) در چه زمانی برای اولین بار جعبه متوقف می‌شود؟

ج) فرض کنید به محض توقف جعبه، اصطکاک جعبه با زمین از نوع اصطکاک ایستایی می‌شود. در این صورت بعد از توقف ذکر شده در بخش **ث** چه مدت جعبه متوقف می‌ماند تا دوباره حرکت کند؟

در صورت نیاز:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

۲) یک پینگ‌پنگ باز با حرکت منظم راکت به بالا و پایین می‌تواند توپ پینگ‌پنگ را به یک حرکت منظم رفت و برگشتی در جهت عمودی وادارد. در این مسئله می‌خواهیم حالت ساده‌ای از این حرکت را بررسی کنیم. فرض کنید راکت، صفحه‌ای افقی و صاف است که دارای حرکت منظم سینوسی با معادلهٔ $y_1(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ حول نقطهٔ تعادل $y = 0$ است. توپ پینگ‌پنگ را جرم نقطه‌ای m بگیریدکه مکان لحظه‌ای آن با $y_2(t)$ بیان می‌شود. برخورد توپ با راکت چنان است که سرعت راکت تغییر محسوسی نمی‌کند و اندازهٔ سرعت نسبی توپ و راکت قبل و بعد از برخورد یکسان است. (منظور از سرعت نسبی، تفاضل مقادیر جبری سرعت‌های دو جسم است.) شتاب گرانش در راستای y، رو به پایین و اندازه آن g است. این مسئله بنا به شرایط اولیهٔ توپ و راکت در دو بخش مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بخش اول: فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ راکت در پایین‌ترین نقطه مسیر یعنی در نقطهٔ $y_1 = -A$ قرار دارد و توپ از ارتفاع $y_2 = h$ رها می‌شود.

آ) بسامد زاویه‌ای ω را بر حسب h و g چنان تعیین کنید که وقتی راکت برای اولین بار از نقطهٔ $y_1 = -A$ به بالا می‌آید در نقطهٔ $y = 0$ با توپ برخورد کند.

ب) دامنهٔ نوسان راکت، A، را چنان تعیین کنید که بعد از اولین برخورد، اندازهٔ سرعت توپ دو برابر قبل از برخورد باشد.

پ) سرعت و ارتفاع بیشینهٔ توپ بعد از اولین، دومین، سومین و چهارمین برخورد را به دست آورید.

ت) نمودار $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را در بازه‌های زمانی بین برخوردهای ذکر شده رسم کنید. بعد از چهارمین برخورد حرکت چگونه خواهد بود؟

بخش دوم: این بار فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ راکت در نقطهٔ $y_1 = 0$ است و به سمت پایین حرکت می‌کند. توپ نیز از ارتفاع $y_2 = h$ رها می‌شود.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

ث) بسامد زاویه‌ای ω را بر حسب h و g چنان تعیین کنید که راکت بعد از رفتن به پایین و در ضمن برگشتن به بالا در نقطه $y = ۰$ با توپ برخورد کند.

ج) دامنهٔ نوسان راکت، A، را چنان تعیین کنید که بعد از اولین برخورد، اندازهٔ سرعت توپ دو برابر قبل از برخورد باشد.

چ) سرعت و ارتفاع بیشینهٔ توپ بعد از اولین، دومین و سومین برخورد را به دست آورید.

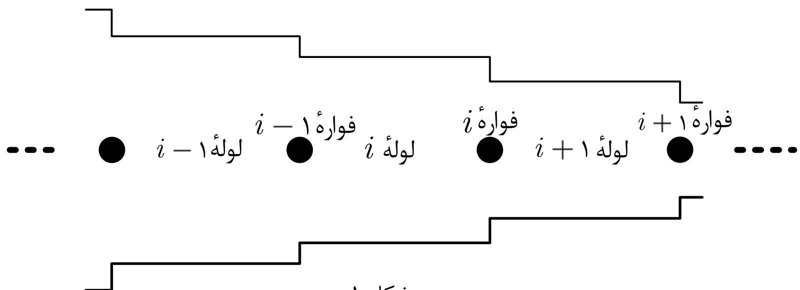
ح) نمودار $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ را در بازه‌های زمانی بین برخوردهای ذکر شده رسم کنید. بعد از سومین برخورد حرکت چگونه خواهد بود؟

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

۳) باغ فین یکی از جاذبه‌های گردشگری و مهندسی شهر کاشان است. در این باغ چند سامانهٔ آبیاری بسیار دقیق وجود دارد. طراح این سامانه‌ها، دانشمند معروف قرن دهم، شیخ بهایی (و یا به روایتی غیاث‌الدین جمشید کاشانی) است که حدود دویست سال قبل از برنولی با استفاده از اختلاف ارتفاع و تغییر قطر لوله‌ها فواره‌هایی را ایجاد کرد که آب از همگی آن‌ها تا یک ارتفاع یکسان خارج می‌شود.

آب از ارتفاعات بالادست، به وسیلهٔ یک لوله از یك طرف وارد باغ می‌شود و چون انتهای آن بسته است تمام آب ورودی از فواره‌هایی که در طول مسیر با فواصل یکسان قرار دارند، خارج می‌شود. شیب لوله باعث افزایش فشار در طول لوله و اصطکاک آب با دیوارهٔ لوله باعث کاهش آن می‌شود. فرض می‌کنیم این دو اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و باعث می‌شوند سرعت آب در سرتاسر لوله یکنواخت و ثابت باشد. به این ترتیب، با وجود حرکت آب می‌توان قوانین شاره‌های ساکن را برای آن به کار برد و فرض کرد لوله‌ای افقی و بدون اصطکاک داریم که فشار در طول آن یکسان است. به این ترتیب مقدار پرش آب در تمام فواره‌های یکسانی که در طول مسیر نصب شده‌اند برابر است.

فرض کنید قطر لولهٔ ورودی D_1 و آهنگ شارش حجمی ورودی در آن Q_1 است. شکل ۱ موقعیت مکانی فواره‌ها در طول لوله را از بالا نشان می‌دهد.



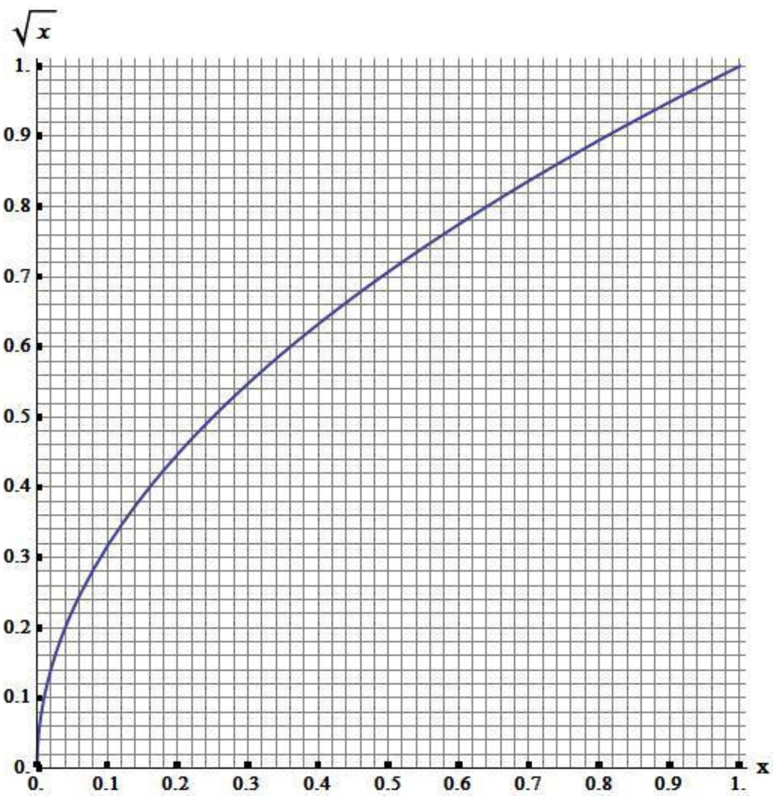
شکل ۱

از ابتدا تا انتهای لوله ۱۰ فواره نصب شده است که شمارهٔ آن‌ها را با k نشان می‌دهیم. فوارهٔ kام در انتهای لوله‌ای است که قطر آن D_k و آهنگ شارش حجمی گذرنده از آن Q_k است.

آ) Q_k را بر حسب Q_1 و k بیابید.

ب) D_k را بر حسب D_1 و k به دست آورید.

پ) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ که در شکل ۲ داده شده است مقادیر عددی $\frac{D_۲}{D_۱}$ تا $\frac{D_{۱۰}}{D_۱}$ را تا دو رقم معنی‌دار به دست آورید. نتایج خود را در یک جدول نمایش دهید.



شکل ۲

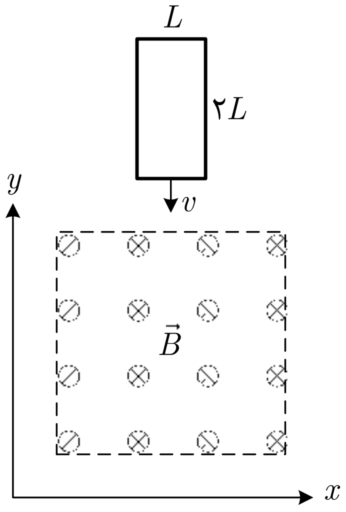
حال می‌خواهیم اثر اصطکاک و گرانش را نیز بررسی کنیم. در فیزیک شاره‌ها نشان می‌دهند که اگر در لوله‌ای به قطر D آهنگ شارش حجمی Q باشد، اصطکاک در طولی به اندازهٔ l از لوله باعث افت فشار $\Delta p=-\frac{ClQ}{D^۴}$ می‌شود که در آن ضریب ثابت C به دما و جنس مایع و لوله بستگی دارد. (به این رابطه قانون پوازی می‌گویند.)

ت) طول هر کدام از لوله‌ها را l، چگالی آب را ρ و شتاب گرانش زمین را g بگیرید. برای جبران اثر اصطکاک و ثابت نگه داشتن سرعت آب درون همهٔ لوله‌ها، اختلاف ارتفاع مورد نیاز، Δh_k ، بین دو سر لولهٔ kام را بر حسب k، C، l، ρ، g، $D_۱$ و $Q_۱$ به دست آورید. این کاهش ارتفاع را به وسط لوله نسبت می‌دهیم.

ث) به ازای مقادیر عددی $l=۳/۰\ \mathrm{m}$، $\rho=۱۰۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$، $g=۱۰\ \mathrm{m/s^۲}$، $C=۰/۰۴۰\ \mathrm{N.s/m^۲}$، $D_۱=۱۰\ \mathrm{cm}$ و $Q_۱=۱۰\ \mathrm{L/s}$ مقدار $\Delta h_۱$، $\Delta h_۵$ و $\Delta h_{۱۰}$ را بر حسب سانتی‌متر تا دو رقم معنی‌دار به دست آورید.

سی و ششمین دوره المپیاد فیزیک - ۱۴۰۲/۰۲/۱۰

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

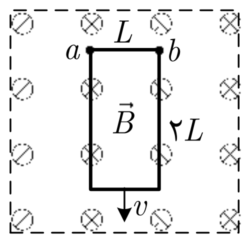


شکل ۱

۴) یک حلقهٔ رسانا به جرم M و مقاومت الکتریکی R به شکل مستطیلی به ابعاد L و $2L$ است. این حلقه مطابق شکل ۱ با سرعت v در جهت $-y$ وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت B عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت داخل برقرار است. حرکت در خلاء صورت می‌گیرد و میدان گرانشی نیز در کار نیست.

آ) معین کنید جهت جریان القایی در حلقه هنگامی که بخشی از آن وارد ناحیهٔ میدان مغناطیسی شده، ساعتگرد یا پادساعتگرد است. نشان دهید در این حالت، میدان مغناطیسی نیروی ترمزی $\vec{F}(t) = -k\vec{v}$ را به حلقه وارد می‌کند که $\vec{v}$ بردار سرعت حلقه است. ضریب k را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ب) به جای یک حلقه، یک سیم‌پیچ با N دور و با همان ابعاد جایگزین می‌کنیم. ضریب k را در این حالت به دست آورید.

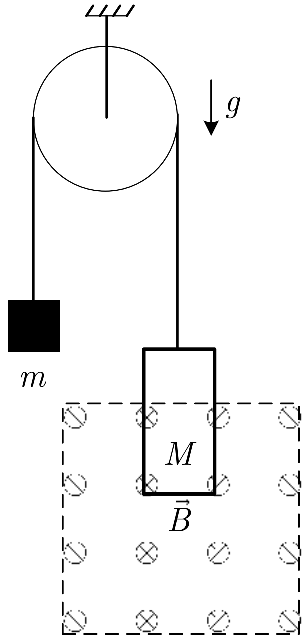


شکل ۲

پ) در حالتی که حلقه مطابق شکل ۲ کاملاً داخل میدان قرار دارد و با سرعت v به حرکت ادامه می‌دهد، بارهای الکتریکی مخالف در دو سمت ضلع‌های به طول L تجمع می‌کنند. در نتیجهٔ این تجمع، میدان الکتریکی در فاصلهٔ بین نقاط a و b ایجاد می‌شود. اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه، $V_b - V_a$، چقدر است؟

ت) دستگاه شکل ۳ را در نظر بگیرید. در این حالت میدان گرانشی g به سمت پایین برقرار است. دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. در سمت راست این دستگاه حلقهٔ بخش آ به تدریج از بالا وارد ناحیهٔ میدان می‌شود و سرانجام از آن خارج می‌شود. شتاب دستگاه را در طی مراحل مختلف عبور حلقه از ناحیهٔ میدان بر حسب M، m، g، k و سرعت لحظه‌ای حلقه، v، به دست آورید. از جرم ریسمان و قرقره و اصطکاک محور قرقره صرفنظر کنید.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

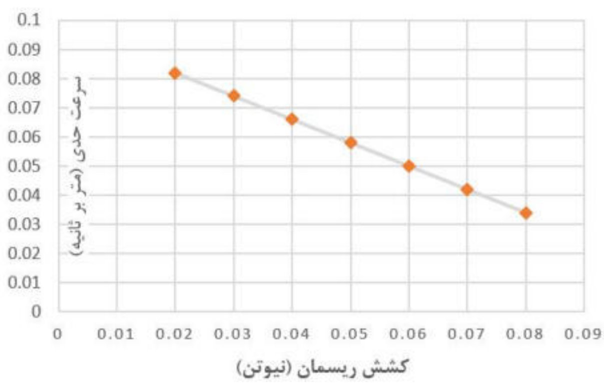


شکل ۳

ث) در مرحله‌ای از حرکت بخش **ت** که در آن ضلع پایینی حلقه داخل میدان و ضلع بالایی خارج میدان قرار دارد سرعت لحظه‌ای به صورت تابع $v(t) = \alpha + (v_\circ - \alpha)\mathrm{e}^{-\beta t}$ به دست می‌آید. در این رابطه $t = \circ$ لحظه‌ای است که لبهٔ پایینی حلقه وارد میدان می‌شود و $v_\circ$ سرعت حلقه در همین لحظه است. ضرایب α و β را بر حسب داده‌های مسئله بیابید.

توضیح: تابع $\mathrm{e}^{\beta t}$ تابع نمایی نام دارد که e عدد نپر است و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار $\mathrm{e} \cong ۲/۷۲$ است. تابع نمایی فوق، عدد نپر به توان $-\beta t$ است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\frac{d\,\mathrm{e}^{-\beta t}}{dt} = -\beta\,\mathrm{e}^{-\beta t}$ است.

ج) فرض کنید در لحظهٔ رها کردن حلقه، لبهٔ پایینی آن در ارتفاع h بالاتر از لبهٔ بالایی میدان باشد. h را بر حسب M، m، g و k چنان تعیین کنید که بعد از لحظهٔ $t = \circ$ و تا قبل از آن که کاملاً وارد میدان شود، حلقه با سرعت ثابت حدی به حرکت ادامه دهد.



شکل ۴

چ) آزمایشی را با شرایط مذکور در بخش **ج** و با تغییر جرم m چندین بار تکرار می‌کنیم. در هر بار آزمایش نیروی کشش ریسمان و سرعت ثابت حدی دستگاه را اندازه‌گیری می‌کنیم. در شکل ۴ نمودار سرعت حدی دستگاه بر حسب نیروی کشش ریسمان رسم شده است. با توجه به این نمودار، ضریب k و جرم حلقه را به دست آورید. شتاب جاذبه را $g = ۱۰\ \mathrm{m/s^۲}$ بگیرید.

ح) با توجه به نتایج عددی بخش **چ** و با فرض آن که $B = ۰/۶\ \mathrm{T}$، و سطح مقطع سیمی که حلقه از آن ساخته شده است ثابت و مقاومت ویژهٔ آن $\rho = ۴ \times ۱۰^{-۸}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ باشد، چگالی جرمی حلقه، D، چقدر است؟

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

۵) در این مسئله با یک مدل سادهٔ فیزیکی طرز کار یک باتری را بررسی می‌کنیم. در بین دو صفحهٔ رسانای موازی A و B که قطب‌های $+$ و $-$ باتری هستند یک الکترولیت، یعنی محلولی شامل یون‌های قابل تحرک، قرار دارد. برای سادگی فرض کنید در الکترولیت مورد نظر ما فقط یک نوع یون قابل تحرک وجود دارد. فرض کنید ناحیهٔ بین دو قطب را با صفحات فرضی موازی با قطب‌ها به $k+۱$ ناحیه (سلول) تقسیم کنیم به طوری که k عدد بسیار بزرگی باشد. هر ناحیه را با یک شمارهٔ i مشخص می‌کنیم که از ناحیهٔ مجاور قطب منفی با $i=۰$ شروع می‌شود و تا ناحیهٔ مجاور قطب مثبت با $i=k$ ادامه می‌یابد.

فرض کنید در لحظهٔ دلخواه t تعداد $n_i(t)$ یون در ناحیهٔ i قرار دارد. در طی بازهٔ زمانی Δt یک یون با احتمال p از ناحیهٔ i به ناحیهٔ $i+۱$ و با احتمال q به ناحیهٔ $i-۱$ می‌رود. در نتیجه با احتمال $۱-(p+q)$ سر جای خود می‌ماند. تعداد یون‌ها بسیار زیاد است، به طوری که می‌توان تعداد ذرات در یک ناحیه را با متوسط تعداد در همان ناحیه برابر گرفت.

آ) تعداد یون‌ها در ناحیهٔ i در زمان $t+\Delta t$ را بر حسب تعداد یون‌ها در همان ناحیه و نواحی مجاور در زمان t به دست آورید.

ب) در حالت پایا تعداد یون‌ها در هر ناحیه، دیگر به زمان وابسته نیست. در این حالت، تعداد ذرات هر ناحیه را به دست آورید.

راهنمایی: در اینجا به معادله‌ای به صورت $n_i=\alpha n_{i-۱}+\beta n_{i+۱}$ می‌رسید که به معادلهٔ فیبوناچی معروف است. برای حل این معادله می‌توانید فرض کنید که جواب به صورت $n_i=x^i$ است. در این صورت دو جواب برای x به دست می‌آید که ما آنها را $x_۱$ و $x_۲$ می‌نامیم. جواب کلی معادلهٔ فیبوناچی به صورت $n_i=A_۱x_۱^i+A_۲x_۲^i$ است. ثابت‌های $A_۱$ و $A_۲$ را فعلاً مفروض بگیرید. در بخش‌های بعدی مسئله، آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

پ) مجموع تعداد کل یون‌ها را در نواحی صفر تا k به دست آورید.

ت) بار الکتریکی هر یون را Q بگیرید. در حالت پایا جریان الکتریکی باتری، I، ثابت و برابر جریان بین هر دو ناحیهٔ مجاور i و $i+1$ است و می‌تواند به صورت تابعی از Q، p، q، Δt و ثابت‌های A_1 و A_2 باشد. I را به دست آورید.

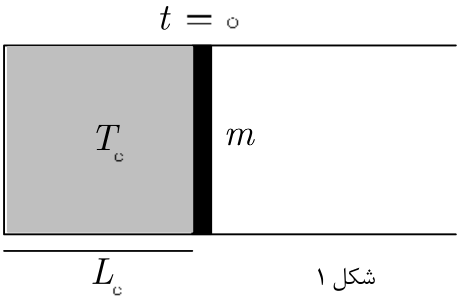
در یک باتری فرایندهای شیمیایی که در کنار قطب‌ها رخ می‌دهند روی جمعیت یون‌ها تأثیرگذارند. فرض کنید این فرایندها طوری است که تعداد یون‌ها در ناحیهٔ مجاور قطب منفی مقدار ثابت n_0 و در ناحیهٔ مجاور قطب مثبت مقدار ثابت n_k باشد. همچنین به دلیل اختلاف پتانسیل V بین قطب‌ها، داخل الکترولیت میدان الکتریکی برقرار می‌شود که باعث تفاوت p و q می‌شود. برای سادگی فرض کنید $p=(a-bQ\frac{V}{k})\Delta t$ و $q=(a+bQ\frac{V}{k})\Delta t$ که a و b مقادیر ثابتی هستند. همچنین به دلیل زیاد بودن تعداد نواحی می‌توان فرض کرد که $bQ\frac{V}{k}$ از a بسیار کوچک‌تر است.

راهنمایی: برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ می‌توان از رابطهٔ تقریبی $(1+\varepsilon)^k \approx 1+k\varepsilon$ استفاده کرد (به شرط آن که $|k\varepsilon|$ نیز خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد).

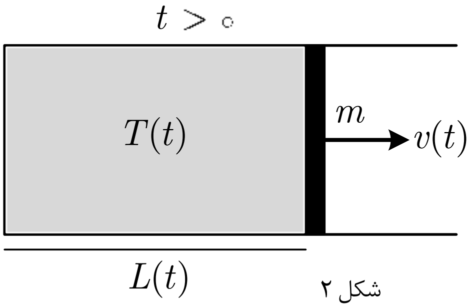
ث) در حالت مدار باز که از باتری جریان الکتریکی نمی‌گذرد، ثوابت وابسته به شرایط مرزی A_1 و A_2 را به دست آورده و اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری، V_0، را بر حسب ثوابت a، b، n_0، n_k، Q و k بیابید.

ج) نشان دهید در حالتی که جریان کوچک I در باتری برقرار است، اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری، V، به صورت $V=V_0-RI$ است که V_0 اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری در حالت مدار باز است. کمیت R را بر حسب ثوابت a، b، n_0، n_k، Q و k بنویسید.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱



شکل ۲

۶) مقداری گاز آرمانی داخل یک ظرف استوانه‌ای به وسیلهٔ پیستونی به جرم m محبوس شده است. در لحظهٔ $t = 0$ دمای گاز T_0 است و پیستون به فاصلهٔ L_0 از انتهای استوانه نگه داشته شده است. بیرون استوانه خلاء است و اصطکاک پیستون و استوانه ناچیز است. استوانه و پیستون عایق گرما هستند. پیستون را رها می‌کنیم تا گاز به طور بی‌دررو منبسط شود و پیستون را به حرکت درآورد. در لحظهٔ دلخواه t دمای گاز بر حسب کلوین $T(t)$، سرعت پیستون $v(t)$ و فاصلهٔ پیستون از انتهای استوانه $L(t)$ است.

لازم به توضیح است که انرژی درونی یک گاز آرمانی در دمای T برابر $U = C_V T$ است. C_V ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت نامیده می‌شود و در این مسئله آن را ثابت فرض می‌کنیم. برای یک گاز آرمانی طی یک فرایند بی‌دررو، کمیت $TV^{\gamma-1}$ مقدار ثابتی است، که T دمای گاز، V حجم گاز و γ عدد ثابتی موسوم به ضریب اتمیسته است.

آ) با استفاده از پایستگی انرژی، سرعت لحظه‌ای پیستون، $v(t)$، را بر حسب دمای لحظه‌ای گاز، $T(t)$، و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

ب) با توجه به ثابت بودن کمیت $TV^{\gamma-1}$ در هر لحظهٔ دلخواه t، رابطه‌ای بین $\frac{dT(t)}{dt}$ و $v(t) = \frac{dL(t)}{dt}$ به دست آورید.

منظور از $\frac{dT(t)}{dt}$ مشتق دما نسبت به زمان و منظور از $\frac{dL(t)}{dt}$ مشتق طول L نسبت به زمان است.

پ) از روابط بخش‌های **آ** و **ب**، $\frac{dT(t)}{dt}$ را بر حسب $T(t)$ و سایر کمیت‌های ثابت (مستقل از زمان) داده شده به دست آورید.

ت) معادلهٔ به دست آمده در بخش **پ** را بر حسب متغیرهای بدون یکای فیزیکی (بدون بُعد) x و y که در زیر معرفی می‌شوند، بنویسید

$$y(x) = \frac{T(t)}{T_0}, \quad x = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{mL_0^2}{2C_V T_0}}.$$

ث) حال فرض کنید گاز آرمانی این مسئله تک‌اتمی است که برای آن $\gamma = \frac{5}{3}$ است. معادلهٔ به دست آمده در قسمت **ت**، تا زمانی که گاز داخل استوانه محبوس باشد، دارای جوابی به شکل زیر است

$$x = a\left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + b\left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

ثابت‌های عددی a و b را با این الزام که جواب پیشنهادی، به ازای هر x و y مجاز باید در معادلهٔ بخش **ت** صدق کند، به دست آورید.

ج) $y(x)$ را به دست آورید.

راهنمایی: برای حل یک معادلهٔ درجه ۳ به صورت $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$ کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم

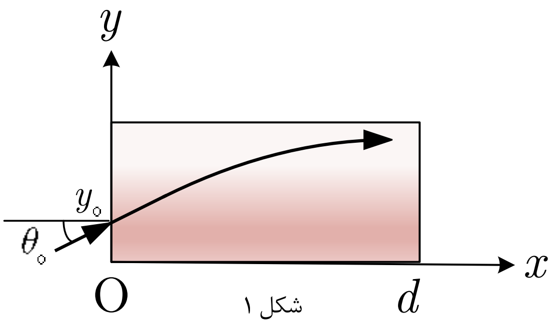
$$Q = \frac{1}{9}(3a_2 - a_1^2), \quad R = \frac{1}{54}(9a_1 a_2 - 27a_3 - 2a_1^3),$$

در حالتی که $D = Q^3 + R^2 > 0$، معادله فقط یک جواب قابل قبول به صورت زیر دارد

$$z = \quad R + \sqrt{D}\ ^{\frac{1}{3}} + \quad R - \sqrt{D}\ ^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a_1 .$$

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

۷) در یک محلول شفاف، به دلیل تفاوت غلظت مادهٔ حل شده، ضریب شکست می‌تواند در ارتفاع‌های مختلف از کف ظرف تفاوت داشته باشد. در شکل ۱، صفحهٔ $x-y$ برش قائم یک محلول را نشان می‌دهد که در ظرفی به شکل مکعب مستطیل ریخته شده است. خط $y=0$ کف ظرف و خطوط $x=0$ و $x=d$ دیواره‌های ظرف را نشان می‌دهند. بیرون ظرف، هوا با ضریب شکست ۱ است.



شکل ۱

باریکهٔ نوری مطابق شکل ۱، در صفحهٔ $x-y$ با زاویهٔ کوچک θ_0 به نقطهٔ $(0,y_0)$ از دیوارهٔ سمت چپ می‌تابد و وارد محلول می‌شود. (برای وضوح بیشتر، شکل‌ها در راستای y بزرگ‌تر از واقع رسم شده‌اند.) فرض کنید دیواره‌های ظرف بسیار نازک است به طوری که اثر محسوسی در مسئله ندارد. باریکهٔ نور پس از ورود به محلول، همانند پدیدهٔ سراب، مسیری خمیده را طی می‌کند که معادلهٔ آن $y=A\cos[\alpha(x-B)]$ است.

آ) ضریب شکست متغیر محلول، $n(y)$، را بر حسب y، A، α و اندازهٔ ضریب شکست محلول در کف ظرف، $n_0=n(y=0)$، به دست آورید.

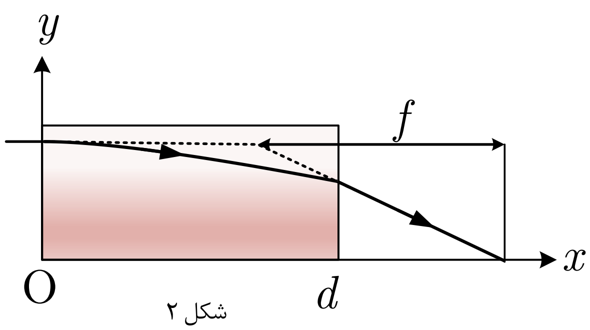
ب) رابطهٔ به دست آمده در بخش آ را برای مقادیر αA خیلی کوچک‌تر از ۱ تقریب بزنید. برای این کار با استفاده از راهنمایی زیر جواب را به صورت یک چندجمله‌ای از توان‌های مختلف α بنویسید و سپس از جملات با توان ۳ و بالاتر چشم‌پوشی کنید. در ادامهٔ مسئله نیز از همین تقریب استفاده کنید.

راهنمایی: برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ می‌توان از رابطهٔ تقریبی $(1+\varepsilon)^k\approx 1+k\varepsilon$ استفاده کرد (به شرط آن که $|k\varepsilon|$ نیز خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد).

پ) ثابت‌های A و B را با فرض کوچک بودن θ_0 بر حسب کمیت‌های α، y_0 و θ_0 به دست آورید.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

ت) اگر نور به صورت افقی وارد محلول شود و مطابق شکل ۲ خم شود، فاصلهٔ کانونی سامانه، f، که در شکل مشخص شده است را بر حسب n_0، α و d تا مرتبهٔ تقریبی که در قسمت **ب** ذکر شد به دست آورید.



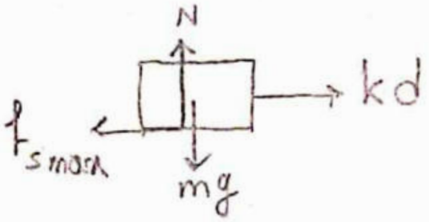
شکل ۲

ث) فاصلهٔ دیوارهٔ سمت راست محلول تا نقطهٔ کانونی را بر حسب n_0، α و d به دست آورید.

ج) برای این محلول، ضریب شکست به طول موج، λ، وابسته است و در کف ظرف به صورت $n_0(\lambda) = C + \frac{D}{\lambda^2}$ است که در آن C و D اعداد ثابتی هستند. فرض کنید کمیت α به طول موج بستگی ندارد. اگر نور ورودی به محلول از طول موج λ_1 به λ_2 تغییر کند، میزان جابجایی نقطه کانون را بر حسب λ_1، λ_2، α، d، C و D به دست آورید.

P1

آ)

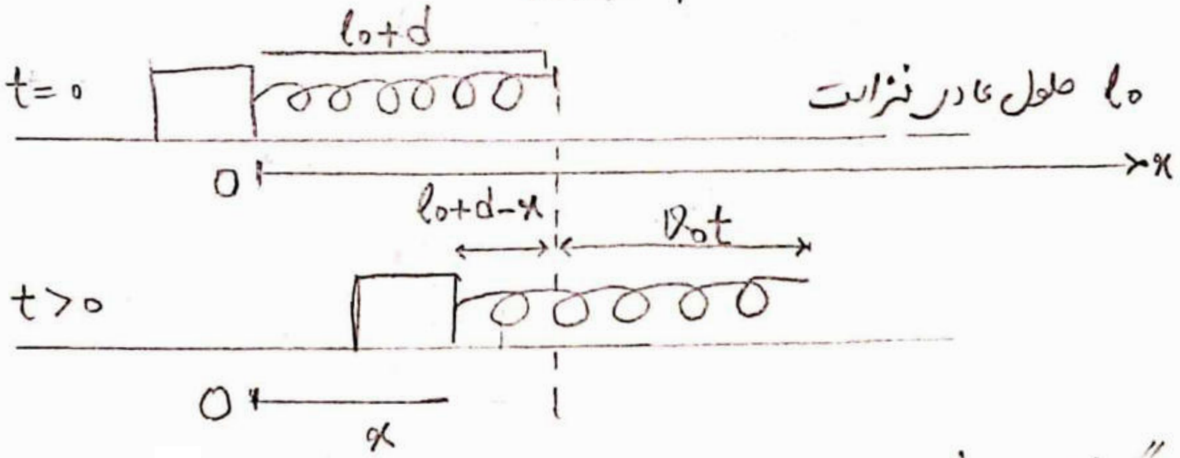


$$N = mg$$

$$kd = f_{s\,max} \Rightarrow d = \frac{\mu_s m g}{k}$$

$$f_{s\,max} = \mu_s N$$

ب) l_0 طول عادی فنر است



کشیدگی فنر در لحظهٔ t، $(l_0+d-x+v_0t)-l_0$ است، در نتیجه

$$N = mg$$

$$k(d-x+v_0t) - f_k = ma \Rightarrow a = \frac{k}{m}(v_0t - x) + (\mu_s - \mu_k)g \qquad (1)$$

$$f_k = \mu_k N$$

پ)

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 (A \sin\omega t + B \cos\omega t)$$

$$= \omega^2 (A\omega t + B - x(t)) \qquad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲):

$$\omega^2 (A\omega t + B - x) = \frac{k}{m}(v_0 t - x) + (\mu_s - \mu_k)g$$

در نتیجه

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad A\omega^3 = \frac{k}{m} v_0, \quad \omega^2 B = (\mu_s - \mu_k) g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad B = \frac{mg}{k}(\mu_s - \mu_k)$$

ت) طول فنر در لحظهٔ t:

$$l(t) = l_0 + d - x + v_0 t$$

$$= l_0 + \frac{\mu_s m g}{k} - A(\omega t - \sin\omega t) - B(1 - \cos\omega t) + v_0 t$$

$$l(t) = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + A\left(\sin\omega t + \frac{B}{A}\cos\omega t\right)$$

اگر بنویسیم

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{g}{v_0}\,(\mu_s - \mu_k) = \tan\theta$$

$$\sin\omega t + \frac{B}{A}\cos\omega t = \sin\omega t + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\omega t$$

$$= \frac{\sin(\omega t+\theta)}{\cos\theta}$$

و با توجه به راهنمایی:

$$l = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + \frac{A}{\cos\theta}\sin(\omega t+\theta)$$

$\sin(\omega t+\theta) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ بیشترین طول فنر برای اولین بار

$\sin(\omega t+\theta) = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ کمترین طول فنر برای اولین بار

ث) داریم

$$x(t) = A\omega t + B - \frac{A}{\cos\theta}\sin(\omega t+\theta)$$

$$v(t) = A\omega - \frac{A\omega}{\cos\theta}\cos(\omega t+\theta)$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t+\theta) = \cos\theta$$

$$\omega t + \theta = \theta,\ 2\pi-\theta,\ 2\pi+\theta,\ \dots$$

در $t=0$ که سرعت جسم صفر است.

اولین زمان بعدی که سرعت صفر می‌شود $\omega t+\theta = 2\pi-\theta$ است و لذا

$$t_1 = \frac{2}{\omega}(\pi-\theta)$$

ج) طول فنر در لحظهٔ t_1 برابر است با

$$l(t_1) = l_0 + \frac{\mu_k mg}{k} + \frac{A}{\cos\theta}(-\sin\theta)$$

و کشیدگی فنر در لحظهٔ t_1:

$$l(t_1) - l_0 = \frac{mg}{k}(2\mu_k - \mu_s) < d$$

و مدتی که طول می‌کشد طول فنر به d برسد، T، برابر است با

$$d - (l(t_1) - l_0) = v_0 T \Rightarrow T = \frac{2mg}{kv_0}(\mu_s - \mu_k)$$

P2

بخش اول :

$y_1(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

$y_1(0) = -A \Rightarrow \phi = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow y_1(t) = -A \cos \omega t$

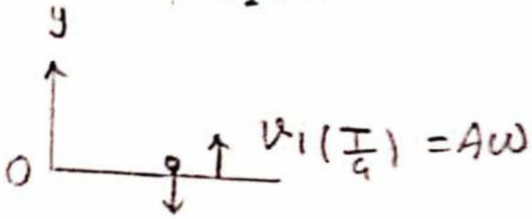
$v_1(t) = A\omega \sin \omega t$

الف)

$h = \frac{1}{2} g t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}$

• $y_2 = h$



$v_2(\frac{T}{4}) = -\sqrt{2gh} \equiv -v_0$

ب) $\Rightarrow v_1(\frac{T}{4}) - v_2(\frac{T}{4}) = v_2'(\frac{T}{4}) - v_1(\frac{T}{4})$

اگر v_0 اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدن به $y=0$ باشد می خواهیم $v_2'(\frac{T}{4}) = 2v_0$.

یعنی :

$A\omega - (-v_0) = 2v_0 - A\omega \Rightarrow A\omega = \frac{v_0}{2} \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega} = \frac{2h}{\pi}$

پ) ✓ بعد از اولین برخورد ؛ توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_1 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = 4h$ است ،

دومین برخورد نیز در $y=0$ اتفاق می افتد ، زیرا زمان رفت توپ به $y=h_1$ و برگشت آن به $y=0$ برابر $4t_0 = T$ و زمان دومین برخورد $t = T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4}$ است

که $y_1(\frac{5T}{4}) = 0$ ، در این لحظه $v_1(\frac{5T}{4}) = A\omega$ است ،

مجدداً برخورد در $y=0$ را بررسی می کنیم

$A\omega - (-2v_0) = v_2'(\frac{5T}{4}) - A\omega \Rightarrow v_2'(\frac{5T}{4}) = 3v_0$

✓ بعد از دومین برخورد ؛ توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $3v_0$ پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_2 = \frac{(3v_0)^2}{2g} = 9h$ است.

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $6t_0+5t_0=11t_0=11\frac{T}{9}$ اتفاق می‌افتد.

در این لحظ $v_1\left(\frac{11T}{9}\right)=-A\omega$ است.

برخورد در $y=0$:

$$-A\omega-(-3v_0)=v_2'\left(\frac{11T}{9}\right)-(-A\omega) \Rightarrow v_2'\left(\frac{11T}{9}\right)=2v_0$$

✓ بعد از سومین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ برتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_3=\frac{(2v_0)^2}{2g}=4h$ خواهد بود.

چهارمین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $4t_0+11t_0=15t_0=15\frac{T}{9}$ اتفاق می‌افتد. در این لحظ $v_1\left(\frac{15T}{9}\right)=-A\omega$ است.

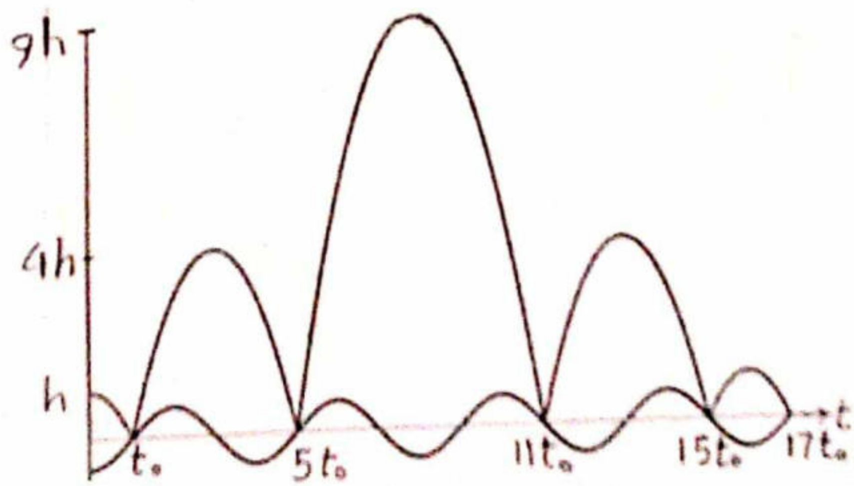
برخورد در $y=0$:

$$-A\omega-(-2v_0)=v_2'\left(\frac{15T}{9}\right)-(-A\omega) \Rightarrow v_2'\left(\frac{15T}{9}\right)=v_0$$

✓ بعد از چهارمین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت v_0 برتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_4=\frac{v_0^2}{2g}=h$ خواهد بود

از این به بعد حرکت تکرار می‌شود.

ت)



در صورتی که شکل تکه تکه رسم شده باشد نیز قابل قبول خواهد بود

بخش دوم:

$$y_1(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

$$y_1(0)=0 \;،\; v_1(0)<0 \Rightarrow \phi=\pi \Rightarrow y_1(t)=-A\sin\omega t$$

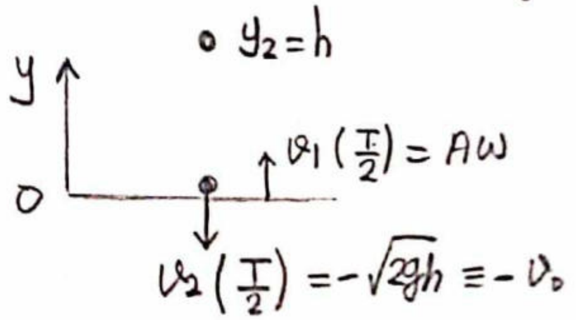
$$v_1(t)=-A\omega\cos\omega t$$

ث)

$$h=\frac{1}{2}gt_0^2 \Rightarrow t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0=\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega=\pi\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

ج)



$$\Rightarrow v_1(\tfrac{T}{2})-v_2(\tfrac{T}{2})=v_2'(\tfrac{T}{2})-v_1(\tfrac{T}{2})$$

اگر v_0 اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدن به $y=0$ باشد، می‌خواهیم $v_2'(\frac{T}{2})=2v_0$ ،

یعنی:

$$A\omega-(-v_0)=2v_0-A\omega \Rightarrow A\omega=\frac{v_0}{2} \Rightarrow A=\frac{h}{\pi}$$

چ) ✓ بعد از اولین برخورد: سرعت توپ به سمت بالا $2v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_1=\frac{(2v_0)^2}{2g}=4h$ است

دومین برخورد در $y=0$ و در زمان $4t_0+t_0=5t_0=\frac{5T}{2}$ اتفاق می‌افتد، در این لحظه $v_1(\frac{5T}{2})=A\omega$ است،

$$A\omega-(-2v_0)=v_2'(\tfrac{5T}{2})-A\omega \Rightarrow v_2'(\tfrac{5T}{2})=3v_0$$

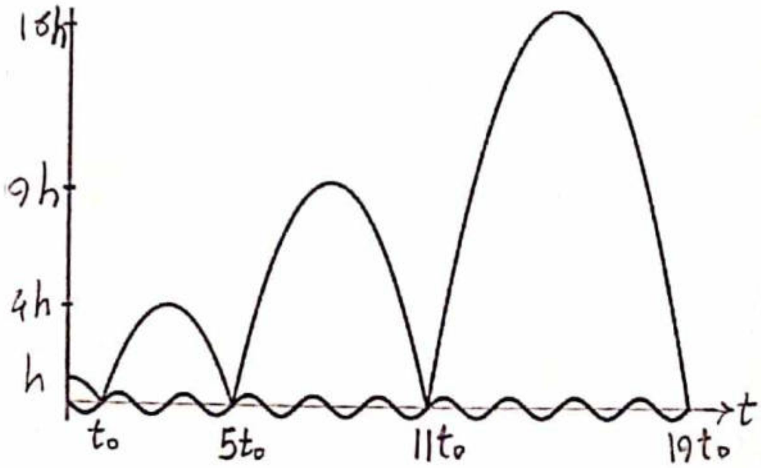
✓ بعد از دومین برخورد: سرعت توپ به سمت بالا $3v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_2=\frac{(3v_0)^2}{2g}=9h$ است

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $6t_0+5t_0=11t_0=11\frac{T}{2}$ اتفاق می‌افتد. در این لحظه $v_1(\frac{11T}{2})=A\omega$ است،

$$A\omega-(-3v_0)=v_2'(\tfrac{11T}{2})-A\omega \Rightarrow v_2'(\tfrac{11T}{2})=4v_0$$

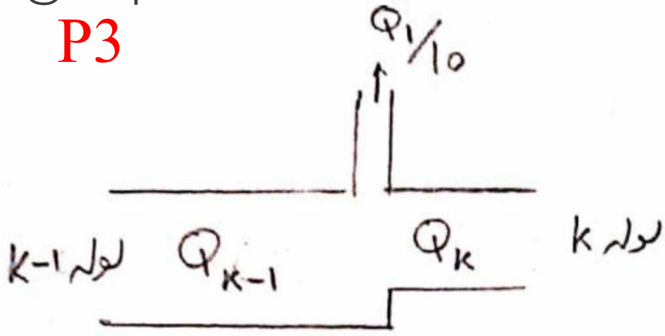
✓ بعد از سومین برخورد: سرعت توپ به سمت بالا $4v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_3=\frac{(4v_0)^2}{2g}=16h$ است.

ح) وضعیت به ترتیب بالا ادامه می‌یابد به طوری که بعد از n امین برخورد، سرعت توپ به سمت بالا $(n+1)v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_n=(n+1)^2h$ خواهد بود.



در صورتی که شکل تکه تکه رسم شده باشد نیز قابل قبول خواهد بود

P3



آ) به دلیل نشت آب درون لوله‌ها داریم

$$Q_K = Q_{K-1} - \frac{Q_1}{10}$$
$$Q_{K-1} = Q_{K-2} - \frac{Q_1}{10}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$Q_2 = Q_1 - \frac{Q_1}{10}$$

از جمع روابط فوق

$$Q_K = Q_1 - (K-1)\frac{Q_1}{10} = \left(\frac{11-k}{10}\right) Q_1$$

ب) اگر D_k قطر لوله k ام باشد و طبق فرض شده سرعت آب در همه لوله‌ها یکسان و برابر v باشد آهنگ شارش آب در لوله k ام برابر است با $Q_K = \pi\left(\frac{D_K}{2}\right)^2 v$ ، با استفاده از نتیجه قسمت آ:

$$\pi\left(\frac{D_K}{2}\right)^2 v = \frac{11-k}{10}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 v \Rightarrow D_K = D_1\sqrt{\frac{11-k}{10}}$$

پ) به ازای $k=2$: $\frac{D_2}{D_1} = \sqrt{0.9} = 0.95$ ، $\frac{D_{10}}{D_1} = \sqrt{0.1} = 0.32$

و الی آخر

D_2/D_1	D_3/D_1	D_4/D_1	D_5/D_1	D_6/D_1	D_7/D_1	D_8/D_1	D_9/D_1	D_{10}/D_1
0.95	0.89	0.84	0.77	0.71	0.63	0.55	0.45	0.32

پاسخ های دارای اختلاف ± 0.01 با جدول فوق نیز پذیرفته می‌شوند.

ت) اگر ΔP اختلاف فشار آب بین ابتدا و انتهای لوله k و l طول لوله k ام باشد

$$\Delta P = -\frac{c l Q_K}{D_K^4} = \rho g \Delta h_K$$

$$\Delta h_K = -\frac{cl}{\rho g}\frac{Q_1}{D_1^4}\frac{10}{11-k} = -0.0012\left(\frac{10}{11-k}\right) m$$

ث)

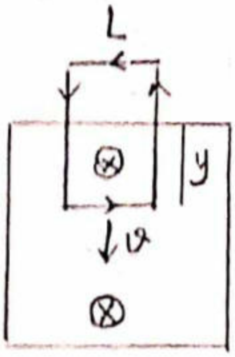
$\Delta h_1 = -0.12$ cm

$\Delta h_5 = -0.20$ cm

$\Delta h_{10} - 1.2$ cm

پاسخ های با علامت + نیز قابل قبول است.

P4



آ) مطابق قانون لنز جهت جریان القایی باید پادساعتگرد باشد،

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLy) = -BL\frac{dy}{dt} = -BLv$$

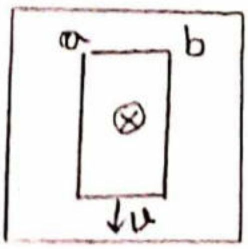
$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2L^2v^2}{R} = -\vec{F}\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{B^2L^2\vec{v}}{R}$$

بنابراین $k = \frac{B^2L^2}{R}$

ب)

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -NBLv$$

$$P = \frac{N^2B^2L^2v^2}{NR} \Rightarrow k = \frac{NB^2L^2}{R}$$



پ) به بار الکتریکی q که با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت می‌کند نیروی $q\vec{v}\times\vec{B}$ وارد می‌شود. بنابراین الکترون‌ها به سمت a رانده می‌شوند و در b کمبود بار منفی وجود خواهد داشت. پس یک میدان الکتریکی مانند $\vec{E}$ از b به a به وجود می‌آید،

$$q\vec{E} = q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow E = vb$$

اما $V_b - V_a = EL$، در نتیجه:

$$V_b - V_a = vbL$$

ت) در وضعیتی که بخشی از حلقه داخل ناحیه میدان مغناطیسی قرار دارد، شار گذرنده از آن با زمان تغییر می‌کند و یک نیروی رو به بالا به حلقه وارد می‌شود که در قسمت آ، $\vec{F} = -k\vec{v}$، به دست آمد.

$$\begin{cases} Mg - T - kv = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g - \frac{kv}{M+m}$$

در وضعیتی که کل حلقه خارج از ناحیه میدان است و یا کل حلقه داخل ناحیه میدان است، شار گذرنده از آن با زمان تغییر نمی‌کند و $\vec{F} = \vec{0}$، یا $k = 0$.

$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g$$

ث)

$$v(t) = \alpha + (v_0 - \alpha)e^{-\beta t}$$

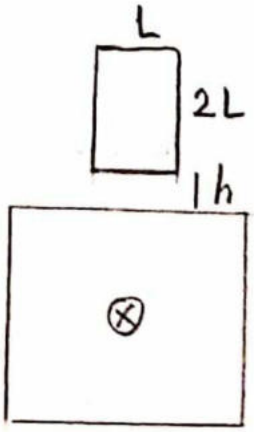
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 - \beta(v_0 - \alpha)e^{-\beta t} = -\beta(v - \alpha)$$

با قرار دادن در معادله به دست آمده در قسمت ت:

$$-\beta(v - \alpha) = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g - \frac{kv}{M+m}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \frac{k}{M+m} \,,\quad \alpha = \frac{(M-m)g}{k}$$



ج) در لحظه رسیدن لبه پایینی حلقه به لبه بالای میدان سرعت سقوط حلقه $v_0 = \sqrt{2gh}$ است. می خواهیم سرعت حلقه در لحظه $t=0$ چنان باشد که $v(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $v_0 - \alpha = 0$

$$\sqrt{2gh} = \frac{(M-m)g}{k} \Rightarrow h = \frac{(M-m)^2 g}{2k^2}$$

چ) هنگامی که حلقه با سرعت حد حرکت می کند $a=0$ و از قسمت ت داریم

$$v_T = -\frac{1}{k}T + \frac{Mg}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{0.03}{0.04} \Rightarrow k = \frac{4}{3} \,,\quad \frac{Mg}{k} = 0.1$$

و $g = 10\,m/s^2$ ، در نتیجه

$$M = \frac{4}{3}(0.01)\,kg \simeq 13\,g$$

ح) از بخش آ) $R = \frac{B^2L^2}{k}$ ، از طرف دیگر $R = \rho\frac{6L}{A}$

A مساحت سطح مقطع سیم است، همچنین چگالی سیم $D = \frac{M}{A(6L)}$ است. در نتیجه

$$D = \frac{M}{6\left(\frac{6\rho k}{B^2}\right)} \Rightarrow D = \frac{MB^2}{36\rho k} = \frac{B^2}{36\rho g}(0.1) \Rightarrow D = \frac{(0.6T)^2(0.1)}{36\times 4\times 10^{-8}\Omega.m \times 10\frac{m}{s^2}}$$

$$D = 2500\,kg/m^3$$

P5

آ) $$n_i(t+\Delta t) = P n_{i-1}(t) + q\, n_{i+1}(t) + (1-P-q) n_i(t)$$

ب) $n_i(t+\Delta t) = n_i(t)$ درنتیجه

$$n_i(t) = \frac{P}{P+q} n_{i-1}(t) + \frac{q}{P+q} n_{i+1}(t)$$

اگر بنویسیم $\alpha = \dfrac{P}{P+q}$ و $\beta = \dfrac{q}{P+q}$ خواهیم داشت

$$n_i = \alpha n_{i-1} + \beta n_{i+1}$$

اگر جواب به صورت $n_i = x^i$ باشد

$$x^i = \alpha x^{i-1} + \beta x^{i+1} \Rightarrow \beta x^2 - x + \alpha = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\beta}}{2\beta} = \frac{(P+q) \pm (P-q)}{2q} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{P}{q} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$n_i = A_1 \left(\frac{P}{q}\right)^i + A_2$$

پ) $$\sum_{i=0}^{k} n_i = \sum_{i=0}^{k} \left(A_1 \left(\frac{P}{q}\right)^i + A_2\right)$$

$$= A_1 \frac{1 - \left(\frac{P}{q}\right)^{k+1}}{1 - \frac{P}{q}} + A_2 (k+1)$$

ت) $$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(n_i P Q - n_{i+1} q Q\right)$$

$$= \frac{Q}{\Delta t}\left(P\left(A_1 \left(\frac{P}{q}\right)^i + A_2\right) - q\left(A_1\left(\frac{P}{q}\right)^{i+1} + A_2\right)\right)$$

$$I = \frac{Q}{\Delta t} A_2 (P-q)$$

ث) $I=0 \Leftarrow A_2=0$ و

$$n_0=A_1 \quad , \quad n_k=A_1\left(\frac{P}{q}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{P}{q}\right)^k=\frac{n_k}{n_0}$$

$$\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{P}{q}=\frac{(a-bQ\frac{V_0}{k})\Delta t}{(a+bQ\frac{V_0}{k})\Delta t}=\frac{1-\frac{bQ}{a}\frac{V_0}{k}}{1+\frac{bQ}{a}\frac{V_0}{k}}$$

با استفاده از راهنمایی!

$$\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} \simeq 1-2\frac{bQ}{a}\frac{V_0}{k}$$

$$V_0 \simeq \frac{ak}{2bQ}\left(1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

ج) $$I=\frac{QA_2}{\Delta t}(P-q)=\frac{QA_2}{\Delta t}\left((a-bQ\frac{V}{k})\Delta t-(a+bQ\frac{V}{k})\Delta t\right)$$

$$I=-2bQ^2\frac{V}{k}A_2 \Rightarrow A_2=-\frac{Ik}{2bQ^2V}$$

از طرفی داریم

$$n_0=A_1+A_2 \Rightarrow A_1=n_0+\frac{Ik}{2bQ^2V}$$

$$n_k=A_1\left(\frac{P}{q}\right)^k+A_2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{P}{q}\right)^k=\frac{n_k-A_2}{A_1}=\frac{n_k+\frac{Ik}{2bQ^2V}}{n_0+\frac{Ik}{2bQ^2V}}$$

اکنون: $P=(a-bQ\frac{V}{k})\Delta t$ و $q=(a+bQ\frac{V}{k})\Delta t$ در نتیجه

$$\frac{P}{q}=\frac{a-bQ\frac{V}{k}}{a+bQ\frac{V}{k}}$$

با جایگذاری $\left(\frac{P}{q}\right)$ از قسمت قبل خواهیم داشت

$$\frac{a-bQ\frac{V}{k}}{a+bQ\frac{V}{k}}=\left(\frac{n_k+\frac{Ik}{2bQ^2V}}{n_0+\frac{Ik}{2bQ^2V}}\right)^{1/k}$$

$$\frac{1-\frac{b}{a}Q\frac{V}{k}}{1+\frac{b}{a}Q\frac{V}{k}} = \left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1+\frac{Ik}{2bQ^2Vn_k}}{1+\frac{Ik}{2bQ^2Vn_0}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

با استفاده از راهنمایی و نتیجهٔ قسمت ث :

$$1-\frac{2bQ}{a}\frac{V}{k} \approx \left(1-\frac{2bQ}{a}\frac{V_0}{k}\right)\left(1+\frac{I}{2bQ^2Vn_k}-\frac{I}{2bQ^2Vn_0}\right)$$

$$2\frac{bQ}{a}\frac{V-V_0}{k} \approx \frac{I}{2bQ^2V}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

اما $V-V_0=RI$ و برای جریان های کوچک

$$\frac{1}{V}=\frac{1}{V_0}\left(1-\frac{RI}{V_0}\right)^{-1}\approx\frac{1}{V_0}$$

بنابراین

$$\frac{2bQ}{ak}RI \approx \frac{I}{2bQ^2V_0}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

$$R \approx \frac{ak}{2bQV_0}\frac{1}{2bQ^2}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

از قسمت ب داشتیم $V_0 \approx \frac{ak}{2bQ}\left(1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ ، بنابراین

$$R \approx \frac{1}{2bQ^2}\frac{\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}}{1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{1/k}}$$

P6

آ)

$$\frac{1}{2} m v^2 + C_v T = 0 + C_v T_0$$

$$(1) \quad v(t) = \sqrt{\frac{2C_v}{m}(T_0 - T(t))}$$

ب)

$$\frac{d}{dt}\left(T V^{\gamma-1}\right) = 0 \quad , \quad V = AL$$

A مساحت پیستون است.

$$\Downarrow$$

$$(2) \quad \frac{dT}{dt} L^{\gamma-1} + T(\gamma-1) L^{\gamma-2} \frac{dL}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dL}{dt} = v(t)$$

پ) از روابط (۱) و (۲) و این که $TL^{\gamma-1} = T_0 L_0^{\gamma-1}$ است:

$$(3) \quad \frac{T_0 L_0^{\gamma-1}}{T} \frac{dT}{dt} + (\gamma-1)\left(\frac{T_0 L_0^{\gamma-1}}{T}\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} T \sqrt{\frac{2C_v}{m}(T_0 - T)} = 0$$

ت)

$$T = T_0 y \quad , \quad t = t_0 x \quad \Leftarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{m L_0^2}{2 C_v T_0}}$$

با قرار دادن در معادله (۳)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + (\gamma-1) y^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{1-y} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dx} + (\gamma-1) y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \sqrt{1-y} = 0$$

ث) به ازای $\gamma = \frac{5}{3}$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3} y^{\frac{5}{2}} \sqrt{1-y} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(4) \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2} \frac{1}{y^{5/2}\sqrt{1-y}}$$

$$x = a\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} + b\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{-1}{2}} + \frac{3b}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(۵)\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^{5/2}\sqrt{1-y}}\left(\frac{3b}{2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{3b}{2}\right)y\right)$$

از مقایسه (۴) و (۵) $b=1$ و $a=3$ و در نتیجه

$$x = 3\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

(ح) $Z = \left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} \Leftarrow z^3 + 3z - x = 0$

یعنی $a_1 = 0$ و $a_2 = 3$ و $a_3 = -x$ و

$Q = 1$ و $R = \frac{1}{2}x$ و $D = 1 + \frac{1}{4}x^2 > 0$

در نتیجه

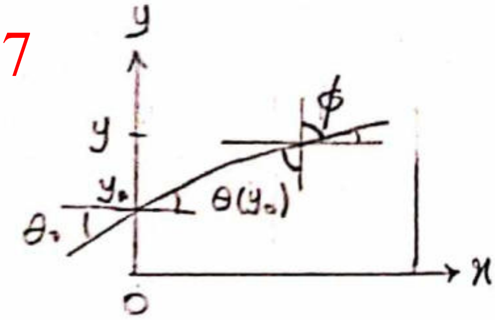
$$\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

به توان ۲ می رسانیم

$$\frac{1}{y} - 1 = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$y(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

P7



۲) هنگام ورود نور از هوا به محلول

$$1 \sin\theta_0 = n(y_0)\sin\theta(y_0)$$

در حین عبور نور از لایه‌های مختلف محلول

$$n(y)\sin\phi(y) = C \quad \text{ثابت}$$

که ϕ متمم زاویه شیب منحنی مسیر نور با محور x است، یعنی

$$\cot\phi(y) = \frac{dy}{dx} = -A\alpha\sin\alpha(x-B)$$

بنابراین

$$n(y) = C\sqrt{1+\cot^2\phi}$$

$$= C\sqrt{1+A^2\alpha^2\sin^2\alpha(x-B)}$$

$$= C\sqrt{1+A^2\alpha^2-\alpha^2y^2}$$

در $y=0$، $n(y=0)=n_0$ و در نتیجه

$$C = \frac{n_0}{\sqrt{1+A^2\alpha^2}}$$

و

$$n(y) = n_0\sqrt{1-\frac{\alpha^2y^2}{1+A^2\alpha^2}}$$

ب)

$$\frac{1}{1+A^2\alpha^2} = (1+A^2\alpha^2)^{-1} \simeq 1-A^2\alpha^2$$

$$\frac{\alpha^2y^2}{1+A^2\alpha^2} \simeq \alpha^2y^2-(\alpha^2A^2)(\alpha^2y^2)+\cdots \approx \alpha^2y^2$$

$$n(y) \approx n_0\sqrt{1-\alpha^2y^2} = n_0(1-\alpha^2y^2)^{\frac{1}{2}} \approx n_0(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2y^2)$$

$$n(y) \approx n_0(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2y^2)$$

پ)

$y(x=0)=y_0 \Rightarrow y_0 = A\cos\alpha B$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \cot\phi(y_0) = \tan\theta(y_0) \Rightarrow \tan\theta(y_0) = A\alpha\sin\alpha B$

در قسمت آ داشتیم $\sin\theta_0 = n(y_0)\sin\theta(y_0)$. برای زوایای کوچک

$\sin\theta(y_0) \approx \tan\theta(y_0)$ و $\sin\theta_0 \approx \theta_0$ در نتیجه

$\theta_0 \approx n(y_0) A\alpha\sin\alpha B$

بنابراین:

$$\begin{cases} y_0 = A\cos\alpha B \\ \frac{\theta_0}{n(y_0)} = A\alpha\sin\alpha B \end{cases}$$

اما $\sin^2\alpha B + \cos^2\alpha B = 1$ در نتیجه:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\theta_0^2}{\alpha^2}\frac{1}{n^2(y_0)}}$$

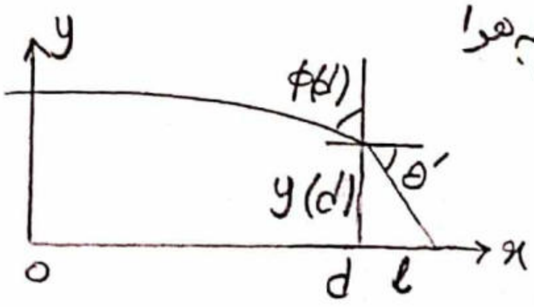
و از $\tan\alpha B = \frac{\theta_0}{\alpha}\frac{1}{y_0 n(y_0)}$ ؛ خواهیم داشت؛

$$B = \frac{1}{\alpha}\text{Arc}\tan\left(\frac{\theta_0}{\alpha}\frac{1}{y_0 n(y_0)}\right)$$

ت) $\theta_0 = 0 \Leftarrow B = 0 \Leftarrow A = y_0 \Leftarrow y = y_0\cos\alpha x$

$n(y)$ موقع خروج ولی داخل کلواژ برابر است با:

$$n(y=d) \approx n_0\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2\cos^2\alpha d\right)$$



قانون اسنل در موقع خروج پرتو از محلول به هوا

$$1\,\sin\theta' = \cos\phi(d)\, n(y=d)$$

$$-\cot\phi(d) = -y_0\alpha\sin\alpha d \qquad \text{اما}$$

$$\cos\phi(d) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi(d)}} \qquad \text{و}$$

$$= \frac{|\cot\phi(d)|}{\sqrt{1+\cot^2\phi(d)}} = \frac{\alpha y_0 \sin\alpha d}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2\sin^2\alpha d}} = \left(1+\alpha^2 y_0^2\sin^2\alpha d\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2\sin^2\alpha d$$

و

$$\cos\phi(d) \approx \alpha y_0 \sin\alpha d$$

در نتیجه با جاگذاری $n(y=d)$

$$\sin\theta' \approx (\alpha y_0 \sin\alpha d)\, n_0 \left(1-\frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2\cos^2\alpha d\right)$$

مطابق شکل $\tan\theta' = \frac{y_0}{f} = \frac{y(d)}{\ell}$ و با توجه به کوچک بودن θ'، $\tan\theta' \approx \sin\theta'$:

$$f = \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin\alpha d}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2\cos^2\alpha d} \approx \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin\alpha d} \Rightarrow f \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin\alpha d}$$

ث) $$\ell = f\,\frac{y(d)}{y_0} \Rightarrow \ell \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin\alpha d}\cos\alpha d = \frac{1}{\alpha n_0}\cot\alpha d$$

ج) از قسمت قبل:

$$\ell_1-\ell_2 = \frac{\cot\alpha d}{\alpha}\left(\frac{1}{n_0(\lambda_1)} - \frac{1}{n_0(\lambda_2)}\right)$$

$$= \frac{\cot\alpha d}{\alpha}\,\frac{n_0(\lambda_2)-n_0(\lambda_1)}{n_0(\lambda_1)\,n_0(\lambda_2)}$$

پس از جاگذاری از $n_0(\lambda) = C+\frac{D}{\lambda^2}$ خواهیم داشت

$$\ell_1-\ell_2 = \frac{\cot\alpha d}{\alpha}\,\frac{D(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(C\lambda_1+D)(C\lambda_2+D)}$$

نام :

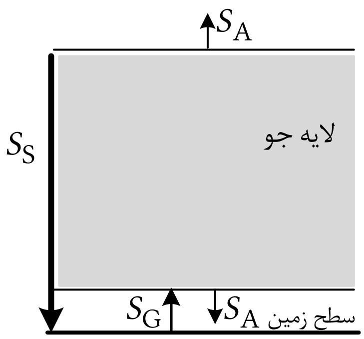
نام خانوادگی :

کد ملی :

۱) نیمی از جایزهٔ نوبل سال ۲۰۲۱ به پژوهشگرانی اهدا شد که اقلیم زمین را مدل‌سازی کرده بودند. چنین مدل‌هایی متغیرهای بسیاری دارد و به طور معمول به سبب پیچیدگی‌شان، حل آن‌ها نیازمند محاسبات و شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای است.

در این مسئله می‌خواهیم با مدلی بسیار ساده، پدیدهٔ گرمایش زمین بر اثر وجود لایه‌های جَو را بررسی کنیم. برای این که بتوانیم مدل را تحلیل کنیم، نیاز به ساده‌سازی‌های فراوانی داریم. برای مثال سطح وسیعی از زمین را اقیانوس‌ها پوشانده‌اند که تأثیر به سزایی در اقلیم دارند، اما در این مسئله اثر اقیانوس‌ها را کنار می‌گذاریم. همچنین اثر شب و روز را در نظر نمی‌گیریم. هر چند نتیجهٔ کمّیِ این مدلِ ساده با واقعیت تفاوت دارد، اما نقطهٔ شروع خوبی برای مدل‌های واقعی‌تر است.

مهم‌ترین منبع انرژی زمین، خورشید است. شدت نور خورشید در سطح زمین بر حسب بسامد متغیر است. کمیت شدت عبارت است از انرژی که در واحد زمان بر واحد سطح می‌تابد. شدت متوسط نور خورشید در سطح زمین را با S_S نشان می‌دهیم. تابش خورشید به طور عمده در بسامدهایی صورت می‌گیرد که بدون جذب به طور کامل از تمامی لایه‌های جَو عبور می‌کند، به زمین می‌رسد و به طور کامل توسط زمین جذب می‌شود.

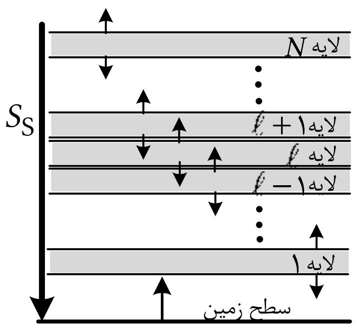


شکل ۱

شدت تابش گرمایی هر جسم در دمای T در محل جسم برابر با $S = kT^4$ است که در آن k ثابت است. در این مسئله ثابت k را برای زمین و لایه‌های جَو یکسان می‌گیریم. اگر زمین جَو نداشت، در دمای ثابت، یعنی در حالت تعادل گرمایی، شدت متوسط دریافتی توسط زمین از سوی خورشید، با شدت

تابشی زمین برابر بود. در این حالت دمای زمین را با T_{B} نشان می‌دهیم و داریم $S_S = kT_B^۴$. در هر جای مسئله که به شدت نور خورشید در سطح زمین احتیاج داشتید از این رابطه استفاده کنید.

آ) مطابق شکل ۱ جَوّ زمین را تک لایه‌ای فرض کنید. در این وضعیت دمای زمین را با T_{G} و دمای لایهٔ جَو را با T_{A} نشان می‌دهیم. این لایه با شدت یکسان $S_{\mathrm{A}} = kT_A^۴$ هم به سمت زمین و هم به سمت فضا تابش دارد. همچنین فرض کنید تمام تابش لایه که به سمت زمین است توسط زمین جذب می‌شود و تمام تابش زمین نیز توسط لایهٔ جَو جذب می‌شود. با فرض تعادل گرمایی و ثابت بودن دمای زمین و لایه، T_{G} و T_{A} را بر حسب T_{B} به دست آورید.



شکل ۲

حال فرض کنید که مطابق شکل ۲ جَوّ زمین از N لایهٔ مجزا تشکیل شده باشد. مانند قبل تمام نور خورشید بدون جذب شدن از همهٔ لایه‌ها عبور می‌کند، به زمین می‌رسد و به طور کامل توسط آن جذب می‌شود. این مجموعه در حال تعادل گرمایی است و دمای تمام اجزای آن ثابت است. دمای زمین را با T_{E} و دمای لایه‌ی ℓام را با T_ℓ نشان می‌دهیم. تابش گرمایی زمین به طور کامل توسط لایهٔ اول جذب می‌شود. تابش لایهٔ اول به سمت زمین به طور کامل توسط زمین جذب می‌شود. لایهٔ نوعی ℓام با شدت یکسان $kT_\ell^۴$ به لایه‌های $\ell-۱$ و $\ell+۱$ تابش می‌کند که به طور کامل توسط آن‌ها جذب می‌شود. لایهٔ Nام نیز مشابه سایر لایه‌ها هم به سمت فضا و هم به سمت لایهٔ $N-۱$ تابش می‌کند.

ب) معادله‌های تعادل گرمایی را برای زمین، لایهٔ ℓام ($۱ \le \ell < N$) و لایهٔ Nام بنویسید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پ) T_{N} را بر حسب T_{B} به دست آورید.

ت) T_{ℓ} را بر حسب T_{B}، N و ℓ به دست آورید.

ث) T_{E} را بر حسب T_{B} و N به دست آورید.

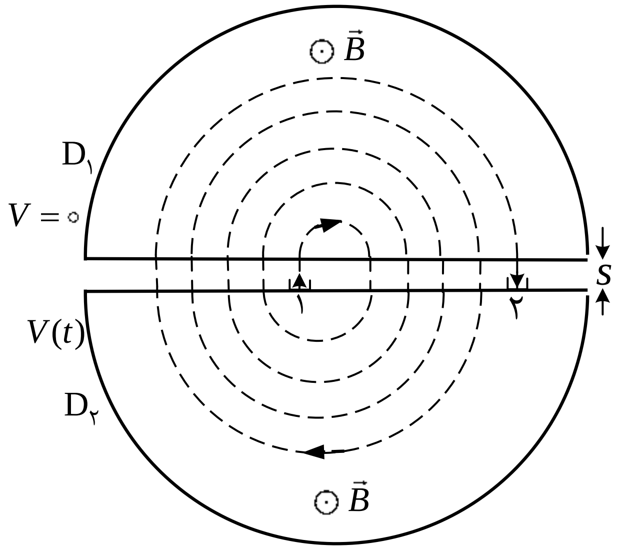
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

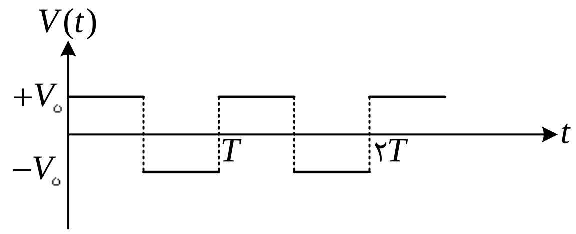
۲) آ) یک بار الکتریکی متحرک q در میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. صفحه دایره عمود بر امتداد B است. با به کار بردن قانون دوم نیوتن دورهٔ چرخش این حرکت دایره‌ای را بر حسب m ، q و B به دست آورید.

حال می‌خواهیم فرایند شتاب دادن ذرات باردار در دستگاهی موسوم به سیکلوترون را در چارچوب فیزیک نیوتونی بررسی کنیم. شتاب‌دهندهٔ سیکلوترون دستگاهی مطابق شکل ۱ است که دارای دو رسانای نیم‌استوانه‌ای توخالی با مقطعی به شکل حرف انگلیسی D است. این دو رسانا را $D_۱$ و $D_۲$ می‌نامیم. فاصلهٔ قسمت تخت $D_۱$ و $D_۲$ از یکدیگر برابر S است. قسمت تخت هر دو آن‌ها به صورت توری است به طوری که یک ذرهٔ باردار می‌تواند از آن عبور کند. رسانای $D_۱$ همواره دارای پتانسیل الکتریکی صفر است و رسانای $D_۲$ به پتانسیل الکتریکی $V(t)$ مطابق نمودار شکل ۲ متصل است.



شکل ۱

این پتانسیل الکتریکی با دورهٔ تناوب T به صورت زیر است.



شکل ۲

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

$$V(t)=\begin{cases} +V_0, & nT<t<nT+\frac{T}{2} \\ -V_0, & nT+\frac{T}{2}<t<nT+T \end{cases}, \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

به این ترتیب در شکاف بین D_1 و D_2، یعنی در فاصلهٔ s، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که به طور متناوب جهت آن معکوس می‌شود، اما داخل Dها میدان الکتریکی صفر است. هم‌چنین مطابق شکل ۱ میدان مغناطیسی برون‌سوی B عمود بر سطح مقطع Dها وجود دارد. در این شتاب‌دهنده ابتدا ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی مثبت q از نقطهٔ ۱ روی D_2 در لحظهٔ $t=0$ از حالت سکون به دلیل پتانسیل الکتریکی $+V_0$ شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_1 برسد. این ذره داخل D_1 می‌رود و بر اثر میدان مغناطیسی داخل آن می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_1 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 برابر $-V_0$ شده است و ذرهٔ خارج شده از D_1 مجدداً شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_2 برسد و داخل آن برود. در داخل D_2 ذره بر اثر میدان مغناطیسی می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_2 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 دوباره $+V_0$ شده است و ذرهٔ خارج شده از D_2 مجدداً به سمت D_1 شتاب می‌گیرد و این فرایند تکرار می‌شود (شکل ۱). با توجه به محدود بودن دفعات چرخش و اندازهٔ شکاف s، ذره همواره در شکاف بین Dها حرکت تندشونده دارد. اثر میدان مغناطیسی در شکاف بین دو رسانا را ناچیز بگیرید به طوری که مسیر حرکت ذره در شکاف بین Dها همواره عمود بر سطح تخت Dها است. توجه کنید که تغییر علامت پتانسیل تقریباً به طور لحظه‌ای صورت می‌گیرد و قبل و بعد از این لحظه سرعت ذره یکسان است. فرض کنید دورهٔ تناوب T در شکل ۲، برابر با دورهٔ چرخش ذرهٔ باردار بخش آ است.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ب) بعد از k بار عبور از شکافِ بین D ها، سرعت ذره را بر حسب k، m، q و V_0 به دست آورید.

پ) بعد از k بار عبور از شکافِ بین D ها، شعاع چرخش ذره در میدان مغناطیسی را بر حسب k، m، q، B و V_0 به دست آورید.

ت) فرض کنید بعد از k بار عبور از شکافِ بین D ها، مطابق شکل ۱، ذره به نقطهٔ ۲ روی D_2 برسد. زمان رسیدن ذره به نقطهٔ ۲، t، را بر حسب k، m، q، B، V_0 و s به دست آورید.

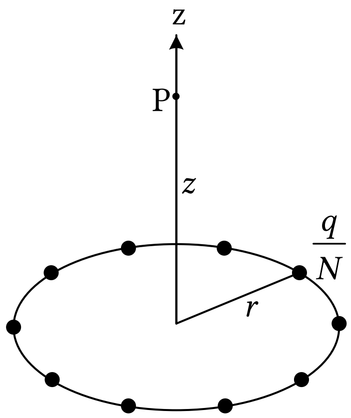
ث) کل مسافتی که ذره در قسمت **ت** طی می‌کند، l، را بر حسب k، m، q، B، V_0 و s به دست آورید.

ج) حداکثر مقدار s چقدر باشد تا در تمام k بار عبور ذره از شکاف، حرکت تندشونده باشد؟

چ) با فرض $\frac{m}{q}=1/04\times10^{-8}\,\mathrm{kg/C}$، $V_0=50/0\,\mathrm{kV}$، $s=2/00\,\mathrm{mm}$، $q=1/60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ و $B=1/04\,\mathrm{T}$ اگر بخواهیم انرژی جنبشی ذره وقتی به نقطهٔ ۲ می‌رسد $25/0\,\mathrm{MeV}$ باشد، مقادیر k، t و l را به دست آورید. در این جا، برای kهای بزرگ از رابطهٔ تقریبی $\sum_{i=1}^{k}\sqrt{i}\cong\frac{2}{3}\sqrt{k^3}+\frac{1}{2}\sqrt{k}$ می‌توانید استفاده کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



شکل ۱

۳) آ) بار الکتریکی q را به N قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را مطابق شکل ۱ بر روی رئوس یک N ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع r محاط است قرار داده‌ایم. محور تقارن دستگاه بر صفحهٔ دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد. مقدار و جهت میدان الکتریکی در نقطهٔ P واقع بر محور تقارن دستگاه و به فاصلهٔ z از مرکز دایره را به دست آورید. برای سهولت می‌توانید N را زوج فرض کنید.

ب) حلقه‌ای به شعاع r در نظر بگیرید که بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. به کمک بخش **آ** میدان الکتریکی این حلقه را در نقطه‌ای به فاصلهٔ z از مرکز حلقه بر روی محور آن به دست آورید.

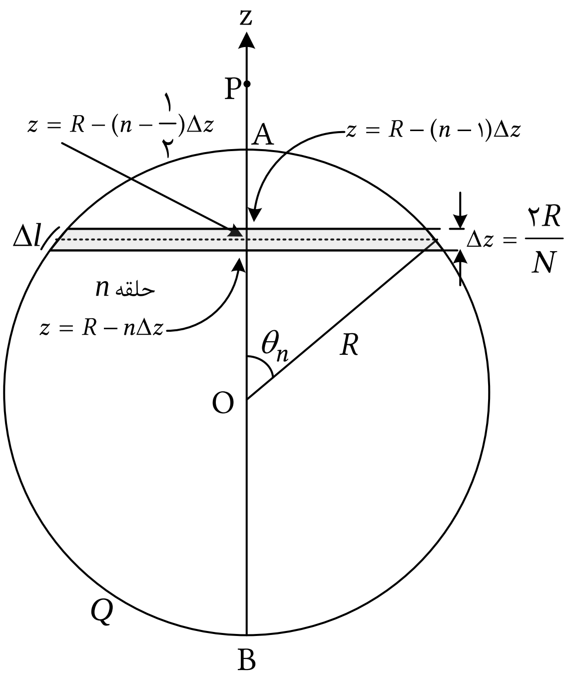
پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای به فاصلهٔ D از یک بار نقطه‌ای q نسبت به مبدأ دوردست برابر $\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ D}$ است. پتانسیل الکتریکی مجموعه‌ای از بارها جمع جبری پتانسیل الکتریکی آن‌ها است.

پ) پتانسیل الکتریکی حلقه‌ای به شعاع r و بار الکتریکی q در نقطه‌ای بر روی محور آن و به فاصلهٔ z از مرکز حلقه را به دست آورید.

مطابق شکل ۲، یک پوستهٔ کروی به شعاع R در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. نقطهٔ P واقع بر محور z و به فاصلهٔ d ($d > R$) از مرکز کره است. مبدأ مختصات را در مرکز کره بگیرید. بازهٔ بین نقاط A به مختصهٔ $z = R$ و B به مختصهٔ $z = -R$ را به N قسمت مساوی تقسیم کنید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

از هر نقطهٔ تقسیم، صفحه‌ای فرضی عمود بر محور z در نظر بگیرید. فاصلهٔ هر دو صفحهٔ متوالی از هم $\Delta z = ۲R/N$ است. هر صفحه، کره را در یک دایره قطع می‌کند. در میان هر دو صفحهٔ فرضی متوالی باریکه‌ای از سطح کره قرار می‌گیرد. اگر N به اندازهٔ کافی بزرگ باشد هر کدام از باریکه‌های یاد شده مشابه حلقه بخش **ب** خواهد بود. حلقهٔ nام را بین صفحات $z = R-(n-۱)\Delta z$ و $z = R-n\Delta z$ در نظر بگیرید. مرکز حلقهٔ nام روی محور z در نقطهٔ $z = R-(n-\frac{۱}{۲})\Delta z$ است. زاویهٔ θ_n مربوط به حلقهٔ nام در شکل ۲ مشخص شده است.



شکل ۲

ت) کمیت $\cos\theta_n$ را بر حسب n و N به دست آورید و از این پس آن را معلوم فرض کنید.

ث) مساحت حلقهٔ nام و بار الکتریکی روی آن را به دست آورید.

راهنمایی: سطح هر حلقه را می‌توان تقریباً مشابه سطح نواری مستطیل شکل به عرض Δl در نظر گرفت.

ج) از برهم‌نهی میدان الکتریکی حلقه‌ها، میدان الکتریکی کره را در نقطهٔ P به صورت یک جمع روی شمارندهٔ n بر حسب Q، R، d و θ_nها به دست آورید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

چ) به روش مشابه، پتانسیل الکتریکی پوستهٔ کروی شکل ۲ در نقطهٔ P را به صورت یک جمع روی شمارندهٔ n بر حسب Q، R، d و θ_n ها به دست آورید.

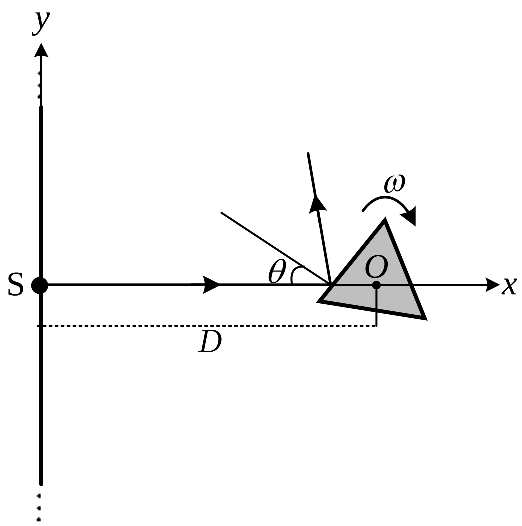
ح) فرض کنید پاسخ بخش‌های **ج** و **چ** برای میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر باشد،

$$E=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2 N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n\,,\,\alpha),\quad V=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 dN}\sum_{n=1}^{N} g(x_n\,,\,\alpha)$$

که در آن $\alpha=R/d$ و $x_n=\cos\theta_n$ فرض شده‌اند. توابع $f(x\,,\,\alpha)$ و $g(x\,,\,\alpha)$ را بنویسید. برای $\alpha=\frac{1}{3}$ شکل تقریبی این دو تابع را رسم کنید. برای این کار توجه کنید که مشتق اول و دوم هر دو تابع مثبت هستند. بنابراین کافی است مقدار توابع یاد شده را در ابتدا و انتهای بازهٔ مجاز و در $x=0$ به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۴) باریکه‌ای از نور مطابق شکل از چشمهٔ S در راستای محور x به سمت راست منتشر می‌شود. امتداد باریکه از نقطهٔ O مرکز یک N-ضلعی منتظم می‌گذرد. در شکل مقابل، حالت $N=۳$ نشان داده شده است. این N-ضلعی منتظم مقطعی از یک منشور با صفحهٔ شکل است که وجوه خارجی آن آینه است. آینه‌ها بر صفحهٔ شکل عمودند. منشور حول محوری که از نقطهٔ O گذشته و بر صفحهٔ شکل عمود است با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به طور ساعتگرد می‌چرخد. باریکهٔ نور پس از بازتاب از آینه‌ای که در لحظهٔ معینی در مسیر آن است، به پرده‌ای نامتناهی که در پشت چشمه قرار دارد برخورد می‌کند و باعث ایجاد نقطه‌ای نورانی می‌شود. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که زاویهٔ نور بازتابیده با محور x مناسب باشد. در شکل، محور y مقطع پرده با صفحهٔ شکل است. زاویهٔ تابش نور به آینه در یک لحظهٔ نامشخص را θ بگیرید. فاصله SO را برابر D بگیرید که بسیار بزرگتر از ابعاد N-ضلعی است. فاصلهٔ چشمه از پرده را ناچیز بگیرید. در بخش‌های **آ** و **ب** این مسئله فرض کنید انتشار نور به طور آنی صورت می‌گیرد، یعنی سرعت انتشار آن نامتناهی است. طولی از محور y که توسط نقطهٔ روشن جاروب می‌شود را ΔL بگیرید و فرض کنید $f=\frac{\Delta L}{D}$. همچنین g را کسری از یک بازهٔ زمانی طولانی بگیرید که طی آن، یک نقطهٔ روشن روی پرده وجود دارد.

آ) کسرهای f و g را برای موارد ذکر شده در جدول زیر به دست آورید. در پاسخ‌نامهٔ خود جدولی مشابه این جدول بکشید و جواب‌های خود را در خانه‌های خالی آن پر کنید.

N	۳	۴	$N >$ ۴	۶
f				
g				

در ادامهٔ مسئله فرض کنید $N =$ ۳ است یعنی مقطع منشور مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ب) سرعت نقطهٔ روشن روی پرده را بر حسب θ به دست آورید. به ازای چه مقادیری از θ اندازهٔ سرعت نقطهٔ روشن از مقدار معین V بیشتر است؟

حال فرض کنید نور از ذراتی موسوم به فوتون تشکیل شده که با سرعت ثابت c منتشر می‌شوند. فوتون‌ها در برخورد با آینه از قانون بازتاب عمومی (برابری زوایای تابش و بازتاب) تبعیت می‌کنند. فرض کنید در لحظهٔ $t_m =$ ۰ یکی از آینه‌ها بر خط SO عمود است و در لحظهٔ دلخواه t_m به اندازهٔ زاویهٔ $\theta = \omega t_m$ چرخیده است. فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد کرده در لحظهٔ t به پرده می‌رسد.

پ) t را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

ت) فوتونی که در لحظهٔ t_m به آینه برخورد می‌کند در نقطهٔ y به پرده می‌رسد. y را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ث) سرعت نقطهٔ نورانی روی پرده، $v=\frac{dy}{dt}$، که به معنی مشتق y نسبت به t است، را با استفاده از قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای حساب کنید و سپس جواب را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

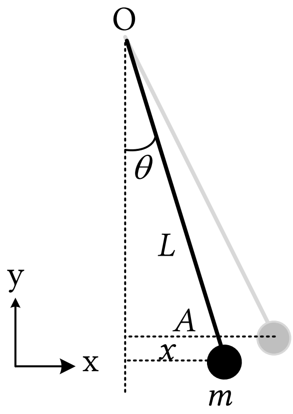
یادآوری قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای: اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبه خود تابعی از متغیر s باشد، مشتق f نسبت به s از رابطهٔ $\frac{df}{ds}=\frac{df}{du}\frac{du}{ds}$ به دست می‌آید. همچنین توجه داشته باشید که $\frac{du}{ds}=\left(\frac{ds}{du}\right)^{-۱}$.

ج) نمودار کمیت $z=\frac{۲\omega D}{v}$ را بر حسب $p=\sin ۲\theta$ رسم کنید. سپس نمودار $\frac{v}{c}$ را بر حسب p رسم کنید. در محاسبات و رسم نمودارها، نسبت $\frac{\omega D}{c}$ را α بگیرید و فرض کنید $\frac{۱}{۲}<\alpha<۱$. بر روی نمودارها هر مشخصه‌ای از قبیل نقاط تقاطع با محورها، محل کمینه‌ها و بیشینه‌ها و مقدار آن‌ها، محل مجانب‌ها، بازه‌های معتبر حرکت و مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه‌های مذکور را مشخص کنید.

چ) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب p معلوم کنید در چه بازه‌ای از θ اندازهٔ سرعت نقطهٔ نورانی روی پرده از c بیشتر است؟

ح) اگر بازهٔ زمانی بسیار کوتاه بین ارسال دو فوتون متوالی از چشمه $T_۰$ فرض شود، بازهٔ زمانی بین رسیدن دو فوتون متوالی به پرده، T، را بر حسب $T_۰$ و θ به دست آورید. معلوم کنید T همواره از $T_۰$ بزرگتر است یا همواره از آن کوچکتر است و یا گاهی از آن بزرگتر و گاهی کوچکتر است؟

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



شکل ۱

۵) گوی فلزی کوچکی به جرم m در انتهای یک میلهٔ فلزی نازک بسیار سبک به طول L قرار دارد. میله مطابق شکل ۱ از نقطهٔ O آویزان است و می‌تواند حول امتداد قائم نوسان کند. گوی فلزی را از حالت تعادل به اندازهٔ فاصلهٔ افقی A منحرف می‌کنیم و در زمان $t=0$ آن را رها می‌کنیم. در تمام این مسئله زاویهٔ انحراف آونگ کوچک است به طوری که انحراف افقی گوی، x، با زاویهٔ انحراف θ رابطهٔ تقریبی $x \approx L\theta$ دارد.

آ) انرژی پتانسیل گرانشی آونگ، $U(x)$، را نسبت به پایین‌ترین نقطهٔ حرکت آن بر حسب x به دست آورید. با توجه به این که x از L بسیار کوچک‌تر است، با استفاده از رابطه $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\varepsilon$ که برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک‌تر از یک، تقریب خوبی است، تابع انرژی پتانسیل گرانشی را به صورت $U(x)=\frac{1}{2}kx^2$ به دست آورید و ضریب k را بر حسب داده‌های مسئله بنویسید.

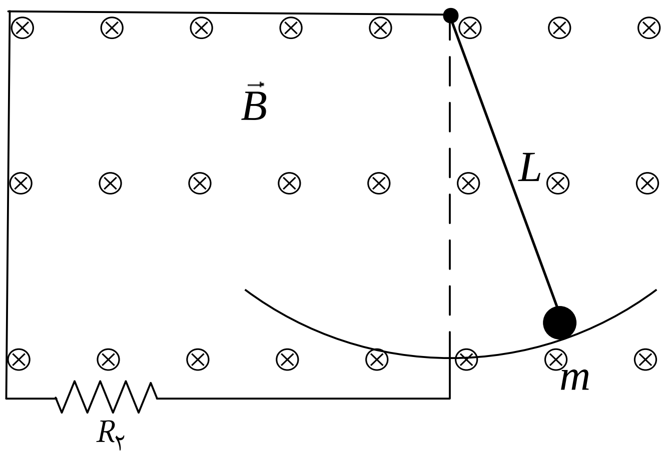
ب) انرژی کل این دستگاه، $E=K+U$، ثابت است و با زمان تغییر نمی‌کند. مشتق این کمیت نسبت به زمان را حساب کنید و برابر صفر قرار دهید. از این طریق برای حرکت آونگ نسبت $\frac{a}{x}$ را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید که a شتاب افقی گوی و x جابه‌جایی آن از حالت تعادل است. سرعت لحظه‌ای افقی گوی را v بگیرید. لازم به ذکر است که در تمام این مسئله مؤلفهٔ قائم سرعت گوی قابل چشم‌پوشی است.

راهنمایی: برای محاسبهٔ مشتق کمیت‌های x^2 و v^2 **نسبت به زمان** از قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای استفاده کنید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پ) برای حرکت نوسانی با معادلهٔ $x = A\cos(\omega t+\beta)$ نسبت $\frac{a}{x}$ را به دست آورید. از مقایسهٔ این نتیجه با نتیجهٔ بخش **ب** بسامد زاویه‌ای ω را برای حرکت آونگ حساب کنید. همچنین با توجه به شرایط اولیهٔ مسئله، β (فاز اولیه) را نیز تعیین کنید.



شکل ۲

حال دستگاه شکل ۲ را در نظر بگیرید. در این دستگاه، آونگ شکل ۱ در یک مدار الکتریکی قرار داده شده است. گوی فلزی مماس بر سطح یک رسانای بدون مقاومت و بدون اصطکاک با مقطع دایره‌ای حرکت می‌کند و همواره اتصال مدار برقرار است. مقاومت الکتریکی میله و گوی را R_1 بگیرید و از مقاومت الکتریکی سیم‌ها چشم بپوشید. همچنین مدار دارای یک مصرف‌کننده با مقاومت R_2 است. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود بر سطح مدار و به سمت داخل شکل برقرار است. لازم به ذکر است که در این حالت، گوی فلزی حرکت هماهنگ ساده ندارد.

ت) نیروی محرکهٔ الکتریکی القاء شده در مدار را بر حسب سرعت افقی گوی، v، و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

راهنمایی: برای زاویه‌های کوچک می‌توان کمان مقابل به زاویه را با وتر متناظر با آن یکی گرفت.

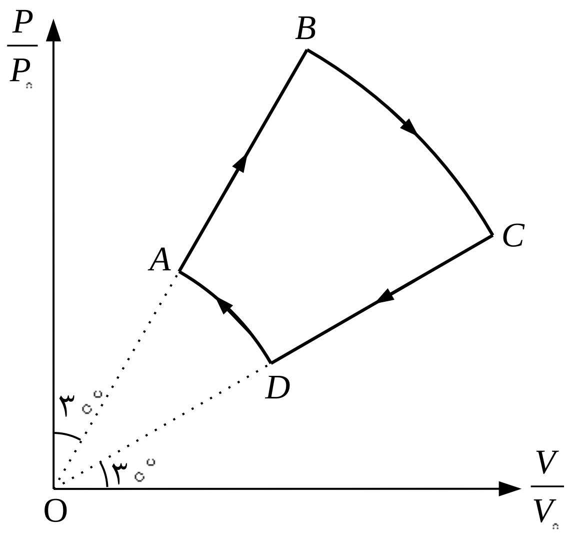
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ث) انرژی این دستگاه به دلیل اتلاف در مقاومت‌ها ثابت نیست و با زمان کاهش می‌یابد. می‌دانیم اندازهٔ انرژی تلف‌شده در واحد زمان در مقاومت الکتریکی R برابر Ri^2 است که i جریان لحظه‌ای گذرنده از مقاومت است. حال مشتق انرژی دستگاه نسبت به زمان را با منفی اندازهٔ آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت‌ها برابر بگیرید، و به معادله‌ای به صورت $ma+bv+kx=0$ برسید که در آن a شتاب، v سرعت و x جابه‌جایی افقی گوی است. ضرایب b و k را معین کنید.

ج) جواب معادله‌ای که در بخش **ث** به دست آمد به صورت $x(t)=A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta)$ است. در این معادله از تابع نمایی $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ استفاده شده است که در آن e عدد نِپِر نام دارد و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار برابر ۲٫۷۲ است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\frac{d(\mathrm{e}^{-\gamma t})}{dt}=-\gamma\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ است. این حل را در معادلهٔ به دست آمده در بخش **ث** قرار دهید و کمیت‌های γ و ω' را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۶) n مول گاز کامل تک‌اتمی فرآیند ترمودینامیکی چرخهٔ شکل مقابل در صفحهٔ نمودار $P/P_\circ$ بر حسب $V/V_\circ$ را طی می‌کند که $P_\circ$ فشاری معین و $V_\circ$ حجمی معین است. فرآیندهای $B \to C$ و $D \to A$ به ترتیب کمانی از دایره‌های به شعاع ۲ و ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در این صفحه‌اند. مطابق شکل امتداد OC با محور افقی و امتداد OB با محور عمودی زاویهٔ ۳۰° می‌سازند. کمیت‌های خواسته شده را بر حسب n، R، $V_\circ$، $P_\circ$ و $T_\circ = \frac{P_\circ V_\circ}{nR}$ بنویسید و پاسخ‌های خود را تا جایی که امکان دارد ساده کنید. در ارائهٔ جواب‌های عددی، محاسبهٔ جذر اعداد ضروری نیست. لازم به ذکر است که انرژی داخلی n مول گاز کامل تک اتمی در دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است که R ثابت جهانی گازها است.

آ) مختصات ترمودینامیکی، (V,P,T)، هر یک از نقاط A ، B ، C و D را به دست آورید.

ب) کار محیط روی گاز در هر یک از فرآیندهای $A \to B$ ، $B \to C$ ، $C \to D$ و $D \to A$ را محاسبه و همراه با علامت آن بنویسید.

پ) کار محیط روی گاز در کل این چرخه چه‌قدر است؟

ت) گرمای خالص داده شده به گاز (گرمای داده شده به گاز منهای گرمای گرفته شده از گاز) در هر یک از فرآیندهای $A \to B$ ، $B \to C$ ، $C \to D$ و $D \to A$ را محاسبه کنید و همراه با علامت آن بنویسید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ث) نقطه‌ای روی فرآیند $B \to C$ و نقطهٔ مشابهی روی فرآیند $D \to A$ وجود دارد که گرمای مبادله شده با محیط قبل و بعد آن تغییر علامت می‌دهد. مختصات ترمودینامیکی این نقاط را به دست آورید.

راهنمایی: به عنوان مثال در فرایند $B \to C$ اگر گرمای داده شده به گاز از نقطهٔ B تا نقطهٔ دلخواهی روی کمان BC را $Q(V)$ بگیریم، نقطهٔ مورد نظر جایی است که مشتق Q نسبت به V تغییر علامت دهد.

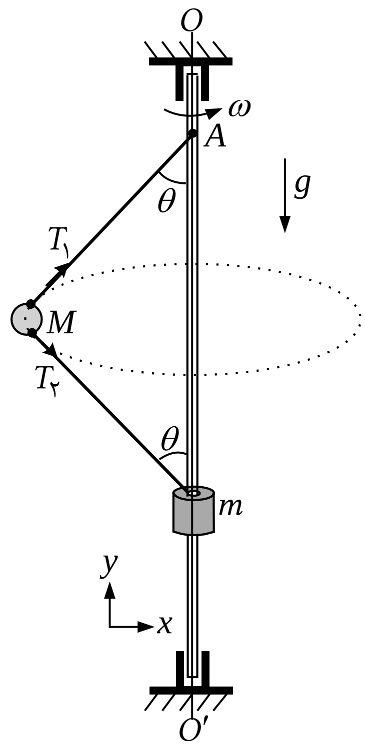
ج) گرمای داده شده به گاز از طرف محیط در این چرخه و گرمای گرفته شده از گاز در این چرخه را به دست آورید. در ارائه جواب می‌توانید از توابع معکوس مثلثاتی استفاده کنید. به عنوان مثال اگر $\tan\theta = c$ باشد می‌توان نوشت $\theta = \tan^{-1} c$ که θ بر حسب رادیان است.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان



شکل ۱

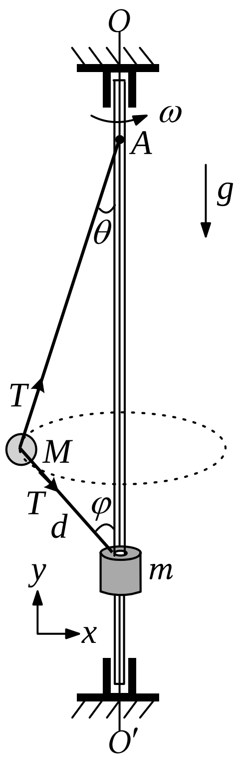
۷) مطابق شکل ۱ به مهره‌ای با جرم M دو ریسمان (نخ) یکسان هر یک به طول $\frac{l}{۲}$ متصل شده است. انتهای یکی از ریسمان‌ها به نقطهٔ ثابت A از میله‌ای قائم و انتهای ریسمان دیگر به جرم m که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد، وصل شده‌اند. میلهٔ قائم به موتوری وصل است که آن را حول راستای OO' می‌چرخاند. از جرم ریسمان‌ها و شعاع میله صرفنظر کنید. شتاب گرانش g است.

آ) در وضعیتی که مهره و ریسمان‌ها در صفحهٔ شکل هستند قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویهٔ θ، نیروهای کشش ریسمان‌ها (T_1 و T_2)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

ب) یک جواب بدیهی برای این دستگاه $\theta = ۰$ است. اگر ω از مقدار کمینهٔ ω_m بزرگ‌تر باشد جواب دیگری نیز برای زاویه θ به دست می‌آید. ω_m را بر حسب m ، M ، l و g تعیین کنید.

پ) به ازای $\omega = ۲\omega_m$ کشش ریسمان‌ها، $\cos\theta$ و شعاع دایرهٔ مسیر حرکت جرم M را به دست آورید.

اکنون مطابق شکل ۲ ، ریسمانی به طول l در نظر بگیرید که یک سرِ آن به نقطهٔ ثابت A روی میلهٔ قائم بسته شده و انتهای آن به وزنه‌ای به جرم m متصل است که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد. ریسمان از داخل مهره‌ای به جرم M عبور داده شده و مهره نیز می‌تواند بدون اصطکاک در طول ریسمان حرکت کند. در این حالت نیز میلهٔ



شکل ۲

قائم به موتوری وصل است که میله را حول راستای OO' می‌چرخاند. موتور با چنان سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد که در نتیجهٔ آن مهره بر روی یک مسیر دایره‌ای حول راستای قائم می‌چرخد. مطابق شکل ۲ زاویهٔ ریسمان‌ها با راستای قائم θ و φ و طول ریسمان واقع بین دو جرم d است. از جرم ریسمان و شعاع میله صرفنظر کنید. حرکت بدون اصطکاک مهره در طول ریسمان باعث می‌شود کشش در طول ریسمان یکسان باشد.

ت) قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه‌های θ و φ، نیروی کشش ریسمان (T)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

در قسمت‌های بعدی مسئله فرض کنید $M = ۲m$.

ث) کمیت $\cos^{۲}\theta$ را بر حسب متغیر $u = \frac{d}{l}$ به دست آورید. (فرض کنید جواب در محدودهٔ قابل قبول است.)

ج) کمیت $\omega^{۲}$ را بر حسب u، l و g به دست آورید.

چ) به ازای $u = \frac{۱}{۴}$، سرعت زاویه‌ای، کشش ریسمان، $\cos\theta$، $\cos\varphi$ و شعاع دایرهٔ مسیر حرکت جرم $۲m$ را به دست آورید.

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ح) به ازای مقدار خاصی از u کمیت $\frac{l\omega^2}{g}$ کمینه می‌شود. این مقدار خاص u ریشهٔ حقیقی و مجاز یک معادلهٔ درجه چهار به صورت $u^4+c_3u^3+c_2u^2+c_1u+c_0=0$ است. مقدار عددی ضرایب c_0، c_1، c_2 و c_3 را به دست آورید. (حل این معادله لازم نیست.)

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

آ) برای این که دمای زمین T_G و دمای لایه T_A باقی بمانند باید

$$\begin{cases} S_S + S_A = S_G \\ 2S_A = S_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_B^4 + T_A^4 = T_G^4 \\ 2T_A^4 = T_G^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} T_A = T_B \\ T_G = 2^{\frac{1}{4}} T_B \end{matrix}$$

ب) برای لایه l ام: $1 \leq l < N$ ، $S_{l+1} + S_{l-1} = 2S_l$

برای لایه N ام: $S_{N-1} = 2S_N$

برای زمین: $S_S + S_1 = S_E$

پ) از معادلات قسمت ب) و این که $S_0 = S_E$ است:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{زمین} & S_S + S_1 = S_E \\ l=1: & S_2 + S_E = 2S_1 \\ l=2: & S_3 + S_1 = 2S_2 \\ & \vdots \\ l=N-1: & S_N + S_{N-2} = 2S_{N-1} \\ \text{لایه } N & S_{N-1} = 2S_N \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{از جمع این معادلات}} \begin{matrix} S_S + S_N = 2S_N \\ \Downarrow \\ T_B^4 = T_N^4 \\ \Downarrow \\ T_N = T_B \end{matrix}$$

ت) از معادله لایه N: $T_{N-1}^4 = 2T_B^4$

از معادله لایه $l=N-1$: $T_{N-2}^4 = 3T_B^4$

تا رسیدن به معادله کامل l: $T_l^4 = (N-l+1)T_B^4$

$$T_l = (N-l+1)^{1/4} T_B$$

ث) $S_0 = S_E$ در نتیجه $T_E = (N+1)^{1/4} T_B$

۲

آ)

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

ب) اگر $K_0 =$ انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ 1 روی D_2 باشد و K_1 انرژی جنبشی ذره پس از عبور از شکاف برای اولین بار باشد

$$\Delta K_1 = K_1 - K_0 = qV_0$$

پس از بار دوم

$$\Delta K_2 = K_2 - K_1 = qV_0$$

$$\vdots$$

و پس از بار kام

$$\Delta K_k = K_k - K_{k-1} = qV_0$$

از جمع معادلات فوق

$$K_k - \cancel{K_0} = kqV_0$$

$$\frac{1}{2} m v_k^2 - 0 = kqV_0 \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}}$$

پ) مشابه با قسمت آ) :

$$r_k = \frac{mv_k}{qB}$$

$$r_k = \sqrt{\frac{2k V_0 m}{qB^2}}$$

ت) اگر $v_0 = 0$ سرعت ذره هنگام ترک نقطهٔ 1 باشد ، سرعت ذره ، v_1 ، پس از اولین عبور از شکاف برابر است با

$$v_1 = at_1 + v_0$$

اندازه سرعت ذره هنگام طی مسیر نیم دایره ای در میدان مغناطیسی ثابت می ماند.

پس از دومین عبور ذره از شکاف :

$$v_2 = at_2 + v_1$$

$$\vdots$$

و پس از kام عبور ذره از شکاف :

$$v_k = at_k + v_{k-1}$$

از جمع طرفین معادلات :

$$v_k = a(t_1 + t_2 + \cdots + t_k) + \cancel{v_0}$$

بنابراین مجموع زمان هایی که ذره بین شکاف ها سپری می کند

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_k = \frac{v_k}{a}$$

که a برابر است با $a = \frac{qV_0}{ms}$ زیرا $ma = qE = \frac{qV_0}{s}$.

در نتیجه $t_1 + t_2 + \dots + t_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}} \Big/ \frac{qV_0}{ms}$

شبیه به قسمت T) زمان طی مسیرهای نیم دایره هم با هم برابراند. بنابراین تا رسیدن ذره به نقطهٔ 2 ، k-1 بار مسیر نیم دایره‌ای طی شده است.

سرانجام زمان کل برابر است با

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_k + (k-1)\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2mk}{qV_0}}\, s + (k-1)\frac{m\pi}{qB}$$

ث) $$l = ks + \sum_{i=1}^{k-1} \pi r_i = ks + \pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{i}$$

$$l \cong ks + \pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \left(\frac{2}{3}\sqrt{(k-1)^3} + \frac{1}{2}\sqrt{k-1} \right)$$

$$l \cong ks + \pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \sqrt{k-1} \left(\frac{2}{3}k - \frac{1}{6} \right)$$

ج) با توجه به این که بعد از زمان $\frac{T}{2}$ پتانسیل الکتریکی D_2 معکوس می‌شود و این که بار q مثبت است ، حرکت در صورتی تند شونده است که پتانسیل D_2 قبل از ورود ذره از D_1 به D_2 منفی و قبل از خروج ذره از D_2 به D_1 مثبت باشد . اگر این فرآیند برعکس شود حرکت ذره بین شکاف ، کند شونده می‌شود . یعنی مجموع زمان هایی که ذره بین D ها می‌گذراند از $\frac{T}{2}$ کمتر باشد

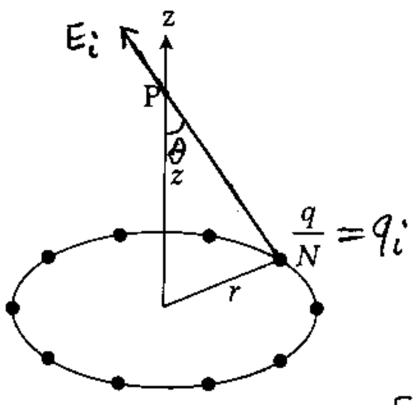
$$t_1 + t_2 + \dots + t_k < \frac{T}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2mk}{qV_0}}\, s < \frac{T}{2} \Rightarrow s < \sqrt{\frac{mV_0}{2kq}}\, \frac{\pi}{B}$$

چ) $$k = \frac{\frac{1}{2}mv_k^2}{qV_0} = \frac{25\times10^6 \times 1.6\times10^{-19}\,J}{1.6\times10^{-19}\times 50\times10^3\,J} = 500$$

از نتیجهٔ قسمت ت) : $t = 1.57\times10^{-5}\,s$

از نتیجه قسمت ث) : $l = 726\,m$

۳ آ)



شکل ۱

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2+r^2}$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i \cos\theta = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2+r^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

اما $\sum_{i=1}^{N} q_i = N\left(\frac{q}{N}\right) = q$، بنابراین $E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2+r^2)^{3/2}}$.

ب) این بار $q_i = \lim_{N\to\infty}\frac{q}{N}$، از طرفی بازهم $\sum_{i=1}^{N\to\infty} q_i = q$

در نتیجه

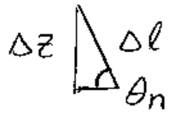
$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2+r^2)^{3/2}}$$

پ) $V_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$ ، $q_i = \frac{q}{N}$

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$$

ت) $\cos\theta_n = \frac{R - n\Delta z + \frac{1}{2}\Delta z}{R} = 1 + \left(-n+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{N} = 1 - \frac{2n-1}{N}$

ث) $\Delta S = (2\pi R\sin\theta_n)\Delta l$ و $\Delta l = \frac{\Delta z}{\sin\theta_n}$



$$= 2\pi R\,\Delta z = 2\pi R\left(\frac{2R}{N}\right) = \frac{4\pi R^2}{N}$$

سطح همه حلقه‌ها برابر و $\frac{1}{N}$ مساحت کره است.

$$\Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2}\Delta S = \frac{Q}{N}$$

ج) در قسمت ب) برای حلقه‌ای با بار ΔQ به فاصله $z_n = d - R\cos\theta_n$ از نقطهٔ P و به شعاع $r_n = R\sin\theta_n$ به دست آوردیم

$$E_n = \frac{\Delta Q\, z_n}{4\pi\epsilon_0(z_n^2+r_n^2)^{3/2}}$$

$$E=\sum_{n=1}^{N} E_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\frac{d-R\cos\theta_n}{\left[(d-R\cos\theta_n)^2+(R\sin\theta_n)^2\right]^{3/2}}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{d-R\cos\theta_n}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta_n)^{3/2}}$$

ج) در قسمت ب) برای حلقه‌ی باردار ΔQ به فاصله $z_n=d-R\cos\theta_n$ از نقطه P و به شعاع $r_n=R\sin\theta_n$ به دست آوردیم

$$V_n=\frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_n^2+r_n^2}}\quad , \quad V=\sum_{n=1}^{N}V_n$$

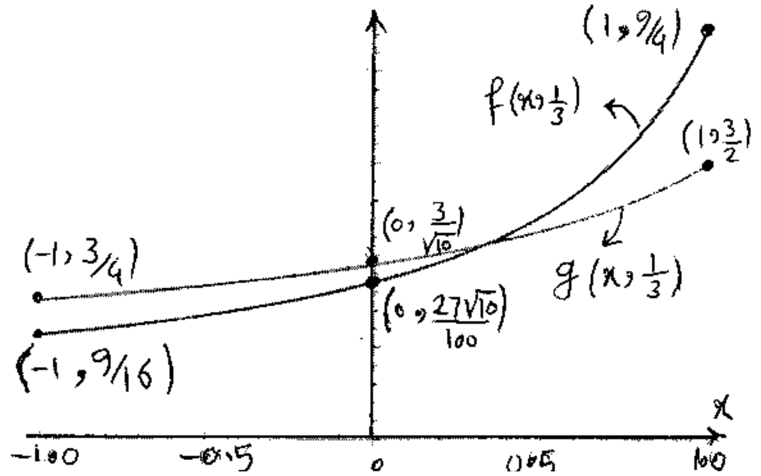
$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta_n)^{1/2}}$$

د)

$$f(x_n,\alpha)=\frac{1-\alpha x_n}{(1+\alpha^2-2\alpha x_n)^{3/2}} \quad , \quad f(x,\alpha)=\frac{1-\alpha x}{(1+\alpha^2-2\alpha x)^{3/2}}$$

$$g(x_n,\alpha)=\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha x_n)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad g(x,\alpha)=\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha x)^{1/2}}$$

$$f\left(x,\tfrac{1}{3}\right)=\frac{1-\frac{x}{3}}{\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}x\right)^{3/2}} \qquad g\left(x,\tfrac{1}{3}\right)=\frac{1}{\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}x\right)^{1/2}}$$



آ) اگر مطابق شکل، θ را از محور x بسنجیم، درصورتی امکان برخورد نور بازتابی به پرده y وجود دارد که $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ باشد.

به ازای $N=3$، شروع انعکاس از یک آینه معین در $\theta = -\frac{\pi}{3}$ است. از مقایسهٔ این بازه با بازهٔ $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ کسر $g = \frac{90^\circ}{120^\circ} = \frac{3}{4}$ به دست می‌آید. در این حالت ΔL کل محور y را در بر می‌گیرد و $f \longrightarrow \infty$

به ازای $N=4$ بازه‌ای که نور پس از انعکاس به پرده می‌خورد همان $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ است پس $g = \frac{90^\circ}{90^\circ} = 1$. در این وضعیت نیز کل محور y به وسیلهٔ نقطهٔ روشن جاروب می‌شود و $f \to \infty$.

برای منشوری که سطح مقطع آن N ضلعی منتظم است داریم: $-\frac{\pi}{N} < \theta < \frac{\pi}{N}$.

در این وضعیت $g=1$ است. در هر یک از دو حالت حدی $\theta = \pm\frac{\pi}{N}$ زاویهٔ پرتو بازتاب با محور x، $\pm\frac{2\pi}{N}$ است، بنابراین $\Delta L = 2D\tan\frac{2\pi}{N}$ و $f = 2\tan\frac{2\pi}{N}$.

به ازای $N=6$، $g=1$ و $f = 2\tan\frac{2\pi}{6} = 2\sqrt{3}$

N	۳	۴	$N > ۴$	۶
f	∞	∞	$2\tan\frac{2\pi}{N}$	$2\sqrt{3}$
g	$\frac{3}{4}$	1	1	1

ب)

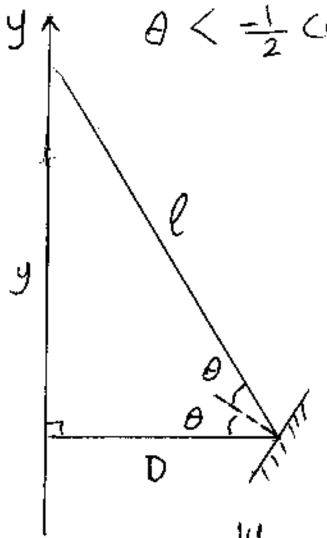
$$y = D\tan 2\theta = D\tan 2\omega t$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\omega D\,(1+\tan^2 2\omega t) = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t} = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\theta}$$

به ازای $v > V$ باید $|\cos 2\theta| < \sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$

$$\Downarrow$$

$$\theta < -\frac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{2\omega D}{V}} \quad \text{یا} \quad \theta > \frac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$$



پ)

$$t = t_m + \frac{l}{c} \quad \text{و} \quad l = \frac{D}{\cos 2\theta}$$

$$t = t_m + \frac{D}{c}\frac{1}{\cos 2\omega t_m}$$

ت)

$$y = D\tan 2\theta = D\tan 2\omega t_m$$

ث)

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt_m}\left(\frac{dt}{dt_m}\right)^{-1}$$

$$v = 2\omega D\left(\frac{1}{\cos^2 2\omega t_m}\right)\left(1+\frac{D}{c}\frac{2\omega \sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m}\right)^{-1}$$

$$v = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t_m + \frac{2\omega D}{c}\sin 2\omega t_m}$$

ج)

$$\alpha = \frac{\omega D}{c} \qquad \theta = \omega t_m \Leftarrow \cos^2 2\theta = 1-P^2, \ \sin 2\theta = P$$

$$\frac{v}{c} = \frac{2\alpha}{1-P^2+2\alpha P}, \qquad \frac{2\omega D}{v} = 1-P^2+2\alpha P$$

به ازای $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftarrow -1 < \sin 2\theta < 1 \Leftarrow -1 < P < 1$

اگر $r(P)$ و $q(P)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$r(P) = 1-P^2+2\alpha P$

$\frac{dr}{dP} = 0 \Rightarrow P = \alpha \Rightarrow r(\alpha) = 1+\alpha^2$

$r(P) = 0 \Rightarrow P_0 = \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}$

$r(-1) = -2\alpha$

$r(1) = 2\alpha$

$r(0) = 1$

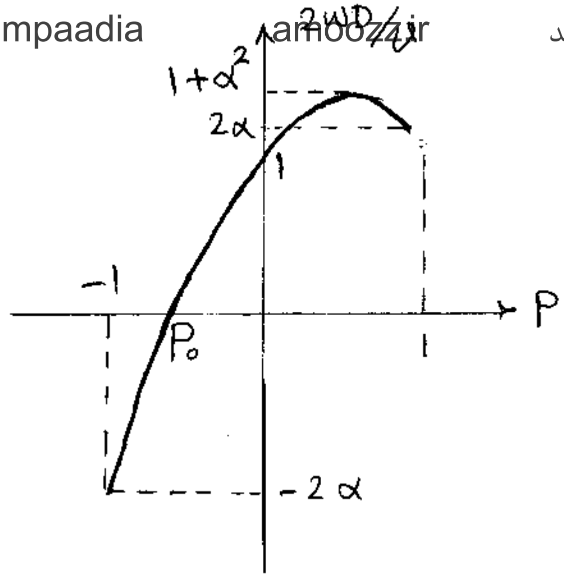
$q(P) = \frac{2\alpha}{1-P^2+2\alpha P}$

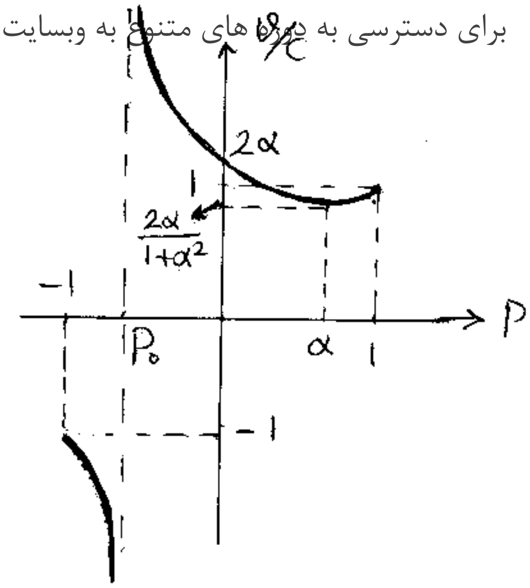
$\frac{dq}{dP} = 0 \Rightarrow \frac{4\alpha(P-\alpha)}{(1-P^2+2\alpha P)^2} = 0 \Rightarrow P = \alpha$

$q(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ و $q(-1) = -1$ و $q(1) = 1$

$q(0) = 2\alpha$

مجانب $\frac{v}{c} \to \pm\infty \Rightarrow P_0 = \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}$





چ) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب P مشخص است که برای کلیه P های منفی و P های مثبتی که $P<P_1$ است اندازه سرعت از c بیشتر است که P_1 برابر است با

$$\frac{v}{c}=1 \Rightarrow \frac{2\alpha}{1-P_1^2+2\alpha P_1}=1 \Rightarrow P_1=\begin{cases}1\\ 2\alpha-1 \quad \text{قابل قبول}\end{cases}$$

یعنی به ازای $-1<P<2\alpha-1$ داریم $\frac{v}{c}>1$. بر حسب θ خواهد شد:

$$-1<\sin 2\theta<2\alpha-1 \quad \text{که} \quad \frac{1}{2}<\alpha<1$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{1}{2}\sin^{-1}(2\alpha-1)$$

ح) با توجه به مفهوم مشتق:

$$dt=\left(\frac{dt}{dt_m}\right)dt_m$$

$$T=\left(1+\frac{2\omega D}{c}\frac{\sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m}\right)T_0$$

همواره $T>T_0$ است.

۵ آ)

$$U(x) = mg\left(L - \sqrt{L^2 - x^2}\right)$$

$$\sqrt{L^2 - x^2} = L\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx L\left(1 - \frac{x^2}{2L^2}\right)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} m\left(\frac{g}{L}\right) x^2 \qquad \Rightarrow k = mg/L$$

ب)

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \qquad v \approx v_x \quad و \quad v \approx$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m v a + k x v = 0 \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{-k}{m} = -\frac{g}{L}$$

پ)

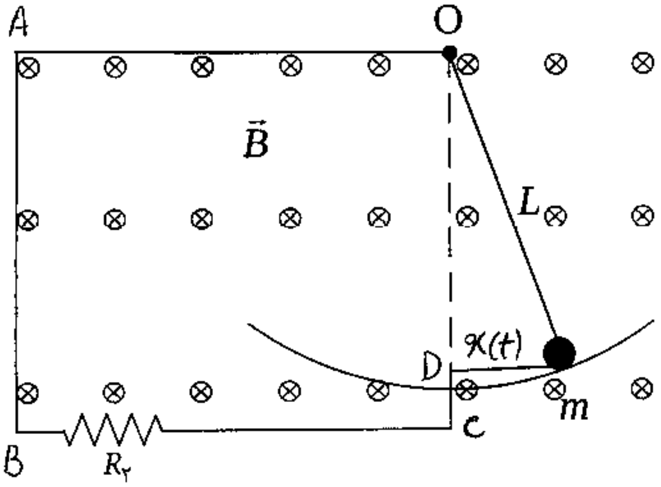
$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \beta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \beta) = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{a}{x} = -\omega^2$$

از مقایسه با قسمت ا) $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

در $t=0$ داریم $v=0$ و $x=A$ بنابراین

$$0 = -A\omega \sin\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = A\cos\omega t \quad یا \quad x = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)$$



ت) در وضعیت نشان داده شده در شکل مساحت مدار برابر است با

$$A = A_0 + a(t)$$

که A_0 مساحت مستطیل $OABC$ و $a(t)$ مساحت مثلث کوچک ODm است.

$$a(t) = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - x^2(t)}\; x(t)$$

$$= \frac{1}{2} L\, x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} L\, x(t)$$

$$\Phi = BA \quad , \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\underset{\uparrow}{A_0} + a(t)\right)B = -B\frac{da(t)}{dt} = -\frac{LB}{2} v(t)$$

با زمان ثابت است

ث) این بار

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2$$

که $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ و $k = \frac{mg}{L}$ و $i = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2}$ ، $R = R_1+R_2$

بنابراین

$$m v a + k x v = -\frac{\left(-\frac{1}{2}LBv\right)^2}{R_1+R_2}$$

$$ma + \frac{L^2B^2}{4(R_1+R_2)}v + kx = 0 \Rightarrow b = \frac{L^2B^2}{4(R_1+R_2)}$$

ج) به ازای $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta)$ داریم

$$v = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta) + Ae^{-\gamma t}(-\omega')\sin(\omega' t+\beta)$$

$$a = A(\gamma^2 - \omega'^2)e^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta) + 2A\omega'\gamma e^{-\gamma t}\sin(\omega' t+\beta)$$

با قرار دادن در معادله $ma + bv + kx = 0$ و برابر قرار دادن ضرایب کمیت های مستقل $Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta)$ و $A\sin(\omega' t+\beta)e^{-\gamma t}$ خواهیم داشت

$$m(\gamma^2 - \omega'^2) - b\gamma + k = 0 \quad , \quad k = \frac{mg}{L}$$

$$2m\gamma\omega' - b\omega' = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{b}{2m}$$

با قرار دادن معادله اول

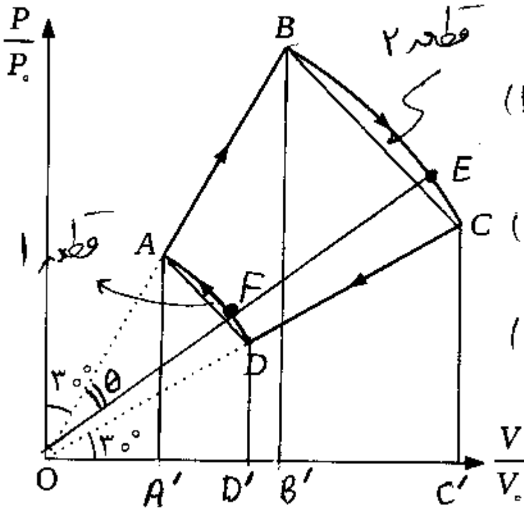
$$\omega'^2 = \frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

برحسب کمیت های معلوم

$$\gamma = \frac{L^2B^2}{8m(R_1+R_2)}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{L^2B^2}{8m(R_1+R_2)}\right)^2}$$

۱۶) آ)



معادله کمان AD: $(1)\ \left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=1$

معادله کمان BC: $(2)\ \left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=4$

معادله خط DC: $(3)\ \frac{P}{P_0}=\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)\frac{V}{V_0}$

معادله خط AB: $(4)\ \frac{P}{P_0}=\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)\frac{V}{V_0}$

از معادلات (۱) و (۴):

$V_A=\frac{V_0}{2}$ و $P_A=\frac{\sqrt3}{2}P_0$

از معادله $PV=nRT$

$T_A=\frac{\sqrt3}{4}T_0$ که $T_0=\frac{P_0V_0}{nR}$

از معادلات (۲) و (۴) و معادله حالت گاز کامل

$V_B=V_0$ ، $P_B=\sqrt3\,P_0$ و $T_B=\sqrt3\,T_0$

به طور مشابه

$V_C=\sqrt3\,V_0$ ، $P_C=P_0$ و $T_C=\sqrt3\,T_0$

$V_D=\frac{\sqrt3}{2}V_0$ ، $P_D=\frac{1}{2}P_0$ و $T_D=\frac{\sqrt3}{4}T_0$

ب)

$W_{A\to B}=-(ABB'A'\ \text{مساحت ذوزنقه})$

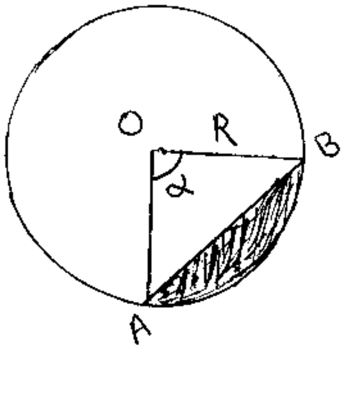
$=-(P_A+P_B)\frac{1}{2}(V_B-V_A)=-\frac{3\sqrt3}{8}P_0V_0$

به طور مشابه

$W_{C\to D}=+(CDD'C'\ \text{مساحت ذوزنقه})$

$=\frac{3\sqrt3}{8}P_0V_0$

برای ادامه حل باید ابتدا مساحت یک قطعه از دایره (ناحیه بین کمان دایره و وتر) را به دست می آوریم



$S_{\text{قطعه}}=S_{\overset{\frown}{OAB}}-S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{R^2}{2}\alpha-\frac{1}{2}\left(R\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(2R\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$S_{\text{قطعه}}=\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$

$$W_{B\to C} = -(\text{مساحت ذوزنقه } BCC'B' + \text{مساحت قطعه } 2)$$

$$= -\left[(P_B+P_C)\frac{1}{2}(V_C-V_B) + \frac{2^2}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)P_0V_0\right]$$

$$= -\left[P_0V_0 + \left(\frac{\pi}{3}-1\right)P_0V_0\right] = -\frac{\pi}{3}P_0V_0$$

$$W_{D\to A} = \left[\text{مساحت ذوزنقه } ADD'A' + \text{مساحت قطعه } 1\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4}P_0V_0 + \left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)P_0V_0\right] = \frac{\pi}{12}P_0V_0$$

پ)

$$W_{\text{چرخه}} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A}$$

$$W_{\text{چرخه}} = -\frac{\pi}{4}P_0V_0$$

ت)

$$\Delta U = Q + W$$

$$Q_{A\to B} = U_B - U_A - W_{A\to B}$$

$$= \left(\frac{3}{2}nRT_B - \frac{3}{2}nRT_A\right) - W_{A\to B} = \left[\frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right]P_0V_0$$

$$Q_{A\to B} = \frac{3\sqrt{3}}{2}P_0V_0$$

به طور مشابه

$$Q_{B\to C} = \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3}P_0V_0\right)\right] = \frac{\pi}{3}P_0V_0$$

$$Q_{C\to D} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}P_0V_0$$

$$Q_{D\to A} = -\frac{\pi}{12}P_0V_0$$

ث) از قانون اول ترمودینامیک:

$$dU = dW + dQ$$

$$d\left(\frac{3}{2}nRT\right) = -PdV + dQ$$

$$\frac{3}{2}d(PV) = -PdV + dQ$$

$$dQ = \frac{5}{2}PdV + \frac{3}{2}VdP$$

در تحول BC :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=4$$

$$P=P_0\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2} \Rightarrow dP=-P_0\frac{\frac{V}{V_0^2}}{\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}}dV$$

$$dQ=dV\left(\frac{5}{2}P_0\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}-\frac{3}{2}P_0\frac{V^2/V_0^2}{\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}}\right)$$

$$\left.\frac{dQ}{dV}\right|_{V=V_E}=0 \Rightarrow \left(\frac{V_E}{V_0}\right)^2=\frac{5}{2} \Rightarrow V_E=\sqrt{\frac{5}{2}}V_0 \text{ و } P_E=\sqrt{\frac{3}{2}}P_0$$

$$T_E=\sqrt{\frac{15}{4}}T_0$$

در تحول DA :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=1$$

$$\left.\frac{dQ}{dV}\right|_{V=V_F}=0 \Rightarrow \left(\frac{V_F}{V_0}\right)^2=\frac{5}{8} \Rightarrow V_F=\sqrt{\frac{5}{8}}V_0 \text{ و } P_F=\sqrt{\frac{3}{8}}P_0$$

$$T_F=\sqrt{\frac{15}{64}}T_0$$

ج) بنابر قسمت ث):

$$Q_{B\to E}>0 \text{ و } Q_{E\to C}<0$$

$$Q_{D\to F}>0 \qquad Q_{F\to A}<0$$

$$Q_+=Q_{A\to B}+Q_{B\to E}+Q_{D\to F}$$

مطابق شکل: $\theta=\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$W_{F\to A}=(\text{ساحت قطعه } AF + \text{ ساحت ذوزنقه } AFF'A')$$

$$=(P_F+P_A)\frac{1}{2}(V_F-V_A)+\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)P_0V_0$$

اما : $\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)$

$$W_{F\to A}=\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)P_0V_0$$

$$Q_{F\to A}=U_A-U_F-W_{A\to F}=\frac{3}{2}nR(T_A-T_F)-W_{A\to F}$$

$$Q_{F\to A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)P_0V_0$$

به طور مشابه

$$Q_{B\to E} = U_E - U_B - W_{B\to E}$$

$$= \frac{3}{2}nR\,(T_E - T_B) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)P_0V_0$$

$$Q_{B\to E} = \left(\sqrt{15} - 2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)P_0V_0$$

سرانجام

$$Q_+ = Q_{A\to B} + Q_{B\to E} + \left(Q_{D\to A} - Q_{F\to A}\right)$$

$$Q_+ = \left(\frac{5\sqrt{15}}{4} + \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} - \frac{5}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)P_0V_0$$

۷ آ)

$$T_1 \cos\theta - T_2 \cos\theta = mg$$

$$T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta = M \frac{l}{2} \sin\theta\, \omega^2$$

$$T_2 \cos\theta = mg$$

ب) به ازای $\theta \neq 0$:

$$T_1 - T_2 = \frac{M}{m} T_2$$
$$T_1 + T_2 = M \frac{l}{2} \omega^2 \Rightarrow T_2 = \frac{M \frac{l}{2} \omega^2}{2 + \frac{M}{m}}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{T_2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2g}{l\omega^2}\left(\frac{2m}{M} + 1\right)$$

$$\cos\theta < 1 \Rightarrow \frac{2g}{l\omega^2}\left(\frac{2m}{M} + 1\right) < 1 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\frac{2m}{M} + 1\right)}$$

پ) به ازای $\omega = 2\omega_m$ از معادلات قسمت ب):

$$\cos\theta = \frac{1}{4}, \quad T_2 = 4mg, \quad T_1 = 4(m+M)g, \quad \frac{l}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{8} l$$

ت)

(۱) $T\cos\theta - T\cos\varphi = Mg$

(۲) $T\sin\theta + T\sin\varphi = M(l-d)\sin\theta\, \omega^2$

(۳) $T\cos\varphi = mg$

ث) از هندسه شکل ۲ شعاع دایره مسیر

(۴) $(l-d)\sin\theta = d\sin\varphi$

به ازای $M = 2m$: از تقسیم معادله (۱) به معادله (۳):

(۵) $\cos\theta = 3\cos\varphi$

با قرار دادن (۴) و (۵) در $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$:

(۶) $$\cos^2\theta = \frac{2u-1}{u^2/9 - (1-u)^2}$$

ج) با قرار دادن $\sin\varphi$ از معادلهٔ (۴) در معادله (۲):

$$T\,\frac{l}{d} = 2m(l-d)\omega^2$$

با قرار دادن معادله (۳) در معادله (۱)

$$T\cos\theta = (m+2m)g$$

از حذف T بین دو معادله فوق

$$(۷)\quad \frac{l\omega^2}{g} = \frac{3}{2u(1-u)\cos\theta}$$

با قرار دادن $\cos\theta$ از معادله (۶) در معادله (۷):

$$\frac{l\omega^2}{g} = \frac{\sqrt{9(1-u)^2-u^2}}{2u(1-u)\sqrt{1-2u}}$$

چ) به ازای $u=\frac{1}{4}$:

$$\omega^2 = \frac{8\sqrt{10}}{3}\,\frac{g}{l}\ ,\quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\quad T=\sqrt{10}\,mg$$

شعاع دایره مسیر $\quad d\sin\varphi = \frac{3}{4\sqrt{10}}\,l$

ح)

$$\frac{d}{du}\left(\frac{l\omega^2}{g}\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{d}{du}\sqrt{9(1-u)^2-u^2}\right)u(1-u)\sqrt{1-2u}$$
$$-\frac{d}{du}\left(u(1-u)\sqrt{1-2u}\right)\sqrt{9(1-u)^2-u^2}=0$$

$$\frac{8u-9}{\sqrt{9(1-u)^2-u^2}}\,u(1-u)\sqrt{1-2u} = \frac{5u^2-5u+1}{\sqrt{1-2u}}\sqrt{9(1-u)^2-u^2}$$

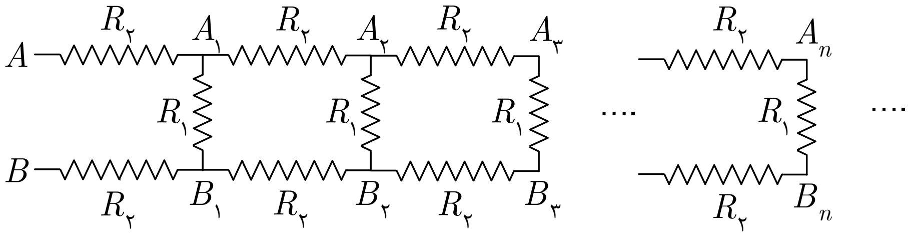
$$(8u-9)\,u(1-u)(1-2u) = (5u^2-5u+1)\left(9(1-u)^2-u^2\right)$$

$$u^4-\frac{11}{3}u^3+\frac{9}{2}u^2-\frac{9}{4}u+\frac{3}{8}=0$$

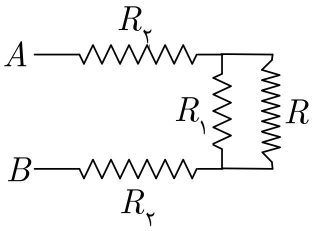
$$c_0=\frac{3}{8}\ ,\quad c_1=-\frac{9}{4}\ ,\quad c_2=\frac{9}{2}\ ,\quad c_3=\frac{-11}{3}$$

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

۱) در مدار شکل ۱، الگوی مقاومت‌های $R_2 - R_1 - R_2$ بین دو نقطهٔ A و B بی‌نهایت بار تکرار می‌شود.



شکل ۱



شکل ۲

چون الگوی سه مقاومت تا بی‌نهایت تکرار می‌شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی‌کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطهٔ A و B برابر R باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می‌شود.

آ) مقاومت R بین دو نقطهٔ A و B را برحسب R_1 و R_2 به‌دست آورید.

در بخش‌های زیر فرض کنید منبع ولتاژ V_0 را به دو سر A و B وصل کرده‌ایم.

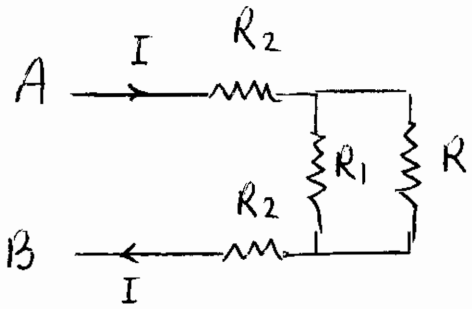
ب) ولتاژ V_1 بین A_1 و B_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0، R_2 و R چقدر است؟

پ) ولتاژ بین A_n و B_n روی دو سر nامین R_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0، R_2، R و n چقدر است؟

ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت‌های R_1 را با P_1 نشان می‌دهیم. P_1 را بر حسب V_0، R_1 و R_2 به دست آورید.

ث) با فرض آن که $x = \dfrac{R_1}{R_2}$ و $y = \dfrac{P_1}{P}$ که P توان کل مصرفی در مدار است، رابطهٔ y برحسب x را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

مسئله ۱)



آ)

$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$\boxed{R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \qquad (1)$$

ب)

$$I = \frac{V_0}{R} \quad , \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2 I$$

$$\boxed{V_1 = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

پ)

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2$$

$$\boxed{V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n}$$

ت) توان مصرفی در n امین R_1 را با $P_n^{(R_1)}$ نشان می‌دهیم

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1}\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی از همه R_1 ها:

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

$$= \frac{V_0^2}{R_1}\,\frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \qquad (2)$$

با قرار دادن R از معادله (۱) در (۲) و ساده کردن جواب:

$$\boxed{P_1 = \frac{V_0^2\left(R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}\right)}{2R_1\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}}$$

ت)

توان کل مصرفی در مدار

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

پس از ساده کردن y در معادله

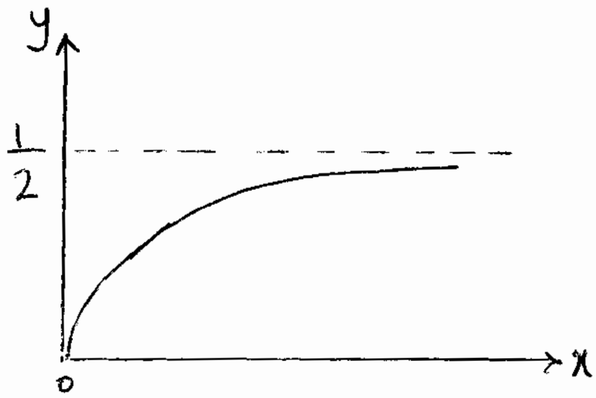
$$y = \frac{P_1}{P}$$

به نتیجه زیر می‌رسیم

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}\right)$$

اگر $\frac{R_1}{R_2}$ را x بنامیم و $x = \frac{R_1}{R_2}$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)}$$



۲) در پدیدهٔ دوپلر اگر یک چشمهٔ صوتی متحرک با بسامد f_s با سرعت لحظه‌ای v_s حرکت کند، بسامد دریافت شده توسط یک گیرندهٔ ساکن $f = f_s \dfrac{u}{u \pm v_s}$ است که u سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می‌شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می‌شود. در صورتی که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد f_s در لحظهٔ t' از چشمه منتشر شود، در لحظهٔ متفاوت t توسط گیرنده دریافت می‌شود. در این حالت v_s در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظهٔ t' است و f بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظهٔ t است.

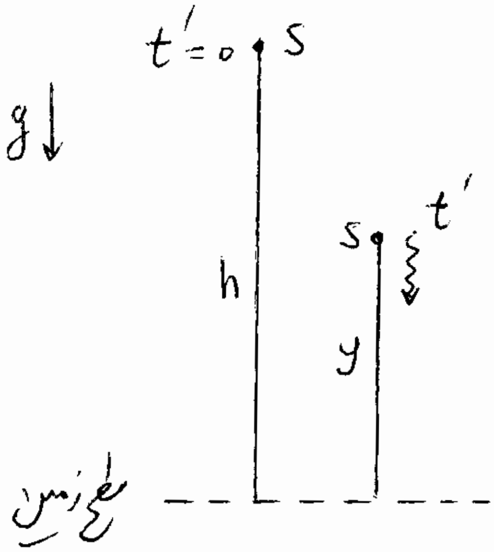
حال فرض کنید یک چشمهٔ صوتی با بسامد f_s از ارتفاع h از سطح زمین در لحظه $t' = ۰$ از حال سکون رها شود. گیرنده‌ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد $f(t)$ دریافت شده بر حسب زمان را اندازه‌گیری می‌کند. فرض کنید چشمه در زمان t' بعد از رها شدن، صوت با بسامد f_s منتشر می‌کند. شتاب گرانش را g بگیرید و از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

آ) زمان t' را بر حسب u، g، h و t به دست آورید.

ب) سرعت چشمه در زمان t' یعنی $v_s(t')$ را بر حسب u، g، h و t به دست آورید.

پ) بسامد اندازه‌گیری شده توسط گیرندهٔ روی زمین در زمان t، یعنی $f(t)$ را بر حسب f_s، u، g، h و t به دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

ت) نشان دهید $\dfrac{۱}{f^۲} = A + Bt$ و A و B را بر حسب f_s، u، g و h تعیین کنید.



مسئله ۲)

آ) چشمه در لحظهٔ $t'=0$ در ارتفاع h از سطح زمین

و در لحظهٔ t' در ارتفاع y از سطح زمین است

و سرعت آن v_s است

$$v_s = gt' \quad , \quad y = h - \frac{1}{2}gt'^2$$

صوت در لحظهٔ t' ارسال می‌شود و در لحظهٔ t

به گیرنده روی زمین می‌رسد

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادلهٔ اخیر

$$g t'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$\boxed{t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}}$$

ب)

$$\boxed{v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

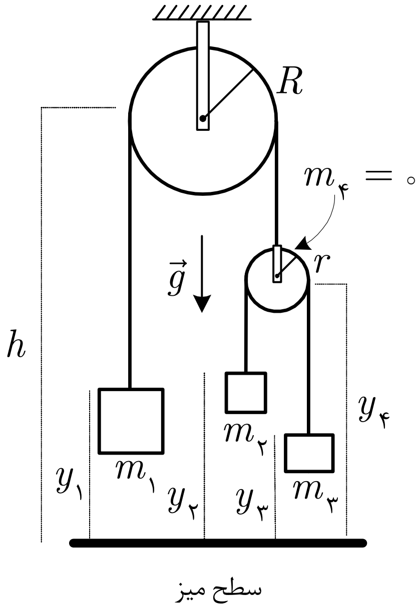
پ)

$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

$$\boxed{f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}}$$

ت) داریم $\frac{1}{f^2(t)} = \frac{1}{f_s^2}\left(1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u}\right)$ در نتیجه

$$\boxed{A = \frac{1}{f_s^2}\left(1 + \frac{2gh}{u^2}\right) \quad , \quad B = -\frac{2g}{u f_s^2}}$$



۳) سه جسم به جرم‌های m_1، m_2 و m_3 به یک مجموعه نخ و قرقره مطابق شکل متصل‌اند. قرقرهٔ متحرک را جسم چهارم به جرم $m_4 = 0$ در نظر بگیرید. قرقرهٔ ثابت و نخ‌ها نیز بدون جرم هستند. شتاب گرانش g، شعاع قرقرهٔ ثابت R، شعاع قرقرهٔ متحرک r، طول نخ روی قرقرهٔ ثابت D و طول نخ روی قرقرهٔ متحرک d است. در لحظهٔ $t = 0$ در حالی که جرم‌ها در فواصل اولیهٔ y_{10}، y_{20}، y_{30} و y_{40} از سطح میز قرار دارند، دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. شتاب این چهار جسم نیز به ترتیب a_1، a_2، a_3 و a_4 است.

آ) ارتفاع جرم‌ها از سطح میز در لحظهٔ دلخواه t را به ترتیب y_1، y_2، y_3 و y_4 بگیرید. D و d را بر حسب این کمیت‌ها، h فاصلهٔ مرکز قرقرهٔ ثابت از سطح میز، R و r بنویسید.

ب) در روابطی که در قسمت آ به دست آوردید، به ازای $i = 1,2,3,4$، هر کدام از y_iها را بر حسب زمان، شتاب مربوطهٔ a_i و فاصلهٔ اولیه از سطح میز y_{i0} بنویسید.

پ) روابط قسمت ب را برای لحظهٔ $t = 0$ بنویسید و با ترکیب نتیجهٔ به دست آمده با روابط قسمت ب، دو رابطهٔ مستقل بین شتاب‌ها به دست آورید.

ت) قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های m_1، m_2، m_3 و قرقرهٔ متحرک بنویسید و با استفاده از رابطهٔ بین شتاب‌ها که در قسمت پ به دست آوردید، کلیهٔ شتاب‌ها و کشش نخ‌ها را بر حسب جرم‌ها و شتاب گرانش به دست آورید.

ث) جسم m_2 چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟

ج) با فرض $y_{20} = y_{30}$، مدت زمانی که طول می‌کشد تا لبهٔ بالایی جسم m_2 هم‌تراز با پایین‌ترین نقطهٔ قرقره متحرک شود، چقدر است؟

مسئله ۳)

آ)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (h-y_1) + \pi R + (h-y_4) \\ d &= (y_4-y_2) + \pi r + (y_4-y_3) \end{aligned}}$$

ب)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \left(h-\tfrac{1}{2}a_1t^2-y_{10}\right) + \pi R + \left(h-\tfrac{1}{2}a_4t^2-y_{40}\right) \\ d &= \left(\tfrac{1}{2}a_4t^2+y_{40}-\tfrac{1}{2}a_2t^2-y_{20}\right) + \pi r + \left(\tfrac{1}{2}a_4t^2+y_{40}-\tfrac{1}{2}a_3t^2-y_{30}\right) \end{aligned}}$$

پ) روابط قسمت آ) برای لحظه $t=0$ نیز باید درست باشند یعنی

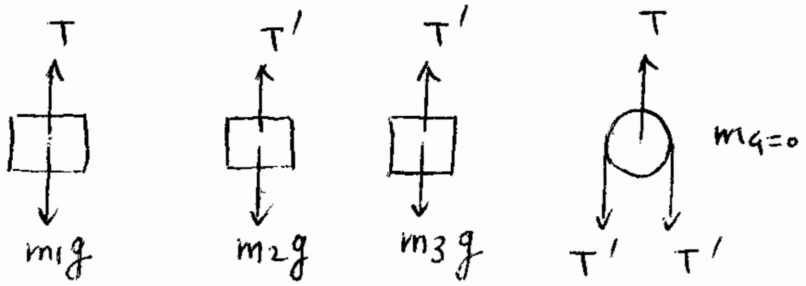
$$D = (h-y_{10}) + \pi R + (h-y_{40})$$

$$d = (y_{40}-y_{20}) + \pi r + (y_{40}-y_{30})$$

از مقایسه با روابط قسمت ب) باید

$$\begin{cases} -\tfrac{1}{2}a_1t^2-\tfrac{1}{2}a_4t^2=0 \\ a_4t^2-\tfrac{1}{2}a_2t^2-\tfrac{1}{2}a_3t^2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_1+a_4&=0 \\ 2a_4-a_2-a_3&=0 \end{aligned}} \Rightarrow -2a_1-a_2-a_3=0 \quad (1)$$

ت) نمودار جسم آزاد



$$T-m_1g=m_1a_1 \;(2), \quad T'-m_2g=m_2a_2 \;(3), \quad T'-m_3g=m_3a_3 \;(4), \quad T-2T'-(0)g=(0)a_4 \Rightarrow T'=T/2$$

اگر معادلات (۲)، (۳) و (۴) را به ترتیب در $2m_2m_3$، m_1m_3، m_1m_2 ضرب و سپس با هم جمع کنیم، با توجه به (۱) خواهیم داشت

$$2m_2m_3(T-m_1g)+m_1m_3\left(\frac{T}{2}-m_2g\right)+m_1m_2\left(\frac{T}{2}-m_3g\right)=0$$

$$\boxed{T=\frac{8m_1m_2m_3g}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}, \quad T'=\frac{T}{2}}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲)، (۳) و (۴)؛

$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, g \quad , a_4 = -a_1$$

$$a_2 = \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, g$$

$$a_3 = \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, g$$

ث) برای اینکه $a_2 > 0$ باید

$$\boxed{\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}}$$

ج) وقتی $y_{20} = y_{30}$: $y_{20} + \frac{1}{2}(d - \pi r) = y_{40}$

می‌خواهیم $y_2(t) = y_4(t) - r$

$$\frac{1}{2}a_2t^2 + y_{20} = \frac{1}{2}a_4t^2 + y_{40} - r$$

درنتیجه

$$(a_2 - a_4)t^2 = d - r(2+\pi)$$

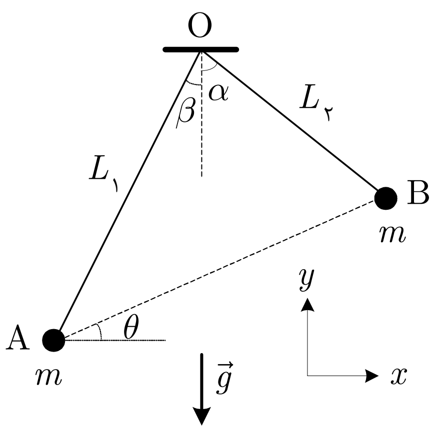
$$\frac{2(m_1m_3 - m_1m_2)g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\, t^2 = d - r(2+\pi)$$

که باید $m_3 > m_2$.

درنتیجه:

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{d - r(2+\pi)}{2g} \cdot \frac{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1(m_3 - m_2)}}}$$

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان



۴) دو گلولهٔ کوچک هر یک به جرم m دارای بار الکتریکی هم‌نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول‌های $L_۱$ و $L_۲$ متصل‌اند. دو انتهای دیگر نخ‌ها به تکیه‌گاهی واقع در نقطهٔ O بسته شده‌اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله‌ها به گونه‌ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعهٔ الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویهٔ α معلوم است.

آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y برای هر یک از گلوله‌ها بر حسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α، β، θ، اندازهٔ نیروی دافعهٔ کولنی F، mg و نیروی کشش نخ‌ها بنویسید.

ب) با استفاده از معادلات قسمت آ، $\tan\theta$ را بر حسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β به دست آورید.

پ) طول پاره خط AB را d بنامید. $d\sin\theta$ و $d\cos\theta$ را بر حسب $L_۱$، $L_۲$ و توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β بنویسید.

ت) زاویهٔ β را بر حسب $\frac{L_۲}{L_۱}$ و توابع مثلثاتی زاویهٔ α به دست آورید.

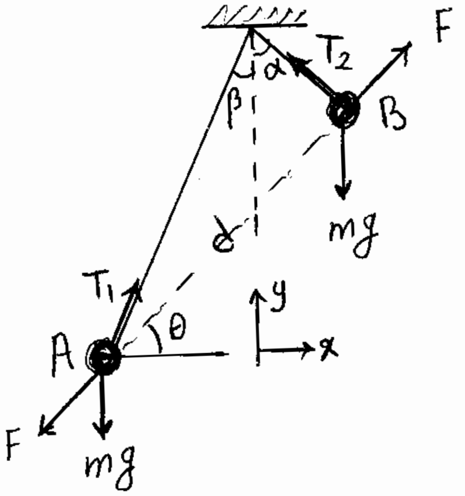
ث) نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها را بر حسب mg، $\frac{L_۲}{L_۱}$ و توابع مثلثاتی زاویهٔ α به دست آورید.

ج) به ازای $\frac{L_۲}{L_۱} = ۱$ نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها چقدر است؟

چ) فرض کنید طول نخ‌ها به اندازه‌ای است که $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ و $\beta = \frac{\pi}{۶}$ باشد. نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها و اندازهٔ نیروی دافعهٔ کولنی را بر حسب mg به دست آورید.

مسئله ۴

آ)



برای جرم m سمت راستی

$$\begin{cases} x: & F\cos\theta - T_2\sin\alpha = 0 \quad (1) \\ y: & F\sin\theta + T_2\cos\alpha - mg = 0 \quad (2) \end{cases}$$

برای جرم m سمت چپی

$$\begin{cases} x: & -F\cos\theta + T_1\sin\beta = 0 \quad (3) \\ y: & -F\sin\theta + T_1\cos\beta - mg = 0 \quad (4) \end{cases}$$

ب) با قرار دادن T_2 از معادله (۱) در معادله (۲)

$$F(\sin\theta + \cos\theta\cot\alpha) = mg \quad (5)$$

و با قرار دادن T_1 از معادله (۳) در معادله (٤)

$$F(-\sin\theta + \cos\theta\cot\beta) = mg \quad (6)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha)} \quad (7)$$

پ)

$$\boxed{\begin{aligned} d\sin\theta &= L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha \\ d\cos\theta &= L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha \end{aligned}}$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan\theta = \frac{L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha}{L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha} \quad (8)$$

ت) از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\boxed{\sin\beta = \frac{L_2}{L_1}\sin\alpha} \quad (9)$$

ث) با قرار دادن $\sin\beta$ از معادله (۹) در معادله (۷)

$$\tan\theta = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha}-\cos\alpha\right) \qquad (۱۰)$$

با حذف F بین دو معادله (۱) و (۲)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha+\cos\alpha} \qquad (۱۱)$$

و با حذف F بین دو معادله (۳) و (۴) و استفاده از معادله (۷)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha+\cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن (۱۰) در (۱۱)

$$\boxed{T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha}+\cos\alpha}} \qquad (۱۳)$$

با قرار دادن (۱۰) در (12) و استفاده از معادله (۹)

$$\boxed{T_1 = \frac{2mg\left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha}+\cos\alpha}} \qquad (۱۴)$$

ج) به ازای $L_1=L_2$

$$\boxed{T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

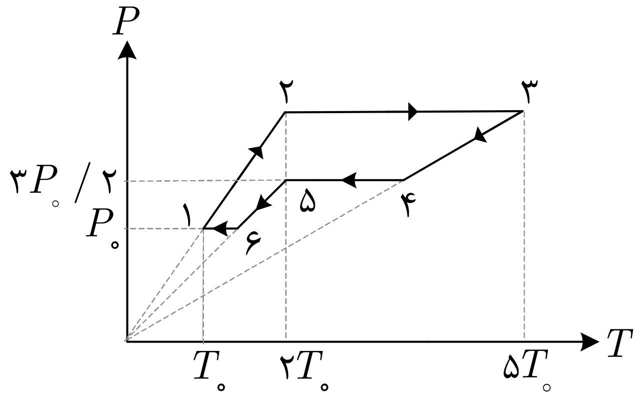
چ) به ازای $\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\beta=\frac{\pi}{6}$ از معادله (۹) خواهیم داشت $\frac{L_2}{L_1}=\frac{1}{\sqrt3}$

با قرار دادن $\frac{L_2}{L_1}$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) و $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$$\boxed{T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha}+\cos\alpha}=mg} \quad و \quad \boxed{T_1 = \frac{2\sqrt3\,mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha}+\cos\alpha}=\sqrt3\,mg}$$

از معادله (۱۰) به دست می‌آید $\cos\theta=\frac{\sqrt3}{2}$ و در نتیجه

$$\boxed{F = T_2 = mg}$$



۵) چرخهٔ ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند n مول گاز کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های $T_{\circ}$ و $P_{\circ}$ معلوم‌اند. ثابت گازها R است. انرژی داخلی n مول گاز کامل تک‌اتمی با دمای T برابر $\frac{۳}{۲}nRT$ است.

آ) چرخه را در صفحهٔ $P-V$ رسم کنید و مختصات (P,V,T) نقاط متناظر با شش نقطهٔ نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

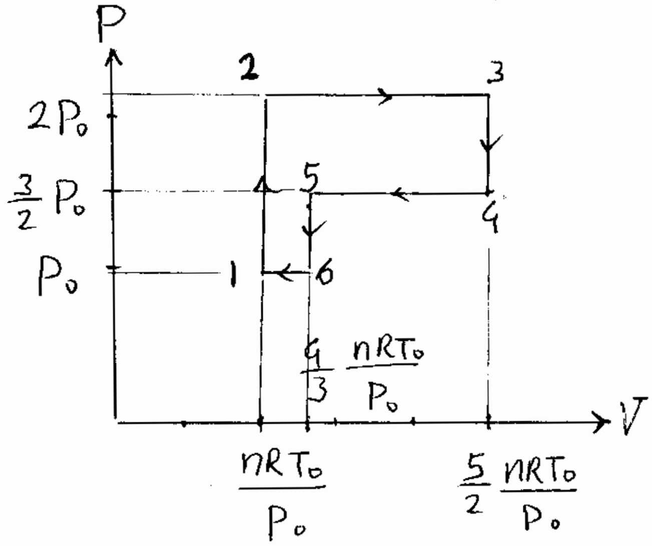
ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب n، R و $T_{\circ}$ به دست آورید. این کار مثبت است یا منفی؟

پ) در کدام یک از فرآیندهای ۲ ← ۱، ۳ ← ۲، ۴ ← ۳، ۵ ← ۴، ۶ ← ۵ و ۱ ← ۶ گاز از محیط گرما می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را بر حسب n، R و $T_{\circ}$ به دست آورید.

ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

مسئله ۵)

آ) با توجه به معادله گاز کامل $PV = nRT$ در نمودار P برحسب T شیب (ضریب زاویه)، $\frac{nR}{V}$ است، بنابراین خطوط دارای شیب یکسان هم حجم هستند



نقطه (۱) $\left(P_0 , \frac{nRT_0}{P_0} , T_0\right)$

نقطه (۲) $\left(2P_0 , \frac{nRT_0}{P_0} , 2T_0\right)$

نقطه (۳) $\left(2P_0 , \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} , 5T_0\right)$

نقطه (۴) $\left(\frac{3}{2}P_0 , \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} , \frac{15}{4}T_0\right)$

نقطه (۵) $\left(\frac{3}{2}P_0 , \frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} , 2T_0\right)$

نقطه (۶) $\left(P_0 , \frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} , \frac{4}{3}T_0\right)$

ب) کار چرخه منفی مساحت داخل چرخه $|W|$ در صفحه $P-V$ است

$$|W|_{\text{چرخه}} = \left(\frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right)\frac{P_0}{2} + \left(\frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right)\frac{P_0}{2}$$

$$\boxed{|W| = \frac{11}{12}nRT_0}$$

W چرخه منفی است.

پ) اگر Q گرمای داده شده به گاز در یک چرخه باشد

در فرآیندهای $1\to2$ و $2\to3$ گاز از محیط گرما می‌گیرد:

$$Q = Q_{1\to2} + Q_{2\to3}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$U_2 - U_1 = W_{1\to2} + Q_{1\to2}$$

$$\frac{3}{2}nR(2T_0) - \frac{3}{2}nRT_0 = 0 + Q_{1\to2} \Rightarrow Q_{1\to2} = \frac{3}{2}nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2\to3} + Q_{2\to3}$$

$$\frac{3}{2}nR(5T_0) - \frac{3}{2}nR(2T_0) = -(2P_0)\left(\frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right) + Q_{2\to3}$$

$$Q_{2\to3} = \frac{15}{2}nRT_0$$

بنابراین

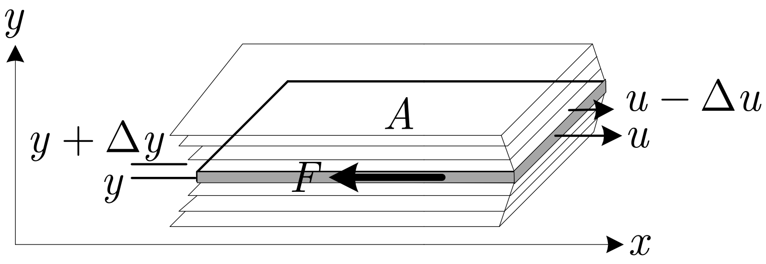
$$Q = \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{15}{2}nRT_0$$

$$\boxed{Q = 9nRT_0}$$

ت)

$$\text{بازده} = \frac{|W|_{\text{چرخه}}}{Q_{\text{گرمای داده شده}}} = \frac{11}{12}\cdot\frac{1}{9} \approx \%10$$

$$\boxed{\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \%10}$$



۶) گرانروی (Viscosity) خاصیتی از یک سیال است که باعث کندی حرکت اجسام نسبت به سیال می‌شود. سیال را به صورت لایه‌هایی با ضخامت ناچیز Δy در نظر بگیرید. اگر جسمی در راستای x با سرعت u در داخل یک سیال حرکت کند، لایه‌ای از سیال که در مجاورت آن است تقریباً همراه آن کشیده می‌شود. لایه‌های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانروی به حرکت در می‌آیند و هر چه در جهت عمود بر لایه‌های متحرک (راستای y در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن‌ها کمتر می‌شود. به بیان دیگر اگر Δu اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد، $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ کمیتی مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با سیال A باشد نیروی اصطکاک F در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می‌شود که اندازهٔ آن از رابطهٔ $F=\eta A\left|\frac{\Delta u}{\Delta y}\right|$ به دست می‌آید. در این رابطه، η ضریب گرانروی نامیده می‌شود.

آ) واحد ضریب گرانروی در دستگاه واحدهای SI را بر حسب پاسکال و سایر کمیت‌های اصلی بیان کنید.

اگر یک جسم کروی به شعاع r با سرعت u در داخل یک سیال گرانرو حرکت کند می‌توان نشان داد نیروی اصطکاک $F=۶\pi\eta ru$ به آن وارد می‌شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می‌شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانروی را می‌توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

ب) یک جسم کروی به شعاع r و چگالی ρ داخل سیالی به چگالی ρ' ($\rho>\rho'$) و ضریب گرانروی η سقوط می‌کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می‌رسد که به آن سرعت حد می‌گوییم. این سرعت را بر حسب ρ، ρ'، η، r و g به دست آورید.

پ) سرعت حد سقوط یک قطرهٔ کوچک کروی آب به قطر $۰/۴۰\,\mathrm{mm}$ را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره‌ای به قطر $۰/۱۲\,\mu\mathrm{m}$ و با چگالی نزدیک آب می‌گیریم، به دست آورید. به داده‌های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطرپاش به داخل محفظه‌ای که بین دو الکترود صفحه‌ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می‌کنند. کلیهٔ قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازهٔ زمانی ناچیزی به سرعت حد می‌رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می‌توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می‌توان از بیرون، حرکت یک قطرهٔ روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه‌گیری کرد.

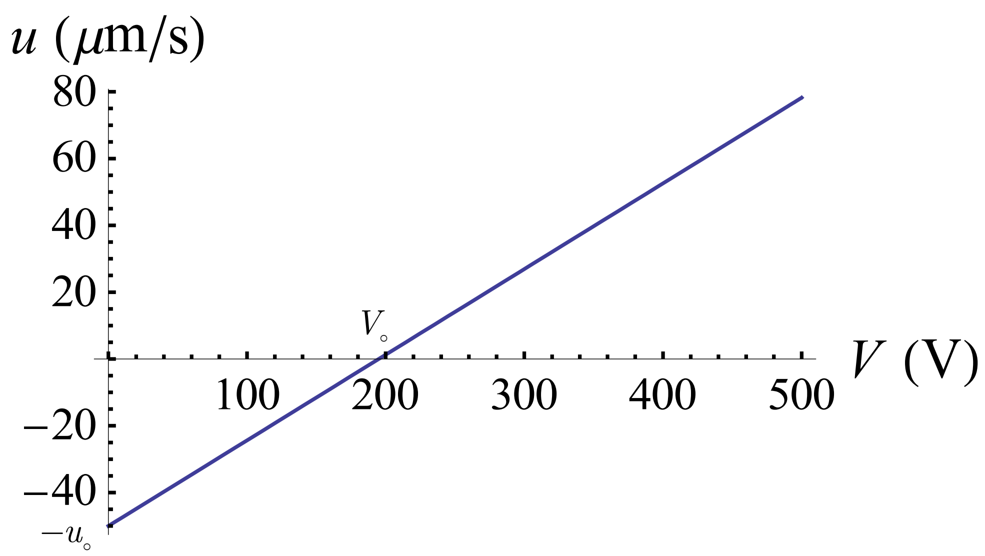
ت) در شکل زیر رابطهٔ خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحهٔ بالایی به اندازهٔ V از صفحهٔ پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا u مثبت و در حرکت به سمت پایین u منفی فرض شده است. اگر $V_۰$ و $-u_۰$ به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطهٔ خطی u بر حسب V باشد، شعاع قطرهٔ روغن و بار روی آن را بر حسب $u_۰$، $V_۰$، η (ضریب گرانروی هوا)، ρ_a (چگالی هوا)، ρ_o (چگالی روغن)، g (شتاب گرانش) و d (فاصلهٔ عمودی بین الکترودها) به دست آورید.

ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی $V_۰$ و $u_۰$ از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.

داده‌های عددی:

(روغن) $\rho_o = ۸۸۰\,\mathrm{kg/m^۳}$، (هوا) $\rho_a = ۱/۲\,\mathrm{kg/m^۳}$ ، (آب) $\rho_w = ۱۰۰۰\,\mathrm{kg/m^۳}$،

$d = ۸/۰\,\mathrm{mm}$، $g = ۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}$، (در دستگاه SI) $\eta = ۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$.



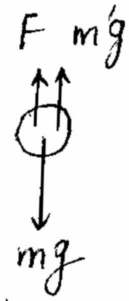
مسئلهٔ ۶

آ)

$$\frac{F}{A} = \eta \left|\frac{\Delta u}{\Delta y}\right| \Rightarrow Pa = (\eta \text{ واحد}) \left(\frac{\frac{m}{s}}{m}\right)$$

$$\boxed{(\eta \text{ واحد}) = Pa.s}$$

ب)



بعد از رسیدن به سرعت حد شتاب جسم صفر است، در نتیجه

$$F + m'g - mg = 0 \quad (a)$$

$$6\pi r\eta u_{\text{حد}} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 0$$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = \frac{2}{9}\frac{(\rho-\rho')g}{\eta} r^2}$$

F : نیروی اصطکاک

m'g : نیروی شناوری

mg : نیروی گرانش

پ) برای قطره آب به شعاع $r = 0.2\,mm$ که در هوا سقوط می‌کند $\rho' = \rho_a$

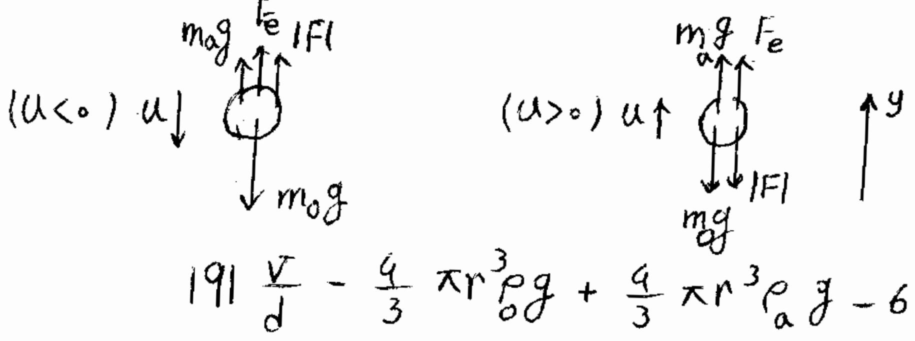
$$u_{\text{حد}} = \frac{2}{9}\frac{(\rho_w - \rho_a)g}{\eta} r^2 = \frac{2}{9}\frac{(1000-1.2)(9.8)}{1.8\times10^{-5}}(2\times10^{-4})^2$$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = 4.8\ m/s}$$

برای ویروس کرونا به شعاع $r = 0.06\,\mu m$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = 0.44\ \mu m/s}$$

ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله
در حالت تعلیق که $u=0$ است، نیروی الکتریکی وارد بر قطره روغن باید
به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را $-|q|$ می‌گیریم.



نمودار جسم آزاد برای حرکت قطره به سمت بالا و پایین:

در هر دو حالت:

$$|q|\frac{V}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi\eta r u_{\text{حد}} = 0$$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = \frac{|q|}{6\pi\eta r}\frac{V}{d} - \frac{2}{9}\frac{(\rho_o-\rho_a)g}{\eta} r^2}$$

از آنجا که $\rho_a \ll \rho_0$ است از ρ_a در مقابل ρ_0 چشم پوشی می‌کنیم. با توجه به نمودار:

به ازای $V=0$ داریم $u_{\text{حد}} = -u_0$ ، در نتیجه

$$\boxed{r=\sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta u_0}{\rho_0 g}}}$$

به ازای $u_{\text{حد}} = 0$ داریم $V = V_0$ ، در نتیجه

$$|q| = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g \frac{d}{V_0}$$

با قرار دادن مقدار r به دست می‌آوریم:

$$\boxed{|q| = \frac{18\pi d}{V_0}\sqrt{\frac{\eta^3 u_0^3}{2\rho_0 g}}}$$

ث) با توجه به نمودار $u_0 = 50\,\mu m/s$ و $V_0 = 195V$ ، در نتیجه:

$$r=\sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta u_0}{\rho_0 g}} = 3\sqrt{\frac{(1.8\times10^{-5})(5\times10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(3)(3\times10^{-5})}{4\sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9\times10^{-5}}{(4)(33)}$$

$$= \frac{30}{44}\,\mu m \Rightarrow \boxed{r \approx 0.68\,\mu m}$$

$$|q| = \frac{6\pi\eta u_0 d}{V_0} r = \frac{(6)(3.14)(1.8\times10^{-5})(5\times10^{-5})(8\times10^{-3})}{(195)} \times \frac{(30\times10^{-6})}{(44)}$$

$$= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65\times11}\times10^{-19}$$

$$= \left(\frac{54}{11}\right)\left(\frac{6.28}{6.5}\right)\times10^{-19}$$

$$\approx (5)(9.6)\times10^{-19}\,C = 4.8\times10^{-19}\,C$$

$$\boxed{|q| = 4.8\times10^{-19}\,C = 3e}$$

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۹ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و سومین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۹/۰۴/۲۰ – ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

شماره صندلی

حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.

۹- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

۱۰- استفاده از خودکار قرمز فقط جهت پاسخگویی به سوال۶ (روی نقشه) مجاز است.

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

توضیح ضروری: در این آزمون هر سؤال شامل بخش‌های توضیحی است که فرض‌های سؤال را توضیح می‌دهند. این بخش‌ها با حروف معمولی نگاشته شده‌اند. خواسته‌های سؤال با **حروف سیاه** نگاشته شده‌اند.

*** استفاده از خودکار قرمز، صرفا برای پاسخ‌گویی به قسمتی از سؤال ۶ (بر روی نقشه) مجاز می‌باشد***

سؤال ۱) نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم m با دامنه $A_\circ$ و بسامد زاویه‌ای ω حول مبدأ $x = \circ$ نوسان می‌کند و در لحظه $t = \circ$ به سمت مثبت از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

آ) معادله $x(t)$ و $v(t)$ را بنویسید که به ترتیب جابه‌جایی از مکان تعادل و سرعت لحظه‌ای نوسانگر هستند.

فرض کنید بر اثر اصطکاک با هوا یک نیروی مقاوم کوچک متناسب با سرعت به صورت $f = -bv$ بر نوسانگر اثر کند که در آن b یک ضریب ثابت است. این نیرو آن‌قدر کوچک است که در طی مدت یک دوره نوسان $(T = ۲\pi/\omega)$ تاثیر اندکی دارد و معادلات $x(t)$ و $v(t)$ را بر هم نمی‌زند. همچنین انرژی و دامنه نوسانگر در طی زمان‌هایی در حدود دوره نوسان، ثابت است؛ اما در زمان‌هایی که بسیار بزرگتر از دوره نوسان است و آنها را با τ نشان می‌دهیم، به دلیل نیروی مقاوم آرام آرام کاهش پیدا می‌کند، به‌طوری‌که آهنگ اتلاف انرژی با توان متوسط نیروی مقاوم برابر است $\left(\bar{P} = dE/d\tau\right)$. بسامد نوسانگر همواره ثابت است.

ب) توان لحظه‌ای اتلافی توسط نیروی مقاوم و متوسط آن را در یک دوره نوسان بر حسب t، b، ω و A به‌دست آورید، که در آن A دامنه در زمان مورد نظر است. (لازم به ذکر است که توان لحظه‌ای برای یک نیروی متغیر حاصل ضرب آن نیرو در سرعت متحرک است. همچنین برای حرکت‌های سینوسی مقدار متوسط عبارت‌های نوسانی مثل $\sin\omega t$، $\cos\omega t$، $\cos ۲\omega t$ و ... در یک دوره نوسان صفر است و مقدار متوسط هر عبارت ثابت برابر خود آن عبارت است.)

پ) انرژی نوسانگر بر حسب زمان‌های بزرگ، $E(\tau)$ را بر حسب $A_\circ$، ω، b، τ و m به‌دست آورید که در اینجا زمان τ در مقیاس زمان‌هایی است که بسیار بزرگتر از دوره نوسان است. (پاسخ سؤال حاوی تابعی موسوم به تابع نمایی است که خواص آن در انتهای سؤال توضیح داده شده است).

ت) $A(\tau)$ را بر حسب $A_\circ$، b و m به‌دست آورید که در اینجا نیز زمان τ در مقیاس زمان‌هایی است که بسیار بزرگتر از دوره نوسان است.

برای جبران انرژی از دست رفته نوسانگر می‌خواهیم بعد از گذشت زمان $\tau_\circ = N_\circ T$، که در آن $N_\circ$ عدد صحیح بسیار بزرگی است، با زدن ضربه‌ای به نوسانگر مجدداً انرژی آن را به مقدار اولیه برسانیم. برای این کار درست در لحظه‌ای که نوسانگر در انتهای مسیر خود با دامنه $A(\tau_\circ)$ می‌رسد به آن ضربه‌ای وارد می‌کنیم تا سرعت آن از صفر به سرعتی برسد که بعد از آن با همان دامنه $A_\circ$ به نوسان ادامه دهد.

ث) اگر ضربه در مدت زمان بسیار کوچک δt که از دوره نوسان بسیار کوچکتر است به نوسانگر نواخته شود، نیروی متوسط وارد بر نوسانگر را بر حسب b، $A_\circ$، $\tau_\circ$، ω، m، و δt به‌دست آورید.

ج) مقادیر عددی کمیت‌های مرتبط را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$m = ۱/۰ \times ۱۰^{۲} g \qquad \omega = ۱/۰ \times ۱۰^{۲} \mathrm{rad/s} \qquad b = ۱/۰ \times ۱۰^{-۳} \mathrm{kgs^{-۱}}$$

$$A_\circ = ۵/۰ \mathrm{cm} \qquad \delta t = ۲/۰ \times ۱۰^{-۴} \mathrm{s}$$

به‌ازای این داده‌ها معلوم کنید مدت زمانی که دامنه نوسان نصف می‌شود چند ثانیه است و چند برابر دوره نوسان است. همچنین با فرض آن که ضربه مذکور در بخش ث، درست در لحظه‌ای که دامنه نصف شده، به جسم نواخته شده باشد، اندازه نیروی متوسط خواسته شده در بخش ث را به‌دست آورید. جواب‌های عددی را با دو رقم با معنی حساب کنید.

خواص تابع نمایی

تابع نمایی، $\exp$، تابعی است توانی که در آن عدد گنگ $\mathrm{e} = ۲/۷۲...$ به توان متغیر می‌رسد: $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. مهمترین خاصیت این تابع آن است که مشتق آن با خودش برابر است ($\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$)، به طوری که می‌توان نوشت: $\frac{d}{dx}(A\mathrm{e}^{ax}) = a(A\mathrm{e}^{ax})$، که در آن A و a ثابت هستند. عکس تابع نمایی، لگاریتم طبیعی یا لگاریتم در پایه e است و با نماد $\ln$ نشان داده می‌شود، به طوری که $y = \mathrm{e}^x$ نتیجه می‌دهد $x = \ln y$. مفید است بدانید که تا دو رقم اعشار داریم $\ln ۲ = ۰/۶۹$

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

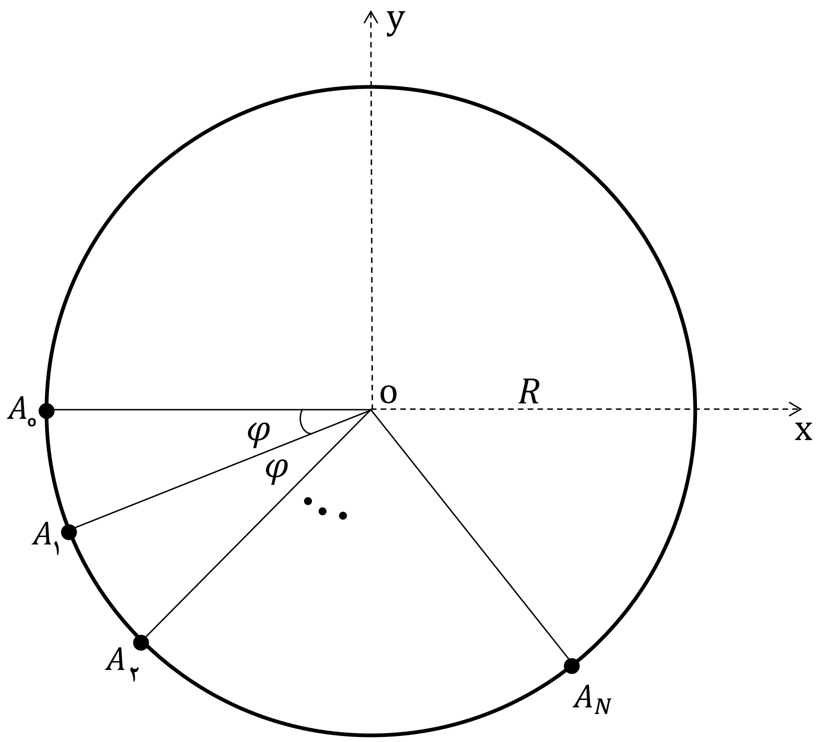
نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال ۲) آرایه‌ای از بارهای q مطابق شکل روی محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع R قرار دارند. نخستین بار در نقطه A_0 روی محور افقی و بارهای بعدی در نقاط A_1، A_2، ... و A_N قرار گرفته‌اند، به‌طوری که زاویه بین شعاع‌های واصل از نقطه O به دو نقطه متوالی A_k و A_{k+1} مقدار ثابت φ باشد. تعداد کل بارها نیز $N+1$ است.



آ) محورهای مختصات را مطابق شکل بگیرید و مولفه‌های میدان الکتریکی کل در نقطه O را به صورت یک مجموع روی $\cos n\varphi$ و یا $\sin n\varphi$ به‌دست آورید.

ب) می‌خواهیم جواب‌های سری قسمت قبل را به طور صریح به‌دست آوریم. برای این کار بردارهایی را که می‌خواهید جمع کنید دنبال هم بکشید و با استفاده از استدلال های هندسی، اندازه میدان الکتریکی کل و زاویه آن با محور x را بر حسب φ، N، q و ثابت‌های فیزیکی معین کنید و سپس مولفه‌های میدان الکتریکی کل را در امتداد محورهای x و y حساب کنید.

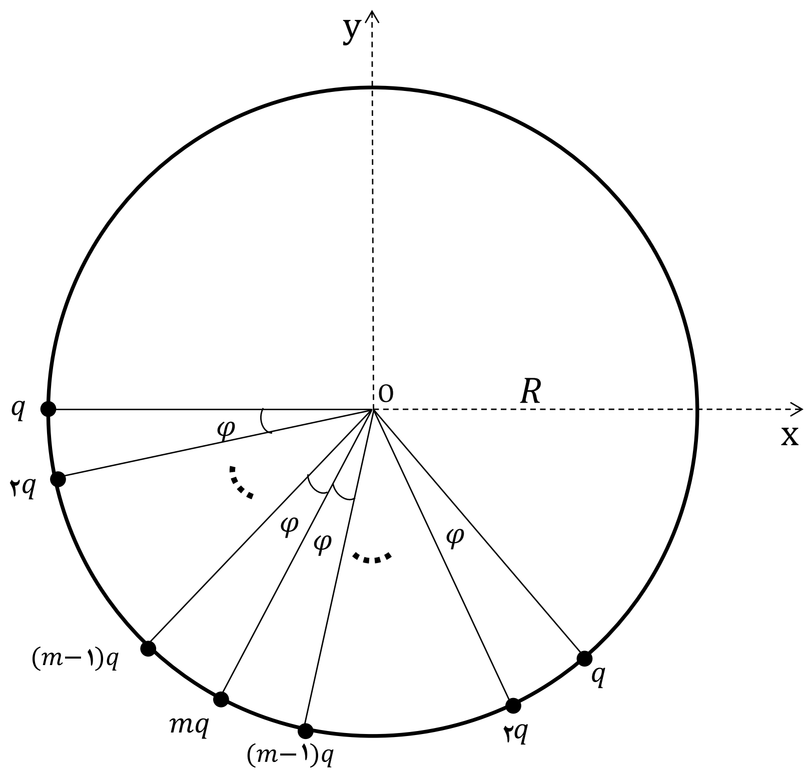
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

حال فرض کنید بارها یک در میان $+q$ و $-q$ باشند به‌طوری‌که بار اولی واقع در A_0 مثبت باشد. تعداد کل آنها نیز همان $N+1$ است.

پ) برای N زوج، مولفه‌های میدان الکتریکی در نقطه O را از روش هندسی بخش ب به‌دست آورید.

ت) برای N فرد نیز مولفه‌های میدان الکتریکی در نقطه O را از روش هندسی بخش ب به‌دست آورید.

ث) با استفاده از روش هندسی بخش ب مولفه‌های میدان الکتریکی در نقطه O را برای آرایه زیر به‌دست آورید. (جواب صریح مورد نظر است نه جواب سری)



در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال ۳) یک نمونه از یک ماده پرتوزا (یا رادیواکتیو) را در نظر بگیرید که با گذشت زمان واپاشیده می‌شود. احتمال واپاشی یک اتم در واحد زمان را ثابت واپاشی (یا فروپاشی) می‌نامند و با λ نمایش می‌دهند. این کمیت را مقدار ثابتی در نظر بگیرید.

آ) فرض کنید در لحظه t، تعداد $N(t)$ هسته پرتوزا در یک نمونه موجود باشد. پس از گذشت زمان بسیار کوچک Δt تعداد هسته های پرتوزا به مقدار ΔN تغییر می‌کند. رابطه‌ای بین ΔN، Δt و λ بیابید.

ب) با استفاده از بخش آ، $\frac{dN}{dt}$ را بر حسب N و λ بیان کنید.

پ) با استفاده از توضیحات انتهای سؤال در مورد تابع نمایی، $N(t) = a\exp(bt)$ خواهد بود. a و b را بر حسب ثابت واپاشی و N_0 (تعداد هسته‌های مادر پرتوزای موجود در نمونه در $t = 0$) بیابید.

ت) رابطه بین ثابت واپاشی و نیمه عمر نمونه (τ) را به‌دست آورید.

یک هسته مادر پرتوزای اولیه می‌تواند به دو طریق واپاشیده شود و در هر واپاشی یک هسته دختر متفاوت ایجاد شود.

ث) اگر نیمه عمر هر واپاشی τ_1 و τ_2 باشد، تعداد هسته‌های دختر تولید شده، N_1 و N_2 را در زمان t بیابید.

(هسته‌های دختر پایدار هستند و تعداد هسته‌های مادر اولیه را N_0 در نظر بگیرید.

یکی از راه‌های تولید نمونه‌های پرتوزا قرار دادن هدفی متشکل از هسته‌های پایدار در یک راکتور است. هسته‌های هدف با جذب نوترون یا ذرات باردار، نمونه پرتوزا تولید می‌کنند. آهنگ تولید یک نمونه پرتوزا (تعداد هسته‌های پرتوزای تولید شده در واحد زمان) که آن را با R نمایش می‌دهند، با تقریب بسیار خوبی مستقل از زمان بوده و کمیت ثابتی است. فرض کنید در این فرایند هسته‌های پرتوزایی با ثابت واپاشی λ تولید شود.

ج) در این حالت $\frac{dN}{dt}$ را بر حسب $N(t)$، R و λ بدست آورید که $N(t)$ تعداد هسته‌های پرتوزا در لحظه t است.

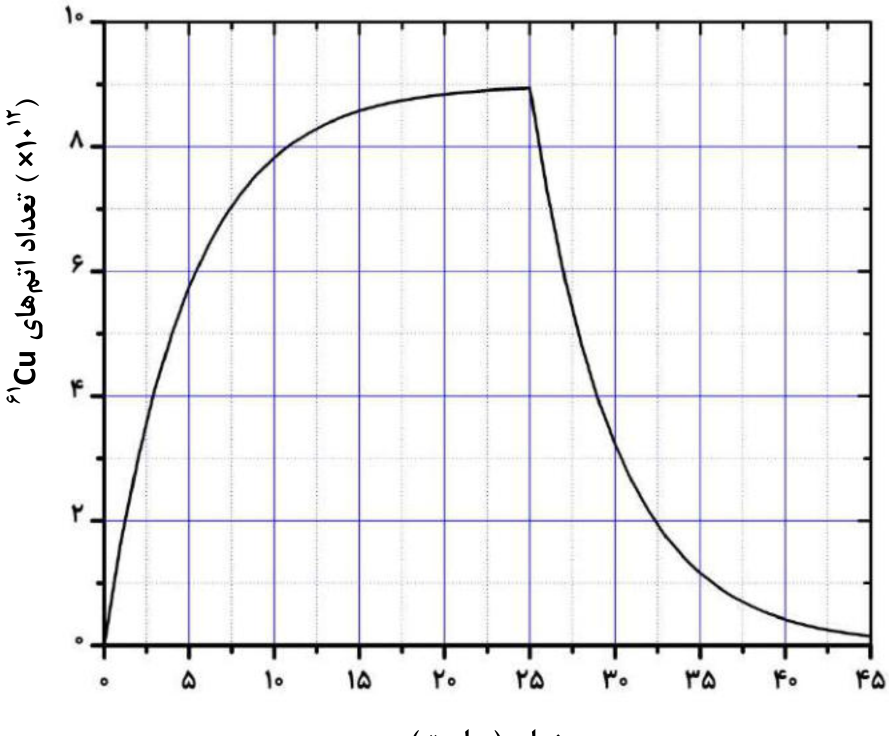
چ) اگر در زمان $t = 0$ هیچ هسته پرتوزایی در هدف وجود نداشته باشد، تعداد هسته‌های پرتوزا به صورت زیر وابسته به زمان است:

$$N(t) = \alpha + \beta\exp(\gamma t)$$

α، β و γ را بر حسب آهنگ تولید و ثابت واپاشی بیابید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

در یک راکتور، به مدت ۲۵ ساعت، هسته $^{61}\mathrm{Ni}$ توسط نوترون بمباران شده و $^{61}\mathrm{Cu}$ تولید می‌شود و سپس راکتور خاموش می‌شود. شکل زیر تغییرات تعداد اتمهای $^{61}\mathrm{Cu}$ را نسبت به زمان نشان می‌دهد.



ح) مقدار عددی ثابت واپاشی $^{61}\mathrm{Cu}$ را برحسب عکس ساعت (h^{-1}) بیان کنید.

خ) آهنگ تولید در این راکتور چقدر است؟

د) حاصل‌ضرب ثابت واپاشی در تعداد هسته‌های پرتوزا در هر لحظه را اکتیویته می‌نامند. زمان لازم برای آنکه ۷۵ درصد اکتیویته بیشینه بر اثر پرتودهی حاصل شود، چند برابر نیمه عمر است؟

خواص تابع نمایی

تابع نمایی، exp، تابعی است توانی که در آن عدد گنگ ... $\mathrm{e} = ۲/۷۲$ به توان متغیر می‌رسد: $\exp x = \mathrm{e}^x$. مهمترین خاصیت این تابع آن است که مشتق آن با خودش برابر است ($\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$)، به طوری که می‌توان نوشت: $\frac{d}{dx}(A\mathrm{e}^{ax}) = a(A\mathrm{e}^{ax})$، که در آن A و a ثابت هستند. عکس تابع نمایی، لگاریتم طبیعی یا لگاریتم در پایه e است و با نماد $\ln$ نشان داده می‌شود، به طوری که $y = \mathrm{e}^x$ نتیجه می‌دهد $x = \ln y$. مفید است بدانید که تا دو رقم اعشار داریم $\ln ۲ = ۰/۶۹$

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

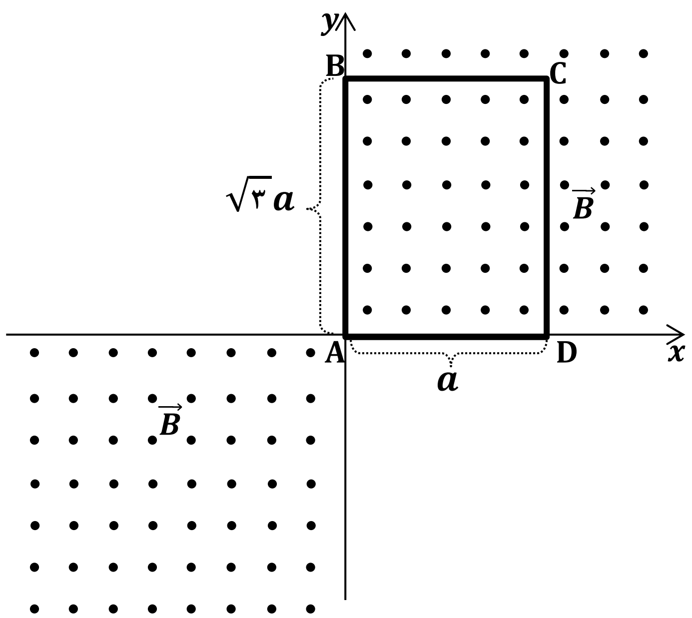
نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال ۴) قاب مستطیلی ABCD را در نظر بگیرید. مطابق شکل راس A در مبدا مختصات ثابت شده است. در زمان $t=\circ$ ضلع های $AB=\sqrt{۳}a$ و $DA=a$ بر روی محورهای مختصات و به ترتیب در جهت y+ و x+ قرار دارند. قاب مستطیلی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω شروع به دوران ساعتگرد حول مبدا مختصات می‌کند.



آ) اگر میدان $\vec{B}=B_\circ\hat{k}$ عمود بر صفحه قاب در ربع اول و سوم مختصات برقرار باشد، شار میدان مغناطیسی را در یک دور کامل چرخش در تمام زمان‌ها بر حسب a، ω، $B_\circ$ و t به‌دست آورید. (نیم خط عمود بر صفحه قاب را در جهت $\hat{k}$ در نظر بگیرید.)

ب) نیروی محرکه القایی متناظر با میدان مغناطیسی قسمت الف را به‌دست آورید.

پ) حال فرض کنید که میدان مغناطیسی در ربع اول و سوم به صورت $\vec{B}=B_\circ\cos(\omega t)\hat{k}$ باشد. در این صورت شار مغناطیسی گذرنده از قاب در لحظه t و نیروی محرکه القا شده در قاب $\varepsilon(t)$ را به‌دست آورید.

ت) نیروی محرکه القایی برای میدان مغناطیسی بخش پ را تابعی از زاویه چرخش $\theta=\omega t$ بر حسب رادیان بگیرید. معین کنید در چه بازه‌هایی از θ، نیروی محرکه القایی ساعتگرد و در چه بازه‌هایی پادساعتگرد است؟

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

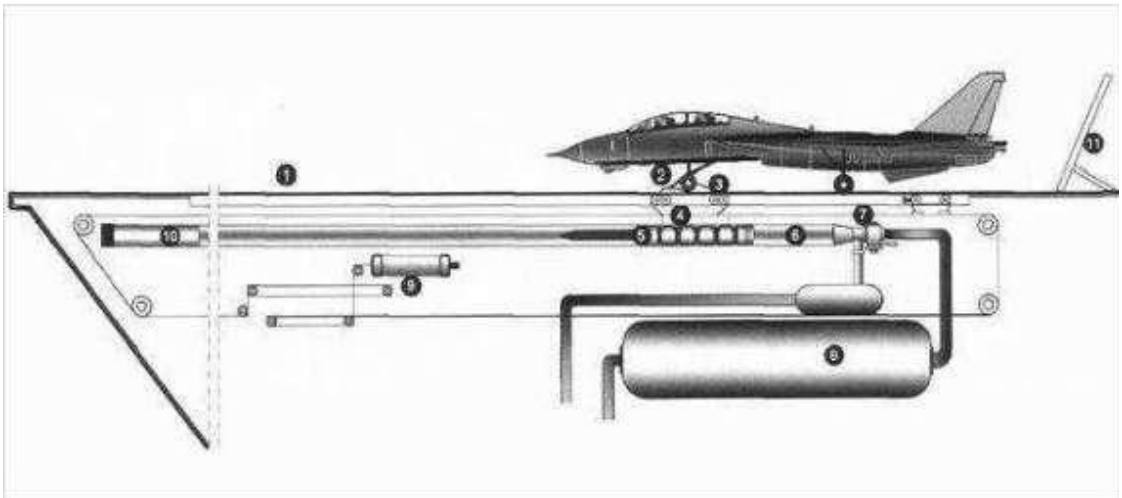
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال ۵) اطلاعات جانبی مربوط به سؤال :

ناو هواپیمابر یک کشتی جنگی است که برای حمل کردن و پوشش دادن هواپیماها و بالگردهای جنگی طراحی شده است و به عنوان یک فرودگاه شناور عمل می‌کند. این‌گونه هواپیماها می‌توانند بدون سوخت‌گیری و توقف، در مسافت‌های دور عملیات خود را انجام دهند. ناو هواپیمابر یک جنگ‌افزار بسیار گران‌قیمت است و تعداد آنها کم است. مساحت کل عرشه پروازی در یک ناو برابر با ۱/۸ هکتار یعنی ۱۸۰۰۰ متر مربع است. طول عرشه برابر با ۳۳۳ متر یعنی معادل طول سه زمین فوتبال بین‌المللی و بسیار کوچکتر از اندازه باند فرودگاه‌های معمولی است؛ و عرض عرشه پروازی برابر با ۷۸ متر یعنی بیش از متوسط عرض یک زمین فوتبال استاندارد است. به همین دلیل خلبان‌های نیروی دریایی باید مهارت‌های ویژه‌ای داشته باشند. نحوه برخاستن هواپیماها از روی ناو روش‌های گوناگونی دارد. در ناوهای اتمی از سیستمی به اسم منجنیق یا کاتاپولت (شتاب دهنده هواپیما) برای به حرکت در آوردن هواپیما استفاده می‌کنند. در این روش، هواپیما بر روی یک ریل قرار گرفته و هم‌زمان با روشن شدن موتور توسط کاتاپولت نیز به پیش رانده می‌شود. وقتی تمام این مراحل انجام گرفت، افسر کاتاپولت معروف به شوتر، که در یک گنبد شیشه‌ای روی عرشه پروازی بر تمام مراحل نظارت دارد، سوپاپ سیلندرهای کاتاپولت را باز می‌کند، در نتیجه سیلندرها توسط بخار آب پرفشار تولید شده در راکتور ناو پر می‌شوند. این بخار بخشی از نیروی رانشی لازم برای ادامه پرواز با سرعت ایمن را تأمین می‌کند. اگر میزان این بخار، که بستگی به نوع هواپیما دارد، کم باشد نیروی بالابر کافی نیست و هواپیما به داخل اقیانوس پرتاب می شود و اگر زیاد باشد موجب شکستن چراغ دماغه خواهد شد.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

یك هواپیما به جرم ۱۸ تن برای پرواز باید ضمن حرکت بر روی عرشه از حالت سکون به سرعت ۱۵۰ گره دریایی (knot) برسد. هر گره دریایی را برای سادگی $۱/۸\frac{\mathrm{km}}{h}$ در نظر بگیرید. فرض کنید ۷۵ درصد انرژی لازم برای رسیدن به این سرعت از طریق دستگاه کاتاپولت و مابقی به وسیله موتور هواپیما تامین شود. عملکرد دستگاه کاتاپولت را فرایند پیش‌رانش می‌نامیم. فشار هوای محیط را $۱۰۰\mathrm{kPa}$ بگیرید.

آ) اگر دستگاه کاتاپولت، یك سیستم سیلندر- پیستون در فشار ثابت $۱۲۵۰\mathrm{kPa}$ باشد تغییر حجم بخار آب داخل آن در طی فرایند پیش‌رانش چقدر است؟

در قسمت های بعدی سؤال فرض کنید در فرایند پیش‌رانش فشار بخار آب محبوس شده درون سیلندر در یک فرایند خطی روی نمودار P-V از $۱۲۵۰\mathrm{kPa}$ تا $۵۰۰\mathrm{kPa}$ کاهش یابد.

ب) تغییر حجم بخار آب در فرایند پیش‌رانش را حساب کنید.

پ) با فرض آن که حجم اولیه $۵۰\mathrm{m}^۳$ باشد، معادله خط مربوط به فرایند پیش‌رانش را به‌دست آورید.

ت) اگر بخار آب، یك گاز آرمانی فرض‌شود و دمای اولیه آن $T_۱ = ۵۰۰\ \mathrm{K}$ باشد، دمای نهایی انبساط $T_۲$ و دمای بیشینه ضمن انبساط، T_m، را حساب کنید.

ث) گرمای Q داده شده به گاز در فرایند پیش‌رانش، هنگامی که حجم گاز از $V_۱$ به حجم دلخواه V رسیده است را حساب کنید. فرض کنید $C_V = ۳/۵R$ که در آن R ثابت جهانی گازها است. نمودار Q بر حسب V را برای فرایند فوق به طور کیفی رسم کنید و مختصات نقاط مهم نمودار مانند نقاط تقاطع با محورها و کمینه‌ها و بیشینه‌های احتمالی را تعیین کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سؤال ۶) نقشه ارائه شده در صفحه (۶-۳)، تصویری از توپوگرافی یک منطقه کوهستانی است. در این نقشه خطوط هم‌ارتفاع، که ارتفاع آنها از سطح دریا مضربی از ۱۰۰ متر است، رسم شده و مقیاس نقشه نیز در بالای آن نوشته شده است. فرض کنید بین دو خط هم ارتفاع متوالی، ارتفاع زمین به‌طور خطی تغییر می‌کند. برخی از پاسخ‌های سوال بایستی روی همین تصویر که در صفحه (۶-۳) است، با خودکار قرمز کشیده شود، پس در هنگام رسم نقاط و خطوط دقت کنید که تصویر پاسخ نامه دچار خط خوردگی نشود. تمامی‌جواب های عددی این سوال را به صورت نماد علمی و با دو رقم با معنی ذکر کنید.

آ) روی تصویر چاپ شده در صفحه (۶-۳) پَست ترین نقطه را با C و دو محدوده که شیب در آن از هر جهت صفر است را با D و محلی که در نیمه بالای نقشه بیشترین شیب را دارد با علامت X نشان دهید. ارتفاع پست‌ترین نقطه (h_C) در نقشه و مقدار بیشترین شیب را به طور تقریبی بنویسید.

ب) بر روی همان نقشه حداقل دو دره را با خط پیوسته پر رنگ و دو یال را با خط چین پر رنگ و قلم رنگی مشخص کنید.

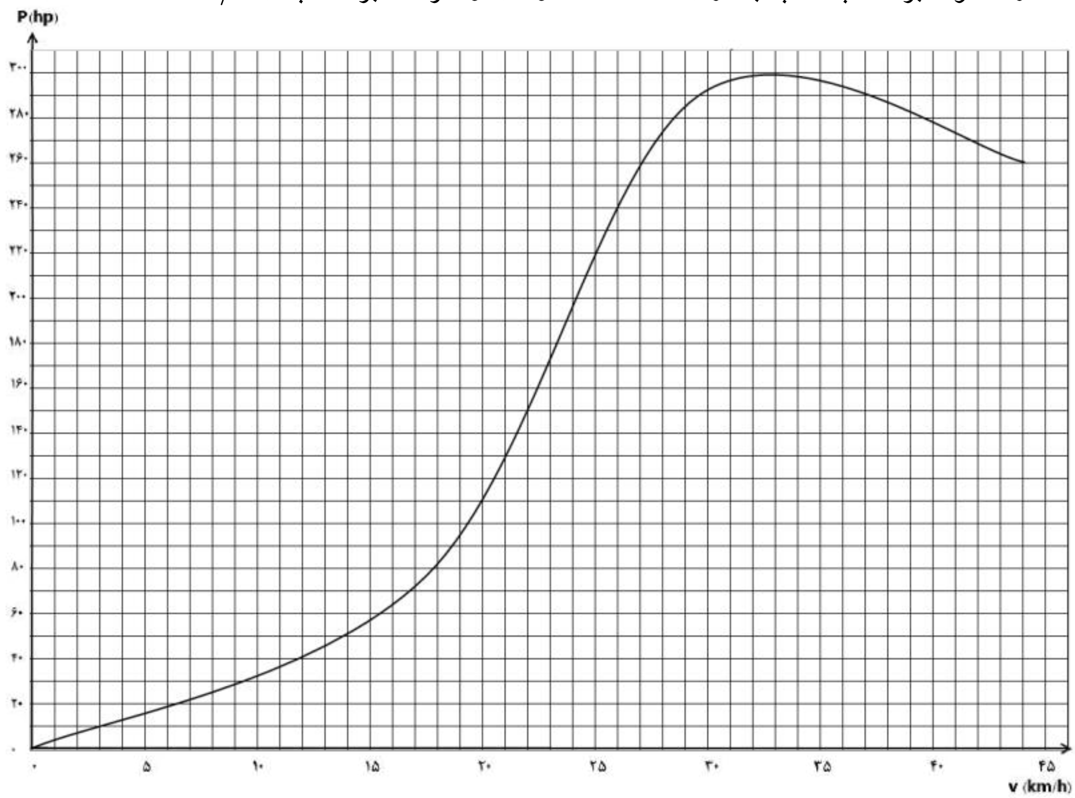
توضیح : محل برخورد دو دامنه شیبدار در بالاترین نقاط تماس، یال و در پایین ترین نقاط تماس، دره است.

پ) در صفحه (۶-۳)نمودار تغییرات ارتفاع (نیم رخ توپوگرافی) را در صفحه قائم فرضی که‌از نقاط F و E می‌گذرد رسم کنید. در این نمودار ، محور افقی مکان افقی نقاط خط EF را با همان مقیاس نقشه توپوگرافی نشان می‌دهد.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

با توجه به استاندارد اتومبیل‌ها با ایجاد تونل یا پل باید جاده را طوری طراحی کرد که اندازه شیب آن از حد معینی فراتر نرود. اتومبیلی به جرم ۲/۰ تن در نظر بگیرید که نمودار توان تولیدی موتور آن در دنده سنگین بر حسب سرعت به صورت زیر است که در آن توان بر حسب اسب بخار (معادل ۷۳۵ وات) و سرعت بر حسب ($\mathrm{km/h}$) است.



ت) فرض کنید ۱۰ درصد توان موتور باعث شود جاده نیرویی در امتداد مسیر حرکت به‌اتومبیل وارد کند. بیشینه این نیرو چقدر است؟ این نیرو به‌ازای کدام سرعت و توان اتفاق می‌افتد؟ از اصطکاک هوا چشم بپوشید.

ث) اگر ضریب اصطکاک جاده به‌اندازه کافی زیاد باشد که اتومبیل روی جاده سر نخورد، بیشترین شیبی که اتومبیل فوق می‌تواند بالا رود چقدر است ؟ (شتاب گرانش زمین را $۱۰\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ در نظر بگیرید.)

ج) فرض کنید خط EF در نقشه توپوگرافیک یک جاده در دست احداث را نشان دهد. شیب جاده باید طوری تنظیم شود که اتومبیل فوق با ۷۷ درصد نیروی بیشینه بتواند آن را طی کند. روی نقشه مشخص کنید که در کدام بخش از جاده باید پل یا تونل ایجاد شود؟ برای این کار می‌توانید نقاط تقاطع مسیر جاده و خطوط هم ارتفاع مناسب را ملاک قرار دهید. بخش‌هایی از مسیر که پل یا تونل می‌شوند را پر رنگ کرده و به‌ترتیب با علامت B و T مشخص کنید. برای زاویه‌های کوچک مورد نظر در این سؤال سینوس و تانژانت را برابر بگیرید.

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

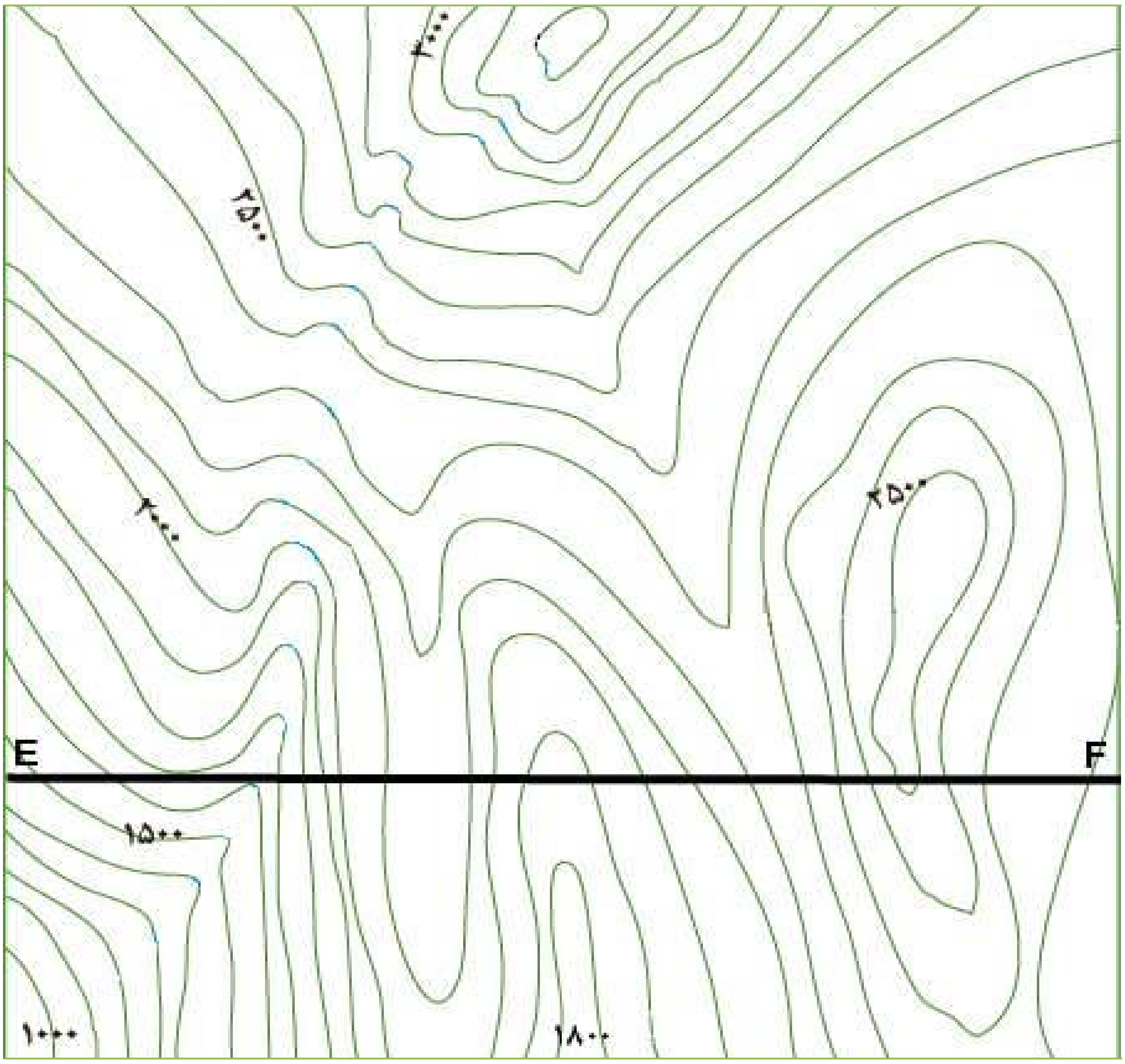
نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

این برگ قسمتی از پاسخ نامه است. دقت کنید که تصویر پاسخ نامه دچار خط‌خوردگی نشود.

هریک سانتی متر روی نقشه معادل ۲ کیلومتر واقعی است. ارتفاع‌های ذکرشده در نقشه برحسب متر است.



پ) نیم‌رخ توپوگرافی

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

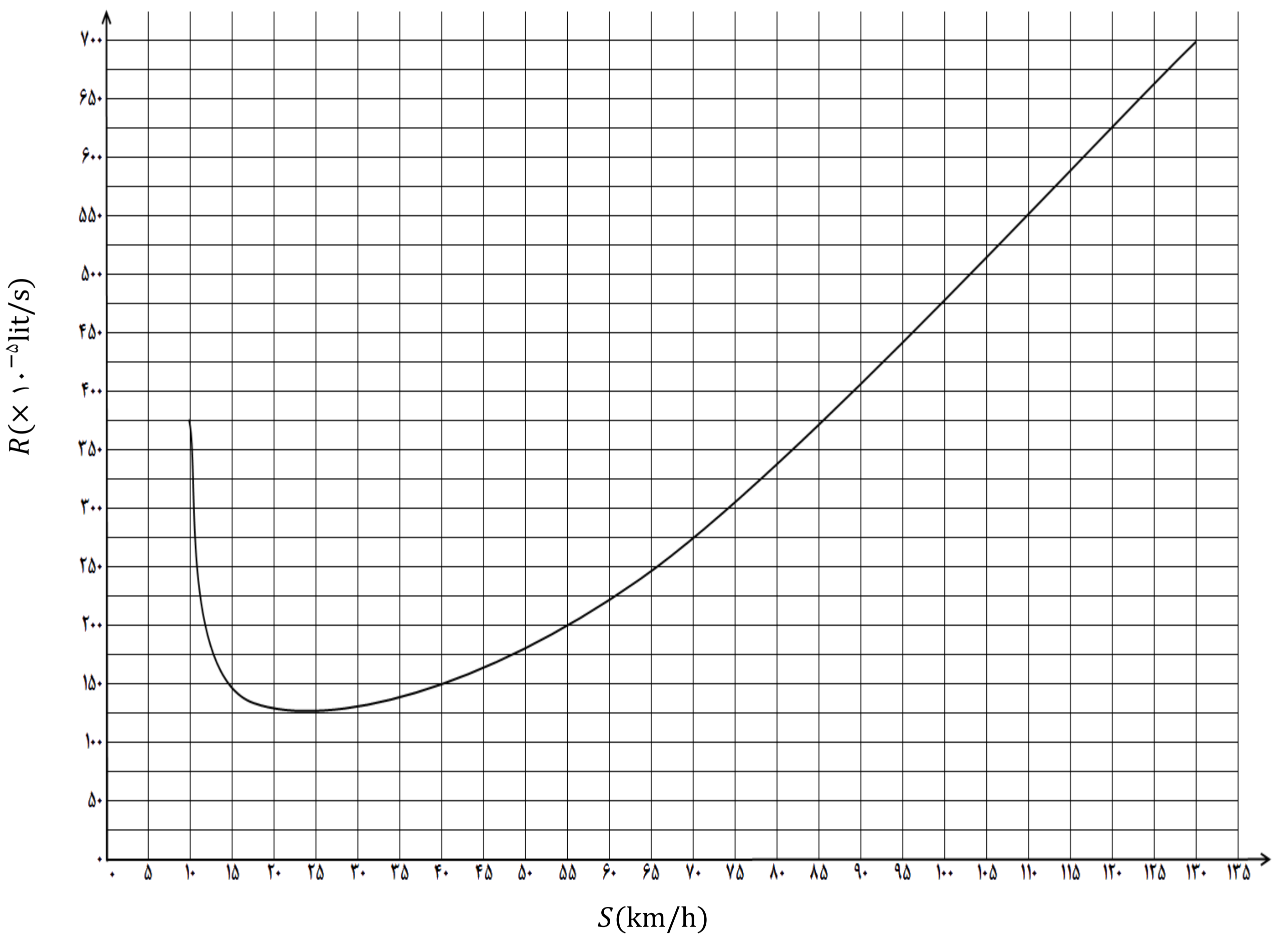
ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

سؤال ۷) میزان مصرف سوخت خودروها با دو کمیت مختلف سنجیده می‌شود که یکی حجم سوخت مصرف شده بر واحد زمان، $R = \frac{dV}{dt}$، و دیگری حجم سوخت مصرف شده بر واحد طول طی شده، $Q = \frac{dV}{dl}$ است. نمودار زیر نشان دهنده رابطه بین کمیت R برای یک اتومبیل در جاده افقی و سرعت اتومبیل، S در حالت سرعت ثابت است. در تمام این سوال مقادیر عددی را با دو رقم با معنی ذکر کنید. نقطه پایان نمودار سرعت بیشینه است.



آ) رابطه‌ای بین S، Q و R بیابید.

ب) اتومبیلی با سرعت ثابت از شهری به شهر دیگر در یک مسیر افقی ۱۰۰ کیلومتری حرکت می‌کند. با چشم‌پوشی از متغیر بودن سرعت در ابتدا و انتهای حرکت، معلوم کنید اتومبیل با چه سرعتی مسیر را طی کند تا سوخت مصرف شده در کل مسیر کمترین مقدار ممکن باشد. این سرعت را S_c بنامید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پ) اگر اتومبیل با سرعت S_c حرکت کند حجم سوخت مصرف شده در کل این مسیر چند لیتر است؟

ت) اگر این اتومبیل فاصله بین این دو شهر را با بیشترین سرعت طی کند حجم سوخت مصرف شده آن در طی این مسیر نسبت به حالت قبل چند درصد افزایش می‌یابد؟

ث) نمودار مصرف سوخت اتومبیل (Q) را بر حسب سرعت (S) در نمودار خالی صفحه بعد (صفحه ۷-۳) رسم کنید. برای این منظور مقادیر حداقل پنج نقطه خاص را روی نمودار مشخص کنید و منحنی تقریبی نمودار را با رعایت مجانب‌ها، کمینه‌ها و بیشینه‌های احتمالی رسم کنید.

فرض کنید این اتومبیل می‌خواهد سرعت خود را با شتاب ثابت افزایش دهد. در این صورت قصد داریم میزان مصرف سوخت را در این افزایش سرعت به‌دست آوریم. اگر اتومبیل شتاب a داشته باشد کمیت R در ضریب $k = ۱ + \beta a$ ضرب می‌شود، که در آن β عددی ثابت و a شتاب است.

ج) اگر سرعت اتومبیل با شتاب ثابت a به مقدار کوچک ΔS افزایش یابد، میزان مصرف سوخت ΔV در مدت زمان این افزایش سرعت بر حسب ΔS، R، β و a چقدر است؟

چ) اگر این اتومبیل با شتاب ثابت $۱/۵\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ سرعت خود را از $۱۰۰\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ به $۱۳۰\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ برساند و مقدار β برابر با $۰/۵۰\frac{\mathrm{s}^۲}{\mathrm{m}}$ باشد، میزان مصرف سوخت را در طی این افزایش به‌دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

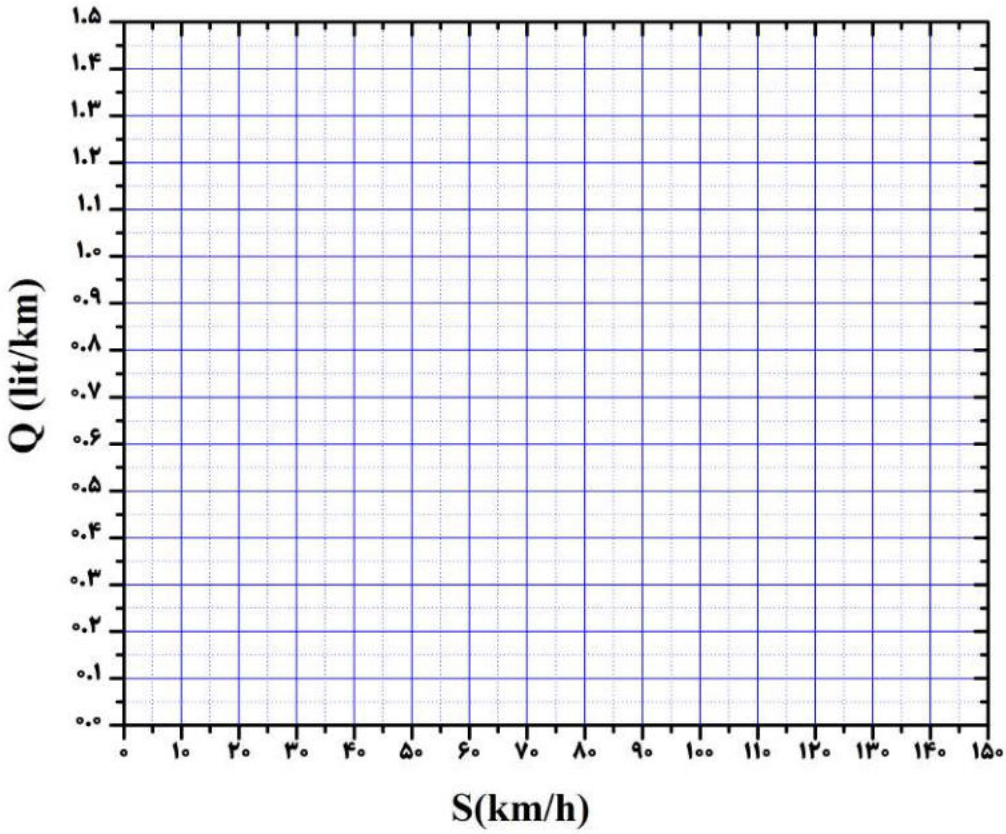
نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

این شکل جزء پاسخ سؤال ۷ است.

پاسخ بخش ث): نمودار مصرف سوخت اتومبیل (Q) بر حسب سرعت (S)



نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

1

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

۱) آ) با توجه به اینکه در $t=0$ از مبدا عبور کرده و سرعت آن مثبت می باشد داریم:

$$x(t) = A_0 \sin\omega t \quad \text{و} \quad v(t) = A_0\omega\cos\omega t$$

ب) با توجه به توضیحات سؤال $P(t) = fv$ و از طرفی با توجه به اینکه معادلات حرکت تغییری نمی کند داریم $x(t) = A\sin\omega t$ ، $v(t) = A\omega\cos\omega t$ ، یعنی اثر نیروی مقاوم تنها دامنه را تغییر می دهد

توان لحظه ای $\quad P = fv = -bv^2 = -bA^2\omega^2\cos^2\omega t$

$$= -bA^2\omega^2\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)$$

توان متوسط $\quad \overline{P} = -\overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2(1+\cos 2\omega t)} = -\overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2} - \overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2\cos 2\omega t}$

که دوم با توجه به وجود جمله $\overline{\cos 2\omega t}$ صفر است.

$$\Rightarrow \overline{P} = -\frac{1}{2}bA^2\omega^2$$

پ) انرژی کل نوسانگر بدون نیروی مقاومت به صورت $E = \frac{1}{2}KA_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A_0^2$ می باشد، با توجه به توضیحات و اینکه تنها دامنه تغییر می کند داریم:

$$E(\tau) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$\overline{P} = -\frac{1}{2}b\omega^2A^2 = -\frac{b}{m}\left(\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right) = -\frac{b}{m}E$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} = -\frac{b}{m}E(\tau)$$

با توجه به توضیحات تابع نمایی E باید به صورت $E = Ce^{-\frac{b}{m}\tau}$ باشد که در $\tau=0$ ، $C = E_0$ به دست می آید.

$$\Rightarrow E = E_0 e^{-\frac{b}{m}\tau}$$

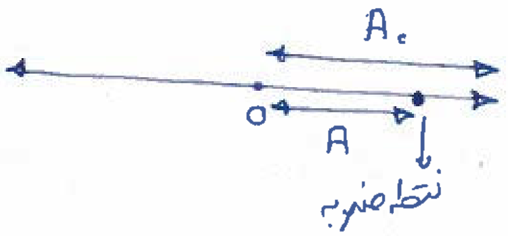
۲

ب) با جایگذاری $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ ، $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$ داریم:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \left(\frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2\right) e^{-b/m\,\tau}$$

$$\Rightarrow A = A_0\, e^{-\frac{b}{2m}\tau}$$

پ) می‌دانیم $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ که P تکانه جسم است:



با توجه به شکل برده به در نقطه‌ای که ضربه وارد می‌شود باید سرعت نوسانگر بعد از ضربه به سرعت متناظر با نوسانگر بدون مقاومت در نقطه $x=A$ برسد پس داریم:

برای نوسانگر $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v_{\text{بعد از ضربه}} = \omega\sqrt{A_0^2 - A^2}$

$$\Rightarrow v = \omega\sqrt{A_0^2 - A_0^2 e^{-b/m\,\tau}} = \omega A_0\sqrt{1 - e^{-b/m\,\tau}}$$

$v_{\text{قبل از ضربه}} = 0 \Rightarrow F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\left(\omega A_0\sqrt{1-e^{-b/m\,\tau}} - 0\right)}{\delta t}$

ج)
$$A = \frac{1}{2}A_0 \Rightarrow A_0\, e^{-\frac{b}{2m}\tau} = \frac{1}{2}A_0 \Rightarrow e^{-\frac{b}{2m}\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{2m}\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{2m}{b}\ln 2$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2\times10^{-1}\times 0.69}{10^{-3}} = 1.38\times10^{2}\,s \simeq 1.4\times10^{2}\,s$$

زمان تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\times3.14}{10^2} = 6.28\times10^{-2}\,s \simeq 6.3\times10^{-2}\,s$

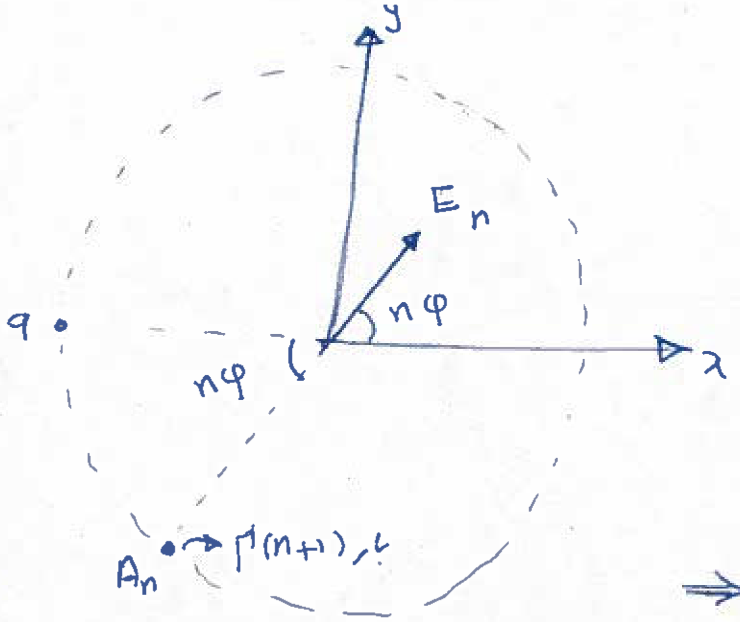
$$\Rightarrow \frac{\tau}{T} = \frac{1.4\times10^{2}}{6.3\times10^{-2}} \simeq 2.2\times10^{3}$$

$$\bar{F} = \frac{m\,\omega_0 A}{\delta t}\sqrt{1-e^{-\frac{b}{m}\tau}} = \frac{10^{-1}\times10^{2}\times5\times10^{-2}}{2\times10^{-4}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}\times10^{3}\,N$$

$$\simeq \frac{5\times1.7}{4}\times10^{3} = \frac{8.5}{4}\times10^{3}$$

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

۲)



آ) $\vec{E}_n = |\vec{E}_n| (\cos n\varphi \, \hat{i} + \sin n\varphi \, \hat{j})$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\cos n\varphi \, \hat{i} + \sin n\varphi \, \hat{j})$$

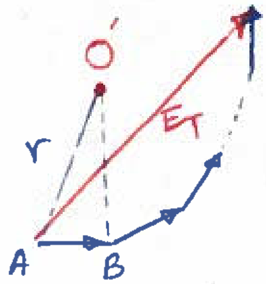
$$\vec{E}_T = \sum_{n=0}^{N} \vec{E}_n$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{n=0}^{N} (\cos(n\varphi)\hat{i} + \sin(n\varphi)\hat{j})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{Tx} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{n=0}^{N} \cos(n\varphi) \\ E_{Ty} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{n=0}^{N} \sin(n\varphi) \end{cases}$$

ب) می دانیم که اندازه میدان هر بار در مبدا مختصات یکسان است و تنها جهت میدان ها با یکدیگر متفاوت است به این صورت که میدان هر بار نسبت به میدان بار قبلی به اندازه φ در خلاف جهت عقربه های ساعت چرخیده است.

با توجه به شکل این بردارها همگی وترهای یک دایره به شعاع r می باشند که O' مرکز عمود منصف هر E_n می باشد.



$O'AB$ در مثلث $\Rightarrow \dfrac{|AB|}{2} = r\sin\dfrac{A\hat{O'}B}{2}$

$$\Rightarrow \frac{|E_n|}{2} = r\sin\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{Kq}{2R^2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}}$$

$A\hat{O'}C = (N+1)\varphi \rightarrow AO'C$ در مثلث $\Rightarrow \dfrac{|E_T|}{2} = r\sin\left(\dfrac{A\hat{O'}C}{2}\right)$

$$\Rightarrow |E_T| = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin\varphi/2} \qquad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

زاویه E_T با محور x ها $= C\hat{A}B = O'\hat{A}B - O'\hat{A}C = \left(\dfrac{\pi-\varphi}{2}\right) - \left(\dfrac{\pi-(N+1)\varphi}{2}\right) = \dfrac{N\varphi}{2}$

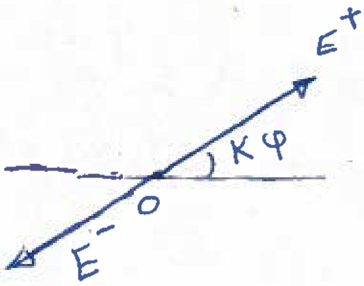
$$\Rightarrow \vec{E}_T = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin\varphi/2} \left(\cos\frac{N\varphi}{2}\hat{i} + \sin\frac{N\varphi}{2}\hat{j}\right)$$

ب) $N=2K$ در این حالت به تعداد $K+1$ بار مثبت و K بار منفی داریم که بارهای هم نام با یکدیگر زاویه 2φ می سازند. میدان هر دسته از بارها طبق تست ۳ به صورت زیر است:

$$|\vec{E}_+| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin (K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = K\frac{2\varphi}{2} = K\varphi$$

$$|\vec{E}_-| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin K\,2\varphi/2}{\sin\frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = (K-1)\frac{2\varphi}{2} = (K-1)\varphi$$

اما باید توجه داشت که بارهای منفی از زاویه φ شروع شده اند نه مانند حالت بالا که از زاویه ۰ (A_0) شروع شده باشند. پس این زاویه با محور x ها برای بارهای منفی هم $(K-1)\varphi+\varphi$ می باشد یعنی میدانها در یک راستا قرار دارند.



$$\Rightarrow |E_T| = E^+ - E^- = \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{\sin(K+1)\varphi - \sin K\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{2K+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right)$$

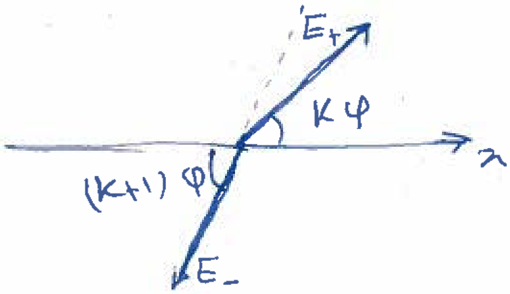
$$= \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{\cos\frac{N+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right) \qquad \text{زاویه } E_T \text{ با محور x ها} = K\varphi = \frac{N}{2}\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E}_T = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\cos\frac{N+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{N}{2}\varphi\,\hat{i} + \sin\frac{N}{2}\varphi\,\hat{j}\right)$$

ج) $N=2K+1$ در این حالت $K+1$ بار مثبت و $K+1$ بار منفی داریم که بارهای هم نام با یکدیگر زاویه 2φ می سازند. با توجه به نکته گفته شده در مورد زاویه بارهای منفی در قسمت ب داریم:

$$|E_+| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin(K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = \beta_+ = K\frac{2\varphi}{2} = K\varphi$$

$$|E_-| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin(K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = \beta_- = K\frac{2\varphi}{2} + \varphi = (K+1)\varphi$$



$$\Rightarrow \quad E_{Tx} = E_+ \cos k\varphi - E_- \cos (k+1)\varphi$$

$$= \frac{kq}{R^2} \frac{\sin (k+1)\varphi}{\sin \varphi} \left(\cos k\varphi - \cos (k+1)\varphi \right)$$

$$= \frac{kq}{R^2} \frac{\sin (k+1)\varphi}{2\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \left(-2 \sin \frac{2k+1}{2}\varphi \sin \left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{kq}{R^2} \frac{\sin (k+1)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{2k+1}{2}\varphi = \frac{kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{N}{2}\varphi$$

$$E_{Ty} = E_+ \sin k\varphi - E_- \sin (k+1)\varphi$$

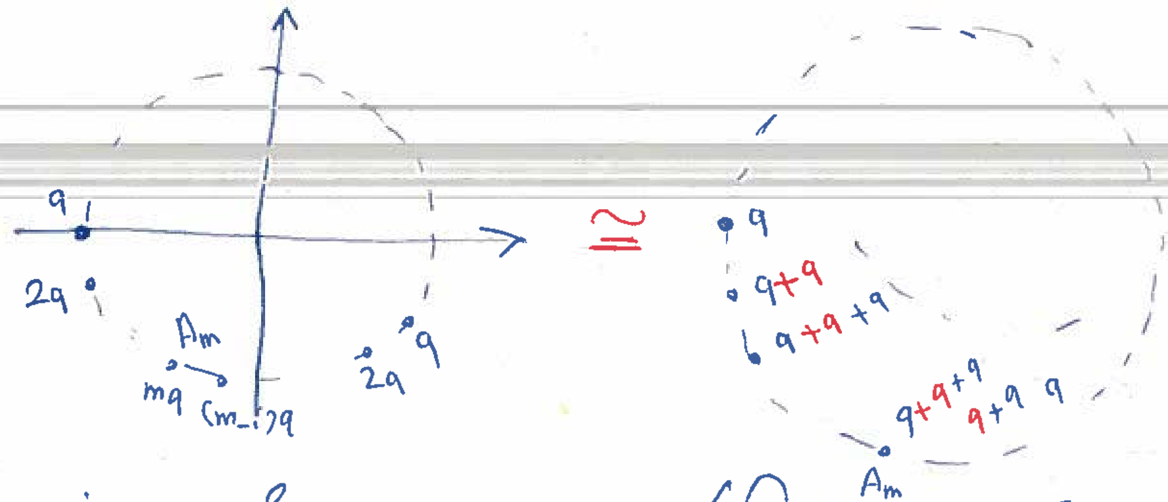
$$= \frac{kq}{R^2} \frac{\sin (k+1)\varphi}{\sin \varphi} \left(\sin k\varphi - \sin (k+1)\varphi \right)$$

$$= \frac{kq}{R^2} \frac{\sin (k+1)\varphi}{2\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \left(2 \sin \left(-\frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{2k+1}{2}\varphi \right)$$

$$= -\frac{kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{N}{2}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_T = \frac{kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \left(\sin \frac{N}{2}\varphi \, \hat{i} - \cos \frac{N}{2}\varphi \, \hat{j} \right)$$

ت) در این حالت آرایش بارها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت .



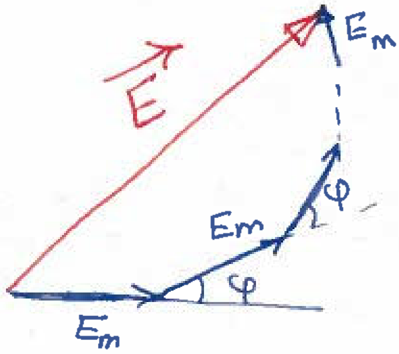
این آرایش از m حالت قسمت الف به دست می‌آید که هر حالت دارای m بار q می‌باشد و هر حالت نسبت به حالت قبلی به اندازه φ چرخیده است .

ادامه‌ی سوال ۲ .

میدان الکتریکی هر آرایش با m بار q برابر است با

$$\vec{E}_m = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\varphi/2}\left[\cos\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi\,\hat{i} + \sin\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi\,\hat{j}\right]$$

میدان کل برابر است با m بردار $\vec{E}_m$ که هر کدام با قبلی به اندازه φ چرخیده است.



$$|E_m| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

طبق روابط قسمت (ب) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} r = \dfrac{|E_m|}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{Kq}{2R^2}\,\dfrac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \\ |\vec{E}| = 2r\sin\dfrac{m\varphi}{2} \\ \text{زاویه با محور x ها} = (m-1)\dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\left(\cos(m-1)\frac{\varphi}{2}\,\hat{i} + \sin(m-1)\frac{\varphi}{2}\,\hat{j}\right)$$

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

سؤال ۳:

الف) با توجه به تعریف ثابت واپاشی احتمال واپاشی یک اتم در مدت زمان Δt برابر است با $\lambda \Delta t$

از طرف دیگر هر کدام از N اتم می‌توانند با چنین احتمالی واپاشیده شوند بنابراین داریم

$$\text{احتمال واپاشی کل} = \lambda \Delta t = -\frac{\Delta N}{N}$$

علامت منفی به این منظور لحاظ شده است که تعداد هسته‌های پرتوزا با گذشت زمان کاهش می‌یابد

$$\Rightarrow \Delta N = -\lambda N \Delta t$$

ب)

با توجه به تعریف مشتق $\quad \frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\lambda N \Delta t}{\Delta t} = -\lambda N$

پ) با توجه به تعریف تابع نمایی و مشتق آن داریم:

$$N = a\exp(bt) = a e^{bt} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = a b e^{bt} = bN$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\lambda} \qquad N(0) = N_0 = a e^{b\times 0} = a \Rightarrow a = N_0$$

$$\Rightarrow \boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

ت) نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو مدت زمانی است که نیمی از هسته‌های اولیه واپاشیده شده باشند

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow N_0 e^{-\lambda\tau} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

ث) با توجه به تعریف ثابت واپاشی، هسته مادر می‌تواند با احتمال λ_1 به هسته دختر نوع ۱ و با احتمال λ_2 به هسته دختر نوع ۲ واپاشیده شود.

$$\frac{dN}{dt} = -\underbrace{\lambda}_{\text{ثابت واپاشی کل}} N = -(\lambda_1 + \lambda_2) N$$

$$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 \, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

اگر فرض کنیم $N_1(t)$ و $N_2(t)$ به ترتیب تعداد هسته‌های دختر نوع ۱ و ۲ در زمان t باشند داریم:

$$N_0 = N(t) + N_1(t) + N_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad N_1(t) + N_2(t) = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)$$

با توجه به مفهوم احتمالاتی ثابت واپاشی داریم:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_2 + N_2 = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N_2 \, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2} = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)$$

به همین ترتیب برای N_1

$$\Rightarrow \quad N_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)$$

ج) احتمال واپاشی هسته‌های پرتوزا − آهنگ تولید تعداد هسته‌های پرتوزا = آهنگ تغییرات تعداد هسته‌های پرتوزا

$$\Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = R - \lambda N$$

ج)

$$N(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \beta \gamma e^{\gamma t} = \gamma (\beta e^{\gamma t})$$

$$= \gamma (N(t) - \alpha)$$

$$= -\alpha\gamma + \gamma N(t)$$

با توجه به روابط قسمت ج داریم: بنابراین $\begin{cases} -\alpha\gamma = R \\ \gamma = -\lambda \end{cases}$ $\quad \alpha = \frac{R}{\lambda}$

از طرفی $N(t=0) = 0$ بنابراین $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = -\frac{R}{\lambda}$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{R}{\lambda} - \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

ح) با توجه به نمودار قسمت د، اکتیویته خالص (الف زمان 25 به بعد) در زمان تقریباً 28.75 نیمه عمر محصول تولید شده و اکتیویته کرده است بنابراین نیمه عمر این محصول حدود 3.75 ساعت می‌باشد بنابراین با توجه:

رابطه $\tau = \frac{Ln2}{\lambda}$ داریم:

$$\lambda (h^{-1}) = \frac{Ln2}{\tau} \approx \frac{Ln2}{3.75} = \frac{0.69}{3.75} \approx 0.184\, h^{-1}$$

غ) با توجه به روابط قسمت ج می‌بینیم در زمان‌های زیاد مقدار $N(t)$ به سمت $\frac{R}{\lambda}$ میل می‌کند و در نمودار

این مقدار برابر است با 9×10^{12} اتم

$$\Rightarrow \frac{R}{\lambda} = 9\times10^{12} \Rightarrow R = 9\times10^{12}\lambda = 9\times0.184\times10^{12}\, h^{-1}$$

$$= 1.656\times10^{12}\, h^{-1}$$

د)

$$A = \text{اکتیویته} = \lambda N(t) = R(1 - e^{-\lambda t}) = 0.75 A_{max} = 0.75R$$

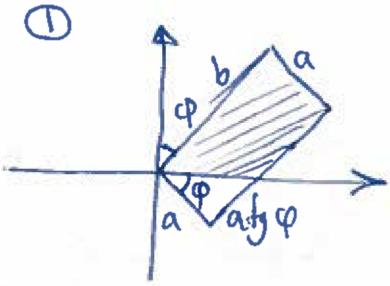
$$\Rightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \frac{3}{4} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{4} \rightarrow -\lambda t = Ln(\tfrac{1}{4})$$

$$\Rightarrow \lambda t = Ln4 = 2Ln2 \rightarrow t = \frac{2Ln2}{\lambda} = 2\tau$$

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - نمره ۳۰ - شماره ۵ ۱۳۹۹

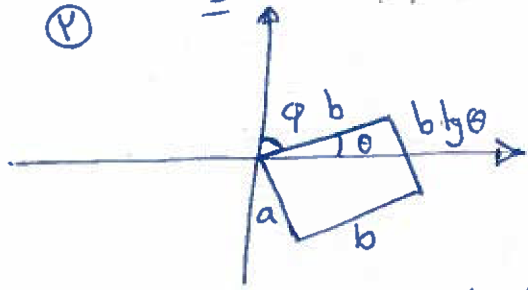
سؤال ۴) مساحت قسمتی که داخل میدان مغناطیسی قرار دارد بر حسب $\varphi = \omega t$ که زاویه دوران می‌باشد دارای ۴ ضابطه به صورت زیر است:

(۱)



$$S = ab - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi = a^2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right) \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$$

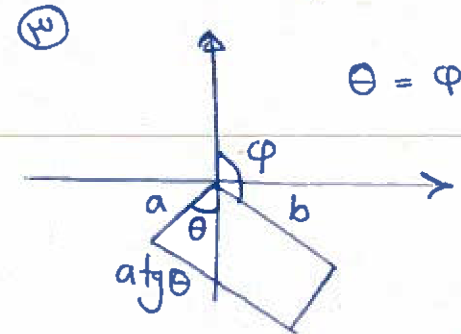
(۲)



$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{3}{2}a^2 \cot\varphi \qquad \frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

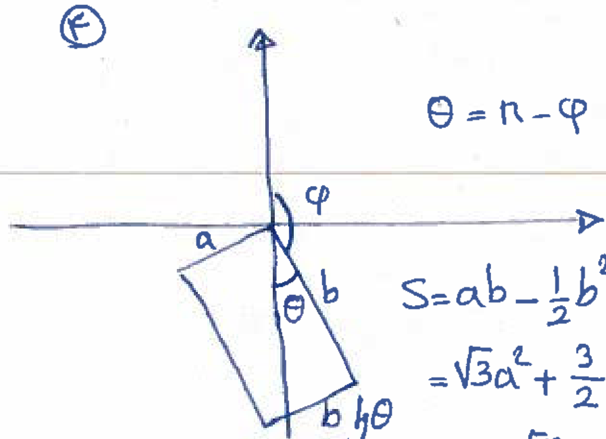
(۳)



$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}a^2 \cot\varphi \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{6}$$

(۴)



$$\theta = \pi - \varphi$$

$$S = ab - \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}a^2 + \frac{3}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi \qquad \frac{5\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

آ) با توجه به مساحت‌های قسمت بالا داریم:

$$\Phi = BS = B_0 S = \frac{B_0 a^2}{2}\begin{cases} 2\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3} - \operatorname{tg}(\omega t) & 0 \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 3\cot\varphi = 3\cot(\omega t) & \frac{\pi}{3} \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\cot\varphi = -\cot(\omega t) & \frac{\pi}{2} \leqslant \omega t \leqslant \frac{5\pi}{6} \\ 2\sqrt{3} + 3\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3} + 3\operatorname{tg}(\omega t) & \frac{5\pi}{6} \leqslant \omega t \leqslant \pi \end{cases}$$

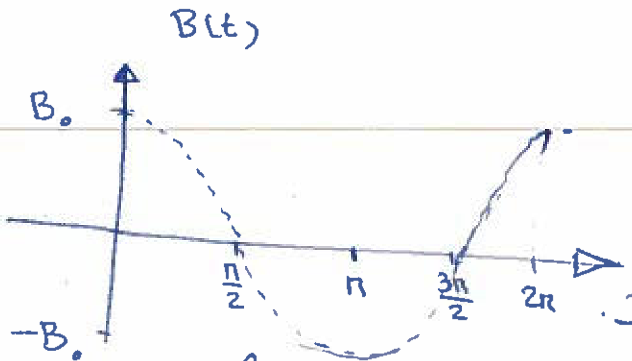
ب)

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2}\begin{cases} -(1 + \operatorname{tg}^2 \omega t) & 0 \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{3} \\ -3(1 + \cot^2 \omega t) & \frac{\pi}{3} \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ (1 + \cot^2 \omega t) & \frac{\pi}{2} \leqslant \omega t \leqslant 5\pi/6 \\ 3(1 + \operatorname{tg}^2 \omega t) & \frac{5\pi}{6} \leqslant \omega t \leqslant \pi \end{cases}$$

پ) در این حالت، میدان مغناطیسی تغییر کرده است (تغییرات زوایا مانند قبل است)

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B_0 \cos\omega t \; S = \frac{B_0 a^2}{2}\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t \\ 3\cos\omega t \cot\omega t \\ -\cos\omega t \cot\omega t \\ 2\sqrt{3}\cos\omega t + 3\sin\omega t \end{cases}$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2}\begin{cases} -2\sqrt{3}\sin\omega t - \cos\omega t \\ -3\left(\sin\omega t \cot\omega t + \cos\omega t\,(1+\cot^2\omega t)\right) \\ +\left(\sin\omega t \cot\omega t + \cos\omega t\,(1+\cot^2\omega t)\right) \\ -2\sqrt{3}\sin\omega t + 3\cos\omega t \end{cases}$$



ت)

در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ میدان در جهت $\hat{k}$ (⊙) کاهش می‌یابد و مساحت نیز کاهش می‌یابد بنابراین میدان القایی برون‌سو ⊙ و جریان القایی پادساعتگرد است.

در بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ مساحت در حال افزایش و میدان B در جهت درون‌سو ⊗ افزایش می‌یابد در این حالت هم میدان القایی باید برون‌سو باشد ⊙ بنابراین جریان پادساعتگرد است.

در حالت $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ مساحت در حال کاهش و میدان درون‌سو ⊗ در حال کاهش است. در این حالت میدان القایی باید درون‌سو باشد ⊗ بنابراین جریان ساعتگرد است.

در بازه $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ مساحت در حال افزایش و میدان نیز برون‌سو هم در حال افزایش است بنابراین میدان القایی باید ⊗ باشد بنابراین جریان ساعتگرد است.

۱۴

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ ام - آبان ۱۳۹۹

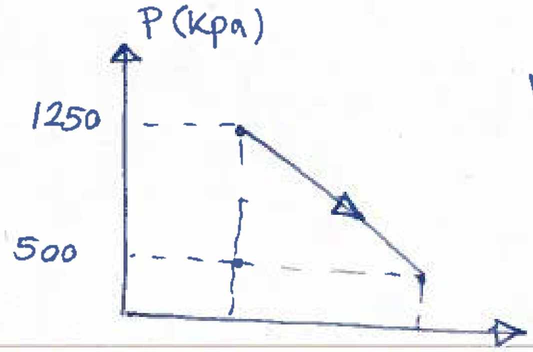
ه)

آ) $W_{ترمودینامیکی} = 75\% K \Rightarrow (P-P_0)\Delta V = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} m v^2$

$V = 150 \times 1.8 \times \frac{10}{36}\ m/s = 75\ m/s \Rightarrow \Delta V = \frac{3 m v^2}{8(P-P_0)} = \frac{3 \times 18 \times 10^3 (75)^2}{8 \times \cancel{17}50 \times 10^3}$

$\Rightarrow \Delta V = \frac{3 \times 18 \times 75^2}{8 \times 1150} = 33.01 \cong 33\ (m^3)$

ب)



$W_{thermo} = \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\Delta V = P_0 \Delta V + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} m v^2$

$\Rightarrow \left(\frac{P_1+P_2}{2} - P_0\right)\Delta V = \frac{3 \times 18 \times 10^3 \times (75)^2}{8}$

$\Rightarrow \left(\frac{1750}{2} - 700\right)^{kpa} \Delta V = \frac{54 \times 10^3 \times 75^2}{8}$

$\Rightarrow \Delta V = \frac{54 \times 10^3 \times 75^2}{4(1550) \times 10^3} = 48.99 \cong 49\ m^3$

ب) $P = aV + b \Rightarrow a = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{(1250-500) \times 10^3}{-49} \cong -15.3 \times 10^3$

$b = P - aV = 1250 \times 10^3 + 15.3 \times 10^3 \times 50 = (1250 + 765) \times 10^3$

$= 2015 \times 10^3$

$\Rightarrow P(kpa) = -15.3 V_{(m^3)} + 2015$

د) $V_2 = V_1 + \Delta V = 50 + 49 = 99\ m^3$

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{500 \times 99}{1250 \times 50} = \frac{99}{125} \Rightarrow T_2 = \frac{99}{\cancel{125}} \times \cancel{500}^{4} = 396\ K$

ت)

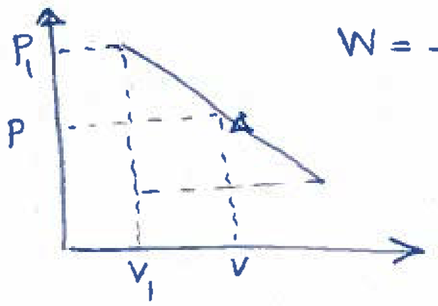
$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{1}{nR}PV = \frac{1}{nR}(aV+b)V = \frac{1}{nR}(aV^2+bV)$$

$$\frac{dT}{dV} = 0 \Rightarrow 2aV + b = 0 \Rightarrow V = -\frac{b}{2a} = +\frac{2015}{2\times 15.3} = 65.8 \cong 66$$

$$\Rightarrow P = aV + b = -15.3\times 65.8 + 2015 = +1008.26 \cong 1008\ \text{kPa}$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{PV}{P_1V_1}T_1 = \frac{1008\times 66}{1250\times 50}\times 500 = 532.2 \cong 532\ \text{K}$$

ث)



$$W = -S \Rightarrow \Delta U = Q + W = Q - S$$

$$\Rightarrow nC_V\Delta T = Q - S$$

$$\Rightarrow Q = nC_V\Delta T + S$$

$$\Rightarrow Q = \frac{7}{2}nR(T - T_1) + \frac{1}{2}(P+P_1)(V-V_1)$$

$$= \frac{7}{2}(PV - P_1V_1) + \frac{1}{2}(PV - PV_1 + P_1V - P_1V_1)$$

$$Q\,(\text{kj}) = 4PV - 4P_1V_1 - \frac{V_1}{2}P + \frac{P_1}{2}V$$

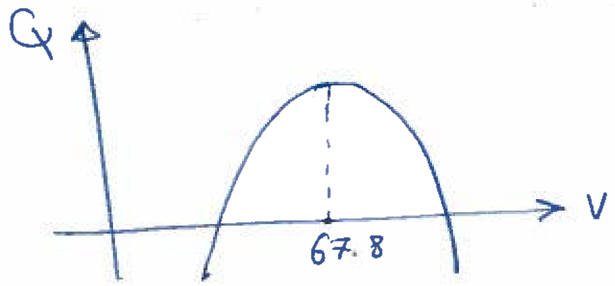
$$= 4(aV+b)V - 4\times 1250\times 50 - \frac{50}{2}(aV+b) + 625V$$

$$= 4(aV^2+bV) - 250\times 10^3 - 25(aV+b) + 625V$$

$$= 4aV^2 + (4b - 25a + 625)V - (250\times 10^3 + 25b)$$

$$Q\,(\text{kj}) = -61.2V^2 + 8302.5V + 300375$$

$$\frac{dQ}{dV} = 0 \Rightarrow -122.4V + 8302.5 \Rightarrow V = 67.8$$



۱۴

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد دانش زمین ـ دوره ۳۳ ـ تیر ۹۹ ۱۳۹۹

۴

آ) برای حل سؤال، معتبر است ابتدا در پاسخ نامه ارتفاع نقاط نوشته شود و سپس نقاط مشخص گردد.

$$\text{شیب} = \frac{\text{اختلاف ارتفاع}}{\text{مسیر}} \Rightarrow \text{شیب شدید} = \frac{\Delta h_{max}}{\Delta d_{min}} \qquad \Delta d_{min} = 1mm \quad \text{نقشه}$$

$$\Rightarrow m_{max} = \frac{100m}{0.1\times 2000} = \frac{100}{200} = 1/2 = 0.5 = 5\times10^{-1}$$

$$h_c = 1000\,m$$

ب) روی نقشه مشخص شده است.

پ) برای F_{max} باید توان بیشینه با سرعت پایین شود.

$$P = F.v \Rightarrow F_{max} = \left(\frac{P_{\text{بیشینه}}}{v}\right)_{max}$$

$$F_{max} = \frac{1}{10}\left(\frac{P}{v}\right)_{max}$$

با توجه به نمودار داریم: $P \cong 285\,hp$ و $v \cong 29\,Km/h$

$$\Rightarrow F_{max} = \frac{1}{10}\ \frac{285\times 735}{29\times\frac{10}{36}} = 2600.4\,N \cong 2.6\times10^{3}N$$

ت) روی سطح شیبدار نیروی $mg\sin\theta$ به سمت پایین به اتومبیل وارد می‌شود. اگر اتومبیل با سرعت ثابت حرکت کند بیشترین شیب زمانی است که $mg\sin\theta = F_{max}$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{F_{max}}{mg} = \frac{2600.4}{2\times10^{3}\times10} = 0.13 = 1.3\times10^{-1} \quad \sin\theta \ll 1$$

$$\Rightarrow tg\theta \cong \sin\theta \cong 0.13 = 1.3\times10^{-1}$$

ج) شیبی که اتومبیل می‌تواند بالا برود $= 0.77\times 0.13 \cong 0.1 = 1\times10^{-1}$

یعنی $tg\theta \cong 0.1$ است بنابراین $\frac{\Delta h}{\Delta d} \cong 0.1$

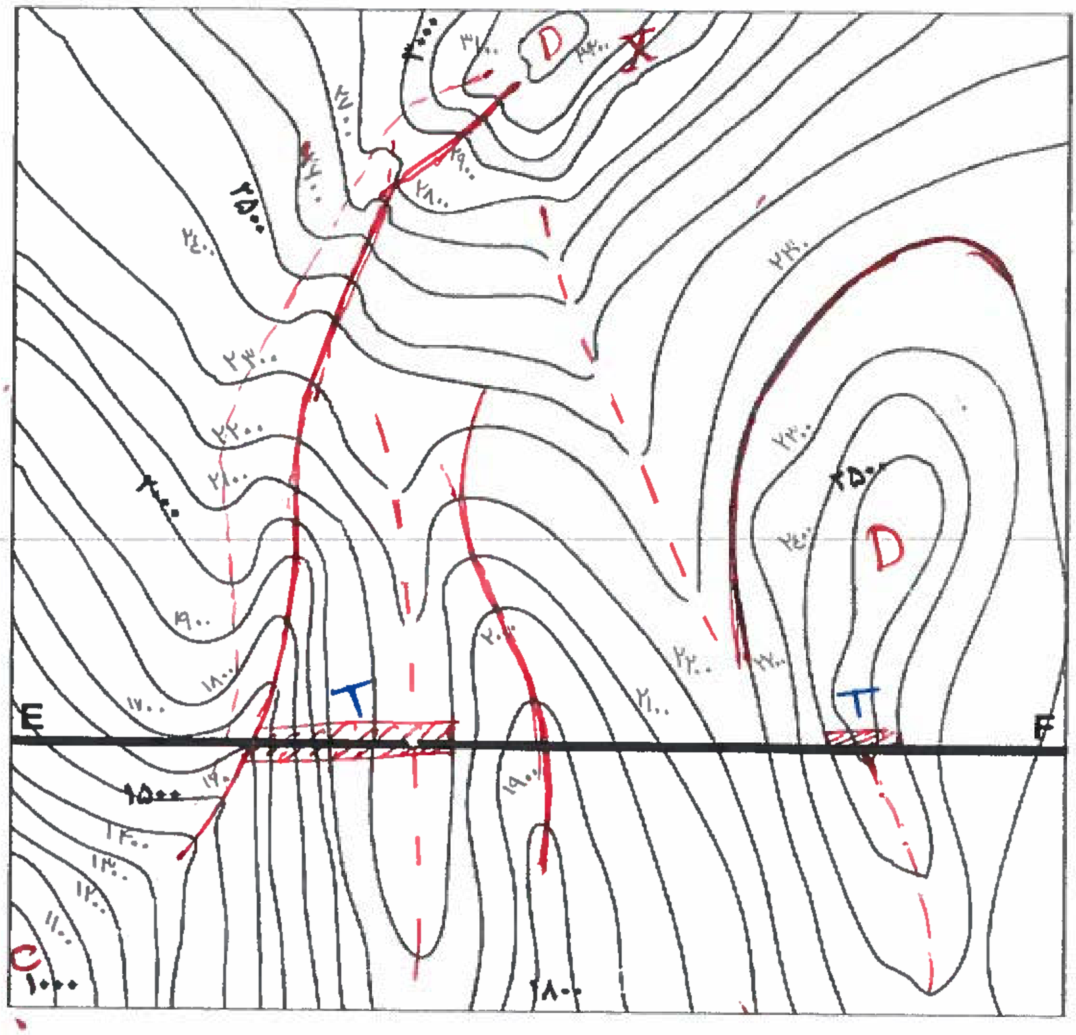
$$\Rightarrow \frac{100}{\Delta d} \cong 0.1 \Rightarrow \Delta d \cong 1000m = 1\,Km$$

بنابراین اگر در طی مسیر به ازای $100\,m$ تغییر ارتفاع مسافت بیش از $1\,Km$ یا 0.5 روی نقشه باشد باید تونل دیل زده شود.

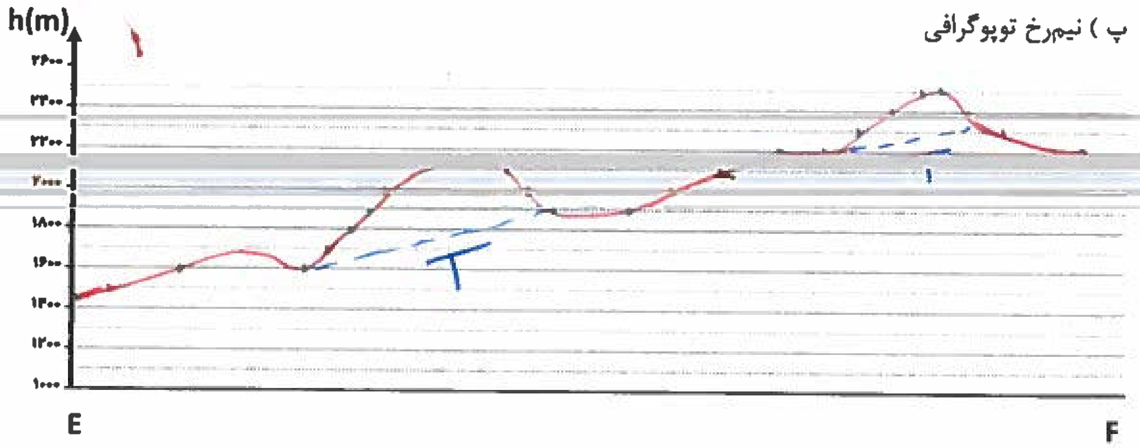
۱۵

این برگ قسمتی از پاسخ نامه است. دقت کنید که تصویر پاسخ نامه دچار خط‌خوردگی نشود.

هریک سانتی متر روی نقشه معادل ۲ کیلومتر واقعی است. ارتفاع‌های ذکرشده در نقشه برحسب متر است.



پ) نیم‌رخ توپوگرافی



پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

سؤال ۷)

آ) $R = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = Q \cdot S$

ب) با توجه به اینکه سرعت ثابت است بنابراین در طول مسیر R هم مقدار ثابتی دارد و بنابراین Q هم ثابت است.

$$R = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \quad dV = R\,dt = \frac{R}{S}\,dl$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{R}{S}\Delta l$$

با توجه به اینکه $\Delta l = 100^{km}$ می‌باشد بنابراین ΔV هنگامی کمترین مقدار است که نسبت R/S کمترین مقدار را باشد یعنی شیب خط واصل از مبدا به نقطه مورد نظر کمترین مقدار باشد (که منحنی بالای این خط مماس باشد).

$$\Rightarrow \quad S_c \cong 50\ km/h \quad \Rightarrow \quad R \cong 180 \times 10^{-5}\ lit/s$$

پ)

$$\Delta V = \frac{R}{S_c}\Delta l = \frac{180\times10^{-5}\ \frac{lit}{s}}{50\ km/h \times 10/36} \cdot 100\times10^{3}\ m$$

$$= \frac{180\times10^{-5}\times36\times10^{3}}{5} = \frac{18\times36}{5}\times10^{-1}\ lit = 12.96\ lit \cong 13\ lit$$
$$= 1.3\times10$$

ت) $S_{max} = 130\ \frac{km}{h} \qquad R = 700\times10^{-5}\ lit/s$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{R}{S}\Delta l = \frac{700\times10^{-5}}{130\times10/36}\times10^{5} = \frac{7\times36}{13}\ lit \cong 19.4 \cong 19\ lit$$
$$= 1.9\times10$$

$$\text{درصد افزایش سوخت} = \frac{19-13}{13}\times100 \cong 46\%$$

ث)

$$Q = \frac{R}{S}$$

R (lit/s)	375	125	180	550	700
S (km/h)	10	25	50	110	130
Q (lit/km)	1.35	0.18	0.13	0.18	0.19

ج)

$$\Delta V = (1+\beta a) R \Delta t = (1+\beta a) R \frac{\Delta s}{a}$$

چ) در محدوده مورد نظر تغییرات R برحسب S خطی است

$$\Delta V = \frac{(1+\beta a)}{a} \underbrace{\int R\, ds}_{\text{مساحت زیر نمودار}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{(1+\beta a)}{a} \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)(S_2 - S_1)$$

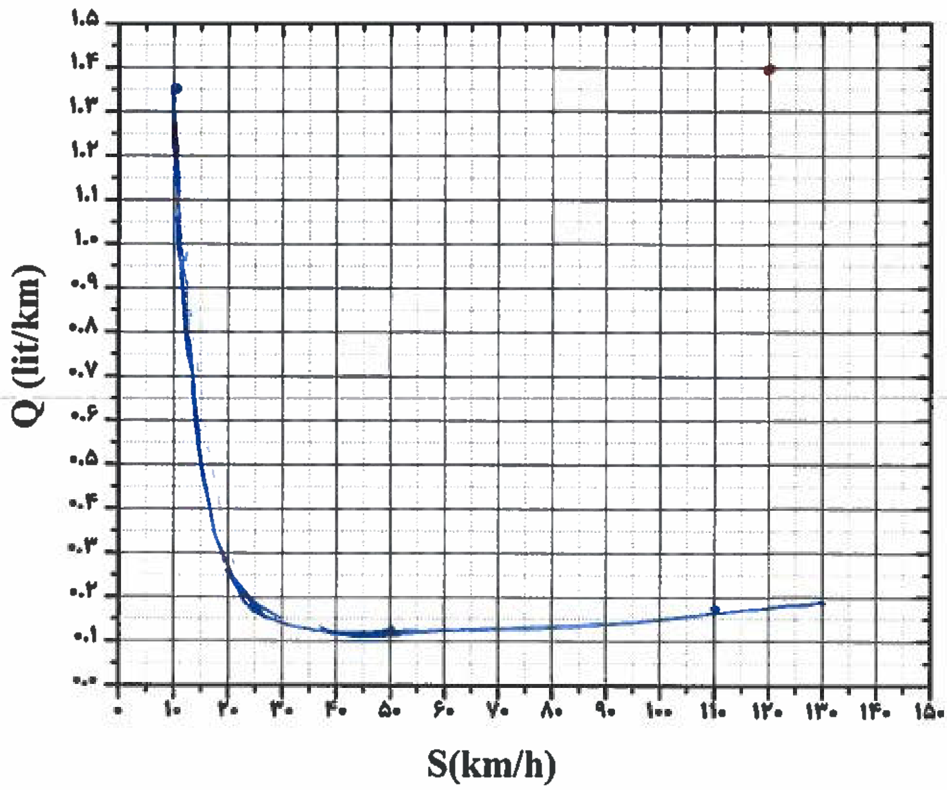
$$= \left(\frac{1+0.5\times 1.5}{1.5}\right)\left(\frac{470+700}{2}\right)\times 10^{-5}\left(30\ \frac{km}{h}\right)$$

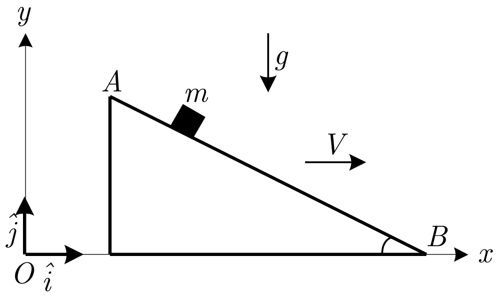
$$\cong 0.057\ lit = 5.7\times 10^{-2}$$

۱۸

این شکل جزء پاسخ سؤال ۷ است.

پاسخ بخش ث): نمودار مصرف سوخت اتومبیل (Q) بر حسب سرعت (S)





۱) جسم کوچکی به جرم m از نقطه‌ی A بالای سطح شیبداری با زاویه‌ی شیب به پایین سر می‌خورد. ضریب اصطکاک جنبشی این جسم با سطح شیبدار است. این سطح شیبدار مطابق شکل روی سطح افقی، همواره با سرعت ثابت V به سمت راست حرکت می‌کند.

کمیت‌های خواسته شده در بخش‌های مختلف این مسئله را در دستگاه مختصات xOy به دست آورید.

آ) اگر جسم m از حال سکون در لحظه‌ی t نسبت به سطح شیبدار رها و به مدت t حرکت کرده باشد، بردار جابه‌جایی جسم m را نسبت به O از t تا t به دست آورید. جواب را بر حسب بردارهای یکه‌ی $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و کمیت‌های ، g، ، V و t بنویسید.

راهنمایی: بردار جابه‌جایی m نسبت به O برابر است با جمع برداری بردار جابه‌جایی m نسبت به A و بردار جابه‌جایی A نسبت به O.

ب) بردار سرعت جسم m را در لحظه‌ی t بر حسب بردارهای یکه‌ی $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و کمیت‌های ، g، ، V و t به دست آورید.

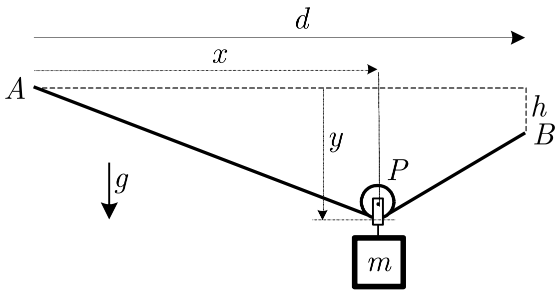
پ) K_1 انرژی جنبشی جرم m در لحظه‌ی t و K_2 انرژی جنبشی آن در لحظه‌ی t را به دست آورید و K_1 K_2 K را حساب کنید. جواب‌ها را بر حسب m، ، g، ، V و t بیان کنید.

ت) نیروی وزن، نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک وارد بر جرم m را به صورت برداری بر حسب بردارهای یکه‌ی $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و کمیت‌های m، ، g، و t بنویسید.

ث) کار هر یک از سه نیروی فوق در جابه‌جایی ذکر شده را بر حسب m، ، g، ، V و t به دست آورید.

ج) جمع کار نیروهای فوق را به دست آورید و آن را با نتیجه‌ی قسمت پ) مقایسه کنید.

یادآوری: چنانچه می‌دانید کار نیروی ثابت F در جابه‌جایی d از رابطه‌ی $W \quad Fd\,cos$ به دست می‌آید که زاویه‌ی بین دو بردار است. می‌توان ثابت کرد که این کمیت بر حسب مؤلفه‌های دو بردار به صورت $W \quad F_x d_x \quad F_y d_y$ است.



۲) دو انتهای طناب نازکی به طول L را به دو نقطه‌ی ثابت A و B وصل می‌کنیم. فاصله‌ی قائم بین این دو نقطه h و فاصله‌ی افقی آن‌ها d است. قرقره‌ی بدون اصطکاک P که از جرم و ابعاد آن صرفنظر می‌کنیم، می‌تواند روی طناب حرکت کند. جرم m از محور قرقره آویزان است و دستگاه در حال تعادل است.

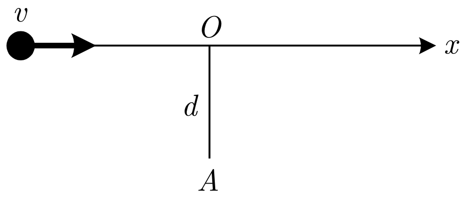
آ) کشش طناب را بر حسب m، g، d و L به دست آورید.

ب) مختصات قرقره، (x, y)، را نسبت به نقطه‌ی A بر حسب h، d و L به دست آورید.

اگر طنابی با طول اولیه‌ی L کشسان باشد و با دو نیروی یکسان F از طرفین کشیده شود، طول آن به اندازه‌ی L افزایش می یابد که از رابطه‌ی $L \quad \frac{F}{R}L$ به دست می‌آید. در این رابطه R کمیت ثابتی است. (این کمیت برای جسمی با سطح مقطع S برابر با YS است که Y را مدول یانگ می‌گویند.)

پ) فرض کنید طنابی که در شکل به دو نقطه‌ی A و B وصل شده، قبل از اتصال جرم m به آن دارای طول L است. پس از اتصال جرم m و رسیدن به حالت تعادل، طول طناب L است. ثابت R را بر حسب m، g، d، L و L به دست آورید.

هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

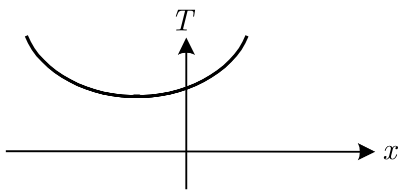


۳) سرعت نور در محیطی شفاف را w بگیرید که از سرعت نور در خلأ کوچکتر است. یک چشمه‌ی نقطه‌ای مطابق شکل با سرعت ثابت v ($v \quad w$) در این محیط بر روی محور x در حال حرکت است. ناظر A در فاصله‌ی d از محور x و زیر مبدأ O قرار دارد. فرض کنید در لحظه‌ی t چشمه در نقطه‌ی O و در لحظه‌ی t در نقطه‌ای به مختصه‌ی x است. نور گسیل شده در لحظه‌ی t از چشمه در لحظه‌ی T توسط ناظر دیده می‌شود.

آ) T را بر حسب d، x، w و v به دست آورید.

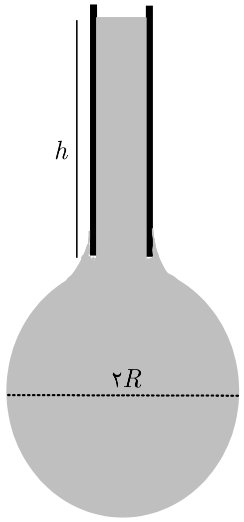
ب) T را بر حسب d، t، w و v به دست آورید.

پ) X مختصه‌ی چشمه روی محور x را در لحظه‌ی T بر حسب d، t، w و v به دست آورید.



ت) نمودار T بر حسب x مطابق شکل است. ناظر A اولین بار چشمه را در نقطه‌ی x و در لحظه‌ی T می‌بیند. x و T را بر حسب d، w و v به دست آورید.

ث) برای زمان‌های $T \quad T$ ناظر چشمه را در چه مکان یا مکان‌هایی می‌بینند؟ جواب را بر حسب T، T، w و v بیان کنید.



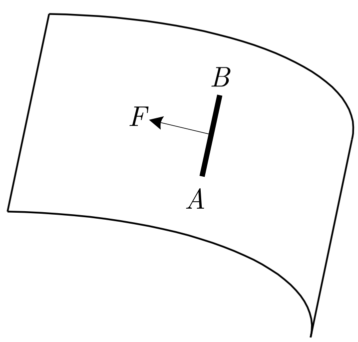
۴) لوله‌ای مطابق شکل حاوی مایعی به چگالی است. در انتهای باز لوله قطره‌ای تشکیل شده که شکل آن تقریباً یک کره‌ی کامل به شعاع R است. ضریب کشش سطحی (که در انتهای مسئله توضیح داده شده است) برای این مایع است. ارتفاع مؤثر مایع در لوله با لحاظ کردن اثر مویینگی h است. فشار هوای بیرون P است. می‌خواهیم شعاع قطره را بر حسب کمیت‌های مرتبط به دست آوریم.

آ) ترکیب معینی از کمیت‌های ، و g یکای طول دارد. این ترکیب را بیابید و a بنامید.

ب) نیروهای وارد بر نیمکره‌ی پایینی را در نظر بگیرید و با استفاده از شرط تعادل، شعاع قطره را بر حسب h و a حساب کنید.

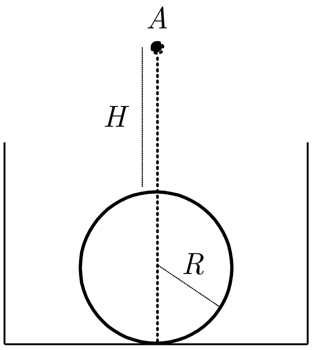
پ) جواب R را با توجه به آن که a خیلی از h کوچکتر است به طور تقریبی حساب کنید. از رابطه‌ی $\sqrt{۱\quad}$ ۱ /۲ برای بسیار کوچکتر از ۱ استفاده کنید.

ت) به ازای h ۸ mm شعاع قطره R ۱ ۲ mm است. با فرض آن که g ۱۰ $m/s^۲$ و ۱ $g/cm^۳$ ضریب کشش سطحی مایع را بر حسب N/m به دست آورید.



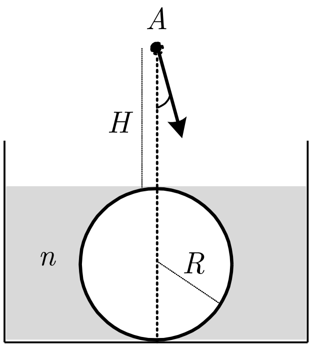
توضیح: عناصر واقع بر سطح تماس دو محیط یکدیگر را با نیرویی می‌کشند. فرض کنید سطح نشان داده شده در شکل مقابل سطح جدایی بین دو محیط است، مثلاً یک طرف صفحه آب و طرف دیگر آن هوا قرار دارد. عناصر واقع در سمت چپ پاره خط AB به طول L عناصر سمت راست را مطابق شکل با نیرویی می‌کشند که با طول AB متناسب است، به طوری که L F . به کمیت ضریب کشش سطحی گفته می‌شود که واحد آن نیوتن بر متر است.

۵) کره‌ای کدر به شعاع R را درون ظرف مکعب مستطیل مقابل که کف آن افقی است گذاشته‌ایم. یک چشمه‌ی نقطه‌ای نور روی خط قائم گذرنده از نقطه‌ی تماس کره با کف ظرف و در فاصله‌ی H از بالای کره قرار دارد.



آ) مساحت سایه‌ی ایجاد شده در کف ظرف را بر حسب H و R به دست آورید.

ظرف را با مایع شفافی به ضریب شکست n پر می‌کنیم به طوری که سطح مایع در ظرف، مماس بر بالاترین نقطه‌ی کره شود و کره کاملاً درون مایع قرار گیرد.



ب) اگر زاویه‌ی یک پرتو دلخواه با امتداد قائم باشد، پرتوهای با به کف ظرف نمی‌رسند. در این حالت معادله‌ای برای sin به صورت زیر به دست می‌آید

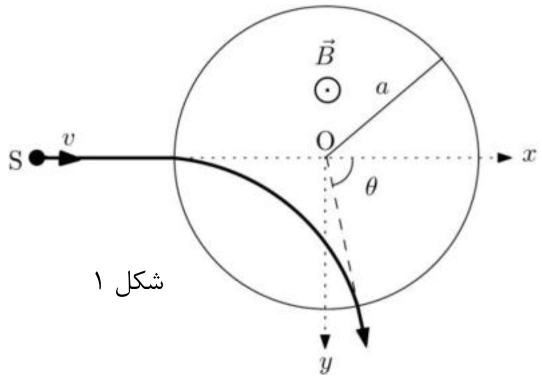
$$sin^{۳} \quad a\, sin^{۲} \quad b\, sin \quad c \quad ,$$

ضرایب a، b و c را بر حسب n، R و H به دست آورید.

پ) به ازای R H، sin را بر حسب n به دست آورید.

ت) به ازای $\sqrt{۳}$ n و R H، مساحت سایه‌ی ایجاد شده در کف ظرف را بر حسب R به دست آورید.

هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

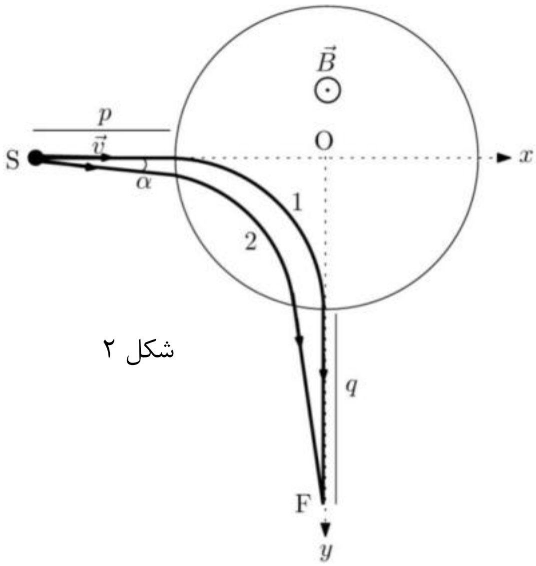


شکل ۱

۶) در یک ناحیه‌ی دایره‌ای به شعاع a و مرکز O میدان مغناطیسی B مطابق شکل عمود بر صفحه‌ی شکل و به سمت بیرون وجود دارد. خارج از این ناحیه میدان مغناطیسی صفر است. باریکه‌ای از ذراتی به جرم m و بار الکتریکی q با سرعت v در راستای یکی از قطرها که آن را محور x می‌گیریم، وارد این ناحیه می‌شود و مسیری دایره‌ای را طی می‌کند. پس از خروج از این ناحیه، جهت حرکت باریکه به اندازه‌ی زاویه‌ی نسبت به جهت اولیه منحرف می‌شود.

آ) جرم ذرات، m را بر حسب B، a، q، v و به دست آورید.

ب) اگر C مرکز دایره‌ای باشد که ذرات باریکه در ناحیه‌ی میدان طی می‌کنند، مختصات نقطه‌ی C یعنی x_C و y_C را در دستگاه مختصات xOy شکل ۱ به دست آورید.



شکل ۲

فرض کنید پارامترهای مسئله چنان تنظیم شده باشند که، ذراتی که درست روی محور x داخل میدان می‌شوند روی محور y خارج شوند (باریکه‌ی ۱ در شکل ۲).

از چشمه‌ی S که در فاصله‌ی p از دایره ناحیه‌ی میدان مغناطیسی قرار دارد علاوه بر باریکه‌ی یاد شده، باریکه‌ی ۲ هم در صفحه‌ی y x به سمت میدان گسیل می‌شود که با باریکه‌ی قبلی زاویه‌ی بسیار کوچک می‌سازد.

پ) فرض کنید باریکه‌ی ۲ پس از عبور از میدان مغناطیسی در نقطه‌ی F روی محور y باریکه‌ی ۱ را قطع کند. فاصله‌ی F تا دایره را q بنامید و آن را بر حسب a و p به دست آورید.

ت) فرض کنید a p p و a q q. مقدار $1/q$ $1/p$ را به دست آورید و ساده کنید.

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و یکمین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۴ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۱۸۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

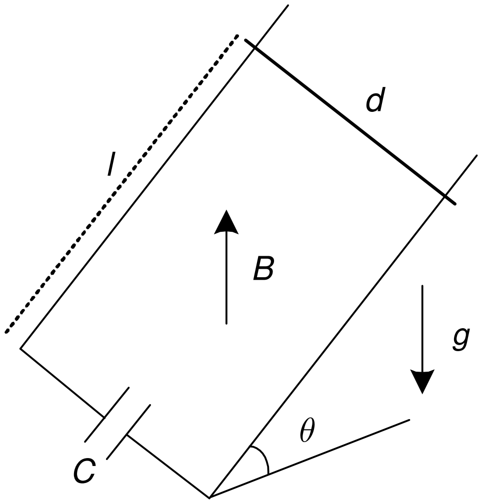
۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.

۹- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

سی و یکمین دوره المپیاد فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۴

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۱) دو ریل موازی و بدون اصطکاک به فاصلهٔ d از یکدیگر بر روی سطح شیب‌داری که زاویهٔ آن با افق θ است، قرار دارند. میله‌ای به جرم m مطابق شکل بر روی این ریل‌ها به پایین سر می‌خورد. شتاب گرانش، g، رو به پایین و میدان مغناطیسی یکنواخت B رو به بالا است. انتهای ریل‌ها در پایین به صفحات خازنی به ظرفیت C متصل هستند. میله، ریل‌ها و سیم‌های اتصال همگی بدون مقاومت هستند. میله در لحظهٔ $t = 0$ به فاصلهٔ l از پایین ریل‌ها است و در همین لحظه از حال سکون رها می‌شود.



آ) سرعت رسیدن میله به انتهای ریل‌ها را به دست آورید.

ب) مدت زمان لازم برای رسیدن میله به انتهای ریل‌ها را به دست آورید.

پ) میزان بار ذخیره شده در خازن در این مدت را محاسبه کنید.

ت) به ازای $\theta = 30^\circ$، $m = 0/5\ \mathrm{g}$، $d = 8\ \mathrm{cm}$، $l = 10\ \mathrm{cm}$، $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ و $B = 1\ \mathrm{T}$ و $C = 10000\ \mu\mathrm{F}$، مقادیر عددی کمیت‌های خواسته شده در قسمت‌های آ) تا پ) را به دست آورید.

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

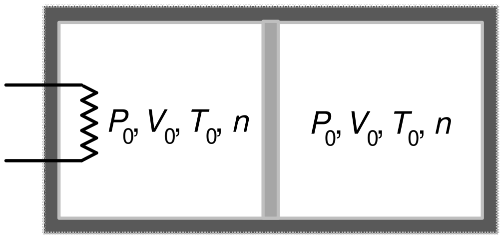
نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی و یکمین دوره المپیاد فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۴

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۲) استوانه‌ای که دیواره‌های آن کاملاً عایق گرما است توسط یک پیستون بدون اصطکاک و عایق گرما به دو نیمهٔ مساوی تقسیم شده است. هر نیمهٔ استوانه محفظهٔ بسته‌ای به حجم V_0 محتوی n مول گاز کامل در فشار P_0 و دمای T_0 است. بنا به تعریف، نسبت C_P / C_V ضریب اتمیسیته نام دارد که با γ نشان داده می‌شود و در این مسئله $1/5$ ($\gamma = 3/2$) فرض می‌شود. C_P و C_V به ترتیب ظرفیت گرمایی مولی گاز در فشار و حجم ثابت هستند. به کمک یک گرمکن برقی مقداری گرما به گاز محفظهٔ سمت چپ می‌دهیم که باعث انبساط آن می‌شود. در حالت تعادل فشار گاز در هر طرف به $27P_0/8$ می‌رسد. با توجه به این که برای گاز کامل در فرایند بی‌دررو کمیت PV^γ ثابت است، کمیت‌های زیر را بر حسب R ثابت گازها، T_0 و n به دست آورید.

آ) دمای مطلق نهایی گاز سمت راست.

ب) کار انجام شده روی گاز سمت راست.

پ) دمای مطلق نهایی گاز سمت چپ.

ت) گرمای داده شده به گاز سمت چپ.

برای گاز کامل تک اتمی $\gamma = 5/3$ و برای گاز کامل دو اتمی $\gamma = 7/5$ است.

ث) فرض کنید n_1 مول گاز کامل تک اتمی را با n_2 مول گاز کامل دو اتمی مخلوط کرده‌ایم. نسبت n_2/n_1 چقدر باشد تا $\gamma = 3/2$ شود؟

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

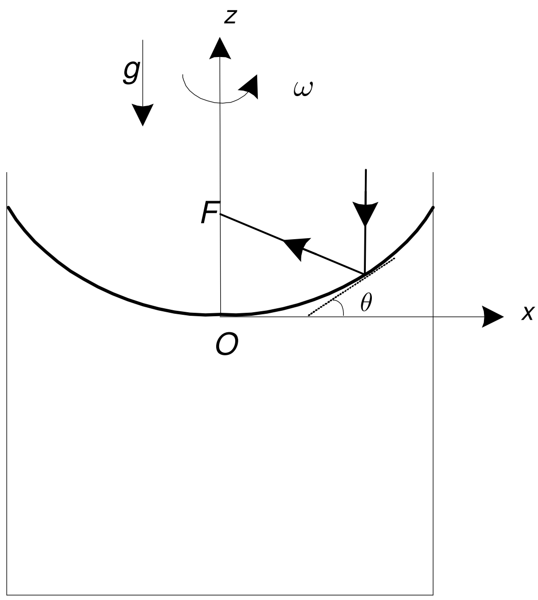
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۳) استوانه‌ای قائم حاوی جیوه حول محور تقارن خود (محور z در شکل) با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. شتاب گرانش g در راستای محور z و رو به پایین است. بر اثر چرخش، جیوه در قسمت میانی فرورفته می‌شود و در کناره‌های استوانه بالا می‌آید، به طوری که برش قائم دستگاه در صفحه‌ی $x-z$ مطابق شکل است. از هر نوع اثر موئینگی چشم بپوشید.

آ) نقطه‌ای روی سطح جیوه بگیرید و مختصات آن را x و z بنامید. فرض کنید مماس بر سطح جیوه در این نقطه با امتداد افق زاویهٔ θ بسازد. اگر جزء کوچکی از جیوه را در این نقطه در نظر بگیرید، سایر اجزاء به آن نیرو وارد می‌کنند که برآیند آن‌ها عمود بر سطح جیوه است. با توجه به این نکته $\tan\theta$ را به دست آورید.

ب) منحنی $x-z$ این مسئله از نوع $z=ax^2$ است که تانژانت مماس بر آن در هر نقطه $2ax$ است. با توجه به این که فشار در نقطه‌ای به عمق h از سطح آزاد مایع به اندازه‌ی ρgh از فشار در سطح آن بیشتر است و سطح آزاد مایع یک سطح هم‌فشار است، رابطه‌ای برای $P(x, z)$، فشار در نقاط داخل مایع بنویسید. فشار هوا را P_0 بگیرید.

پ) فرض کنید یک دسته پرتو از بالا به پایین به موازات محور z به سطح جیوه که مانند آینه عمل می‌کند، بتابد. هر جزء کوچک از سطح جیوه مانند یک آینه تخت است که زاویه‌های تابش و بازتابش از روی آن با هم برابرند. یک پرتو دلخواه در فاصله‌ی x از محور z در نظر بگیرید و محل برخورد پرتو بازتابیده با محور z که در شکل با F نشان داده شده را به دست آورید.

ت) می‌توان قسمت کوچکی از سطح جیوه را در گودترین نقطه مانند سطح یک کره تصور کرد. شعاع این کره را بر حسب پارامترهای مسئله حساب کنید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

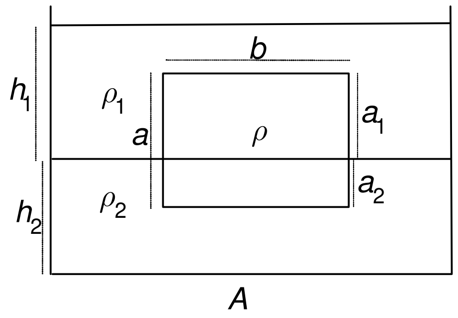
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۴) در ظرف شکل مقابل دو مایع مخلوط‌نشدنی (مثل آب و روغن) به چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) روی هم قرار گرفته‌اند. یک قطعه مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c که چگالی آن ρ است و $\rho_1 < \rho < \rho_2$ داخل این سامانه قرار می‌گیرد به طوری که یال a در امتداد قائم باشد. مساحت کف ظرف A است و $a < b < c$.

آ) طول‌های a_1 و a_2 از مکعب مستطیل که در مایع‌های به چگالی ρ_1 و ρ_2 قرار می‌گیرد را بر حسب داده‌های ذکر شده حساب کنید.

ب) فرض کنید کف ظرف تراز صفر انرژی پتانسیل گرانشی باشد. با توجه به این که انرژی پتانسیل یک مکعب مستطیل mgh است که h ارتفاع مرکز آن مکعب مستطیل از تراز صفر است. انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه را در حالت یاد شده حساب کنید و آن را U_a بنامید. ارتفاع مایع‌ها را مطابق شکل h_1 و h_2 بگیرید.

پ) انرژی پتانسیل یک مکعب مستطیل را در حالت‌هایی که یال b و یا یال c در راستای قائم باشند نیز حساب کنید. مقادیر U_a، U_b و U_c را به ترتیب بزرگی معرفی کنید.

ت) در همان حال که یال a در امتداد قائم است، مکعب مستطیل به اندازهٔ طول کوچک x در راستای قائم به طرف بالا جابجا می‌شود. نیروهای وارد بر مکعب مستطیل را به دست آورید و معادلهٔ حرکت نیوتن را برای این دستگاه بنویسید. فرض کنید مایع‌ها هیچ گونه مقاومت و اصطکاکی در برابر حرکت جسم ندارند. همچنین به دلیل تلاطم ایجاد شده در مایع‌ها، جرم مؤثر مکعب مستطیل را α برابر جرم آن بگیرید که $\alpha > 1$.

ث) معادلهٔ حرکت به دست آمده را با نوسانگر هماهنگی به جرم m که به فنری به ضریب k متصل است مقایسه کنید و از آن جا بسامد زاویه‌ای نوسان دستگاه، ω_a را حساب کنید.

ج) برای حالت‌هایی که یال b و یا یال c در راستای قائم باشند نیز ω_b و ω_c را حساب کنید و آن‌ها را به ترتیب بزرگی معرفی کنید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

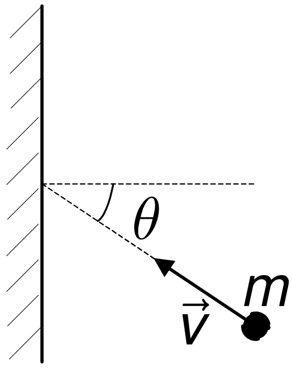
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

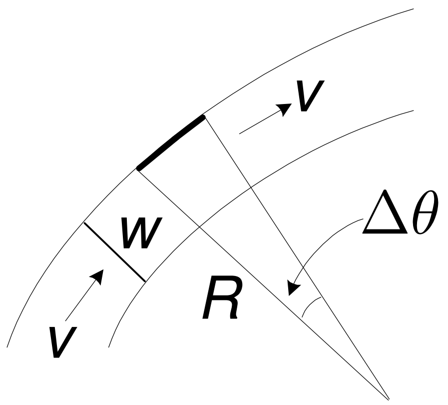
ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۵) ذره‌ای به جرم m با سرعت $\vec{v}$ به یک دیوار ثابت برخورد می‌کند و پس از برخورد آن را ترک می‌کند. زاویهٔ $\vec{v}$ با عمود بر دیوار θ است. در این برخورد انرژی تلف نمی‌شود و دیوار فقط در امتداد عمود بر خودش نیرو وارد می‌کند. در بخش‌های آ، ب، پ و ت گرانش را در نظر نگیرید.

آ) فرض کنید برخورد، بین لحظات t_1 و t_2 اتفاق می‌افتد. نیروی متوسط دیوار بر روی ذره را بر حسب m ، v ، θ ، t_1 و t_2 به دست آورید.



ب) حال فرض کنید قطاری از ذرات که جرم هر یک m و فاصلهٔ آن‌ها از هم l است مشابه ذرهٔ فرض قبل با سرعت $\vec{v}$ به دیوار برخورد می‌کنند و زاویهٔ مسیر حرکت آن‌ها با عمود بر دیوار θ است. نیروی میانگین وارد بر دیوار را بر حسب m ، v ، θ و l حساب کنید.

پ) در قسمت قبل فرض کنید $l \to 0$ و $\frac{m}{l} \to \lambda$. در این صورت به جای قطار ذرات یک جریان پیوسته داریم. از این جا نیروی شارهٔ پیوسته‌ای با چگالی طولی (جرم واحد طول) λ در برخورد با دیوار را بر حسب λ ، v و θ حساب کنید.

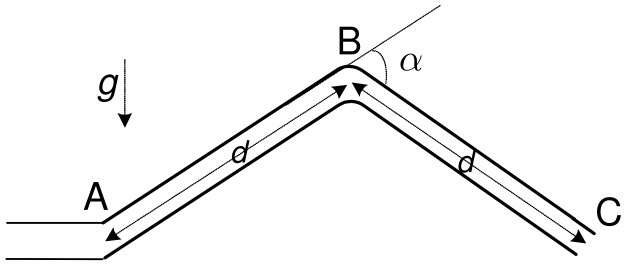
ت) در یک نهر آب به عرض w آب تا ارتفاع h با سرعت v در جریان است. فرض کنید در جایی، نهر مسیری دایره‌ای شکل طی می‌کند به طوری که شعاع این دایره برای دیوار بیرونی R باشد که از w خیلی بزرگ‌تر است. قطعهٔ کوچکی از مسیر آب که متناظر با زاویهٔ کوچک $\Delta\theta$ است را در نظر بگیرید و نیروی وارد شده بر دیوار بیرونی در این قسمت را حساب کنید. سپس فشار وارد شده بر دیوارهٔ بیرونی به واسطهٔ چرخش آب را بر حسب ρ چگالی آب، v ، h ، w و R حساب کنید.

ث) لولهٔ غیر قابل انعطاف ABC به طول $2d$ و جرم M در وسط به اندازهٔ زاویهٔ α خم شده است. سطح مقطع داخلی لوله s است. این لوله در نقطهٔ A با یک اتصال قابل انعطاف به لوله‌ای ثابت و افقی وصل است که از آن جریان آب با چگالی ρ و سرعت v به داخل لولهٔ ABC وارد می‌شود. اتصال در

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



نقطهٔ A چنان است که زاویهٔ AB با لولهٔ ثابت می‌تواند تغییر کند. در این بخش شتاب گرانش مطابق شکل عمود بر لولهٔ ثابت است. اگر لولهٔ ABC مطابق شکل در حالت ثابتی قرار گیرد که نقاط A و C در یک ارتفاع باشند، نیروی قائمی که اتصال قابل انعطاف در نقطهٔ A بر لولهٔ ABC وارد می‌کند چقدر است؟

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی و یکمین دوره المپیاد فیزیک - ۱۳۹۷/۲/۴

نام :

نام خانوادگی :

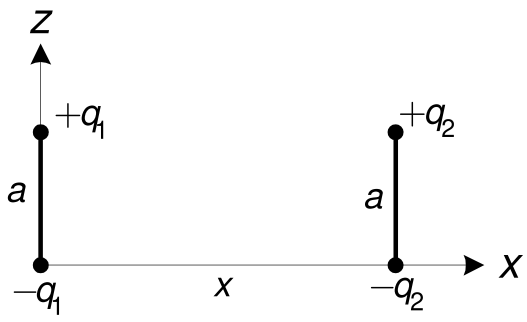
کد ملی :

۶) دوقطبی الکتریکی دستگاهی است متشکل از دو بار نقطه‌ای $+q$ و $-q$ به فاصلهٔ a از یکدیگر، که در حالت حدی $a \to 0$ بررسی می‌شوند به طوری که $p = qa$ کمیتی متناهی موسوم به ممان دوقطبی باشد. فرض کنیم بار $-q$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r}$ و بار $+q$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r} + \vec{a}$ قرار داشته باشد. در حالت حدی $a \to 0$ دوقطبی را موجودی نقطه‌ای در نقطه‌ی $\vec{r}$ می‌گیریم که با بردار $\vec{p} = q\vec{a}$ توصیف می‌شود.

آ) دوقطبی $\vec{p}$ را در مبدأ مختصات در نظر بگیرید که بردار $\vec{p}$ در جهت $+z$ است. برای سهولت این دستگاه را به صورت بار $-q$ در نقطهٔ $(0,0,-a/2)$ و بار $+q$ در نقطهٔ $(0,0,a/2)$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی این دستگاه را در نقطهٔ $(0,0,z)$ حساب کنید. با استفاده از بسط داده شده در انتهای مسئله جواب را در حد $a \to 0$ و $qa \to p$ به دست آورید.

ب) همین مسئله را برای نقطه‌ی $(x,0,0)$ تکرار کنید.

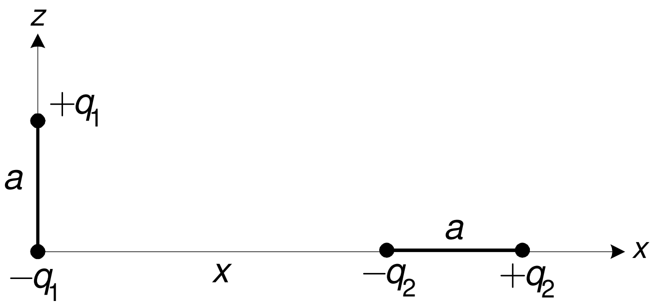
پ) می‌دانیم که انرژی پتانسیل برهم‌کنش دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصلهٔ l از یکدیگر از رابطهٔ $U = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}$ به دست می‌آید. در این بخش می‌خواهیم انرژی پتانسیل برهم‌کنش دو دوقطبی p_1 و p_2 را حساب کنیم. فرض کنید $\vec{p}_1$ در مبدأ مختصات است و بردار آن به سمت $+z$ است. $\vec{p}_2$ نیز در نقطهٔ $(x,0,0)$ است و آن هم به سمت $+z$ است. برای محاسبهٔ انرژی پتانسیل، دوقطبی‌ها را مطابق شکل ۱ به صورت بارهای تشکیل دهندهٔ آن‌ها در نظر بگیرید. انرژی پتانسیل دو به دوی بارها را با هم جمع کنید، ولی انرژی پتانسیل برهم‌کنش بین دو باری که یک دوقطبی را تشکیل می‌دهند در نظر نگیرید. سپس حد $a \to 0$، $q_1a \to p_1$ و $q_2a \to p_2$ را در نظر بگیرید و با استفاده از بسط داده شده در انتهای مسئله پاسخ را به دست آورید.



شکل ۱

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ت) دوقطبی‌های بخش قبل را در همان محل‌های قبلی بگیرید اما این بار فرض کنید $\vec{p}_1$ در جهت $+z$ و $\vec{p}_2$ در جهت $+x$ است. سپس همان مراحل را تکرار کنید. به شکل ۲ نگاه کنید.



شکل ۲

راهنمایی: برای هر $\varepsilon < 1$ و n هر عدد دلخواه مثبت یا منفی داریم

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\varepsilon^3 + \cdots.$$

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۹ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی اُمین دوره المپیاد فیزیک - بخش نظری

تاریخ: ۱۳۹۶/۱/۲۹ – ساعت: ۹:۳۰ مدت: ۲۱۰ دقیقه

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

شماره صندلی

حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه سوم دبیرستان انتخاب می شوند.

۹- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

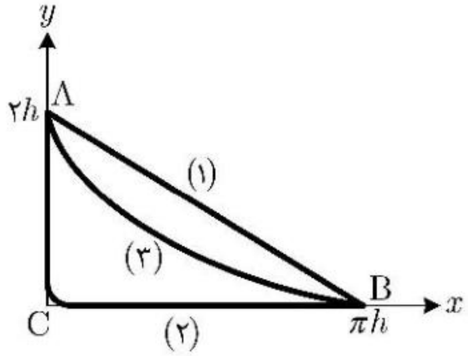
سی اُمین دوره المپیاد فیزیک (بخش نظری) - ۱۳۹۶/۱/۲۹

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۱) مطابق شکل بین دو نقطه‌ی $\mathrm{A}(۰,۲h)$ و $\mathrm{B}(\pi h,۰)$ سه لوله‌ی بدون اصطکاک و با قطر ناچیز قرار می‌دهیم. محور x افقی و محور y قائم است. لوله‌ی (۱) به طور مستقیم A را به B وصل می‌کند. لوله‌ی (۲) مسیر ACB است که AC قائم و CB افقی است. لوله‌ی (۳) در مسیری منحنی شکل و با شیب متغیر است.



آ) فرض کنید سه گلوله‌ی (۱)، (۲) و (۳) از نقطه‌ی A به ترتیب در لوله‌های (۱)، (۲) و (۳) از حال سکون به حرکت در می‌آیند. سرعت هر یک از این گلوله‌ها را در نقطه‌ی B به دست آورید. فرض کنید گلوله‌ای که در لوله‌ی (۲) حرکت می‌کند در نقطه‌ی C بدون تغییر اندازه‌ی سرعت، تنها جهت سرعت‌اش عوض می‌شود.

ب) مدت زمان رسیدن گلوله‌های (۱) و (۲) به نقطه‌ی B را به ترتیب $T_۱$ و $T_۲$ می‌نامیم. $T_۱$ و $T_۲$ را به دست آورید.

پ) اندازه‌ی سرعت گلوله‌ی (۳) را در هر نقطه‌ی دلخواه (x,y) داخل لوله‌ی (۳) به دست آورید.

ت) فرض کنید در مسیر (۳) مختصات (x,y) گلوله با روابط زیر داده می‌شود

$$x = h(u - \sin u)$$
$$y = h(۱ + \cos u)$$

که در آن u یک پارامتر بدون یکا است. یک بخش کوچک از لوله‌ی (۳) را که در ارتفاع y از محور x است با طول کوچک ΔL نشان می‌دهیم. طول ΔL تقریباً برابر طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه است که دو ضلع دیگر آن طول‌های کوچک Δx و Δy به ترتیب در امتداد محور x و y است. طول ΔL را بر حسب u و Δu به دست آورید، که Δu تغییرات u در طول کوچک ΔL است.

لازم به ذکر است که اگر $f(u)$ تابع دلخواهی از u باشد، تغییرات آن به ازای تغییر بسیار کوچک Δu از رابطه‌ی $\Delta f \simeq \frac{df}{du}\Delta u$ به دست می‌آید.

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

ث) در طول کوچک ΔL سرعت گلوله تقریباً ثابت و برابر سرعت آن در ارتفاع y است. مدت زمان عبور گلوله‌ی (۳) در طول ΔL را Δt می‌نامیم. Δt را به دست آورید.

ج) زمان کل حرکت گلوله‌ی (۳) از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B را T_3 می‌نامیم. T_3 را به دست آورید.

چ) T_1، T_2 و T_3 را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۲) دو گرماسنج یکسان داریم که درون اولی آب در دمای θ_1 و درون دومی یخ یکپارچه با دمای نامعلوم است. ارتفاع آب و یخ در هر دو گرماسنج h است. آب درون گرماسنج اول را به آرامی در گرماسنج دوم می‌ریزیم و مدتی صبر می‌کنیم تا تبادل گرمایی انجام شود. پس از برقراری تعادل، آب بالای یخ قرار دارد و ارتفاع کل آب و یخ H است که از $2h$ اندکی بزرگ‌تر است. از هر نوع اتلاف گرمایی چشم می‌پوشیم.

آ) دمای تعادل دستگاه چقدر است؟ معلوم کنید آیا مقداری از آب یخ زده است یا مقداری یخ ذوب شده است.

ب) دمای اولیه‌ی یخ را بر حسب θ_1، h، H، گرمای ویژه‌ی آب c_1، گرمای ویژه‌ی یخ c_2، چگالی آب ρ_1، چگالی یخ ρ_2 و L_f گرمای ذوب یخ به دست آورید.

پ) دمای اولیه‌ی یخ را با استفاده از مقادیر عددی زیر به دست آورید.

$$\theta_1 = 9\,^\circ\mathrm{C}, \quad h = 25\,\mathrm{cm}, \quad H = 50/5\,\mathrm{cm}$$

$$c_1 = 4200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg.K}}, \quad c_2 = 2100\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg.K}}, \quad L_f = 336000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

$$\rho_1 = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, \quad \rho_2 = 900\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۳) یک الکترون با بار الکتریکی $-e$ پس از عبور از اختلاف پتانسیل V در جهت $+x$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. این الکترون سپس از ناحیه‌ی S از محور x به طول $l = ۵\,\mathrm{cm}$ عبور می‌کند. در این ناحیه میدان الکتریکی یکنواخت E در جهت $+y$ و میدان مغناطیسی $B = ۰/۰۰۱\,\mathrm{T}$ در جهت $+z$ برقرار است. میدان الکتریکی E از اعمال ولتاژ $V_۰ = ۳۰۰\,\mathrm{V}$ بین دو صفحه‌ی مسطح رسانا به فاصله‌ی $۱\,\mathrm{cm}$ از یکدیگر ناشی شده است. می‌دانیم برای یک الکترون $mc^۲ = ۰/۵\,\mathrm{MeV}$ است که در آن m جرم الکترون و $c = ۳\times ۱۰^۸\,\mathrm{m/s}$ سرعت نور است. الکترون پس از عبور از ناحیه‌ی S آزادانه به حرکت خود ادامه می‌دهد و به یک صفحه‌ی فلورسان عمود بر محور x در فاصله‌ی $d = ۴۰\,\mathrm{cm}$ از انتهای ناحیه‌ی S برخورد می‌کند.

آ) اختلاف پتانسیل V چقدر باشد تا الکترون بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد؟

ب) اگر اختلاف پتانسیل V دقیقاً قابل تنظیم نباشد و حول مقدار تنظیم شده به اندازه‌ی یک دهم درصد آن افت و خیز داشته باشد، در این صورت نقطه‌ی برخورد الکترون با صفحه‌ی فلورسان به اندازه‌ی حداکثر $\pm\Delta y$ حول نقطه‌ی برخوردِ بدون انحراف، بالا و پایین خواهد شد. Δy چقدر است؟

توجه: کلیه‌ی کمیت‌هایی که در ضمن حل مسئله مقدار عددی آن‌ها را حساب می‌کنید در داخل کادر بنویسید.

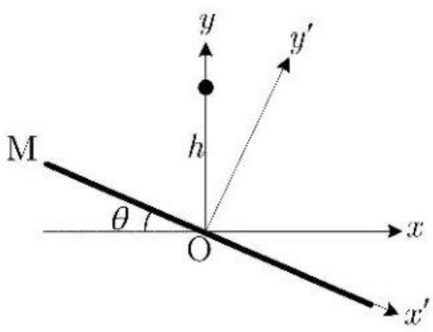
در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۴)

مقدمه‌ی ۱: اگر سرعت یک ذره نسبت به ناظر S بردار $\vec{v}$ باشد و ناظر S' نیز با سرعت $\vec{u}$ نسبت به ناظر S در حال حرکت باشد، سرعت این ذره نسبت به ناظر S' از رابطه‌ی $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ به دست می‌آید.

مقدمه‌ی ۲: اگر یک توپ کوچک به دیوار سنگین و ساکنی برخورد کند و در این برخورد انرژی تلف نشود، برخورد را کشسان می‌نامیم. در این صورت می‌توان نشان داد که مؤلفه‌ی سرعت توپ در راستای عمود بر دیوار بدون تغییر اندازه، بر عکس می‌شود و مؤلفه‌ی موازی دیوار تغییر نمی‌کند. حال فرض کنید دیوار نسبت به ناظر معین S در حال حرکت است. ناظری که دیوار را ساکن می‌بیند S' می‌نامیم. در این حالت اگر ابتدا سرعت توپ را نسبت به ناظر S' بیابیم، گزاره‌ی فوق از دید ناظر S' برقرار است، یعنی مؤلفه‌ی عمود بر دیوار بر عکس می‌شود و مؤلفه‌ی موازی تغییر نمی‌کند. پس از به دست آوردن سرعت توپ (بعد از برخورد) از دید ناظر S'، مجدداً می‌توان آن را از دید ناظر S حساب کرد.



مسئله: فرض کنید ناظر ساکن نسبت به زمین، دستگاه مختصات $x-y$ نشان داده شده در شکل را به کار می‌برد که محور x افقی و محور y قائم است. بردارهای یکه در این جهت‌ها را $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بنامید. بردار شتاب گرانش $\vec{g} = -g\,\hat{j}$ است. صفحه‌ی بزرگ و سنگین M که امتداد آن مطابق شکل با محور x زاویه‌ی θ می‌سازد را در نظر بگیرید. این صفحه با سرعت ثابت u عمود بر امتداد خودش در جهت $+y'$ در حال حرکت است. در شکل، مقطع این صفحه محور x' است. ناظری که صفحه را ساکن می‌بینند دستگاه مختصات $x'-y'$ را به کار می‌برد که بردارهای یکه‌ی آن $\hat{i}'$ و $\hat{j}'$ نام دارد.

توپی از ارتفاع h روی محور y از حال سکون رها می‌شود و درست هنگامی که به مبدأ مختصات مشترک دستگاه‌های $x-y$ و $x'-y'$ می‌رسد با صفحه‌ی M برخورد می‌کند. لحظه‌ی برخورد را $t=0$ بگیرید. کمیت‌های خواسته شده را بر حسب g، h، u و θ به دست آورید.

آ) v_{1x} و v_{1y} مؤلفه‌های بردار $\vec{v}_1$، سرعت توپ در لحظه‌ی قبل از برخورد از دید ناظر زمین.

ب) $w_{1x'}$ و $w_{1y'}$ مؤلفه‌های بردار $\vec{w}_1$، سرعت توپ در لحظه‌ی قبل از برخورد از دید ناظر S'.

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

پ) $w_{۲x'}$ و $w_{۲y'}$ مؤلفه‌های بردار $\vec{w}_۲$، سرعت توپ در لحظه‌ی بعد از برخورد از دید ناظر S'.

ت) $v_{۲x}$ و $v_{۲y}$ مؤلفه‌های بردار $\vec{v}_۲$، سرعت توپ در لحظه‌ی بعد از برخورد از دید ناظر زمین.

ث) فرض کنید به ازای $\theta = \theta_h$، توپ پس از برخورد تا ارتفاع h از نقطه‌ی برخورد در راستای y بالا می‌رود. θ_h را حساب کنید.

ج) فرض کنید به ازای $\theta = \theta_c$، مؤلفه‌ی قائم سرعت توپ در لحظه‌ی بعد از برخورد صفر می‌شود. θ_c را به دست آورید.

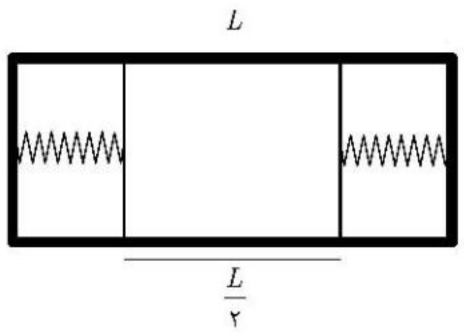
در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۵) مطابق شکل، استوانه‌ای افقی به طول L و سطح مقطع A را در نظر بگیرید که به هر دو جانب آن یک فنر با طول عادی L و ثابت k وصل است. هر فنر به یک پیستون نازک و با ظرفیت گرمایی ناچیز متصل است و فضای بین این دو پیستون را n مول گاز کامل تک‌اتمی پر کرده است. دستگاه در حالت تعادل است. در این حالت دمای گاز T_1 و طول بخشی از استوانه که به وسیله‌ی گاز اشغال شده $\frac{L}{2}$ است.



آ) T_1 را بر حسب k، L، n و R (ثابت گازها) به دست آورید.

ب) فشار گاز، P_1، را بر حسب k، L و A به دست آورید.

حال مقداری گرما به دستگاه می‌دهیم به طوری که در حالت تعادل جدید دمای گاز $T_2 = 1/5\,T_1$، فشار گاز P_2 و حجم گاز V_2 است. فرآیند گرما دادن به صورت آرمانی انجام می‌شود.

پ) نسبت $\frac{V_2}{V_1}$ را به دست آورید که V_1 حجم اولیه‌ی گاز است.

ت) نسبت $\frac{P_2}{P_1}$ را به دست آورید.

ث) گرمایی که به دستگاه داده شده را بر حسب k و L حساب کنید.

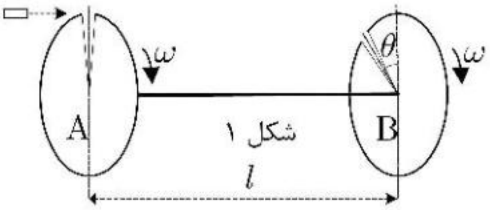
ج) کار انجام شده بر روی گاز را بر حسب k و L حساب کنید.

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

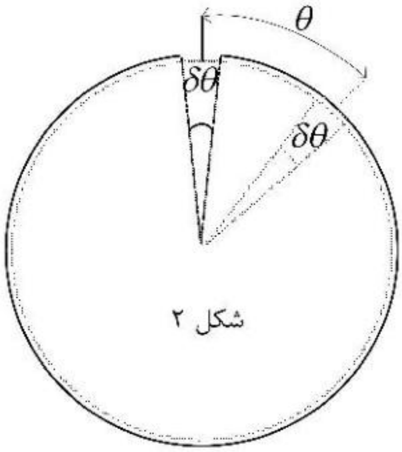
نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



۶) شکل ۱ طرحواره‌ی یک گزینش‌گر سرعت را نشان می‌دهد. این دستگاه از دو گرده‌ی (دیسک) یکسان و هم‌محور A و B درست شده که به فاصله‌ی l از هم قرار دارند. گرده‌ها با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور مشترک خود می‌چرخند. روی هر دو گرده یک چاک کوچک وجود دارد که به شکل قطاع بسیار کوچکی از دایره به زاویه‌ی $\delta\theta$ است. فقط ذراتی از گرده عبور می‌کنند که از چاک رد شوند. اگر دستگاه در امتداد محور مشترک گرده‌ها دیده شود نمایی مطابق شکل ۲ دارد. چنانچه دیده می‌شود خط‌های تقارن چاک گرده‌های A و B همواره با یکدیگر زاویه‌ی θ می‌سازند.



یک چشمه‌ی ساکن تولید ذرات بسیار کوچک در نزدیکی لبه‌ی بالایی گرده‌ی A ذراتی را موازی با محور شلیک می‌کند. فرض کنید هیچ نیرویی به ذرات وارد نمی‌شود.

آ) سرعت ذرات در چه بازه‌هایی باشد تا همه‌ی ذراتی که از چاک گرده‌ی A عبور کرده‌اند از چاک گرده‌ی B نیز عبور کنند. کلیه‌ی جواب‌های ممکن مدّ نظر است. یادآوری می‌شود برای x خیلی کوچک‌تر از یک $\frac{۱}{۱+x} \approx ۱ - x$.

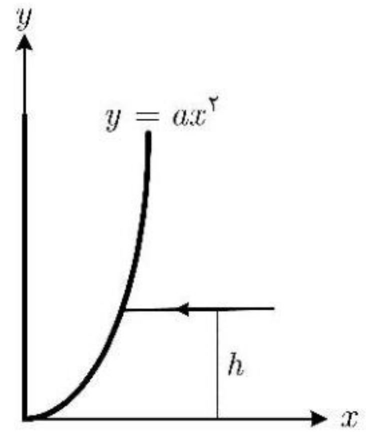
ب) فرض کنید چشمه‌ی ذرات، توزیع یکنواختی از ذرات با سرعت‌های $۳۰\,\mathrm{m/s} \le v \le ۱۲۰\,\mathrm{m/s}$ را تولید می‌کند. منظور از توزیع یکنواخت این است که اگر زمان زیادی از کار چشمه بگذرد، تعداد ذرات تولید شده با سرعت‌های بین $v_۱$ و $v_۲$ متناسب با $\left|v_۲ - v_۱\right|$ خواهد بود. با فرض $\theta=\pi$، $l = ۱\,\mathrm{m}$، $\omega=۱۰۰\pi\,\mathrm{rad/s}$ و $\delta\theta = \pi / ۱۰۰$ تعیین کنید پس از مدت طولانی، چه کسری از ذرات تولیدی چشمه از این دستگاه عبور خواهند کرد؟

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

۷) تیغه‌ای شفاف به ضریب شکست $n = 1 + \delta$ در نظر بگیرید که δ بسیار کوچکتر از یک است. مقطع این تیغه مطابق شکل شامل ناحیه‌ای است که بین محور y و سهمی $y = ax^2$ قرار دارد.



آ) فرض کنید پرتو نوری موازی با محور x و به فاصله‌ی h از آن به تیغه می‌تابد. زاویه‌ی انحراف پرتو پس از خروج از تیغه را بر حسب δ، a و h به دست آورید. فرض کنید $h > \frac{1}{a}$.

ب) دو پرتو نور در نظر بگیرید که به ترتیب در فاصله‌های h_1 و h_2 از محور x و به موازات آن به تیغه می‌تابند. معین کنید این دو پرتو پس از خروج از تیغه در چه فاصله‌ای از محور y در سمت چپ آن به هم می‌رسند.

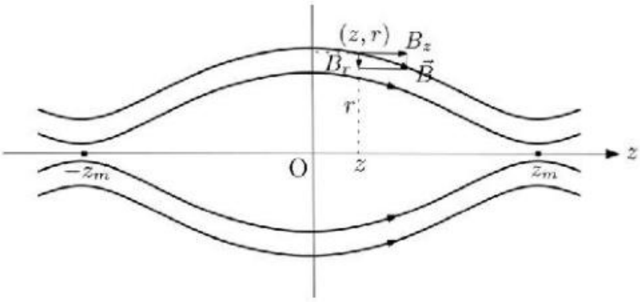
راهنمایی: اگر ε بسیار کوچک‌تر از یک باشد روابط تقریبی زیر را داریم

$$(1+\varepsilon)^n \cong 1 + n\varepsilon$$

$$\sin(x+\varepsilon) \cong \sin x + \varepsilon \cos x$$
$$\cos(x+\varepsilon) \cong \cos x - \varepsilon \sin x$$

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

۸) فرض کنید در ناحیه‌ای از فضا خطوط میدان مغناطیسی $\vec{B}$ مطابق شکل حول محور z تقارن دارند و با دور شدن از نقطه‌ی $z=\circ$ به آرامی همگرا می‌شوند. به این ترتیب میدان مغناطیسی در هر نقطه به مختصات



(z,r) شامل دو مؤلفه‌ی $B_z(z,r)$ در امتداد محور z و $B_r(z,r)$ در راستای شعاعی است.

الکترونی به جرم m در این میدان مغناطیسی حرکت می‌کند. سرعت لحظه‌ای الکترون را می‌توان به مؤلفه‌های v_z در امتداد محور z و $v_\perp$ عمود بر آن تجزیه کرد که $v_\perp$ برآیند حرکت پیچشی حول z و حرکت اندک ذره در راستای شعاعی است. از آنجا که نیروی مغناطیسی همواره بر سرعت ذره عمود است، روی آن کار انجام نمی‌دهد و انرژی جنبشی ذره ثابت است. همچنین می‌توان نشان داد اگر B_z به کندی با z تغییر کند کمیت $\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B_z}$ نیز تقریباً ثابت است.

فرض کنید الکترونی در نقطه‌ای نزدیک محور z در محل $z=\circ$ با مؤلفه‌ی سرعت $v_{\circ z}$ در امتداد محور z و $v_{\circ\perp}$ در امتداد عمود بر آن وارد این ناحیه شود. در چنین شرایطی می‌توان نشان داد که دستگاه مشابه یک آینه‌ی مغناطیسی عمل می‌کند که در آن الکترون‌ها بین دو نقطه‌ی بازگشت معین روی محور z رفت و برگشت می‌کنند. برای درک این مطلب حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن میدان مغناطیسی روی محور z به صورت زیر است

$$B_z(z,\circ) = B_\circ\left(1 + (\frac{z}{z_\circ})^2\right).$$

در نقاط نزدیک محور z نیز میدان را می‌توان تقریباً با مقدار آن روی محور یکی گرفت.

آ) با استفاده از کمیت‌های ثابت گفته شده، ثابت کنید بین مؤلفه‌ی v_z سرعت الکترون و مختصه‌ی z آن رابطه‌ی زیر برقرار است

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی:

$$\frac{۱}{۲}mv_z^۲+\frac{۱}{۲}kz^۲=R$$

و مقادیر k و R را بر حسب m، $v_{\circ z}$، $v_{\circ\perp}$ و $z_\circ$ به دست آورید.

ب) نقاط بازگشت آینه‌ای که در آن‌ها جهت حرکت الکترون در امتداد z بر عکس می‌شود را به دست آورید.

پ) معادله‌ی فوق درست مشابه رابطه‌ی انرژی نوسانگر هماهنگ ساده است. با استفاده از این تشابه، زمان رفت و برگشت الکترون بین نقاط بازگشت آینه‌ای را به دست آورید.

ت) $z(t)$ را به دست آورید.

ث) با توجه به شکل، فرض کنید $z_m=۳z_\circ$. نسبت $\frac{v_{\circ z}}{v_{\circ\perp}}$ در چه محدوده‌ای باشد تا الکترون از آینه فرار نکند.

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۳ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی اُمین دوره المپیاد فیزیک - بخش عملی

تاریخ: ۱۳۹۶/۱/۲۹ - ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۴۵ دقیقه

شماره پرونده: استان:
کد ملی: منطقه:
نام پدر: پایه تحصیلی:
نام مدرسه:

شماره صندلی

حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
۲- قبل از شروع آزمون دقت کنید که وسایل ذکر شده درصورت سوال عملی، به طور کامل در اختیار شما قرار گرفته باشد. در صورت بروز مشکل مراقبین را مطلع نمایید.
۳- از آنجا که ممکن است تا پایان آزمون عملی به وسایلی که در اختیار شما قرار داده شده نیاز داشته باشید، هنگام کار با آن‌ها دقت کنید. در صورت وجود مشکل در ابزارهای آزمایش، از مسئول جلسه درخواست کنید آن‌ها را تعویض نماید.
۴- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
۵- پاسخ سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
۶- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
۷- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید.
در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۸- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۹- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۱۰- بخش عملی ۲۰ نمره دارد.

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

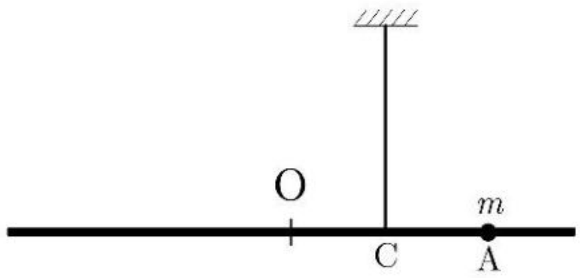
سؤال عملی

موضوع آزمایش: اندازه‌گیری نسبت دو جرم

وسایل آزمایش: لوله‌ی پلاستیکی به جرم m_1 که وزنه‌ی فلزی به جرم m_2 به آن متصل است و $m = m_1 + m_2$، میله‌ی فلزی یکنواخت به جرم M، نخ، چسب کاغذی، کاغذ شطرنجی رسم نمودار (که پیوست پاسخ‌نامه است)، خط کش.

لوله‌ی پلاستیکی و وزنه‌ی متصل به آن می‌تواند در محل‌های مختلف روی میله قرار داده شود، اما از روی میله خارج نمی‌شود.

مقدمه: در شکل ۱ نقطه‌ی O وسط میله‌ی یکنواختی به جرم M است. فرض کنید جرم نقطه‌ای m را در نقطه‌ی A روی میله متصل می‌کنیم. اگر نقطه‌ی C جایی باشد که وقتی دستگاه از آن نقطه آویخته شود میله در حالت تعادل افقی قرار گیرد، خواهیم داشت

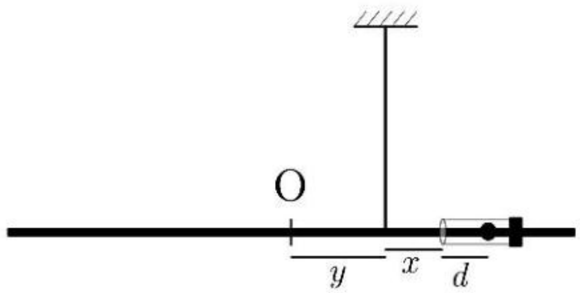


شکل ۱

$$M(\mathrm{OC}) = m(\mathrm{CA}) \qquad (1)$$

که در آن OC فاصله‌ی نقطه‌ی O تا نقطه‌ی C و CA فاصله‌ی نقطه‌ی C تا نقطه‌ی A است.

آزمایش: نقطه‌ی O وسط میله را تعیین کنید و علامت بزنید. نخ را در فاصله‌ی y از نقطه‌ی O (مطابق مقادیری که که در جدول ۱ پاسخ‌نامه داده شده) در همان سمتی که لوله‌ی پلاستیکی قرار دارد ببندید. لوله‌ی پلاستیکی که یک وزنه‌ی فلزی به آن وصل است را روی میله جابه‌جا کنید و در جایی قرار دهید که میله بر اثر آویختن از نخ در حال تعادل افقی قرار گیرد. در این حال فاصله‌ی انتهای لوله از نقطه‌ی آویز (محل نخ) مطابق شکل ۲ برابر x است. فرض کنید d طولی است که اگر به جای مجموعه‌ی وزنه و لوله پلاستیکی،



شکل ۲

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

جرم نقطه‌ای m را قرار می‌دادیم دستگاه در حال تعادل قرار می‌گرفت. در این صورت مطابق آنچه در مقدمه‌ی نظری گفته شد داریم

$$My = m(x + d). \qquad (۲)$$

خواسته‌ها:

۱- به ازای مقادیری از y که در جدول ۱ آمده است، مقدار x را تعیین کنید و نتیجه را در همان جدول وارد کنید.

۲- نمودار خط y را بر حسب x روی کاغذ شطرنجی رسم نمودار، رسم کنید. اندازه‌ی شیب و عرض از مبدأ این خط را به دست آورده و در جدول ۲ وارد کنید.

۳- با توجه به رابطه‌ی (۲) مقادیر $\frac{m}{M}$ و d (بر حسب میلی‌متر) را به دست آورده و در جدول ۳ پاسخ‌نامه وارد کنید.

۴- مجموعه‌ی لوله و وزنه را دستگاهی مشابه آنچه در مقدمه گفته شد، بگیرید. فرض کنید وزنه‌ی فلزی، مشابه یک جرم نقطه‌ای است که درست وسط آن قرار گرفته است. به کمک وسایل موجود، وسط لوله را نیز پیدا کنید. سپس با استفاده از مقدار d که در قسمت ۳ به دست آوردید، نسبت $\frac{m_1}{m_2}$ را به دست آورید و در جدول ۴ پاسخ‌نامه وارد کنید.

شکل دستگاه لوله و وزنه را در جدول ۵ پاسخ‌نامه رسم کنید و نحوه‌ی محاسبه‌ی نسبت $\frac{m_1}{m_2}$ را با توجه به طول‌هایی که در شکل نشان می‌دهید، شرح دهید.

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

پاسخ‌نامه

جدول ۱

$y =$ (میلی‌متر)	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
$x =$ (میلی‌متر)						

جدول ۲

شیب =	
عرض از مبدأ (میلی‌متر) =	

جدول ۳

$m / M =$	
$d =$ (میلی‌متر)	

جدول ۴

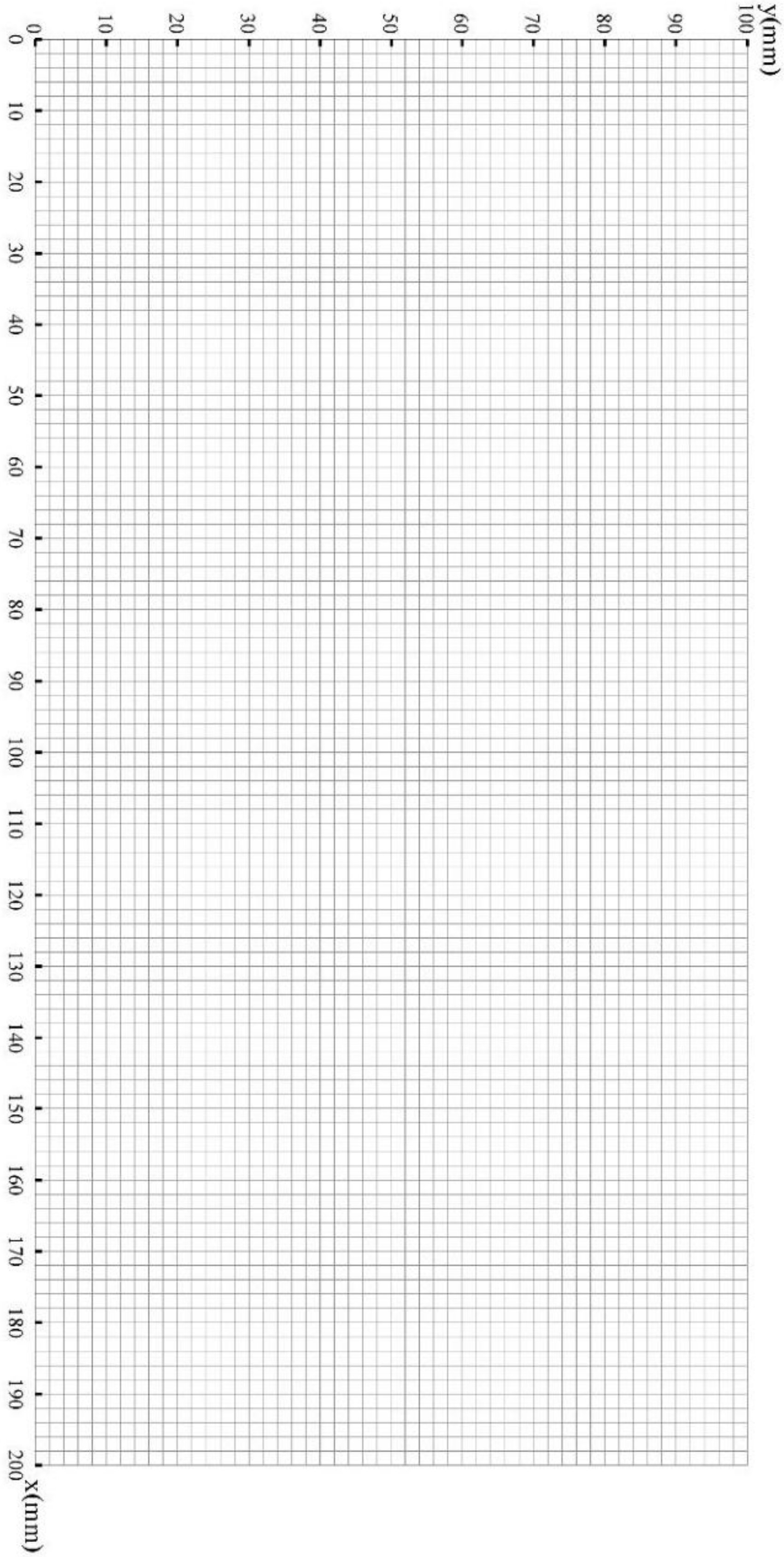
$m_1 / m_2 =$	

جدول ۵

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:



به نام خدا

پاسخ تشریحی سوالات مرحله دوم سی امین المپیاد فیزیک ایران

- یاسمین‌سادات پناهی
- متینا نجفی

پاسخ های تشریحی

(۱)

الف) به دلیل پایستگی انرژی مکانیکی، میدانیم که از آنجایی که هر ۳ توپ در ابتدا در ارتفاع یکسانی قرار دارند،سرعت هر سه آنان در انتهای مسیر یکسان است. بنابراین

$$mg \times 2h = \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

$$\Rightarrow v_1 = 2\sqrt{gh} = v_2 = v_3$$

ب) در مسیر ۱ زمان حرکت گلوله از تقسیم مسافت پیموده شده بر سرعت متوسط آن در طی مسیر به دست می آید

$$\overline{v_1} = \sqrt{gh}$$

$$T_1 = \frac{\sqrt{(2h)^2 + (\pi h)^2}}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{h}{g}}.\sqrt{4 + \pi^2}$$

برای به دست آوردن زمان حرکت گلوله ۲، زمان حرکت آن را در هر یک از قسمت های مسیرش به دست می آوریم و با هم جمع میکنیم

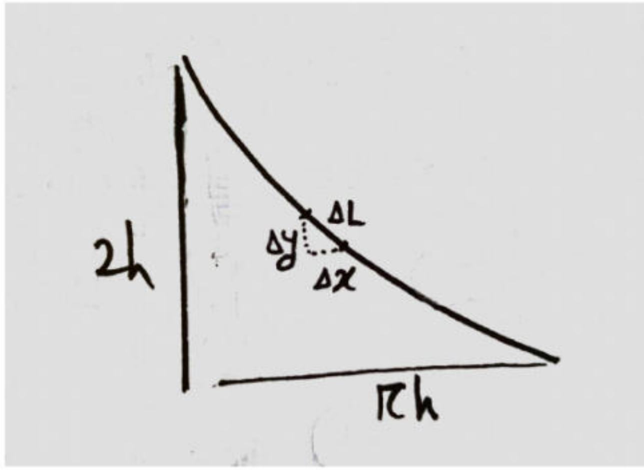
$$T_2 = \frac{2h}{\sqrt{gh}} + \frac{\pi h}{2\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{h}{g}}(2 + \frac{\pi}{2})$$

پ) دوباره از قانون پایستگی جرم استفاده میکنیم

$$mg(2h - y) = \frac{1}{2}m{v_{3(y)}}^2$$

$$\Rightarrow v_{3(y)} = \sqrt{2g(2h - y)}$$

ت)



$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\Delta x \approx \frac{dx}{du}\Delta u = h(1-\cos u)\Delta u$$

$$\Delta y \approx \frac{dy}{du}\Delta u = -h\sin u\ \Delta u$$

$$\Rightarrow \Delta L = h\Delta u\sqrt{(1-\cos u)^2 + \sin^2 u} = h\Delta u\sqrt{2(1-\cos u)}$$

ث) زمان عبور گلوله از تقسیم فاصله کوچکی که در قسمت بالا به دست آوردیم برسرعت گلوله در ارتفاع دلخواه که در قسمت پ به دست آوردیم، بدست می آید.

$$\Delta t = \frac{h\Delta u\sqrt{2(1-\cos u)}}{\sqrt{2g(2h-y)}} \qquad y = h(1+\cos u)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{h\Delta u\sqrt{1-\cos u}}{\sqrt{gh(1-\cos u)}} = \sqrt{\frac{h}{g}}\Delta u$$

ج) برای به دست آوردن کل زمان حرکت گلوله ۳، تمام زمان هایی که جزء های مسیر را در آن می پیماید (که آنرا برای ارتفاع دلخواه در قسمت بالا به دست آوردیم) را جمع میزنیم.

$$T_3 = \sum \Delta t = \sum \sqrt{\frac{h}{g}}\Delta u = \sqrt{\frac{h}{h}}\sum \Delta u = \sqrt{\frac{h}{g}}u$$

$$y = 2h = h(1 + \cos u_1) \to \ \cos u_1 = 1 \to u_1 = 0$$

$$y = 0 = h(1 + \cos u_2) \to \ \cos u_2 = -1 \to u_2 = \pi$$

$$\Rightarrow T_3 = \sqrt{\frac{h}{g}}(u_2 - u_1) = \pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

چ)

$$\sqrt{4 + \pi^2} > 2 + \frac{\pi}{2} > \pi$$

$$\Rightarrow T_1 > T_2 > T_3$$

(۲)

الف) میدانیم چگالی یخ کمتر از آب است، پس حجم جرم یکسانی یخ بیشتر از حجم مقدار آبی به همان جرم است. بنابراین باید مقداری آب یخ بزند تا ارتفاع نهایی (H) بیشتر از 2h شود. با توجه به اینکه آب یخ میزند، در حالت تعادل نهایی، آب روی یخ است. دمای ترکیب نهایی چون هیچ اتلاف گرمایی ای هم نیست برابر صفر است.

ب)

جرم آبی که یخ میزند = m

ارتفاع آن جرم وقتی که آب بوده است = h_1

ارتفاع آن جرم وقتی یخ میزند = h_2

حجم حالت ثانویه = v_2 ، حجم حالت اولیه = v_1

دمای اولیه یخ = θ_2

$$m = \rho_1 A h_1 = \rho_2 A h_2$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 \qquad (1)$$

$$(H-2h)A = v_2 - v_1 = \frac{m}{\rho_2} - \frac{m}{\rho_1} = A(h_2 - h_1)$$

$$\Rightarrow H - 2h = h_2 - h_1 \qquad (2)$$

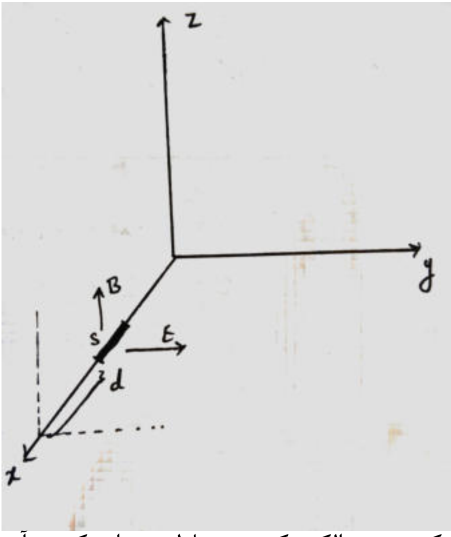
$$\text{تعادل} \Rightarrow \; -\rho_1 h_1 A C_1 \theta_1 - \rho_1 h_1 A L_f - \rho_1 (h - h_1) A C_1 \theta_1 = \rho_2 h C_2 \theta_2 A$$

$$\Rightarrow \rho_1 h C_1 \theta_1 + \rho_1 h_1 L_f = \rho_2 h C_2 \theta_2 \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} H - 2h = h_1\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) - 1\right) \Rightarrow h_1 = \frac{H-2h}{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}$$

$$\xrightarrow{h_1 \; in \; (3)} \theta_2 = \frac{-\rho_1\left(hC_1 + \frac{(H-2h)L_f}{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}\right)}{\rho_2 h C_2} = -52°C$$

(۳)



$$\frac{1}{2}mv^2 = Ve \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Ve}{m}} \quad , \quad l = 5 \times 10^{-2}m \quad , \quad B = 10^{-3}T$$

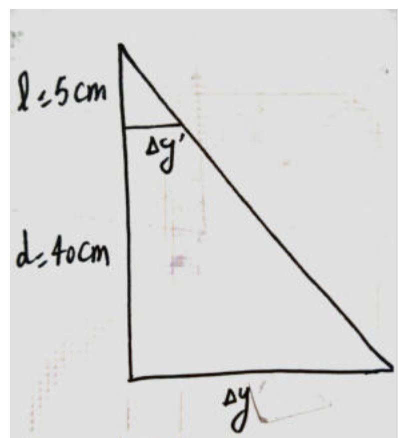
$$c = 3 \times 10^8 \, m/_s \quad , \quad d = 0.4m \quad , \quad E = \frac{V_0}{D} = 3 \times 10^4 \, N/_C$$

$$mc^2 = 5 \times 10^5 eV \Longrightarrow \frac{e}{m} = \frac{9 \times 10^{16}}{5 \times 10^5} = 18 \times 10^{10} \, C/_{kg}$$

الف)برای اینکه الکترون منحرف نشود باید برایند نیروهای وارد بر آن صفر باشد، و از آنجایی که نیروی الکتریکی و مغناطیسی ای که به آن وارد میشود در جهت های مخالف هستند، بنابراین باید مقدار این نیرو ها با هم برابر باشند.

$$eE = eB\sqrt{2V\frac{e}{m}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{E^2}{2B^2\frac{e}{m}} = \frac{9 \times 10^8}{2 \times 10^{-6} \times 18 \times 10^{10}} = 2500V$$



ب) چون دلتا V خیلی کم است و ۵/۴۰ خیلی کوچک است، مسیر حرکت الکترون مستقیم فرض میشود.

L = مسافتی که الکترون در ناحیه S می پیماید

$$\frac{\delta V}{V} = 0.001$$

$$a = \frac{eB\sqrt{2(V+\delta V)\frac{e}{m}} - eE}{m} = \frac{e}{m}\left(B\sqrt{2(V+\delta V)\frac{e}{m}} - E\right) = \frac{e}{m}\left(B\sqrt{2V\frac{e}{m}\left(1+\frac{\delta V}{V}\right)} - E\right)$$

$$\approx \frac{e}{m}\left(B\sqrt{2V\frac{e}{m}}\left(1+\frac{\delta V}{2V}\right) - E\right) = \frac{e}{m}\left(B\sqrt{2V\frac{e}{m}}\frac{\delta V}{2V} + B\sqrt{2V\frac{e}{m}} - E\right)$$

$$B\sqrt{2V\frac{e}{m}} = E \implies a = \frac{e}{m}B\sqrt{2V\frac{e}{m}}\frac{\delta V}{2V}$$

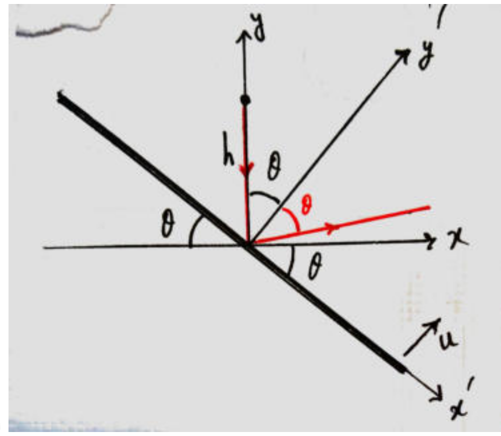
$$L = \sqrt{l^2 + \Delta y'^2} = l\sqrt{1+\frac{\Delta y'^2}{l^2}} \approx l$$

$$t = \frac{l}{\sqrt{2(V+\delta V)\frac{e}{m}}} \approx \frac{l}{\sqrt{2V\frac{e}{m}}\left(1+\frac{\delta V}{2V}\right)}$$

$$\Delta y' = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{e}{m}B\sqrt{2V\frac{e}{m}}\,\frac{\delta V}{2V}\left(\frac{l^2}{2V\frac{e}{m}\left(1+\frac{\delta V}{2V}\right)^2}\right)$$

$$\Delta y = 9\Delta y' \approx 3.4 \times 10^{-7}$$

(۴)



الف) توپ در خط عمودی حرکت میکند، بنابراین مولفه افقی سرعت آن صفر است. مولفه عمودی نیز از پایستگی انرژی به دست می آید.

$$v_{1x} = 0 \ , \qquad v_{1y} = -\sqrt{2gh}$$

ب) برای بدست آوردن سرعت نسبی سطح و توپ در دستگاه x-'y' مولفه عمودی سرعت توپ را از مولفه عمودی سرعت زمین، و مولفه افقی سرعت توپ را از مولفه افقی سرعت زمین تفریق برداری میکنیم , و برای به دست آوردن این مولفه ها، سرعت عمودی و افقی توپ در دستگاه x-y را روی محور های دستگاه جدید تجزیه میکنیم:

$$w'_{1x} = \sqrt{2gh}\sin\theta \ , \qquad w'_{1y} = -\sqrt{2gh}\cos\theta - u$$

پ) چون هنگام برخورد مولفه افقی توپ در دستگاه سطح متحرک تغییری نمیکند و مولفه عمودی آن در دستگاه سطح تنها علامتش تغییر میکند، بنابر این مطابق شکل بالا با زاویه یکسانی نسبت به خط عمود بر سطح و سرعتی برابر با سرعت برخورد در دستگاه سطح برمیگردد، درست مانند بازتاب نور از یک سطح.

$$w'_{2x} = \sqrt{2gh}\sin\theta \ , \qquad w'_{2y} = \sqrt{2gh}\cos\theta + u$$

ت) ابتدا مولفه x' سرعت توپ را بر محور های دستگاه زمین تجزیه میکنیم. در راستای y' در دستگاه سطح سرعت توپ هر چه که باشد، چون سرعت زمین نسبت به سطح برابر u و در جهت خلاف محور y' است، ابتدا سرعت u را به مولفه y' سرعت توپ اضافه میکنیم، سپس آنرا بر روی محور های دستگاه x-y تجزیه میکنیم و درنهایت همه آنها را با هم جمع کرده و مولفه های سرعت در دستگاه زمین را بدست می آوریم.

$$v_{2y} = w_{2x'}\cos\theta + (w_{2y'} + u)\sin\theta = 2\sqrt{2gh}\sin\theta\cos\theta + 2u\sin\theta$$

$$v_{2y} = (w_{2y'} + u)\cos\theta - w_{2x'}\sin\theta = \sqrt{2gh}\cos^2\theta + 2u\cos\theta - \sqrt{2gh}\sin^2\theta$$

ث) از پایستگی انرژی استفاده میکنیم:

$$mgh = \frac{1}{2}m{v_{2y}}^2 \Rightarrow v_{2y} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gh}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2u\cos\theta$$
$$= \sqrt{2gh}(2\cos^2\theta - 1) + 2u\cos\theta$$

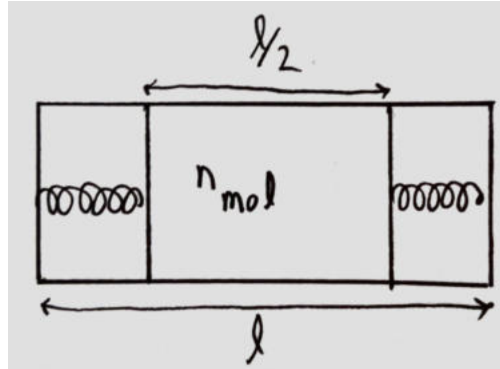
$$\Rightarrow \sqrt{2gh}\cos^2\theta_h + u\cos\theta_h - \sqrt{2gh} = 0 \rightarrow \cos\theta_h = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 + 8gh}}{2\sqrt{2gh}}$$

$$\cos\theta_h \geq -1 \rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{-u + \sqrt{u^2 + 8gh}}{2\sqrt{2gh}}$$

ج) چون در ادامه دو جواب قابل قبول برای زاویه مورد نظر به دست می آید، در نتیجه در ۲ زاویه مولفه عمودی سرعت صفر میشود.

$$v_{2y} = 0 = \sqrt{2gh}(2\cos^2\theta - 1) + 2u\cos\theta \rightarrow \theta_c = \cos^{-1}\frac{-u \pm \sqrt{u^2 + 4gh}}{2\sqrt{2gh}}$$

(۵)



الف) با نوشتن معادله تعادل نیروها برای محفظه حاوی گازی و دو فنر متصل به دیواره های ظرف ، T1 را بدست می آوریم:

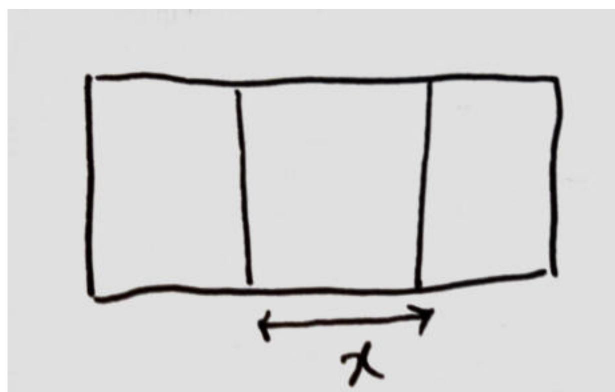
$$PV = nRT \rightarrow \frac{nRT_1}{A\frac{l}{2}} = \frac{K}{A}\left(l - \frac{l}{4}\right) \rightarrow T_1 = \frac{3l^2K}{8nR}$$

ب) با دراختیار داشتن مقداری T1 و حجم محفظه گازی (AL/2) از طریق قانون گازهای کامل (PV=nRT) فشار را بدست می آوریم:

$$P_1V_1 = nRT_1 \rightarrow P_1 = \frac{3l^2K}{8nR} \times nR \times \frac{2}{Al} = \frac{3lK}{4A}$$

پ) با افزایش دما ، گاز منبسط شده و طول فنر ها تغییر میکند ، با توجه به ثابت بودن سطح پیستون (A) نسبت v1 به v2 همان نسبت طول اولیه محفظه گازی به طول ثانویه آن است:

l' = طول جدید فنر



$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{A(l-2l')}{A\frac{l}{2}}=\frac{2(l-2l')}{l}$$

$$\frac{nRT_2}{A(l-2l')}=\frac{K(l-l')}{A}$$

$$\xrightarrow{T_2={}^3/_2T_1} 2l'^2-3ll'+\frac{7l^2}{16}=0 \Longrightarrow l'=\frac{3\pm\sqrt{\frac{11}{2}}}{4}$$

$$l'<\frac{l}{4}\Rightarrow l'=l\left(\frac{3-\sqrt{\frac{11}{2}}}{4}\right)\Longrightarrow\frac{V_2}{V_1}=\sqrt{\frac{11}{2}}-1$$

ت) با در اختیار داشتن نسبت T2 به T1 و V2 به V1 و رابطه PV/T =const در گازهای کامل ، نسبت فشار ثانویه به فشار اولیه را بدست می آوریم:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{T_2}{T_1}\times\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{11}{2}}-1}\right)\rightarrow\frac{P_2}{P_1}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{11}{2}}+1\right)$$

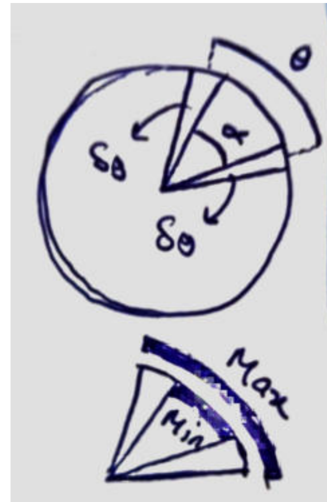
ث و ج) از آنجایی که حجم و فشار گاز هردو تغییر کرده اند با انتگرال گیری ، مقدار کار انجام شده روی گاز را بدست آورده و با استفاده از قانون اول ترمودینامیک مقدار گرمایی که به گاز داده میشود را بدست می آوریم:

$$W=-\int_{V_1}^{V_2}PdV=-\int_{x=\frac{l}{2}}^{x=l-2\acute{l}}\frac{K}{A}\left(l-\left(\frac{l-x}{2}\right)\right)Adx=-K\int_{\frac{l}{2}}^{2\acute{l}}\left(\frac{l}{2}+\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=-\frac{K}{2}\left(lx+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}\left(\sqrt{\frac{11}{2}}-1\right)}=-\frac{Kl^2}{8}\left(\sqrt{\frac{11}{2}}-\frac{5}{4}\right)$$

$$Q=E-W=\frac{3}{2}nR(T_2-T_1)-W=\frac{Kl^2}{8}\left(1+\sqrt{\frac{11}{2}}\right)$$

(۶)



الف) برای آنکه ذره ای که از چاک ۱ عبور کرده اند، از چاک ۲ نیز عبور کنند، گرده دوم تا وقتی که ذره به آن میرسد یا باید تقریبا به اندازه θ چرخیده باشد، یا یک دور کامل به علاوه θ یا دو دور کامل به علاوه θ یا ... بنابراین بینهایت بازه جواب داریم.

زمانی که گرده از چاک ۱ به چاک ۲ میرسد = t

زاویه چرخش چاک ها در مدت عبور گرده از داخل گزینش گر = Δθ

$$t = \frac{l}{v}$$

$$\Delta\theta = \omega t = \frac{\omega l}{v} = 2k\pi + \theta, \qquad k \in \mathbb{W}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \frac{\omega l}{2k\pi + \theta - \delta\theta} \;, \qquad v_{min} = \frac{\omega l}{2k\pi + \theta + \delta\theta}$$

$$\Rightarrow v \approx \left[\frac{\omega l}{2k\pi + \theta}\left(1 - \frac{\delta\theta}{2k\pi + \theta}\right), \frac{\omega l}{2k\pi + \theta}\left(1 + \frac{\delta\theta}{2k\pi + \theta}\right)\right]$$

ب) از آنجایی که بازه کلی سرعت در صورت سوال داده شده است، با قرار دادن مقادیر مختلف k در بازه بالا، تعداد بازه هایی که ماکزیمم و مینیمم آنها در بازه کلی وجود دارد را پیدا میکنیم. گرده هایی که سرعتشان در این بازه هاست از چاک عبور میکنند، و چون احتمال سرعت گرده ها در بازه کلی، یکنواخت است، نسبت مجموع طول این بازه ها به طول بازه کلی،درصد گرده های عبوری را مشخص میکند.

با انجام این کار میفهمیم تنها بازه های با k=1,0 در بازه کلی (۳۰ m/s،۱۲۰ m/s) میگنجند، و هیچ بازه دیگری اشتراکی با بازه کلی ندارد. (به ازای k=2 یا بیشتر از آن، ماکسیمم سرعت از ۳۰ متر بر ثانیه کمتر میشود)

$$k = 0$$

$$v_{max} = \frac{100\pi}{\pi}\left(1 + \frac{\pi/100}{\pi}\right) = 101\ {}^{m}/_{s}\,, \qquad v_{min} = \frac{100\pi}{\pi}\left(1 - \frac{\pi/100}{\pi}\right) = 99\ {}^{m}/_{s}$$

$$\rightarrow v_{max} - v_{min} = 2\ {}^{m}/_{s}$$

$$k = 1$$

$$v_{max} = \frac{100\pi}{3\pi}\left(1 + \frac{\pi/100}{3\pi}\right) = \frac{100}{3} + \frac{1}{9}\ m/_s\,, \qquad v_{min} = \frac{100\pi}{3\pi}\left(1 - \frac{\pi/100}{3\pi}\right) = \frac{100}{3} - \frac{1}{9}\ m/_s$$

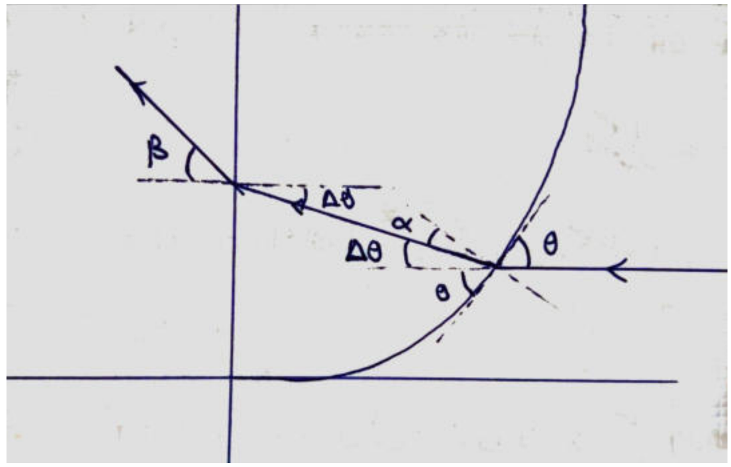
$$\rightarrow v_{max} - v_{min} = \frac{2}{9}\,m/_s$$

$$k = 2$$

$$v_{max} = \frac{100}{5} + \frac{1}{25}\ m/_s < 30\ m/_s$$

$$\frac{2 + \frac{2}{9}}{120 - 30} = \frac{2}{81} \approx 2.47\%$$

(۷)



الف) β زاویه پرتو خروجی از تیغه با خط عمود است،که خط عمود موازی محور x است. چون پرتو ورودی به تیغه موازی محور x بود، پس β همان زاویه بین پرتو خروجی با راستای پرتو ورودی است، یعنی همان زاویه انحراف.

$$y = ax^2 \to y' = 2ax = \tan\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2x^2}}, \qquad \sin\alpha\,(1+\delta) = \cos\theta \to \sin\alpha = (1-\delta)\cos\theta$$

$$\alpha + (\theta + \Delta\theta) = \frac{\pi}{2} \to \sin\alpha = \cos(\theta + \Delta\theta)$$

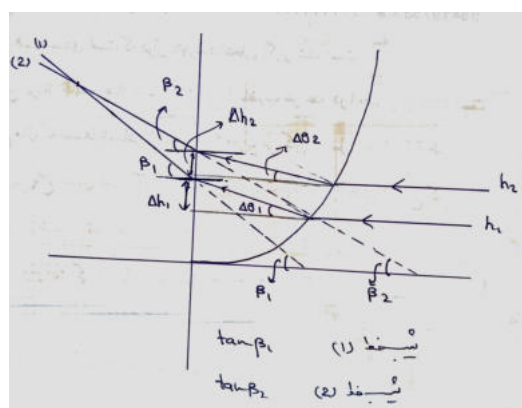
$$\cos(\theta + \Delta\theta) = \cos\theta - \Delta\theta\sin\theta = (1-\delta)\cos\theta = \cos\theta - \delta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \delta\cot\theta \xrightarrow{\tan\theta = 2ax} \Delta\theta = \frac{\delta}{2ax}$$

$$\sin\beta = (1+\delta)\sin\Delta\theta \approx (1+\delta)\Delta\theta = (1+\delta)\frac{\delta}{2ax} = \frac{\delta}{2ax} + \frac{\delta^2}{2ax} \approx \frac{\delta}{2ax} = \sin\Delta\theta$$

$$\beta = \Delta\theta = \frac{\delta}{2ax}$$

ب)



A = عرض از مبدا

$$A_2 = h_2 + \Delta h_2 \ , \qquad \Delta h_2 = x\Delta\theta_2 = x\frac{\delta}{2ax} = \frac{\delta}{2a}$$

$$A_1 = h_1 + \Delta h_1 \ , \qquad \Delta h_1 = \frac{\delta}{2a}$$

$$\tan\beta_1 = \frac{\delta}{2ax_1} \xrightarrow{h_1 = a{x_1}^2} \tan\beta_1 = \frac{\delta}{2a\sqrt{\frac{h_1}{a}}} = \frac{\delta}{2\sqrt{ah_1}} \ , \qquad \tan\beta_2 = \frac{\delta}{2\sqrt{ah_2}}$$

$$y_1 = \frac{\delta}{2\sqrt{ah_1}}x_1 + h_1 + \frac{\delta}{2a} \ , \qquad y_2 = \frac{\delta}{2\sqrt{ah_2}}x_2 + h_2 + \frac{\delta}{2a}$$

$$y_1 = y_2 \ , \qquad x_1 = x_2 = x \Rightarrow \frac{\delta}{2\sqrt{ah_1}}x + h_1 = \frac{\delta}{2\sqrt{ah_2}}x + h_2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{a}}{\delta}\sqrt{h_1 h_2}\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)$$

۸)

الف)

$$k = const \to \frac{1}{2}m({v_{0z}}^2 + {v_{0\perp}}^2) = \frac{1}{2}m({v_z}^2 + {v_\perp}^2)$$

$$B_{z(z=0)} = B_0\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)$$

$$\frac{\frac{1}{2}m{v_{0\perp}}^2}{B_{0z}} = \frac{\frac{1}{2}m{v_\perp}^2}{B_z} \to {v_\perp}^2 = {v_{0\perp}}^2\left(\frac{B_z}{B_{0z}}\right) = {v_{0\perp}}^2\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m({v_{0z}}^2 + {v_{0\perp}}^2) = \frac{1}{2}m\left({v_z}^2 + {v_{0\perp}}^2\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}m{v_{0z}}^2 = \frac{1}{2}m{v_z}^2 + \frac{1}{2}m{v_{0\perp}}^2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{m{v_{0\perp}}^2}{{z_0}^2} \quad , \qquad R = \frac{1}{2}m{v_{0z}}^2$$

ب) در نقاط آیینه ای جهت الکترون در راستای z برعکس میشود، پس در این نقاط $v_z = 0$.

$${v_{0z}}^2 = {v_{0\perp}}^2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{{v_{0z}}^2}{{v_{0\perp}}^2}{z_0}^2} \to z = \pm\left|\frac{v_{0z}z_0}{v_{0\perp}}\right|$$

پ)

$$E = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \to T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \left|\frac{2\pi z_0}{v_{0\perp}}\right|$$

ت)

$$z = A\sin(\omega t + \varphi) \to z_{(t=0)} = 0 \to A\sin\varphi = 0 \to \varphi = 0$$

$$\dot{z}_{(t=0)} = v_{0z} \to A = \frac{v_{0z}}{\omega} \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} A = \frac{v_{0z}}{\left|\frac{v_{0\perp}}{z_0}\right|}$$

$$\Rightarrow z(t) = v_{0z}\left|\frac{v_{0z}}{v_{0\perp}}\right|\sin\left(\frac{v_{0\perp}}{z_0}t\right)$$

ث)

$$-z_m < z_0 < z_m \rightarrow \ -3z_0 < \pm \left|\frac{v_{0z}z_0}{v_{0\perp}}\right| < 3z_0$$

$$\xrightarrow{z_0>0 \ \ ,z_m>0} 0 < \left|\frac{v_{0z}}{v_{0\perp}}\right| < 3$$

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

معاونت دانش‌پژوهان جوان

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۹ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

بیست و نهمین دوره المپیاد فیزیک -

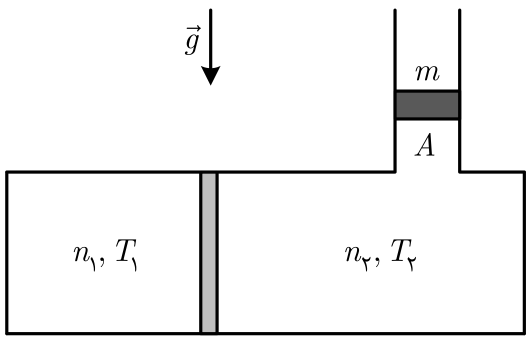
تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۷ – ساعت: ۹:۱۵ مدت: ۲۱۰ دقیقه

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.
۹- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.



۱) دیواره‌ی ثابت رسانایی محفظه‌ی کاملاً عایق‌بندی شده‌ی مقابل را به دو بخش با حجم‌های نامساوی تقسیم کرده است. در بالای بخش سمت راست لوله‌ای قرار دارد که پیستونی به جرم m و مساحت A، آن را کاملاً مسدود کرده و می‌تواند بدون اصطکاک درون لوله حرکت کند. فشار هوای بالای پیستون $P_\circ$ است. هر دو بخش حاوی گاز کامل تک اتمی‌اند. در ابتدا، در بخش چپ $n_۱$ مول گاز با دمای $T_۱$ و در بخش راست $n_۲$ مول گاز با دمای $T_۲$ قرار دارد و $T_۱ > T_۲$. در این وضعیت پیستون در تعادل مکانیکی است. پیستون مانع از نفوذ گاز درون محفظه به هوای بیرون می‌شود. شتاب گرانش g و ثابت جهانی گازها R است. ظرفیت گرمایی پیستون و محفظه قابل صرف‌نظر است. پس از رسیدن دستگاه به حالت تعادل، پیستون به اندازه‌ی h بالاتر رفته است.

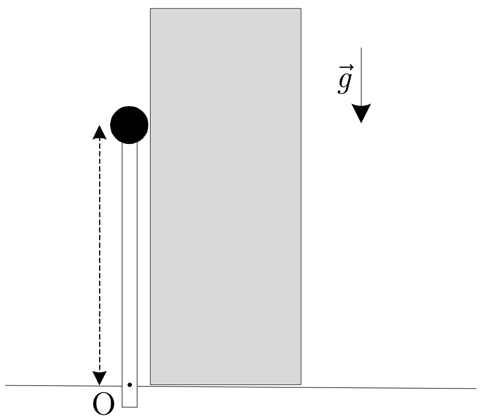
آ) دمای نهایی دستگاه، $\mathrm{T_f}$، را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ب) گرمای انتقالی از بخش چپ به بخش راست را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

پ) ارتفاع h را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ت) به ازای $n_۱ = ۰/۰۵۰\,\mathrm{mol}$، $n_۲ = ۰/۰۳۰\,\mathrm{mol}$، $\mathrm{T_۱} = ۶/۰۰ \times ۱۰^۲\,\mathrm{K}$، $\mathrm{T_۲} = ۳/۰۰ \times ۱۰^۲\,\mathrm{K}$، $m = ۲/۰\,\mathrm{kg}$، $g = ۹/۸\,\mathrm{m/s^2}$، $A = ۴۹\,\mathrm{cm^2}$، $P_\circ = ۱/۰۰ \times ۱۰^۵\,\mathrm{Pa}$ و $R = ۸/۳\,\mathrm{J/mol.K}$ مقدار عددی کمیت‌های خواسته شده در کلیه‌ی قسمت‌های قبل را به دست آورید.

۲) در دستگاه شکل مقابل جرم نقطه‌ای m به انتهای میله‌ی قائم سبکی به طول l متصل است. انتهای دیگر میله در نقطه‌ی O به سطح یک میز افقی لولا شده است و لولا اصطکاک ندارد. جرم m می‌تواند روی دیواره‌ی قائم مکعب مستطیلی به جرم M که روی میز افقی قرار گرفته است، بلغزد. اصطکاک بین جسم M و سطح افقی و نیز اصطکاک بین جسم m و دیواره‌ی قائم مکعب مستطیل ناچیز است. دستگاه از حال سکون رها می‌شود و بر اثر ضربه‌ی کوچکی به حرکت در می‌آید. پس از چرخش میله‌ی سبک به اندازه‌ی θ_0 حول لولا (به سمت راست) جسم M از جرم نقطه‌ای m جدا شده و با سرعت ثابت v به حرکت خود ادامه می‌دهد.



آ) با استفاده از پایستگی انرژی، نسبت $\frac{v^2}{gl}$ را بر حسب جرم‌ها و θ_0 به دست آورید.

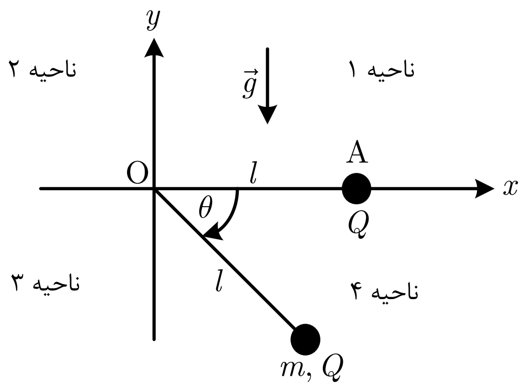
ب) در لحظه‌ی جدا شدن جرم نقطه‌ای از مکعب مستطیل، نیروی وارد از طرف میله به جرم m چقدر است؟

پ) نسبت $\frac{M}{m}$ را بر حسب θ_0 به دست آورید.

ت) به ازای $\theta_0 = 60^\circ$ مقدار عددی $\frac{v^2}{gl}$ و $\frac{M}{m}$ را حساب کنید.

تذکر: اولاً در حرکت دایره‌ای با سرعت متغیر u، همانند حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب جانب مرکز $\frac{u^2}{R}$ است. ثانیاً می‌توان نشان داد فرض بدون اصطکاک بودن لولا باعث می‌شود نیروی وارد شده به جرم m از طرف میله، در امتداد میله است.

۳) در شکل مقابل بار الکتریکی ثابت Q در نقطه‌ی A روی محور x و به فاصله‌ی l از نقطه‌ی O قرار دارد. گلوله‌ی کوچکی به جرم m نیز دارای بار الکتریکی Q است. این گلوله به انتهای ریسمانی به طول l بسته شده و انتهای دیگر ریسمان به نقطه‌ی O متصل است. شتاب گرانش در جهت $-y$ و مقدار آن g است. در یک وضعیت نامعین مطابق شکل زاویه‌ی ریسمان با محور x با θ نشان داده شده است.



آ) در یک شکل دقیق، نیروهای وارد بر گلوله را برای زاویه‌ی دلخواه θ رسم کنید و مؤلفه‌های نیروی برآیند وارد بر گلوله در جهت x و y را به دست آورید. در این حالت کشش ریسمان را T بگیرید.

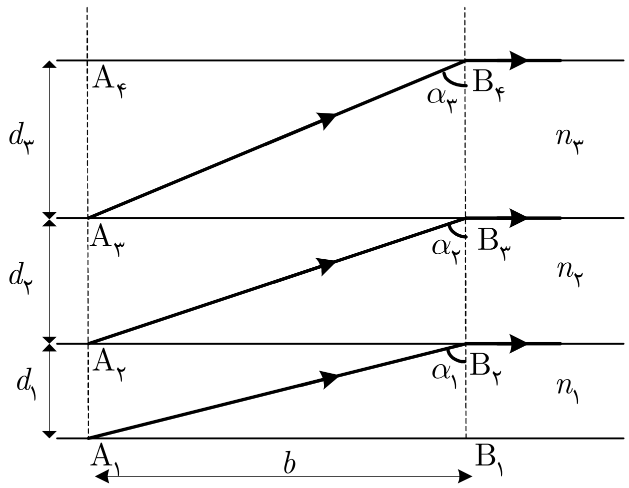
ب) گلوله در زاویه‌ی $\theta_{\circ}$ به حالت تعادل قرار می‌گیرد. با محاسبه نشان دهید $\tan\theta_{\circ} = a\sin^{n}(\theta_{\circ}/۲)$ و ثابت‌های a و n را به دست آورید.

پ) با ذکر دلیل، زاویه‌ی $\theta_{\circ}$ در کدام ناحیه یا ناحیه‌ها از صفحه‌ی $x-y$ می‌تواند باشد؟

ت) حال فرض کنید گلوله از زاویه‌ی $\theta_{\circ}$ به مقدار بسیار کوچک ε منحرف شود. برآیند نیروهای وارد بر گلوله در این حالت صفر نخواهد بود، بلکه مؤلفه‌ی کوچکی در امتداد عمود بر نخ دارد که می‌خواهد گلوله را به نقطه‌ی تعادل برگرداند. با استفاده از روابط تقریبی

$$\sin(\theta+\varepsilon)\approx\sin\theta+\varepsilon\cos\theta,\quad \cos(\theta+\varepsilon)\approx\cos\theta-\varepsilon\sin\theta,\quad (۱+\varepsilon)^{\alpha}\approx ۱+\alpha\varepsilon$$

این نیرو را به دست آورید و با مقایسه‌ی آن با یک نوسانگر ساده به جرم m که تحت تأثیر نیروی بازگرداننده‌ی $-kx$ قرار دارد، بسامد زاویه‌ای نوسان‌های کوچک گلوله حول نقطه‌ی تعادل را بر حسب g، l و $\theta_{\circ}$ به دست آورید.



۴) لایه‌های شفاف ۱، ۲ و .... با ضریب شکست‌های $n_۱$، $n_۲$ و .... و ضخامت‌های $d_۱$، $d_۲$ و .... روی هم قرار دارند. پرتوهای نور به طور هم‌زمان از نقاط $A_۱$، $A_۲$ و .... که در یک امتداد (عمود بر لایه‌ها) قرار دارند گسیل می‌شوند و به طور هم‌زمان به ترتیب به نقاط $B_۲$، $B_۳$ و .... می‌رسند. نقاط $B_۱$، $B_۲$ و .... نیز در یک امتداد قرار دارند که عمود بر لایه‌ها است. زاویه‌های $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و .... هر کدام زاویه‌ی حد هستند به طوری که پرتوها پس از شکست همگی به موازات سطح جدایی لایه‌ها خواهند بود. مطابق شکل داریم $A_۱B_۱ = A_۲B_۲ = \cdots = b$.

آ) رابطه‌ای بین n_i، $n_{i+۱}$ و $n_{i+۲}$ به دست آورید.

ب) ضخامت d_i را بر حسب n_i، b، $\alpha_۱$ و $n_۱$ به دست آورید.

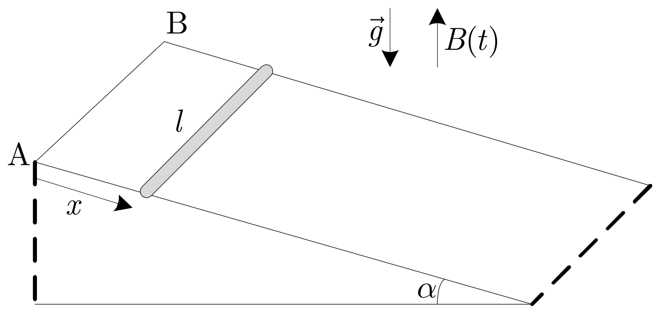
۵) دو بازیکن والیبال در فاصله‌ی $2d$ از یکدیگر قرار دارند. هنگام جداشدن توپ از دست هر بازیکن زاویه‌ی پرتاب نسبت به افق θ است. برای سهولت توپ را یک جسم نقطه‌ای به جرم m بگیرید و از مقاومت هوا چشم بپوشید. دست بازیکن‌ها در یک ارتفاع قرار دارند و شتاب گرانش g است.

آ) برای هر زاویه‌ی پرتاب دلخواه، انرژی جنبشی اولیه‌ی توپ، K، را طوری حساب کنید که توپ درست روی دست بازیکن مقابل فرود آید. در یک نمودار برای $0 < \theta < \pi / 2$ کمیت K را بر حسب θ رسم کنید.

ب) حال فرض کنید درست وسط دو بازیکن توری به ارتفاع h نسبت به محل ضربه زدن به توپ توسط بازیکن‌ها وجود داشته باشد. زاویه‌ی θ در چه بازه‌ای باشد تا توپ از روی تور عبور کند؟

پ) کمترین مقدار K برای آن که توپ از روی تور عبور کند را K_0 بگیرید و آن را برای مقادیر مختلف $\frac{h}{d}$ به دست آورید.

ت) فرض کنید $K > K_0$ باشد. برای مقادیر مختلف $\frac{h}{d}$ به ازای هر انتخاب K چند انتخاب برای θ وجود دارد و در چه بازه‌ای قرار دارند؟



۶) مطابق شکل دو ریل موازی به فاصله‌ی l از یکدیگر قرار دارند، به طوری که زاویه‌ی هر کدام از ریل‌ها با افق α است. میله‌ای به جرم m و طول l می‌تواند بر روی ریل‌ها بدون اصطکاک به پایین بلغزد. میدان مغناطیسی متغیر نسبت به زمان $B(t)$ در امتداد قائم وجود دارد که مقدار و جهت آن در همه جای فضای آزمایش یکسان است. ریل‌ها رسانای بدون مقاومت هستند و از بالا با سیم رسانای بدون مقاومت AB به هم وصل‌اند. میله دارای مقاومت الکتریکی R است. در لحظه‌ی دلخواه t میله به اندازه‌ی x از نقطه‌ی انتهایی ریل‌ها فاصله گرفته است، به طوری که در لحظه‌ی $t = ۰$ داریم $x = ۰$.

آ) نیروی مغناطیسی وارد بر میله را در لحظه‌ی دلخواه t به دست آورید و نیروهای وارد بر میله را بر روی شکل رسم کنید.

ب) با توجه به قانون حرکت نیوتن معادله‌ای بیابید که شتاب لحظه‌ای میله در امتداد ریل‌ها یعنی $\frac{d^۲x}{dt^۲}$ را بر حسب $x(t)$، $B(t)$، $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dB}{dt}$ بدهد.

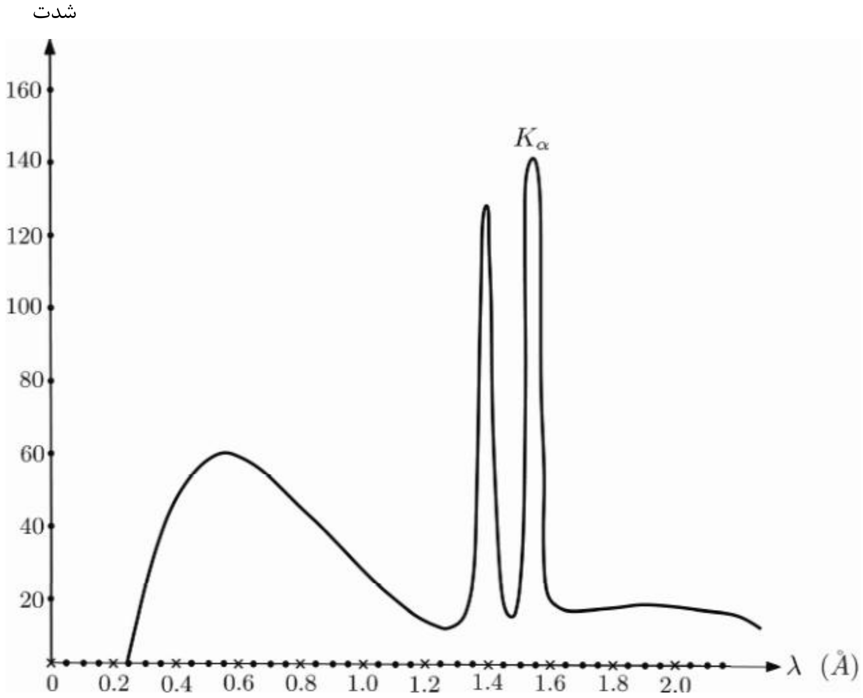
پ) با استفاده از معادله‌ی به دست آمده در بخش «ب» کمیت $\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}B^۲x^۲)$ را حساب کنید.

ت) میدان $B(t)$ را چنان بیابید که میله با سرعت ثابت v پایین بیاید.

ث) میدان $B(t)$ را چنان بیابید که میله با شتاب ثابت a پایین بیاید. فرض کنید سرعت اولیه‌ی میله صفر است.

۷) ممکن است بتوانید بخش‌هایی از این مسئله را مستقل از بخش‌های دیگر پاسخ دهید.

با استفاده از پرتو X می‌توان اطلاعاتی از چیدمان اتم‌ها یا مولکول‌ها در جامدات بلوری به دست آورد. برای تولید پرتو X الکترون‌هایی با انرژی E_e به یک ورقه‌ی مس تابیده می‌شود. الکترون‌ها با ورود به ورقه‌ی مس به علت برهم‌کنش با اتم‌های مس، فوتون‌هایی تابش می‌کنند که سبب کم شدن انرژی آن‌ها می‌شود. پُرانرژی‌ترین فوتون‌ها، انرژی‌ای برابر با الکترون فرودی دارند. درشکل ۱ نمودار شدت انرژی فوتون‌ها برحسب طول موج آن‌ها رسم شده است.



شکل ۱: شدت فوتون‌های آشکار شده بر حسب طول موج

آ) با استفاده از شکل ۱، انرژی الکترون‌های فرودی، E_e را بر حسب eV تعیین کنید. ($hc = ۱۲۴۰۰\text{eV.A}^\circ$)

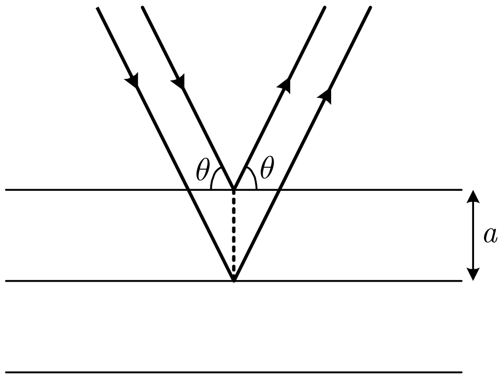
اگر الکترون فرودی با یکی از اتم‌های مس برخورد کنند، می‌تواند سبب برانگیختگی در آن شود. فوتون‌هایی که به این روش تولید می‌شود در شکل ۱ به صورت قله دیده می‌شوند.

ب) از روی شکل ۱ طول موج مربوط به قله‌ی K_α را بخوانید و آن را برحسب آنگستروم بنویسید. این طول موج را λ_α بنامید. در ادامه‌ی مسئله این پرتو X را به یک بلور می‌تابانیم.

همانطور که می‌دانید در هر بلور آرایه‌ی منظمی از اتم‌ها وجود دارد. اگر پرتو X را به یک بلور بتابانیم بلور به صورت مجموعه‌ای از صفحات موازی رفتار می‌کند که بخشی از پرتو X را بازمی‌تابانند و بخشی را عبور می‌دهند. به این صفحات، صفحات *براگ*

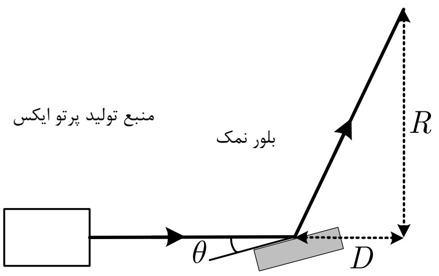
می‌گویند. اگر زاویه‌ی پرتو X با صفحات براگ مقادیر معینی باشد پرتوهای بازتابیده از صفحات براگ با هم تداخل سازنده انجام می‌دهند.

پ) فرض کنید θ زاویه‌ی پرتو X با صفحات براگ چنان است که اختلاف راه دو پرتو در شکل ۲، برابر طول موج پرتو فرودی، یعنی λ_α باشد. فاصله‌ی بین دوصفحه، a را بر حسب λ_α و θ بنویسید.



شکل ۲: بازتاب پرتوهای ایکس از یک دسته صفحات براگ

ت) در آزمایشگاه نمی‌توان منبع تولید پرتوی X را چرخاند، بلکه نمونه را می‌چرخانند. به شکل ۳ نگاه کنید. اگر مطابق شکل، فاصله‌ی بلور نمونه تا پرده D و بسیار بزرگتر از اندازه‌ی نمونه باشد و پرتو خارج شده از بلور در حالت تداخل سازنده، در نقطه‌ای به فاصله‌ی R از محل فرود پرتو اصلی، به پرده برخورد کند، a را برحسب طول موج λ_α، R و D بنویسید.



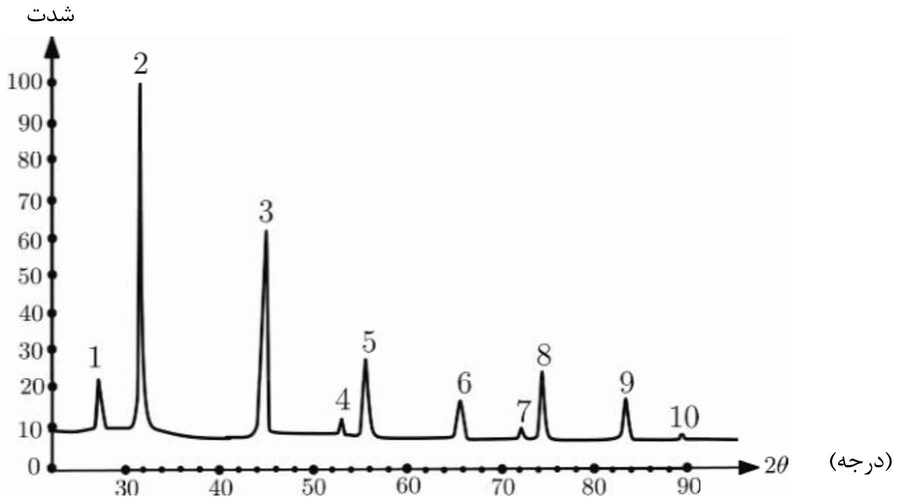
شکل ۳: چیدمان آزمایشگاهی

هر جامد بلوری دسته صفحات براگ مختلفی دارد. به این ترتیب با چرخاندن نمونه ممکن است، بازتاب از هر یک از این دسته صفحات براگ انجام شود و تداخل سازنده اتفاق بیفتد. صفحات مختلف در یک جامد با سه اندیس hkl مشخص می‌شوند. h، k و l می‌توانند اعداد طبیعی و صفر باشند. برای قرارداد فرض می‌کنیم $h \geq k \geq l$. برای یک نمونه‌ی مکعبی با ثابت شبکه‌ی d فاصله‌ی صفحاتی که با اندیس hkl مشخص می‌شوند را می‌توان چنین نوشت

$$a_{(hkl)} = \frac{d}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

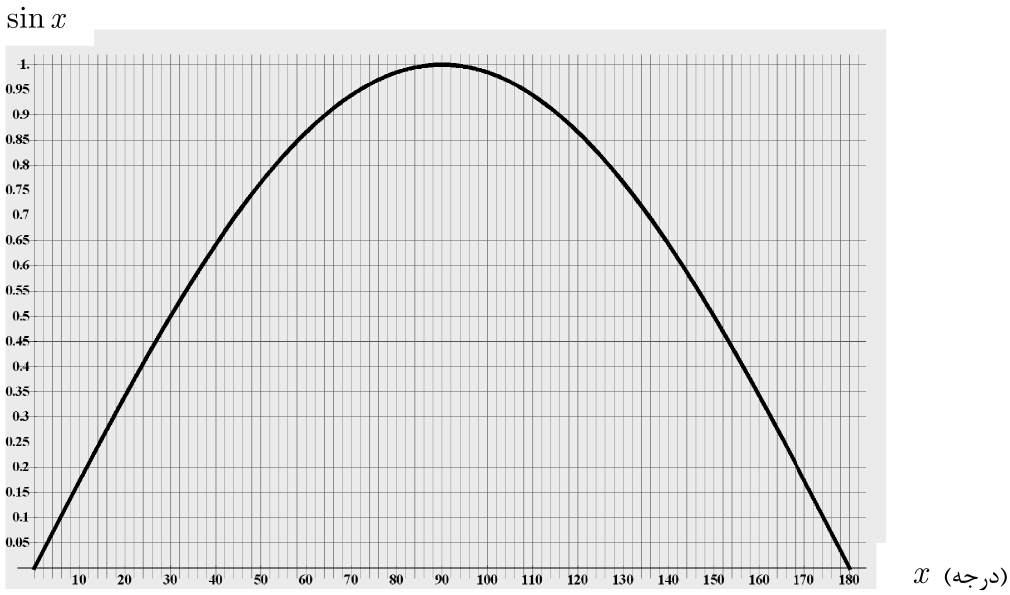
به شکل ۴ نگاه کنید. قله‌هایی که در شکل می‌بینید مربوط به تداخل سازنده ناشی از دسته صفحات براگ مختلف بلور نمک است. هر کدام از قله‌ها در زاویه‌ی انحراف 2θ از یک دسته معین صفحات براگ رخ داده‌اند. برای بلور نمک، اندیس‌های h، k و l باید همگی زوج یا فرد باشند، مثلاً $(hkl) \equiv (۹۳۱)$ و $(hkl) \equiv (۶۴۰)$ اندیس‌هایی مجاز هستند.

ث) اندیس‌های hkl را برای قله‌های ۱،۲ و۳ در شکل ۴ تعیین کنید.



شکل ۴: پراش پرتوهای ایکس از دسته صفحات براگ مختلف بلور نمک

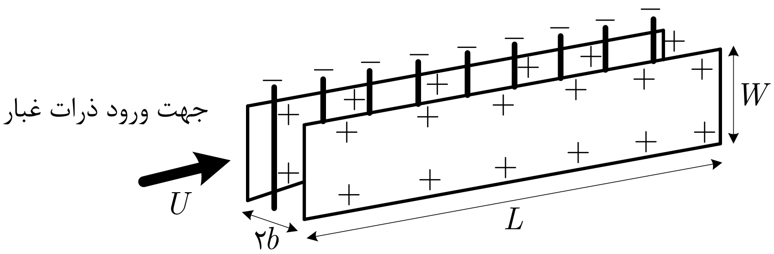
ج) فرض کنید طول موج پرتوهای فرودی، λ_α باشد که در بخش «ب» خواندید. با استفاده از قله‌ی شماره ۲ از شکل ۴، مقدار ثابت شبکه، d را حساب کنید. می‌توانید از نمودار $\sin x$ بر حسب x در شکل ۵ استفاده کنید.



شکل ۵: نمودار sin x بر حسب x

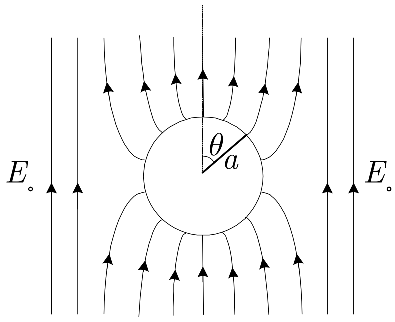
<u>نوشتن پاسخ این سوال را از صفحه بعدی آغاز کنید. چنانچه در این صفحه چیزی بنویسید تصحیح نخواهد شد.</u>

۸) فیلترهای الکترواستاتیک برای حذف ذرات غبار و خاکستر از دود کارخانجات و نیروگاه‌ها هنگام عبور از دودکش و قبل از ورود به جو مورد استفاده قرار می‌گیرند. اساس کار این فیلترها به این صورت است که الکترودهای میله‌ای هوای اطراف‌شان را یونیزه می‌کنند و الکترون‌های تولید شده در این فرآیند به ذرات غبار می‌چسبند. بین الکترودها و صفحات جذب‌کننده، اختلاف پتانسیل بزرگی برقرار است. در نتیجه ذرات غبار به سمت صفحات جمع‌کننده جذب می‌شوند. این صفحات متناوباً تکان داده می‌شوند تا ذرات غبار چسبیده به آن‌ها در مخازنی که زیر آن‌ها قرار دارد تخلیه شود.



نیروهای وارد بر یک ذره‌ی غبار هنگام حرکت به سوی صفحات، نیروی الکتریکی و نیروی مقاومت هوا است. از نیروی وزن این ذرات به دلیل جرم بسیار کوچک‌شان صرف‌نظر می‌کنیم.

یک ذره‌ی غبار را مانند کره‌ی رسانایی به شعاع a در نظر می‌گیریم. اگر یک کره‌ی رسانای بدون بار الکتریکی خالص را در یک میدان الکتریکی خارجی یکنواخت E_0 قرار دهیم بار الکتریکی با چگالی سطحی $\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$ روی سطح‌اش القا می‌شود که مطابق شکل روبرو θ زاویه‌ی بین راستای میدان خارجی با شعاع کره در نقطه‌ای از کره است. به دلیل کوچکی ذرات غبار، میدان الکتریکی خارجی اطراف هر ذره‌ی غبار را تقریباً یکنواخت فرض کنید و مقدار آن را E_0 در نظر بگیرید.



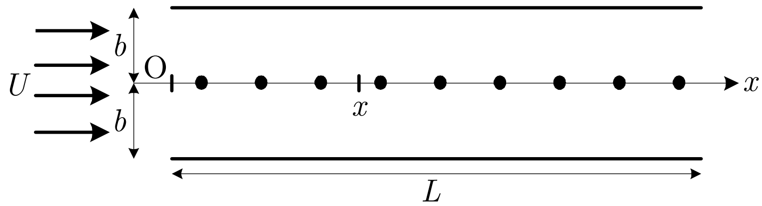
علاوه بر چگالی فوق باید چگالی یکنواخت بار ناشی از الکترون‌های جذب شده را نیز به حساب آورد.

آ) فرض کنید مقدار بار منفی جذب شده به وسیله‌ی هر ذره‌ی غبار دقیقاً کمینه مقدار لازم باشد برای آن که چگالی بار سطحی کل در هیچ نقطه‌ای از سطح کره مثبت نشود. بار الکتریکی خالص هر ذره‌ی غبار را بر حسب a، ε_0 و E_0 حساب کنید.

از طرفی نیروی مقاومت هوا هنگامی که کره‌ای به شعاع a با سرعت کم v در آن حرکت کند به صورت $6\pi\eta a v$ است که η گرانروی هوا است. بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا ذرات غبار بر اثر میدان الکتریکی بین الکترودها و صفحات جمع‌کننده شتاب

می‌گیرند. اما به دلیل وجود مقاومت هوا ذرات غبار بلافاصله به سرعت حدی ثابتی می‌رسند که سرعت سوق نام دارد و آن را با v_d نشان می‌دهیم.

ب) سرعت سوق ذرات غبار با بار الکتریکی محاسبه شده در قسمت «آ» را در نقطه‌ای که میدان الکتریکی خارجی $E_\circ$ است به دست آورید.



در شکل مقابل تصویر صفحات و الکترودها از بالا نشان داده شده است. الکترودها روی محور x قرار دارند و فاصله‌ی هر یک از صفحات جمع‌کننده از الکترودها b است. طول هر صفحه L و عرض آن W است. ذرات غبار با سرعت یکسان U وارد فضای بین صفحات می‌شوند و در طول مسیر با همان سرعت حرکت می‌کنند. فرض کنید در حالت پایا چگالی غبار، یعنی تعداد ذرات غبار در واحد حجم، در نقطه‌ی x از دستگاه $n(x)$ باشد. بر اثر جذب ذرات غبار توسط صفحات، $n(x)$ در طول دستگاه تغییر می‌کند.

پ) اگر سرعت سوق ذرات غبار در نزدیکی صفحات v_d باشد، تعداد ذرات غبار جذب شده در واحد زمان در طول کوچک Δx حول نقطه‌ی x از دستگاه را به دست آورید.

ت) مقطعی از دستگاه بین x و $x+\Delta x$ را در نظر بگیرید. با توجه به تعداد ذرات جذب شده در این فاصله، کمیت $\dfrac{n(x+\Delta x)-n(x)}{\Delta x}$ را حساب کنید. سپس Δx را به سمت صفر میل دهید و معادله‌ای به صورت $\dfrac{dn(x)}{dx}=cn(x)$ برای $n(x)$ به دست آورید. ضریب c را بر حسب کمیت‌های معلوم بنویسید.

ث) $n(x)$ را به صورت تابعی از x، v_d، b، U و $n_\circ$ بنویسید، که $n_\circ \equiv n(x=\circ)$.

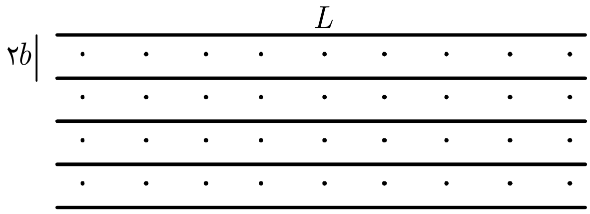
راهنمایی: تابعی که در معادله‌ای مانند $\dfrac{df(x)}{dx}=af(x)$ صدق می‌کند که a در آن ثابت است به صورت $f(x)=f_\circ e^{ax}$ است که e عدد نپر نام دارد و مقدار آن تقریباً ۲/۷۲ است.

ج) بازده فیلتر، $\eta=\dfrac{n(\circ)-n(L)}{n(\circ)}$، را به دست آورید.

چ) به ازای $a = 1/0\ \mu\mathrm{m}$، $E_0 = 5/0 \times 10^{4}\ \mathrm{V/m}$، $\eta = 2/0 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg/m.s}$ و $\varepsilon_0 = 9/0 \times 10^{-12}\ \mathrm{C/V.m}$

مقدار عددی سرعت سوق ذرات غبار در نزدیکی صفحات را به دست آورید.

در عمل تعداد صفحات جذب‌کننده و الکترودها مطابق شکل مقابل می‌تواند بیشتر هم باشد.



ح) فرض کنید در هر دقیقه $1800\ \mathrm{m}^3$ دود وارد فیلتر می‌شود. به ازای $WL = 20\ \mathrm{m}^2$ چند صفحه لازم است تا بازده فیلتر ۹۹ درصد شود؟ $\log_e(0/01) = -4/6$

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

معاونت دانش‌پژوهان جوان

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۳ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

بیست و نهمین دوره المپیاد فیزیک - عملی

تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۷ – ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۳۰ دقیقه

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

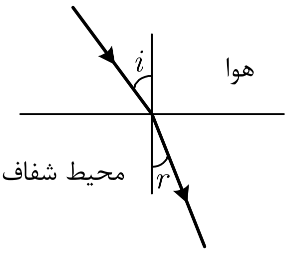
۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
۲- قبل از شروع آزمون دقت کنید که وسایل ذکر شده در صورت سوال عملی، به طور کامل در اختیار شما قرار گرفته باشد. در صورت بروز مشکل مراقبین را مطلع نمایید.
۳- از آنجا که ممکن است تا پایان آزمون عملی به وسایلی که در اختیار شما قرار داده شده نیاز داشته باشید، هنگام کار با آنها دقت کنید. در صورت وجود مشکل در ابزارهای آزمایش، از مسوول حوزه درخواست کنید آن را تعویض نماید.
۴- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
۵- پاسخ سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
۶- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت.
۷- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۸- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۹- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۱۰- بخش عملی ۲۰ نمره دارد.

سؤال عملی

موضوع آزمایش: ضریب شکست تیغه‌ی شفاف

وسایل آزمایش: تیغه‌ی شفاف شماره‌گذاری شده، خط‌کش

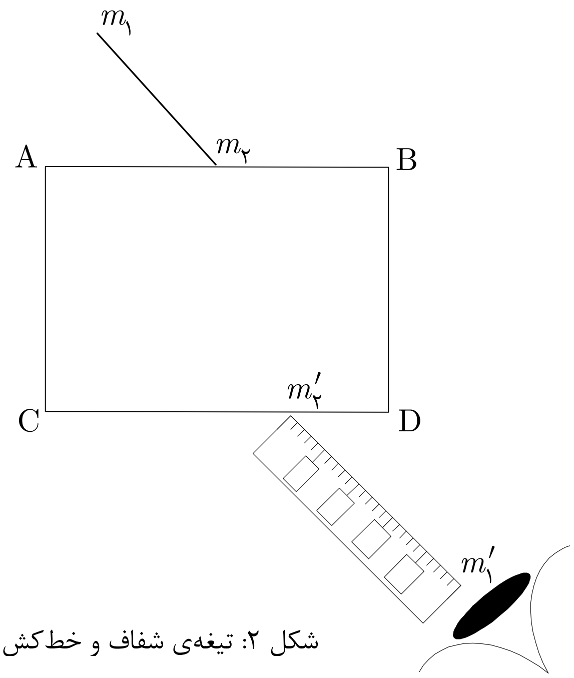
مقدمه: مطابق شکل ۱ پرتو نوری که از هوا با زاویه‌ی تابش i نسبت به خط عمود به محیط شفافی با ضریب شکست n وارد می‌شود، می‌شکند و با زاویه‌ی شکست r نسبت به خط عمود در محیط منتشر می‌شود به طوری که $\sin i = n \sin r$.



شکل ۱: شکست نور

توجه: ۱- پاسخ سؤال عملی حتماً باید در برگه‌ی پاسخ‌نامه‌ای که ضمیمه‌ی سؤال است نوشته یا رسم شود. چنانچه پاسخ در برگه‌ی دیگری نوشته شود تصحیح نخواهد شد. ۲- شماره‌ی تیغه‌ی شفاف را حتماً در پاسخ‌نامه بنویسید.

آزمایش: مطابق شکل ۲، تیغه‌ی شفاف را از وجه بزرگ‌تر آن در محلی که در شکل‌های پاسخ‌نامه معین شده است قرار دهید. در هر یک از شکل‌ها خطی رسم شده است که آن را با m_1m_2 نشان داده‌ایم. مطابق شکل ۲، از وجه جانبی CD تیغه به خط m_1m_2 نگاه کنید. حال خط‌کش را طوری در کنار تیغه قرار دهید که وقتی از وجه CD به خط m_1m_2 نگاه می‌کنیم آن را در امتداد لبه‌ی خط‌کش ببینیم. سپس بدون آن که خط‌کش تکان بخورد خطی در امتداد لبه‌ای از خط‌کش که در امتداد m_1m_2 به نظر می‌رسد، رسم کنید و آن را $m'_2m'_1$ بنامید. خط $m_2m'_2$ که مسیر نور درون تیغه است را نیز در شکل رسم کنید. این کار را برای شکل‌های (۱) تا (۶) پاسخنامه انجام دهید. برای شکل‌های (۲) و (۳) با رسم پاره‌خط‌های مناسب و اندازه‌گیری طول آن‌ها و نیز محاسبات لازم، $\sin i$، $\sin r$ و ضریب شکست تیغه‌ی شفاف را به دست آورید. در پاسخ‌نامه حتماً طول‌هایی را که اندازه‌گیری کرده‌اید در مستطیل زیر هر شکل بنویسید.

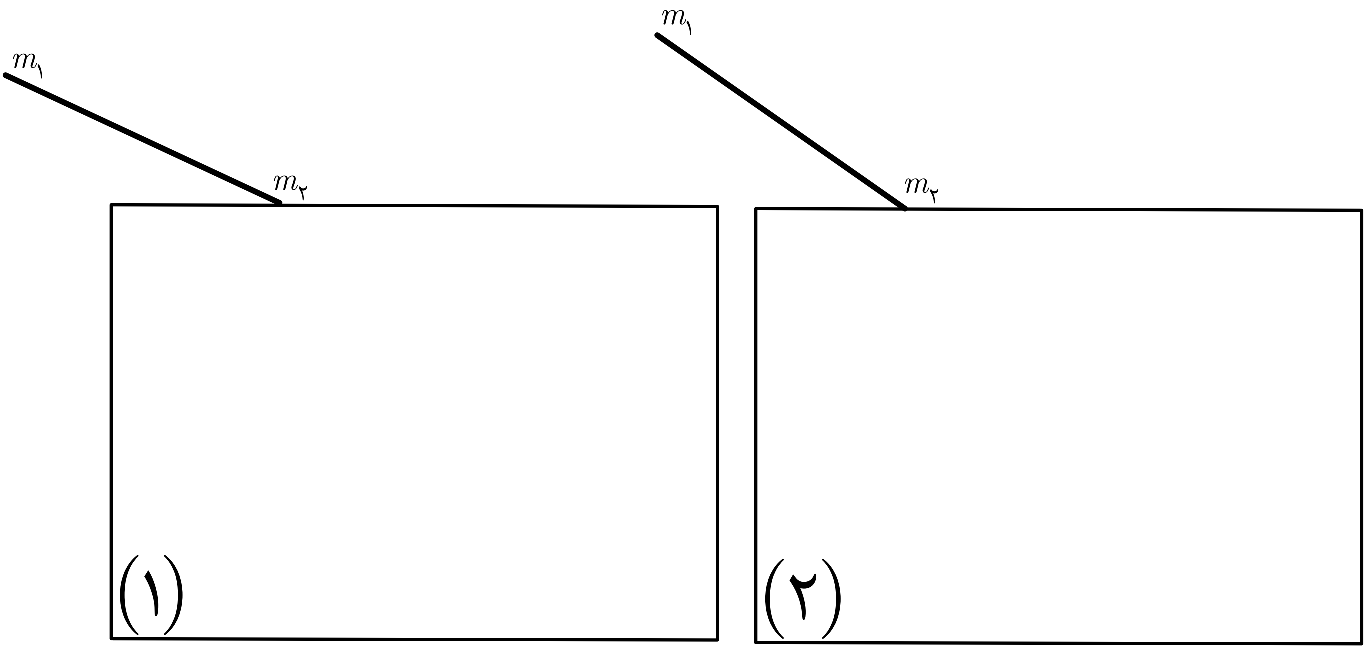


شکل ۲: تیغه‌ی شفاف و خط‌کش

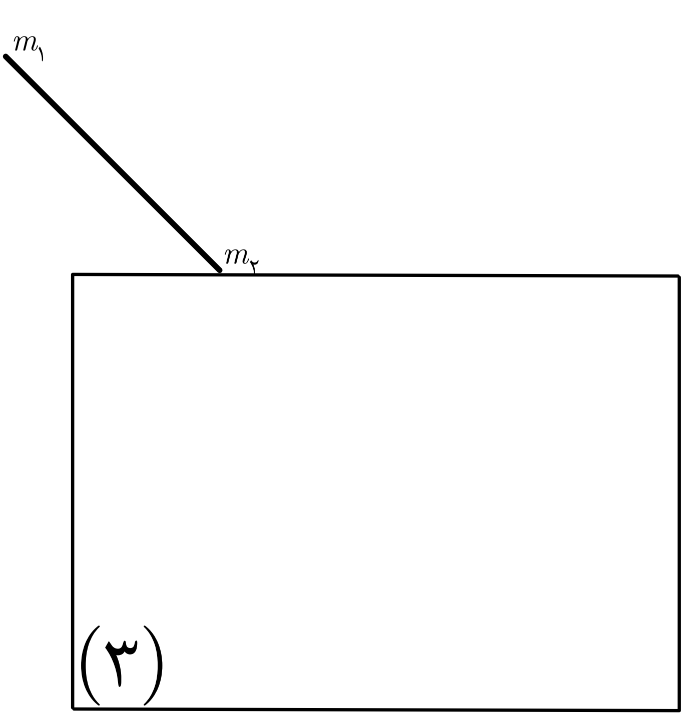
بیست و نهمین دوره المپیاد فیزیک عملی – ۱۳۹۵/۲/۷

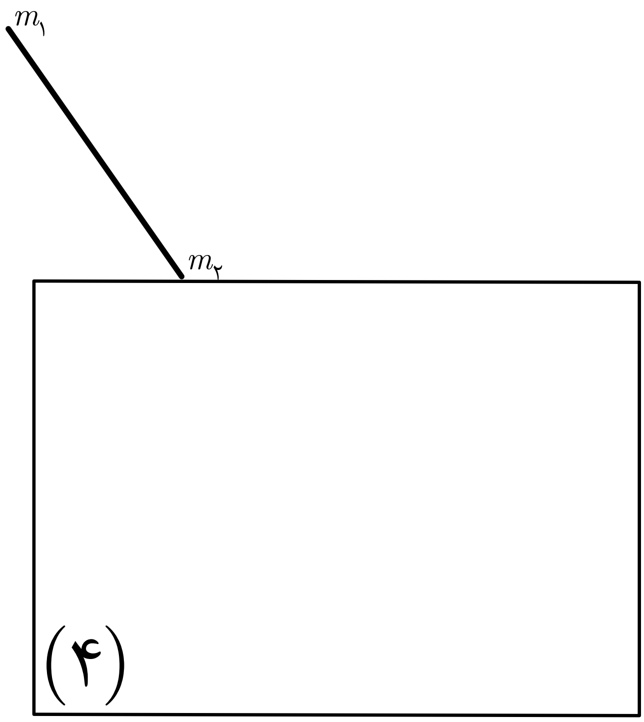
معاونت دانش پژوهان جوان

شماره‌ی تیغه‌ی شفاف:

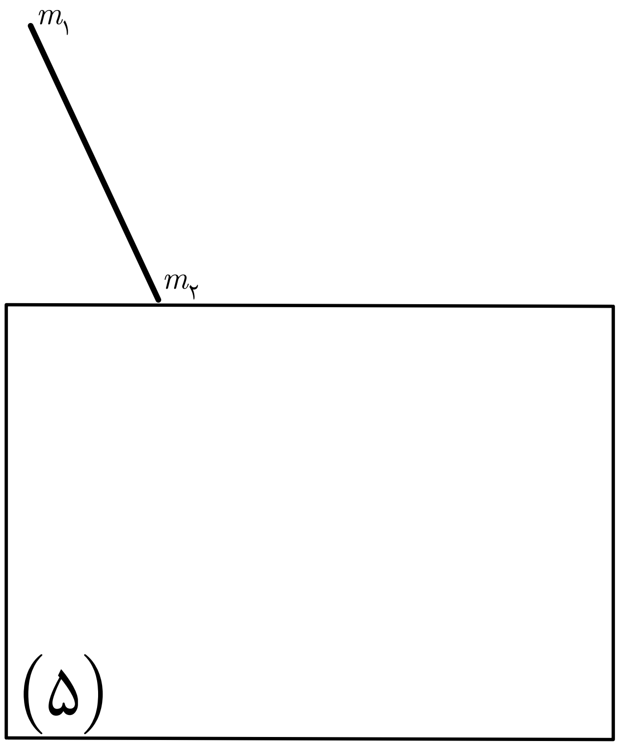


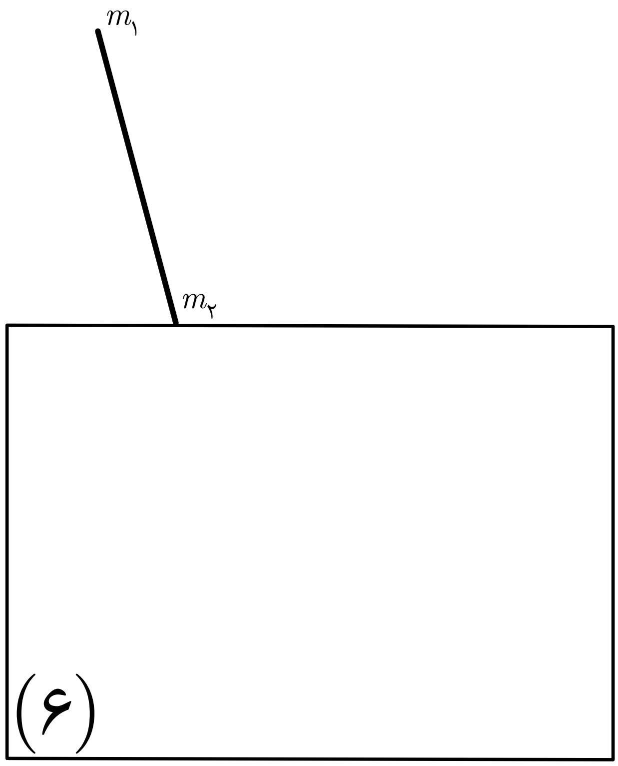
طول‌های اندازه‌گیری شده برای محاسبه‌ی ضریب شکست و نیز محاسبه‌ای که منجر به تعیین ضریب شکست تیغه در شکل (۲) می‌شود را در این قسمت بنویسید.





طول‌های اندازه‌گیری شده برای محاسبه‌ی ضریب شکست و نیز محاسبه‌ای که منجر به تعیین ضریب شکست تیغه در شکل (۳) می‌شود را در این قسمت بنویسید.


m_1
m_2
(۵)


m_1
m_2
(۶)

۱)

الف) برای مجموعه دو محفظه: $\Delta U = W + Q$ اما $Q=0$ و لذا

① $\left(\frac{3}{2}n_1RT_1+\frac{3}{2}n_2RT_2\right)-\left[\frac{3}{2}n_1RT_f+\frac{3}{2}n_2RT_f\right]=(mg+P_0A)h$

که T_f دمای تعادل نهایی و h مقداری است که پیستون بالا رفته.

در ابتدا که دمای محفظه ۲، T_2 است پیستون در تعادل مکانیکی است یعنی

② $(mg+P_0A)/A = \frac{n_2RT_2}{V_2}$

که V_2 حجم محفظه ۲ قبل از جابجایی پیستون به اندازه h است.

بعد از تعادل نیز:

③ $(mg+P_0A)/A = \frac{n_2RT_f}{V_2+Ah}$

از معادلات ۱ و ۲ و ۳:

④ $\boxed{T_f = \frac{3n_1T_1+5n_2T_2}{3n_1+5n_2}}$

ب) $Q_{1\to 2} = \frac{3}{2}n_1R(T_1-T_f)$

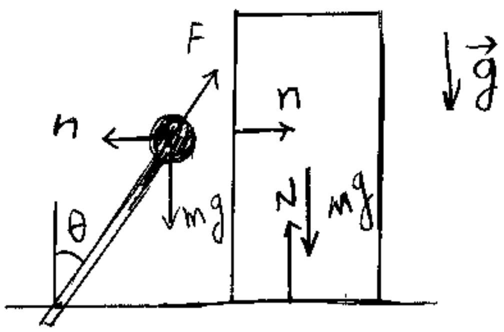
$\boxed{Q_{1\to 2} = \frac{15R}{2}\,\frac{n_1n_2(T_1-T_2)}{3n_1+5n_2}}$

پ) از معادلات ۲ و ۳ و ۴:

$\boxed{h = \frac{3n_1n_2(T_1-T_2)R}{(3n_1+5n_2)(mg+P_0A)}}$

ت) $\boxed{h = 7.3\,\text{cm} \quad \text{و} \quad Q_{1\to 2} = 9.3\times 10^{1}\,J \quad \text{و} \quad T_f = 4.5\times 10^{2}\,K}$

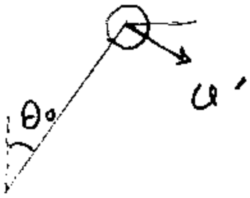
۲)



نیروهای وارد بر m و M تا وقتی دو جرم با هم در تماس اند F نیروی وارد بر m از طرف میله است.

الف) با توجه به بدون اصطکاک بودن سطوح و لولا:

$$mgl = mgl\cos\theta_0 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$



اما در لحظه جدا شدن دو جرم $v'\cos\theta_0 = v$

در نتیجه

$$\boxed{\frac{v^2}{lg} = \frac{2(1-\cos\theta_0)\cos^2\theta_0}{1+\frac{M}{m}\cos^2\theta_0}}$$

ب) معادلات حرکت به ازای $\theta<\theta_0$ در راستای افق

$M: \quad n = Ma$

$m: \quad F\sin\theta - n = ma$

که a شتاب مشترک دو جسم در راستای افق است

در لحظه جدا شدن دو جسم $\theta=\theta_0$ و $n=0$. در نتیجه $a=0$ و بنابراین $\boxed{F=0}$

پ) با توجه به این که در $\theta=\theta_0$، $n=0$ و $F=0$ است پس

$$mg\cos\theta_0 = \frac{mv'^2}{l}$$

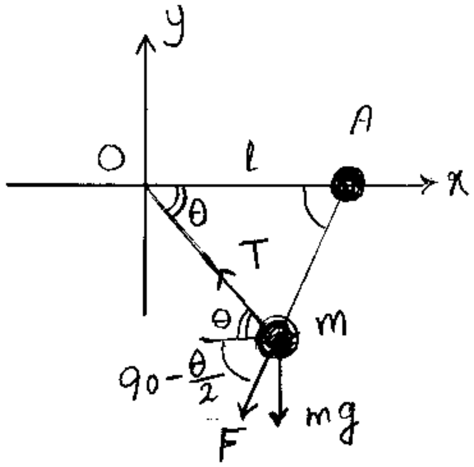
که $v'\cos\theta_0 = v$، در نتیجه $\cos^3\theta_0 = \frac{v^2}{lg}$ که با قرار دادن در پاسخ الف،

$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{2-3\cos\theta_0}{\cos^3\theta_0}}$$

ت) به ازای $\theta_0 = 60^\circ$:

$$\boxed{\frac{v^2}{lg} = \frac{1}{8} \quad , \quad \frac{M}{m} = 4}$$

۳)



الف)

x: $F_x = -T\cos\theta - F\sin\frac{\theta}{2}$

y: $F_y = -mg + T\sin\theta - F\cos\frac{\theta}{2}$

که $$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{4l^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

ب) در حالت تعادل: $\theta=\theta_0$، $F_x=0$ و $F_y=0$ است. با حذف T بین دو معادله خواهیم داشت:

$$F\left(\tan\theta_0 \sin\frac{\theta_0}{2} + \cos\frac{\theta_0}{2}\right) = -mg$$

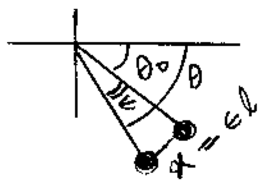
اگر بنویسیم $\tan\theta_0 = \frac{2\tan\theta_0/2}{1-\tan^2\theta_0/2}$ و ساده کنیم

$$(1)\quad \tan\theta_0 = -mg\left(\frac{32\pi\epsilon_0 l^2}{Q^2}\right)\sin^3\frac{\theta_0}{2}$$

یعنی

$$(۲)\quad \boxed{a = -mg\left(\frac{32\pi\epsilon_0 l^2}{Q^2}\right) \quad \text{و} \quad n=3}$$

پ) درباره‌ی $0<\theta_0<2\pi$ همواره $\sin^3\frac{\theta_0}{2}>0$. با توجه به علامت $\tan\theta_0$ - در هر ناحیه پس نواحی ۲ و ۴ امکان‌پذیر نیست. ناحیه‌ی ۱ هم امکان‌پذیر نیست زیرا با توجه به نمودار جسم آزاد، مؤلفه‌ی x نیروهای وارد بر m نمی‌تواند با هم خنثی شود، پس θ_0 فقط در ناحیه‌ی ۳ می‌تواند باشد.



ت) در راستای عمود بر نخ و به ازای $\theta=\theta_0$ حالت تعادل داریم

یعنی $$F_x\sin\theta_0 + F_y\cos\theta_0 = 0$$

$$(۳)\quad \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}\frac{\cos\frac{\theta_0}{2}}{\sin^2\frac{\theta_0}{2}} + mg\cos\theta_0 = 0$$

اگر جسم m از حالت تعادل منحرف شده باشد:

$$F_x\sin\theta + F_y\cos\theta = ma$$

که a شتاب در راستای عمود بر نخ است.

$$-F\cos\frac{\theta}{2} - mg\cos\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

و $\theta=\theta_0+\epsilon$.

پس از بسط حول θ_0 و تا مرتبه ϵ^1 و استفاده از رابطه (۲) :

$$\left[\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}\,\frac{1}{2\sin^3\frac{\theta_0}{2}}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}+2\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)+mg\sin\theta_0\right]\epsilon = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

که $x=\epsilon l$.

با توجه به این که

$$\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}\,\frac{1}{2\sin^3\frac{\theta_0}{2}} = -\frac{mg}{tg\theta_0}$$

خواهیم داشت

$$\left[-\frac{mg}{tg\theta_0}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}+2\cos^2\frac{\theta_0}{2}\right)+mg\sin\theta_0\right]\frac{x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$$ که $$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{2-3\cos\theta_0-3\cos^2\theta_0}{2\sin\theta_0}}$$

۴)

الف) چون نورها هم زمان از A_i به B_{i+1} می‌رسند، پس

$$A_iB_{i+1} = \frac{c}{n_i}t$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b}{\sin\alpha_i} = \frac{c}{n_i}t \Rightarrow \frac{n_i}{\sin\alpha_i} = \text{ثابت}$$

یعنی:

$$(1) \quad \frac{n_i}{\sin\alpha_i} = \frac{n_{i+1}}{\sin\alpha_{i+1}}$$

چون α_i ها زاویه حد هستند، پس

$$(2) \quad n_i \sin\alpha_i = n_{i+1}$$

از معادله (۱) و (۲)

$$(3) \quad \boxed{n_{i+2}\, n_i^2 = n_{i+1}^3}$$

ب)

$$\cot\alpha_i = \frac{d_i}{b}$$

$$b\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha_i}-1} = d_i \Rightarrow d_i = b\sqrt{\left(\frac{n_i}{n_{i+1}}\right)^2-1}$$

از معادله (۱):

$$\frac{n_1}{\sin\alpha_1} = \frac{n_{i+1}}{\sin\alpha_{i+1}}$$

و با استفاده از معادله (۲):

$$= \frac{n_{i+1}^2}{n_{i+2}}$$

و با توجه به (۳):

$$= \frac{n_i^2}{n_{i+1}}$$

بنابراین

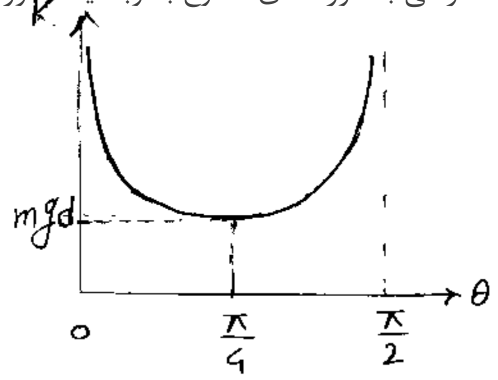
$$\boxed{d_i = b\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_i\sin\alpha_1}\right)^2-1}}$$

۵)

آ)

(1) $2d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

(2) $K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$ $\boxed{K = \frac{mgd}{\sin 2\theta}}$



ب) ارتفاع اوج باید بزرگتر یا مساوی h باشد، یعنی

(3) $\frac{v^2 \sin^2\theta}{2g} \geqslant h$

که با استفاده از معادله (1): $\tan\theta \geqslant \frac{2h}{d}$ یا $\boxed{\theta \geqslant \tan^{-1}\left(\frac{2h}{d}\right)}$

پ) به ازای $\frac{2h}{d} < 1$ و با توجه به نتیجه قسمت ب)، با انتخاب $\theta = \frac{\pi}{4}$ انرژی جنبشی کمینه می‌شود: $K_{min} = mgd$

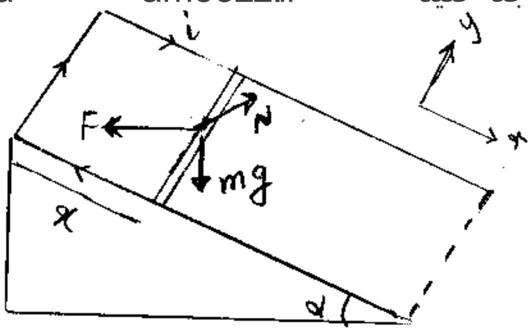
به ازای $\frac{2h}{d} > 1$

$$K_{min} = \frac{mgd}{\sin\left[2\tan^{-1}\left(\frac{2h}{d}\right)\right]} = \frac{mg}{4h}\left(d^2 + 4h^2\right)$$

$$\boxed{K_{min} = \begin{cases} mgd & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} < 1 \\ \frac{mg}{4h}\left(d^2+4h^2\right) & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} > 1 \end{cases}}$$

ت) با توجه به نمودار قسمت آ) به ازای $\frac{2h}{d} < 1$ یا $K > mgd$ دو جواب برای زاویه پرتاب θ داریم، یکی کوچکتر از $\frac{\pi}{4}$ و دیگری بزرگتر از $\frac{\pi}{4}$ و به ازای $\frac{2h}{d} > 1$ یک جواب که بزرگتر از $\frac{\pi}{4}$ است.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan^{-1}\frac{2h}{d} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{2h}{d} & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} < 1 \\ \frac{\pi}{4} < \tan^{-1}\frac{2h}{d} < \theta & \text{اگر} \quad \frac{2h}{d} > 1 \end{array}}$$



۱۶

آ)

$$\phi_B = Bl\,x\cos\alpha$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -l\cos\alpha\,\frac{d}{dt}(Bx)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-l\cos\alpha}{R}\,\frac{d}{dt}(Bx)$$

$$F = ilB = \frac{-l^2\cos\alpha}{R}\,B\,\frac{d}{dt}(Bx)$$

ب)

$$mg\sin\alpha + F\cos\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg\sin\alpha - \frac{(l\cos\alpha)^2}{R}B\,\frac{d}{dt}(Bx) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

پ) داریم :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B^2x^2\right) = (Bx)\frac{d}{dt}(Bx)$$

با ضرب طرفین جواب قسمت ب در x و استفاده از معادله داریم :

$$mgx\sin\alpha - \frac{(l\cos\alpha)^2}{R}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B^2x^2\right) = mx\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}B^2x^2\right) = \frac{R\,mx}{(l\cos\alpha)^2}\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

ت)

$$x = vt \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2t^2B^2\right) = \frac{Rmg\sin\alpha\,vt}{(l\cos\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{2}v^2t^2B^2 = \frac{Rmg\sin\alpha\,v\,t^2}{2(l\cos\alpha)^2} \Rightarrow \boxed{B = \sqrt{\frac{mgR\sin\alpha}{v\,l^2\cos^2\alpha}}}$$

ث)

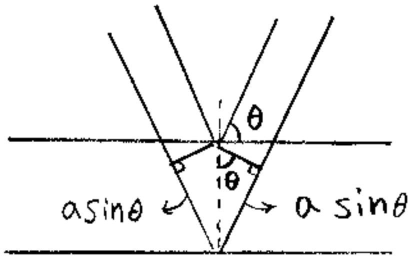
$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = at \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{3}\,\frac{m(g\sin\alpha - a)R}{at\;\;l^2\cos^2\alpha}}$$

۱۷)

آ)
$$E_e = \frac{hc}{\lambda_{min}} \Rightarrow E_e = \frac{12400\ eV.\mathring{A}}{0.25\ \mathring{A}}$$
$$\boxed{E_e = 4.96 \times 10^4\ eV}$$

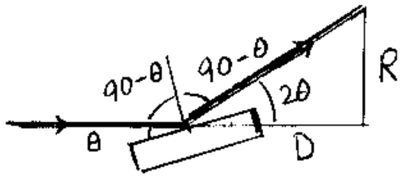
ب)
$$\boxed{\lambda_\alpha = 1.55\mathring{A}}$$



پ) اختلاف راه مطابق شکل، $2a\sin\theta$ است.

برای تداخل سازنده: $\lambda_\alpha = 2a\sin\theta$

$$\boxed{a = \frac{\lambda_\alpha}{2\sin\theta}}$$



ت) مطابق شکل $\cot 2\theta = \frac{D}{R}$

و از قسمت پ: $\sin\theta = \frac{\lambda_\alpha}{2a}$

همچنین $\cot 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$ $\Leftarrow$ $\cot^2\theta - \frac{2D}{R}\cot\theta - 1 = 0$

$$\cot\theta = \frac{1}{R}\left(D + \sqrt{D^2+R^2}\right)$$

از سوی دیگر $\frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{1+\cot^2\theta}$ در نتیجه

$$\boxed{a = \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{D^2}{R^2}+\frac{D}{R}\sqrt{1+\frac{D^2}{R^2}}}}$$

ث) $\sin\theta = \frac{\lambda_\alpha}{2a} = \frac{\lambda_\alpha}{2d}\sqrt{h^2+k^2+l^2}$

قله ۱ کوچکترین θ را دارد، پس $\boxed{(hkl)_1 = (111)}$

برای قله ۲: $\boxed{(hkl)_2 = (200)}$ و برای قله ۳: $\boxed{(hkl)_3 = (220)}$

ج) برای قله ۲، $2\theta = 32^\circ$. همچنین از قسمت ب) $\lambda_\alpha = 1.55\mathring{A}$، بنابراین

$$d = \frac{\lambda_\alpha}{2\sin\theta}\sqrt{h^2+k^2+l^2} \Rightarrow d = \frac{(1.55\mathring{A})}{2(0.27)}\sqrt{2^2+0^2+0^2} \approx 5.7\mathring{A}$$

از روی نمودار $\sin 16^\circ \approx 0.27$

$$\boxed{d \approx 5.7\mathring{A}}$$

۳) چون ذرات را مثل کره‌هایی در نظر گرفتیم بار اضافه q به طور یکنواخت روی سطح ذره توزیع می‌شود، بنابراین چگالی بار کل در هر نقطه برابر است با:

$$\sigma_t = \sigma(\theta) + \frac{q}{4\pi a^2}$$

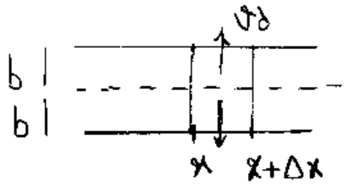
بیشینه $\sigma(\theta)$ مربوط به $\theta = 0$ است، بنابراین

$$\boxed{q = -12\pi\epsilon_0 E_0 a^2}$$

ب)

$$qE_0 + 6\pi\eta a v_d = 0 \Rightarrow \boxed{v_d = \frac{2\epsilon_0 E_0^2 a}{\eta}}$$

پ)



$$2W\Delta x \, v_d \, n(x)$$

ت)

$$U(2bW)n(x) = U(2bW)n(x+\Delta x) + 2W v_d n(x)\Delta x$$

$$\frac{n(x+\Delta x) - n(x)}{\Delta x} = -\frac{v_d}{bU} n(x) \underset{\Delta x \to 0}{\Rightarrow} \frac{dn}{dx} = -\frac{v_d}{bU} n(x)$$

$$\boxed{c = -\frac{v_d}{bU}}$$

ث)

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{v_d}{bU}x}$$

ج)

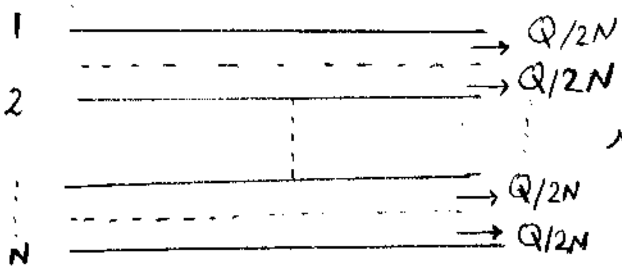
$$\text{بازده فیلتر} = \frac{n(0) - n(L)}{n(0)} = 1 - e^{-\frac{v_d}{bU}L}$$

چ)

$$v_d = \frac{2(9.0\times10^{-12})(5.0\times10^{4})^2(1.0\times10^{-6})}{2.0\times10^{-5}}$$

$$\boxed{v_d = 2.25\times10^{-3}\ m/s}$$

ح)



اگر Q حجم کل دود باشد و بین N صفحه تقسیم شود و مساحت هر طرف هر صفحه Wb باشد سهم هر دو صفحه از جذب دود $Q = 2bWUN$ است

$$\text{بازده} = 1 - e^{-\frac{v_d WL}{Q/2N}}$$

$$Q = 1800 \frac{m^3}{min}$$

$$0.99 = 1 - e^{-\frac{v_d WL}{Q/2N}}$$

$$-\frac{v_d WL}{Q/2N} = \log_e 0.01 = -4.6$$

$$\Downarrow$$

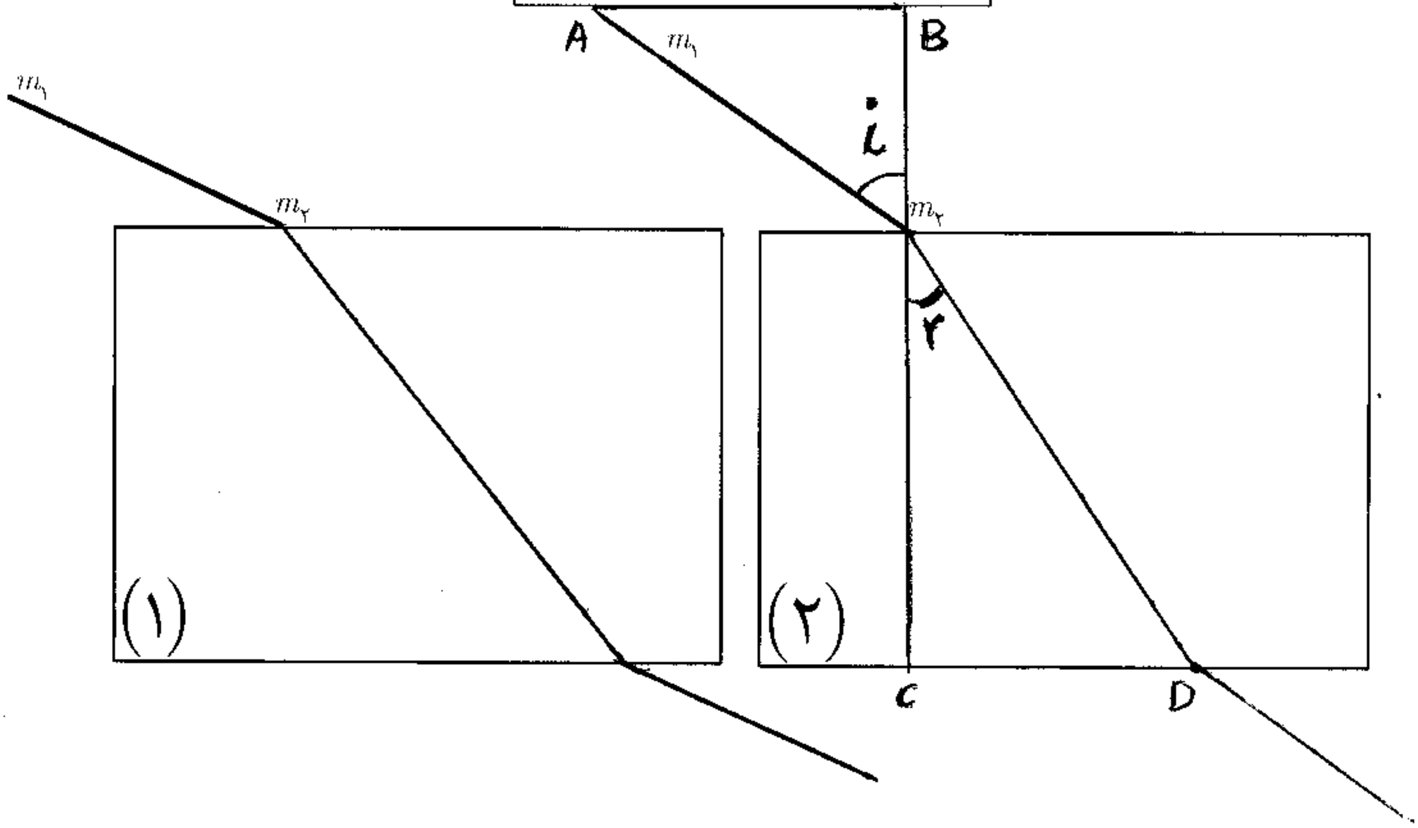
$$N = \frac{4.6}{2} \frac{Q}{v_d WL}$$

$$= \frac{(2.3)\left(\frac{1800}{60} m^3/s\right)}{(2.25 \times 10^{-3} m/s)(20 m^2)}$$

$$\boxed{N = 1533 \text{ صفحه}}$$

معاونت دانش‌پژوهان جوان

شماره‌ی تیغه‌ی شفاف: 95A-11290

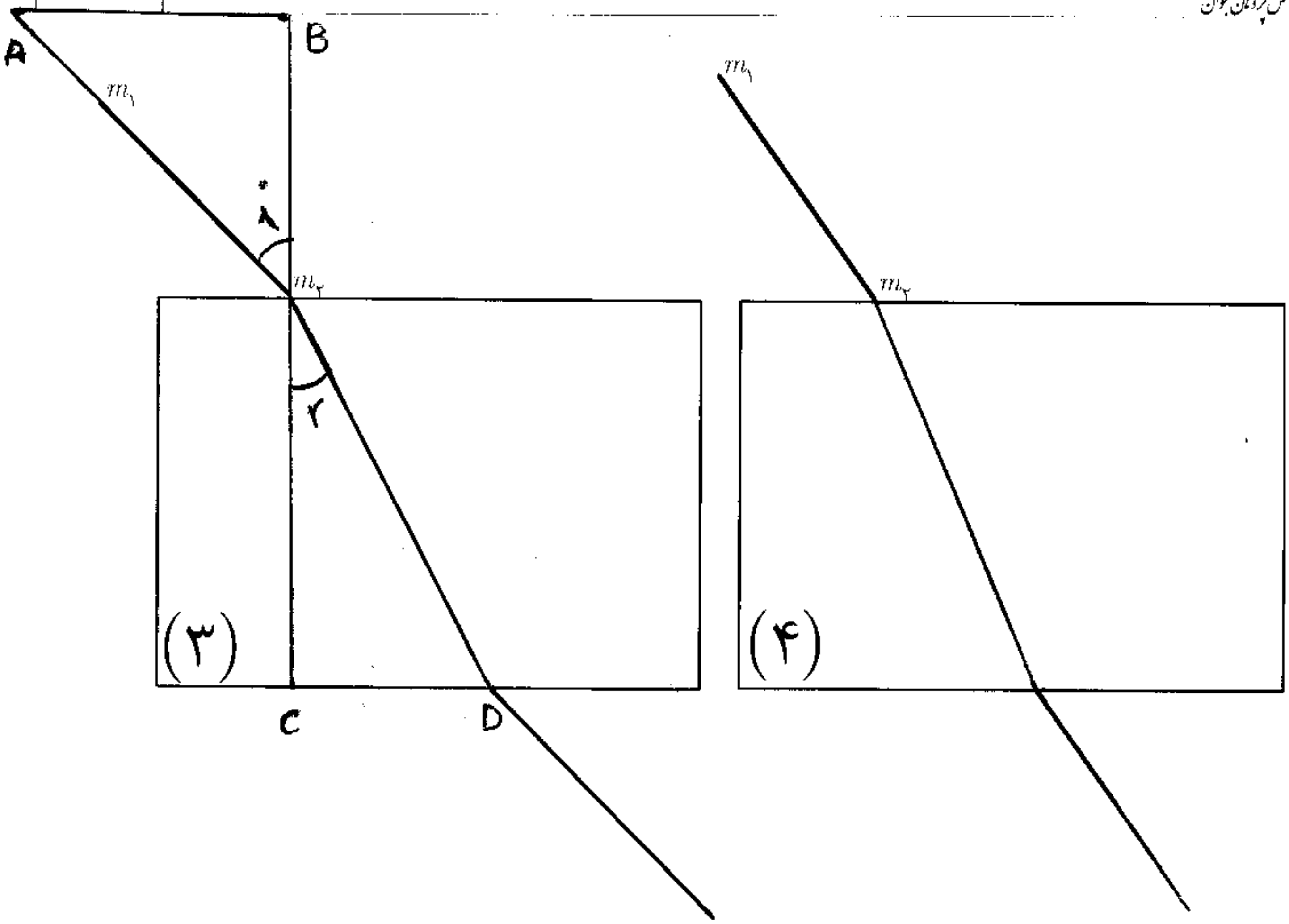


طول‌های اندازه‌گیری شده برای محاسبه‌ی ضریب شکست و نیز محاسبه‌ای که منجر به تعیین ضریب شکست تیغه در شکل (۲) می‌شود را در این قسمت بنویسید.

$$\begin{cases} AB = 41\,mm \\ Am_2 = 51\,mm \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} CD = 37\,mm \\ Dm_2 = 69\,mm \end{cases}$$

$$\sin i = n \sin r \longrightarrow \frac{41}{51} = n\,\frac{37}{69}$$

$$n = \frac{41 \times 69}{51 \times 37} = 1.50$$

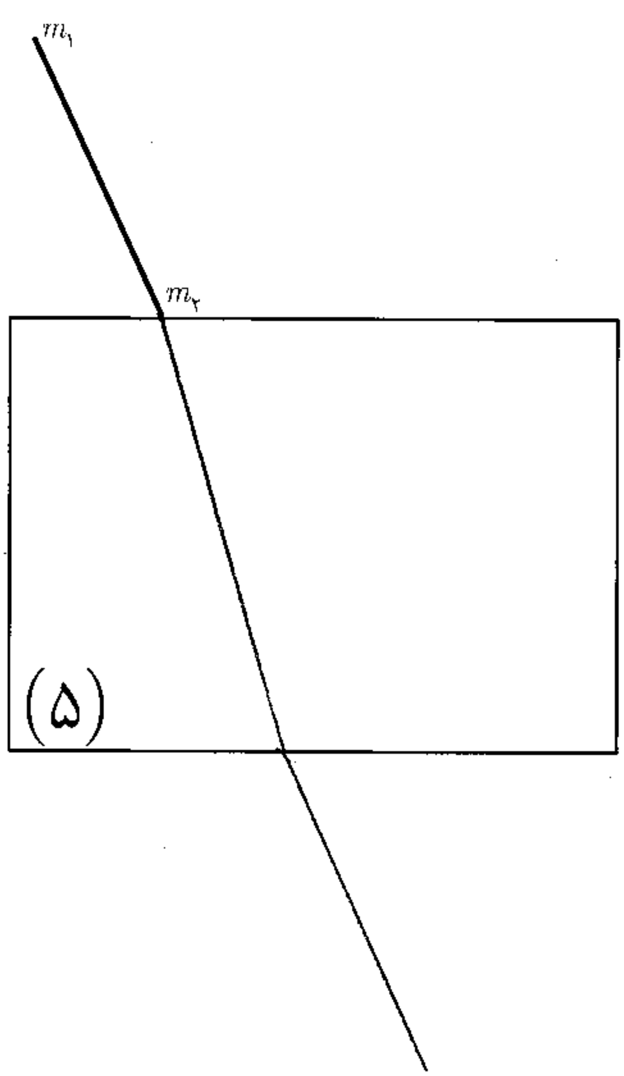


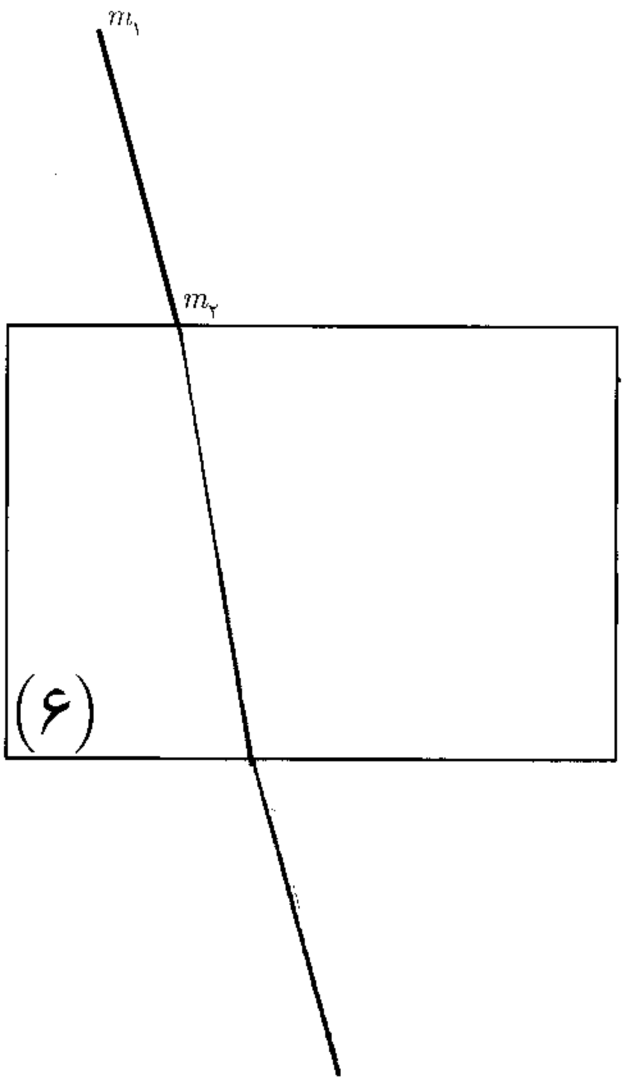
طول‌های اندازه‌گیری شده برای محاسبه‌ی ضریب شکست و نیز محاسبه‌ای که منجر به تعیین ضریب شکست تیغه در شکل (۳) می‌شود را در این قسمت بنویسید.

$$\begin{cases} AB = 41\ mm \\ AM_1 = 59\ mm \end{cases} , \begin{cases} CD = 29\ mm \\ DM_2 = 64\ mm \end{cases}$$

$$\sin i = n \sin r \longrightarrow \frac{41}{59} = n \frac{29}{64}$$

$$n = \frac{41 \times 64}{59 \times 29} = 1.53$$


m_1
m_2
(۵)


m_1
m_2
(۶)

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

معاونت دانش‌پژوهان جوان

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۵ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

بیست و هشتمین دوره المپیاد فیزیک -

تاریخ : ۱۳۹۴/۲/۱۵ – ساعت: ۹:۳۰ مدت: ۲۱۰ دقیقه

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: -------

کد ملّی: -------

نام پدر: -------

نام مدرسه: -------

استان: -------

منطقه: -------

حوزه: -------

پایه تحصیلی: -------

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید، در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

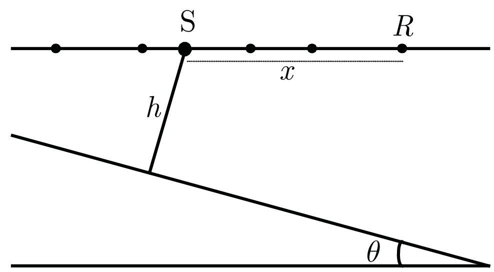
۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

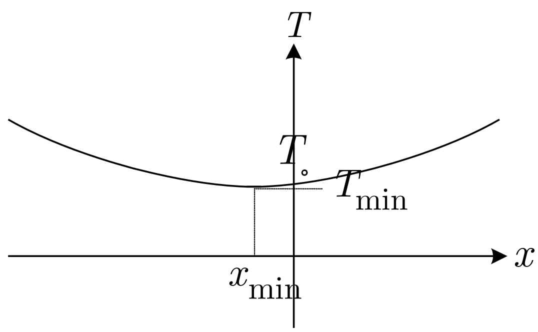
۹- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

۱) زمین‌شناسان برای بررسی لایه‌های مختلف زمین، منبع موجی در یک نقطه روی سطح زمین قرار می‌دهند. موج ارسال شده توسط این منبع به داخل زمین نفوذ کرده و پس از انعکاس از مرز بین دو ناحیه‌ی مختلف داخل زمین، با گیرنده‌های متعددی که با فاصله‌های مختلف از منبع روی سطح زمین و در دو طرف آن قرار دارند دریافت می‌شود.

مطابق شکل، منبع S و گیرنده‌ی R روی سطح زمین قرار دارند. فرض کنید فاصله‌ی گیرنده‌ی R از منبع x باشد و مرز بین دو ناحیه در داخل زمین با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. فاصله‌ی منبع تا مرز بین دو ناحیه را h بگیرید. وقتی در نقطه‌ی S انفجاری رخ می‌دهد، موج حاصل از آن پس از انعکاس از مرز بین دو ناحیه در داخل زمین، در زمان T پس از انفجار به گیرنده می‌رسد. اگر سرعت موج در این لایه از زمین v باشد



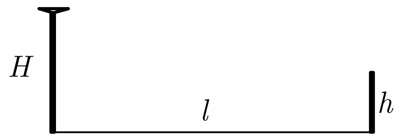
آ) T را بر حسب x، h، θ و v به دست آورید.



ب) در یک آزمایش، زمان رسیدن امواج به گیرنده‌ها بر حسب فاصله‌شان از منبع به صورت شکل مقابل به دست آمده است. مقدارهای h، θ و v را بر حسب $T_\circ$، $T_{\min}$ و $x_{\min}$ به دست آورید.

پ) در یک آزمایش خاص مقادیر $T_\circ = ۳/۰\ \mathrm{s}$، $T_{\min} = ۲/۴\ \mathrm{s}$ و $x_{\min} = -۳/۶\ \mathrm{km}$ به دست آمده‌اند. مقادیر عددی h، $\cos\theta$ و v را به دست آورید.

۲) یک فرستنده‌ی مخابراتی در ارتفاع H از سطح زمین در نظر بگیرید که به فاصله‌ی افقی l از یک گیرنده که در ارتفاع h از سطح زمین است، قرار دارد. فرستنده امواجی را با طول موج λ، در همه‌ی جهت‌ها ارسال می‌کند. دو پرتو از فرستنده به گیرنده می‌رسد: پرتو A که مستقیماً از فرستنده به گیرنده می‌رسد، و پرتو B که پس از بازتاب از سطح زمین به گیرنده می‌رسد. طول مسیری را که دو پرتو طی می‌کنند، به ترتیب با d_A و d_B نشان می‌دهیم.



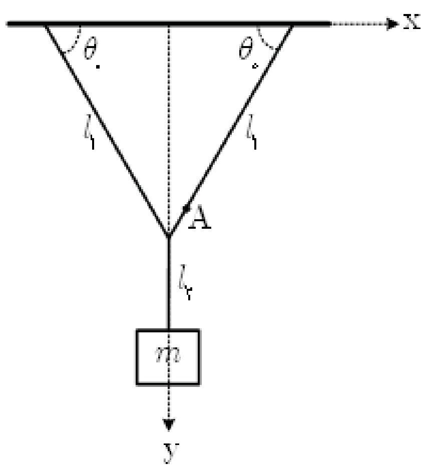
آ) d_A و d_B را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ب) عبارت‌های به دست آمده در بخش آ) برای d_A و d_B را با فرض آن که l از H و h خیلی بزرگ‌تر است ساده کنید. (می‌توانید از تقریب $(1+\varepsilon)^r \approx 1 + r\varepsilon$ برای ε کوچک استفاده کنید.)

پ) با در نظر گرفتن این که فاز پرتو بازتابی در هنگام بازتاب به اندازه‌ی π تغییر می‌کند، اختلاف فاز بین پرتوهای A و B را در محل گیرنده محاسبه کنید.

ت) با فرض این‌که دامنه‌ی هر دو پرتو در محل گیرنده برابر با E باشد، دامنه‌ی برآیند دو موج را در محل گیرنده به دست آورید و عبارت به دست آمده را با فرض آن که Hh از $l\lambda$ خیلی کوچک‌تر است حساب کنید. (می‌توانید از تقریب $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ برای ε کوچک استفاده کنید.)

ث) دامنه‌ی هر دو پرتو در محل فرستنده E_0 است. با دور شدن از فرستنده دامنه کاهش می‌یابد، به طوری که در فاصله‌ی l از فرستنده، دامنه با $\frac{1}{l}$ متناسب است. شدت موج دریافت شده توسط این گیرنده با l^α متناسب می‌باشد. α چه قدر است؟ (شدت موج دریافتی با مجذور دامنه‌ی نهایی نوسان متناسب می‌باشد.)



۳) جسم کوچکی به جرم m مطابق شکل توسط نخ‌هایی به جرم ناچیز از سقف آویزان شده است. در لحظه‌ی $t = 0$ نخ سمت راست از نقطه‌ی A بریده می‌شود. نخ متصل به جسم در بازه‌ی زمانی $0 \le t < t_1$ شُل است. محورهای مختصات، طول نخ‌ها و زاویه‌ی $\theta_\circ$ در شکل مشخص شده است،

آ) مختصات جسم را در لحظه‌ی $t = t_1$ بر حسب l_1، l_2 و $\theta_\circ$ به دست آورید.

ب) زمان t_1 را بر حسب l_1، l_2، $\theta_\circ$ و g حساب کنید.

پ) بردار سرعت جسم درست قبل از لحظه‌ی $t = t_1$ را با $\vec{v}_1$ نمایش می‌دهیم. مؤلفه‌های $\vec{v}_1$ را در دستگاه مختصات x-y به دست آورید.

ت) فرض کنید در زمان بسیار کوتاه Δt که از t_1 خیلی کوچک‌تر است، سرعت جسم در امتداد نخ صفر شود و مؤلفه‌ی سرعت در جهت عمود بر نخ بدون تغییر می‌ماند. بردار سرعت جسم بعد از این تغییر را با $\vec{v}_2$ نمایش می‌دهیم. . مؤلفه‌های $\vec{v}_2$ را در دستگاه مختصات x-y به دست آورید.

ث) نیروی برآیند وارد شده به جسم را در بازه‌ی زمانی Δt تقریباً ثابت فرض می‌کنیم. اندازه‌ی این نیرو را به دست آورید.

۴) الکترونی با بار $-e$ و جرم m تحت تأثیر میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت B در جهت مثبت محور z قرار دارد. بر اثر نیروی وارد شده از طرف میدان مغناطیسی، الکترون بر روی دایره‌ای در صفحه‌ی x-y می‌چرخد. از طرفی بنا بر مکانیک کوانتومی رابطه‌ی زیر بین شعاع چرخش، R و سرعت الکترون، v برقرار است

$$\pi m v R = n h,$$

که در آن n عددی طبیعی و h ثابت پلانک است. کلیه‌ی کمیت‌های خواسته شده در بخش‌های ب) تا ث) مسئله را بر حسب e، B، m، h و n بنویسید.

آ) در صفحه‌ی x-y، دایره‌ی مسیر الکترون را بکشید و جهت حرکت الکترون را با علامت پیکان روی آن مشخص کنید.

ب) شعاع دوران را به دست آورید.

پ) سرعت الکترون را به دست آورید.

ت) انرژی جنبشی الکترون را به دست آورید.

ث) شار مغناطیسی گذرنده از مدار حرکت الکترون را به دست آورید.

ج) با استفاده از مقادیر عددی $h = ۶/۶ \times ۱۰^{-۳۴}$ J.s و $e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}$ C کم‌ترین مقدار شار مغناطیسی گذرنده از مدار الکترون را حساب کنید.

چ) با استفاده از مقادیر عددی $B = ۰/۱۰$ T، $m = ۹/۱ \times ۱۰^{-۳۱}$ kg و $e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}$ C اندازه‌ی کوچک‌ترین بسامد فوتون تابش شده بین حالت‌های کوانتومی را حساب کنید.

۵) فرض کنید هوای اطراف زمین گاز کامل است و در ارتفاع دلخواهی مانند h از سطح زمین رابطه‌ی بین دمای جو، $T(h)$ و فشار جو $P(h)$ به صورت

$$P(h)T(h)^{-\frac{۷}{۲}} = \text{ثابت}$$

است.

آ) اگر در اثر تغییرات جزئی ارتفاع به اندازه‌ی Δh، فشار و دما به ترتیب به اندازه‌ی جزئی ΔP و ΔT تغییر کنند رابطه‌ای به صورت

$$\frac{\Delta P}{\Delta h} = f(P,\, T)\frac{\Delta T}{\Delta h}$$

بین این کمیت‌ها برقرار است. $f(P,\, T)$ را به دست آورید.

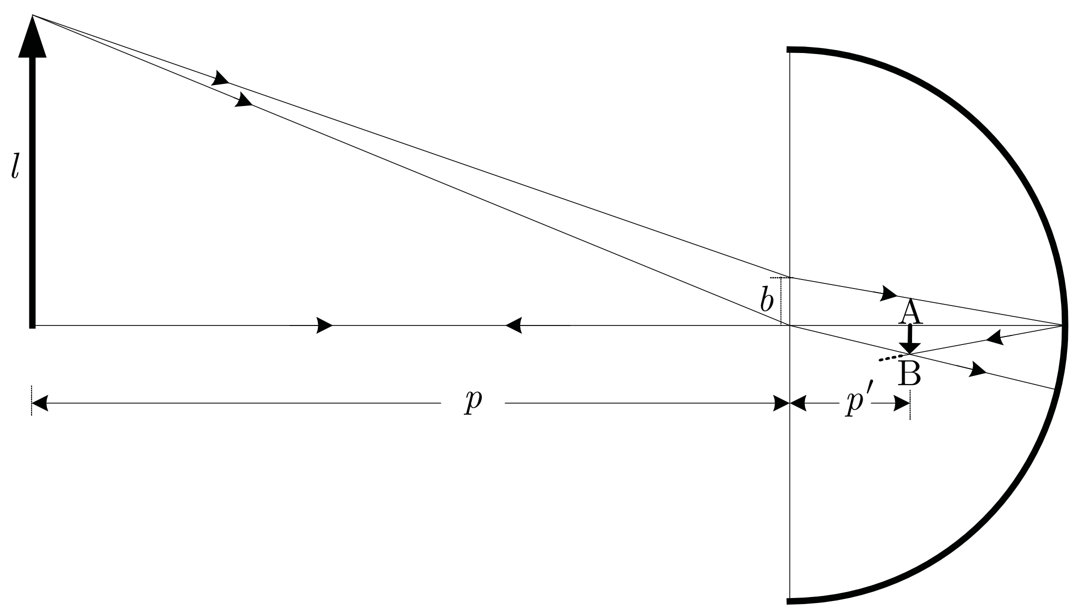
ب) با استفاده از شرط تعادل نیروها برای یک لایه جو در ارتفاع h و به ضخامت Δh کمیت $T(h)$ را بر حسب M جرم مولی هوا، g شتاب گرانش، R ثابت عمومی گازها و $T_۰$ دما در سطح زمین به دست آورید.

پ) کمیت $P(h)$ را بر حسب کمیت‌های مذکور در بخش ب) و $P_۰$ فشار در سطح زمین به دست آورید.

ت) به ازای هر یک کیلومتر بالا رفتن از سطح زمین دمای جو چند درجه سانتیگراد کم می‌شود؟ در نظر بگیرید، $M = ۲۹\ \mathrm{g/mol}$، $R = ۸/۳\ \mathrm{J/mol.K}$، $g = ۹/۸\ \mathrm{m/s^۲}$ و $T_۰ = ۳۰۰\ \mathrm{K}$.

ث) در این مدل ضخامت جو چند کیلومتر است؟

۶) یک نیم‌کره‌ی شیشه‌ای توپُر با ضریب شکست n و شعاع r در نظر بگیرید که سطح کروی بیرونی آن نقره اندود شده و در هوا با ضریب شکست یک قرار دارد. مطابق شکل جسمی به طول l به فاصله‌ی p از سطح تخت نیم‌کره و موازی آن قرار دارد. نور تابیده شده از جسم به نیم‌کره از سطح تخت وارد نیم‌کره می‌شود و از سطح کروی که مانند آینه عمل می‌کند باز می‌تابد.



با در نظر گرفتن پرتوهای رسم شده در شکل، نمادهای معرفی شده و $\text{AB}=l'$،

آ) نسبت $\frac{l'}{p'}$ را بر حسب $\frac{l}{p}$ و n به دست آورید.

ب) طول b را به عنوان تابعی از l'، p' و r به دست آورید.

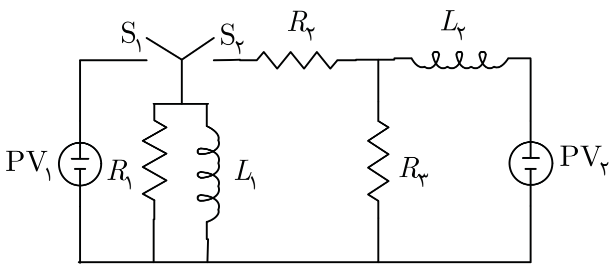
در ادامه‌ی مسئله فرض کنید p از l خیلی بزرگ‌تر است.

پ) l' و p' را بر حسب l، p، r و n به دست آورید.

ت) با ادامه دادن پرتوها تصویر نهایی به دست می‌آید. فاصله‌ی تصویر نهایی از سطح تخت را بر حسب l، p، r و n به دست آورید.

ث) اندازه‌ی تصویر نهایی را بر حسب l، p، r و n به دست آورید.

راهنمایی: اگر ε بسیار کوچک باشد می‌توان نوشت: $\frac{۱}{۱\pm\varepsilon}\approx ۱\mp\varepsilon$ و $\sin\varepsilon\approx\tan\varepsilon\approx\varepsilon$.



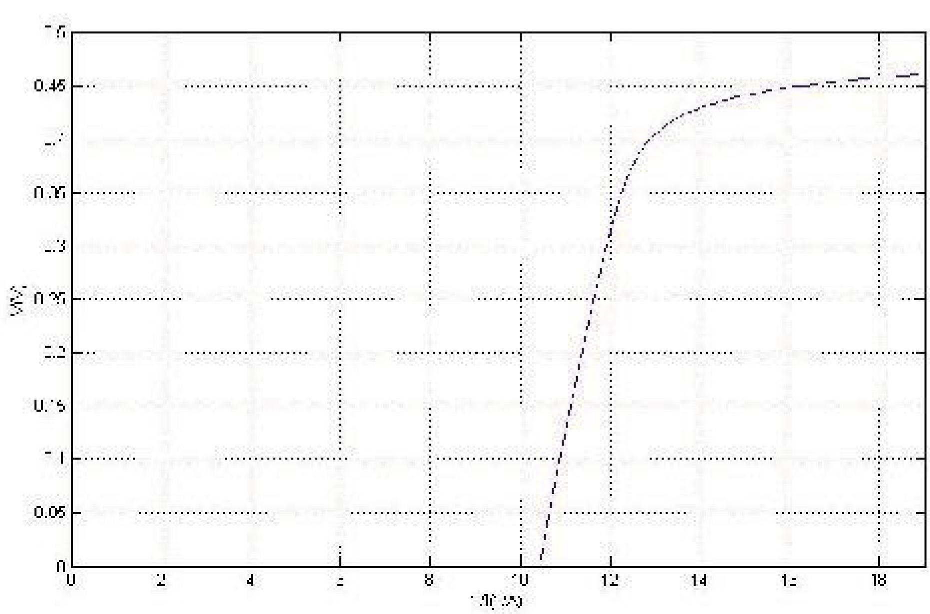
۷) از دو سلول خورشیدی مشابه PV_1 و PV_2 در مدار شکل روبه‌رو به عنوان منبع نیروی محرکه استفاده شده است. منحنی ولتاژ بر حسب عکس جریان برای این نوع سلول خورشیدی در شکل زیر نشان داده شده است. در ابتدا، برای مدت زمانی طولانی، کلید S_1 بسته و کلید S_2 باز است. در لحظه‌ی $t=0$، کلید S_1 باز می‌شود و کلید S_2 بسته می‌شود.

آ) مقدار عددی مقاومت R_3 را طوری تعیین کنید که توان تلف شده در آن، کمی قبل از لحظه‌ی $t=0$، بیش‌ترین مقدار ممکن باشد.

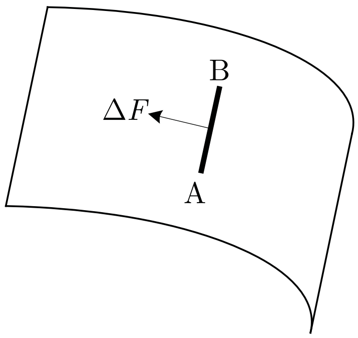
در ادامه‌ی مسئله فرض کنید $R_1=R_2=R_3$ و مقدار عددی R_3 همان است که در قسمت آ) به دست آمد.

ب) مقدار عددی جریان‌های I_1 و I_2 که به ترتیب از خودالقاهای L_1 و L_2 می‌گذرند را کمی قبل از لحظه‌ی $t=0$ به دست آورید.

پ) مقدار عددی ولتاژ دو سر مقاومت‌های R_1 و R_3 را بلافاصله بعد از لحظه‌ی $t=0$ به دست آورید.

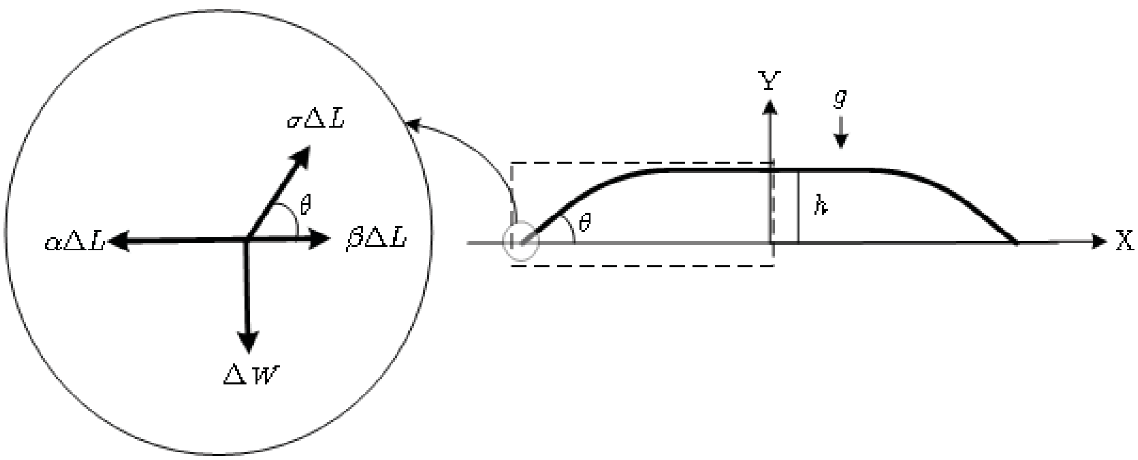


۸) در این مسئله می‌خواهیم ببینیم با ریختن حجم معینی از آب روی میز شیشه‌ای چه سطحی از آن خیس می‌شود.



مقدمه: عناصر واقع بر سطح تماس دو محیط یکدیگر را با نیرویی می‌کشند. فرض کنید سطح نشان داده شده در شکل مقابل سطح جدایی بین دو محیط است، مثلاً یک طرف صفحه آب و طرف دیگر آن هوا قرار دارد. عناصر واقع در سمت چپ پاره خط AB به طول ΔL عناصر سمت راست را مطابق شکل با نیرویی می‌کشند که با طول AB متناسب است، به طوری که $\Delta F = \sigma \Delta L$. به کمیت σ ضریب کشش گفته می‌شود که واحد آن نیوتن بر متر است.

هنگامی که یک قطره مایع روی سطحی قرار می‌گیرد، پهن می‌شود و دایره‌ای به شعاع R از سطح را خیس می‌کند. یک مقطع مایع در صفحه‌ی X-Y مطابق شکل زیر است. برای سادگی فرض می‌کنیم که این مقطع در راستای افقی Z که عمود بر صفحه‌ی شکل است در یک فاصله کوتاه ΔL تغییر نمی‌کند (شعاع دایره، بزرگ است). ضخامت مایع h در تمام مقطع ثابت است، اما در کناره‌ها مایع شیب دارد و با زاویه‌ی θ نسبت به افق به سطح جامد منتهی می‌شود. زاویه‌ی θ به ضریب کشش میان سطح جدایی جامد و هوا α، ضریب کشش میان سطح جدایی جامد و مایع β و ضریب کشش میان سطح جدایی مایع و هوا σ، بستگی دارد.



آ) مطابق شکل، عنصر کوچکی را در محل جدایی سطح‌های مایع، جامد و هوا در داخل دایره در نظر بگیرید. نیروهای وارد بر این عنصر در دایره‌ی سمت چپ نشان داده شده است. با استفاده از تعادل نیروها در راستای افقی X برای این عنصر، زاویه‌ی θ را بر حسب α، β و σ به دست آورید.

ب) برای جنس مشخصی از شیشه $\theta = ۴۵^\circ$. با فرض آن که $\sigma = ۷/۰۰ \times ۱۰^{-۲}\ \mathrm{N/m}$ و $\alpha = ۴/۰۰\ \mathrm{N/m}$، β را حساب کنید. ($\cos ۴۵^\circ = ۰/۷۰۷$)

پ) فرض کنید $P(y)$ فشار مایع در نقطه‌ی y روی محور Y است. درست در زیر سطح تماس با هوا، فشار مایع همان فشار هوا یعنی $P_۰$ است. تابع $P(y)$ را بر حسب شتاب گرانش g، ضخامت مایع h، چگالی مایع ρ و ارتفاع y از سطح جامد به دست آورید و نمودار آن را بکشید.

ت) برای مقطعی از دستگاه که داخل مستطیل خط‌چین قرار دارد و طول آن در راستای Z مقدار کوچک ΔL است، تعادل نیروها در راستای افقی X را بنویسید و از اینجا ضخامت مایع، h را بر حسب α، β، σ، g و ρ به دست آورید.

ث) فرض کنید حجم ۳۱۴ میلی‌لیتر آب روی شیشه بریزد. شتاب جاذبه $g = ۱۰\ \mathrm{m/s^۲}$ و چگالی آب $\rho = ۱۰۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$ است. مقدار عددی h و R را حساب کنید. (از حجمِ جاهایِ نزدیکِ لبه چشمپوشی شود)

سؤال عملی

موضوع آزمایش: اندازه‌گیری ثابت فنر

وسایل آزمایش: میله‌ی فلزی، فنر، وزنه‌ی m به جرم $45\ \mathrm{g}$ و متر نواری

مقدمه: مطابق شکل در یک سر میله، فنری به ثابت نامعین k متصل شده است. طرف دیگر فنر آزاد است به طوری که فنر را می‌توان فشرده کرد. وزنه‌ی m که وسط آن سوراخ شده است روی میله جابه‌جا می‌شود. اگر میله را به حالت قائم نگه داریم و به کمک وزنه‌ی m فنر را فشرده کرده و رها کنیم وزنه به طرف بالا پرتاب می‌شود. از اصطکاک بین وزنه و میله چشم‌پوشی کنید.

تذکر مهم: در مدت زمان انجام آزمایش مراقب باشید میله با صورت و چشم خودتان و دیگر دانش‌آموزان برخورد نکند. بعد از آزمایش کلیه‌ی وسایل را تحویل دهید.

آ) طول فنر را در حالتی که کاملا آزاد است و نیز در حالتی که کاملا فشرده شده است اندازه‌گیری کنید و در جدول ۱ پاسخ‌نامه وارد کنید.

ب) در حالی که میله قائم است وزنه را تا ارتفاع h از انتهای آزاد فنر فشرده نشده بالا بیاورید و رها کنید. وزنه پس از سقوط و برخورد با فنر، برای نخستین بار تا ارتفاع x از انتهای آزاد فنر فشرده نشده بالا می‌آید. برای پنج مقدار h مندرج در جدول ۲، آزمایش را انجام دهید. برای هر مقدار h سه بار آزمایش را تکرار کنید و مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی x و میانگین آن‌ها را در جدول ۲ پاسخ‌نامه وارد کنید. مقادیر $\overline{x}$ بر حسب h را در کاغذ نمودار وارد کنید. با فرض آن که $\overline{x}$ و h رابطه‌ی خطی داشته باشند، بهترین خطی که از میان داده‌ها عبور می‌کند را رسم کنید و شیب آن را اندازه بگیرید. مقدار شیب را در جدول ۳ پاسخ‌نامه بنویسید.

پ) میله را به طور قائم روی میز قرار دهید طوری که فنر در پایین آن باشد. وزنه را روی فنر فشار دهید تا فنر به طور کامل فشرده شود. وزنه را رها کنید تا به بالا پرتاب شود و تا ارتفاع H از سرِ آزاد فنر فشرده نشده بالا برود. این کار را چندین بار تکرار کنید تا انجام آن برای شما آسان شود. حال آزمایش را شش بار انجام دهید و هر بار مقدار H را اندازه بگیرید. کمیت های $H_۱$ تا $H_۶$ را در جدول ۴ پاسخ‌نامه وارد کنید. میانگین $H_۱$ تا $H_۶$، $\overline{H}$، را به دست آورید. ثابت فنر k را در دستگاه SI برای بیش‌ترین و کم‌ترین H ($k_{\max}$ و $k_{\min}$) محاسبه و در جدول ۵ پاسخ‌نامه وارد کنید. همچنین $\overline{k}$ متناظر با $\overline{H}$ را محاسبه و در جدول ۵ پاسخ‌نامه وارد کنید. خطای اندازه‌گیری k را به صورت $\Delta k = \dfrac{k_{\max} - k_{\min}}{۲}$ بگیرید و مقدار آن را در جدول ۵ پاسخ‌نامه وارد کنید. فرمولی را که در قسمت پ) آزمایش استفاده کردید در جدول ۶ پاسخ نامه وارد کنید.

پاسخنامه

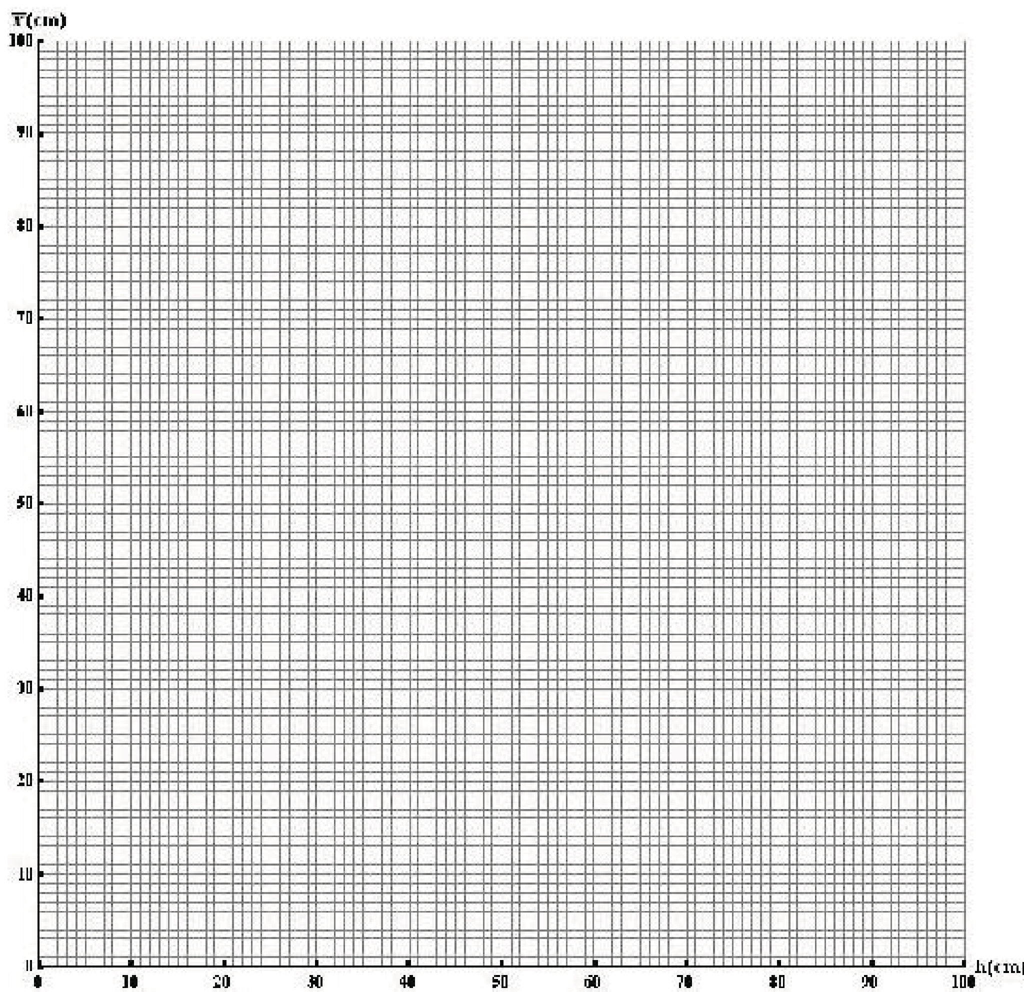
جدول ۱

طول فنر در حالت فشرده	طول فنر در حالت عادی

جدول ۲

h(cm)	$x_۱$(cm)	$x_۲$(cm)	$x_۳$(cm)	$\overline{x}$(cm)
۲۵				
۳۵				
۴۵				
۵۵				
۶۵				

نمودار $\overline{x}$ بر حسب h



جدول ۳

شیب نمودار =

جدول ۴

$H_۱$(cm)	$H_۲$(cm)	$H_۳$(cm)	$H_۴$(cm)	$H_۵$(cm)	$H_۶$(cm)	$\overline{H}$(cm)

جدول ۵

k_{max}(N/ m)	k_{min}(N/ m)	$\overline{k}$(N/ m)	Δk(N/ m)

جدول۶

فرمول‌های استفاده شده برای قسمت پ:

بسمه تعالی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

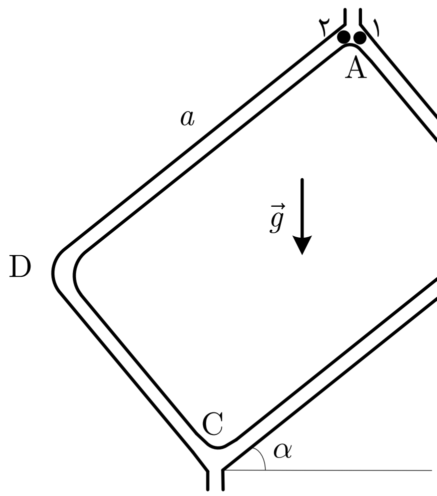
۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

۱) مطابق شکل لوله‌ای بدون اصطکاک به شکل مسیر مستطیلی ABCD در آمده است و در صفحه‌ی قائم قرار دارد. دو گلوله‌ی مشابه از نقطه‌ی A واقع بر بالاترین نقطه‌ی دستگاه از حال سکون رها شده و از دو راه مختلف هر دو به نقطه‌ی C می‌رسند. زاویه‌ی بین امتداد BC با افق α است و طول و عرض این مستطیل به ترتیب a و b است.



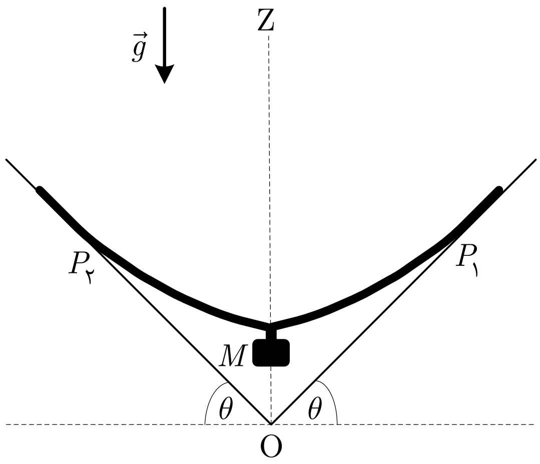
آ) زمان رسیدن گلوله‌ی ۱ تا نقطه‌ی C را T_1 بنامید و آن را حساب کنید.

ب) زمان رسیدن گلوله‌ی ۲ تا نقطه‌ی C را T_2 بنامید و آن را حساب کنید.

پ) کمیت $T_1 - T_2$ را به دست آورید و آن را به شکل زیر بیان کنید

$$T_1 - T_2 = f(a,b,\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

تابع $f(a,b,\alpha)$ را به ساده‌ترین شکل بنویسید و در مورد علامت آن بر حسب α بحث کنید. تعیین کنید در چه شرایطی T_1 کوچک‌تر از T_2 است.



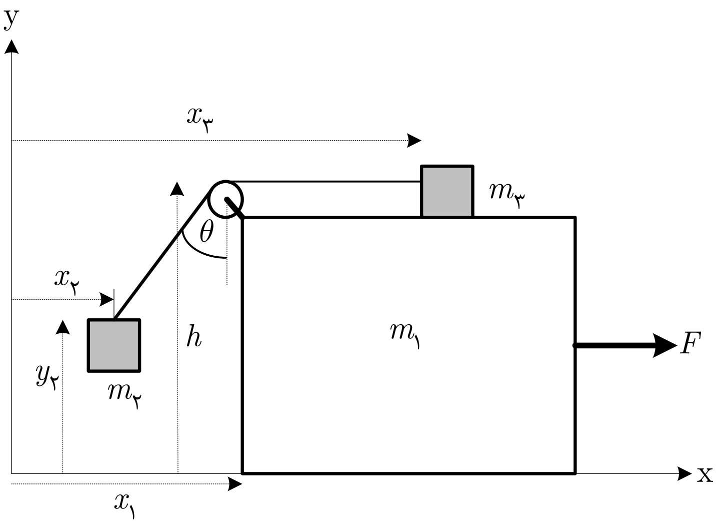
۲) طنابی به طول l و جرم m وقتی روی سطح شیب‌داری به شیب α قرار دارد در اثر نیروی اصطکاک بین طناب و سطح، در آستانه‌ی لغزش است. به نقطه‌ی وسط این طناب جرم M را می‌بندیم و آن را مطابق شکل روی دو سطح شیب‌دار با همان ضریب اصطکاک قرار می‌دهیم. صفحه‌ی شکل، مقطع قائم دو سطح شیب‌دار است و طناب در این صفحه واقع است. در این وضعیت اگر زاویه‌ی شیب دو سطح با افق θ باشد دستگاه در آستانه‌ی لغزش قرار دارد و مجموعاً طول x از طناب روی دو سطح قرار دارد. در این حالت طناب نسبت به محور قائم OZ تقارن دارد.

آ) کشش طناب در نقاط $P_۱$ و $P_۲$ که طناب از دو سطح شیب‌دار جدا شده است را به دست آورید.

ب) طول x را بر حسب θ به دست آورید و نمودار آن را با فرض ثابت بودن سایر کمیت‌ها رسم کنید. به ازای چه θای x کمینه است؟ مقدار کمینه‌ی x را حساب کنید.

پ) به ازای M و m معین، θ در چه محدوده‌ای باشد تا دستگاه در وضعیت فوق در تعادل باشد؟

۳) سه جسم به جرم‌های m_1، m_2 و m_3 مطابق شکل به هم متصل‌اند. جسم m_1 با نیروی ثابت F به سمت راست کشیده می‌شود، به طوری که در ضمن حرکت اجسام نخ متصل به جرم m_2 در زاویه‌ی ثابت θ نسبت به امتداد قائم قرار داشته باشد. مختصات x_1، x_2، y_2 و x_3 در شکل نشان داده شده‌اند. طول نخ میان جرم‌های m_2 و m_3 مقدار ثابت l است و کلیه‌ی سطوح بدون اصطکاک هستند. قرقره کوچک و جرمش ناچیز است.



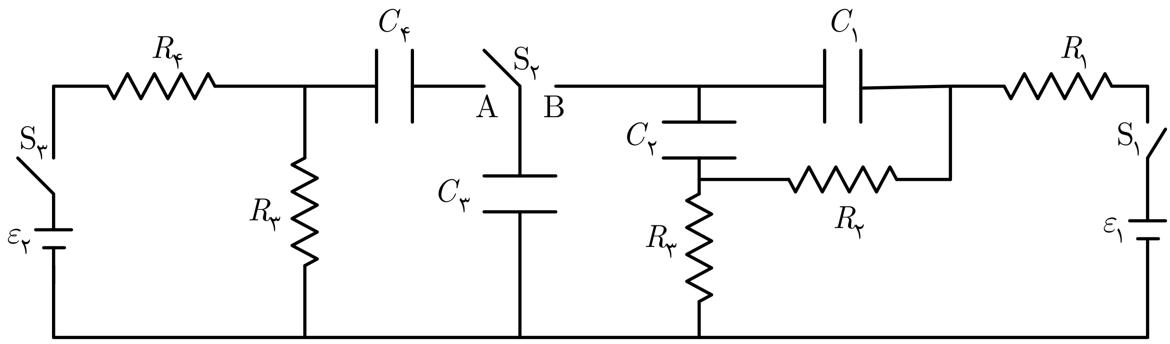
آ) معادلات حرکت نیوتن را برای حرکت افقی هر سه جرم و حرکت قائم جرم m_2 بنویسید. به این ترتیب با مفروض دانستن θ، چهار معادله برای شش مجهول F، a_1، a_{2x}، a_{2y}، a_3 و T (کشش نخ) به دست می‌آید.

ب) عبارتی برای طول نخ، l، بر حسب x_1، x_2، y_2 و x_3 بنویسید و با دو بار مشتق‌گیری از آن نسبت به زمان رابطه‌ای بین a_1، a_{2x}، a_3 و θ به دست آورید.

پ) با توجه به ثابت بودن θ رابطه‌ی دیگری بین x_1، x_2 و y_2 بر حسب θ به دست می‌آید. از این رابطه نیز دو بار نسبت به زمان مشتق بگیرید و رابطه‌ای بین a_1، a_{2x}، a_3 و θ به دست آورید.

ت) معادلات به دست آمده (شش معادله و شش مجهول) را حل کنید تا a_1 و F بر حسب θ و سایر کمیت‌های معلوم به دست آیند.

۴) در مدار نشان داده شده در شکل، ولتاژ باتری‌ها، مقدار مقاومت‌ها و ظرفیت خازن‌ها روی شکل مشخص شده است. در ابتدا همه‌ی خازن‌ها بدون بار و همه‌ی کلیدها باز هستند. در لحظه‌ی $t = ۰$ کلیدهای $S_۱$ و $S_۳$ بسته می شوند و کلید $S_۲$ به نقطه‌ی A وصل می‌شود. پس از گذشت زمان بسیار زیاد کلید $S_۲$ از نقطه‌ی A باز شده و به نقطه‌ی B بسته می‌شود.

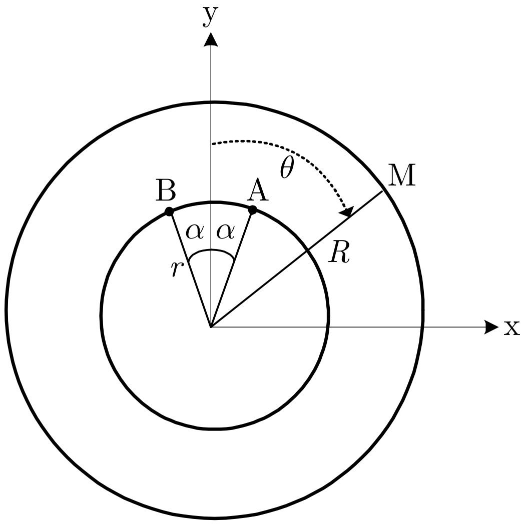


اگر $q_۱$ و $q_۳$ بار خازن‌های $C_۱$ و $C_۳$ درست قبل از باز شدن کلید $S_۲$ از نقطه‌ی A و $q'_۱$ و $q'_۳$ بار آن‌ها پس از گذشت زمان بسیار زیاد از بسته شدن کلید $S_۲$ به نقطه‌ی B باشد،

آ) مقادیر $q_۱$ و $q_۳$ را بر حسب کمیت‌های داده شده در شکل به دست آورید.

ب) معادلاتی بنویسید که از حل آن‌ها $q'_۱$ و $q'_۳$ به دست آید.

پ) با فرض آن که اندازه‌ی همه‌ی مقاومت‌ها R و ظرفیت همه‌ی خازن‌ها C باشد جواب معادلات فوق را به دست آورید.



۵) یک منبع نور خطی با طول موج λ روی محور z قرار دارد. مطابق شکل دو پوسته‌ی استوانه‌ای کدر هم‌محور به شعاع‌های r و R که محور آن‌ها محور z است، منبع نور را احاطه کرده‌اند. نقاط A و B از شکل، مقطع شکاف‌های باریکی هستند که روی استوانه‌ی به شعاع r به موازات محور z ایجاد شده‌اند. می‌توان نقاط A و B را مانند منابع نور نقطه‌ای هم‌فاز در نظر گرفت که در صفحه‌ی x-y واقع‌اند و شعاع‌های واصل به آن‌ها با محور y زاویه‌ی حاده α دارند. همه‌ی کمیت‌های خواسته شده در این مسئله را تنها در صفحه‌ی x-y محاسبه کنید. نقطه‌ای مانند M مطابق شکل در نظر بگیرید که روی پرده‌ی استوانه‌ای به شعاع R قرار دارد و شعاع واصل به آن در زاویه‌ی θ نسبت به محور y قرار دارد. فاصله‌ی نقطه‌ی M از نقاط A و B را به ترتیب با d_A و d_B نمایش می‌دهیم.

آ) d_A را بر حسب θ و ثابت‌های داده شده در صورت مسئله محاسبه کنید.

ب) تعریف می‌کنیم $d = d_B - d_A$. این کمیت را بر حسب θ و ثابت‌های داده شده در مسئله به دست آورید.

پ) اگر r از R خیلی کوچک‌تر باشد می‌توان از عبارت‌های متناسب با $\frac{r^2}{R^2}$ و توان‌های بالاتر $\frac{r}{R}$ چشم پوشید و نیز از رابطه‌ی تقریبی $(1+\varepsilon)^s \approx 1 + s\varepsilon$ که در آن ε خیلی از یک کوچک‌تر است، استفاده کرد. عبارت به دست آمده برای d را با این فرض ساده کنید و در ادامه مسئله فرض کنید چنین شرطی برقرار است.

ت) اندازه‌ی اختلاف فاز نور رسیده به نقطه‌ی M از نقاط A و B را با $|\Delta\phi|$ نمایش می‌دهیم. $|\Delta\phi|$ را بر حسب α، θ، r و R به دست آورید.

ث) به ازای چه زاویه‌های θای شدت نور در نقطه‌ی M روی استوانه‌ی خارجی بیشینه است؟

ج) در چه زاویه‌هایی روی استوانه‌ی خارجی شدت نور کمینه است؟

چ) تعداد کل نوارهای روشن روی استوانه‌ی خارجی را به دست آورید.

۶) یک خازن تخت و تعداد زیادی توپ بسیار کوچک، هر یک به جرم m، که قادرند بار الکتریکی را بین صفحات یک خازن تخت انتقال دهند در نظر بگیرید. توپ‌ها به طور ناکشسان و عمود به صفحه‌های خازن برخورد می‌کنند به طوری که اگر اندازه‌ی سرعت در لحظه‌ی قبل از برخورد به صفحه v باشد، اندازه‌ی سرعت آن درست پس از برخورد ev خواهد بود که $۰ < e < ۱$. هر توپ هنگام تماس با هر یک از صفحه‌ها به صورت آنی بار q را به دست می‌آورد و در اثر دافعه از آن صفحه دور می‌شود و نیز هنگام برخورد به هر یک از صفحه‌ها به طور تقریباً آنی بار قبلی خود را از دست می‌دهد و باری با اندازه‌ی q به دست می‌آورد، سپس بر اثر دافعه الکتریکی از آن دور می‌شود. این فرایند هر بار که تکرار شود، توپ بخشی از انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. فرض کنید مساحت هر یک از صفحات خازن A، فاصله‌ی صفحه‌های آن از هم d و تعداد توپ‌ها در واحد سطح صفحه‌ی خازن n باشد. شعاع توپ‌ها در مقایسه با فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن ناچیز است و از نیروی وزن توپ‌ها و اثرات لبه‌ی خازن چشم می‌پوشیم. در ابتدا خازن بدون بار است و همه‌ی توپ‌ها روی یکی از صفحه‌ها قرار دارند و ساکن هستند. در این وضعیت خازن را به پتانسیل ε وصل می‌کنیم.

آ) زمان رسیدن هر توپ به صفحه‌ی مقابل و سرعت آن درست قبل از برخورد به آن صفحه پس از یک بار طی مسافت d چقدر است؟

ب) سرعت هر توپ درست قبل از برخورد به صفحه‌ی خازن پس از طی مسافت kd (k تعداد دفعه‌هایی است که هر توپ مسافت d را طی کرده است) و مدت زمان حرکت در مرحله‌ی k ام را به دست آورید.

پ) جریان الکتریکی میانگین بین صفحه‌ها در مرحله‌ی k ام را به دست آورید.

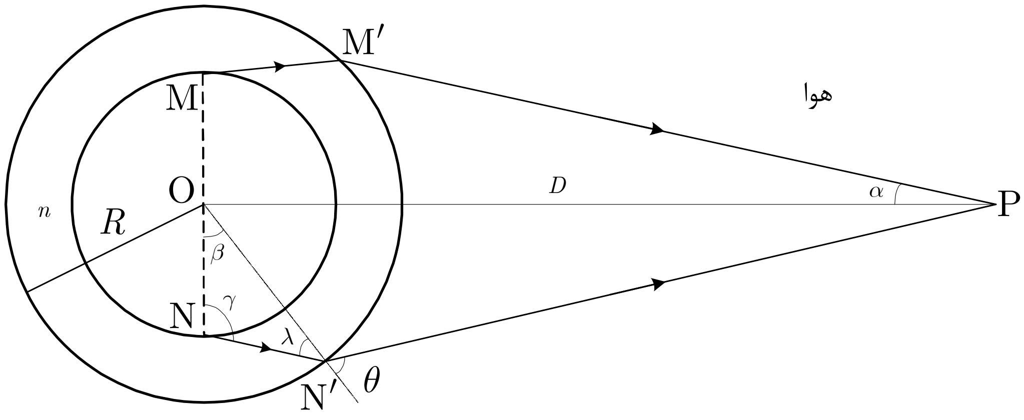
ت) نمودار جریان – ولتاژ ($I-\varepsilon$) را در حد $k \to \infty$ به طور کیفی رسم کنید.

ث) مقدار انرژی مکانیکی تلف شده توپ‌ها در برخورد k ام را به دست آورید و با استفاده از آن آهنگ اتلاف انرژی مکانیکی میانگین در حد $k \to \infty$ را حساب کنید.

ج) آهنگ میانگین انجام کار به وسیله‌ی باتری را در حد $k \to \infty$ حساب کنید.

راهنمایی: $$\frac{۱-x^k}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{k-۱}$$

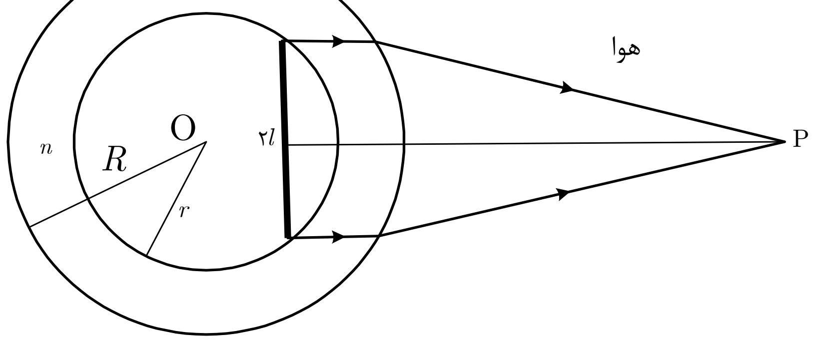
۷) یک ظرف شیشه‌ای استوانه‌ای که مقطع آن در شکل نشان داده شده است دارای شعاع خارجی R و ضریب شکست n است و در هوا با ضریب شکست یک قرار دارد. ناظری که از نقطه‌ی P به فاصله‌ی D از محور ظرف استوانه‌ای به آن نگاه می‌کند به دلیل شکست نوری که از دو سرِ قطر داخلی MN هنگام عبور از نقاط $\mathrm{M'}$ و $\mathrm{N'}$ اتفاق می‌افتد استوانه داخلی را تحت زاویه‌ی ۲α می‌بینند. زاویه‌های β، γ، λ و θ نیز در شکل نشان داده شده است.



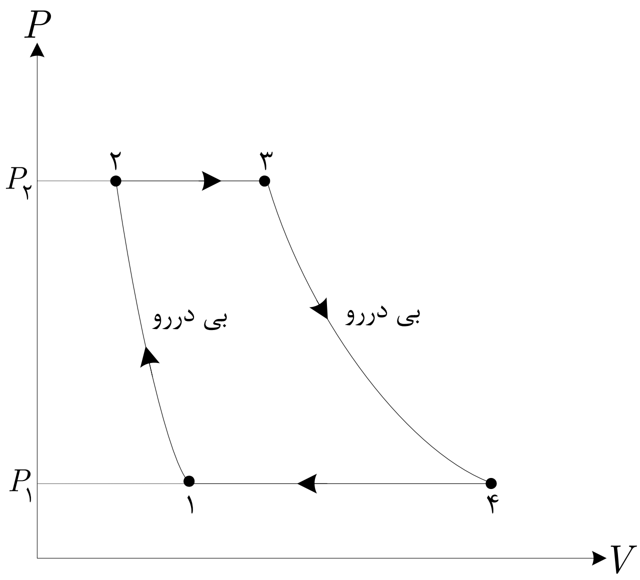
آ) کمیت‌های $\sin\beta$، $\sin\gamma$، $\sin\lambda$ و $\sin\theta$ را بر حسب n، R، D و α به دست آورید.

ب) قطر واقعی داخلی ظرف را بر حسب n، R، D و سینوس زاویه‌های مشخص شده در شکل به دست آورید.

اکنون فرض کنید داخل این ظرف استوانه‌ای، میله‌ای به طول $۲l$ درست در کنار دیواره قرار دارد و ناظری در نقطه‌ی P مطابق شکل به آن نگاه می‌کند. از این پس شعاع داخلی ظرف را r بگیرید.



پ) چشم ناظر در چه فاصله‌ای از محور استوانه قرار داشته باشد تا پرتوهایی که از دو سر میله به طور موازی خارج می شود را دریافت کند.



۸) یک مول گاز کامل، چرخه‌ی نشان داده شده در شکل را طی می‌کند. این چرخه شامل دو فرایند بی‌دررو و دو فرایند هم‌فشار است. ظرفیت گرمایی مولی گاز در فشار ثابت و در حجم ثابت به ترتیب C_{MP} و C_{MV} است. اثبات می‌شود که در یک فرایند بی‌دررو برای گاز کامل PV^{γ} ثابت است که $\gamma = \dfrac{C_{MP}}{C_{MV}}$ و همواره $\gamma > ۱$. دمای دستگاه در نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ را به ترتیب $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$ و $T_۴$ می‌نامیم. فشار دستگاه در نقاط فوق به ترتیب $P_۱$، $P_۲$، $P_۲$ و $P_۱$ است.

آ) در فرایند بی‌دررو برای گاز کامل کمیت PT^{α} ثابت است. α را بر حسب γ حساب کنید.

ب) در میان دماهای $T_۱$ تا $T_۴$ یکی بیشترین دمای دستگاه T_H و دیگری کمترین دمای دستگاه T_C است. $T_۱$ تا $T_۴$ را بر حسب T_H، T_C، $P_۱$، $P_۲$ و γ به دست آورید.

پ) کاری که گاز در یک چرخه انجام می‌دهد، $|W|$ را بر حسب T_H، T_C، $P_۱$، $P_۲$، C_{MP} و γ به دست آورید. بازده چرخه را بر حسب γ و $r = \dfrac{P_۲}{P_۱}$ به دست آورید.

در ادامه فرض کنید با ثابت نگه داشتن T_H و T_C می‌توان $P_۱$ و $P_۲$ را متغیر در نظر گرفت.

ت) به ازای چه مقادیری از r کار $|W|$ برابر صفر است؟

ث) در محدوده‌ی مجاز r (بین دو مقداری که $|W|$ برابر صفر است) بازده بیشینه‌ی چرخه چقدر است؟

ج) بیشینه‌ی $|W|$ به ازای چه مقداری از r اتفاق می‌افتد؟ بیشینه‌ی $|W|$ چقدر است؟

چ) در وضعیتی که $|W|$ بیشینه است بازده دستگاه چقدر است؟

ح) بازده ماشین کارنویی که بین T_H و T_C کار می‌کند چند برابر بازده قسمت چ است؟

بسمه تعالی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- قبل از شروع آزمون دقت کنید که وسایل ذکر شده در صورت سوال عملی، به طور کامل در اختیار شما قرار گرفته باشد. در صورت بروز مشکل مراقبین را مطلع نمایید.

۲- از آنجا که ممکن است تا پایان آزمون عملی به وسایلی که در اختیار شما قرار داده شده نیاز داشته باشید، هنگام کار با آنها دقت کنید. در صورت وجود مشکل در ابزارهای آزمایش، از مسوول حوزه درخواست کنید آن را تعویض نماید.

۳- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.

۴- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.

۵- پاسخ سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۶- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت.

۷- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

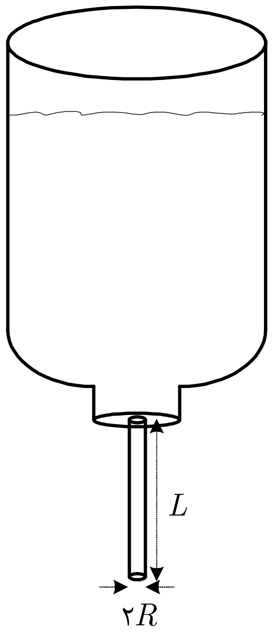
۸- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۹- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

تعیین نسبت قطر داخلی دو نوع مختلف سرسوزن

وسایل آزمایش

یک بطری آب معدنی نیم لیتری، دوعدد مخزن سرنگ ۲۵ cc به عنوان استوانه مدرج، یک عدد در بطری آب معدنی که از میان آن دو لوله از جنس نی آشامیدنی عبور کرده است، دو عدد سرسوزن که در داخل نی‌ها قرار داده شده (نیازی به برداشتن پوشش پلاستیکی محافظ سرسوزن‌ها نیست)، دو عدد لیوان یک بار مصرف برای جمع‌آوری آب‌های اضافه، یک عدد خط کش، دستمال کاغذی.



(شکل ۱)

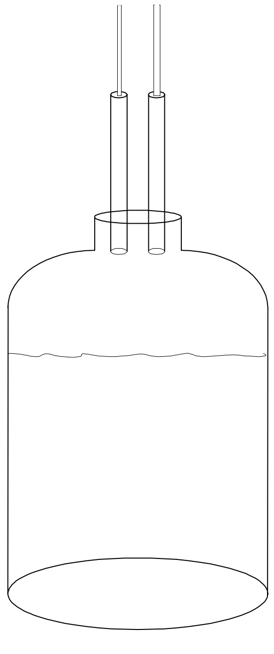
مقدمه

اگر Q حجم سیال عبور کرده در واحد زمان (آهنگ جریان) از لوله‌ای به شعاع R و طول L باشد (شکل ۱)، بنا به معادله پوازی داریم :

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8hL}$$

که در آن ΔP اختلاف فشار در دو سر لوله‌ی به طول L و h پارامتر ثابتی است که به خواص فیزیکی سیال بستگی دارد و گرانروی نامیده می‌شود.

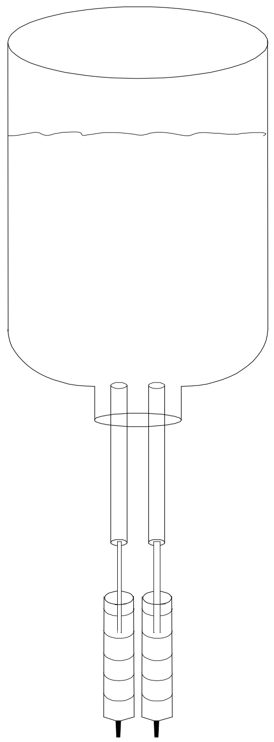
توضیح وسایل آزمایش



(شکل ۲)

۱- برای این که بتوانیم دو عدد نی را به طور هم‌زمان داخل بطری آب قرار دهیم روی یک در بطری که در اختیار شما قرار داده‌ایم قبلاً دو سوراخ ایجاد کرده‌ایم که از وسط آن‌ها نی آشامیدنی عبور کرده است. در انتهای بیرونی نی‌ها دو عدد سر سوزن که طول آنها یکسان و قطر داخلی سوراخ آنها متفاوت است نصب کرده‌ایم. شما باید در معمولی بطری آب را باز کرده و جای آن در بطری مذکور را محکم ببندید (شکل ۲).

۲- پس از بستن در بطری (شامل نی‌ها) به بطری، اگر آن را برگردانید آب می تواند از سرسوزن‌ها خارج شود. با فشردن آهسته‌ی بطری آب، آهنگ جریان آب از سرسوزن‌ها افزایش می‌یابد. فشردن بطری باید پیوسته باشد به طوری که در تمام مدت جمع‌آوری آب در هر مرحله، جریان آب در هر دو سوزن برقرار باشد و قطره‌قطره نشود. متغیر بودن فشار دست روی بطری مشکلی ایجاد نمی کند، چون همواره ΔP برای هر دو سوزن یکسان است. به علت متفاوت بودن شعاع داخلی سوزن‌ها میزان آب خارج شده از آنها با هم متفاوت است.



(شکل ۳)

۳- برای اندازه‌گیری آب خارج شده از سوزن‌ها دو عدد مخزن سرنگ ۲۵ cc را می‌توان هم‌زمان زیر سوزن‌ها گرفت (شکل۳). فرض کنید در مدت t با فشردن بطری آب، سرنگ‌های ۱ و ۲ به ترتیب تا ارتفاع h_1 و h_2 از آب پر شده باشند. اگر A سطح مقطع داخلی مخزن‌های سرنگ باشد آهنگ جریان آب خارج شده از سر سوزن‌ها به ترتیب $Q_1 = \frac{Ah_1}{t}$ و $Q_2 = \frac{Ah_2}{t}$ است. سرسوزن زرد رنگ را شماره ۱ و سرسوزن سبز رنگ را شماره ۲ بگیرید.

هدف ما در این آزمایش رسم نمودار h_1 برحسب h_2، محاسبه‌ی شیب خط و سرانجام به دست آوردن نسبت شعاع داخلی سرسوزن ها است.

آزمایش

۱- قبل از انجام آزمایش با استفاده از رابطه‌ی پوازی و روابط Q_1 و Q_2 بر حسب h_1 و h_2، نسبت $\frac{h_1}{h_2}$ را به دست آورید و در جدول ۱ پاسخ‌نامه وارد کنید.

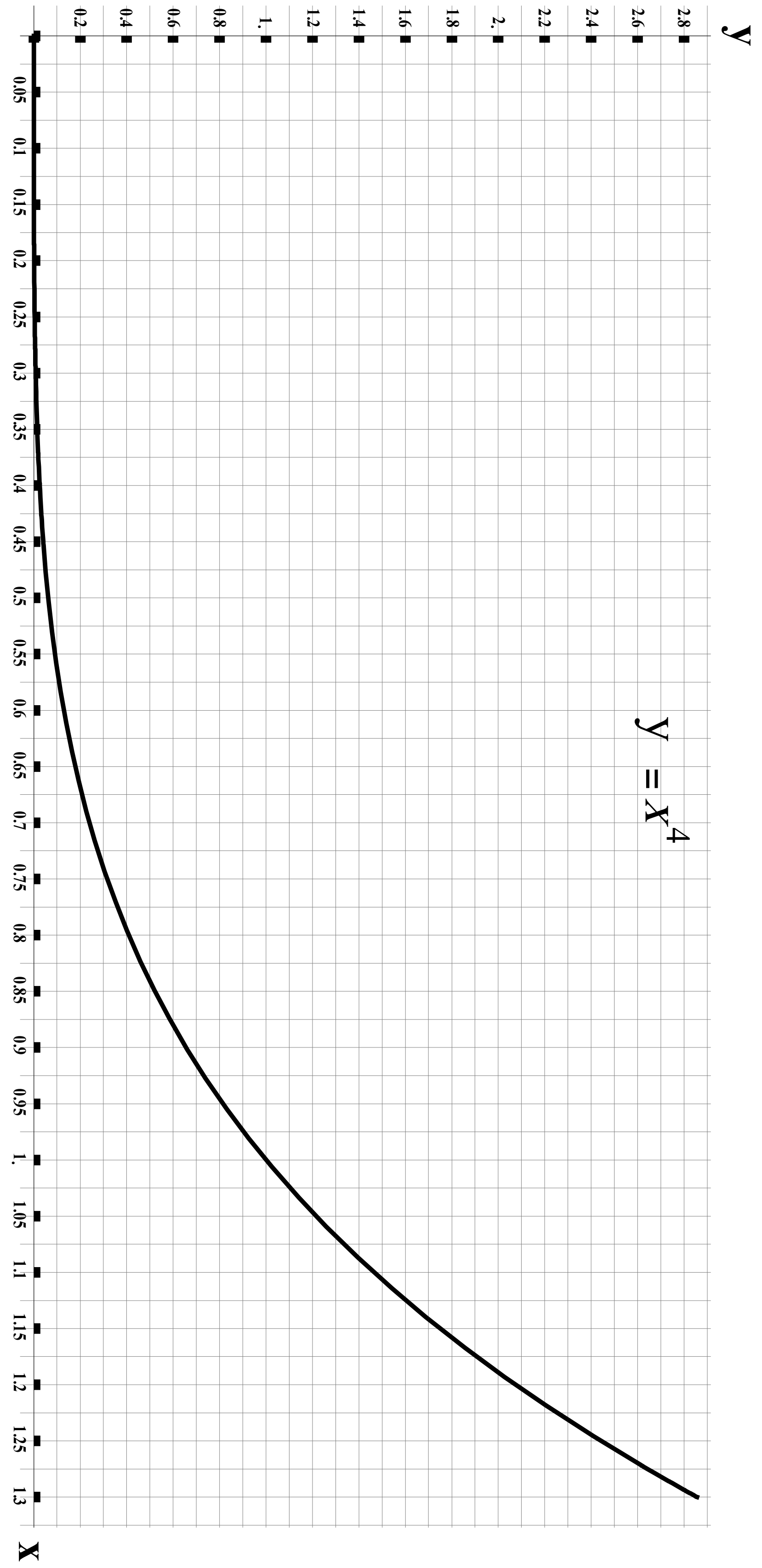
۲- با برگرداندن بطری آب معدنی و قرار دادن سرنگ‌ها در زیر هر یک از سوزن‌ها مقداری از آب بطری را به طور هم‌زمان در دو سرنگ تخلیه کنید، به طوری که h_1 ارتفاع آب خارج شده از سرسوزن زرد حدود ۱۰ میلی‌متر شود. در همین حال ارتفاع آب خارج شده از سرسوزن سبز یعنی h_2 را نیز اندازه‌گیری کنید و نتایج را در جدول ۲ وارد کنید. همین کار را برای پنج ارتفاع دیگر h_1 و h_2 انجام دهید و در جدول ۲ وارد کنید. تفاوت مقادیر h_1 از یکدیگر حدود ۱۰ میلی‌متر باشد. **توصیه می‌شود قبل از انجام این قسمت ابتدا یک بار نحوه‌ی تخلیه‌ی آب بطری از سرسوزن‌ها در سرنگ‌ها را تمرین کنید.**

۳- نمودار h_1 بر حسب h_2 را در پاسخ‌نامه رسم کنید. بهترین خطی که از مبدا مختصات و نقاط روی نمودار می‌گذرد را رسم کنید. شیب خط را به دست آورید و در جدول ۳ پاسخ‌نامه بنویسید.

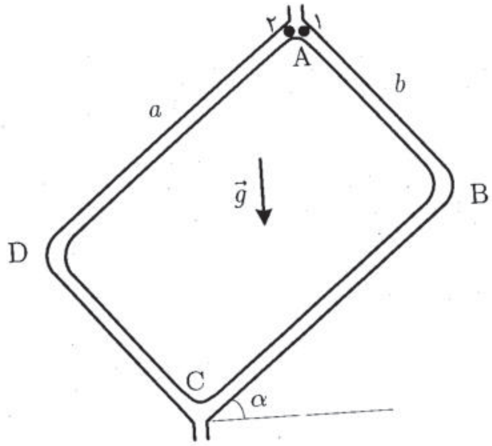
۴- نسبت شعاع داخلی سوزن‌ها، $\frac{R_1}{R_2}$ را به دست آورید. برای این کار از نمودار تابع $y = x^4$ که ضمیمه‌ی سوال است استفاده کنید. مقدار $\frac{h_1}{h_2}$ را روی محور y و مقدار $\frac{R_1}{R_2}$ را روی محور x بخوانید. پاسخ نهایی خود برای $\frac{R_1}{R_2}$ را در جدول ۳ پاسخ‌نامه وارد کنید.

معاونت دانش پژوهان جوان

کد ملی:



۱)



الف) اگر t_1 زمان رسیدن گلوله ۱ از A تا B و v_B سرعت آن در B باشد

$$b = \frac{1}{2} g \cos\alpha \, t_1^2 \quad , \quad v_B = g \cos\alpha \, t_1$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2b}{g\cos\alpha}} \quad , \quad = \sqrt{2gb\cos\alpha}$$

اگر t'_1 زمان رسیدن گلوله ۱ از B تا C باشد

$$a = \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t_1'^2 + \sqrt{2bg\cos\alpha}\, t'_1$$

$$t'_1 = \frac{1}{g\sin\alpha}\left(-\sqrt{2bg\cos\alpha} + \sqrt{2g(b\cos\alpha + a\sin\alpha)}\right)$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{2b}{g\cos\alpha}} + \frac{1}{g\sin\alpha}\left(-\sqrt{2bg\cos\alpha} + \sqrt{2g(b\cos\alpha + a\sin\alpha)}\right)$$

ب) با تبدیل $a \leftrightarrow b$ و $\sin\alpha \leftrightarrow \cos\alpha$

$$T_2 = \sqrt{\frac{2a}{g\sin\alpha}} + \frac{1}{g\cos\alpha}\left(-\sqrt{2ag\sin\alpha} + \sqrt{2g(a\sin\alpha + b\cos\alpha)}\right)$$

پ)

$$T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{a\sin\alpha} + \sqrt{b\cos\alpha} - \sqrt{a\sin\alpha + b\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$$\Downarrow$$

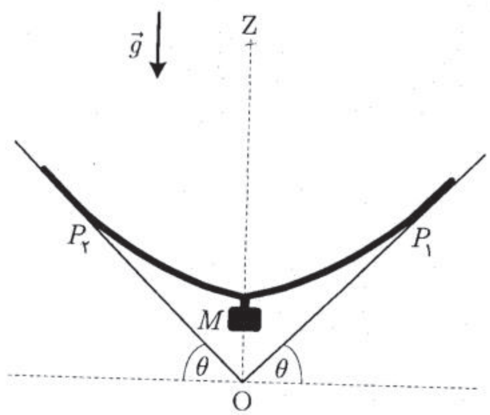
$$f(a,b,\alpha) = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{a\sin\alpha} + \sqrt{b\cos\alpha} - \sqrt{a\sin\alpha + b\cos\alpha}\right)$$

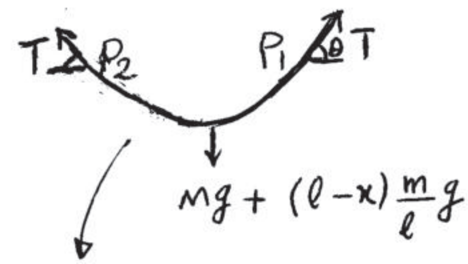
$f(a,b,\alpha) > 0$ اما

بنابراین برای این که $T_1 - T_2 < 0$ باید $\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha} < 0$

یعنی $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

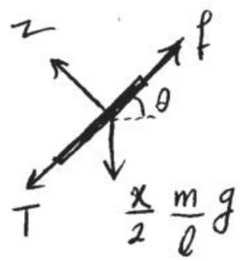
۴) آ) نیروهای وارد بر قسمتی از حلقه که روی سطح شیبدار نیست مطابق شکل است





در راستای قائم $2T\sin\theta - Mg - (l-x)\frac{m}{l}x = 0$

بنابراین $T = \frac{g}{2\sin\theta}\left(M + \left(1-\frac{x}{l}\right)m\right)$



ب) نیروهای وارد بر تکه های روی سطح مطابق شکل،

و در آستانه ی لغزش داریم

$$\begin{cases} f - T - \frac{x}{2}\frac{m}{l}g\sin\theta = 0 \\ f = \mu N \\ N - \frac{x}{2}\frac{m}{l}g\cos\theta \end{cases}$$

از سوی دیگر اگر جسمی (مانند حلقه ب) روی سطح شیبدار α در آستانه ی لغزش باشد

$$\mu = \tan\alpha$$

بنابراین از معادلات اخیر

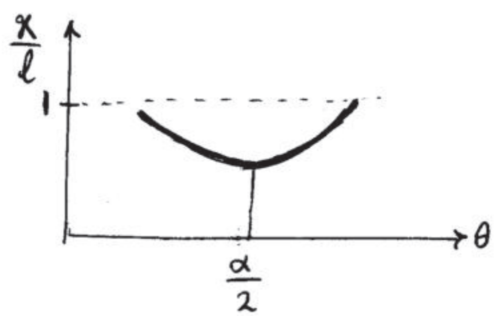
$$\frac{x}{l} = \left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + \cos(\alpha-2\theta)}$$

نمودار x برحسب θ حول $\theta = \frac{\alpha}{2}$ متقارن است. همچنین از $\frac{dx}{d\theta} = 0$ به دست می آید $\theta = \frac{\alpha}{2}$ و نمودار در این نقطه کمینه است.

$$x_{min} = x\Big|_{\theta=\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{min} = l\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$



پ) به ازای $\theta = 0$ و $\theta = \alpha$ ، داریم $x > l$ که قابل قبول نیست. بنابراین

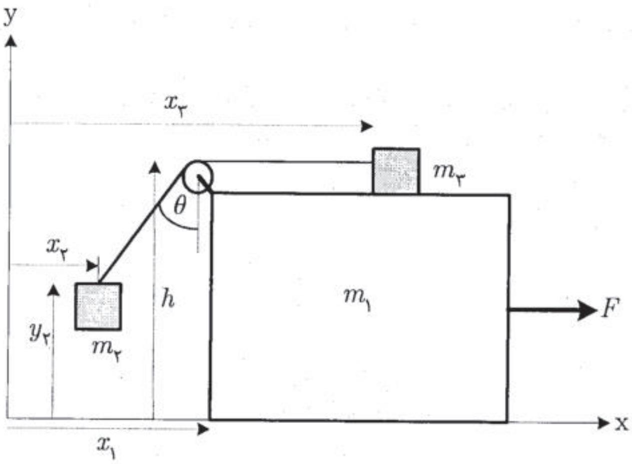
محدوده‌ی مجاز θ جایی است که $0 < x \leq l$ بنابراین باید

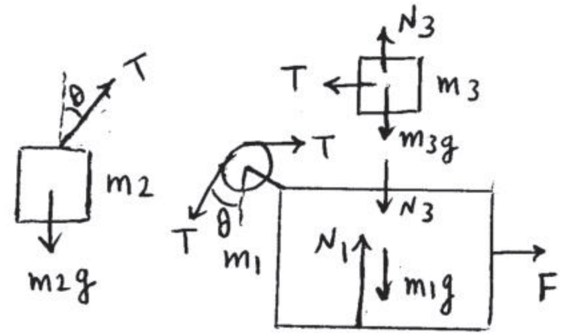
$$\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos(\alpha-2\theta)} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{2M}{m}+1\right)\cos\alpha \leq \cos(\alpha-2\theta)$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2}\left(\alpha-\cos^{-1}\left[\left(1+\frac{2M}{m}\right)\cos\alpha\right]\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(\alpha+\cos^{-1}\left[\left(1+\frac{2M}{m}\right)\cos\alpha\right]\right)$$

۳) آ) نیروهای وارد بر هر جسم در شکل نشان داده شده است.





m_1 : $F + T - T\sin\theta = m_1 a_1$

m_2 : $\begin{cases} T\cos\theta - m_2 g = m_2 a_{2y} \\ T\sin\theta = m_2 a_{2x} \end{cases}$

m_3 : $-T = m_3 a_3$

ب)

$$(x_3 - x_1) + (x_1 - x_2)/\sin\theta = \ell$$

پس از دو بار مشتق‌گیری نسبت به زمان : $a_3 \sin\theta + a_1 (1-\sin\theta) - a_{2x} = 0$

پ)

$$\tan\theta = \frac{x_1 - x_2}{h - y_2}$$

پس از دو بار مشتق‌گیری نسبت به زمان : $a_1 \cos\theta - a_{2x} \cos\theta + a_{2y} \sin\theta = 0$

ت)

$$a_1 = g \tan\theta$$

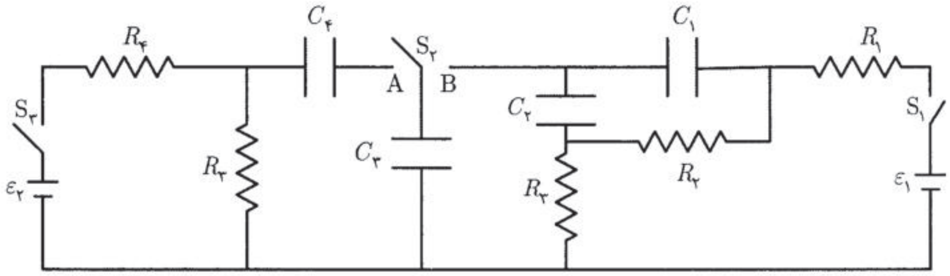
$$F = \left(m_1 \tan\theta - \frac{m_2 m_3 (1-\sin\theta)^2}{(m_2+m_3)\cos\theta} \right) g$$

سایر مجهولات که در سؤال خواسته نشده عبارتند از

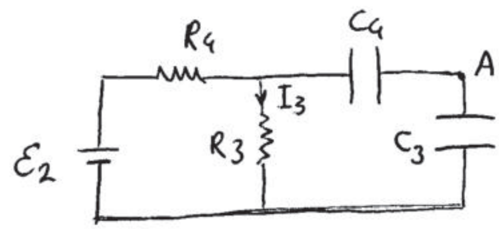
$$a_{2x} = \frac{m_3 g}{m_2+m_3} (1-\sin\theta) \tan\theta \quad , \quad a_{2y} = -\frac{m_2 + m_3 \sin\theta}{m_2+m_3} g$$

$$a_3 = -\frac{m_2 g}{m_2+m_3} \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \quad و \quad T = \frac{m_2 m_3 g}{m_2+m_3} \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

۱۲) ٤)

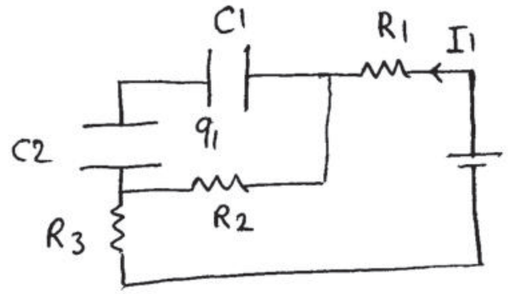


الف) در ابتدا که کلید S_2 به A وصل می‌شود دو قسمت مدار مطابق شکل به صورت جداگانه عمل می‌کنند.



پس از زمان طولانی

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2}{R_3+R_4} \Rightarrow q_3 = \frac{R_3}{R_3+R_4}\,\frac{C_3C_4}{C_3+C_4}\,\varepsilon_2$$

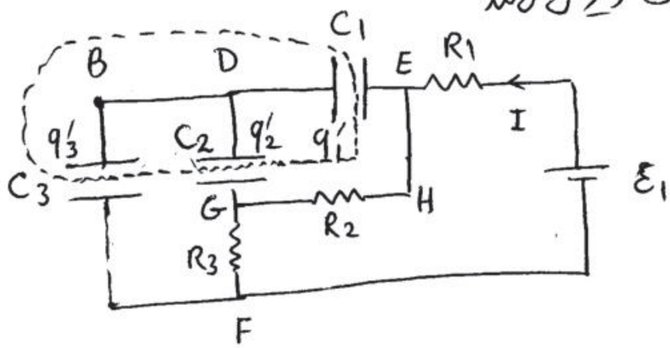


پس از زمان طولانی

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1+R_2+R_3}$$

$$q_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2+R_3}\,\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\,\varepsilon_1$$

ب) در این حالت مدار به صورت زیر عمل می‌کند



پس از گذشت زمان طولانی

$$I = \frac{\varepsilon_1}{R_1+R_2+R_3}$$

اختلاف پتانسیل نقطه‌های E و F از مسیر EBF و EGF :

$$① \quad \frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_3}{C_3} = (R_2+R_3)I$$

اختلاف پتانسیل نقطه‌های E و G از مسیر EDG و EHG :

$$② \quad \frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} = R_2 I$$

با توجه به اینکه بار روی صفحه‌هایی که داخل نقطه‌چین هستند در ابتدای وصل شدن کلید S_2 به B و پس از زمان طولانی یکسان است یعنی:

$$③ \quad -q'_1 + q'_2 + q'_3 = -q_1 + q_2 + q_3$$

پس از حذف q'_2 بین دو معادله‌ی ۲ و ۳ و قرار دادن I در آن،
و نیز قرار دادن I در معادله‌ی ۱ خواهیم داشت

$$\begin{cases} \dfrac{q'_1}{C_1} + \dfrac{q'_3}{C_3} = \dfrac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}\varepsilon_1 \\ q'_1\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right) - \dfrac{q'_3}{C_2} = \dfrac{-q_3}{C_2} + \dfrac{R_2}{R_1+R_2+R_3}\varepsilon_1 \end{cases}$$

پ) به ازای $C_1 = C_2 = C_3 = C$ و $R_1 = R_2 = R_3 = R$ خواهیم داشت

و $q_3 = \frac{1}{4}C\varepsilon_2$

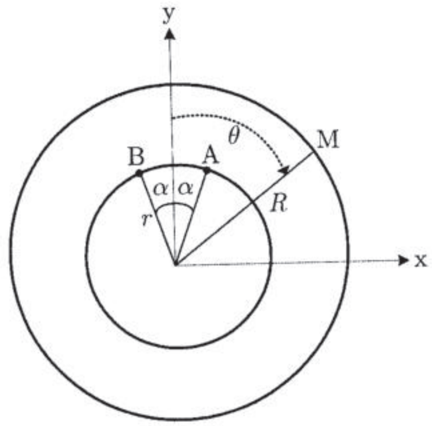
$$\begin{cases} q'_1 + q'_3 = \frac{2}{3}C\varepsilon_1 \\ 2q'_1 - q'_3 = \frac{1}{3}C\varepsilon_1 - \frac{1}{4}C\varepsilon_2 \end{cases}$$

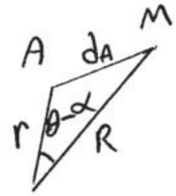
$$\Downarrow$$

$$q'_1 = \frac{1}{3}C\varepsilon_1 - \frac{1}{12}C\varepsilon_2$$

$$q'_3 = \frac{1}{3}C\varepsilon_1 + \frac{1}{12}C\varepsilon_2$$

۱۲ /۵





$$d_A = \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}$$

ب)

$$d = d_B - d_A$$

$$d = \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta+\alpha)} - \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}$$

پ)

$$d = R\left(1-2\frac{r}{R}\cos(\theta+\alpha)+\frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} - R\left(1-\frac{2r}{R}\cos(\theta-\alpha)+\frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}$$

$$d \approx R\left(1-\frac{2r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right)^{1/2} - R\left(1-\frac{2r}{R}\cos(\theta-\alpha)\right)^{1/2}$$

$$d \approx R\left(1-\frac{r}{R}\cos(\theta+\alpha)\right) - R\left(1-\frac{r}{R}\cos(\theta-\alpha)\right) = r\left(\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)\right)$$

$$d \approx 2r\sin\alpha\sin\theta$$

ت)

$$|\Delta\phi| = 2\pi\frac{d}{\lambda} \Rightarrow |\Delta\phi| = \frac{4\pi r}{\lambda}\sin\alpha|\sin\theta|$$

ث) در بیشینه‌ها

$$|\Delta\phi| = 2n\pi \quad , n = 0,1,2,\dots$$

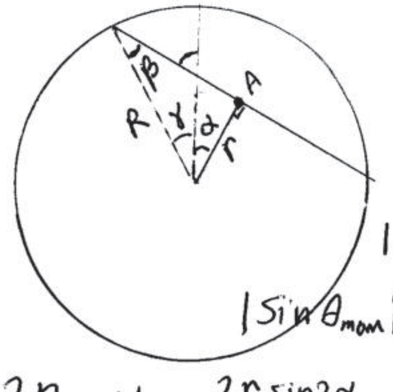
$$\Downarrow$$

$$|\sin\theta| = \frac{n\lambda}{2r\sin\alpha} \Rightarrow \theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{2r\sin\alpha}\right)$$

ج) در کمینه‌ها

$$|\Delta\phi| = (2n+1)\pi \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$|\sin\theta| = \frac{(2n+1)\lambda}{4r\sin\alpha} \Rightarrow \theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{(2n+1)\lambda}{4r\sin\alpha}\right)$$



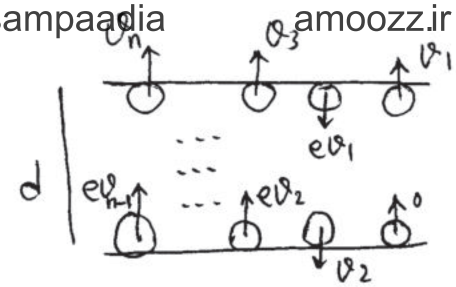
چ) محدوده‌ی تغییر θ مطابق شکل برابر 2γ است.

اما $\sin\beta = \frac{r}{R}$ و $\gamma+\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha$.

بنابراین $\sin\gamma = \cos(\alpha+\beta)$ ، یعنی $|\sin\theta_{max}| = |\sin\gamma|$

اگر به تقریب $\beta \approx 0$ باشد آنگاه $\gamma \approx \frac{\pi}{2}-\alpha$ و $|\sin\theta_{max}| \approx \cos\alpha$

و $n_{max} = \frac{r\sin2\alpha}{\lambda}$ و تعداد نوارهای روشن خواهد شد $2n_{max}+1 = \frac{2r\sin2\alpha}{\lambda}+1$



۶۰) آ) شتاب هر توپ که دارای بار q و جرم m است همواره ثابت است و برابر $a=\frac{q\mathcal{E}}{md}$ می باشد.

اگر در ابتدا هر توپ با سرعت صفر از صفحه پایین جدا شود و سرعتش در هنگام رسیدن به صفحه بالایی v_1 باشد:

$$v_1^2-0^2=2ad$$

و اگر t_1 زمان رسیدن این توپ به صفحه بالایی باشد:

$$d=\frac{1}{2}at_1^2$$

$$\Downarrow \quad v_1=\sqrt{\frac{2q\mathcal{E}}{m}} \quad \text{و} \quad t_1=\sqrt{\frac{2md^2}{q\mathcal{E}}}$$

ب) با توجه به شکل در دفعه دلخواه n، توپ با سرعت ev_{n-1} از یک صفحه جدا می شود و با سرعت v_n به صفحه دیگر می رسد به طوری که $v_n^2-e^2v_{n-1}^2=2ad$.

این رابطه را از دفعه اول $n=1$ تا دفعه kام $n=k$ می نویسیم. به خاطر داشته باشیم که $v_0=0$ است

$$v_1^2-e^2v_0^2=2ad \qquad \times(e^2)^{k-1}$$
$$v_2^2-e^2v_1^2=2ad \qquad \times(e^2)^{k-2}$$
$$\vdots$$
$$v_{k-1}^2-e^2v_{k-2}^2=2ad \qquad \times(e^2)^1$$
$$v_k^2-e^2v_{k-1}^2=2ad \qquad \times(e^2)^0$$

اگر معادله ها را به ترتیب از آخر به اول در $(e^2)^0$، $(e^2)^1$، ...، $(e^2)^{k-1}$ ضرب و سپس با هم جمع کنیم خواهیم داشت

$$v_k^2=2ad\left(1+e^2+e^4+\dots+e^{2(k-1)}\right)$$

بنابراین

$$\boxed{v_k=\sqrt{\frac{2q\mathcal{E}}{m}}\sqrt{\frac{1-(e^2)^k}{1-e^2}}}$$

و اگر t_k زمان طی مسافت بین دو صفحه در دفعه kام باشد

$$v_k=at_k+ev_{k-1} \Rightarrow \boxed{t_k=\sqrt{\frac{2md^2}{q\mathcal{E}}}\left(\sqrt{\frac{1-e^{2k}}{1-e^2}}-e\sqrt{\frac{1-e^{2(k-1)}}{1-e^2}}\right)}$$

پ) اگر مساحت هر صفحه A باشد، کل باری که در هر مرحله بین دو صفحه انتقال می یابد $Q=nAq$ است. در مرحله kام به طور متوسط پس از زمان t_k بار Q منتقل می شود. بنابراین طبق $I_k=\frac{Q}{t_k}$:

$$\boxed{I_k=nA\sqrt{\frac{q^3\mathcal{E}}{2md^2}}\left(\sqrt{\frac{1-e^{2k}}{1-e^2}}+e\sqrt{\frac{1-e^{2(k-1)}}{1-e^2}}\right)}$$

ت) از آنجا که $0<e^2<1$ لذا $(e^2)^\infty=0$ و در نتیجه

$$I_\infty = nA\sqrt{\frac{q^3\varepsilon}{2md^2}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

ث) اندازه‌ی اتلاف انرژی در برخورد kام برای یک توپ:

$$\Delta K_k = \frac{1}{2}m v_k^2 - \frac{1}{2}m(e v_k)^2$$
$$= q\varepsilon(1-e^{2k})$$

و برای همه‌ی توپ‌ها $\boxed{nAq\varepsilon(1-e^{2k})}$ است.

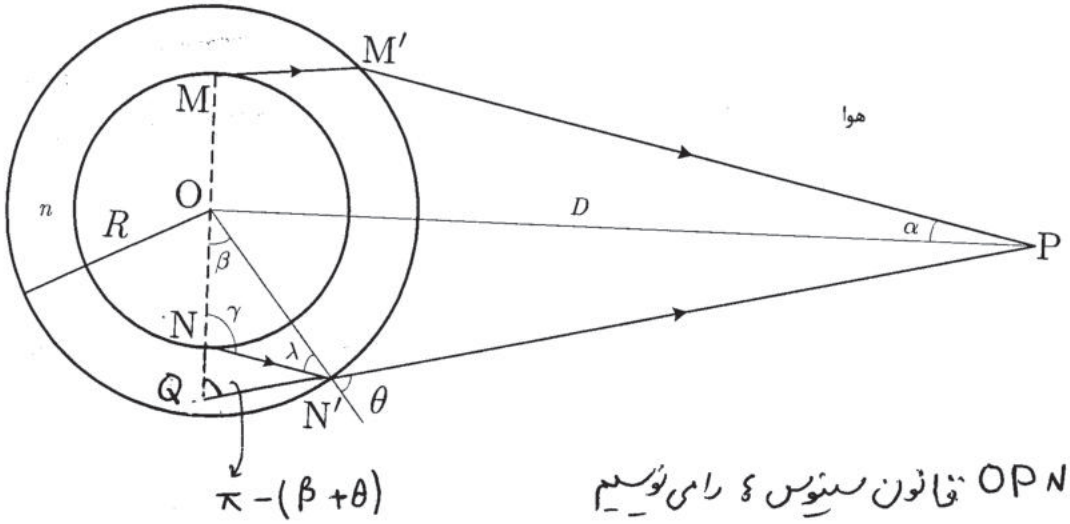
$$P_k = \frac{nAq\varepsilon(1-e^{2k})}{t_k} \Rightarrow \boxed{P_\infty = nA\sqrt{\frac{(q\varepsilon)^3}{2md^2}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}$$

ج) آهنگ انجام کار به وسیله‌ی باتری εI_∞ است که برابر است با

$$\varepsilon I_\infty = nA\sqrt{\frac{(q\varepsilon)^3}{2md^2}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

که با P_∞ برابر است.

۷) آ



در مثلث OPN' قانون سینوس ها را می‌نویسیم

$$\boxed{\sin\theta=\frac{D}{R}\sin\alpha} \Leftarrow \frac{\sin\alpha}{R}=\frac{\sin\theta}{D}$$

قانون اسنل

$$\boxed{\sin\lambda=\frac{D}{Rn}\sin\alpha} \Leftarrow n\sin\lambda=\sin\theta$$

اما در مثلث OPN' ، θ زاویه خارجی است و برابر است با

$$\theta=\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\beta=\cos(\theta-\alpha) \Rightarrow \sin\beta=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$$

$$\boxed{\sin\beta=\frac{D}{R}\sin^2\alpha+\cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{D}{R}\right)^2\sin^2\alpha}}$$

در مثلث ONN' :

$$\sin\gamma=\sin(\beta+\lambda) \Leftarrow \pi-\gamma=\beta+\lambda$$

$$\sin\gamma=\sin\beta\cos\lambda+\cos\beta\sin\lambda$$

باز هم با استفاده از $\theta=\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$: بنابراین $\cos\beta=\sin(\theta-\alpha)$

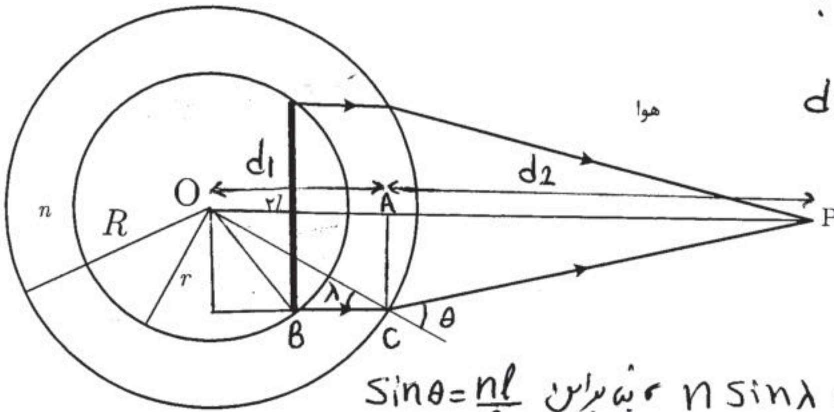
$$\sin\gamma=\sin\beta\cos\lambda+\sin\lambda\left(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\gamma=&\left(\frac{D}{R}\sin^2\alpha+\cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{D}{R}\right)^2\sin^2\alpha}\right)\sqrt{1-\left(\frac{D}{Rn}\right)^2\sin^2\alpha}\\&+\frac{D}{Rn}\sin^2\alpha\left(\frac{D}{R}\cos\alpha-\sqrt{1-\left(\frac{D}{R}\right)^2\sin^2\alpha}\right)\end{aligned}}$$

ب) در مثلث ONN' : $\frac{\sin\lambda}{ON}=\frac{\sin\gamma}{R}$ بنابراین

$$MN=2R\frac{\sin\lambda}{\sin\gamma}$$

پ) در مثلث OAC :



$d_1 = \sqrt{R^2 - l^2}$ و $\sin\lambda = \frac{l}{R}$

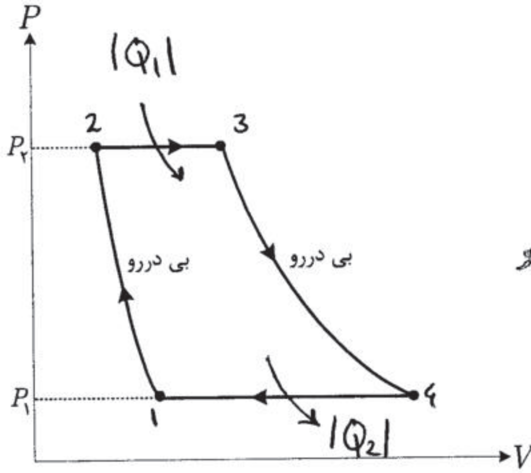
بنا به قانون اسنل: $n\sin\lambda = \sin\theta$ ، بنابراین $\sin\theta = \frac{nl}{R}$

در مثلث PAC : $d_2 = l\cot(\theta - \lambda)$ ، در نتیجه

$$OP = d_1 + d_2 = R\sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}} + l\,\frac{\sqrt{1 - \frac{n^2 l^2}{R^2}}\sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}} + n\frac{l^2}{R^2}}{\frac{nl}{R}\sqrt{1 - l^2/R^2} - \frac{l}{R}\sqrt{1 - \frac{n^2 l^2}{R^2}}}$$

پس از ساده کردن:

$$OP = \frac{R}{\sqrt{1 - l^2/R^2} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{l^2}{R^2}}}$$



۸) آ) در فرآیند بی دررو: $PV^{\gamma} =$ ثابت

اما برای گاز کامل $PV=nRT$ پس برای

$$P\left(\frac{nRT}{P}\right)^{\gamma} = \text{ثابت}$$

پس برای گاز کامل $PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ در یک فرآیند بی دررو ثابت است و

$$\boxed{\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

ب) $\boxed{T_1 = T_C}$ و $\boxed{T_3 = T_H}$ و نیز

برای دو فرآیند بی دررو: $P_2 T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1 T_4^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ و $P_1 T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_2 T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{T_4 = T_H\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \qquad \boxed{T_2 = T_C\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

پ)

$$|W| = |Q_1| - |Q_2|$$

$$|W| = C_{mp}\left(T_H - T_2\right) - C_{mp}\left(T_4 - T_C\right)$$

$$|W| = C_{mp}\left(T_H + T_C - T_C r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_H r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)$$

$$\boxed{|W| = C_{mp}\left(T_H - T_C r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\left(1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

ت) $|W| = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = 1}$, $\boxed{r_2 = \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$

ث) $\boxed{\eta_{max} = 1 - \frac{T_C}{T_H}}$

ج) $\frac{d|W|}{dr} = 0 \Rightarrow C_{mp}\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma} T_C r^{\frac{-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{\gamma} T_H r^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}}\right) = 0$

$$\Downarrow$$

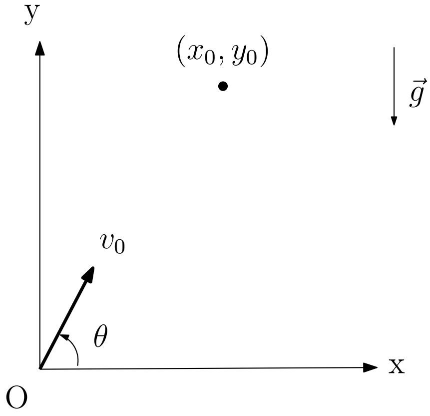
$$\boxed{r_m = \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}$$

$$|W|_{max} = |W|\Big|_{r=r_m} \Rightarrow \boxed{|W|_{max} = C_{mp}\left(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_C}\right)^2}$$

چ) $\eta_m = \eta\Big|_{r=r_m} \Rightarrow \boxed{\eta_m = 1 - \sqrt{\frac{T_C}{T_H}}}$

ح) $\boxed{1 + \sqrt{\frac{T_C}{T_H}}}$

۱) می‌خواهیم پرتابه‌ای را در لحظه‌ی $t = 0$ مطابق شکل از نقطه‌ی O شلیک کنیم تا با هدفی که در لحظه‌ی $t = t_0$ از نقطه‌ی (x_0, y_0) بدون سرعت اولیه رها می‌شود برخورد کند. پرتابه با سرعت اولیه‌ی v_0 در صفحه‌ی قائم تحت زاویه‌ی θ نسبت به سطح افق پرتاب می‌شود. t_0 می‌تواند مثبت یا منفی باشد. فرض کنید از مقاومت هوا صرفنظر می‌شود و $x_0 > 0, y_0 > 0$.



آ) معادلات مکان بر حسب زمان پرتابه، $(x_p(t), y_p(t))$ و هدف، $(x_t(t), y_t(t))$ را بر حسب کمیت‌های معلوم بنویسید.

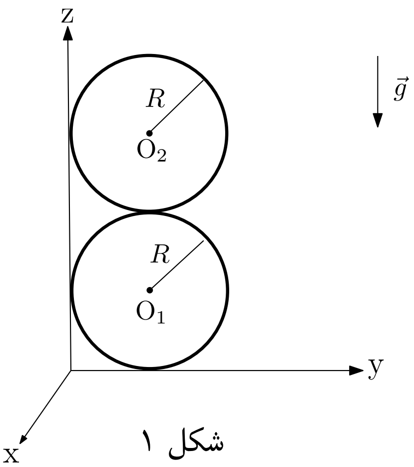
ب) $\tan\theta$ در چه محدوده‌ای باشد تا مسیر پرتابه و مسیر هدف یکدیگر را در بالای سطح افق قطع کنند. برای این که چنین محدوده‌ای وجود داشته باشد چه شرطی روی پارامترهای v_0، x_0، y_0 و g لازم است؟

اکنون فرض کنید $x_0 = 50\,\mathrm{m}$، $y_0 = 100\,\mathrm{m}$، $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}$ و $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

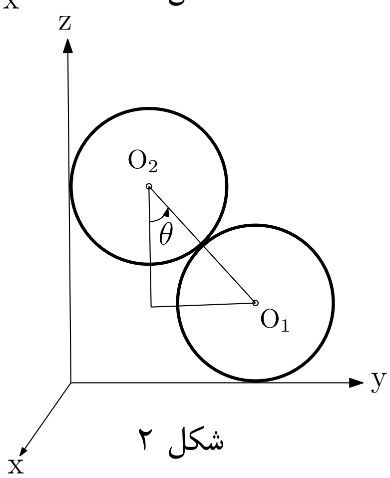
ج) برای این که پرتابه بتواند به هدف اصابت کند t_0 مجاز است در چه بازه‌ای تغییر کند؟

د) به ازای $t_0 = \sqrt{10}\,\mathrm{s}$، زاویه‌ی پرتاب θ را بدست آورید.

۲) دو استوانه‌ی یکسان هر یک به جرم M و به شعاع R مطابق شکل ۱ روی هم قرار گرفته‌اند. استوانه‌ی زیری روی صفحه‌ی x-y قرار گرفته است و هر دو استوانه از یک سمت به دیوار قائمی که صفحه‌ی y-z است تکیه داده‌اند. کلیه‌ی سطوح بدون اصطکاک هستند و هیچ غلتشی صورت نمی‌گیرد. شتاب گرانش در جهت z- است. دستگاه در وضعیت شکل ۱ در تعادل ناپایدار است (سرعت دو استوانه صفر است) ولی با اندک لرزشی از این حالت خارج می‌شود. فرض کنید بعد از خارج شدن از حالت تعادل، انتهای دو استوانه در صفحه‌ی $x = 0$ واقع است و O_1 و O_2 محل محورهای دو استوانه در این صفحه و θ زاویه‌ی خط واصل بین O_1 و O_2 با امتداد قائم در لحظه‌ی دلخواهی باشد. شکل ۲ این وضعیت را نشان می‌دهد.



شکل ۱



شکل ۲

آ) مختصات نقاط O_1 و O_2 را به ترتیب (y_1, z_1) و (y_2, z_2) می‌نامیم. این مختصات را بر حسب R و θ بنویسید.

ب) نیروی سطح قائم بر استوانه‌ی بالایی را N_2، نیروی بین دو استوانه را N و نیروی سطح افقی بر استوانه‌ی زیری را N_1 بنامید. معادلات حرکت نیوتن را در وضعیت شکل ۲ در راستای y و z برای هر دو استوانه بنویسید. رابطه‌ی بین شتاب افقی استوانه‌ی زیری، a_1، و شتاب عمودی استوانه‌ی بالایی، a_2، را بر حسب g و θ بدست آورید.

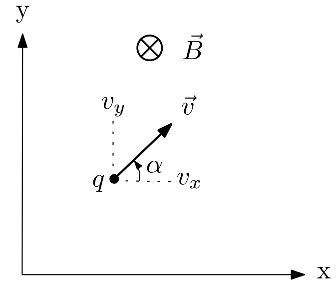
ج) رابطه‌ی پایستگی انرژی مکانیکی را بنویسید و از روی آن $v_1^2 + v_2^2$ را به صورت تابعی از θ و پارامترهای مسئله بدست آورید. v_1 سرعت افقی استوانه‌ی زیری و v_2 سرعت عمودی استوانه‌ی بالایی است.

د) با استفاده از قید در تماس بودن دو استوانه ضمن حرکت، رابطه‌ای بین y_1 و z_2 بدست آورید. با مشتق‌گیری از این رابطه، رابطه‌ی دیگری بین v_1، v_2، y_1 و z_2 بدست آورید. مجدداً از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیرید و با استفاده از نتیجه‌ی قسمت ج) رابطه‌ای بین شتاب‌های a_1 و a_2 بر حسب g و θ بدست آورید. نیروهای $N_1(\theta)$ و $N_2(\theta)$ را در وضعیتی که استوانه‌ها با هم در تماس هستند بدست آورید.

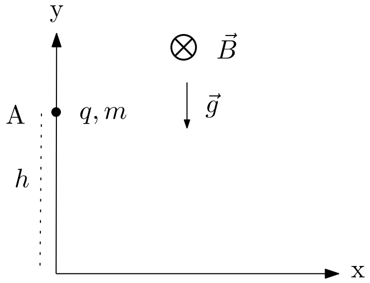
ه) نمودار کمیت‌های $\frac{N_1(\theta)}{Mg}$ و $\frac{N_2(\theta)}{Mg}$ را برای $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ رسم کنید.

و) سرعت نهایی استوانه‌ی زیری و سرعت استوانه‌ی بالایی هنگام رسیدن به صفحه‌ی x-y را حساب کنید.

۳)



آ) ذره‌ای با بار مثبت q در صفحه‌ی x-y با سرعت دلخواه $\vec{v} = (v_x, v_y)$ مطابق شکل حرکت می‌کند که $v_x = v\cos\alpha$ و $v_y = v\sin\alpha$. میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B}$ عمود بر صفحه‌ی شکل و رو به داخل است. مؤلفه‌های نیروی وارد بر ذره از طرف میدان مغناطیسی را بر حسب v_x و v_y بدست آورید.



ب) ذره‌ای به جرم m و بار مثبت q مطابق شکل از نقطه‌ی A به مختصات $(0, h)$ در شتاب گرانش g از حال سکون در لحظه $t = 0$ رها می‌شود. میدان مغناطیسی ثابت B عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل صفحه برقرار است. با نوشتن معادلات حرکت، dv_x/dt و dv_y/dt را بر حسب v_x و v_y بدست آورید.

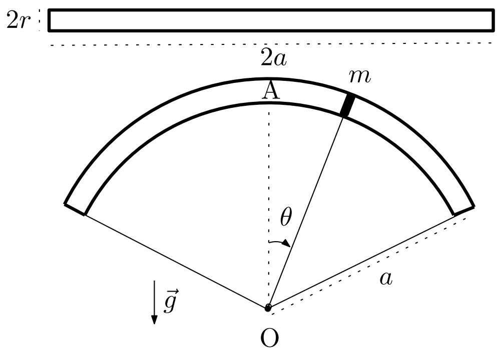
ج) با مشتق‌گیری مجدد از یکی از معادلات و استفاده از معادله‌ی دیگر معادله‌ای مشابه معادله‌ی حرکت نوسانگر هماهنگ برای یکی از مؤلفه‌ها بدست می‌آید. جواب کلی این معادله به صورت $A\sin(\omega t + \phi)$ است. ω را برحسب پارامترهای داده شده‌ی دستگاه بدست آورید. ثابتهای A و ϕ را با توجه به سرعت اولیه‌ی ذره بدست آورید. عبارتهای نهایی $v_x(t)$ و $v_y(t)$ را بنویسید.

د) مؤلفه‌های مکان ذره، $x(t)$ و $y(t)$ را چنان بدست آورید که مشتق زمانی آن‌ها به ترتیب $v_x(t)$ و $v_y(t)$ باشند و در لحظه‌ی $t = 0$ شرایط اولیه‌ی مسئله را برآورده کنند.

ه) شکل مسیر را در صفحه‌ی x-y رسم کنید و محل ذره را در لحظات $t_n = n\pi/\omega$ مشخص کنید.

و) برای حالتی که ذره در لحظه‌ی $t = 0$ از همان نقطه با سرعت اولیه‌ی افقی v_0 در جهت مثبت محور x، پرتاب شود عبارت‌های نهایی سرعت ذره، یعنی $v_x(t)$ و $v_y(t)$ را به دست آورید و سپس قسمت‌های «د)» و «ه)» را حل کنید. معین کنید در چه شرایطی در شروع حرکت نیروی مغناطیسی بزرگ‌تر از نیروی گرانش است و در چه شرایطی وضعیت برعکس است. برای هر دو حالت شکل مسیر را رسم کنید و نقاط مربوط به لحظات t_n را مشخص کنید. فرض کنید $v_0 < \frac{2g}{\omega}$.

۴) لوله‌ی توخالی به شعاع r و طول $2a$ از دو انتها بسته است و r خیلی از a کوچکتر است. لوله را مطابق شکل طوری خم می‌کنیم که محور آن کمانی از دایره به شعاع a شود. این لوله توسط پیستونی به جرم m به دو قسمت تقسیم می‌شود. پیستون می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک در طول لوله حرکت کند. زاویه‌ی θ از خط قائم OA سنجیده می‌شود. شتاب گرانش در امتداد OA و رو به پایین است.



وقتی پیستون در $\theta = 0$ است حجم سمت راست و چپ با هم برابر است. n مول گاز در سمت راست لوله و n مول گاز در سمت چپ لوله در دمای T وجود دارد. فرض کنید پیستون به اندازه‌ی زاویه‌ی θ از خط قائم به راست حرکت کند. حجم قسمتی از لوله که مقابل زاویه‌ی θ است تقریباً $\pi r^2 a\theta$ است.

آ) نیروی کل وارد بر پیستون در امتداد عمود بر سطح آن را بر حسب n، θ، m، g (شتاب گرانش)، a، T و R (ثابت گازها) بدست آورید.

ب) در حالت تعادل رابطه‌ای به صورت $\sin\theta = k(\theta)$ بدست آورید.

ج) فرض کنید $T_c = \dfrac{mga}{2nR}$. در یک نمودار تابع‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ را در حالت $T > T_c$ رسم کنید.

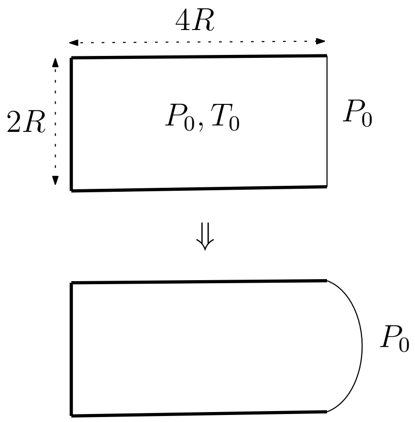
د) تابع‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ را مجدداً در یک نمودار برای حالت $T < T_c$ رسم کنید.

نقطه‌های تقاطع منحنی‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ زاویه‌هایی که پیستون در تعادل است نشان می‌دهد. اگر نیروی کل وارد بر پیستون در زاویه‌ی θ، $F(\theta)$ و یکی از نقاط تعادل $\theta = \theta_0$ باشد، آنگاه این نقطه تعادل پایدار است اگر $\dfrac{dF}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} < 0$ و تعادل ناپایدار است اگر $\dfrac{dF}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} > 0$.

هـ) در حالت $T > T_c$ منحنی‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ در این نقطه‌ها تعادل پایدار است یا ناپایدار؟

و) در حالت $T < T_c$ منحنی‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ در این نقطه‌ها تعادل پایدار است یا ناپایدار؟

۵) یک انتهای استوانه‌ی توخالی حاوی هوا به شعاع R و طول $4R$ مسدود و انتهای دیگر آن با لایه‌ی نازکی از یک مایع (مثل حباب صابون) بسته شده است. فشار هوای بیرون P_0 است. در ابتدا که هوای داخل استوانه در تعادل با هوای بیرون است فشار و دمای هوای داخل P_0 و T_0 است و سطح لایه موازی سطح قاعده‌ی استوانه است.



کشش سطحی لایه γ است. در این مسئله تغییرات دما چندان زیاد نیست به طوری که کشش سطحی را ثابت در نظر می‌گیریم. لطفاً به توضیح انتهای مسئله در مورد نیروی کشش سطحی توجه کنید.

به هوای داخل استوانه که آن را گاز ایده‌آل فرض می‌کنیم به آرامی گرما می‌دهیم، در نتیجه فشار هوای داخل بالا می‌رود و لایه منبسط می‌شود. این فرآیند را آنقدر ادامه می‌دهیم تا لایه به شکل نیم‌کره در آید. سپس فرایند را متوقف می‌کنیم. در این حالت به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

آ) با در نظر گرفتن تعادل نیروهای وارد بر لایه، فشار هوای داخل استوانه را حساب کنید.

ب) دمای هوای داخل استوانه چقدر است؟

ج) کار انجام شده توسط هوای داخل استوانه روی لایه (که باعث افزایش انرژی پتانسیل کشش سطحی آن شده است) چقدر است؟

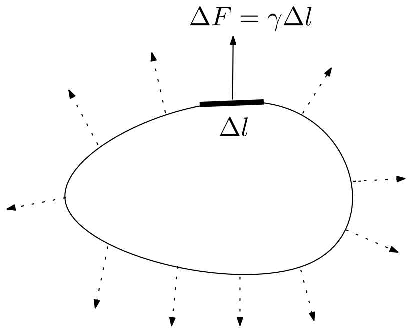
د) کار انجام شده توسط هوای داخل استوانه روی هوای بیرون چقدر است؟

ه) تغییر انرژی داخلی هوای داخل استوانه در این فرآیند چقدر است؟ ظرفیت گرمایی مولی هوا در حجم ثابت $\frac{5}{2}R$ است که R ثابت گازها است.

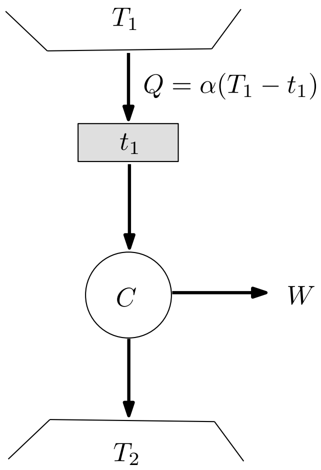
و) فرض کنید در این فرآیند گرمایی از طریق دیواره‌های استوانه و لایه به بیرون هدر نمی‌رود. گرمای داده شده به هوای داخل استوانه در این فرایند چقدر است؟

توضیح:

کشش سطحی مایعات عاملی است که می‌خواهد سطح آزاد مایع را به حداقل برساند. اگر جزء کوچکی از مایع را در نظر بگیرید نیرویی که قسمت‌های مجاور این جزء به آن وارد می‌کنند مماس بر سطح آزاد و عمود بر مرزهای این جزء با قسمت‌های مجاور و به سمت خارج این جزء است. مقدار نیرو، ΔF، متناسب با طول مرز، Δl، است و ضریب تناسب که موسوم به کشش سطحی است با γ نمایش داده می‌شود و یکای آن نیوتن بر متر است. اگر مساحت سطح آزاد مایع به اندازه‌ی ΔA تغییر کند انرژی پتانسیل آن به اندازه‌ی $\gamma\Delta A$ تغییر می‌کند. لایه‌ی نازکی مانند حباب که در واقع دارای دو سطح است وقتی به اندازه‌ی ΔA تغییر می‌کند انرژی پتانسیل آن به اندازه‌ی $2\gamma\Delta A$ تغییر می‌کند. همچنین برای چنین لایه‌ای $\Delta F = 2\gamma\Delta l$. γ از اندازه‌ی سطح لایه مستقل است ولی به دما بستگی دارد.



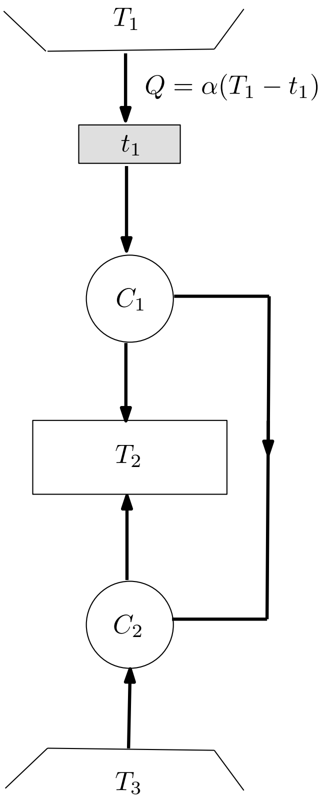
۶) در شکل مقابل گرمای $Q = \alpha(T_1 - t_1)$ از منبع با دمای T_1 به منبع با دمای $t_1(< T_1)$ منتقل می‌شود که α ثابت و مثبت است. بین منبع t_1 و منبع $T_2(< t_1)$ یک ماشین کارنو کار می‌کند که در هر چرخه کار W را انجام می‌دهد.



آ) W را حساب کنید.

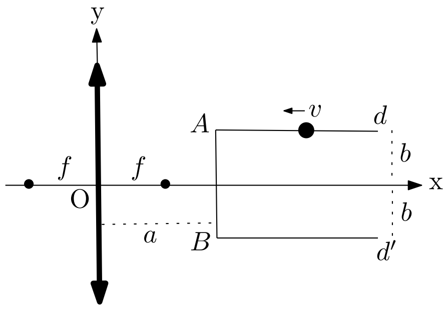
ب) دمای t_1 را چنان بدست آورید که W بیشینه باشد. بیشینه‌ی W را حساب کنید.

دستگاه شکل مقابل را در نظر بگیرید که در آن دمای منبع‌ها در نامساوی $T_3 < T_2 < t_1 < T_1$ صدق می‌کند. در این دستگاه ماشین C_1 و یخچال C_2 با چرخه‌های کارنو کار می‌کنند و مدت زمان طی هر چرخه برای آن‌ها یکسان است. ماشین C_1 گرما را از منبع با دمای t_1 می‌گیرد و بخشی از آن را به منبع T_2 می‌دهد و کار W را تولید می‌کند که آن را به یخچال C_2 می‌دهد. یخچال C_2 نیز مقداری گرما از منبع سرد T_3 می‌گیرد و مقداری گرما نیز به منبع T_2 می‌دهد.



ج) گرمای کلی که به منبع T_2 می‌رسد را حساب کنید.

د) دمای منبع t_1 را چنان تعیین کنید که بیشینه‌ی گرما به منبع T_2 داده شود. این گرمای بیشینه چقدر است؟



۷) ذره‌ای مطابق شکل در مسیر $dABd'$ از فاصله‌ی بسیار دور به یک عدسی همگرا نزدیک می‌شود و مجدداً از آن دور می‌شود. نیم‌خط‌های Ad و Bd' به فاصله‌ی یکسان b از محور عدسی هستند. پاره‌خط AB به فاصله‌ی a از عدسی است که از f، فاصله‌ی کانونی عدسی، بزرگتر است.

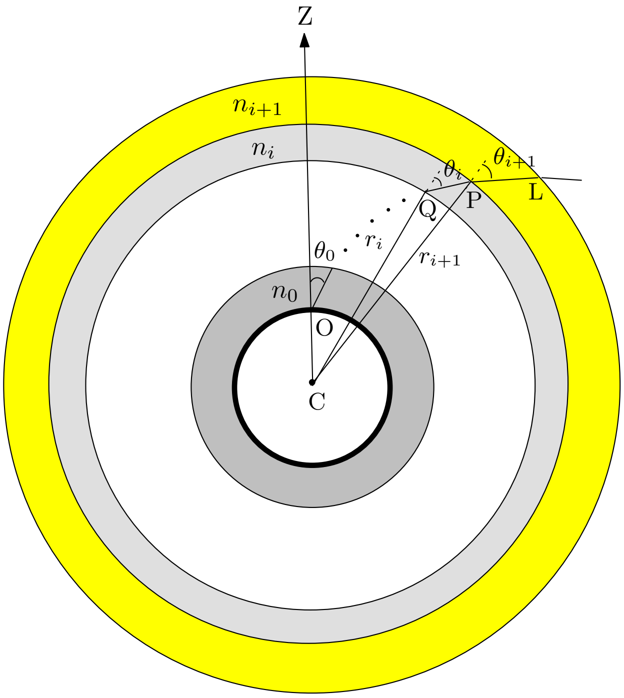
ذره در تمام مسیر با سرعت ثابت حرکت می‌کند که اندازه‌ی آن v است و در لحظه‌ی $t = 0$ در نقطه‌ی A قرار دارد. مبدأ مختصات، O، را رأس عدسی و محور x را محور اصلی عدسی بگیرید.

آ) ذره را یک نقطه نورانی به مختصات x و y بگیرید و x' و y' مختصات تصویر آن را بر حسب x، y و f بدست آورید.

ب) معادلات $x'(t)$ و $y'(t)$ را بر حسب t، a، b و f در قسمت‌های مختلف مسیر بدست آورید.

ج) شکل مسیر تصویر ذره را در پاسخ‌نامه رسم کنید و مختصات نقاط شکستگی مسیر و زمان مربوط به آنها را بدست آورید و در شکل مشخص کنید.

د) مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای تصویر ذره را بر حسب زمان و پارامترهای مسئله بدست آورید.



۸) جو زمین را شامل لایه‌های کروی بگیرید که از سطح زمین به بالا ضریب شکست‌شان کاهش می‌یابد تا این که در نهایت به خلاء می‌رسیم. در شکل، C مرکز زمین و O ناظر روی زمین است و COZ جهت قائم در محل O را نشان می‌دهد. پرتو نوری از بیرون جو وارد جو شده و به ناظر O می‌رسد. فرض کنید دو لایه‌ی نازک مجاور دارای ضریب شکست n_i و n_{i+1} است.

LP قسمتی از این پرتو در محیط n_{i+1} و PQ قسمت دیگری از این پرتو در محیط n_i است. فاصله‌ی Q تا مرکز زمین r_i و فاصله‌ی P تا مرکز زمین r_{i+1} است.

آ) نسبت $\dfrac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i}$ را بر حسب n_i، n_{i+1}، r_i و r_{i+1} بدست آورید.

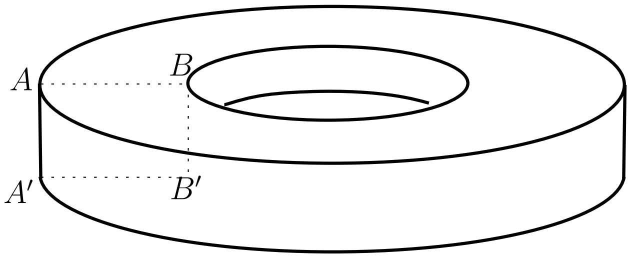
ب) شعاع زمین را R و ارتفاع جو را h بگیرید. فرض کنید ضریب شکست جو در سطح زمین n_0 است. پرتو نور ستاره‌ای در محل ناظر O تحت زاویه‌ی θ_0 دریافت می‌شود. زاویه‌ی ورود آن به جو، θ_∞، چقدر است؟

موضوع آزمایش: مغناطیس

هدف آزمایش: تعیین تعداد قطب‌های یک آهن‌ربای حلقه‌ای و رسم خطوط میدان مغناطیسی در مجاورت سطوح آن

وسایل آزمایش: یک آهن‌ربای کوچک استوانه‌ای شکل با دو قطب مغناطیسی N (سطحی که فرورفتگی دارد) و S و یک آهن‌ربای بزرگ حلقه‌ای با تعداد قطب‌های مغناطیسی بیشتر از ۲.

تذکر: **مراقب باشید آهن‌ربای حلقه‌ای در اثر ضربه یا افتادن روی زمین نشکند زیرا آهن‌ربای دیگری به شما داده نمی‌شود.**

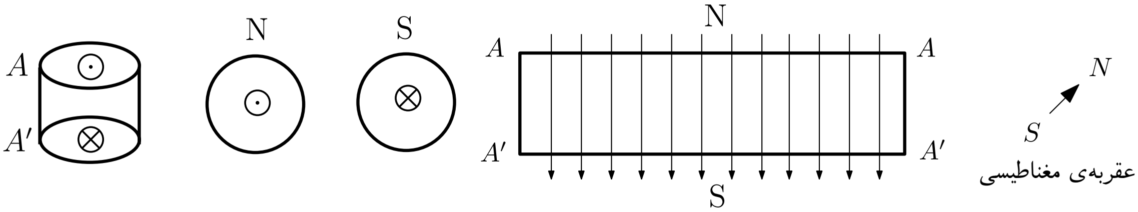


آهن‌ربای حلقه‌ای

آزمایش:

آ) با استفاده از آهن‌ربای کوچک استوانه‌ای تعداد قطب‌های آهن‌ربای حلقه‌ای را تعیین کنید و در پاسخ‌نامه بنویسید.

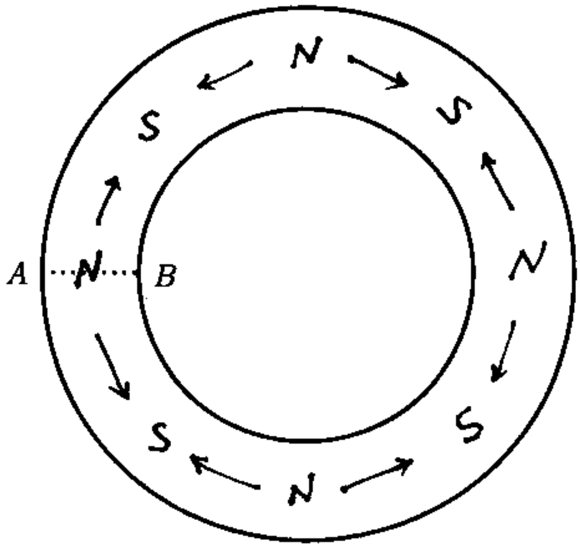
ب) سطح قاعده‌ی بالایی و پایینی آهن‌ربای حلقه‌ای و نیز سطح جانبی داخلی و خارجی آهن‌ربای حلقه‌ای که از یال BB' و AA' بریده شده به صورت مستطیل های $BBB'B'$ و $AAA'A'$ در پاسخ‌نامه رسم شده است. اگر یک عقربه‌ی مغناطیسی را در نقاط متفاوتی از سطح‌های رسم شده در پاسخ‌نامه قرار دهیم، در چه جهتی قرار می‌گیرد؟ روی شکل‌ها نشان دهید. روی شکل‌های مذکور محل قطب‌های دستگاه (N و S) را مشخص کنید. فرض کنید در شکل مربوط به قاعده‌ی بالایی (که اختیاری است) یک قطب N بالای خط AB قرار دارد. همچنین تصویر خطوط میدان (از N به S) در صفحه‌ی هر یک از شکل‌ها را با پیکان مشخص کنید و برای خطوط میدان عمود بر هر شکل با توجه به سوی آن‌ها (داخل یا خارج صفحه) از علامت ضربدر، $\otimes$ یا نقطه، $\odot$ استفاده کنید. به عنوان مثال برای آهنربای کوچک استوانه‌ای که سطح جانبی آن از یال AA' بریده شده و به صورت مستطیل $AAA'A'$ رسم شده نمایش قطب‌ها و خطوط میدان به صورت زیر است.



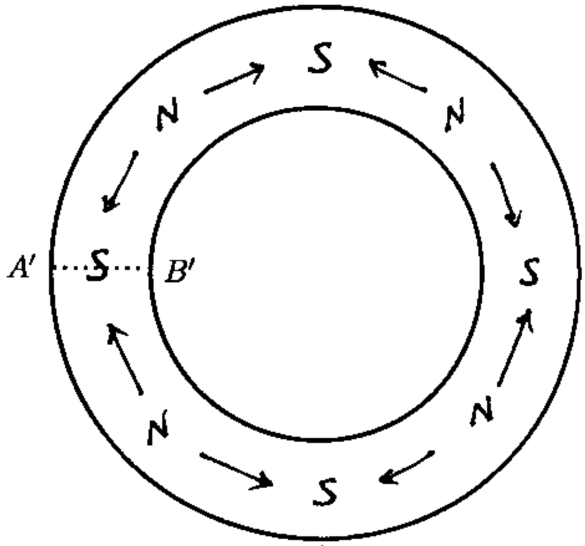
پاسخ‌نامه

تعداد قطب‌های آهنربای حلقه‌ای = ۱۶

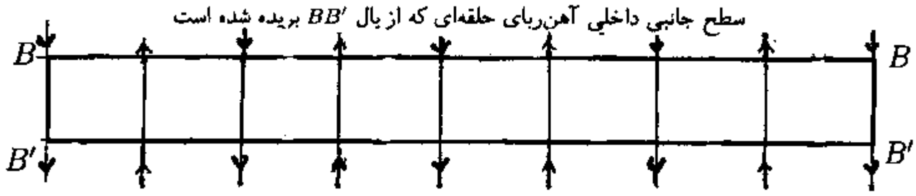
قاعده‌ی بالایی آهن‌ربای حلقه‌ای



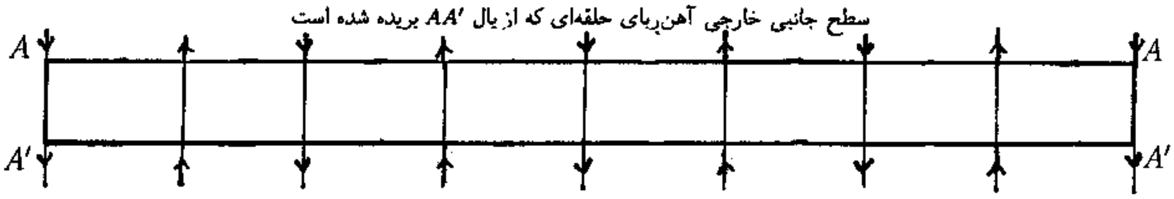
قاعده‌ی پایینی آهن‌ربای حلقه‌ای



سطح جانبی داخلی آهن‌ربای حلقه‌ای که از یال BB' بریده شده است



سطح جانبی خارجی آهن‌ربای حلقه‌ای که از یال AA' بریده شده است



۱)

۲)

$$x_p(t) = v_0\cos\theta\, t \quad , \quad y_p(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\, t$$

$$x_t(t) = x_0 \quad , \quad y_t(t) = y_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

ب) در لحظهٔ برخورد $x_t(t_1) = x_p(t_1)$ ، در نتیجه $t_1 = \frac{x_0}{v_0\cos\theta}$.

شرط این که برخورد پرتابه و هدف بالای سطح افق باشد این است که $0 \leqslant y_p(t_1) \leqslant y_0$.

$$y_p(t_1) \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0\sin\theta\frac{x_0}{v_0\cos\theta} \geqslant 0$$

$$(1) \qquad \tan^2\theta - 2\frac{v_0^2}{gx_0}\tan\theta + 1 \leqslant 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $\tan\theta_1$ و $\tan\theta_2$ بنامیم

$$\tan\theta_1 = \frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1} \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1}$$

جواب نامعادلهٔ (۱) $\tan\theta_1 < \tan\theta < \tan\theta_2$ است.

$$y_p(t_1) \leqslant y_0 \Rightarrow$$

$$(2) \qquad \tan^2\theta - 2\frac{v_0^2}{gx_0}\tan\theta + 1 + \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0^2} \geqslant 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $\tan\theta_3$ و $\tan\theta_4$ بنامیم

$$\tan\theta_3 = \frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1} \quad , \quad \tan\theta_4 = \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1}$$

جواب نامعادلهٔ (۲) $\tan\theta < \tan\theta_3$ و $\tan\theta > \tan\theta_4$ است.

جواب‌ها به ترتیب بزرگی به این صورت‌اند

$$\tan\theta_1 \quad \tan\theta_3 \quad \tan\theta_4 \quad \tan\theta_2$$

اشتراک این جواب‌ها، یعنی جواب مسئله، عبارت‌اند از

$$\frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1} < \tan\theta < \frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1}$$

$$\frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1} < \tan\theta < \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1}$$

شرط وجود این محدوده ها مادامی که زیر رادیکال شامل y_0 منفی نشود این است که

$\frac{v_0^2}{gx_0} \geq 1$. وقتی زیر رادیکال شامل y_0 منفی شود یعنی $\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1 < 0$

نامعادله (۲) برقرار است ($y_p(t_1) \leq y_0$ حتماً برقرار است). در این

وضعیت فقط باید $y_p(t_1) \geq 0$ یعنی

$$\frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1} \leq \tan\theta \leq \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1}$$

که باز هم باید $\frac{v_0^2}{gx_0} \geq 1$.

به ازای $x_0 = 50m$ ، $y_0 = 100m$ ، $v_0 = 50 m/s$ و $g = 10 m/s^2$:

$$\tan\theta_1 = 5 - 2\sqrt{6} \;,\; \tan\theta_2 = 5 + 2\sqrt{6} \;,\; \tan\theta_3 = 3 \;,\; \tan\theta_4 = 7$$

ج) در هنگام برخورد $y_p(t_1) = y_t(t_1)$ که $t_1 = \frac{x_0}{v_0\cos\theta}$. در نتیجه

$$\sin\theta = \left(\frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{2}\frac{gt_0^2}{x_0}\right)\cos\theta + \frac{gt_0}{v_0}$$

که به ازای مقادیر داده شده ، خواهد شد

$$\sin\theta = (2 - 0.1t_0^2)\cos\theta + 0.2t_0 \Rightarrow t_0^2 - \frac{2}{\cos\theta}t_0 + 10(\tan\theta - 2) = 0$$

از آنجایی که باید $t_1 > t_0$ باشد جواب قابل قبول $t_0 = \frac{1}{\cos\theta} - \sqrt{(\tan\theta-3)(\tan\theta-7)}$ است،

بنابراین

$$t_0|_{\theta_3} = \sqrt{10}\,s \;,\; t_0|_{\theta_4} = \sqrt{50}\,s$$

$$t_0|_{\theta_1} = -(\sqrt{80} - \sqrt{30})s \;,\; t_0|_{\theta_2} = \sqrt{30}\,s$$

در نتیجه $-(\sqrt{80}-\sqrt{30})s \leq t_0 \leq \sqrt{10}\,s$ برای $5-2\sqrt{6} \leq \tan\theta \leq 3$

و $\sqrt{30}\,s \leq t_0 \leq \sqrt{50}\,s$ برای $7 \leq \tan\theta \leq 5+2\sqrt{6}$

د) به ازای $t_0 = \sqrt{10}\,s$ از

$$\sqrt{10} = \frac{1}{\cos\theta} - \sqrt{(\tan\theta-3)(\tan\theta-7)}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{1+\tan^2\theta} - \sqrt{(\tan\theta-3)(\tan\theta-7)} \Rightarrow \tan\theta = 3 \Rightarrow \theta = \mathrm{Arc}\tan 3$$

یا

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \mathrm{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

۲) ۳)

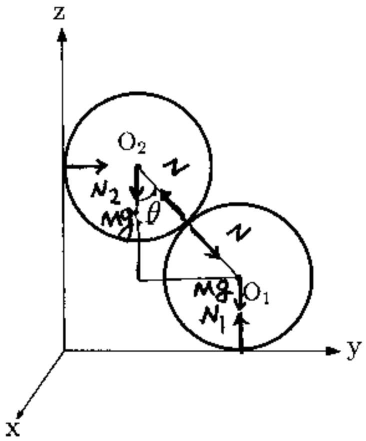
(۱) $y_1 = R + 2R\sin\theta \ , \ z_1 = R \qquad y_2 = R, \ \ z_2 = R + 2R\cos\theta$

ب)

$$\begin{cases} N\sin\theta = Ma_1 \\ N_1 - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -Mg + N\cos\theta = Ma_2 \\ N_2 - N\sin\theta = 0 \end{cases}$$

از دو معادله ی شامل a_1 و a_2 :

(۲) $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a_1}{a_2+g}$$



ج) اگر مبدأ پتانسیل گرانشی را صفحه ی x-y بگیریم

$$0 + MgR + Mg(3R) = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + MgR + Mg(R+2R\cos\theta)$$

$$\Downarrow$$

(۳) $$v_1^2 + v_2^2 = 4gR(1-\cos\theta)$$

د) $$(y_1-R)^2 + (z_2-R)^2 = 4R^2$$

با مشتق گیری نسبت به زمان : $v_1(y_1-R) + v_2(z_2-R) = 0$

(۴) $v_1^2 + v_2^2 + a_1(y_1-R) + a_2(z_2-R) = 0$: با مشتق گیری مجدد نسبت به زمان

(۵) $a_1\sin\theta + a_2\cos\theta + 2g(1-\cos\theta) = 0$: از قرار دادن معادلات (۱) و (۳) در معادله ی (۴)

از معادله ی (۲) و (۵) :

$$a_1 = (3\cos\theta - 2)g\sin\theta \ , \ a_2 = (3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)g$$

از قسمت ب) :

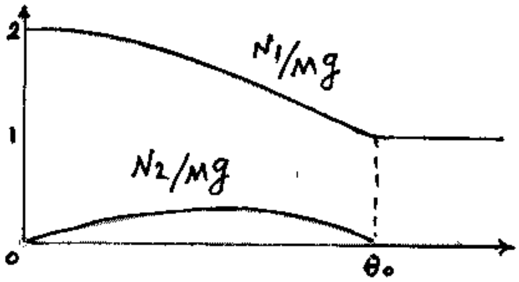
$$N_2 = Ma_1 \Rightarrow N_2(\theta) = Mg\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

$$N_1 = Ma_2 + 2Mg \Rightarrow N_1(\theta) = Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)$$

هـ) $N = Ma_1/\sin\theta$ ، $N = Mg(3\cos\theta - 2)$ ، به ازای $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ تماس دو استوانه قطع می شود.

$$N_1 = \begin{cases} Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1) & \theta < \theta_0 \\ Mg & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} Mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) & \theta < \theta_0 \\ 0 & \theta > \theta_0 \end{cases}$$



۹) ابتدا سرعت ها را به ازای $\theta = \theta_0$، v_2 و v_1 بدست می‌آوریم

$$v_1^2\Big|_{\theta=\theta_0} = 4gR(1-\cos\theta_0)\cos^2\theta_0 \quad \Rightarrow \quad v_1(\theta_0) = \sqrt{\frac{16}{27}gR}$$

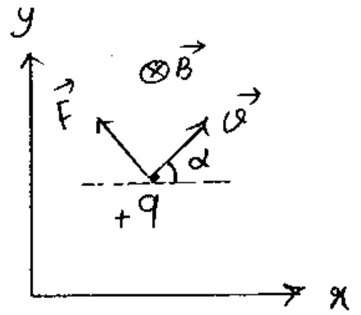
$$v_2 = -v_1 \tan\theta \quad \Rightarrow \quad v_2(\theta_0) = -v_1(\theta_0)\tan\theta_0 = -\sqrt{\frac{20}{27}gR}$$

اگر v_{2f} سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه x-y باشد

$$v_{2f}^2 - v_2^2(\theta_0) = -2g\left(R - z_2(\theta_0)\right)$$

$$v_{2f}^2 = v_2^2(\theta_0) + 2g\left(2R\cos\theta_0\right) \quad \Rightarrow \quad v_{2f} = -\sqrt{\frac{92}{27}gR}$$

پس سرعت نهایی استوانه زیری $\sqrt{\frac{16}{27}gR}$ و سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه x-y، $-\sqrt{\frac{92}{27}gR}$ است.



۳)

آ) $F = qvB$ و

$$F_x = -F\sin\alpha = -qBv\sin\alpha = -qBv_y$$

$$F_y = F\cos\alpha = qBv\cos\alpha = qBv_x$$

ب)

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB}{m}v_y$$

$$F_y = m\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m}v_x - g$$

ج)

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_x}{dt} - 0$$

با قرار دادن معادله اول قسمت ب) در معادله اخیر

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

اگر ω را به صورت $\omega = \frac{qB}{m}$ تعریف کنیم

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \Rightarrow v_y = A\sin(\omega t + \phi)$$

بعد ω عکس زمان است، $[\omega] = \frac{[qB]}{m}$ اما $F = qvB$

$$[qB] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

$$[\omega] = \frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$$

از معادله دوم قسمت ب)

$$v_x = g/\omega + A\cos(\omega t + \phi)$$

در $t=0$ سرعت اولیه ذره صفر است یعنی

$$v_x(t=0) = 0 \qquad A\cos\phi + g/\omega = 0$$

$$v_y(t=0) = 0 \Rightarrow A\sin\phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = 0 \text{ و } A = -g/\omega$$

بنابراین

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega}(1 - \cos\omega t) \text{ و } v_y(t) = -\frac{g}{\omega}\sin\omega t$$

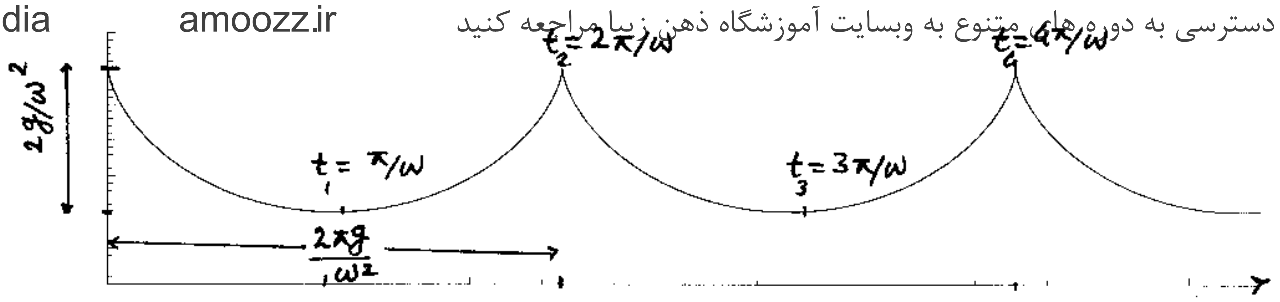
د)

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t + x_0 \text{ و } y(t) = \frac{g}{\omega^2}\cos\omega t + y_0$$

در $t=0$: $x(0)=0$ و $y(0)=h$ ، بنابراین $x_0 = 0$ و $y_0 = h - g/\omega^2$

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t \text{ و } y(t) = h - \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

هـ)



و) داریم $\begin{cases} v_x = \frac{g}{\omega} + A\cos(\omega t+\phi) \\ v_y = A\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$ و در $t=0$ $\begin{cases} v_x(0)=v_0 \\ v_y(0)=0 \end{cases}$ بنابراین $\begin{cases} \phi=0 \\ A=v_0-g/\omega \end{cases}$

$$v_x(t)=\frac{g}{\omega}+\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)\cos\omega t \quad , \quad v_y(t)=\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)\sin\omega t$$

داریم :

$$x(t)=\frac{g}{\omega}t+\left(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}\right)\sin\omega t+x_0$$

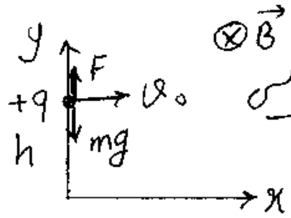
$$y(t)=-\left(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}\right)\cos\omega t+y_0$$

و در $t=0$: $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=h \end{cases}$ و در نتیجه $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=h+\left(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}\right) \end{cases}$

سرانجام

$$x(t)=\frac{g}{\omega}t+\left(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}\right)\sin\omega t$$

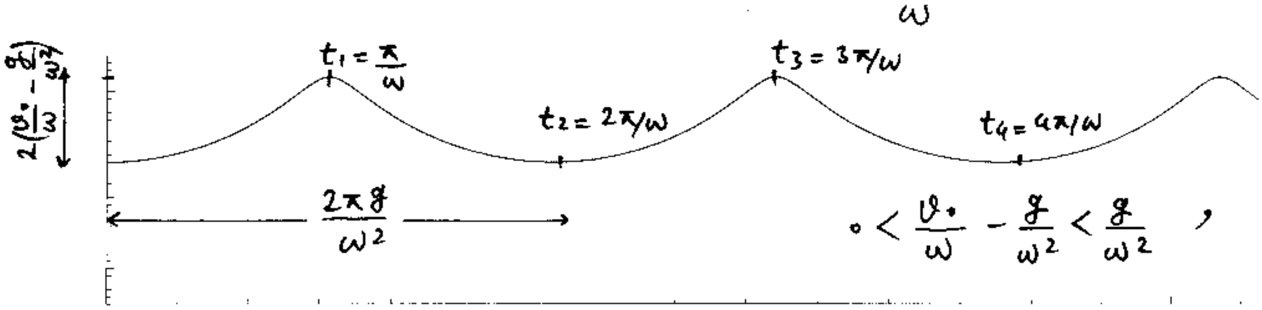
$$y(t)=h+\left(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}\right)(1-\cos\omega t)$$



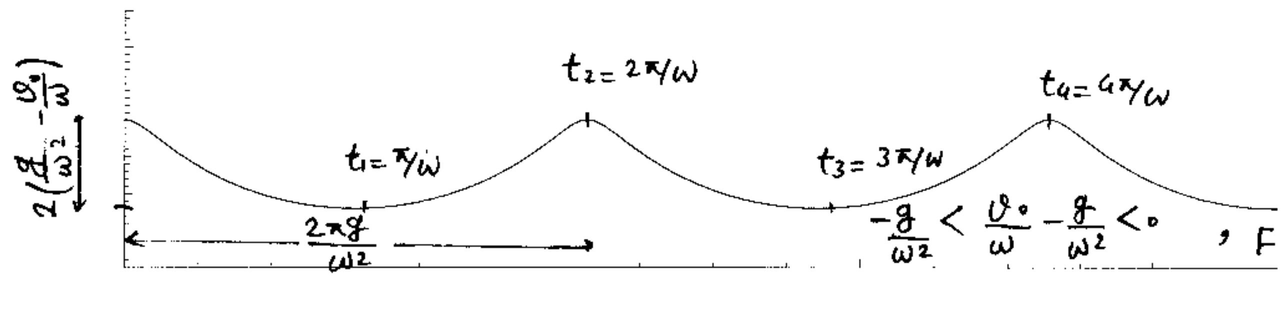
نیروی مغناطیسی $F=qv_0B$

$\frac{g}{\omega}<v_0<\frac{2g}{\omega} \Leftarrow F>mg$ و $v_0<\frac{2g}{\omega}$

$0<v_0<\frac{g}{\omega} \Leftarrow F<mg$



$0<\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}<\frac{g}{\omega^2} \quad , \quad F>mg$



$-\frac{g}{\omega^2}<\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}<0 \quad , \quad F<mg$

۱۴) ۳) اگر در وضعیت θ فشار گاز سمت راست و چپ به ترتیب P_1 و P_2 باشد

و در وضعیت $\theta=0$ فشار گاز دو طرف P_0 باشد، در دمای ثابت

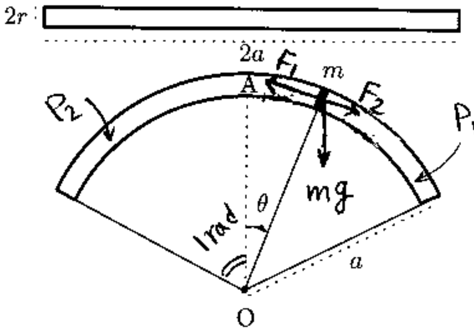
$$P_0(\pi r^2)(1)a = P_2(\pi r^2)(1+\theta)a$$:قانون بویل برای گاز سمت چپ

$$P_0(\pi r^2)(1)a = P_1(\pi r^2)(1-\theta)a$$:〃 〃 〃 راست

$$P_0(\pi r^2)(1)a = nRT$$ که

بنابراین

$$P_1 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1-\theta)} \quad , \quad P_2 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1+\theta)}$$



$$F_1 = \pi r^2 P_1 = \frac{nRT}{a(1-\theta)}$$

$$F_2 = \pi r^2 P_2 = \frac{nRT}{a(1+\theta)}$$

نیروی کل عمود بر سطح استوانه

$$F = -\frac{2nRT}{a}\frac{\theta}{1-\theta^2} + mg\sin\theta$$

است.

ب) در حالت تعادل $F=0$ است و:

$$\sin\theta = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$$

که

$$K(\theta) = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$$

ج) $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$ که $T > T_c$

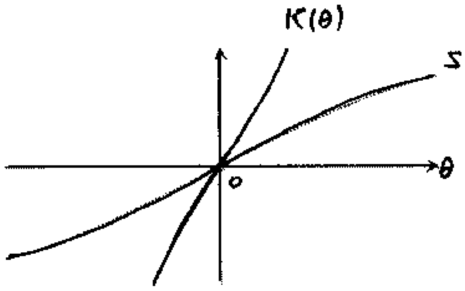
د) $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$ که $T < T_c$

$$\frac{dk(\theta)}{d\theta} = \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} > 0 \quad , \quad \left.\frac{dk(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{T}{T_c} \quad , \quad \left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 1$$

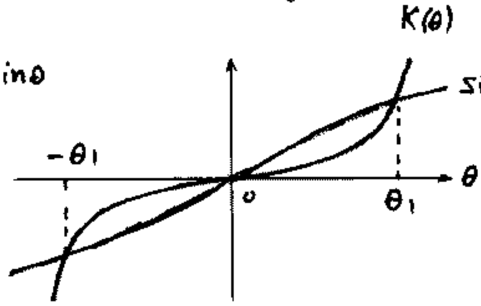
در حالت ج) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ بیشتر است و

در حالت د) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ کمتر است.

$T > T_c$



$T < T_c$



هـ) در یک نقطه قطع می‌کند. $\theta_0=0$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\cos\theta - \frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2}\Bigg|_{\theta_0=0} = mg - \frac{2nRT}{a} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right)$$

از آنجایی که $T>T_c$ است پس $\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0}<0$ و $\theta_0=0$ تعادل پایدار است.

و) در سه نقطه قطع می‌کند $\theta_0=0$ و $\theta_0=\pm\theta_1$

$$F=0 \Rightarrow -mg\frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}+mg\sin\theta=0 \Rightarrow \frac{T}{T_c}=\sin\theta_0\frac{1-\theta_0^2}{\theta_0}$$

که $T<T_c$ است.

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right)>0$$ به ازای $\theta_0=0$

به ازای $\theta_0=\theta_1$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1} = mg\cos\theta_1 - \frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}$$

$$= mg\left(\cos\theta_1 - \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

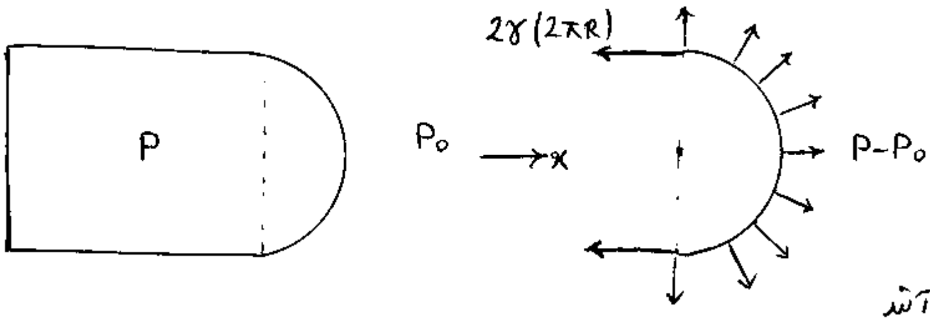
$$= mg\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\frac{1-\theta_1^2}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

$$= mg\cos\theta_1\left(1-\frac{\tan\theta_1}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2}\right)$$

اما $-1\,\text{rad}<\theta_1<1\,\text{rad}$ بنابراین $\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2}>1$ و $\frac{\tan\theta_1}{\theta_1}>1$ پس

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1}<0$$

پس به ازای $T<T_c$، $\theta_0=0$ نقطه تعادل ناپایدار و $\theta_0=\pm\theta_1$ نقطه تعادل پایدار است.



۵) الف) نیروی ناشی از فشار بر پوسته‌ی نیمکره‌ای شکل در هر نقطه عمود بر سطح نیمکره است، برآیند

این نیروهای جزئی برابر است با برآیند تصویر این نیروهای جزئی در جهت x، یعنی $(P-P_0)\pi R^2$.

در حالت تعادل: $(P-P_0)\pi R^2 = 2\gamma(2\pi R)$ ولذا $P = P_0 + \frac{4\gamma}{R}$

ب)

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

$$T = T_0 \frac{\left(P_0 + \frac{4\gamma}{R}\right)\left(\pi R^2 \times 4R + \frac{2}{3}\pi R^3\right)}{P_0\left(\pi R^2 \times 4R\right)}$$

$$T = \frac{7}{6}\left(1 + \frac{4\gamma}{P_0 R}\right) T_0$$

ج)

$$2\gamma \Delta A = 2\gamma\left(2\pi R^2 - \pi R^2\right) = 2\gamma\pi R^2$$

د)

$$P_0 \Delta V = P_0 \frac{2}{3}\pi R^3$$

ه)

$$\Delta U = \frac{5}{2} n R \Delta T$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{P_0 V_0}{T_0}\right)(T - T_0)$$

$$\Delta U = 10\pi R^3 P_0 \left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0 R}\right)$$

و)

$$\Delta U = Q + W \Longrightarrow Q = \Delta U - W$$

$$Q = 10\pi R^3 P_0\left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0 R}\right) + 2\gamma\pi R^2 + \frac{2}{3}P_0\pi R^3$$

$$Q = \frac{7}{3}\pi R^3 P_0 + \frac{146}{3}\pi R^2 \gamma$$

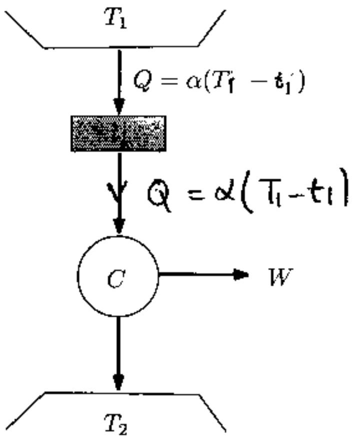
۴) آ) برای چرخه کارنو بازده

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{t_1}$$

است، بنابراین

$$1 - \frac{T_2}{t_1} = \frac{W}{Q}$$

$$(1) \quad W = \frac{t_1 - T_2}{t_1} \alpha (T_1 - t_1)$$



ب)

$$\frac{dW}{dt_1} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{t_1^2}(T_1 T_2 - t_1^2) = 0$$

$$t_1 = \sqrt{T_1 T_2} \quad , \quad W_{max} = W\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1 T_2}} \Rightarrow W_{max} = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$$

ج)

$$Q_2 = Q - W$$

و از قسمت آ

$$W = Q \frac{(t_1 - T_2)}{t_1}$$

$$\Downarrow$$

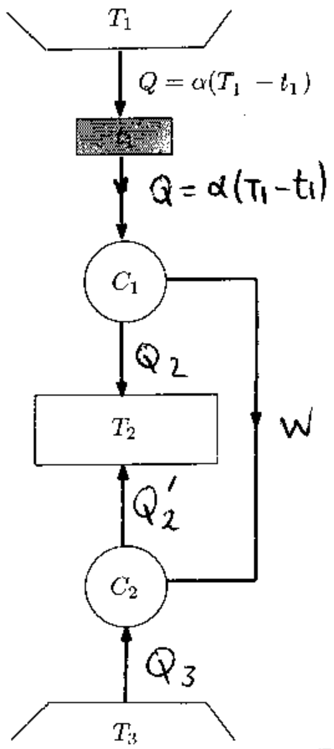
$$(2) \quad Q_2 = \frac{T_2}{t_1} Q \Rightarrow Q_2 = \frac{\alpha T_2 (T_1 - t_1)}{t_1}$$

برای یخچال کارنو

$$(3) \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{Q_3}{Q'_2}$$

همچنین

$$(4) \quad Q'_2 = Q_3 + W$$



از معادله (۱)، (۳) و (۴):

$$Q'_2 = \frac{\alpha T_2 (t_1 - T_2)(T_1 - t_1)}{t_1 (T_2 - T_3)}$$

$$Q_2 + Q'_2 = \frac{\alpha T_2 (T_1 - t_1)(t_1 - T_3)}{t_1 (T_2 - T_3)}$$

د)

$$\frac{d(Q_2 + Q'_2)}{dt_1} = 0$$

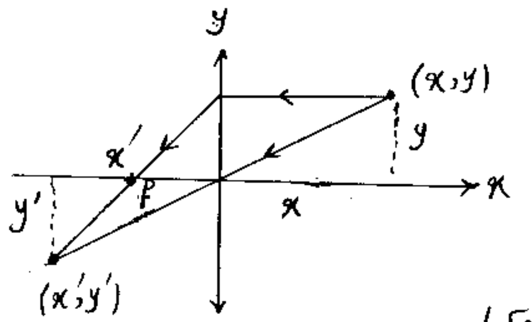
$$\frac{\alpha T_2 (T_1 T_3 - t_1^2)}{t_1^2 (T_2 - T_3)} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{T_1 T_3}$$

$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = (Q_2 + Q'_2)\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1 T_3}}$$

$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = \frac{\alpha T_2}{T_2 - T_3}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3}\right)^2$$

۱۷)

آ)



$$\frac{1}{x}+\frac{1}{-x'}=\frac{1}{f}$$

$$\Downarrow$$

$$(1)\qquad x'=-\frac{xf}{x-f}$$

با توجه به دو مثلث قائم الزاویه (یا نسبت طول جسم به طول تصویر)

$$\frac{-y'}{y}=\frac{-x'}{x}\Rightarrow y'=\frac{y}{x}x'$$

با جایگذاری x' در آن

$$(2)\qquad y'=-\frac{yf}{x-f}$$

ب) به ازای $t<0$ ذره در مسیر Ad به سمت A نزدیک می‌شود

$$Ad:\quad\begin{cases}x=-vt+a\\ y=b\end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x'=-\frac{(a-vt)f}{a-vt-f}\quad,\quad y'=-\frac{bf}{a-vt-f}$$

به ازای $0<t<\frac{2b}{v}$ ذره در مسیر AB به سمت B می‌رود

$$AB:\quad\begin{cases}x=a\\ y=b-vt\end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x'=\frac{-af}{a-f}\quad,\quad y'=-\frac{(b-vt)f}{a-f}$$

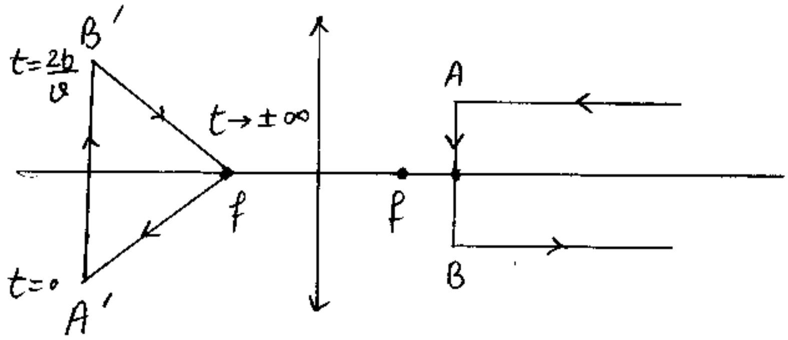
به ازای $t>\frac{2b}{v}$ در مسیر Bd از B دور می‌شود

$$Bd:\quad\begin{cases}x=a+v\left(t-\frac{2b}{v}\right)=a-2b+vt\\ y=-b\end{cases}$$

پس از جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x'=-\frac{(a-2b+vt)f}{a-2b+vt-f}\quad,\quad y'=\frac{bf}{a-2b+vt-f}$$

ج)



$$A'\left(x_{A'}=\frac{-af}{a-f}\ ,\ y_{A'}=\frac{-bf}{a-f}\right)$$ به ازای $t=0$

$$B'\left(x_{B'}=\frac{-af}{a-f}\ ,\ y_{B'}=\frac{bf}{a-f}\right)$$ به ازای $t=\frac{2b}{v}$

$$f\left(x_f=-f\ ,\ y_f=0\right)$$ به ازای $t\to\pm\infty$

د) از معادلات (۱) و (۲) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$v'_x=\frac{v_x f^2}{(x-f)^2}\quad \text{و}\quad v'_y=\frac{(v_x y-v_y x)f+v_y f^2}{(x-f)^2}$$

به ازای $t<0$

$$v'_x=-\frac{vf^2}{(a-f-vt)^2}\quad \text{و}\quad v'_y=-\frac{bvf}{(a-f-vt)^2}$$

به ازای $0<t<\frac{2b}{v}$

$$v'_x=0\quad \text{و}\quad v'_y=\frac{vf}{a-f}$$

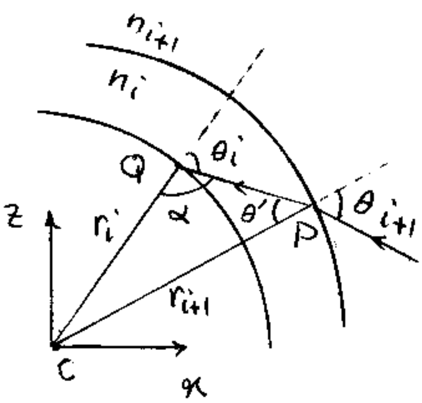
به ازای $t>\frac{2b}{v}$

$$v'_x=\frac{vf^2}{(a-2b+vt-f)^2}\quad \text{و}\quad v'_y=-\frac{bvf}{(a-2b+vt-f)^2}$$

$t'\to\pm\infty$

$$v'_x=0\quad \text{و}\quad v'_y=0$$

(۸



آ) مبدأ مختصات را مرکز زمین می‌گیریم.

طبق قانون اسنل

(1) $n_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i\sin\theta'$

از طرفی در مثلث QCP از قانون سینوس داریم:

$$\frac{\sin\theta'}{r_i} = \frac{\sin\alpha}{r_{i+1}}$$

اما $\theta_i+\alpha=\pi$ ، بنابراین $\sin\alpha=\sin\theta_i$ و

(2) $$\frac{\sin\theta'}{r_i} = \frac{\sin\theta_i}{r_{i+1}}$$

از معادله‌ی (1) و (2):

$$\frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}}\,\frac{r_i}{r_{i+1}}$$

ب) از قسمت قبل پیداست که $n_{i+1}r_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i r_i \sin\theta_i$

با تکرار این رابطه برای هر دو لایه‌ی مجاور یا این که $n_i r_i \sin\theta_i =$ ثابت است

شعاع را بین بیرونی‌ترین لایه‌ی جو که برای آن $n_\infty = 1$ و زاویه‌ی ورود پرتو θ_∞ است و لایه‌ی مجاور سطح زمین که برای آن $n=n_0$ و زاویه‌ی پرتو با خط عمود (محور z) θ_0 است می‌نویسیم:

$$n_0 R\sin\theta_0 = n_\infty (h+R)\sin\theta_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\theta_\infty = n_0\frac{R}{R+h}\sin\theta_0$$

به نام خداوند بخشنده مهربان

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرحله دوم المپیاد فیزیک
تاریخ: ۹۱/۲/۱۴ - مدت: ۲۱۰ دقیقه

تایید کمیته علمی

نام پدر: --
کد ملی: ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۰
نام مدرسه: --
پایه تحصیلی: نامشخص

استان: --
منطقه: --
حوزه: --
رشته تحصیلی: --

شماره صندلی
۱

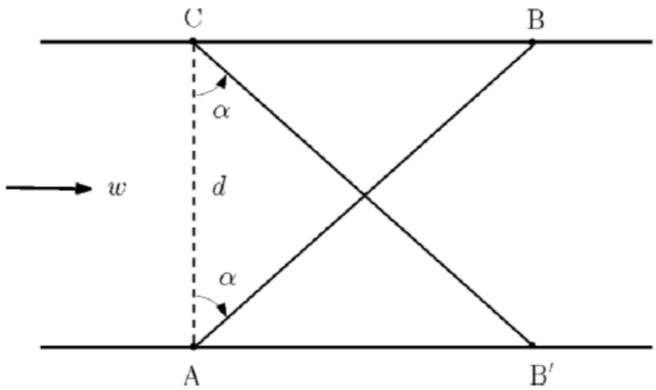
توضیحات مهم

۱. این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود. بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.
۲. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.
۳. پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
۴. با توجه به آنکه برگه‌های پاسخنامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود اول سوالات را در برگه چرک نویس ضمیمه، حل کرده و آنگاه نتایج را در پاسخ نامه وارد کنید.
۵. عملیات تصحیح توسط مصححین پس از قطع سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۶. برای نوشتن در پاسخنامه حتماً از مداد پر رنگ مشکی، استفاده نمایید. (به هیچ وجه از مداد اتود و خودکار قرمز استفاده نکنید)
۷. از مخدوش کردن دایره‌ها در چهارگوشه‌ی صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۸. همراه داشتن ماشین حساب و تلفن همراه مجاز نیست. در صورت داشتن این موارد، در اسرع وقت مسوول جلسه را مطلع کنید تا آن را تحویل بگیرد. در غیر این صورت حتی اگر خاموش بوده یا از آنها استفاده نکنید، تقلب محسوب خواهد شد.

در این قسمت چیزی ننویسید

۱ – (۱۵ نمره)

تندی جریان آب در رودخانه‌ای به عرض d برابر مقدار ثابت w است. شخصی می‌خواهد با ترکیبی از دو مسیر مستقیم، که یکی مسیری است که با قایق روی آب طی می‌کند و دیگری مسیری است که با دویدن در ساحل رودخانه طی می‌کند، از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C برود و دوباره به نقطه‌ی A برگردد. این شخص قادر است روی آب ساکن قایق را با تندی ثابت v براند $(v>w)$ و در ساحل با تندی ثابت u بدود.



اگر این شخص مسیر A→B→C را برای رفت و مسیر C→B→A را برای بازگشت انتخاب کند:

آ) مدت زمان لازم برای رفتن از A به B بر حسب d، v، w و α چقدر است؟

ب) مدت زمان لازم برای برگشت از B به A بر حسب d، v، w و α چقدر است؟

پ) مدت زمان لازم برای حرکت از نقطه‌ی A و برگشت به آن چقدر است؟

ت) به ازای چه مقداری از α مدت زمان رفت و برگشت کمینه می‌شود؟

اگر این شخص مسیر A→B→C را برای رفت و مسیر C→B'→A را برای بازگشت انتخاب کند

ث) مدت زمان لازم برای حرکت از نقطه‌ی A و برگشت به آن چقدر است؟

ج) به ازای چه مقداری از α مدت زمان رفت و برگشت کمینه می‌شود؟ برای وجود این کمینه چه رابطه‌ای بین تندی ها باید وجود داشته باشد؟

چ) زمان کمینه چقدر است؟

در این قسمت چیزی ننویسید

مرحله دوم المپیاد فیزیک

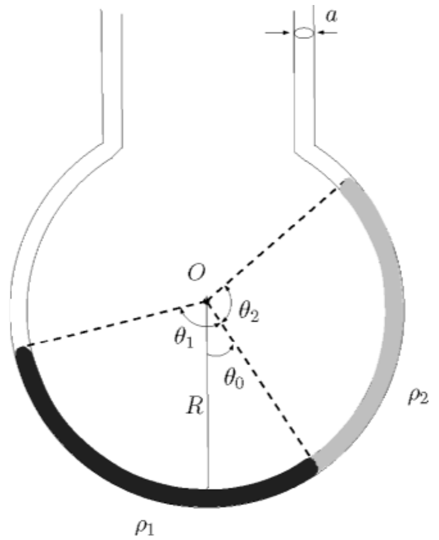
تایید کمیته علمی

کد ملی: ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۰

معاونت دانش پژوهان جوان

۲ – (۱۵ نمره)

دو مایع مخلوط نشدنی و غیرچسبنده با جرم‌های حجمی ρ_1 و ρ_2 مطابق شکل در لوله‌ای به شعاع R و سطح مقطع کوچک a ریخته شده‌اند. دو سر لوله باز و فشار هوا P_0 است. مقدار دو مایع با زاویه‌های θ_1 و θ_2 مشخص شده است.



آ) در حالت تعادل (وقتی مایع ساکن است) زاویه‌ی θ_0 را بر حسب پارامترهای داده شده بدست آورید.

ب) فشار در محل تماس دو مایع با یکدیگر چقدر است؟

از یک طرف لوله مایع را از حالت تعادل θ_0 به مقدار بسیار جزئی منحرف و رها می‌کنیم.

پ) در وضعیتی که انحراف از حالت تعادل $\Delta\theta$ است ($\Delta\theta << 1\ rad$) نیروی باز گرداننده در امتداد مماس بر لوله را تا مرتبه‌ی اول $\Delta\theta$ محاسبه کنید.

ت) زمان تناوب نوسان مایع داخل لوله را بدست آورید.

در این قسمت چیزی ننویسید

مرحله دوم المپیاد فیزیک

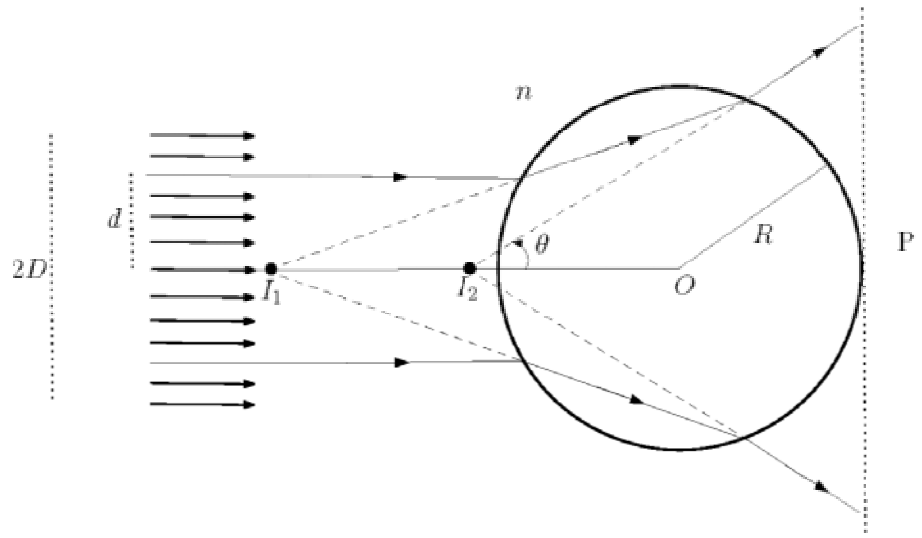
تایید کمیته علمی

کد ملی: ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۰

معاونت دانش پژوهان جوان

۳ – (۱۵ نمره)

یک حباب هوای کروی شکل به شعاع R و ضریب شکست 1 در یک محیط شفاف به ضریب شکست n در نظر بگیرید. یک دسته پرتو نور موازی به شدت I که مقطع آن دایره‌ای به قطر $2D$ است $(D < R/n)$ مطابق شکل به حباب می‌تابد.



آ) یک پرتو نور از این دسته را در نظر بگیرید که به فاصله‌ی d از محور تقارن دسته پرتو به حباب می‌تابد و پس از عبور از حباب وارد محیط با ضریب شکست n می‌شود. اگر زاویه‌ی انحراف نسبت به پرتو تابیده θ باشد، $\sin\theta$ برحسب d، R و n چقدر است؟

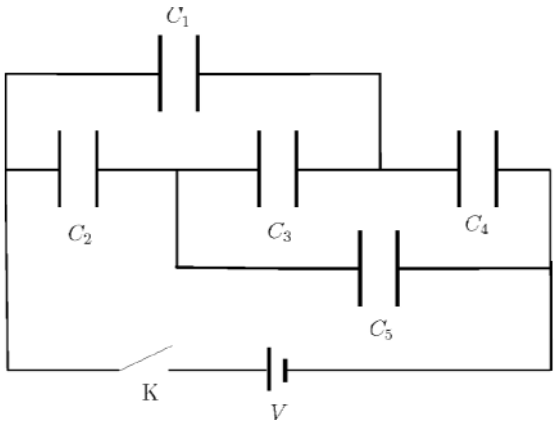
ب) اگر I_1 و I_2 تصویرهایی باشند که پرتو مذکور در قسمت (آ) هنگام عبور از سطح سمت چپی و سطح سمت راستی حباب تشکیل می‌دهند فاصله‌ی OI_1 و OI_2 را بر حسب d، R و n بدست آورید.

پ) با توجه به این که هر کدام از پرتوهای تابیده و عبور کننده از حباب تصاویری همانند I_1 و I_2 روی محور تقارن (محور افقی گذرنده از O) تشکیل می‌دهند، طول بازه‌ای را محاسبه کنید که تصاویر I_1 و I_2 تمام پرتوهای موجود در دسته ورودی، روی محور تقارن تشکیل می‌دهند.

ت) با صرفنظر از بازتاب پرتوهای فرودی روی سطوح حباب شدت متوسط نور خروجی از حباب را روی سطح فرضی P (که عمود بر دسته پرتو فرودی است) حساب کنید.

۴ – (۱۰ نمره)

پنج خازن به ظرفیت‌های C_1، C_2، C_3، C_4 و C_5 که قبل از بسته شدن کلید K بدون بار الکتریکی هستند در مداری مطابق شکل به همراه یک باتری قرار گرفته‌اند که اختلاف پتانسیل V را به دو سر مجموعه اعمال میکند. خازن‌ها را ایده‌آل در نظر بگیرید.



آ) پس از بسته شدن کلید K و شارژ خازن‌ها و قطع شدن جریان مدار، بار الکتریکی خازن‌های C_1، C_2 و C_3 را بر حسب V و ظرفیت خازن ها بدست آورید.

ب) ظرفیت خازن معادل مدار را حساب کنید.

پ) چه شرطی بین ظرفیت خازن‌ها وجود داشته باشد تا پس از شارژ خازن‌ها و قطع شدن جریان مدار، بار الکتریکی روی خازن C_3 صفر شود.

در این قسمت چیزی ننویسید

مرحله دوم المپیاد فیزیک

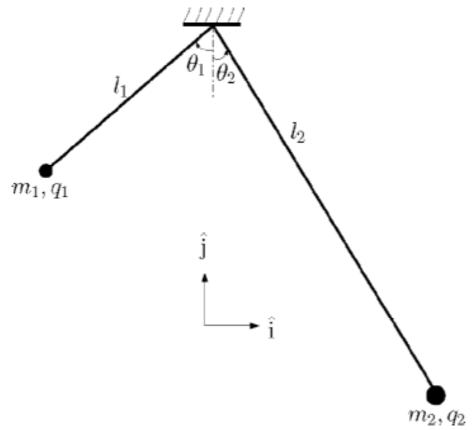
تایید کمیته علمی

کد ملی: ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۰

معاونت دانش پژوهان جوان

۵ – (۱۵ نمره)

دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 که به ترتیب دارای جرمهای m_1 و m_2 هستند به دو انتهای نخ‌هایی به طول l_1 و l_2 وصل شده‌اند. سرِ دیگر نخ‌ها به یک نقطه‌ی ثابت مطابق شکل زیر بسته شده‌اند به طوری که دو بار در اثر نیروهای وارد بر آنها در یک صفحه در حال تعادل میباشند. از جرم نخ‌ها صرف‌نظر کنید.



آ) شرط تعادل نیروها را در دو راستای $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بر حسب پارامترهای داده شده و نیز پارامترهای کمکی θ_1 و θ_2 بنویسید.

ب) نسبت $\sin(\theta_1) / \sin(\theta_2)$ را بر حسب پارامترهای داده‌شده بدست آورید.

پ) نیروی کشش نخ‌ها را بر حسب وزن بارها و θ_1 و θ_2 بدست آورید.

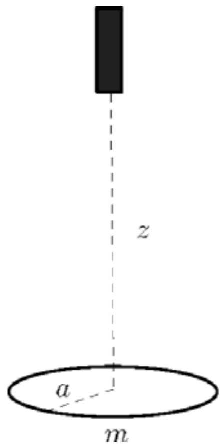
ت) برای محاسبه‌ی پارامترهای کمکی θ_1 و θ_2 علاوه بر رابطه‌ای که در قسمت (ب) بدست می‌آید به رابطه‌ی دیگری بین θ_1 و θ_2 نیاز است. اگر x را به صورت $x = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ تعریف کنیم، x جواب معادله‌ی

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

است. ضرایب a، b و c را بر حسب پارامترهای داده شده بدست آورید.

۶ – (۱۵ نمره)

حلقه‌ای رسانا به جرم m، شعاع a و مقاومت الکتریکی R روی سطح افقی میزی قرار دارد. آهنربایی را در فاصله‌ی z $(z>>a)$ بالای حلقه و روی محور آن در نظر بگیرید. با توجه به بزرگ بودن فاصله‌ی آهنربا از حلقه نسبت به ابعاد حلقه، می‌توانیم میدان مغناطیسی درون حلقه را عمود بر سطح آن در نظر بگیریم. با توجه به اینکه میدان مغناطیسی آهنربا در یک نقطه تابعی از فاصله‌ی آهنربا از آن نقطه است، مقدار آن‌را $f(z)$ و جهت آن‌را رو به بالا در نظر بگیرید.



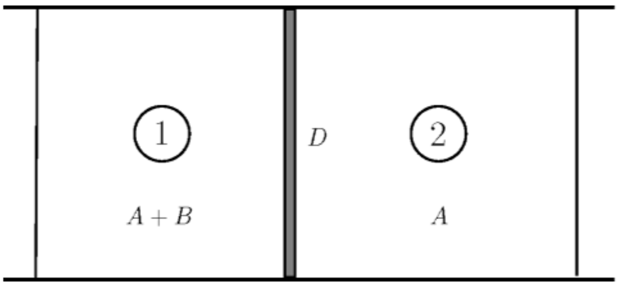
آ) اگر آهنربا را با سرعت v به سمت بالا حرکت دهیم، مقدار و جهت جریان القایی در حلقه را بدست آورید. (جهت مثبت جریان، جهتی است که در آن میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط آن رو به بالاست.) از میدان مغناطیسی حلقه نسبت به میدان مغناطیسی آهنربا صرف‌نظر کنید.

ب) با محاسبه‌ی توان اتلافی در این سیستم، اندازه و جهت نیروی وارد بر حلقه ناشی از حرکت آهنربا را بدست آورید.

پ) با توجه به اینکه شتاب جاذبه روی سطح زمین (و روی میز) g است، حداقل اندازه سرعتی که باید آهنربا در فاصله‌ی z داشته باشد تا حلقه از روی میز بلند شود چقدر است؟ جهت سرعت باید به کدام سمت (پایین یعنی $v<0$ یا بالا یعنی $v>0$) باشد؟

۷ – (۱۵ نمره)

دستگاهی متشکل از دو ناحیه‌ی 1 و 2 توسط غشای نیمه‌تراوای D از هم جدا شده‌اند. ناحیه‌ی 1 حاوی ماده‌ی A و ماده‌ی B و ناحیه‌ی 2 فقط حاوی ماده‌ی A است. غشای نیمه‌تراوا اجازه‌ی عبور ماده‌ی A از ناحیه‌ی 1 به 2 و برعکس (از ناحیه‌ی 2 به 1) را می‌دهد ولی اجازه‌ی عبور ماده‌ی B از ناحیه‌ی 1 به 2 را نمی‌دهد. دمای دو ناحیه را مقدار ثابت T و ماده‌ی B را گاز کامل فرض کنید.



آ) اختلاف فشار ناحیه‌ی 1 و 2 را بر حسب غلظت مولی ماده‌ی B (تعداد مول‌های ماده‌ی B بر واحد حجم)، n_B بدست آورید. (به این اختلاف فشار، فشار اسمزی میگویند.)

ب) می توان با کاهش حجم ناحیه‌ی 1 و افزایش حجم ناحیه‌ی 2 به اندازه‌ی ΔV ماده A را از ناحیه‌ی 1 به 2 منتقل کرد. با فرض اینکه ΔV بسیار کوچک است به طوری که بتوان غلظت‌ها را در طول این فرایند ثابت فرض کرد کار لازم برای این عملیات چقدر است؟ (به این عملیات، اسمز معکوس گفته می شود.)

پ) اساس کار آب شیرین‌کن استفاده از اثر اسمـــز معکوس است. ماده‌ی A آب و ماده‌ی B نمک طعـــــام است. یک مول نمک طعام با جرم مولی $58\ g/mol$ وقتی در آب حل میشود تبدیل به یک مول یون کلر و یک مول یون سدیم می‌گردد، که برای سادگی آنها را گاز کامل فرض می‌کنیم. اگر چگالی نمک طعام محلول در آب شور ناحیه‌ی 1 حدود $40\ g/Lit$ (مثلاً چگالی نمک آب خلیج فارس و فقط آن را حاوی نمک طعام در نظر بگیریم) و نیز اگر بازده دستگاه آب شیرین‌کن (برای تبدیل برق به کار) 70% و دمای آب 27°C باشد برای تولید یک مترمکعب آب شیرین چند کیلووات‌ساعت برق مصرف می‌شود؟

ثابت جهانی گازها $R = 8.3\ J/mol.K$ و عدد آووگادرو $N_A=6.02\cdot 10^{23}$ است.

به نام خدا

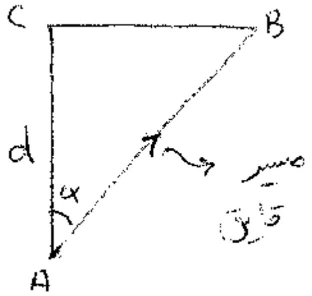
پاسخنامه تشریحی مرحله دوم

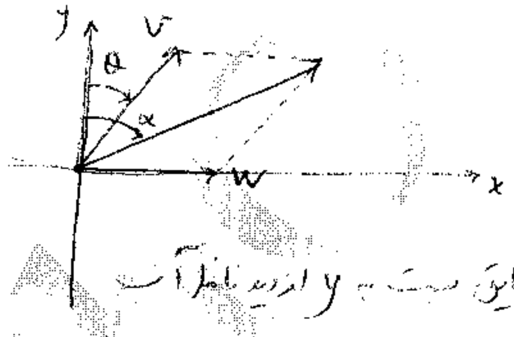
دوره ۲۵ المپیاد فیزیک ایران

(مؤلف: امیر پرتوی)

۱ـ

آ)





θ : زاویه حرکت قایق نسبت به y از دید ناظر آب

α : زاویه حرکت قایق نسبت به y از دید ناظر ساکن

با توجه به بردارهای سرعت:

$$\tan\alpha = \frac{v\sin\theta + w}{v\cos\theta} \longrightarrow v\left[\cos\theta \cdot \tan\alpha - \sin\theta\right] = w$$

$$\Rightarrow v\left[\frac{\sin\alpha \cdot \cos\theta - \sin\theta\cos\alpha}{\cos\alpha}\right] = w \longrightarrow v\sin(\alpha-\theta) = w\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \sin(\alpha-\theta) = \frac{w}{v}\cos\alpha \Rightarrow \theta = \alpha - \sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)$$

$$\Longrightarrow T_{AB} = \frac{d}{v\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \cos\left[\alpha - \sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right] = \cos\alpha \cdot \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right] + \sin\alpha \cdot \sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right]$$

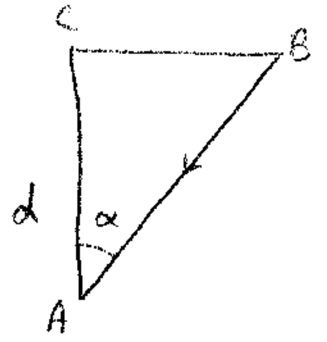
$$= \cos\alpha \cdot \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right] + \sin\alpha \cdot \frac{w}{v} \cdot \cos\alpha$$

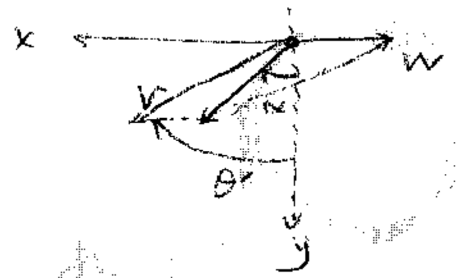
نکته: $\beta = \sin^{-1}x \longrightarrow \sin\beta = x \longrightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-x^2}$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \cos\alpha \cdot \sqrt{1-\frac{w^2}{v^2}\cos^2\alpha} + \frac{w}{v}\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow T_{AB} = \frac{d}{v\cos\theta} = \boxed{\frac{d}{\cos\alpha\left[\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}+w\sin\alpha\right]}}$$

ب)





θ' : زاویه حرکت قایق نسبت به y در دید ناظر آب.

α : زاویه حرکت قایق نسبت به y در دید ناظر ساکن.

$$\tan\alpha = \frac{v\sin\theta' - w}{v\cos\theta'} \longrightarrow w = v\left[\sin\theta' - \tan\alpha\cdot\cos\theta'\right]$$

$$\longrightarrow w\cos\alpha = v\sin(\theta'-\alpha) \longrightarrow \theta' = \alpha + \sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)$$

$$T_{BA} = \frac{d}{v\cos\theta'}$$

$$\cos\theta' = \cos\left[\alpha + \sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right] = \cos\alpha\cdot\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right] - \sin\alpha\cdot\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{w}{v}\cos\alpha\right)\right]$$

$$= \cos\alpha\cdot\sqrt{1-\frac{w^2}{v^2}\cos^2\alpha} - \sin\alpha\cdot\frac{w}{v}\cos\alpha$$

$$T_{BA} = \frac{d}{v\cos\theta'} = \boxed{\frac{d}{\cos\alpha\left[\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}-w\sin\alpha\right]}}$$

ب)

$$T_1 = T_{ABC} + T_{CBA} = \frac{2d\tan\alpha}{u} + T_{AB} + T_{BA}$$

$$T_{AB} + T_{BA} = \frac{d}{\cos\alpha}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}+w\sin\alpha} + \frac{1}{\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}-w\sin\alpha}\right]$$

$$= \frac{d}{\cos\alpha}\cdot\frac{2\sqrt{v^2-w^2\cos^2\alpha}}{v^2-w^2\cos^2\alpha-w^2\sin^2\alpha} = \frac{2d}{v^2-w^2}\cdot\sqrt{\frac{v^2}{\cos^2\alpha}-w^2}$$

$$\Rightarrow T_1 = T_{ABC} + T_{CBA} = \boxed{\frac{2d}{u}\tan\alpha + \frac{2d}{v^2-w^2}\sqrt{(v^2-w^2)+v^2\tan^2\alpha}}$$

ت) فرض کنیم $x = \tan\alpha$ در نتیجه مقدار T_1 برابر است با:

$$T_1 = Ax + B\sqrt{C + Dx^2}$$

که A ، B ، C و D مقادیر ثابت مثبت هستند که مشخص می‌باشند.

$$\frac{dT_1}{dx} = A + B\frac{1}{2}\frac{2Dx}{\sqrt{C+Dx^2}} = A + BD\frac{x}{\sqrt{C+Dx^2}}$$

مقدار α بین صفر تا $\frac{\pi}{2}$ است (چرا؟) پس مقدار $x = \tan\alpha$ همواره مثبت است.

$$\Rightarrow \frac{dT_1}{dx} > 0 \Rightarrow$$ تابع T_1 نسبت به $\tan\alpha$ همواره صعودی است.

پس حداقل آن در کمترین مقدار $\tan\alpha$ بدست می‌آید. $\tan\alpha = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \xrightarrow{\tan\alpha = 0} \boxed{T_{1\,min} = \frac{2d}{\sqrt{v^2-w^2}}}$$

۳

ث) با توجه به تقارن مسیرهای ABC , $CB'A$ که مانند هم و یکسان هستند پس:

$$T_2 = T_{ABC} + T_{CB'A}$$

$$T_{ABC} = T_{CB'A} \rightarrow T_2 = 2T_{ABC}$$

$$\boxed{\Rightarrow T_2 = 2\left[\frac{d\tan\alpha}{u} + \frac{d}{\cos\alpha\left[\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\alpha} + w\sin\alpha\right]}\right]}$$

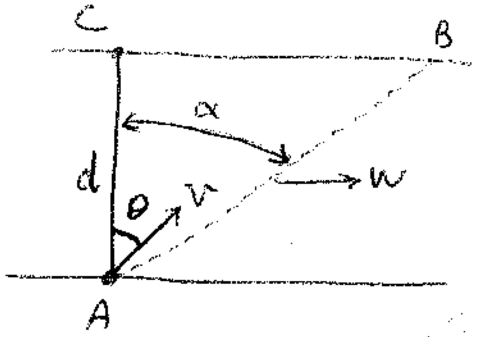
$$T_2 = 2d\left[\frac{\tan\alpha}{u} + \frac{1}{\cos\alpha\left[\cos\alpha\sqrt{\frac{v^2}{\cos^2\alpha} - w^2} + w\sin\alpha\right]}\right]$$

$$= 2d\left[\frac{\tan\alpha}{u} + \frac{1+\tan^2\alpha}{\sqrt{v^2 - w^2 + v^2\tan^2\alpha} + w\tan\alpha}\right]$$

پاسخ ساده شده قسمت ث برحسب $\tan\alpha$

ج) برای حل این قسمت، اگر بخواهیم از رابطه بدست آمده از قسمت «ب» استفاده کنیم و مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم و ... احتمالاً وقت آزمون به پایان رسیده است!!!

زمان طی مسیر از A به B و از B به C را برحسب زاویه θ (زاویه سرعت قایق نسبت به خط عمود بر جریان رودخانه) محاسبه می‌کنیم.



$$T_{AB} = \frac{d}{v\cos\theta} \qquad T_{BC} = \frac{(v\sin\theta + w)\frac{d}{v\cos\theta}}{u}$$

توجه کنید که مقدار BC، برابر است با سرعت افقی قایق ضربدر زمان لازم برای عبور از رودخانه.

$$\longrightarrow T_{ABC} = \frac{d}{v\cos\theta} + \frac{(v\sin\theta + w)}{u}\frac{d}{v\cos\theta} = \frac{d}{v\cos\theta}\left(1 + \frac{w}{u} + \frac{v\sin\theta}{u}\right)$$

$$\longrightarrow T_2 = T_{ABC} + T_{CB'A} = \frac{2d}{v}\left(1+\frac{w}{u}\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2d}{u}\tan\theta$$

$$\frac{dT_2}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2d}{v}\left(1+\frac{w}{u}\right)\frac{(-1)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} + \frac{2d}{u}\,\frac{1}{\cos^2\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2d}{\cos^2\theta}\left[\frac{1}{u} + \frac{\sin\theta}{v\left(1+\frac{w}{u}\right)}\right] = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{-v\left(1+\frac{w}{u}\right)}{u}$$

شرط وجود جواب: $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$-1 \leqslant \frac{-v\left(1+\frac{w}{u}\right)}{u} \Rightarrow \boxed{1 \geqslant \frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)}$$

برای بدست آوردن مقدار α مربوط به کمینه زمان ، از قسمت آ کمک می‌گیریم:

$$\sin(\alpha-\theta) = \frac{w}{v}\cos\alpha \quad , \begin{cases} \sin\theta = -\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right) \\ \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\left[\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)\right]^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\theta - \cos\alpha \cdot \sin\theta = \frac{w}{v}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\theta = \cos\alpha\left(\frac{w}{v}+\sin\theta\right) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{w}{v}+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\frac{w}{v}-\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)}{\left[1-\left(\frac{v}{u}\left(1+\frac{w}{u}\right)\right)^2\right]^{1/2}}}$$

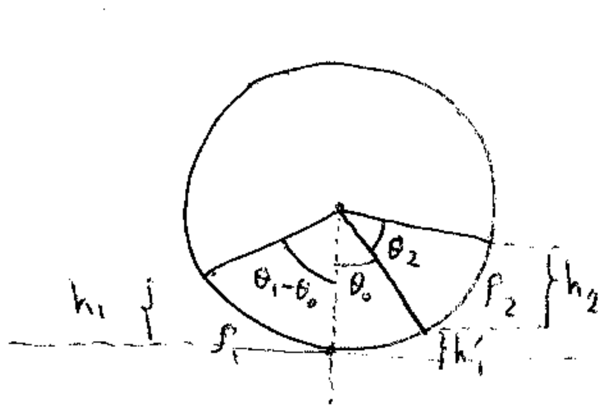
ج) مقدار T_2 مینیموم را با استفاده از زاویه θ محاسبه می‌کنیم:

$$T_{2\,min} = \frac{2d}{v\cos\theta}\left(1+\frac{w}{u}+\frac{v}{u}\sin\theta\right) = \frac{2d}{v}\cdot\frac{1+\frac{w}{u}-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{2\,min} = \frac{2d}{v}\cdot\frac{1+\frac{w}{u}-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)}{\left[1-\frac{v^2}{u^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)^2\right]^{1/2}}}$$

-۲

آ) با توجه به اینکه فشار در سطح آزاد هر دو طرف برابر با P_0 است، پس:



$$\rho_1 h_1 = \rho_1 h_1' + \rho_2 h_2$$

با توجه به هندسه شکل و دایره:

$$h_1 = R\left[1-\cos(\theta_1-\theta_0)\right]$$

$$h_1' = R\left[1-\cos\theta_0\right]$$

$$h_2 = R\left[\cos\theta_0-\cos(\theta_2+\theta_0)\right]$$

$$\Rightarrow \cancel{\rho_1} - \rho_1\cos(\theta_1-\theta_0) = \cancel{\rho_1} - \rho_1\cos\theta_0 + \rho_2\cos\theta_0 - \rho_2\cos(\theta_2+\theta_0)$$

بعد از بسط دادن $\cos(\theta_1-\theta_0)$ و $\cos(\theta_2+\theta_0)$ و ساده کردن داریم:

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta_0 = 2\,\frac{\rho_1\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - \rho_2\sin^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{\rho_1\sin\theta_1+\rho_2\sin\theta_2}}$$

یا

$$\tan\theta_0 = \frac{\rho_1(1-\cos\theta_1) - \rho_2(1-\cos\theta_2)}{\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2}$$

ب) $P = P_0 + \rho_2 g h_2 = P_0 + \rho_1 g\left(h_1 - h_1'\right)$

$$= P_0 + \rho_2 g R\left[\cos\theta_0 - \cos(\theta_2+\theta_0)\right]$$

با توجه به اینکه مقدار $\tan\theta_0$ در قسمت آ معلوم است، مقدار P در نقطه تماس بدست می‌آید

پ) فرض کنید به اندازه $\Delta\theta$ طرف ۱ را به سمت پایین فشار می‌دهیم :

$$\Delta P = \left[\rho_2 H_2 + \rho_1 H_1' - \rho_1 H_1\right] g$$

$$H_2 = R\left[\cos(\theta_0+\Delta\theta) - \cos(\theta_2+\theta_0+\Delta\theta)\right]$$

$$H_1 = R\left[1-\cos(\theta_1-\theta_0-\Delta\theta)\right]$$

$$H_1' = R\left[1-\cos(\theta_0+\Delta\theta)\right]$$

با بسط دادن روابط بالا و فرض اینکه $\cos(\Delta\theta)\simeq 1$, $\sin(\Delta\theta)=\Delta\theta$:

$$H_2 = R\left[\cos\theta_0 - \sin\theta_0 \Delta\theta - \cos(\theta_2+\theta_0) + \sin(\theta_2+\theta_0)\Delta\theta\right]$$

$$= R\left(\cos\theta_0 - \cos(\theta_2+\theta_0)\right) + R\left[\sin(\theta_2+\theta_0) - \sin\theta_0\right]\Delta\theta$$

$$H_1 = R\left[1-\cos(\theta_1-\theta_0) - \sin(\theta_1-\theta_0)\Delta\theta\right] = R\left(1-\cos(\theta_1-\theta_0)\right) - R\sin(\theta_1-\theta_0)\Delta\theta$$

$$H_1' = R\left(1-\cos\theta_0 + \sin\theta_0\,\Delta\theta\right) = R\left(1-\cos\theta_0\right) + R\sin\theta_0\,\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_2 = h_2 + R\left[\sin(\theta_2+\theta_0) - \sin\theta_0\right]\Delta\theta \\ H_1 = h_1 - R\sin(\theta_1-\theta_0)\,\Delta\theta \\ H_1' = h_1' + R\sin\theta_0\,\Delta\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta P = R\Delta\theta\left[\rho_2\sin(\theta_2+\theta_0) - \rho_2\sin\theta_0 + \rho_1\sin(\theta_1-\theta_0) + \rho_1\sin\theta_0\right]$$

$$= R\Delta\theta\Big[\rho_2\sin\theta_2\cos\theta_0 + \rho_2\cos\theta_2\sin\theta_0 - \rho_2\sin\theta_0$$
$$\rho_1\sin\theta_1\cos\theta_0 - \rho_1\cos\theta_1\sin\theta_0 + \rho_1\sin\theta_0\Big]$$

$$= R\Delta\theta\left[\rho_1\sin\theta_0\left[1-\cos\theta_1\right] - \rho_2\sin\theta_0\left[1-\cos\theta_2\right] + \cos\theta_0\left(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2\right)\right]$$

$$= R\Delta\theta\left(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2\right)\cos\theta_0\left[1 + \tan\theta_0 \cdot \frac{\rho_1(1-\cos\theta_1) - \rho_2(1-\cos\theta_2)}{\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2}\right]$$

$$\Delta P = R.\Delta\theta.(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)\cos\theta_0 \left[1 + \tan^2\theta_0\right]$$

$$= R\Delta\theta\,(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)\,\frac{1}{\cos\theta_0}$$

با نوشتن معادله نیرو :

$$\Rightarrow \text{اندازه نیروی بازگرداننده} = \Delta P\, a = \frac{R(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)}{\cos\theta_0}\, a\,\Delta\theta$$

ت)

$$-\Delta P\, a = \underbrace{(\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2)Ra}_{\text{جرم کل}}\,(\ddot{\Delta\theta})$$

$$\Rightarrow -R\frac{(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)}{\cos\theta_0}\, a\,\Delta\theta = (\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2)Ra(\ddot{\Delta\theta})$$

$$\Rightarrow (\ddot{\Delta\theta}) + \left(\frac{\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2}{\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2}\right)\frac{1}{\cos\theta_0}.\Delta\theta = 0$$

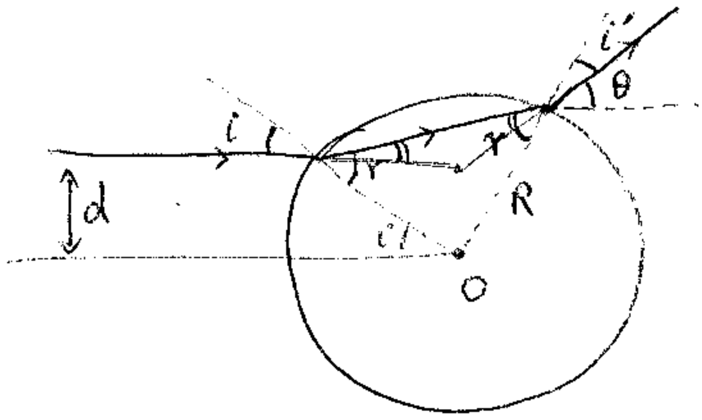
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2}{\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2}\cdot\frac{1}{\cos\theta_0} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

با جایگذاری مقدار $\cos\theta_0$ از رابطه: $\sqrt{1+\tan^2\theta_0} = \frac{1}{\cos\theta_0}$ و روابط $\omega = \frac{2\pi}{T}$، مقدار دوره تناوب بدست می‌آید:

$$\boxed{T = 2\pi\left[\frac{\rho_1\theta_1 + \rho_2\theta_2}{\left[(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2)^2 + \left(\rho_1(1-\cos\theta_1) + \rho_2(1-\cos\theta_2)\right)^2\right]^{1/2}}\right]^{1/2}}$$

-۳

آ)



$$\sin i = \frac{d}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} n\sin i &= \sin r \\ \sin r &= n\sin i' \end{aligned}\right\} i' = i$$

$$\theta = 2(r-i) \longrightarrow \sin\theta = \sin[2(r-i)] = \sin(2r-2i)$$

$$\sin\theta = \sin 2r \cdot \cos 2i - \cos 2r \cdot \sin 2i$$

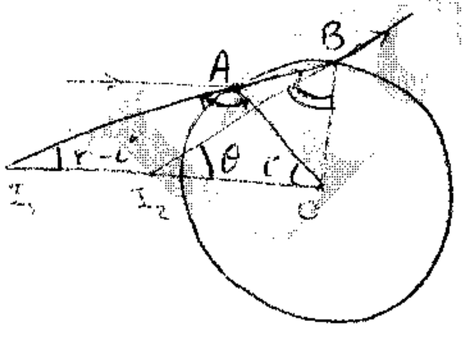
$$= 2\sin r \cdot \cos r \cdot (1-2\sin^2 i) - 2\sin i \cdot \cos i \cdot (1-2\sin^2 r)$$

$$= 2n\sin i\sqrt{1-n^2\sin^2 i}\,(1-2\sin^2 i) - 2\sin i\sqrt{1-\sin^2 i}\,(1-2n^2\sin^2 i)$$

$$= 2\sin i\left[n\sqrt{1-n^2\sin^2 i}\,(1-2\sin^2 i) - \sqrt{1-\sin^2 i}\,(1-2n^2\sin^2 i)\right]$$

$$\boxed{\sin\theta = 2\frac{d}{R}\left[n\sqrt{1-\frac{n^2d^2}{R^2}}\left(1-\frac{2d^2}{R^2}\right) - \sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}\cdot\left(1-\frac{2n^2d^2}{R^2}\right)\right]}$$

ب)



$$A = \pi - r \quad , \quad B = i$$

با استفاده از قانون سینوس ها :

$$\frac{R}{\sin(r-i)} = \frac{OI_1}{\sin(\pi-r)} \Rightarrow OI_1 = R\cdot\frac{\sin r}{\sin(r-i)}$$

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{OI_2}{\sin i} \Rightarrow OI_2 = R\cdot\frac{\sin i}{\sin\theta}$$

$$OI_1 = R\,\frac{n\sin i}{\sin r\cdot\cos i - \cos r\cdot\sin i} = \frac{n\frac{d}{R}R}{n\frac{d}{R}\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}} - \frac{d}{R}\sqrt{1-n^2\frac{d^2}{R^2}}}$$

$$\boxed{OI_1 = \frac{nR}{\sqrt{n^2-(\frac{nd}{R})^2} - \sqrt{1-(\frac{nd}{R})^2}}}$$ ☆

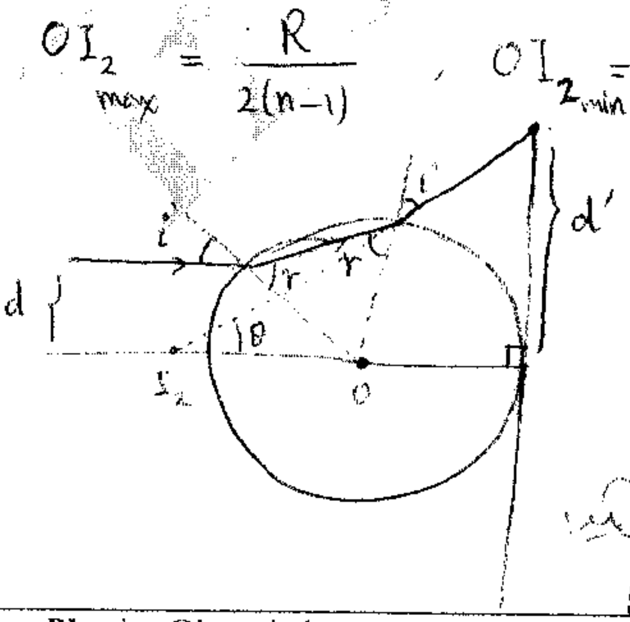
$$OI_2 = \frac{R\,\frac{d}{R}}{2\frac{d}{R}\left[(1-\frac{2d^2}{R^2})\sqrt{1-\frac{n^2d^2}{R^2}}\cdot n - (1-\frac{2n^2d^2}{R^2})\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}\right]}$$

$$\Rightarrow OI_2 = \frac{R}{2}\cdot\boxed{\frac{1}{n(1-\frac{2d^2}{R^2})\sqrt{1-(\frac{nd}{R})^2} - (1-2\frac{n^2d^2}{R^2})\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}}}$$ ☆

ب)

$$OI_{1_{max}} = \frac{nR}{n-1}, \quad OI_{1_{min}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2-(\frac{nD}{R})^2} - \sqrt{1-(\frac{nD}{R})^2}}$$ ☆

$$OI_{2_{max}} = \frac{R}{2(n-1)}, \quad OI_{2_{min}} = \frac{R}{2}\cdot\frac{1}{n(1-\frac{2D^2}{R^2})\sqrt{1-\frac{n^2D^2}{R^2}} - (1-\frac{2n^2D^2}{R^2})\sqrt{1-\frac{D^2}{R^2}}}$$ ☆



ج)

$$I\pi D^2 = \bar{I}\,\pi\, d'^2_{max}$$

$$\Rightarrow \bar{I} = I\left(\frac{D}{d'_{max}}\right)^2$$

مقدار d' با استفاده از هندسه شکل بدست می‌آید!

$$d' = \tan\theta \left[R + OI_2 \right] = \tan\theta \left[R + R\frac{\sin i}{\sin\theta} \right]$$

$$\Rightarrow d' = R\tan\theta \left[1 + \frac{\sin i}{\sin\theta} \right] = R\tan\theta \left[1 + \frac{d}{R\sin\theta} \right]$$

$$= R\tan\theta + \frac{d}{\cos\theta}$$

با توجه به هندسه شکل و همچنین رابطه بدست آمده برای d'، مشخص است که

به ازای $d = D$ (θ_{max})، مقدار d' نیز ماکزیمم می‌شود.

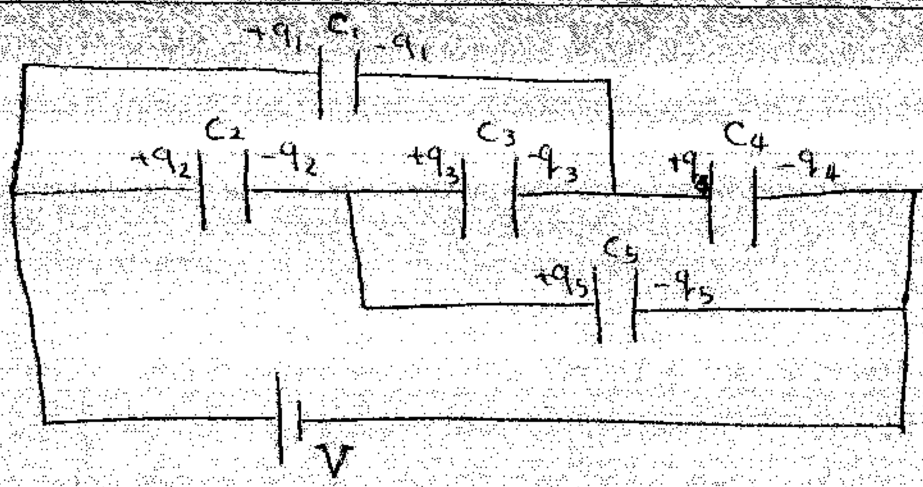
$$d'_{max} = R\tan\theta_{max} + \frac{D}{\cos\theta_{max}} = \frac{D}{\cos\theta_{max}} \left[1 + \frac{R}{D}\sin\theta_{max} \right]$$

$$\Rightarrow d'_{max} = D\,\frac{1 + \frac{R}{D}\sin\theta_{max}}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{max}}} \quad (1)$$

$$\sin\theta_{max} = 2\frac{D}{R}\left[n\sqrt{1 - \frac{n^2D^2}{R^2}}\left(1 - \frac{2D^2}{R^2}\right) - \sqrt{1 - \frac{D^2}{R^2}}\left(1 - \frac{2n^2D^2}{R^2}\right) \right] \quad (2)$$

(1), (2): $$\bar{I} = I\left(\frac{D}{d_{max}}\right)^2$$

۴-



۳) باید ۵ معادله و ۵ مجهول زیر حل شود! $q = CV \Rightarrow V = q/C$

$$\left.\begin{array}{ll} ① & \dfrac{q_1}{c_1} = \dfrac{q_2}{c_2} + \dfrac{q_3}{c_3} \\ ② & \dfrac{q_5}{c_5} = \dfrac{q_3}{c_3} + \dfrac{q_4}{c_4} \\ ③ & V = \dfrac{q_2}{c_2} + \dfrac{q_5}{c_5} \end{array}\right\}$$

قانون حلقه: (جمع ولتاژها)

$$\left.\begin{array}{ll} ④ & -q_1 + q_4 - q_3 = 0 \\ ⑤ & -q_2 + q_5 + q_3 = 0 \end{array}\right\}$$

پایستگی بار

$④ \Rightarrow q_4 = q_1 + q_3$ ، $⑤ \Rightarrow q_5 = q_2 - q_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q_1}{c_1} = \dfrac{q_2}{c_2} + \dfrac{q_3}{c_3} \\ \dfrac{q_2 - q_3}{c_5} = \dfrac{q_3}{c_3} + \dfrac{q_1 + q_3}{c_4} \\ V = \dfrac{q_2}{c_2} + \dfrac{q_2 - q_3}{c_5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q_1}{c_1} - \dfrac{q_2}{c_2} - \dfrac{q_3}{c_3} = 0 \\ \dfrac{q_1}{c_4} - \dfrac{q_2}{c_5} + \left(\dfrac{1}{c_3} + \dfrac{1}{c_5} + \dfrac{1}{c_4}\right) q_3 = 0 \\ \left(\dfrac{1}{c_2} + \dfrac{1}{c_5}\right) q_2 - \dfrac{q_3}{c_5} = V \end{cases}$$

با حل ۳ معادله و ۳ مجهول بدست آمده، مقدار q_1 ، q_2 ، q_3 بدست می آید:

$$q_1 = \left[\frac{C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_1C_5 + C_2C_3 + C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}\right] C_1 V$$

$$q_2 = \left[\frac{C_1C_5 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_1C_5 + C_2C_3 + C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}\right] C_2 V$$

$$q_3 = \left[\frac{C_2C_4 - C_1C_5}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_1C_5 + C_2C_3 + C_2C_4 + C_3C_4 + C_3C_5 + C_4C_5}\right] C_3 V$$

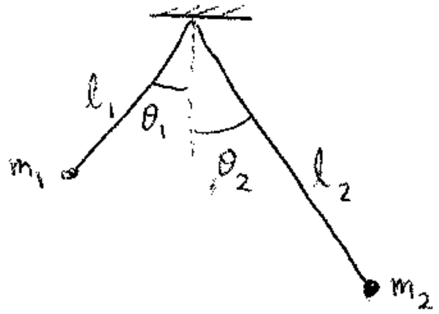
ب) $(q_1 + q_2) = C_e V$ (چرا!؟)

$$\Longrightarrow \quad C_e = \frac{q_1 + q_2}{V}$$

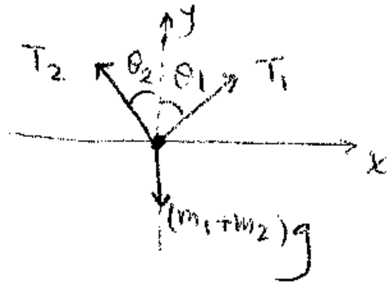
پ) $q_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1C_5 = C_2C_4}$

-۵

آ)



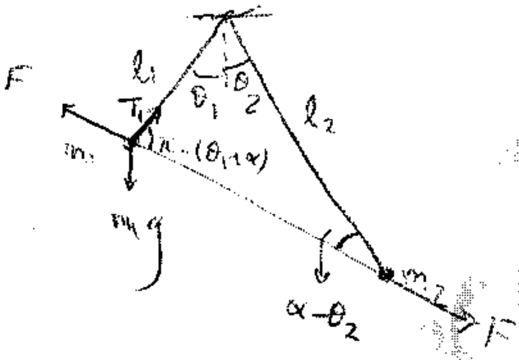
روش اول: نیروهای خارجی وارد شده به مجموع دو بار را در نظر می‌گیریم:

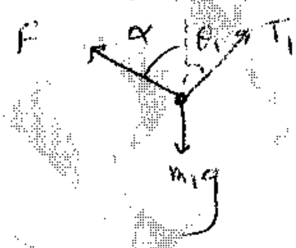


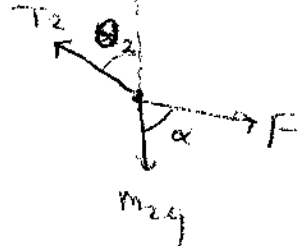
$$\hat{i}: \quad T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2 = 0$$

$$\hat{j}: \quad T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 - (m_1+m_2)g = 0$$

روش دوم: نیروی کولنی بین بارها را در نظر گرفته و برای هر یک از بارها معادله تعادل نیرو را می‌نویسیم







$$\hat{i}: \quad T_1 \sin\theta_1 - F\sin\alpha = 0 \quad , \quad F\sin\alpha - T_2\sin\theta_2 = 0$$

$$\hat{j}: \quad T_1\cos\theta_1 + F\cos\alpha - m_1 g = 0 \quad , \quad T_2\cos\theta_2 - F\cos\alpha - m_2 g = 0$$

ب)

① $\quad T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$

② $\quad \dfrac{m_1 g}{\sin(\alpha+\theta_1)} = \dfrac{T_1}{\sin(\pi-\alpha)} \quad , \quad \dfrac{m_2 g}{\sin(\pi-\alpha+\theta_2)} = \dfrac{T_2}{\sin\alpha} \Longrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_1}{m_2} \cdot \dfrac{\sin(\alpha-\theta_2)}{\sin(\alpha+\theta_1)}$

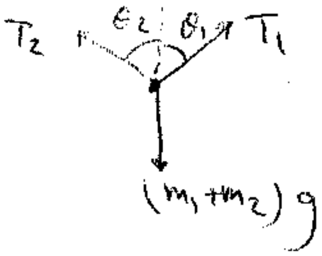
③ $\quad \dfrac{l_1}{\sin(\alpha-\theta_2)} = \dfrac{l_2}{\sin(\pi-\alpha-\theta_1)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{\sin(\alpha-\theta_2)}{\sin(\alpha+\theta_1)}$

با ترکیب سه معادله بدست آمده از قانون سینوس ها :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\sin(\alpha-\theta_2)}{\sin(\alpha+\theta_1)} = \frac{m_1}{m_2}\,\frac{l_1}{l_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}}$$

ج)

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}$$

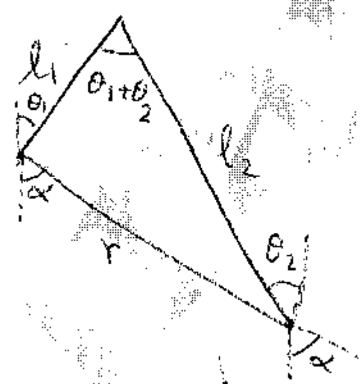


قانون سینوس ها :

$$\frac{(m_1+m_2)g}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{T_1}{\sin(\pi-\theta_2)} = \frac{T_2}{\sin(\pi-\theta_1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} T_1 = \dfrac{(m_1+m_2)g}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot\sin\theta_2 \\ T_2 = \dfrac{(m_1+m_2)g}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot\sin\theta_1 \end{cases}}$$

د) با استفاده از هندسه شکل و تعادل نیروها و قانون سینوس ها



$$\frac{r}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{l_1}{\sin(\alpha-\theta_2)} = \frac{l_2}{\sin(\alpha+\theta_1)}$$

$$\frac{F}{\sin\theta_1} = \frac{m_1 g}{\sin(\alpha+\theta_1)}$$

$$\frac{F}{\sin\theta_2} = \frac{m_2 g}{\sin(\alpha-\theta_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{F}\,\frac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{l_2}{m_1 g}\ ,\quad \frac{r}{F}\,\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{l_1}{m_2 g}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{F}\right)^2 \frac{\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = \frac{l_1 l_2}{m_1 m_2 g^2} \quad , \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}$$

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad , \quad r^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \quad , \quad x = \cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r^3}{k q_1 q_2}\right)^2 = \frac{l_1 l_2}{m_1 m_2 g^2} \cdot \frac{1-x^2}{\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} \cdot \sin^2\theta_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r^2)^3 = \left(\frac{k q_1 q_2 \cdot l_2}{m_1 g}\right)^2 \cdot \frac{1-x^2}{\sin^2\theta_1}$$

$$\Rightarrow \left(l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 x\right)^3 = \left(\frac{k q_1 q_2 l_2}{m_1 g}\right)^2 \cdot \frac{1-x^2}{\sin^2\theta_1} \quad \star$$

حال کافی است $\sin^2\theta_1$ را برحسب x محاسبه کنیم

$$x = \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1-\sin^2\theta_1} \cdot \sqrt{1-\sin^2\theta_2} - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \quad , \quad \sin\theta_2 = \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} \sin\theta_1$$

$$\Rightarrow \left[x + \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} \sin^2\theta_1\right]^2 = (1-\sin^2\theta_1)\left(1 - \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^2\theta_1\right)$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{\left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^4\theta_1} + 2\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} x \cdot \sin^2\theta_1 = 1 - \sin^2\theta_1 - \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 + \cancel{\left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2 \sin^4\theta_1}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_1 \left[1 + 2\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} x + \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2\right] = 1 - x^2 \quad \star$$

با جایگذاری رابطه بدست آمده در رابطه قبلی، رابطه ای برحسب x و پارامترهای معلوم مسئله بدست می آید:

$$\Rightarrow \left(l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 x\right)^3 = \left(\frac{k q_1 q_2 l_2}{m_1 g}\right)^2 \cdot \left[1 + 2\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} x + \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow 8 l_1^3 l_2^3 \left[\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2} - x\right]^3 = \left(\frac{k q_1 q_2}{g}\right)^2 \cdot \frac{l_2^2}{m_1^2} \cdot \left[1 + 2\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} x + \left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)^3 - x^3 - 3\left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)^2 x + 3\left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2}\right) x^2$$

$$= \left(\frac{k q_1 q_2}{2 l_1 l_2 g}\right)^2 \left[\frac{l_1}{2 l_2 m_2^2} + \frac{l_2}{2 l_1 m_1^2} + \frac{x}{m_1 m_2}\right]$$

با مرتب کردن عبارت بالا برحسب جملات x، مقادیر a، b، c به ترتیب زیر بدست می آید:

$\Rightarrow$

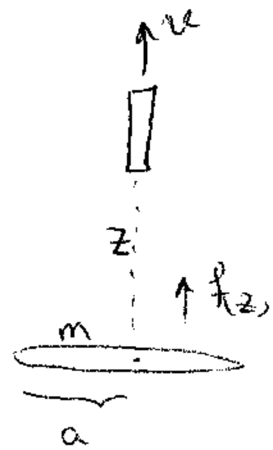
$$a = \frac{-3\left(l_1^2 + l_2^2\right)}{2 l_1 l_2}$$

$$b = 3\left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)^2 + \frac{1}{m_1 m_2}\left(\frac{k q_1 q_2}{2 l_1 l_2 g}\right)^2$$

$$c = \left(\frac{k q_1 q_2}{2 l_1 l_2 g}\right)^2 \cdot \left(\frac{l_1}{2 l_2 m_2^2} + \frac{l_2}{2 l_1 m_1^2}\right) - \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)^3$$

۴-

آ)



$$\phi = \pi a^2 f_{(z)}$$

$$\mathcal{E} = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| = \pi a^2 \cdot \frac{df_{(z)}}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{df}{dz} = v\,\frac{df}{dz}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{E} &= \pi a^2 v \frac{df}{dz} \\ \mathcal{E} &= RI \end{aligned}\right\} \quad \boxed{I = \left(\frac{\pi a^2 v}{R}\right) \cdot \frac{df}{dz}}$$

جریان مثبت (چرا؟)

ب)

$$RI^2 = Fv \Rightarrow F = \frac{RI^2}{v} \Rightarrow \boxed{F = \frac{\pi^2 a^4 v}{R} \cdot \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$$

نیروی وارد شده به حلقه

جهت نیرو رو به بالا است (چرا؟)

پ)

$$mg \leq F \Rightarrow mg \leq \frac{\pi^2 a^4}{R} v \left(\frac{df}{dz}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v \geq \frac{mgR}{\left(\pi a^2 \cdot \frac{df}{dz}\right)^2} = v_{min}}$$

جهت سرعت آهنربا باید به سمت بالا باشد (چرا؟)

-۷

آ)

$$P_B V = N_B RT$$

N_B : تعداد مول

V : حجم

$$\Rightarrow P_B = \frac{N_B}{V} RT$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = n_B RT}$$

ب)

$$W = P_B \Delta V \longrightarrow \boxed{W = n_B RT.\Delta V}$$

پ)

$$NaCl \longrightarrow Na^+ + Cl^-$$

$$\text{غلظت نمک محلول در آب} = 40\ gr/lit = 40\times10^3\ gr/m^3$$

$$\text{جرم مولی نمک} = 58\ gr/mol$$

$$\text{تعداد مول نمک موجود در یک متر مکعب} = \frac{40\times10^3}{58} = 689.7\ mol/m^3$$

با توجه به واکنش تجزیه نمک، از یک مول نمک، دو مول یون گازی بدست می‌آید

$$\Rightarrow n_B = 1379.4\ mol/m^3 \qquad \Delta V = 1\,m^3$$

$$\Rightarrow W = 1379.4\times8.3\times(27+273)\times1 = 3.43\times10^6\ J$$

$$1\ Kwhr = 1000\times3600 = 3.6\times10^6\ J$$

$$\Rightarrow W = \frac{3.43}{3.6} \simeq 0.95\ Kwh \xrightarrow{\text{بازده}=70\%} W_{\text{کل}} = \frac{0.95}{0.7} = 1.36\ Kwhr$$

باسمه تعالی

وزارت آموزش‌و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

«مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست.»

امام خمینی (ره)

بیست‌و چهارمین المپیاد فیزیک کشور

مرحلهٔ دوم

آزمون نظری: سه شنبه ۹۰/۲/۶

مدت آزمون: ۳/۵ ساعت — شروع: ۹:۱۵ الی ۱۲:۴۵

تذکرات:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

۱) این قسمت از آزمون شامل ۸ سؤال و وقت پاسخگویی به آن ۳/۵ ساعت است.

۲) همهٔ سؤال‌ها نمرهٔ مساوی دارد.

۳) هنگام آزمون همراه داشتن ماشین **حساب** و **تلفن همراه** (خاموش یا روشن)تخلف محسوب می‌شود. لذا تلفن همراه و ماشین حساب خود را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.

۴) دانش‌آموزان کلاس دوم به دورهٔ تابستان راه پیدا نمی‌کنند و این آزمون برای آن ها تنها جنبهٔ تشویقی و آمادگی برای سال آینده دارد.

۵) نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

۱. میله‌ی رسانای AB به طول ℓ و جرم m و مقاومت الکتریکی R توسط میله‌های سبک و با مقاومت ناچیز AD و BC به طول b به میله‌ی ثابت و با مقاومت ناچیز DC وصل شده است. دستگاه می‌تواند حول میله‌ی DC بچرخد. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به طرف بالا و شتاب گرانش به طرف پایین است. در ابتدا مستطیل ABCD افقی است و از این وضعیت رها می‌شود. لحظه‌ای را در نظر بگیرید که دستگاه به اندازه‌ی زاویه‌ی θ نسبت به حالت افقی چرخیده و سرعت زاویه‌ای آن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ است. در این لحظه

(الف) شدت جریان را در مدار حساب کنید.

(ب) نیروی F وارد شده از طرف میدان مغناطیسی به میله‌ی AB را حساب کنید.

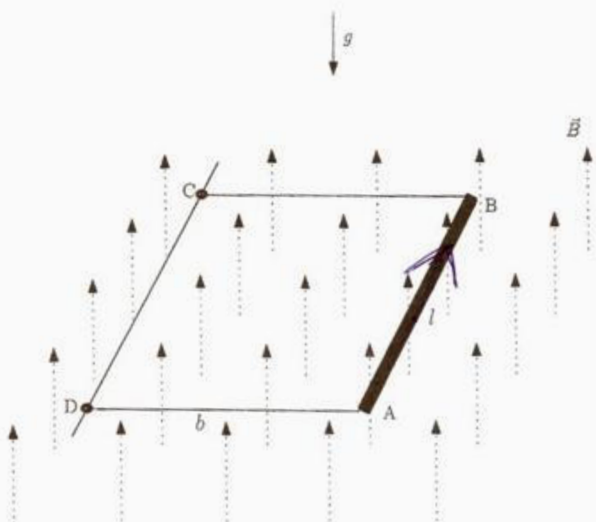
(ج) آهنگ انجام کار توسط نیروی F، $\frac{dW}{dt}$، را حساب کنید.

(د) آهنگ تولید گرما در مقاومت را حساب کنید.

(ه) آهنگ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی میله‌ی AB را حساب کنید.

(و) آهنگ تغییرات انرژی جنبشی دستگاه را حساب کنید.

توجه: کلیه‌ی پاسخها را بر حسب داده‌های مسئله بنویسید.



۲. لوله‌ای استوانه‌ای به شعاع مقطع r بر روی سطح افقی زمین ثابت است. گلوله‌ی کوچکی از سطح زمین پرتاب می‌شود و از روی لوله می‌گذرد. صفحه‌ی حرکت گلوله (صفحه‌ی xy) بر محور استوانه عمود است. مسیر گلوله در نقاط A و A′ که در شکل با زاویه‌ی θ مشخص شده اند بر لوله مماس است. مقاومت هوا و اتلاف انرژی گلوله در لحظه‌ی تماس با لوله ناچیز و شتاب گرانش در محل g است.

(الف) سرعت گلوله در نقطه‌ی A را بر حسب r و θ و g پیدا کنید.

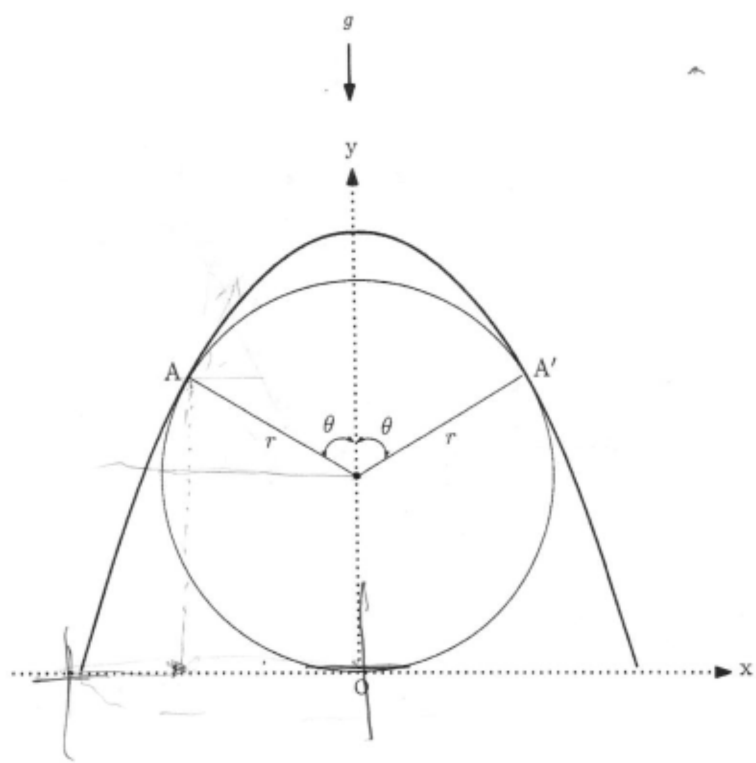
(ب) سرعت پرتاب گلوله از سطح زمین را بر حسب r و θ و g به دست آورید.

(ج) ارتفاع نقطه‌ی اوج گلوله از سطح زمین را بر حسب r و θ و g پیدا کنید.

(د) سرعت پرتاب گلوله چقدر باشد تا مسیر گلوله در بالاترین نقطه بر لوله مماس باشد؟ یعنی نقطه‌ی تماس نقطه‌ی $\theta = 0$ باشد.

(ه) کمترین مقدار سرعت پرتاب گلوله چقدر باشد تا گلوله از روی استوانه رد شود؟ وضعیت‌هایی که گلوله در بخشی از مسیرش روی استوانه لیز می‌خورد را در نظر نگیرید.

(و) مختصه‌ی x نقطه‌ی پرتاب را برای قسمت (ه) به دست آورید.



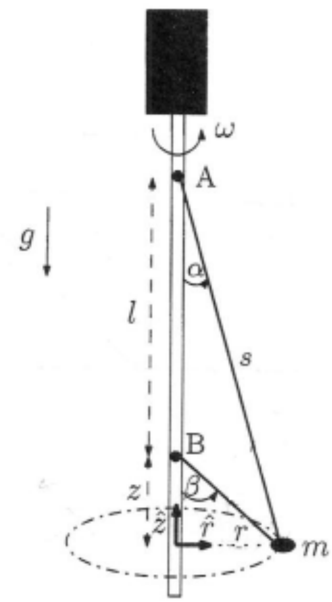
۳. نخ سبکی به طول 2ℓ از داخل مهره‌ای به جرم m عبور کرده و به دو نقطه‌ی ثابت A و B از یک میله‌ی قائم، به فاصله‌ی ℓ از یکدیگر، بسته شده است. این مجموعه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور قائم می‌چرخد، طوری که مهره در یک صفحه‌ی ثابت افقی حرکت می‌کند. از اصطکاک بین نخ و مهره صرف نظر کنید.

(الف) قانون دوم نیوتن را در دو راستای $\hat{r}$ و $\hat{z}$ بنویسید. از متغیرهای کمکی α، β، و r که روی شکل مشخص شده اند استفاده کنید.

(ب) $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ را بر حسب r و s و ℓ؛ و $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ را بر حسب z و s و ℓ بنویسید. z فاصله‌ی نقطه‌ی B از صفحه‌ی حرکت مهره، و s فاصله‌ی نقطه‌ی A از مهره است.

(ج) z، s، $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و نیروی کشش در طول نخ را بر حسب m، ℓ، ω، و g به دست آورید.

(د) کمترین مقدار سرعت زاویه‌ای ω چقدر باشد که مهره بر روی دایره‌ای به شعاع $r \neq 0$ حول میله بچرخد؟

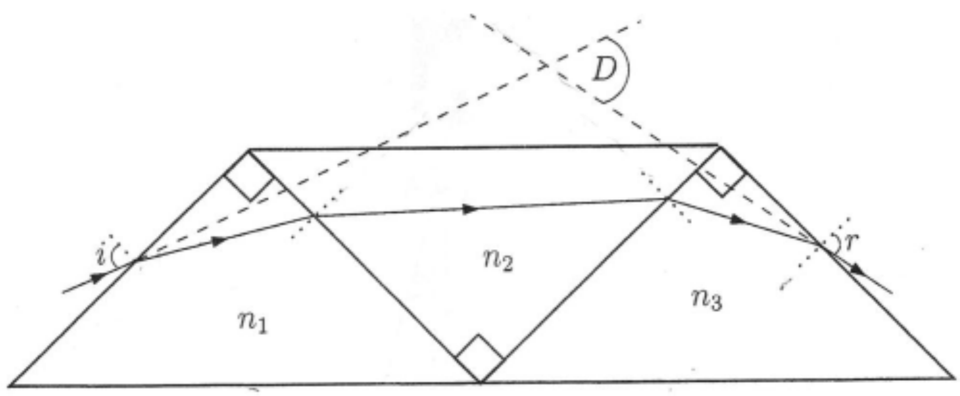


۴. سه منشور که قاعده‌ی هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است مطابق شکل به هم چسبیده اند. ضریب شکست منشورها n_1 و n_2 و n_3 است. یک پرتوی نور از هوا به منشوری که در سمت چپ است می‌تابد و از منشوری که در سمت راست است وارد هوا می‌شود. زاویه‌ی تابش پرتوی فرودی به منشور چپ را i و زاویه‌ی شکست پرتوی خروجی از منشور راست را r بنامید. فرض کنید مسیر پرتوها چنان است که در هیچ کدام از سطوح جدایی بازتاب کلی رخ نمی‌دهد.

(الف) r را بر حسب i، n_1، n_2، و n_3 به دست آورید.

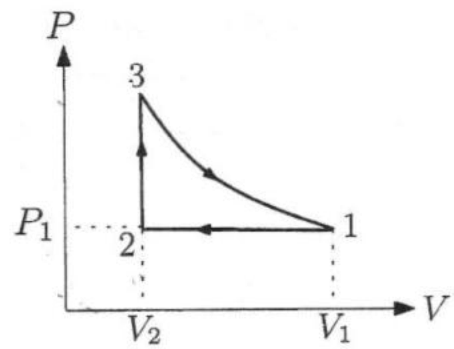
(ب) زاویه‌ی انحراف (زاویه‌ی بین راستای پرتوی تابیده به منشور چپ و راستای پرتوی خروجی از منشور راست)، D، را بر حسب i، n_1، n_2، و n_3 به دست آورید.

(ج) چه رابطه‌ای بین n_1، n_2، و n_3 وجود داشته باشد تا زاویه‌ی انحراف صفر شود؟



۵. معادله‌ی حالت یك گاز غیر ایده‌آل $P\,(V-nb)=n\,RT$ و انرژی داخلی آن $U=nC_{MV}\,T$ است. P فشار، V حجم، n تعداد مول، T دما ی مطلق، C_{MV} ظرفیت گرمایی م لی در حجم ثابت، R ثابت جهانی گازها و b ثابتی است که به جنس گاز بستگی دارد. C_{MV} را ثابت بگیرید.

چرخه‌ی کار یک ماشین گرمایی که با این گاز کار می‌کند به صورت زیر است. در این چرخه فرآیند $1\to 3$ بی‌دررو است، که در آن کمیت $T(V-nb)^{R/C_{MV}}$ ثابت است. بازده این ماشین گرمایی را بر حسب V_1، V_2، P_1، C_{MV}، R، n، و b بنویسید.

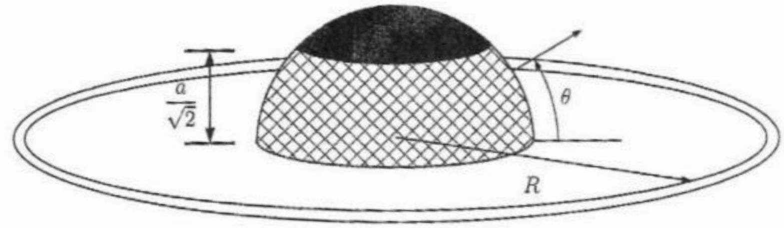


۶. فواره‌ای مطابق شکل از نیم‌کره‌ای به شعاع a تشکیل شده که بخشی از سطح آن به طور یکنواخت سوراخ شده و آب از این سوراخها با سرعت یکسان v_0 خارج می‌شود. تعداد سوراخها در واحد سطح نیم‌کره n_0 است. مقدار آبی که در واحد زمان از هر سوراخ خارج می‌شود را Q بگیرید.

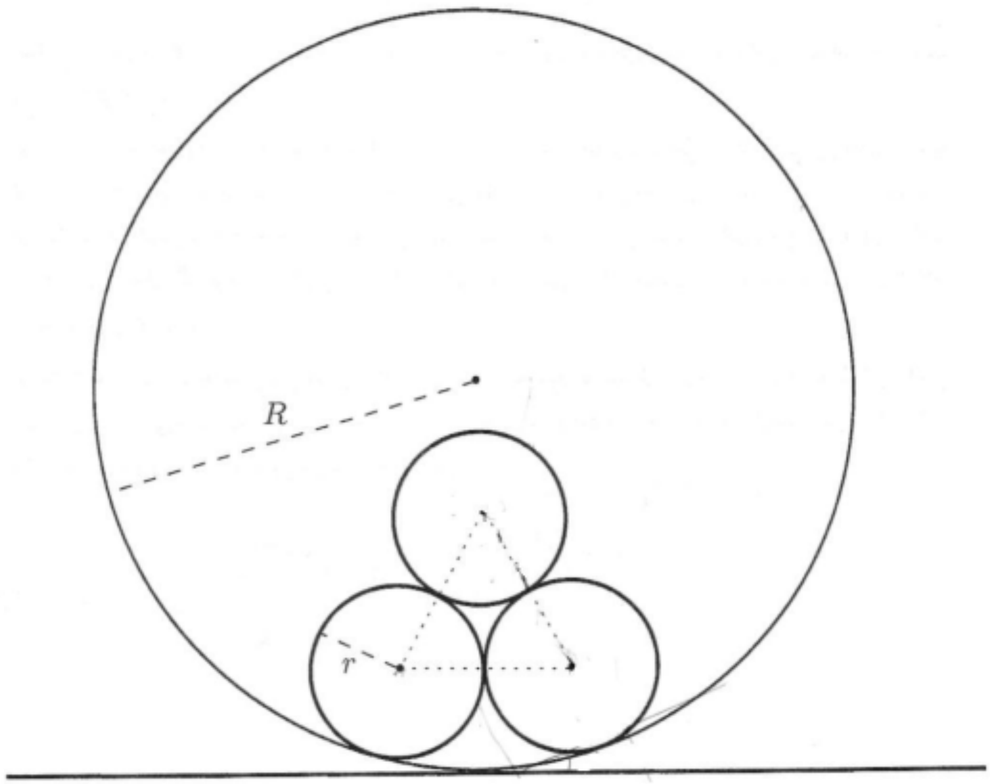
(الف) قطره آبی که زاویه‌ی پرتابش از فواره θ است در چه فاصله‌ای از مرکز نیم‌کره، R، به زمین می‌رسد؟ برای سهولت فرض کنید a کوچک است، به طوری که قطره از مرکز نیم‌کره باسرعت v_0 پرتاب می‌شود.

(ب) قطره‌هایی که زاویه‌ی پرتابشان بین θ و $\theta + \Delta\theta$ است در فاصله‌ی بین R و $R + \Delta R$ از مرکز نیم‌کره به زمین می‌رسند. ΔR چه‌قدر است؟ $\Delta\theta$ را خیلی کوچک بگیرید. از توانهای دوم و بالاتر $\Delta\theta$ چشم‌پوشی کنید، و ΔR را به صورت ضریبی از $\Delta\theta$ به دست آورید.

(ج) مقدار آبی که در واحد زمان به واحد سطح زمین در فاصله‌ی $R = \frac{\sqrt{3}\,v_0^2}{2g}$ از مرکز نیم‌کره می‌رسد، بر حسب n_0، Q، a، v_0، و g چقدر است؟



۷. سه لوله‌ی استوانه‌ای که طول، جرم، و جنس آنها یکسان و شعاع مقطع آنها r است؛ مطابق شکل درون لوله‌ی استوانه‌ای بزرگتری به شعاع R در حال تعادل و ساکن اند و در این حالت هر سه لوله‌ی درونی بر هم مماس اند. لوله‌ی بزرگتر به سطح افقی زمین چسبیده است. اصطکاک بین لوله‌ها ناچیز است. اگر $\frac{R}{r}$ از حد معینی بزرگتر باشد لوله‌ای که بالاتر قرار گرفته جای خود را بین دو لوله باز می‌کند. نسبت $\frac{R}{r}$ حداکثر چقدر باشد تا لوله‌های درونی به هم مماس بمانند؟



۸. اگر سه رسانای مجزای 1 و 2 و 3 را به پتانسیل‌های V_1 و V_2 و V_3 نسبت به زمین ببندیم؛ بار روی آنها به ترتیب Q_1 و Q_2 و Q_3 می‌شود، به طوری که

$$Q_1 = \alpha_1 V_1 + \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3$$

$$Q_2 = \alpha_2 V_1 + \beta_2 V_2 + \gamma_2 V_3$$

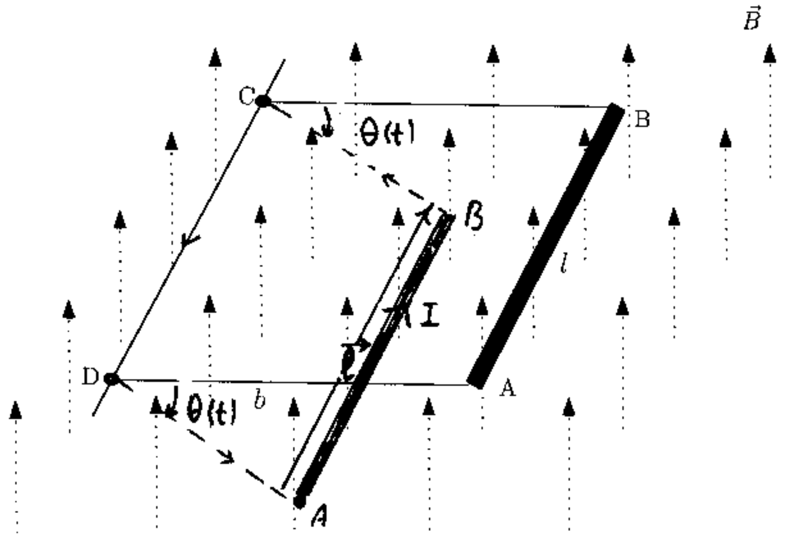
$$Q_3 = \alpha_3 V_1 + \beta_3 V_2 + \gamma_3 V_3$$

ضرایب ثابت α_1، β_1، γ_1، α_2، β_2، γ_2، α_3، β_3؛ و γ_3 در رابطه فوق به شکل رساناها و موقعیت فضایی آنها نسبت به هم بستگی دارند.

در حالی که رساناهای 2 و 3 به زمین متصلند رسانای 1 را به پتانسیل 10 ولت وصل می‌کنیم. در این حال بارها به ترتیب $Q_1 = 25\,\mu\text{C}$، $Q_2 = 10\,\mu\text{C}$ و $Q_3 = 15\,\mu\text{C}$ می‌شوند. اگر علاوه بر رسانای 1، رسانای 2 را هم به پتانسیل 10 ولت وصل کنیم و رسانای 3 همچنان به زمین وصل باشد، بارها چنین خواهد بود: $Q_1 = 35\,\mu\text{C}$، $Q_2 = 60\,\mu\text{C}$و $Q_3 = 25\,\mu\text{C}$. حال اگر هر سه رسانا را به پتانسیل 10 ولت وصل کنیم بارها به صورت زیر خواهند بود: $Q_1 = 50\,\mu\text{C}$، $Q_2 = 70\,\mu\text{C}$و $Q_3 = 50\,\mu\text{C}$.

در حالی که رساناها با حفظ آرایش فضایی‌شان بدون بارند و به هیچ جا اتصال ندارند یک باتری به ولتاژ V را بین رساناهای 1 و 2 می‌بندیم. رسانای 3 در همان محل قبلی بدون بار و اتصال حضور دارد. ظرفیت خازنی که به این ترتیب بین رساناهای 1 و 2 تشکیل می‌شود چقدر است؟

۱.



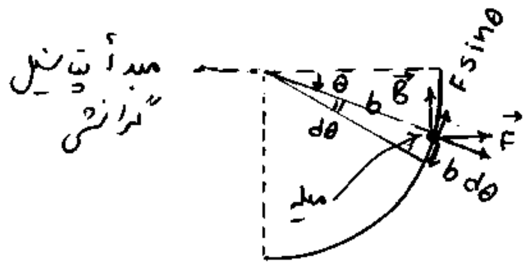
اگر در لحظه t ، زاویه صفحه ABCD با صفحه افقی اولیه $\theta(t)$ باشد شار مغناطیسی گذرنده از حلقه ABCD برابراست با

الف) $\phi_B = \ell b \cos\theta(t)\ B$

نیروی محرکه القایی $\mathcal{E} = \left|-\frac{d\phi_B}{dt}\right|$ و $\mathcal{E} = IR$.

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \ell b B \underbrace{\frac{d\theta(t)}{dt}}_{\omega}\left(-\sin\theta(t)\right) \Rightarrow I = \frac{\omega b \ell B \sin\theta}{R}$$

ب) $\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B}$, $\vec{\ell}\perp\vec{B} \Rightarrow F = I\ell B \Rightarrow F = \frac{\omega b \ell^2 B^2 \sin\theta}{R}$



ج) با توجه به شکل، هنگام جابجایی میله AB به اندازه $d\theta$ ، جابجایی $b\,d\theta$ و نیرو در خلاف جهت آن $F\sin\theta$ است. بنابراین

$$dW_F = -(F\sin\theta)\, b\, d\theta$$

در نتیجه

$$\frac{dW_F}{dt} = -Fb\sin\theta \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = -\frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$

د)

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$

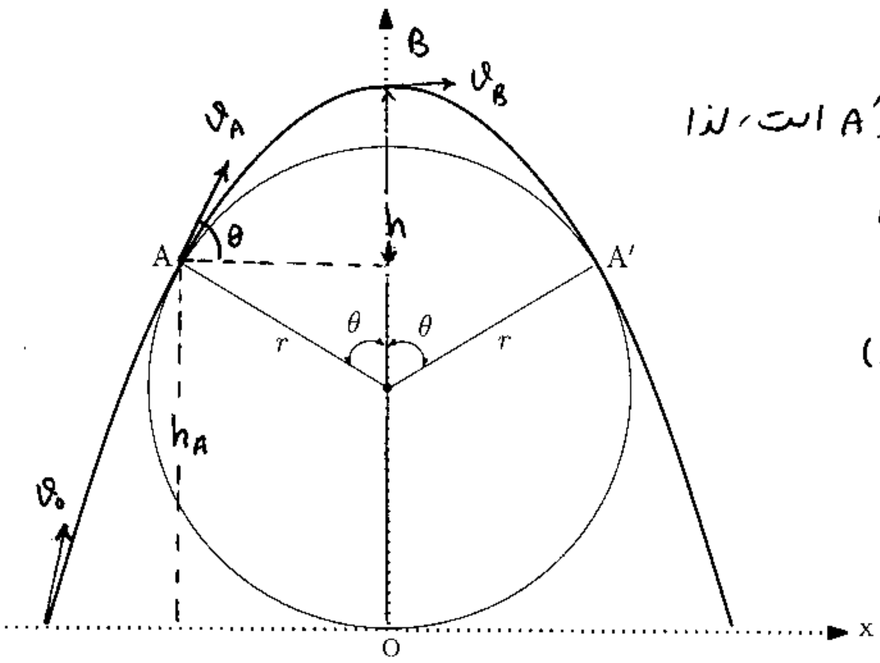
هـ) با توجه به شکل قسمت ج) و نسبت به مبدأ مشخص شده، انرژی پتانسیل گرانشی میله برابراست با U .

$$U = -mgb\sin\theta \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -mgb\cos\theta\ \omega$$

و) کار کل انجام شده روی میله سبب تغییر انرژی جنبشی میله می‌شود

$$dT = \underbrace{dW_g}_{\text{کار نیروی وزن}} + \underbrace{dW_F}_{\text{کار نیروی F}}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW_g}{dt} + \frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = mgb\omega\cos\theta - \frac{\omega^2 b^2 \ell^2 B^2 \sin^2\theta}{R}$$



۲.

(الف) AA' برد مسیر بین نقطه‌ی A و A' است، لذا

$$AA' = 2r\sin\theta = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

بنابراین

$$(1) \quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta}}}$$

(ب) در غیاب مقاومت هوا بین نقطه‌ی پرتاب (روی سطح زمین) و نقطه‌ی A تساوی انرژی مکانیکی می‌نویسیم

$$h_A = r + r\cos\theta \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A$$

بنابراین

$$(2) \quad \boxed{v_0 = \sqrt{rg\left(\frac{1}{\cos\theta} + 2 + 2\cos\theta\right)}}$$

(ج) مطابق شکل ارتفاع اوج، $OB = H$، برابر است با

$$H = h_A + h$$

که h ارتفاع اوج پرتابه بین A و A' است، یعنی

$$h = \frac{v_A^2 \sin^2\theta}{2g}$$

بنابراین

$$(3) \quad \boxed{H = r\left(1 + \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right)}$$

(د) اگر پرتابه در نقطه‌ی B بر استوانه مماس شود $\theta = 0$ است و از معادلات (۲) و (۳) داریم

$$H = 2r \quad , \quad \boxed{v_0 = \sqrt{5rg}}$$

(هـ) پرتابه قرار است از نقطه‌ی مناسبی روی سطح زمین با کمینه‌ی سرعتی پرتاب شود که بتواند از روی استوانه بگذرد.

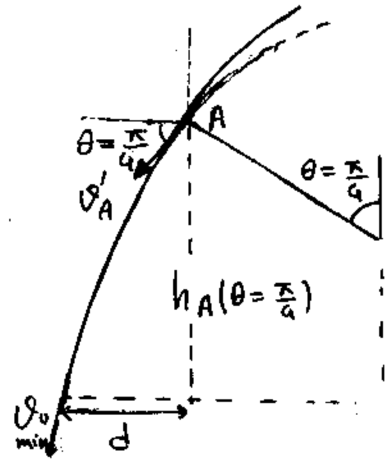
$$\frac{dv_0}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 2\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta\,(1 - 2\cos^2\theta) = 0$$

$\theta = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ ریشه‌ی معادله‌اند.

$$v_0\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})\,rg} \quad , \quad v_0(\theta = 0) = \sqrt{5rg} \quad , \quad \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} < \sqrt{5}$$

بنابراین به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$،

$$\underset{(4)}{\boxed{v_{0\,min} = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})\,rg}}} \quad \text{و} \quad H\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = r\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) > 2r$$



(۶) با توجه به تقارن مسیر، فرض می‌کنیم پرتابه از نقطهٔ A

با سرعت v'_A و زاویهٔ $\theta=\frac{\pi}{4}$ پرتاب شده و با سرعت $v_{0\,min}$ به زمین برسد، یعنی

$$(5)\qquad v_{0\,min}^2 = 2gh_A + v_A'^2$$

و معادله مسیر نسبت به مبدأ واقع در A :

$$(4)\qquad y = -\frac{gx^2}{2v_A'^2\cos^2\theta} + x\tan\theta \quad , \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

با قرار دادن (۴) در (۵) و اینکه

$$h_A = r\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

بدست می‌آوریم :

$$v_A'^2 = \sqrt{2}\,rg$$

مختصات محل برخورد پرتابه به زمین نسبت به A $(d \,,\, -h_A)$ است که در معادله (۴) قرار می‌دهیم

$$-\frac{r}{2}(2+\sqrt{2}) = \frac{-gd^2}{2\sqrt{2}\,rg(\frac{1}{2})} + d(-1)$$

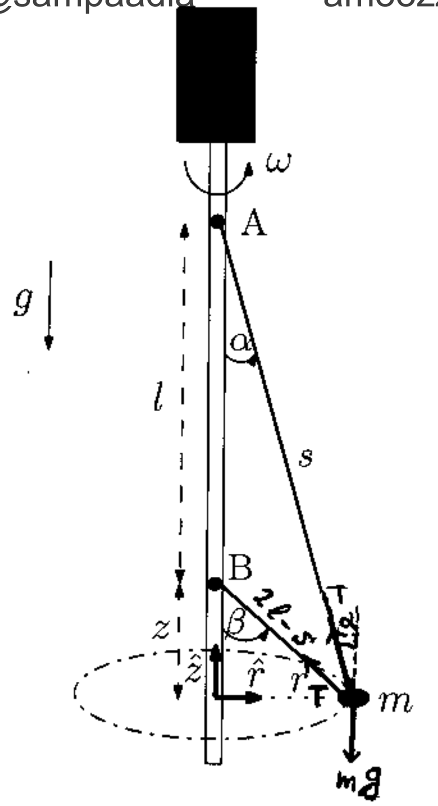
$$\sqrt{2}d^2 + 2rd - r^2(2+\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow d = r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

پس مکان پرتاب از روی سطح زمین نسبت به مبدأ O

$$R = -d - \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{R = -\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}\,r}$$

است.



۳. با صرف‌نظر از نیروی اصطکاک بین نخ و مهره، نیروی کشش

(الف) در طول نخ T است. به جرم m، نیروی وزن mg

و دو نیروی T از طرف نخ وارد می‌شود.

(الف)

$$\hat{z}: \quad T\cos\alpha + T\cos\beta - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\hat{r}: \quad T\sin\alpha + T\sin\beta = mr\omega^2 \qquad (2)$$

(ب)

$$\sin\alpha = \frac{r}{s}, \quad \sin\beta = \frac{r}{2l-s}$$

$$\cos\alpha = \frac{l+z}{s}, \quad \cos\beta = \frac{z}{2l-s} \qquad (3)$$

(ج) از تقسیم معادله (۲) به معادله (۱) و استفاده از معادله (۳):

$$\frac{2lr}{(l+z)(2l-s)+sz} = \frac{r\omega^2}{g} \Rightarrow z = \frac{s}{2} - l + \frac{g}{\omega^2} \qquad (4)$$

از هندسه شکل:

$$r^2 = s^2 + (l+z)^2 = (2l-s)^2 - z^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{-5}{2}l + 2s \qquad (5)$$

از معادله (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$s = l + \frac{2g}{3\omega^2}, \quad z = \frac{-l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l + \frac{2g}{3\omega^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-\frac{l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l - \frac{2g}{3\omega^2}}$$

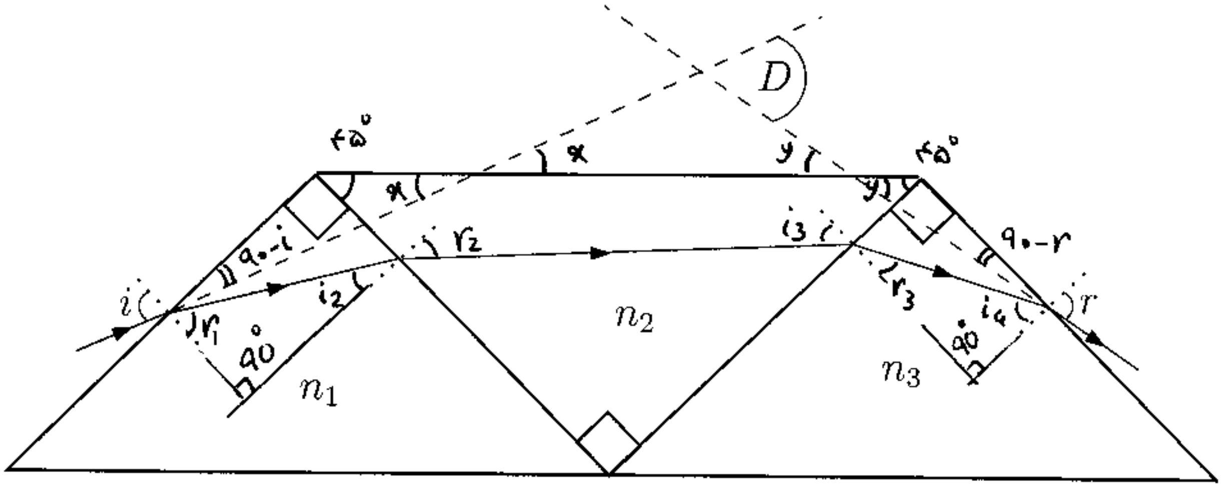
$$T = \frac{mg}{\cos\alpha + \cos\beta} \Rightarrow T = \frac{1 - \frac{4}{9}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)^2}{2\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)} mg$$

(د) پس از محاسبه $\sin\alpha$ از روی $\cos\alpha$:

$$r = s\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}l^2 - \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4}}$$

$$r > 0 \Rightarrow \frac{3}{4}l^2 > \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4} \Rightarrow \omega^2 > \frac{4}{3}\frac{g}{l} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{4g}{3l}}$$

۴.



(الف) قانون اسنل را در مرز هر دو منشور می نویسیم

$$\sin i = n_1 \sin r_1$$
$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2$$
$$n_2 \sin i_3 = n_3 \sin r_3$$
$$n_3 \sin i_4 = \sin r$$

مطابق شکل $r_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ و $r_2 + i_3 = \frac{\pi}{2}$ و $r_3 + i_4 = \frac{\pi}{2}$ بنابراین

$$\sin i = n_1 \cos i_2$$
$$n_2 \cos i_3 = n_1 \sin i_2$$
$$n_2 \sin i_3 = n_3 \cos i_4$$
$$\sin r = n_3 \sin i_4$$

هر معادله را به توان ۲ می رسانیم و سپس با هم جمع می کنیم

$$\Longrightarrow \sin^2 i + n_2^2 + \sin^2 r = n_1^2 + n_3^2$$

$$r = \sin^{-1}\left(\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}\right)$$

(ب) D زاویه خارجی مثلث است که برابر است با مجموع دو زاویه x و y یعنی $D = x + y$

اما با توجه به شکل $90 - i + 135 + x = 180$ و $90 - r + 135 + y = 180$

بنابراین $x = i - 45^\circ$ و $y = r - 45^\circ$ ولذا $D = i + r - 90$

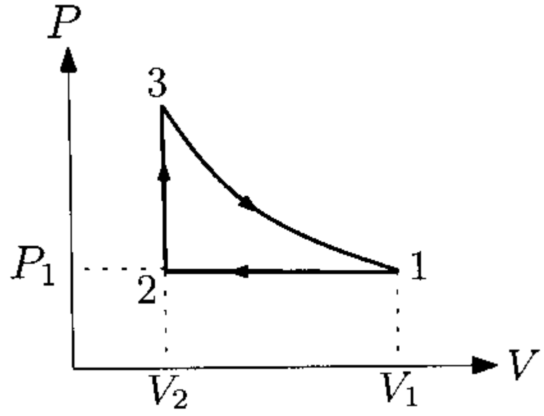
که با قرار دادن r از قسمت الف) در معادله اخیر

$$D = i + \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i} - \frac{\pi}{2}$$

(ج) $D = 0 \Leftarrow \frac{\pi}{2} - i = \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

از دو طرف sin می گیریم $\cos i = \sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

به توان ۲ می رسانیم، در نتیجه $D = 0$ است اگر: $n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 = 1$



۵.

ابتدا با استفاده از معادله حالت گاز

$$P(V-nb)=nRT$$

دما را در نقاط ۱ و ۲ حساب می‌کنیم

$$T_1 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR} \qquad (1)$$

$$T_2 = \frac{P_1(V_2-nb)}{nR} \qquad (2)$$

فرآیند ۱→۳ بی‌دررو است که در آن $T\,(V-nb)^{R/C_{mV}}$ ثابت است پس

$$T_3(V_2-nb)^{R/C_{mV}} = T_1(V_1-nb)^{R/C_{mV}} \qquad (3)$$

که با قرار دادن T_1 از معادله (۱) در (۳)

$$T_3 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR}\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{R/C_{mV}} \qquad (4)$$

در فرآیند $3 \to 1$ ؛ $Q_{3\to1}=0$

در فرآیند $1 \to 2$ برای اینکه در فشار ثابت حجم کاهش یابد، باید گرما از گاز گرفته شود.

در فرآیند $2 \to 3$ برای اینکه در حجم ثابت فشار افزایش یابد، باید به گاز گرما داده شود.

$$Q_{in} = Q_{2\to3} \quad , \quad Q_{out} = |Q_{1\to2}| \quad , \quad W = Q_{in} - Q_{out}$$ (در یک چرخه)

بازده $e = \frac{W}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}}$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه ۱ و ۲ می‌نویسیم

$$U_2 - U_1 = W_{1\to2} + Q_{1\to2}$$

$$U_2 - U_1 = nC_{mV}(T_2-T_1) = \frac{C_{mV}P_1}{R}(V_2-V_1)$$

$$W_{1\to2} = -\int_{V_1}^{V_2} P_1\,dV = -P_1(V_2-V_1)$$

بنابراین

$$Q_{1\to2} = -P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

$$Q_{out} = P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقاط ۲ و ۳ می‌نویسیم

$$U_3 - U_2 = W_{2\to3} + Q_{2\to3}$$

$$U_3 - U_2 = nC_{mv}(T_3 - T_2) = nC_{mv}\left(\frac{P_1(V_1-nb)}{nR}\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{R/C_{mv}} - \frac{P_1(V_2-nb)}{nR}\right)$$

$$= \frac{C_{mv}}{R} P_1 (V_2-nb)\left(\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{\frac{R}{C_{mv}}+1} - 1\right)$$

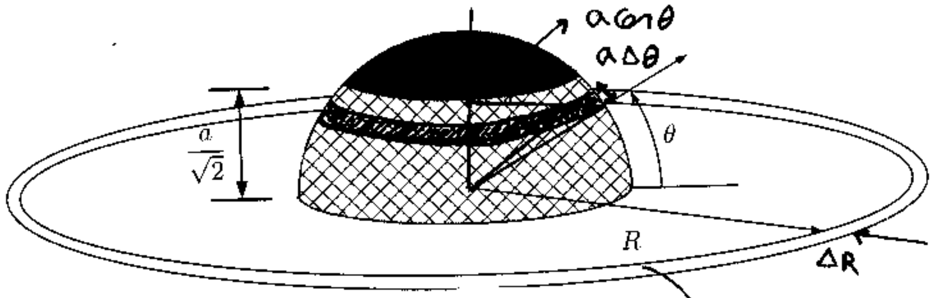
$$W_{2\to3} = 0$$

$$Q_{in} = Q_{2\to3} = \frac{C_{mv}}{R} P_1 (V_2-nb)\left(\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{\frac{R}{C_{mv}}+1} - 1\right)$$

$$e = 1 - \frac{1+\frac{R}{C_{mv}}}{\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{1+R/C_{mv}} - 1}\ \frac{V_1-V_2}{V_2-nb}$$

سرانجام

۶.



مساحت این حلقه $2\pi R\Delta R$ است.

(الف) با فرض اینکه قطره از مرکز نیم‌کره با سرعت v_0 تحت زاویه θ پرتاب می‌شود

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

(ب)

$$\Delta R = R(\theta + \Delta\theta) - R(\theta)$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta\theta} = \frac{R(\theta+\Delta\theta) - R(\theta)}{\Delta\theta}$$

برای $\Delta\theta \to 0$: $\Delta R = \frac{dR}{d\theta}\Delta\theta$

$$\Delta R = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g}\Delta\theta$$

(ج) مقدار آبی که به نواری به مساحت $2\pi R\Delta R$ روی سطح زمین می‌رسد مربوط به نواری روی سطح نیم‌کره به پهنای $a\Delta\theta$ و طول $2\pi a\cos\theta$ است، یعنی مساحت $(2\pi a\cos\theta)(a\Delta\theta)$.

اگر تعداد سوراخ‌ها در واحد سطح نیم‌کره n_0 باشد و از هرکدام در واحد زمان به مقدار Q آب خارج شود، پس از نواری به مساحت $2\pi a^2\cos\theta$ θ مقدار آب خارج شده برابر است با $(2\pi a^2\cos\theta\Delta\theta)(n_0Q)$.

با یک تناسب مقدار $2\pi a^2\cos\theta\Delta\theta n_0Q$ روی سطح $2\pi R\Delta R$ توزیع می‌شود ولذا سهم واحد سطح برابر است با

آب رسیده به واحد سطح زمین در واحد زمان $$= \frac{2\pi a^2 n_0 Q\cos\theta\Delta\theta}{2\pi R\Delta R}$$

با قرار دادن R و ΔR (از قسمت الف) و ب)

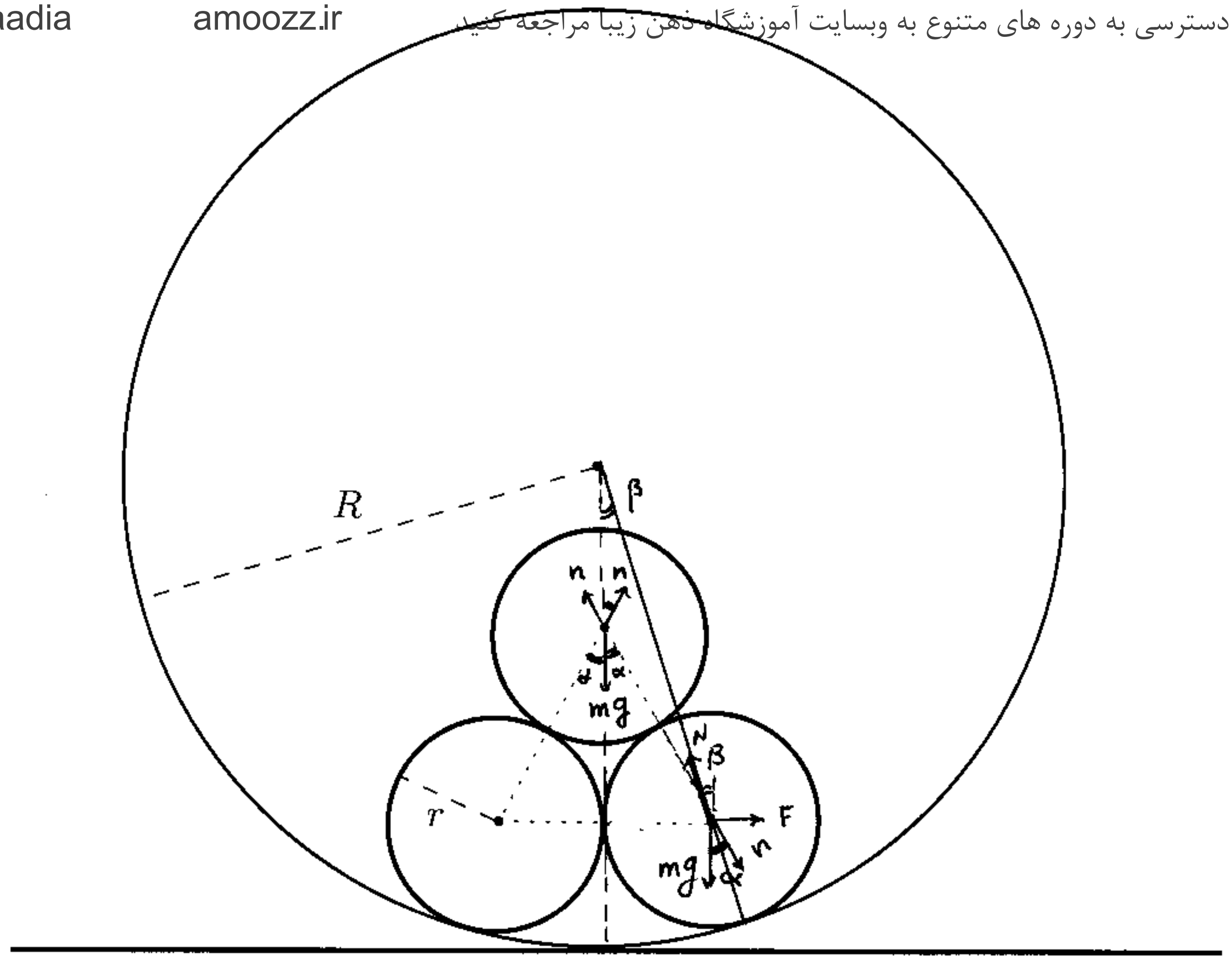
$$= n_0 a^2 Q\left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2 \frac{\cos\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

اما در فاصله $R = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}$ و با توجه به $R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$ داریم $\theta = 30^\circ$ و بنابراین

$$= n_0 a^2 Q\left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2$$

لازم به ذکر است که اگر عدد چین $\theta > \frac{\pi}{4}$ روی سطح کره مسدود نبود از دو زاویه θ آب به برد R می‌رسیدند.

۷.



نیروهای وارد بر استوانه بالایی n و n از سوی دو استوانه زیری و mg وزن آن است.

نیروهای وارد بر استوانه زیری سمت راست n از سوی استوانه بالایی، F از سوی استوانه سمت چپ N از سوی استوانه بزرگ و mg وزن آن است.

شرط تعادل استوانه بالایی:

$$2n\cos\alpha = mg$$

شرط تعادل استوانه زیری:

$$F + n\sin\alpha = N\sin\beta$$
$$N\cos\beta = mg + n\cos\alpha$$

در ضمن، مطابق شکل:

$$\sin\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\beta = \frac{r}{R-r}$$

از سه معادله اول:

$$F = \frac{mg}{2}\left(3\,tg\beta - tg\alpha\right)$$

همچنین

$$tg\beta = \frac{1}{cotg\beta} \quad , \quad 1 + cotg^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow tg\beta = \frac{r}{\sqrt{R^2 - 2rR}}$$

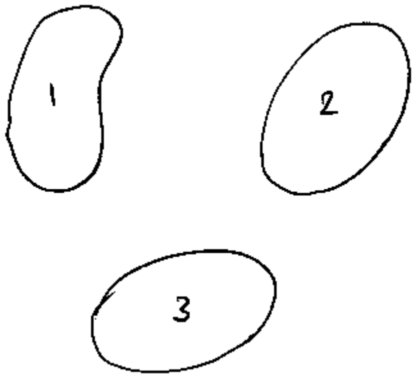
$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین

$$F = \frac{mg}{2}\left(\frac{3r}{\sqrt{R^2-2rR}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

به شرطی لوله‌های زیری در تماس باهم می‌مانند که $F > 0$ باشد یعنی: $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) - 27 < 0$

پس باید $\frac{R}{r} < 1 + 2\sqrt{7}$ و $\left(\frac{R}{r}\right)_{max} = 1 + 2\sqrt{7}$



$Q_1 = 25\ \mu C \quad , \quad Q_2 = 10\ \mu C \quad , \quad Q_3 = 15\ \mu C$

$V_1 = 10\ V \quad , \quad V_2 = 0 \quad , \quad V_3 = 0$

$$\Downarrow$$

$\alpha_1 = 2.5\ \mu C/V \quad , \quad \alpha_2 = 1\ \mu C/V \quad , \quad \alpha_3 = 1.5\ \mu C/V$

$Q_1 = 35\ \mu C \quad , \quad Q_2 = 60\ \mu C \quad , \quad Q_3 = 25\ \mu C$

$V_1 = 10\ V \quad , \quad V_2 = 10\ V \quad , \quad V_3 = 0$

$$\Downarrow$$

$\beta_1 = 1\ \mu C/V \quad , \quad \beta_2 = 5\ \mu C/V \quad , \quad \beta_3 = 1\ \mu C/V$

$Q_1 = 50\ \mu C \quad , \quad Q_2 = 70\ \mu C \quad , \quad Q_3 = 50\ \mu C$

$V_1 = 10\ V \quad , \quad V_2 = 10\ V \quad , \quad V_3 = 10\ V$

$$\Downarrow$$

$\gamma_1 = 1.5\ \mu C/V \quad , \quad \gamma_2 = 1\ \mu C/V \quad , \quad \gamma_3 = 2.5\ \mu C/V$

به ازای $Q_3 = 0$ و بنا به تعریف خازن: $Q_2 = -Q_1 = Q$ $\Rightarrow$

$$-Q = 2.5 V_1 + V_2 + 1.5 V_3$$
$$Q = V_1 + 5 V_2 + V_3$$
$$0 = 1.5 V_1 + V_2 + 2.5 V_3$$

با گذاردن V_3 از معادله سوم در دو معادله اول:

$$\begin{cases} -Q = \frac{8}{5} V_1 + \frac{2}{5} V_2 \\ Q = \frac{2}{5} V_1 + \frac{23}{5} V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = -\frac{25}{36} Q \qquad V_2 = \frac{5}{18} Q$$

که Q برحسب μC و V_1 , V_2 برحسب ولت اند.

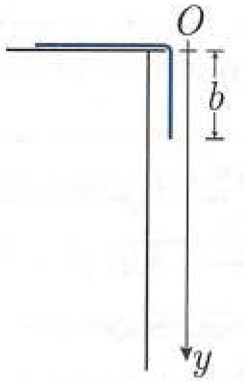
$$\Delta V = V_2 - V_1 \quad , \quad \Delta V = \frac{Q}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{36}{35}\ \mu F = 1.03\ \mu F$$

آزمون نظری وقت آزمون: ۲۱۰ دقیقه

۱ طناب یکنواختی به طول L مطابق شکل بر روی میزی قرار دارد. ارتفاع میز بیشتر از طول طناب است. فرض کنید جرم واحد طول طناب λ و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی یکسان باشد. اگر طول قسمت آویزان b باشد طناب در آستانه‌ی لغزش قرار می‌گیرد. طناب از این حالت شروع به حرکت می‌کند. و فاصله‌ی نقطه‌ی انتهای بخش آویخته از O در هر لحظه y است. کمیت‌های زیر را حساب کنید.



الف) نیروی اصطکاک به صورت تابعی از y

ب) شتاب انتهای پایینی طناب به صورت تابعی از y

ج) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه به صورت تابعی از y. مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را نقطه‌ی O بگیرید.

د) سرعت نقطه‌ی انتهایی طناب

راهنمایی:

۱. انرژی پتانسیل طناب همگنی که به شکل یک پاره‌خط است، برابر است با انرژی پتانسیل جسمی به همان جرم که در مرکز هندسی طناب قرار گرفته باشد.

۲. مساحت سطح زیر نمودار نیرو بر حسب جابه‌جایی برابر است با کاری که نیرو انجام داده است.

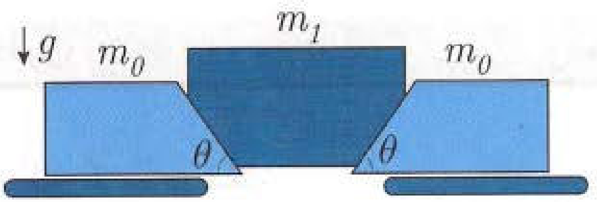
«۱۰ نمره»

۲ دو جرم مشابه M_0 مطابق شکل روی دو سطح افقی قرار دارند. فرض کنید که این جرم‌ها از سطح بلند نمی‌شوند. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی آن‌ها با سطح افقی را μ بگیرید. جرم M_1 را روی آن‌ها قرار می‌دهیم. اصطکاک بین جرم‌های M_0 و M_1 قابل چشم‌پوشی است.

الف) اگر M_1 با شتاب a پایین بیاید، اندازه شتاب جرم‌های M_0 چقدر می‌شود؟

ب) با μ و M_0 معین، به اندازه‌ی مقادیر مختلف θ، چه شرطی روی M_1 باشد تا دستگاه ساکن بماند؟

ج) فرض کنید جرم M_1 حرکت می‌کند شتاب آن را به‌دست آورید.



«۱۰ نمره»

۳ یک ظرف استوانه‌ای روباز پر از مایع است. روی سطح جانبی استوانه روزنه کوچکی ایجاد می‌کنیم. با تقریب‌های مناسب سرعت خروج مایع از روزنه $v = \sqrt{2gh}$ است که در آن h فاصله روزنه از سطح مایع و g شتاب گرانش است.

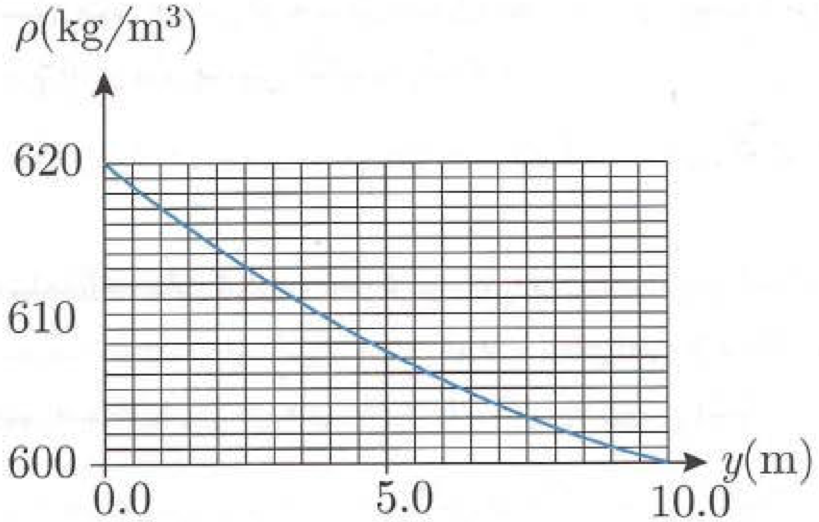
فرض کنید دو روزنه با مساحت‌های یکسان A روی سطح جانبی ظرف و در یک امتداد قائم وجود دارد. فاصله‌های این دو روزنه از سطح مایع به ترتیب h_1 و h_2 است. برای این‌که با خروج مایع از این روزنه‌ها ارتفاع مایع در ظرف تغییر نکند، مایع وارد ظرف می‌کنیم.

الف) آهنگ ورود مایع به ظرف که مثلاً بر حسب مترمکعب بر ثانیه سنجیده می‌شود، دبی ورودی نام دارد. دبی ورودی مایع، D چقدر باشد تا ارتفاع مایع در ظرف ثابت بماند؟

ب) مایعی که از دو روزنه خارج می‌شود در نقطه‌ای به فاصله افقی x و فاصله قائم y از سطح مایع همدیگر را قطع می‌کنند. x و y را به‌دست آورید.

«۱۰ نمره»

۴ در یک مخزن روباز تا ارتفاع ده متر، مایعی ریخته‌ایم. محور y را رو به بالا و مبدأ آن را منطبق بر ته مخزن بگیرید. چگالی مایع بر حسب ارتفاع در شکل داده شده است. فشار هوا را $P_0 = 1.0 \times 10^5\text{Pa}$ و شتاب گرانش را $g = 9.8\text{m/s}^2$ بگیرید. فشار مایع را در $y = 0$ و $y = 5\text{m}$ پیدا کنید.



«۱۰ نمره»

۵ اگر یک رشته‌ی فولادی به سطح مقطع A را به نقطه‌ی ثابتی ببندیم و سر دیگر را با نیروی F

بکشیم، به نسبت $\sigma = \frac{F}{A}$ تنش کششی می‌گوییم. اگر تنش کششی از مقدار معینی بیشتر شود، رشته می‌برد.

یک مخزن گاز، کره‌ای به شعاع $R = 5.0\text{m}$ است که از ورقه‌های فولادی به ضخامت $t = 2.0\text{cm}$ ساخته شده است. بر طبق استانداردهای جهانی حداکثر تنش کششی مجاز در تأسیسات فولادی $\sigma_{\text{max}} = 1.5 \times 10^8\text{Pa}$ است.

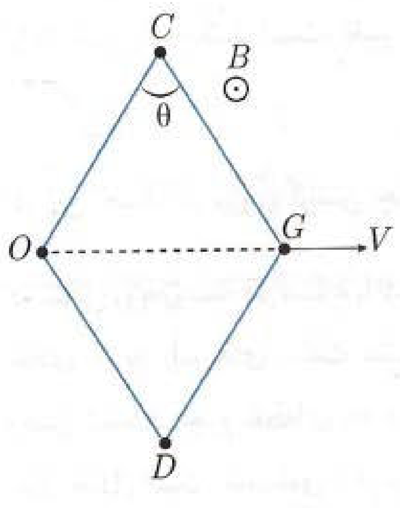
الف) گاز نیم‌کره‌ی بالایی مخزن را در نظر بگیرید. با توجه به تعادل گاز، نیروها وارد بر این قسمت از گاز را بنویسید و از آنجا نیرویی را که گاز بر نیم‌کره‌ی بالایی مخزن وارد می‌کند به‌دست آورید.

ب) اگر فشار گاز مخزن را زیاد کنیم، سرانجام مخزن شکافته می‌شود. حداکثر فشار مجاز گاز چقدر باشد تا تنش کششی در دایره‌ی عظیمه از حداکثر تنش کششی مجاز بیشتر نشود؟

فشار هوا $P_0 = 1.0 \times 10^5\text{Pa}$ است و از نیروی وزن مخزن در برابر نیروهای دیگر چشم‌پوشی کنید.

«۱۰ نمره»

۶ قاب لوزی شکل روبه‌رو از ۴ میله‌ی رسانا به جرم ناچیز ساخته شده است. طول هر میله a و مقاومت الکتریکی هرکدام R است. قاب در یک میدان مغناطیسی ثابت و قائم قرار دارد. سطح قاب افقی است و اضلاع به هم لولا شده‌اند. لولای رأس O ثابت است و سایر لولاها می‌توانند بدون اصطکاک حرکت کنند. مطابق شکل رأس G را با نیروی F در جهت قطر OG می‌کشیم به طوری که رأس G با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. زاویه‌ی θ از وضعیت $\theta = 60°$ به وضعیت $\theta = 120°$ درمی‌آید. لحظه‌ی $t = 0$ زمان شروع حرکت نقطه G است.



الف) جهت جریان القایی در ضلع OC را در ضمن این حرکت معلوم کنید.

ب) مساحت قاب را بر حسب t حساب کنید.

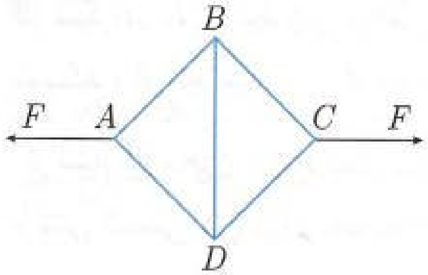
ج) نیروی محرکه‌ی القایی را در لحظه‌ی t حساب کنید.

د) نیروی الکترومغناطیسی وارد بر یک ضلع قاب در لحظه‌ی t را حساب کنید.

ه) با استفاده از پایستگی انرژی، نیروی $F(t)$ را حساب کنید.

«۱۰ نمره»

۷ اگر نیروی کششی یا فشاری F بر میله‌ای به طول L و سطح مقطع S و در راستای آن وارد شود، طول میله به اندازه ΔL زیاد و یا کم می‌شود. آزمایش نشان می‌دهد برای F کمتر از یک مقدار معین رابطه‌ی $\frac{F}{S}=\gamma\frac{\Delta L}{L}$ برقرار است که در آن γ یک ضرب ثابت است و مدول یانگ نام دارد. برای یک طناب به طول L و سطح مقطع S نیز که نیروی کششی F بر آن وارد می‌شود، افزایش طول ΔL طناب از همان رابطه به‌دست می‌آید. مطابق شکل یک کلاف مربع به ضلع L با طنابی به سطح مقطع S ساخته شده و قطر BD یک میله با همان سطح مقطع است. این کلاف روی سطح افقی است و به دو رأس A و C نیروی F در راستای قطر AC وارد می‌شود. مدول یانگ طناب و میله را برابر بگیرید. از رابطه‌ی $(1+x)^\alpha=1+\alpha x$ برای حالتی که x خیلی از ۱ کوچک‌تر است استفاده کنید.



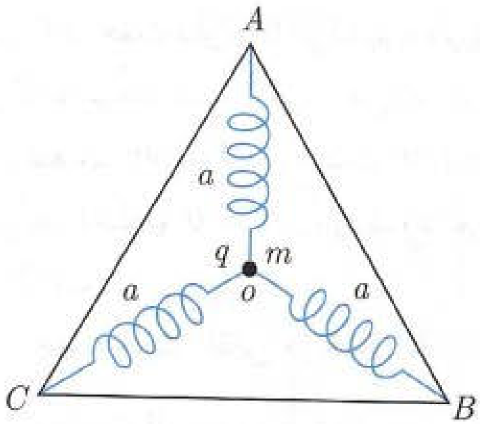
الف) نیروها را در هر ضلع مربع و میله معین کنید. در اینجا از تغییر طول‌ها چشم بپوشید.

ب) با نیروهایی که در بند (الف) حساب کرده‌اید، با فرض این‌که تغییر طول طناب و میله نسبت به طول آن‌ها خیلی کوچک‌تر است، تغییر طول قطر AC را به‌دست آورید.

«۱۰ نمره»

۸ در این مسئله از نیروی گرانش چشم‌پوشی کنید.

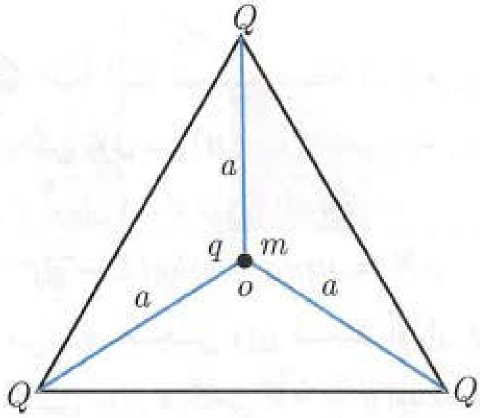
الف) در شکل روبه‌رو، سه فنر مشابه با ضریب K و طول عادی a به رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی وصل شده‌اند. جرم نقطه‌ای m در مرکز مثلث در حال تعادل است. فاصله‌ی O، مرکز مثلث، از هر رأس a است. جرم m را در امتداد پاره‌خط OA به اندازه‌ی x به رأس A نزدیک می‌کنیم. $\epsilon=\frac{x}{a}$ خیلی کوچک‌تر از ۱ است. با استفاده از تقریب



$$(1+\epsilon)^\alpha\simeq 1+\alpha\epsilon$$

و چشم‌پوشی از جملات از مرتبه ϵ^2 و بالاتر، نیروی بازگرداننده فنرها را محاسبه کنید و با مقایسه این نیروی بازگرداننده با نیروی بازگرداننده یک فنر، بسامد نوسان کم‌دامنه جرم m و حول نقطه O را به‌دست آورید.

ب) بار q به جرم m در مرکز یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارد و از سه بار مشابه Q، که با بار q هم‌علامت هستند، به فاصله‌ی a است. بار q را در جهت OA به اندازه‌ی x به باری که در رأس A قرار دارد نزدیک می‌کنیم. $\frac{x}{a}$ خیلی کوچک‌تر از ۱ است. با استفاده از همان تقریب‌های قسمت (الف)، و با این فرض که بار q از صفحه‌ی مثلث خارج نمی‌شود، نیروی بازگرداننده را حساب کنید و بسامد نوسان کم‌دامنه آن را به‌دست آورید.



ج) فرض کنید بار q که در مرکز مثلث است، به اندازه‌ی y در راستای عمود بر صفحه‌ی مثلث جابه‌جا شود. $\frac{y}{a}$ خیلی کوچک‌تر از ۱ است. جهت و اندازه‌ی نیروی وارد بر q را با همان تقریب‌های ذکر شده به‌دست آورید.

«۱۰ نمره»

۹ در یک طناب افقی که با نیروی ثابت F کشیده شده است، موج عرضی $y = A\sin(kx - \omega t)$ منتشر می‌شود. در شکل نیرویی که در یک نقطه، قسمت چپ طناب به قسمت راست آن وارد می‌کند که نشان داده شده است. برای زاویه‌های کوچک θ داریم $\sin\theta \simeq \tan\theta$.

الف) با توجه به این‌که نیروی F مماس بر طناب و دامنه‌ی موج نسبت به طول موج کوچک است، مؤلفه‌ی y نیروی وارد بر قسمت راست طناب را به‌دست آورید.

ب) مؤلفه‌ی y سرعت طناب را در این نقطه به‌دست آورید.

ج) توانی که قسمت چپ طناب به طرف راست آن می‌فرستد را حساب کنید.

د) با فرض این‌که نقطه‌ی $x = 0$ گره است، موج برهم‌نهی شده را بنویسید. این موج از انتهای بسته‌ی طناب بازتاب می‌کند و در طناب موج ایستاده درست می‌شود.

ه) توانی را که در این موج برهم‌نهی شده از سمت چپ به سمت راست می‌رود به‌دست آورید.

و) توانی را که از گره‌ها و شکم‌ها می‌گذرد حساب کنید.

ز) در یک لحظه‌ی معین، در چه نقاطی، اندازه‌ی توان عبوری بیشینه است؟ «۱۰ نمره»

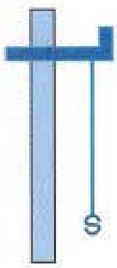
آزمون عملی

موضوع آزمایش: اندازه‌گیری جرم مجهول

وسایل آزمایش: دو تکه کش، دو عدد گیره که به دو سر یکی از کش‌ها وصل است، پنج واشر بزرگ که جرم هر کدام $5.5\mathrm{g}$ است، پنج واشر کوچک که جرم هر کدام $1.0\mathrm{g}$ است، خط‌کش، پیچ L شکل، قلاب فلزی برای آویختن، باریکه‌ی چوب، واشر سیاه‌رنگ با جرم مجهول.

مقدمه: هرگاه به انتهای کشی به طول l که از یک نقطه آویزان است، وزنه‌ای بیاوزیم، طول کش تغییر می‌کند و به اندازه‌ی x افزایش می‌یابد. در این آزمایش می‌خواهیم از این خاصیت برای اندازه‌گیری جرم مجهول یک واشر سیاه‌رنگ استفاده کنیم.

آزمایش ۱:



مطابق شکل پیچ L شکل را در سوراخی که در یک سر چوب است بپیچانید. طول کش را $30\mathrm{cm}$ انتخاب کنید و کش را توسط گیره از پیچ L شکل بیاویزید. قلاب را به گیره‌ی پایین کش وصل کنید. چوب را در راستای قائم نگه دارید تا کش آویزان شود. در این حالت انتهای کش را روی چوب علامت‌گذاری کنید.

واشرهای بزرگ را، یکی‌یکی به قلاب پایین کش بیاویزید و مکان جدید انتهاب کش را علامت‌گذاری کنید. با اندازه‌گیری افزایش طول کش، x، جدول (۱) را تکمیل کنید.

اگر به هر دلیلی خواستید آزمایش را تکرار کنید، از یک کش دیگر که در اختیار دارید استفاده کنید و کش قبلی را کنار بگذارید.

آزمایش ۲:

واشر سیاه‌رنگ با جرم مجهول را روی قلاب پایین کش بگذارید و افزایش طول کش، x_2 را اندازه‌گیری کنید و در جدول (۲) وارد کنید.

توجه: طول x_2 را با همان کشی اندازه‌گیری کنید که اعداد جدول ۱ را به کمک آن به‌دست آورده‌اید.

آزمایش ۳:

جرم مجهول واشر سیاه‌رنگ، M را تعیین کنید و در جدول (۳) بنویسید.

«۱۰ نمره»

باسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش پژوهان جوان

«مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست.»

امام خمینی (ره)

بیست و دومین المپیاد فیزیک کشور

مرحله‌ی دوم

آزمون نظری: ۲ اردیبهشت ۱۳۸۸

مدت آزمون: ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه

شروع: ۹:۴۵ الی ۱۳:۱۵

تذکرات:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

۱- این قسمت از آزمون شامل ۹ سؤال و وقت آن ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه است.

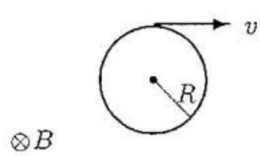
۲- همه‌ی سؤال‌ها نمره‌ی مساوی دارد.

۳- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

۴- هنگام آزمون همراه داشتن ماشین حساب و تلفن همراه (خاموش یا روشن)تخلف محسوب می‌شود. لذا تلفن همراه و ماشین حساب خود را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.

۱) گشتاور دوقطبی مغناطیسی یک حلقه سیم دایره‌ای به شعاع R که جریان i از آن می‌گذرد برداری است که اندازه‌ی آن $\mu = \pi R^{۲} i$ و جهت آن همان جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه است. در فیزیک کلاسیک ساده‌ترین مدل برای حرکت الکترون‌ها حول هسته حرکت دایره‌ای یکنواخت است. این حرکت را می‌توان بایک حلقه‌ی جریان یک‌نواخت نشان داد.

الف) برای الکترونی که بار الکتریکی آن $-e$ است، و مطابق شکل بر روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت یک نواخت v می‌چرخد گشتاور دوقطبی مغناطیسی را به دست آورید. این شکل را روی پاسخنامه‌ی خود بکشید و جهت μ را با علامت $\otimes$ یا $\odot$ مشخص کنید.



یک میدان مغناطیسی B که جهت آن در شکل مشخص شده است به اتم اعمال می‌کنیم. فرض کنید میدان مغناطیسی بر صفحه‌ی حرکت دایره‌ای یک نواخت الکترون عمود است. فرض کنید شعاع حرکت الکترون با اعمال میدان مغناطیسی ثابت می‌ماند ولی سرعت آن به اندازه‌ی Δv تغییر می‌کند. حتی برای قوی‌ترین میدان‌های مغناطیسی قابل تولید در آزمایشگاه Δv از v بسیار کوچک‌تر است.

ب) Δv را به دست آورید. جرم الکترون را m بگیرید.

ج) با اعمال این میدان مغناطیسی گشتاور دوقطبی مغناطیسی مربوط به حرکت الکترون دور هسته $\mu + \Delta\mu$ می‌شود. $\Delta\mu$ را به دست آورید.

د) برای الکترونی به جرم $۹٫۱ \times ۱۰^{-۳۱}$ kg و بار $۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}$ C که در میدان مغناطیسی ۲٫۰ T بر روی دایره‌ای به شعاع ۰٫۵۱ Å می‌چرخد $\Delta\mu$ چقدر است؟

۲) تلمبه ابزاری است که با وارد کردن نیرو به شاره‌ی درونش، مثلاً آب، میان شاره‌ی ورودی به تلمبه و شاره‌ی خروجی از تلمبه، اختلاف فشار پدید می‌آورد.

یک تلمبه با لوله‌ای به سطح مقطع A، آب را از چاه بالا می‌کشد و آن را درون لوله‌ی قائمی به همان سطح مقطع می‌فرستد. فاصله‌ی تلمبه با سطح آب درون چاه h_1 و ارتفاع لوله‌ی قائم بالای تلمبه h_2 است. آب از بالای لوله‌ی قائم با سرعت u بیرون می‌جهد. فشار هوا P_0 و چگالی آب را ρ بگیرید و از ارتفاع خود تلمبه چشم بپوشید. دهانه‌ی چاه از قطر لوله‌ها بسیار بزرگ‌تر است. شتاب گرانش را g بگیرید. از اتلاف انرژی چشم بپوشید.

الف) توان تلمبه، Q، را حساب کنید.

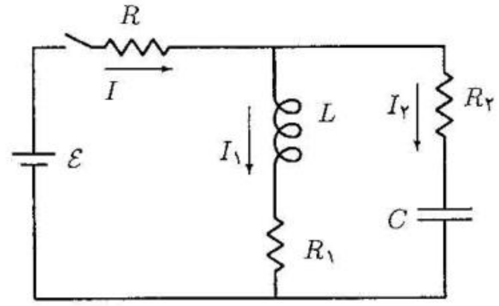
ب) فشار آب در خروجی تلمبه، P_2 چه قدر است؟

ج) فشار آب در ورودی تلمبه، P_1 چه قدر است؟

۳) مداری مانند شکل در نظر بگیرید. پیش از بستن کلید خازن خالی است و از خودالقا جریانی نمی‌گذرد.

الف) بلافاصله پس از بستن کلید، مقدار بار خازن، q، جریان‌های I_1 و I_2 و I، و اختلاف پتانسیل دو سر خودالقا، V_L، چه قدر است؟

ب) پس از زمان طولانی از بستن کلید، مقدار همان کمیت‌های بند الف چه قدر است؟



۴) منبع انرژی خورشید واکنشهای هسته‌ای زیر است که به زنجیره‌ی پروتون - پروتون مشهور است.

$$ {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H} + e^{+} + \nu $$

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \gamma $$

$$ {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} $$

در این واکنش‌ها، ν ذرّه‌ای به نام نوترینو است. مجموع واکنشهای بالا به صورت

$$ n\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + ۲\,e^{+} + ۲\,\nu + ۲\,\gamma $$

است.

الف) با توجه به واکنشهای بالا عدد n چیست؟

ب) برای تولید هر هسته‌ی هلیوم $({}^{4}_{2}\mathrm{He})$ چند واکنش باید انجام شود؟

ج) می‌دانیم توان کل تابشی خورشید تقریباً $۴ \times ۱۰^{۲۶}\ \mathrm{W}$ است. جرم هسته‌ی هلیوم $۳/۹۷\ \mathrm{m}_p$ است که در آن m_p جرم هسته‌ی هیدروژن (پروتون) است. تعداد واکنش‌هایی که در هر ثانیه باید درون خورشید انجام شود تا توان تابشی خورشید را تأمین کند چند تا است؟

$$ \mathrm{m}_p = ۱/۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}, \qquad c = ۳ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m/s}. $$

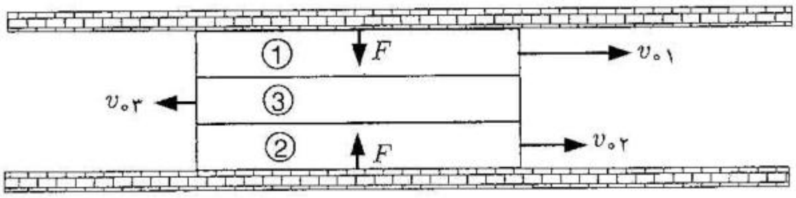
د) چند کیلوگرم هیدروژن بر ثانیه باید تبدیل به هلیوم شود تا این توان تابشی تأمین شود؟

۵) سه مکعب‌مستطیل بسیارطویل یک‌سان به جرم M روی زمین و بین دو دیوار ثابت قائم، در تماس با هم در حرکت‌اند، به طوری که تصویر آن‌ها از بالا مانند شکل است. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم‌ها μ_s و ضریب اصطکاک لغزشی‌ی بین آن‌ها μ_k است. $\mu_s > \mu_k$. اصطکاک بین جسم‌ها و زمین و هم چنین بین جسم‌ها و دیوار قابل چشم‌پوشی است. نیروی عمودی‌ای که دیوارها به جسم مجاورشان وارد می‌کنند را F بگیرید. اندازه‌ی سرعت اولیه‌ی جسم‌ها $v_{\circ۱}$، $v_{\circ۲}$، و $v_{\circ۳}$ است. $v_{\circ۱} > v_{\circ۲} > v_{\circ۳}$. فرض کنید جسم‌ها و دیوارها آن‌قدر طویل‌اند که در تمام مدت حرکت در تماس با هم باقی می‌مانند.

الف) در یک نمودار منحنی سرعت ـ زمان را برای سه جسم بکشید.

ب) پس از چه مدت سرعت سه جسم یکی می‌شود؟

ج) انرژی تلف‌شده در این مدت چه‌قدر است؟

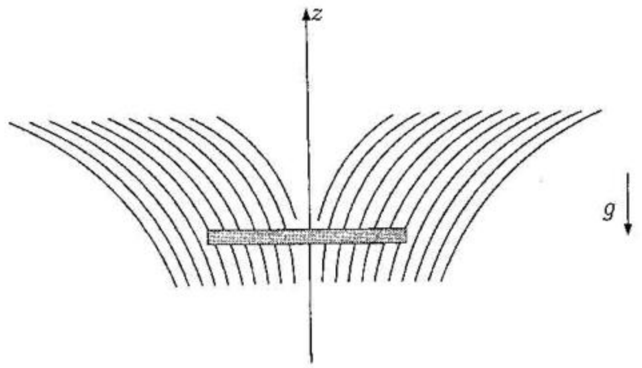


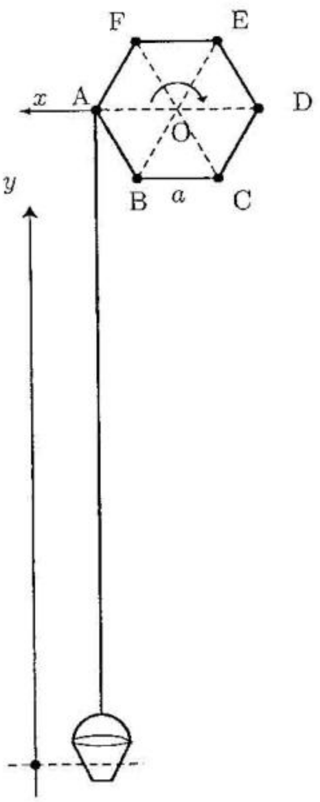
٦) رسانایی به شکل یک حلقه به مقاومت الکتریکیِ R، و جرم m از ارتفاع بلندی در حضور یک میدان مغناطیسی سقوط می‌کند. میدان مغناطیسی حول محور قائم z، که همان محور حلقه است، تقارن دارد و مؤلفه‌ی قائم آن $B_z = B_0(1 + \alpha z)$ است. محور z در جهت قائم است. α ثابت است. قطر حلقه D است، و صفحه‌ی حلقه هم‌واره افقی می‌ماند. از مقاوت هوا چشم‌پوشی کنید.

الف) جریان القایی در حلقه، I، وقتی که حلقه در ارتفاع z است، چه‌قدر است؟ در این لحظه سرعت حلقه v است. I را بر حسب B_0، α، D، R و v به دست آورید.

ب) پس از مدتی سرعت حلقه به سرعت حد v_f، که ثابت است، میل می‌کند. v_f را بر حسب B_0، α، D، m، R و شتاب گرانش g به دست آورید.

راه‌نمایی: وقتی سرعت حلقه به سرعت حد می‌رسد اتلاف انرژی در مقاومت الکتریکی باید از طریق انرژی پتانسیل گرانشی تأمین شود.

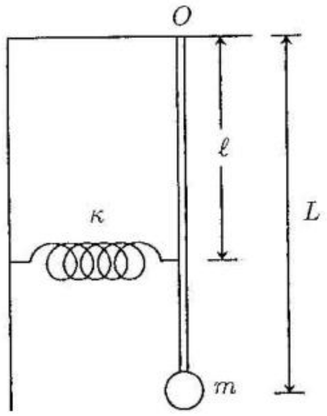




۷) شکل مقابل مقطع قائم یک چرخ چاه قدیمی را نشان می‌دهد که از میله‌های افقی A، B، C، D، E، و F تشکیل شده است که توسط پره‌هایی به محور دستگاه، O، متصل شده اند. مقطع دستگاه یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a است. زاویه‌ی θ، زاویه‌ی میان پره‌ی OA و امتداد افقی Ox است. در ابتدا قسمت آزاد طناب از میله‌ی افقی A آویزان است و سطل در نقطه‌ی $y = ۰$ قرار دارد، و زاویه‌ی چرخش دستگاه، θ، نیز صفر است.

با چرخش دستگاه ارتفاع سطل، y را به عنوان تابعی از θ به دست آورید و $y(\theta)$ را برای $۰ < \theta < \pi$ رسم کنید. فرض کنید طناب هم‌واره قائم می‌ماند.

۸)



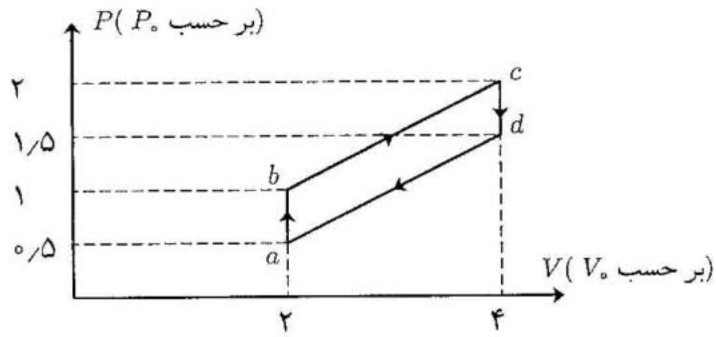
در دستگاه روبرو جرم وزنه m است، و جرم میله‌ی قائم متصل به آن ناچیز است. راستای فنر افقی و ضریب سختی آن κ است. میله می‌تواند حول محور افقی که از نقطه‌ی O می‌گذرد در صفحه‌ی قائم نوسان کند. یک سر فنر به دیوار قائم و سر دیگر آن به میله‌ی قائم محکم شده است. هنگامی که میله قائم است فنر کشیده یا فشرده نیست. میله را کمی از حال تعادل خارج و رها می‌کنیم. شتاب گرانش g، طول میله L، و فاصله‌ی نقطه‌ی O تا محل اتصال فنر به میله ℓ است.

الف) عبارتی برای انرژی پتانسیل دستگاه بر حسب x، جابه‌جایی افقی وزنه از حالت تعادل، κ، ℓ، و L به دست آورید. توجّه داشته باشید که برای زوایای کوچک (بر حسب رادیان) داریم

$$\sin\theta \simeq \theta, \qquad \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

ب) انرژی مکانیکی دستگاه، E را بر حسب x، v، m، κ، ℓ و L بنویسید و از طریق مشابهت آن با نوسان‌گر ساده، دوره‌ی تناوب حرکت نوسانی دستگاه را محاسبه کنید. در محاسبه‌ی انرژی، مؤلفه‌ی سرعت وزنه در راستای قائم را نادیده بگیرید.

۹) انرژی درونی گاز کامل تک‌اتمی $U = \frac{3}{2}PV$ است، که P فشار، و V حجم گاز است. یک مول گاز کامل تک‌اتمی، چرخه‌ای مانند شکل را می‌پیماید.



الف) برای هر یک از چهار بخش چرخه، مقدار کار انجام شده روی گاز، W، و مقدار گرمای داده شده به گاز، Q، را به دست آورید. تمام پاسخ‌ها بر حسب P_0 و V_0 باشد.

ب) بازده چرخه را حساب کنید.

باسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزه ی علمی برای جوانان ، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیّت هاست.

« امام خمینی (ره) »

بیست و یکمین المپیاد فیزیک کشور

مرحله دوم

آزمون عملی: ۴ اردیبهشت ماه ۱۳۸۷

مدت آزمون : ٤٥ دقیقه

شروع : ۹:۰۰ الی ۹:٤٥

تذکرات :

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی ، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید :

۱- قبل از شروع آزمون دقت کنید که وسایل ذکر شده **در صورت سؤال عملی** ، که در پشت همین برگه چاپ شده است ، به طور کامل در اختیار شما قرار گرفته باشد . در صورت بروز مشکل مسئول حوزه را مطلع کنید .

۲- این قسمت از آزمون از **یک سؤال** تشکیل شده و مدت پاسخ گویی به آن ٤٥ دقیقه است. پس از پایان این مدت پاسخ نامه های آزمون عملی جمع آوری و آزمون نظری شروع خواهد شد.

۳- از آن جا که ممکن است تا پایان آزمون عملی به وسایلی که در اختیار شما قرار داده شده نیاز داشته باشید، هنگام کار با آنها دقت کنید . در صورت وجود مشکل در ابزارهای آزمایش ، از مسئول حوزه درخواست کنید آن را تعویض نماید .

٤- در پایان آزمون می توانید این وسایل و سؤال عملی را به همراه ببرید .

٥- کارت معرفی نامه و کارنامه خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن ها را ملاحظه و جمع آوری کند .

٦- هنگام آزمون همراه داشتن ماشین حساب و تلفن همراه (خاموش یا روشن)تخلف محسوب می شود. لذا تلفن همراه و ماشین حساب خود را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.

مسئله‌ی عملی

اندازه‌گیری ابعاد سیم

سیمی به قطر d و به طول L را به صورت فنری با مقطع دایره‌ای به قطر D پیچیده ایم. تعداد دور حلقه‌های فنر n و طول فشرده‌ی آن ℓ است. در این آزمایش کمیت‌های ℓ، n، L، d و D را به دست آورید.

وسایل آزمایش: یک فنر، یک خط‌کش

روش آزمایش:

۱) طول فنر در حالت فشرده (ℓ) را اندازه‌گیری کنید و در جدول بنویسید. ۳cm

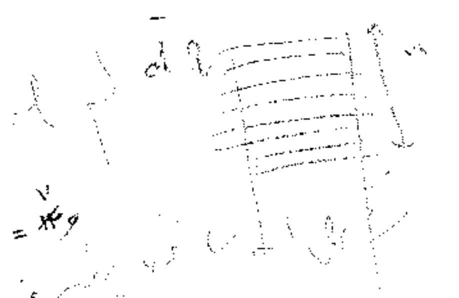
۲) فنر را کمی بکشید تا حلقه‌های فنر از هم باز و قابل شمارش شوند. تعداد دور فنر (n) را بشمرید و در جدول بنویسید. ۱۸۰

۳) با دقت و حوصله فنر را طوری باز کنید تا به صورت سیم در آید و هیچ گونه گره‌خوردگی پیدا نکند. طول سیم (L) را اندازه بگیرید و در جدول بنویسید.

توجه: مراقب باشید هنگام باز کردن فنر دست خود را نبرید.

۴) قطر سیم (d) و قطر فنر (D) را محاسبه کنید و در جدول بنویسید.

۳/۵mm



$\ell = nd$

$۱۸۰ \times ۲\pi (\frac{D}{۲}) =$

۱) یک دستگاه ترمودینامیکی را در نظر بگیرید که انرژی درونی آن تابع فقط دما است. ظرفیت گرمایی (گرمای ویژه ضرب در جرم) این دستگاه، در حجم ثابت C_V و در فشار ثابت C_P است. C_P, C_V ثابت‌اند.

الف)با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، و در نظر گرفتن یک فرآیند مناسب، انرژی درونی این دستگاه در دمای T منهای انرژی درونی آن در دمای T_0 را حساب کنید.

فرآیندهای هم دما و بی دررویی را برای این دستگاه در نظر بگیرید که در نقطه شروع‌شان حجم و فشار و دما (V_0, P_0, T_0) است. وقتی از این نقطه زیاد دور نشویم، در فرآیندهای هم دما $P = P_0[1 - a(V - V_0)]$ و در فرآیندهای بی دررو $P = P_0[1 - b(V - V_0)]$ که $b,\ a$ ثابت‌هایی مثبت‌اند. این سه فرآیند را در نظر بگیرید. فرآیند ۱ هم فشار است و دستگاه از نقطه‌ی (V_0, P_0, T_0) به نقطه‌ی (V_1, P_1, T_1) می‌رود. فرآیند ۲ هم دما است و دستگاه از نقطه (V_0, P_0, T_0) به نقطه (V, P_2, T_2) می‌رود. فرآیند ۳ بی دررو است و دستگاه از نقطه (V_0, P_0, T_0) به نقطه $(V_1 P_3, T_3)$ می‌رود. V حجمی نزدیک به V_0 است. این رابطه را هم داریم که :

$$\lim_{V \to V_0} \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} = \lim_{V \to V_0} \frac{P_1 - P_2}{P_2 - P_3}$$

ب) $\frac{T_1 - T_0}{V - V_0}$ را حساب کنید.

ج) $\frac{T_3 - T_0}{V - V_0}$ را حساب کنید و $\lim_{V \to V_0} \frac{T_3 - T_0}{V - V_0}$ را به دست آورید.

د) $\lim_{V \to V_0} \frac{T_3 - T_0}{T_1 - T_0}$ را بر حسب b , a حساب کنید.

هـ) $\frac{C_P}{C_V}$ را بر حسب b , a حساب کنید.

۲) یک استوانه را در نظر بگیرید که با یک دیواره‌ی نفوذپذیر به دو بخش تقسیم شده. در انتهای هر بخش یک پیستون هست، که با آن می‌شود حجم آن بخش را تنظیم کرد. در این استوانه مقدار ثابتی گاز هست، که با جابجا کردن پیستونها می‌توانند از یک طرف به طرف دیگر برود. حجم طرف چپ دیواره را با V_1، و حجم طرف راست دیواره را با V_2 نمایش می‌دهیم. فشار گاز در طرف چپ مقدار ثابت P_1، و در طرف راست مقدار ثابت P_2 می ماند. همه فرآیندها بدون تبادل گرما با بیرون انجام می‌شوند.

الف)حجم طرف چپ از V_1 به $(V_1 + \Delta V_1)$، و حجم طرف راست از V_2 به $(V_2 + \Delta V_2)$ می‌رسد. تغییر انرژی درونی گاز چه‌قدر است؟

ب)وقتی همه‌ی گاز در طرف چپ است، حجم طرف چپ V_i و انرژی درونی U_i است. وقتی همه‌ی گاز به طرف راست رفته است، حجم طرف راست V_t و انرژی درونی گاز U_f است. U_f را بر حسب P_2, P_1, V_f, V_i, U_i حساب کنید.

ج)فرض کنید معادله‌ی حالت گاز

$$PV = P_0V_0 + A(V - V_0) + B(T - T_0)$$

و رابطه انرژی درونی با حجم و دما

$$U = U_0 + D(V - V_0) + F(T - T_0)$$

است، که $F, D, B, A, U_0, T_0, P_0, V_0$ ثابت‌اند. برای فرآیند بخش قبل دمای گاز را وقتی همه‌ی گاز در طرف چپ است با T_i و وقتی همه‌ی گاز در طرف راست است با T_f نمایش می‌دهیم. T_i را بر حسب V_f, V_i, T_i و ثابت‌هایی که در معادله حالت و انرژی درونی وارد شده‌اند حساب کنید.

۳) یک استوانه با مساحت سطح σ و جرم M مفید است روی یک خط (محور x) حرکت کند. محور این استوانه هم همان محور x است. این استوانه با ذره‌هایی ریز به جرم m برخورد می‌کند، که به موازات محور x حرکت می‌کنند. m بسیار کوچک‌تر از M است. این ذره‌ها به طور یکنواخت پراکنده شده‌اند و تعدادشان تقسیم بر حجم n است. سرعت نیمی از این ذره‌ها s و سرعت نیمی دیگر $(-s)$ است. s مقداری مثبت است و جهت مثبت (برای تعیین علامت سرعت) را هم جهت محور x گرفته‌ایم.

الف)فرض کنید استوانه ساکن است و از تغییر سرعت آن در اثر برخورد چشم بپوشید. طی زمان T، چند برخورد بین استوانه و ذره‌هایی که هم جهت با محور x حرکت می‌کنند رخ می‌دهد؟

ب)فرض کنید سرعت استوانه V است و از تغییر آن در اثر برخورد چشم بپوشید. تعداد برخوردهای این استوانه طی زمان T با ذره‌هایی که هم جهت با محور x حرکت می‌کنند را با N^+ و تعداد برخوردهای این استوانه طی زمان T با ذره‌هایی که برخلاف جهت محور x حرکت می‌کنند را با N^- نمایش می‌دهیم. با این فرض که $|V|<s$، N^-, N^+ را حساب کنید.

اگر استوانه با سرعت V به یکی از این ذره‌ها با سرعت u برخورد کند، سرعت استوانه تغییر می‌کند و $V+\delta V$ می‌شود، که

$$\delta V = \frac{2m}{M}(u-V)$$

ج)سرعت استوانه پس از هر برخورد تغییر می‌کند. پس V در طرف راست عبارت بالا متغیر است. از این تغییر طی مدت T چشم بپوشید، مقدارهای N^-, N^+ از بخش پیش را به کار ببرید، و تغییر سرعت استوانه طی زمان T را حساب کنید.

٤) این مسأله یک مدل بسیار ساده شده برای رسانندگی الکتریکی است. یک الکترون به جرم m و بار q در یک شبکه‌ی بلور حرکت می‌کند. حرکت این الکترون را در فقط یک راستا (x) در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم الکترون به مدت T با سرعت v_0 می‌شود، و این فرآیند ادامه می‌یابد. از زمان برخورد در برابر T چشم بپوشید. این در حالتی است که میدان الکتریکی خارجی وجود ندارد. فرض کنید اگر یک میدان الکتریکی خارجی در راستای x اعمال شود (که تصویر آن در این راستا E است) زمان حرکت بین دو برخورد تغییر نمی‌کند، و نتیجه‌ی هر برخورد این است که اگر سرعت پیش از برخورد $(\pm v_0 + u)$ باشد، سرعت پس از برخورد $(\mp v_0 + \alpha u)$ می‌شود، که α یک مقدار ثابت است. بین هر دو برخورد، نیروی وارد بر الکترون فقط ناشی از میدان الکتریکی بیرونی است.

فرض کنید سرعت الکترون درست پس از یک برخورد $(v_0 + \Delta v)$ است. این برخورد را برخورد صفر می‌نامیم.

الف)سرعت الکترون درست پیش از برخورد بعدی (برخورد یک) را حساب کنید.

ب)سرعت الکترون درست پس از برخورد یک را حساب کنید.

ج)سرعت الکترون درست پیش از برخورد دو را حساب کنید.

د)سرعت الکترون درست پس از برخورد دو را حساب کنید.

هـ) (Δv) چه قدر باشد تا سرعت الکترون درست پس از برخورد دو با سرعت الکترون درست پس از برخورد صفر برابر باشد؟

و)با فرض این که چنین باشد سرعت متوسط ذره از برخورد صفر تا برخورد دو را حساب کنید. (منظور از سرعت متوسط، جابجایی تقسیم بر زمان است).

۵) یک لایه از یک ماده شفاف بین صفحه‌های $y = (x-D)\tan\beta, y = x\tan\alpha$ است، که D,β,α ثابت‌اند و D مثبت است. ضریب شکست این لایه (n) نزدیک به یک است، چنان که $n = 1+s$، و s بسیار کوچکتر از یک است. یک باریکه‌ی نور از چپ روی محور x حرکت می‌کند و به لایه می‌خورد. این باریکه روی صفحه‌های ورودی و خروجی لایه می‌شکنند.

الف)زاویه باریکه‌ی درون لایه با محور x را حساب کنید.

ب)زاویه‌ی باریکه‌ی خارج شده از لایه با محور x را حساب کنید.

راهنمایی: اگر ε مقداری کوچک داریم.

$$\sin(a+\varepsilon) = \sin a + \varepsilon\cos a, \qquad \cos(a+\varepsilon) = \cos a - \varepsilon\sin a$$

$$(1+\varepsilon)^{\mu}(1+\varepsilon)^{\nu} = 1 + (\mu+\nu)\varepsilon$$

٦)یک دونده روی یک پیست می دود که از یک بخش مستقیم به طول L و یک نیم دایره به طول x ساخته شده است. سرعت دونده در بخش مستقیم V، و در بخش نیم دایره ای $v(x)$ است، که:

$$v(x) = \frac{Vx^2}{x^2+b^2}$$

و b یک ثابت مثبت است.

الف)زمان حرکت را حساب کنید.

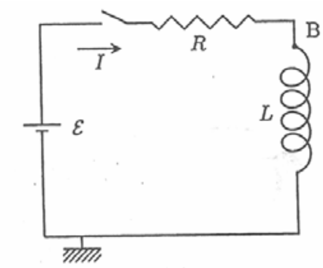
ب)متوسط اندازه سرعت (مسافت پیموده شده تقسیم بر زمان) را حساب کنید.

ج)x را چنان حساب کنید که زمان حرکت کمینه شود.

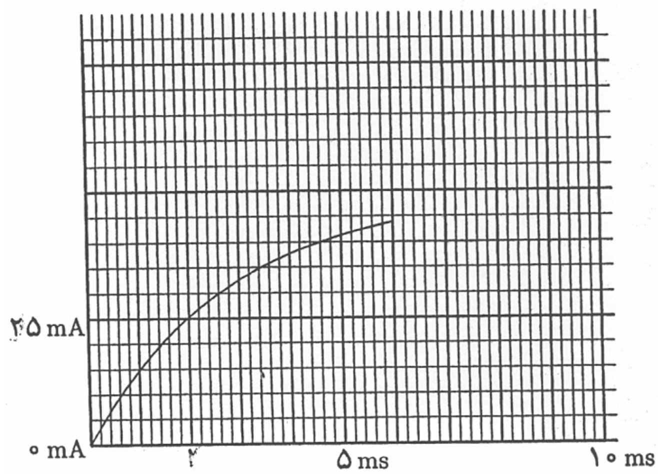
د)به ازای این مقدار x متوسط اندازه سرعت را حساب کنید.

هـ)با فرض $0 \le x \le D$، بیشترین مقدار متوسط اندازه سرعت به ازای کدام مقدار x به دست می‌آید؟ به ازای این مقدار x متوسط اندازه سرعت چه قدر است؟

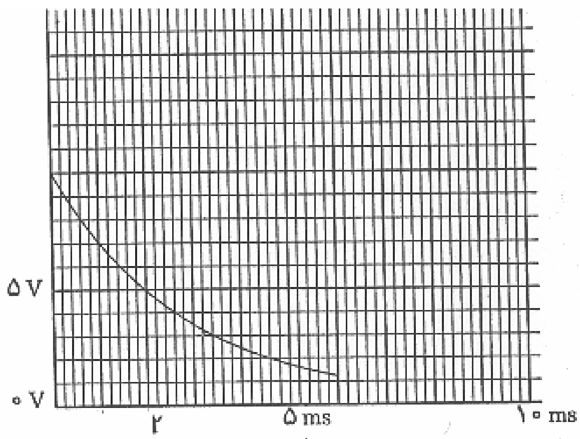
۷) مداری مانند شکل (۱) در نظر بگیرید. در لحظه $t=0$ کلید را می‌بندیم. از لحظه بستن کلید تا مدت کمی بعد از آن، جریان مدار بر حسب زمان در شکل (۲) و پتانسیل نقطه B بر حسب زمان در شکل (۳) نشان داده شده است. ضریب خود القا (L)، مقدار مقاومت (R) و نیروی محرکه باطری (ε) را حساب کنید.



شکل (۱)

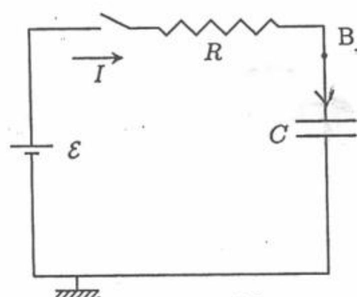


شکل (۲)

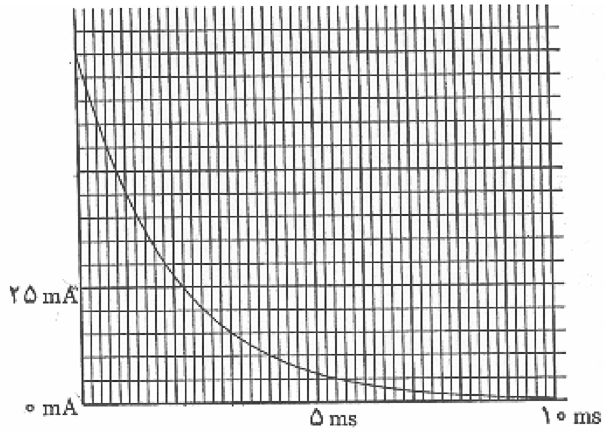


شکل (۳)

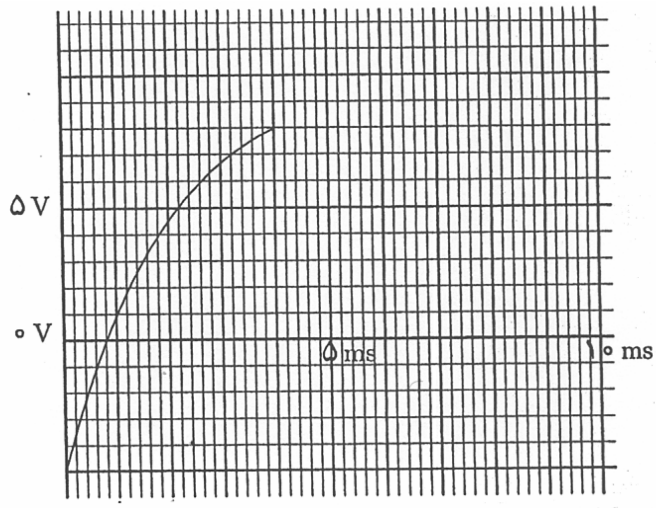
۸)مداری مانند شکل (۱) در نظر بگیرید. پیش از بستن کلید بار خازن q_0 است. در لحظه $t=0$ کلید را می‌بندیم. جریان مدار بر حسب زمان از هنگام بستن کلید تا زمانهای بزرگ در شکل (۲) نشان داده شده است. پتانسیل نقطه B بر حسب زمان از هنگام بستن کلید تا مدت کوتاهی بعد در شکل (۳) نشان داده شده است. ظرفیت خازن (C)، بار اولیه (q_0)، مقاومت (R)، و نیروی محرکه باتری (ε) را حساب کنید.



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

۹) روی حلقه‌ای نارسانا به شعاع a، بار q را به طور یکنواخت توزیع شده است. حلقه به دور محور خود با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. برای ناظری که حلقه را از بالا نگاه می‌کند، حلقه پادساعتگرد می‌چرخد. اگر جریان یک حلقه، برای ناظری که از بالا نگاه می‌کند، پادساعتگرد باشد، این جریان را مثبت می‌گیریم.

الف)جریان ناشی از چرخش حلقه، I را به دست آورید.

میدان مغناطیسی حلقه‌ای به شعاع a که جریان I از آن می‌گذرد، در نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصله‌ی x از مرکز آن، در راستای محور است و آن را B_z می‌نامیم. جهت آن با قانون دست راست مشخص می‌شود، و مقدار این میدان مغناطیسی چنین است:

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

حلقه‌ای رسانا به جرم ناچیز، به شعاع b، و هم محور با حلقه اول در نظر بگیرید که فاصله مرکز آن دور از یکدیگر z است. فرض کنید a از b بسیار بزرگتر است، طوری که مؤلفه‌ی محوری (در راستای محور) میدان مغناطیسی حلقه بزرگ در تمام سطح حلقه کوچک یکسان است.

ب)شارمغناطیسی گذرنده از حلقه کوچک، Φ را حساب کنید.

حلقه کوچک در حالی که با حلقه بزرگ هم محور می ماند، با سرعت v به آن نزدیک می‌شود. این کار توسط یک عامل خارجی با وارد کردن نیروی F انجام می‌شود.

ج) نیروی محرکه القایی در حلقه کوچک را حساب کنید.

مقاومت حلقه را R بگیرید.

د) جریان القایی ای که از حلقه کوچک می گذرد، i، را به دست آورید.

هـ) برآیند نیروهایی را که مؤلفه محوری میدان مغناطیسی حلقه بزرگ بر حلقه کوچک وارد می‌کند به دست آورید.

میدان مغناطیسی حلقه بزرگ، جزء روی محور، علاوه بر مؤلفه محوری، مؤلفه شعاعی (عمود بر محور) نیز دارد. این مؤلفه را در محل حلقه کوچک B_r می گیریم.

و)نیروی F، وارد شده توسط عامل خارجی را حساب کنید. (توجه کنید که B_r جزو داده‌های مسأله نیست)

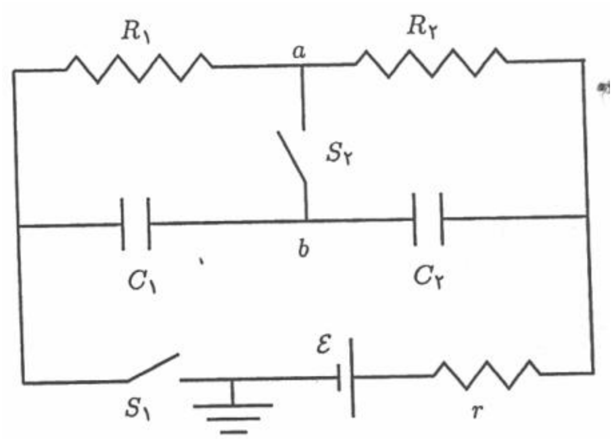
طبق قانون لنز باید نیرویی به حلقه کوچک وارد شود تا با حرکت آن مخالفت کند. این نیرو را F' می‌گیریم.

ز)با استفاده از تساوی $F = F'$، اندازه B_r را به دست آورید.

۱۰)در مدار نشان داده شده ابتدا کلیدهای S_2,S_1 باز است و خازنها بار ندارند. کلید S_1 را می‌بندیم و مدت زیادی صبر می‌کنیم.

الف) $V_a - V_b$ را حساب کنید.

ب)در حالی که کلید S_1 بسته است، کلید S_2 را هم می‌بندیم و مدت زیادی صبر می‌کنیم تا مدار به حالت تعادل برسد. مقدار باری را که پس از بستن کلید S_2 تا رسیدن مدار به تعادل از کلید S_2 می‌گذرد، به دست آورید.



۱۱) مطابق شکل قطره‌ی آبی به شکل کره به ضریب شکست n درنظر بگیرید. پرتوی نوری در نقطه A وارد قطره می‌شود و می شکند. زاویه پرتوی فرودی با شعاع α، و زاویه پرتوی شکسته با شعاع β است. بخشی از پرتوی شکسته، در ادامه مسیرش از نقطه B بازتابیده می‌شود و در نقطه C از قطره خارج می‌شود. امتداد پرتوهای ورودی و خروجی با هم زاویه φ می سازد. شدت پرتوی خروجی وقتی بیشینه است که تغییر φ نسبت به α، یعنی $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\alpha}$، صفر شود.

الف)زاویه φ را بر حسب β,α به دست آورید.

ب)در چه زاویه‌ی αای شدت تابش پرتوی خروجی بیشینه است؟