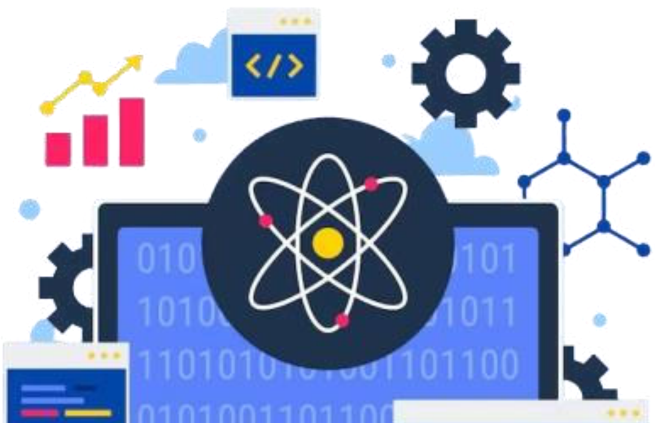
بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دفترچه سوالات مرحله دوم المپیاد کامپیوتر از ابتدا تاکنون

(همراه با کلید)



amoozz.ir

sampaadia.ir

- برای هدایت به صفحه راهکارهای مؤثر برای موفقیت در المپیاد: از برنامه‌ریزی تا مدیریت زمان بر روی این متن کلیک کنید

- برای هدایت به صفحه امتیاز و تسهیلات کسب مدال در المپیادهای علمی دانش آموزی چیست؟ بر روی این متن کلیک کنید

- برای هدلیت‌به صفحه نمره کف قبولی المپیاد چیست؟ بر روی این متن کلیک کنید

سایر مطالب مرتبط:

- آشنایی با المپیاد کامپیوتر
- دانلود سوال و پاسخنامه آزمون‌های مرحله اول و مرحله دوم المپیادهای کامپیوتر ایران
- کلاس المپیاد ریاضی و کامپیوتر
- منابع، مراجع و سوالات مرحله اول و دوم المپیاد کامپیوتر
- آزمون های آنلاین مرحله اول المپیاد کامپیوتر
- آزمون های آنلاین مرحله دوم المپیاد کامپیوتر

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ دوم

سی وپنجمین دورهٔ المپیاد کامپیوتر(روز اول)

سال ۱۴۰۴-۱۴۰۳

تاریخ : ۱۴۰۴/۱/۲۵ - ساعت : ۸:۰۰ - مدت : ۲۱۰ دقیقه - نوع : چندگزینه‌ای

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است

۱- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید. در صورت هرگونه نقص در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید.

۲- یک برگ پاسخ‌برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخّصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید. ضمناً مشخّصات خواسته‌شده در پایین پاسخ‌برگ را با مداد مشکی بنویسید.

۳- کلیه جواب ها باید در پاسخ‌برگ وارد شود. پاسخ های نوشته شده در دفترچه سوال تصحیح نشده و به آن ها هیچ امتیازی تعلق نخواهد گرفت.

٤- برگهٔ پاسخ‌برگ را دستگاه تصحیح می‌کند؛ پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

٥- دفترچهٔ سؤال باید همراه پاسخ‌برگ تحویل داده شود.

٦- پاسخ درست به هر پرسش ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.

۷- از مخدوش کردن بارکدها و مربع‌ها در چهارگوشهٔ صفحه در دفترچهٔ پاسخ‌برگ جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

۸- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

۹- این دفترچه شامل ۲۰ سوال چندگزینه‌ای و با احتساب جلد ۴ برگ است.

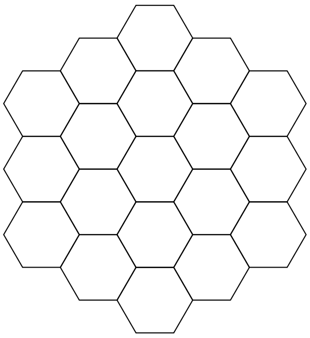
آدرس پایگاه اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۶ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ می‌خواهیم خانه‌های شکل زیر را با رنگ‌های سفید و سیاه رنگ‌آمیزی کنیم. **تلاطُم** یک رنگ‌آمیزی برابر با **تعداد** جفت خانه‌های هم‌رنگی است که یک ضلع مشترک دارند. کمترین میزان تلاطم که می‌توانیم با رنگ‌آمیزی جدول به دست آوریم چند است؟



۱) ۱۳ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۱۴ ۵) ۱۲

۲ الگوریتم زیر را درنظر بگیرید:

۱. آرایه‌ی A به طول n را ورودی بگیر.
۲. اگر آرایه‌ی A مرتب بود، به مرحله‌ی ۷ برو.
۳. دو آرایه‌ی $X = A[۱ \cdots \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor]$ و $Y = A[\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱ \cdots n]$ را درنظر بگیر.
۴. عدد صحیح t را ورودی بگیر؛ اگر t عددی زوج بود، به مرحله‌ی ۶ برو.
۵. آرایه‌ی A را برابر با X و مقدار n را برابر با $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.
۶. آرایه‌ی A را برابر با Y و مقدار n را برابر با $n - \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.
۷. آرایه‌ی A را خروجی بده.
۸. پایان.

منظور از $A[l \cdots r]$ بازه‌ی l تا r از آرایه‌ی A (شامل خود l و r) است؛ برای مثال اگر $A = \langle ۲, ۱, ۳, ۵, ۴ \rangle$ باشد $A[۲ \cdots ۴] = \langle ۱, ۳, ۵ \rangle$ می‌شود. اگر مقادیر t را به صورتی ورودی دهیم که طول آرایه‌ی نهایی بیشینه شود، به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد ۱ تا ۸ طول آرایه‌ی نهایی حداقل برابر با ۲ خواهد بود؟

۱) ۲۰۱۶۰ ۲) ۴۰۳۲۰ ۳) ۳۴۵۱۰ ۴) ۳۰۲۴۰ ۵) ۳۷۸۰۰

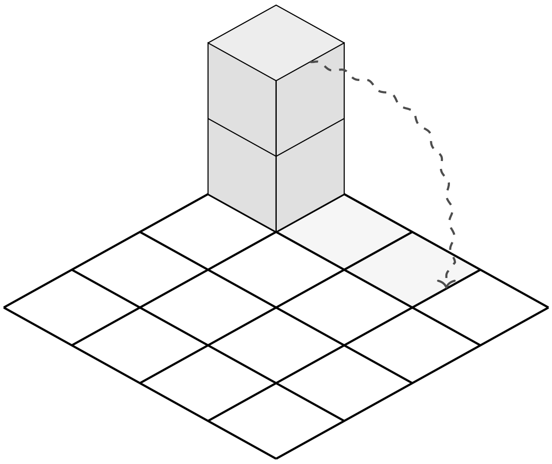
۳ در شهر جادوگرها شش نفر زندگی می‌کنند که هرکدام از آن‌ها راستگو یا دروغگو هستند. افراد راستگو همواره راست و افراد دروغگو همواره دروغ می‌گویند. سِلتی می‌خواهد متوجه راستگو یا دروغگو بودن هرکدام از آن‌ها شود و در نتیجه از آن‌ها خواست اطلاعاتی در رابطه با خود و دیگران به او بدهند:

- فرد A: B دروغ می‌گوید.
- فرد B: حداقل یکی از A و C دروغ می‌گویند.
- فرد C: A راست می‌گوید.
- فرد D: دقیقاً دو نفر راست می‌گویند.
- فرد E: D دروغ می‌گوید.
- فرد F: دقیقاً سه نفر راست می‌گویند.

سلتی به چند طریق می‌تواند راستگو یا دروغگو بودن افراد را مشخص کند، به نحوی که تناقضی در گفته‌های هیچ‌کدام از آن‌ها وجود نداشته باشد؟

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۵   ۴) ۴   ۵) ۱

۴ یک شش وجهی صورتی ۲ × ۱ × ۱ داریم که در یکی از گوشه‌های جدول ۴ × ۴ مانند شکل زیر قرار دارد. در هر گام می‌توان آن را روی یکی از وجه‌هایش غلتاند (به شرطی که از جدول بیرون نزند) و تمام خانه‌های زیر آن را به رنگ صورتی درآورد (یک خانه می‌تواند چندین بار رنگ‌آمیزی شود). در ابتدا تمام خانه‌های جدول به جز خانه‌ی زیرین شش وجهی سفید هستند. حداقل چند گام لازم داریم تا کل جدول را به رنگ صورتی درآوریم؟



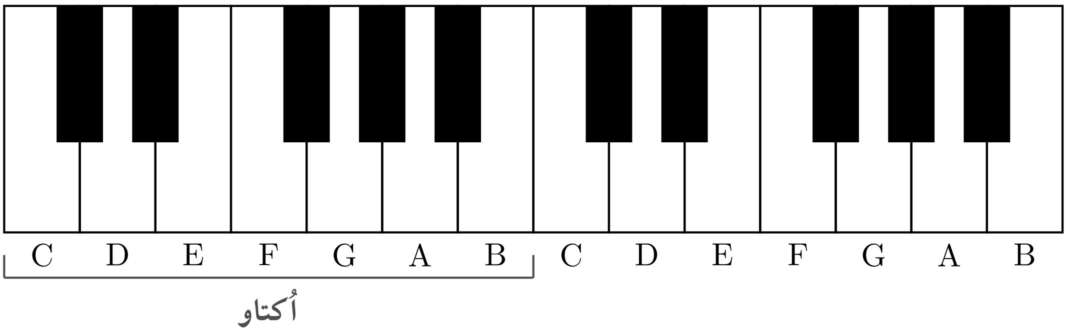
۱) ۱۱   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۹   ۵) ۸

۵ جدولی ۳ × ۲ داریم که در آن سه جفت A, B, C وجود دارند. فاصله‌ی منهتنی دو خانه‌ی (x, y) و (x', y') برابر با $|x - x'| + |y - y'|$ است؛ برای مثال در جدول زیر اگر مختصات هر خانه از جدول را برابر با شماره‌ی سطر و ستون آن در نظر بگیریم، جمع فواصل منهتنی این سه جفت برابر با ۵ = ۱ + ۱ + ۳ می‌شود. به ازای تمام حالات چینش این سه جفت در جدول، امید ریاضی جمع فواصل منهتنی این جفت‌ها چه‌قدر است؟

A	B	B
C	C	A

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$ ۳) ۵   ۴) ۱۰   ۵) ۶

۶ صفحه کلید پیانو از هفت اُکتاو با چینشی یکسان تشکیل می‌شود که کنار هم قرار می‌گیرند. هر اکتاو از دوازده کلید سیاه و سفید تشکیل می‌شود که در چینش استاندارد، این ترکیب از هفت کلید سفید و پنج کلید سیاه تشکیل شده است. در شکل زیر می‌توانید چینش دو اکتاو متوالی در صفحه کلید اصلی پیانو را ببینید:



به دلیل کوچک‌تر بودن کلیدهای سیاه و سختی فشردن آن‌ها، نمی‌توان دو کلید سیاه پشت سر هم در صفحه کلید داشت و باید بین هر دو کلید سیاه مجاور حداقل یک کلید سفید وجود داشته باشد. با توجه به این محدودیت، چند اکتاو معتبر به طول ۱۲ با تعداد کلیدهای سفید و سیاه دلخواه می‌توان ساخت که در کل صفحه کلید (در یک اکتاو یا بین دو اکتاو متوالی) هیچ دو کلید سیاه مجاوری وجود نداشته باشد؟

۱) ۳۷۷
۲) ۲۳۳
۳) ۲۸۸
۴) ۳۲۲
۵) ۱۴۴

۷ هفت دیو با قدرت‌های $\langle ۱, ۵, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۳ \rangle$ و هفت انسان با قدرت‌های $\langle ۲, ۳, ۴, ۷, ۹, ۱۱, ۱۴ \rangle$ داریم. می‌دانیم در هر جنگ، هفت جفت انسان و دیو نبرد تن به تن می‌کنند و از هر جفت، فرد قدرتمندتر زنده می‌ماند. دو چینش در صورتی متمایزند که فردی وجود داشته باشد که رقیب او در این دو چینش متفاوت باشد. به ازای چند چینش اولیه، تعداد انسان‌هایی که زنده می‌مانند بیشترین مقدار ممکن است؟

۱) ۴۲۰
۲) ۱۴۴
۳) ۷۲
۴) ۱۰۸
۵) ۲۴

۸ جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۰ را درنظر بگیرید که می‌توانیم عملیات زیر را به تعدادی دلخواه روی آن انجام دهیم: در هر مرحله عددی دلخواه از جایگشت که تا به حال آن را انتخاب نکرده‌ایم را از جایگشت حذف و سپس به انتهای آن اضافه می‌کنیم؛ برای مثال جایگشت زیر پس از انتخاب عدد ۹ (در صورتی که تا به حال انتخاب نشده باشد) بدین شکل تغییر می‌یابد:

$$\langle ۴, ۱, ۶, \underline{۹}, ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۷, ۸ \rangle \rightarrow \langle ۴, ۱, ۶, ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۷, ۸, \underline{۹} \rangle$$

تعداد جایگشت‌های اولیه‌ای که می‌توان با انجام دقیقاً پنج مرحله آن‌ها را تبدیل به یک جایگشت صعودی یا نزولی کرد چه‌قدر است؟

۱) ۶۰۲۲۸
۲) ۳۰۲۴۰
۳) ۳۰۴۹۲
۴) ۶۰۴۸۰
۵) ۱۵۱۲۰

۹ برج سَرداد ۵ طبقه دارد که در طبقه‌ی همکف لابی و در طبقات ۱ تا ۵ واحدهای مسکونی قرار دارند. در هر طبقه‌ی این برج ۵ نفر زندگی می‌کنند و آسانسور برج نیز ۵ نفر ظرفیت دارد. در یک روز عجیب به دلیل به صدا درآمدن آژیر خطر، همه‌ی ساکنین پشت در آسانسور طبقه‌ی خودشان در یک صف می‌ایستند تا به لابی بروند. همچنین قبل از این اتفاق آسانسور در طبقه‌ی ۵ بوده است.

در هر مرحله آسانسور به سمت یکی از طبقات مورد نظر مدیر ساختمان حرکت می‌کند و به اندازه‌ی تعدادی که او مشخص کرده است افراد آن طبقه را از ابتدای صف سوار می‌کند. اگر آسانسور به لابی برسد، تمام افراد داخل آن پیاده می‌شوند و هیچ‌کس حق پیاده شدن در حین مسیر را ندارد. در هر طبقه، کسی که در اول صف قرار دارد و تابلوی طبقات آسانسور را می‌بیند به ازای هر باری که طبقه‌ی آن عوض می‌شود و او سوارش نیست یک واحد اعصابش خرد می‌شود. هدف مدیر ساختمان این است که مجموع اعصاب خردی اعضای برج کمینه شود. حداقل مجموع اعصاب خردی اعضای برج که مدیر ساختمان می‌تواند به آن برسد چقدر است؟

۱) ۴۵
۲) ۵۵
۳) ۷۵
۴) ۵۰
۵) ۷۰

۱۰ پیکاسو نقاش مطرح سبک کوبیسم بود که توانایی نقاشی و رنگ‌آمیزی هرچیزی را داشت. او برای رنگ‌آمیزی درخت‌ها از دو اصل **عدم شلختگی** و **عدم کسل‌کنندگی** پیروی می‌کرد:

- عدم شلختگی: هیچ رأسی نباید بیش از دو رنگ متفاوت در میان رأس‌های مجاورش داشته باشد.
- عدم کسل‌کنندگی: باید از بیشترین تعداد رنگ ممکن در رنگ‌آمیزی رأس‌ها استفاده شود.

چند درخت ده رأسی وجود دارد که پیکاسو آن‌ها را با توجه به اصول رنگ‌آمیزی خود با دقیقاً چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی می‌کند؟ دو درخت $T_۱$ و $T_۲$ متفاوت هستند، اگر و تنها اگر یالی مانند (u, v) در درخت $T_۱$ بین دو رأس u و v وجود داشته باشد که در درخت $T_۲$ قرار نداشته باشد.

۱) ۴۶۰۸۰
۲) ۴۵۹۹۰
۳) ۲۲۸۶۰
۴) ۲۲۹۵۰
۵) ۱۱۴۳۰

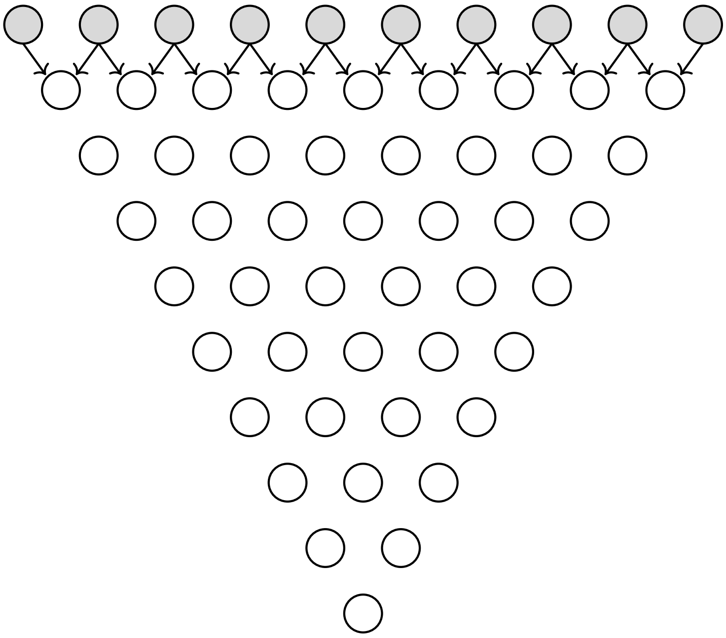
۱۱ منظور از $f(x)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح x بر ۲ است؛ برای مثال $f(۱۵) = ۱$ و $f(۱۰) = ۰$ است. فرض کنید عددی صحیح مانند x داریم. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

```
۱. مقدار $k$ را برابر ۰ و مقدار $last$ را برابر ۱− قرار بده.
۲. اگر $f(x) = ۰$ بود، به مرحله‌ی ۵ برو.
۳. اگر $last \neq ۱$ بود، مقدار $k$ را یکی اضافه کن.
۴. مقدار $last$ را برابر ۱ قرار بده و به مرحله‌ی ۷ برو.
۵. اگر $last \neq ۰$ بود، مقدار $k$ را یکی اضافه کن.
۶. مقدار $last$ را برابر ۰ قرار بده.
۷. مقدار $x$ را برابر $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ قرار بده.
۸. اگر $x > ۰$ بود، به مرحله‌ی ۲ برو.
۹. مقدار $k$ را به عنوان خروجی اعلام کن.
۱۰. پایان.
```

اگر الگوریتم بالا را به ازای تمام مقادیر $۰ \leqslant x < ۱۰۲۴$ انجام دهیم و خروجی نهایی آن‌ها را با یکدیگر جمع کنیم، حاصل برابر با چه عددی است؟

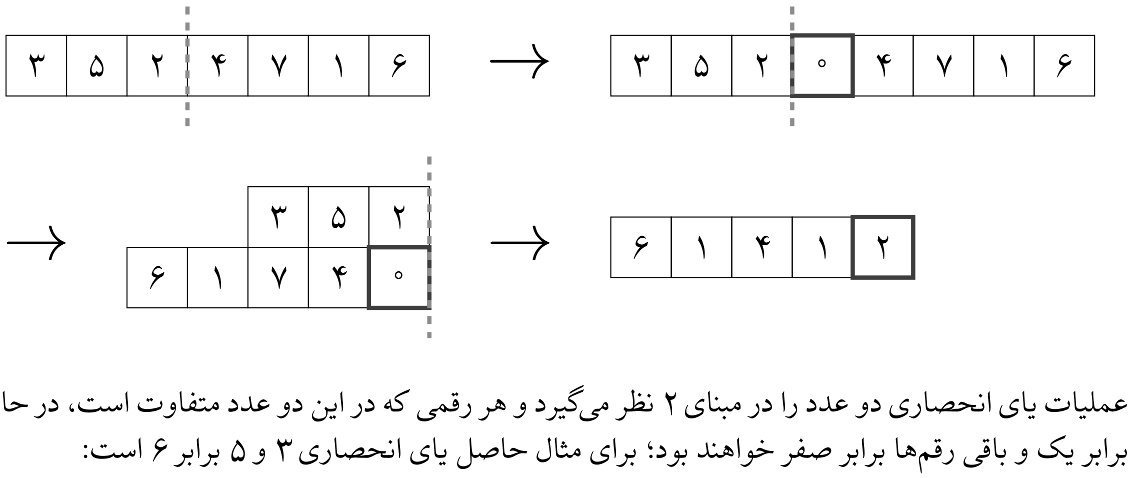
۱) ۵۱۲۱
۲) ۲۵۶۰
۳) ۵۶۳۲
۴) ۵۱۲۰
۵) ۴۶۰۸

۱۲ در شکل زیر، ابتدا خانه‌های بالاترین سطر را با اعداد ۰، ۱ یا ۲ پر می‌کنیم و سپس هر خانه از سطرهای دیگر برابر مجموع دو خانه‌ی بالایی‌اش می‌شود. به ازای چند حالت مقداردهی اعداد بالاترین سطر، مجموع اعداد آن و همچنین عدد نهایی خانه‌ی پایین هرم هردو مضربی از ۳ می‌شوند؟



۱) ۱۵۳۶
۲) ۶۵۶۱
۳) ۲۳۰۴
۴) ۷۶۸
۵) ۱۹۶۸۳

۱۳ نواری به طول ۷ داریم که در ابتدا روی آن اعداد ۱ تا ۷ نوشته شده‌اند. عمل **تازا** را بدین شکل تعریف می‌کنیم؛ ابتدا خطی دلخواه میان دو خانه‌ی مجاور از نوار انتخاب می‌کنیم. سپس یک خانه‌ی جدید با عدد صفر به سمت راست خط اولیه اضافه می‌کنیم. در ادامه نوار را از خط اولیه تا می‌کنیم و به جای مقادیر خانه‌هایی که روی هم قرار گرفته‌اند، مقدار **یای انحصاری** (XOR) آن دو خانه را قرار می‌دهیم:



عملیات یای انحصاری دو عدد را در مبنای ۲ نظر می‌گیرد و هر رقمی که در این دو عدد متفاوت است، در حاصل برابر یک و باقی رقم‌ها برابر صفر خواهند بود؛ برای مثال حاصل یای انحصاری ۳ و ۵ برابر ۶ است:

$$۳ \oplus ۵ = ۰۱۱_۲ \oplus ۱۰۱_۲ = ۱۱۰_۲ = ۶$$

عملیات تازا را می‌توان آن‌قدر روی آرایه انجام داد که طول آن برابر با ۲ شود. اگر **قدرت تازایی** یک آرایه را برابر حداکثر مقدار جمع دو عدد انتهایی آن پس از تعدادی حرکت دلخواه تعریف کنیم، جمع قدرت تازایی تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۷ چند است؟

۱) ۴۰۳۲۰ ۲) ۳۲۲۵۶ ۳) ۷۰۵۶۰ ۴) ۱۶۱۲۸ ۵) ۳۵۲۸۰

۱۴ باب اسفنجی ۳۵ همبرگر تهیه کرده است که تمامی آن‌ها را می‌خواهد سرخ کند. سرخ شدن دو سمت هر همبرگر در مجموع ۱۴۰۴ ثانیه طول می‌کشد؛ یعنی اگر سمت زیرین همبرگر i اُم به t_i ثانیه برای سرخ شدن نیاز داشته باشد، سمت دیگر آن به ۱۴۰۴ − t_i ثانیه نیاز دارد. باب اسفنجی مقادیر t_i را می‌داند و متوجه شده است که تمامی آن‌ها عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۱۴۰۴ هستند.
در ابتدا باب اسفنجی هرکدام از ۳۵ همبرگر را به طور همزمان از سمت دلخواه خود روی اجاق می‌گذارد و به شستن ظرف‌ها می‌پردازد. همچنین باب اسفنجی نباید هیچ سمتی از همبرگرها را بسوزاند؛ برای همین می‌تواند هر زمانی که دلش می‌خواهد از ظرف شستن دست بکشد و یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از همبرگرها را انتخاب و در زمانی ناچیز برگرداند تا سمت دیگر آن به سرخ شدن ادامه دهد. حداقل تعداد بارهایی که او لازم دارد تا قبل از پخته‌شدن همبرگرها دست از ظرف شستن بردارد تا بتواند آن‌ها را بدون سوزاندن حاضر کند چه‌قدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۳۵ ۵) ۱۲

۱۵ یک جدول ۳ × ۳ داریم که در یکی از خانه‌های آن موشی کور پنهان شده است. به هر سه خانه‌ای از جدول که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند یک **قطر پراکنده** و به هر سه خانه‌ای از جدول که در یک سطر، ستون یا قطر پراکنده باشند یک **گروه** می‌گوییم. هدف آن است که در کمترین تعداد مرحله موش کور را پیدا کنیم.
در هر مرحله یکی از خانه‌های دلخواه جدول مانند A را بازبینی می‌کنیم و اگر موش کور در آن‌جا بود او را دستگیر می‌کنیم. در غیر این صورت اگر موش کور در خانه‌ای مانند B باشد، پس از اتمام بازبینی فرار کرده و به خانه‌ی هم‌گروهی A و B می‌رود. حداقل تعداد مراحل لازم برای دستگیری موش کور چند است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) نمی‌توان با یک روش قطعی موش کور را دستگیر کرد. ۴) ۹ ۵) ۸

حمید یک جدول ۳ × ۳ دارد که هر خانه‌ی آن با دقیقاً یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی شده است. **رنگ محبوب** یک سطر یا ستون، رنگی است که در آن سطر یا ستون بیشتر از رنگ دیگر تکرار شده است. حمید جدول را به ما نشان نمی‌دهد، اما رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها را به ما می‌گوید. **عدد ابهام** اطلاعات حمید برابر تعداد رنگ‌آمیزی‌های ممکن از جدول است که با اطلاعاتی که به ما داده است، سازگاری داشته باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۶ اگر حمید بگوید رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها سیاه است، عدد ابهام اطلاعات داده شده چه مقداری است؟

۱) ۳۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۵ ۴) ۳۳ ۵) ۶

۱۷ به ازای چند حالت از اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد، عدد ابهام برابر صفر است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۷ ۵) ۱۴

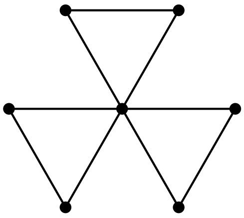
۱۸ بیشترین عدد ابهام اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد برابر چه مقداری است؟

۱) ۵۴   ۲) ۶۴   ۳) ۴۲   ۴) ۳۴   ۵) ۲۵

آقای مجری یک گراف به ببعی می‌دهد و از او می‌خواهد که بیشترین تعداد یال را به گراف اضافه کند، به طوری که همچنان ساده بماند و اندازه‌ی بزرگ‌ترین زیرگراف کامل آن تغییری نکند. به زیرگرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود دارد **زیرگراف کامل** می‌گوییم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ اگر آقای مجری گراف زیر را به ببعی بدهد، ببعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟



۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۹   ۵) ۸

۲۰ گراف Q_n یک اَبَرمکعب ۲^n رأسی است که هر رأس آن نمایانگر یک رشته‌ی دودویی n رقمی می‌باشد و بین رأس‌هایی که رشته‌ی دودویی آن‌ها دقیقاً در یک رقم تفاوت دارند یال وجود دارد. اگر آقای مجری گراف $Q_{۸}$ را به ببعی بدهد، ببعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟

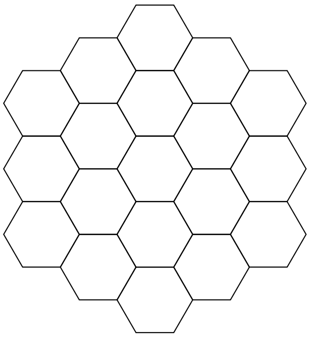
۱) ۱۶۳۸۴   ۲) ۱۴۳۳۶   ۳) ۶۳۰۷   ۴) ۶۴۰۰   ۵) ۱۵۳۶۰

مرحله‌ی دوم سی و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور - آزمون چندگزینه‌ای

- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۶ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱

می‌خواهیم خانه‌های شکل زیر را با رنگ‌های سفید و سیاه رنگ‌آمیزی کنیم. **تلاطُم** یک رنگ‌آمیزی برابر با تعداد جفت خانه‌های هم‌رنگی است که یک ضلع مشترک دارند. کمترین میزان تلاطم که می‌توانیم با رنگ‌آمیزی جدول به دست آوریم چند است؟



۱) ۱۳   ۲) ۱۰   ۳) ۹   ۴) ۱۴   ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۲

الگوریتم زیر را درنظر بگیرید:

۱. آرایه‌ی A به طول n را ورودی بگیر.
۲. اگر آرایه‌ی A مرتب بود، به مرحله‌ی ۷ برو.
۳. دو آرایه‌ی $X = A[۱\cdots\lfloor\frac{n}{۲}\rfloor]$ و $Y = A[\lfloor\frac{n}{۲}\rfloor + ۱\cdots n]$ را درنظر بگیر.
۴. عدد صحیح t را ورودی بگیر؛ اگر t عددی زوج بود، به مرحله‌ی ۶ برو.
۵. آرایه‌ی A را برابر با X و مقدار n را برابر با $\lfloor\frac{n}{۲}\rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.
۶. آرایه‌ی A را برابر با Y و مقدار n را برابر با $n - \lfloor\frac{n}{۲}\rfloor$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۲ برو.
۷. آرایه‌ی A را خروجی بده.
۸. پایان.

منظور از $A[l\cdots r]$ بازه‌ی l تا r از آرایه‌ی A (شامل خود l و r) است؛ برای مثال اگر $A = \langle ۲, ۱, ۳, ۵, ۴\rangle$ باشد $A[۲\cdots ۴] = \langle ۱, ۳, ۵\rangle$ می‌شود. اگر مقادیر t را به صورتی ورودی دهیم که طول آرایه‌ی نهایی بیشینه شود، به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد ۱ تا ۸ طول آرایه‌ی نهایی حداقل برابر با ۲ خواهد بود؟

۱) ۲۰۱۶۰   ۲) ۴۰۳۲۰   ۳) ۳۴۵۱۰   ۴) ۳۰۲۴۰   ۵) ۳۷۸۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۳ در شهر جادوگرها شش نفر زندگی می‌کنند که هرکدام از آن‌ها راستگو یا دروغگو هستند. افراد راستگو همواره راست و افراد دروغگو همواره دروغ می‌گویند. سِلتِی می‌خواهد متوجه راستگو یا دروغگو بودن هرکدام از آن‌ها شود و در نتیجه از آن‌ها خواست اطلاعاتی در رابطه با خود و دیگران به او بدهند:

- فرد A: B دروغ می‌گوید.
- فرد B: حداقل یکی از A و C دروغ می‌گویند.
- فرد C: A راست می‌گوید.
- فرد D: دقیقاً دو نفر راست می‌گویند.
- فرد E: D دروغ می‌گوید.
- فرد F: دقیقاً سه نفر راست می‌گویند.

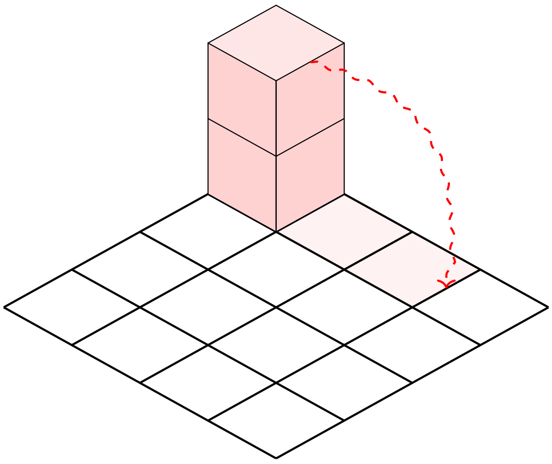
سلتی به چند طریق می‌تواند راستگو یا دروغگو بودن افراد را مشخص کند، به نحوی که تناقضی در گفته‌های هیچ‌کدام از آن‌ها وجود نداشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۴ یک شش وجهی صورتی ۲ × ۱ × ۱ داریم که در یکی از گوشه‌های جدول ۴ × ۴ مانند شکل زیر قرار دارد. در هر گام می‌توان آن را روی یکی از وجه‌هایش غلتاند (به شرطی که از جدول بیرون نزند) و تمام خانه‌های زیر آن را به رنگ صورتی درآورد (یک خانه می‌تواند چندین بار رنگ‌آمیزی شود). در ابتدا تمام خانه‌های جدول به جز خانه‌ی زیرین شش وجهی سفید هستند. حداقل چند گام لازم داریم تا کل جدول را به رنگ صورتی درآوریم؟



۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۵ جدولی ۲×۳ داریم که در آن سه جفت A, B, C وجود دارند. فاصله‌ی منهتنی دو خانه‌ی (x, y) و (x', y') برابر با $|x - x'| + |y - y'|$ است؛ برای مثال در جدول زیر اگر مختصات هر خانه از جدول را برابر با شماره‌ی سطر و ستون آن در نظر بگیریم، جمع فواصل منهتنی این سه جفت برابر با $۳ + ۱ + ۱ = ۵$ می‌شود. به ازای تمام حالات چینش این سه جفت در جدول، امید ریاضی جمع فواصل منهتنی این جفت‌ها چه‌قدر است؟

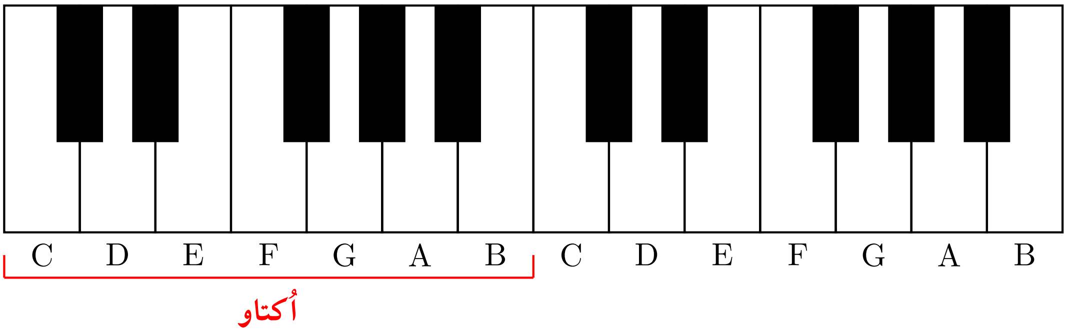
A	B	B
C	C	A

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$ ۳) ۵ ۴) ۱۰ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۶ صفحه کلید پیانو از هفت اُکتاو با چینشی یکسان تشکیل می‌شود که کنار هم قرار می‌گیرند. هر اکتاو از دوازده کلید سیاه و سفید تشکیل می‌شود که در چینش استاندارد، این ترکیب از هفت کلید سفید و پنج کلید سیاه تشکیل شده است. در شکل زیر می‌توانید چینش دو اکتاو متوالی در صفحه کلید اصلی پیانو را ببینید:



به دلیل کوچک‌تر بودن کلیدهای سیاه و سختی فشردن آن‌ها، نمی‌توان دو کلید سیاه پشت سر هم در صفحه کلید داشت و باید بین هر دو کلید سیاه مجاور حداقل یک کلید سفید وجود داشته باشد. با توجه به این محدودیت، چند اکتاو معتبر به طول ۱۲ با تعداد کلیدهای سفید و سیاه دلخواه می‌توان ساخت که در کل صفحه کلید (در یک اکتاو یا بین دو اکتاو متوالی) هیچ دو کلید سیاه مجاوری وجود نداشته باشد؟

۱) ۳۷۷ ۲) ۲۳۳ ۳) ۲۸۸ ۴) ۳۲۲ ۵) ۱۴۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۷ هفت دیو با قدرت‌های ⟨۱, ۵, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۳⟩ و هفت انسان با قدرت‌های ⟨۲, ۳, ۴, ۷, ۹, ۱۱, ۱۴⟩ داریم. می‌دانیم در هر جنگ، هفت جفت انسان و دیو نبرد تن به تن می‌کنند و از هر جفت، فرد قدرتمندتر زنده می‌ماند. دو چینش در صورتی متمایزند که فردی وجود داشته باشد که رقیب او در این دو چینش متفاوت باشد. به ازای چند چینش اولیه، تعداد انسان‌هایی که زنده می‌مانند بیشترین مقدار ممکن است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۷۲ ۴) ۱۰۸ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۸ جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۰ را درنظر بگیرید که می‌توانیم عملیات زیر را به تعدادی دلخواه روی آن انجام دهیم: در هر مرحله عددی دلخواه از جایگشت که تا به حال آن را انتخاب نکرده‌ایم را از جایگشت حذف و سپس به انتهای آن اضافه می‌کنیم؛ برای مثال جایگشت زیر پس از انتخاب عدد ۹ (در صورتی که تا به حال انتخاب نشده باشد) بدین شکل تغییر می‌یابد:

$$\langle ۴, ۱, ۶, \underline{۹}, ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۷, ۸\rangle \rightarrow \langle ۴, ۱, ۶, ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۷, ۸, \underline{۹}\rangle$$

تعداد جایگشت‌های اولیه‌ای که می‌توان با انجام دقیقاً پنج مرحله آن‌ها را تبدیل به یک جایگشت صعودی یا نزولی کرد چه‌قدر است؟

۱) ۶۰۲۲۸ ۲) ۳۰۲۴۰ ۳) ۳۰۴۹۲ ۴) ۶۰۴۸۰ ۵) ۱۵۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

۹ برج سَرداد ۵ طبقه دارد که در طبقه‌ی همکف لابی و در طبقات ۱ تا ۵ واحدهای مسکونی قرار دارند. در هر طبقه‌ی این برج ۵ نفر زندگی می‌کنند و آسانسور برج نیز ۵ نفر ظرفیت دارد. در یک روز عجیب به دلیل به صدا درآمدن آژیر خطر، همه‌ی ساکنین پشت در آسانسور طبقه‌ی خودشان در یک صف می‌ایستند تا به لابی بروند. همچنین قبل از این اتفاق آسانسور در طبقه‌ی ۵ بوده است.
در هر مرحله آسانسور به سمت یکی از طبقات مورد نظر مدیر ساختمان حرکت می‌کند و به اندازه‌ی تعدادی که او مشخص کرده است افراد آن طبقه را از ابتدای صف سوار می‌کند. اگر آسانسور به لابی برسد، تمام افراد داخل آن پیاده می‌شوند و هیچ‌کس حق پیاده شدن در حین مسیر را ندارد. در هر طبقه، کسی که در اول صف قرار دارد و تابلوی طبقات آسانسور را می‌بیند به ازای هر باری که طبقه‌ی آن عوض می‌شود و او سوارش نیست یک واحد اعصابش خرد می‌شود. هدف مدیر ساختمان این است که مجموع اعصاب خردی اعضای برج کمینه شود. حداقل مجموع اعصاب خردی اعضای برج که مدیر ساختمان می‌تواند به آن برسد چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۷۵ ۴) ۵۰ ۵) ۷۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۱۰ پیکاسو نقاش مطرح سبک کوبیسم بود که توانایی نقاشی و رنگ‌آمیزی هرچیزی را داشت. او برای رنگ‌آمیزی درخت‌ها از دو اصل **عدم شلختگی** و **عدم کسل‌کنندگی** پیروی می‌کرد:

- عدم شلختگی: هیچ رأسی نباید بیش از دو رنگ متفاوت در میان رأس‌های مجاورش داشته باشد.
- عدم کسل‌کنندگی: باید از بیشترین تعداد رنگ ممکن در رنگ‌آمیزی رأس‌ها استفاده شود.

چند درخت ده رأسی وجود دارد که پیکاسو آن‌ها را با توجه به اصول رنگ‌آمیزی خود با دقیقاً چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی می‌کند؟ دو درخت $T_۱$ و $T_۲$ متفاوت هستند، اگر و تنها اگر یالی مانند (u, v) در درخت $T_۱$ بین دو رأس u و v وجود داشته باشد که در درخت $T_۲$ قرار نداشته باشد.

۱) ۴۶۰۸۰ ۲) ۴۵۹۹۰ ۳) ۲۲۸۶۰ ۴) ۲۲۹۵۰ ۵) ۱۱۴۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۱ منظور از $f(x)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح x بر ۲ است؛ برای مثال $f(۱۵) = ۱$ و $f(۱۰) = ۰$ است. فرض کنید عددی صحیح مانند x داریم. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

```
۱. مقدار $k$ را برابر ۰ و مقدار $last$ را برابر ۱− قرار بده.
۲. اگر $f(x) = ۰$ بود، به مرحله‌ی ۵ برو.
۳. اگر $last \neq ۱$ بود، مقدار $k$ را یکی اضافه کن.
۴. مقدار $last$ را برابر ۱ قرار بده و به مرحله‌ی ۷ برو.
۵. اگر $last \neq ۰$ بود، مقدار $k$ را یکی اضافه کن.
۶. مقدار $last$ را برابر ۰ قرار بده.
۷. مقدار $x$ را برابر $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ قرار بده.
۸. اگر $x > ۰$ بود، به مرحله‌ی ۲ برو.
۹. مقدار $k$ را به عنوان خروجی اعلام کن.
۱۰. پایان.
```

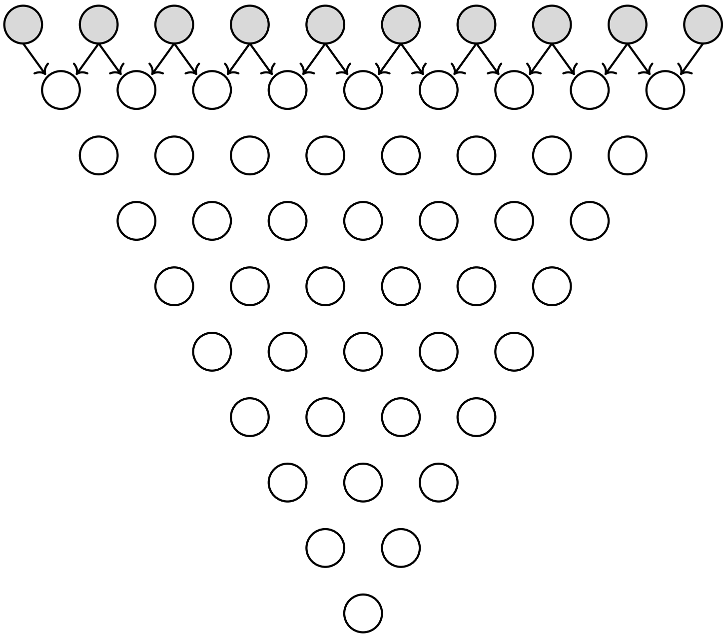
اگر الگوریتم بالا را به ازای تمام مقادیر $۰ \leqslant x < ۱۰۲۴$ انجام دهیم و خروجی نهایی آن‌ها را با یکدیگر جمع کنیم، حاصل برابر با چه عددی است؟

۱) ۵۱۲۱ ۲) ۲۵۶۰ ۳) ۵۶۳۲ ۴) ۵۱۲۰ ۵) ۴۶۰۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

۱۲ در شکل زیر، ابتدا خانه‌های بالاترین سطر را با اعداد ۰، ۱ یا ۲ پر می‌کنیم و سپس هر خانه از سطرهای دیگر برابر مجموع دو خانه‌ی بالایی‌اش می‌شود. به ازای چند حالت مقداردهی اعداد بالاترین سطر، مجموع اعداد آن و همچنین عدد نهایی خانه‌ی پایین هرم هردو مضربی از ۳ می‌شوند؟

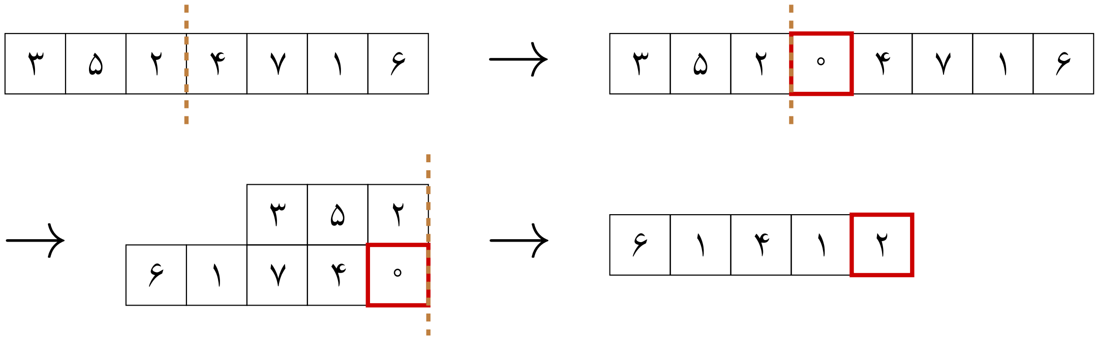


۱) ۱۵۳۶ ۲) ۶۵۶۱ ۳) ۲۳۰۴ ۴) ۷۶۸ ۵) ۱۹۶۸۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۱۳ نواری به طول ۷ داریم که در ابتدا روی آن اعداد ۱ تا ۷ نوشته شده‌اند. عمل **تازا** را بدین شکل تعریف می‌کنیم؛ ابتدا خطی دلخواه میان دو خانه‌ی مجاور از نوار انتخاب می‌کنیم. سپس یک خانه‌ی جدید با عدد صفر به سمت راست خط اولیه اضافه می‌کنیم. در ادامه نوار را از خط اولیه تا می‌کنیم و به جای مقادیر خانه‌هایی که روی هم قرار گرفته‌اند، مقدار **یای انحصاری** (XOR) آن دو خانه را قرار می‌دهیم:



عملیات یای انحصاری دو عدد را در مبنای ۲ نظر می‌گیرد و هر رقمی که در این دو عدد متفاوت است، در حاصل برابر یک و باقی رقم‌ها برابر صفر خواهند بود؛ برای مثال حاصل یای انحصاری ۳ و ۵ برابر ۶ است:

$$۳ \oplus ۵ = ۰۱۱_۲ \oplus ۱۰۱_۲ = ۱۱۰_۲ = ۶$$

عملیات تازا را می‌توان آن‌قدر روی آرایه انجام داد که طول آن برابر با ۲ شود. اگر **قدرت تازایی** یک آرایه را

برابر حداکثر مقدار جمع دو عدد انتهایی آن پس از تعدادی حرکت دلخواه تعریف کنیم، جمع قدرت تازایی تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۷ چند است؟

۱) ۴۰۳۲۰ ۲) ۳۲۲۵۶ ۳) ۷۰۵۶۰ ۴) ۱۶۱۲۸ ۵) ۳۵۲۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۱۴ باب اسفنجی ۳۵ همبرگر تهیه کرده است که تمامی آن‌ها را می‌خواهد سرخ کند. سرخ شدن دو سمت هر همبرگر در مجموع ۱۴۰۴ ثانیه طول می‌کشد؛ یعنی اگر سمت زیرین همبرگر i اُم به t_i ثانیه برای سرخ شدن نیاز داشته باشد، سمت دیگر آن به $۱۴۰۴ - t_i$ ثانیه نیاز دارد. باب اسفنجی مقادیر t_i را می‌داند و متوجه شده است که تمامی آن‌ها عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۱۴۰۴ هستند.

در ابتدا باب اسفنجی هرکدام از ۳۵ همبرگر را به طور همزمان از سمت دلخواه خود روی اجاق می‌گذارد و به شستن ظرف‌ها می‌پردازد. همچنین باب اسفنجی نباید هیچ سمتی از همبرگرها را بسوزاند؛ برای همین می‌تواند هر زمانی که دلش می‌خواهد از ظرف شستن دست بکشد و یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از همبرگرها را انتخاب و در زمانی ناچیز برگرداند تا سمت دیگر آن به سرخ شدن ادامه دهد. حداقل تعداد بارهایی که او لازم دارد تا قبل از پخته‌شدن همبرگرها دست از ظرف شستن بردارد تا بتواند آن‌ها را بدون سوزاندن حاضر کند چه‌قدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۳۵ ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۱۵ یک جدول ۳×۳ داریم که در یکی از خانه‌های آن موشی کور پنهان شده است. به هر سه خانه‌ای از جدول که هیچ دوتایی از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند یک **قطر پراکنده** و به هر سه خانه‌ای از جدول که در یک سطر، ستون یا قطر پراکنده باشند یک **گروه** می‌گوییم. هدف آن است که در کمترین تعداد مرحله موش کور را پیدا کنیم. در هر مرحله یکی از خانه‌های دلخواه جدول مانند A را بازبینی می‌کنیم و اگر موش کور در آن‌جا بود او را دستگیر می‌کنیم. در غیر این صورت اگر موش کور در خانه‌ای مانند B باشد، پس از اتمام بازبینی فرار کرده و به خانه‌ی هم‌گروهی A و B می‌رود. حداقل تعداد مراحل لازم برای دستگیری موش کور چند است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) نمی‌توان با یک روش قطعی موش کور را دستگیر کرد. ۴) ۹ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

حمید یک جدول ۳×۳ دارد که هر خانه‌ی آن با دقیقاً یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ‌آمیزی شده است. **رنگ محبوب** یک سطر یا ستون، رنگی است که در آن سطر یا ستون بیشتر از رنگ دیگر تکرار شده است. حمید جدول را به ما نشان نمی‌دهد، اما رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها را به ما می‌گوید. **عدد ابهام** اطلاعات حمید برابر تعداد رنگ‌آمیزی‌های ممکن از جدول است که با اطلاعاتی که به ما داده است، سازگاری داشته باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۶ اگر حمید بگوید رنگ محبوب تمام سطرها و ستون‌ها سیاه است، عدد ابهام اطلاعات داده شده چه مقداری است؟

۱) ۳۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۵ ۴) ۳۳ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

۱۷ به ازای چند حالت از اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد، عدد ابهام برابر صفر است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۷ ۵) ۱۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۸ بیشترین عدد ابهام اطلاعاتی که حمید می‌تواند به ما بدهد برابر چه مقداری است؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۴ ۳) ۴۲ ۴) ۳۴ ۵) ۲۵

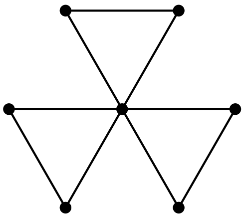
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

آقای مجری یک گراف به ببعی می‌دهد و از او می‌خواهد که بیشترین تعداد یال را به گراف اضافه کند، به طوری که همچنان ساده بماند و اندازه‌ی بزرگ‌ترین زیرگراف کامل آن تغییری نکند. به زیرگرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود دارد **زیرگراف کامل** می‌گوییم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ اگر آقای مجری گراف زیر را به ببعی بدهد، ببعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۲۰ گراف Q_n یک اَبَرمکعب ۲^n رأسی است که هر رأس آن نمایانگر یک رشته‌ی دودویی n رقمی می‌باشد و بین رأس‌هایی که رشته‌ی دودویی آن‌ها دقیقاً در یک رقم تفاوت دارند یال وجود دارد. اگر آقای مجری گراف $Q_۸$ را به ببعی بدهد، ببعی حداکثر چند یال می‌تواند اضافه کند؟

۱) ۱۶۳۸۴ ۲) ۱۴۳۳۶ ۳) ۶۳۰۷ ۴) ۶۴۰۰ ۵) ۱۵۳۶۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ دوم

سی وپنجمین دورهٔ المپیاد کامپیوتر(روز دوم)

سال ۱۴۰۴-۱۴۰۳

تاریخ : ۱۴۰۴/۱/۲۶ – ساعت : ۸:۰۰ – مدت : ۲۷۰ دقیقه – نوع : تشریحی

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است

۱- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید. در صورت هرگونه نقص در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید.

۲- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از برش سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۳- با توجه به اینکه پاسخ‌برگ‌ها به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچ‌گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌برگ پاکنویس نمایید.

۴- دفترچهٔ سؤال باید همراه پاسخ‌برگ تحویل داده شود.

۵- از مخدوش کردن بارکدها و مربع‌ها در چهارگوشهٔ صفحه در دفترچهٔ پاسخ‌برگ جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

۷- تصحیح برگه آزمون روز دوم، مشروط به کسب حد نصاب مورد نظر کمیته علمی در آزمون چندگزینه‌ای روز اول مرحله دوم دارد. درغیر این صورت نمره آزمون روز دوم مطابق بارم‌بندی صفردر نظر گرفته خواهد شد.

۸- این دفترچه شامل ۴ سوال و با احتساب جلد ۳ برگ است.

۹- سوالات ترتیب خاصی ندارند و لزوما از ساده به سخت نیستند. شخصیت و داستان سوالات ربطی به حل سوالات ندارند و صرفا جنبه طنز دارند.

پایگاه اینترنتی کمیته ملی کامپیوتر www.opedia.ir

سوال ۱: تعویض اتاق .... ۱۸ امتیاز

یک هتل دارای n اتاق است و در هر اتاق آن، دقیقاً یک نفر حضور دارد. در هر مرحله می‌توانیم دو اتاق را انتخاب کرده و افراد داخل آن‌ها را با هم جابه‌جا کنیم. در هر جابه‌جایی، هیچ کدام از دو نفر نباید به اتاقی برود که در یکی از مراحل قبلی در آن حضور داشته است. هدف این است که هر فرد، حضور در هر یک از n اتاق هتل را تجربه کند. اگر این کار امکان‌پذیر باشد، می‌گوییم n عددی «کامل» است. برای مثال، ۲ عددی کامل است؛ زیرا اگر $n = ۲$ باشد، با یک جابه‌جایی به هدفمان می‌رسیم. هم‌چنین می‌توان نشان داد که ۳ عدد کاملی نیست.

فرض کنید اعداد طبیعی m و n هردو کامل باشند. در این صورت ثابت کنید حاصل‌ضرب آن‌ها (یعنی عدد mn) نیز کامل است. برای گرفتن ۵ امتیاز از این سوال، کافی است نشان دهید که اگر n عددی کامل باشد، آن‌گاه $۲n$ نیز عددی کامل است.

سوال ۲: گراف زیبا .... ۲۰ امتیاز

به یک گراف «زیبا» می‌گوییم، اگر همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

- ساده باشد.
- تعداد رأس‌های آن ۲۰۲۵ باشد.
- هر دور آن دقیقاً ۴ رأس داشته باشد.

الف) فرض کنید G یک گراف زیبا باشد. ثابت کنید می‌توان یک یال به G اضافه کرد، طوری که گراف حاصل ساده بماند و طول بزرگ‌ترین دور آن از ۴ بیش‌تر نشود. [۱۴ امتیاز]

ب) یک گراف زیبای G ارائه دهید که با اضافه کردن هم‌زمان هر دو یالی به G، گراف حاصل حداقل یکی از دو شرط زیر را داشته باشد: [۶ امتیاز]

۱. گراف حاصل ساده نباشد.
۲. طول بزرگ‌ترین دور گراف حاصل از ۴ بیش‌تر باشد.

سوال ۳: گراف بازی .... ۲۰ امتیاز

فاطمه و علی در حال بازی روی گرافی ۲۰۲۵ رأسی هستند که در ابتدا هیچ یالی ندارد. در هر مرحله، ابتدا فاطمه رأس‌ها را به دو دسته افراز می‌کند و سپس، علی دو رأس غیر مجاور را که در یک دسته باشند انتخاب و یال بین آن‌ها را رسم می‌کند. اگر در مرحله‌ای یک مسیر به طول ۳ (یعنی یک مسیر با ۴ رأس و ۳ یال) در گراف حاصل ایجاد شود، بازی به پایان می‌رسد.

الف) فرض کنید فاطمه می‌خواهد تعداد مراحل بیشینه و علی می‌خواهد تعداد مراحل کمینه شود. اگر هر دو نفر در طول بازی، بهترین حرکت ممکن را برای رسیدن به هدفشان انجام دهند، بازی پس از چند مرحله پایان می‌یابد؟ [۱۰ امتیاز]

ب) فرض کنید فاطمه می‌خواهد تعداد مراحل کمینه و علی می‌خواهد تعداد مراحل بیشینه شود. اگر هر دو نفر در طول بازی، بهترین حرکت ممکن را برای رسیدن به هدفشان انجام دهند، بازی پس از چند مرحله پایان می‌یابد؟ [۱۰ امتیاز]

سوال ۴: پر کردن جدول .... ۲۲ امتیاز

یک جدول ۲۰۲۵ × ۲۰۲۵ داریم. یک خانه از این جدول را خانه‌ای «در حاشیه‌ی جدول» می‌گوییم اگر در سطر اول، سطر آخر، ستون اول یا ستون آخر جدول باشد. دو خانه از جدول «مجاور» هستند اگر و تنها اگر در دقیقا یک ضلع مشترک باشند. به دنباله‌ای از خانه‌های جدول که عضو ابتدا و انتهای آن به ترتیب A و B است و هر دو عضو متوالی آن مجاور هم هستند نیز یک «مسیر» بین دو خانه‌ی A و B می‌گوییم. می‌خواهیم در هر یک از خانه‌های جدول، یکی از اعداد ۱ تا k را قرار دهیم به طوری که همه‌ی شرایط زیر رعایت شوند:

- از هر عدد حداکثر دو بار استفاده شده باشد.
- اگر دو خانه دارای عدد یکسان x باشند، هر کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو خانه، شامل حداقل یک خانه با عددی اکیداً بزرگ‌تر از x باشد. طبیعتاً در این صورت دو خانه‌ی مجاور هم نباید عدد یکسانی داشته باشند.
- عدد هر خانه در حاشیه‌ی جدول اکیداً بزرگ‌تر از عدد هر خانه‌ای باشد که در حاشیه‌ی جدول نیست.

کم‌ترین مقدار ممکن برای k را بیابد.

برای پاسخ کامل این سوال، لازم است یک عدد q ارائه دهید و به‌ازای آن، هر دو کار زیر را انجام دهید. طبیعتاً اگر موفق به انجام فقط یکی از دو مورد شوید، بخشی از امتیاز سوال به شما تعلق می‌گیرد.

۱. برای پر کردن جدول، شیوه‌ای ارائه دهید که در آن، $k = q$ باشد.
۲. ثابت کنید شیوه‌ای برای پر کردن جدول وجود ندارد که در آن، $k < q$ باشد.

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه: _

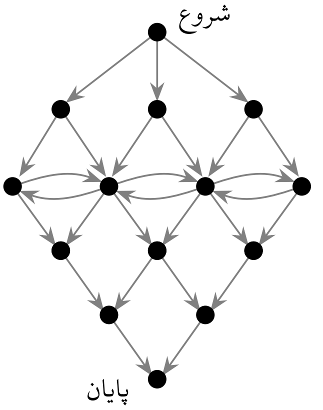
استفاده از ماشین حساب ممنوع است

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور–آزمون چندگزینه‌ای

- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۷ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

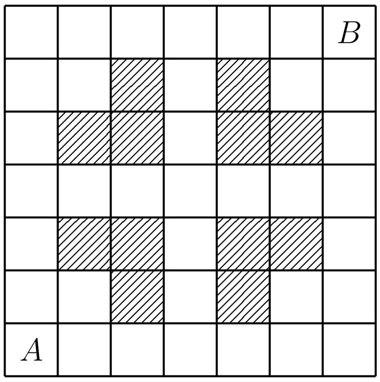
---

۱ مریم می‌خواهد از بالاترین رأسِ گراف جهت‌دار زیر به پایین‌ترین رأس آن برود. او تنها می‌تواند در جهتِ مشخص‌شده روی یال‌ها حرکتِ کند و نمی‌تواند از هیچ رأسی بیش از یک بار عبور نماید. مریم به چند روش می‌تواند این مسیر را بپیماید؟



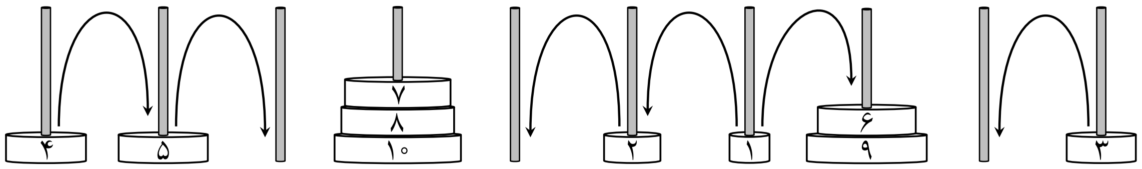
۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴ ۴) ۷۲ ۵) ۹۶

۲ بردیا می‌خواهد در جدول زیر از خانه‌ی A به خانه‌ی B برود. در خانه‌هایی از این جدول که با هاشور مشخص شده‌اند، مانع وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند به یکی از خانه‌های مجاورِ ضلعیِ خانه‌ی فعلی‌اش برود، ولی نمی‌تواند وارد خانه‌ای شود که قبلا در آن حضور داشته یا در آن مانع هست. بردیا به چند روش می‌تواند این مسیر را طی کند؟



۱) ۱۰۴ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۹۶ ۵) ۸۰

۳ ۱۰ میله مانند شکل زیر، در یک ردیف روی زمین نصب شده‌اند. ملیکا ۱۰ دیسک با وزن‌های ۱ تا ۱۰ کیلوگرم (از هر وزن، دقیقا یک دیسک) دارد و در ابتدا، دقیقا یک دیسک را در هر میله گذاشته است. او در هر مرحله می‌تواند یک میله را که دقیقا یک دیسک دارد، انتخاب و دیسک آن را خارج کند و از بالا داخل یکی از میله‌های مجاورش بیندازد، به شرطی که دیسکِ جابه‌جاشده از بالاترین دیسکِ میله‌ی مقصد سبک‌تر باشد یا این‌که میله‌ی مقصد هیچ دیسکی نداشته باشد. برای مثال، وضعیت دیسک‌ها می‌تواند پس از تعدادی مرحله، مانند شکل زیر باشد و در مرحله‌ی بعد، ملیکا می‌تواند در جهت یکی از پیکان‌های کشیده‌شده دیسکی را جابه‌جا کند. از میان همه‌ی حالات ممکن برای چینش اولیه‌ی دیسک‌ها در میله‌ها، ملیکا برای چند حالت می‌تواند همه‌ی دیسک‌ها را با تعدادی حرکت، به یک میله منتقل کند؟ فرض کنید هر یک از میله‌ها به‌قدری بلند است که بتوان همه‌ی ۱۰ دیسک را با هم در آن میله جای داد و فاصله بین میله‌ها نیز به حدی هست که دیسک‌های دو میله‌ی مجاور به‌هم گیر نکنند.



۱) ۵۱۲　۲) ۳۶۲۸۸۰　۳) ۱۰۲۴　۴) ۳۶۲۸۸۰۰　۵) ۲۰۴۸

۴ آرمیتا و باران مشغول یک بازی روی تخته‌سیاه هستند. در ابتدا، باران یک عدد طبیعیِ دل‌خواه را انتخاب می‌کند و آن را روی تخته‌سیاه می‌نویسد. سپس آرمیتا بازی را شروع می‌کند و بعد از هر یک، نوبت به شخصِ دیگر می‌رسد. آرمیتا در هر نوبتش می‌تواند به‌مقدارِ a یا $۲a$ از عددِ روی تخته کم کند و عدد حاصل را به‌جایِ آن برروی تخته بنویسد. باران هم در هر حرکت می‌تواند به مقدارِ b یا $۲b$ از عدد روی تخته کم کند و عدد حاصل را جایگزینِ عدد روی تخته کند. نهایتا، کسی که عددی کمتر از صفر روی تخته بنویسد، بَرنده‌ی بازی است. اگر هر دو نفر بهینه عمل کنند، به‌ازای چند مورد از حالت‌های زیر برای مقدارِ a و b، آرمیتا می‌تواند همواره طوری بازی کند که برنده‌ی بازی باشد؟ لازم به ذکر است که بهینه عمل کردنِ باران، شامل انتخابِ او در تعیینِ عدد اولیه‌ی نوشته‌شده روی تخته‌سیاه نیز می‌شود.

$$(a=۱۰, b=۴)، (a=۲۰, b=۳۵)، (a=۳۰, b=۱۵)، (a=۴۰, b=۴۰)$$

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۰　۵) ۱

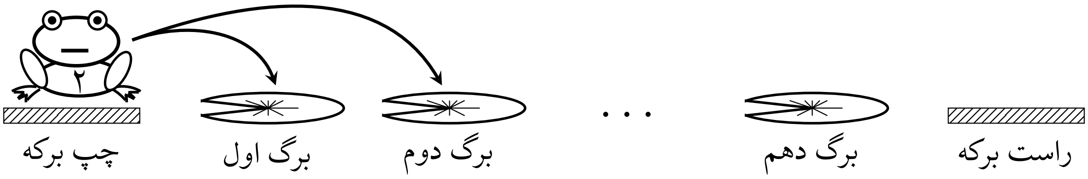
۵ دو مجموعه‌ی مجزای $S=\{A,B,C,D\}$ و $T=\{۱,۲,۳,۴\}$ را در نظر بگیرید. به یک زیرمجموعه از $S\cup T$ **زیبا** می‌گوییم اگر ۴ عضوی باشد و با هر کدام از دو مجموعه‌ی S و T، دقیقا دو عضو مشترک داشته باشد. مثلا مجموعه‌ی $\{A,D,۲,۳\}$ زیبا است، اما مجموعه‌ی $\{A,B,D,۴\}$ زیبا نیست. می‌خواهیم به هر مجموعه‌ی زیبا، یک رنگ منتسب کنیم با این شرط که به هر دو مجموعه‌ی متمایزِ زیبا که حداقل دو عضو مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی منتسب شده باشد. به حداقل چند رنگ مختلف برای انجام این کار نیاز داریم؟

۱) ۱۵　۲) ۶　۳) ۱۸　۴) ۳۶　۵) ۹

۶ پارمیس و نازلی هر کدام در خانه‌ای از یک جدول ۹×۹ قرار دارند. پارمیس در پایین‌ترین و چپ‌ترین خانه، و نازلی در بالاترین و راست‌ترین خانه از جدول قرار دارد. هر روز صبح، پارمیس یک سکه می‌اندازد که با احتمالِ برابر، شیر یا خط می‌آید. اگر سکه شیر آمد، پارمیس از جایی که قرار دارد، یک خانه به‌سمت بالا می‌رود و نازلی نیز از جایی که قرار دارد، یک خانه به‌سمت پایین حرکت می‌کند. اگر سکه خط آمد، پارمیس یک خانه به‌سمت راست، و نازلی یک خانه به‌سمت چپ می‌رود. سپس، هر دوی آن‌ها در خانه‌ای از جدول که در آن قرار دارند، شب را صبح می‌کنند. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که پارمیس یا نازلی از جدول خارج شوند. احتمال این که نازلی و پارمیس شبی را با هم، در خانه‌ی یکسانی از جدول سپری کنند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۶۳}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۴۹۰}{۱۲۸۷}$ ۴) ۰ ۵) $\frac{۶۴۳۵}{۳۲۷۶۸}$

۷ روی یک برکه مانند شکل زیر، ۱۰ برگ در یک ردیف، از چپ به راست، در جایگاه‌های ۱ تا ۱۰ قرار دارند. در سمت چپِ این برکه، ۱۰ قورباغه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ حضور دارند و می‌خواهند با عبور از روی برگ‌ها، به سمت راستِ برکه بروند که می‌توان آن را جایگاه یازدهم در نظر گرفت. در هر لحظه، حداکثر یک قورباغه می‌تواند روی هر برگ بنشیند، و بعد از جهیدنِ یک قورباغه از روی برگی که بر آن نشسته، آن برگ به زیر آب می‌رود و دیگر قابل استفاده نیست. هر قورباغه قدرت جهش مخصوص به خود را دارد؛ قورباغه‌ی شماره‌ی i (برای $۱ \leqslant i \leqslant ۱۰$) می‌تواند در هر حرکت، حداکثر i جایگاه به سمت راست بجهد. مثلا قورباغه‌ی شماره‌ی ۲، مطابق شکل زیر، می‌تواند در یک حرکت از ابتدای برکه به روی یکی از برگ‌های اول یا دوم بجهد. با توجه به شرایط گفته‌شده، حداکثر چند قورباغه می‌توانند با جهیدن روی برگ‌ها، از برکه رد شوند؟



۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۸ ۵) ۷

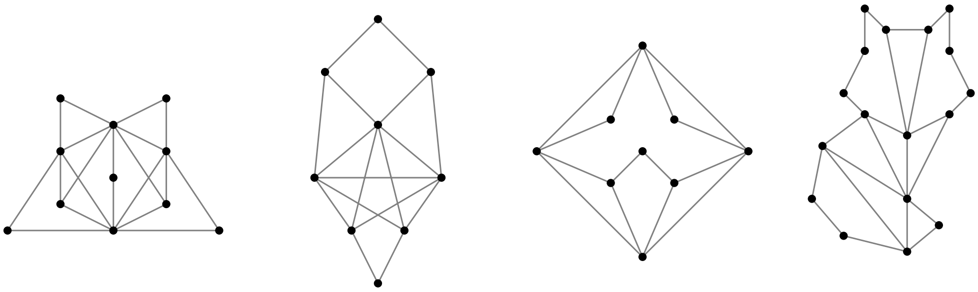
۸ سهیل دنباله‌ی ۴۲ عضویِ سیبوناچی را به صورت زیر تعریف کرده است:

- ۵ عضو اول دنباله عبارت‌اند از: $s_۱ = ۳۷, s_۲ = ۴۲, s_۳ = ۸۴, s_۴ = ۲۴, s_۵ = ۴۱$
- به ازای $۵ < n \leqslant ۴۲$ داریم: $s_n = s_{n-۱} + s_{n-۲} + s_{n-۳} + s_{n-۴} + s_{n-۵}$

او یک بازه (تعدادی عضو متوالی) از دنباله را **عجیب** می‌داند، اگر حاصل‌جمع اعضای آن بازه عددی فرد باشد. مثلا بازه‌ی $\langle s_۳, s_۴, s_۵ \rangle$ عجیب است چون جمع اعضایش عددی فرد می‌شود، ولی $\langle s_۲, s_۳ \rangle$ عجیب نیست چون حاصل‌جمع اعضایش فرد نمی‌باشد. دنباله‌ی ۴۲ عضوی سیبوناچی، چند بازه‌ی عجیب دارد؟

۱) ۴۴۸ ۲) ۳۹۲ ۳) ۴۶۲ ۴) ۴۲۰ ۵) ۴۰۰

۹ زهرا برای رسم یک گراف، در ابتدا تنها یک رأس می‌گذارد و بعد از آن در هر مرحله، یک رأس جدید به گرافِ فعلی اضافه می‌کند و از رأسِ اضافه‌شده، حداکثر دو یال به رأس‌های دیگر می‌کشد. زهرا از میان چهار گرافِ همبند زیر، چند مورد را می‌تواند به‌روش خود رسم کند؟

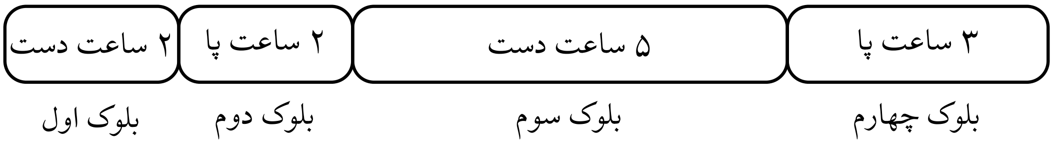


۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) ۱ ۵) ۲

۱۰ استاد شیفو می‌خواهد یک برنامه‌ی تمرینیِ ۱۲ ساعته برای تقویت عضلات دست و پا طراحی کند. این برنامه به‌صورت دنباله‌ای از بلوک‌های تمرینی است. هر بلوک تمرینی، یا مربوط به ورزش دست است یا ورزش پا، و مدت زمان آن نیز بر حسب ساعت، عددی طبیعی است. مثلا یک بلوک تمرینی می‌تواند از ۳ ساعت تمرین پا تشکیل شده باشد. استاد شیفو به این نتیجه رسیده است که یک برنامه‌ی تمرینی مناسب، دارای شرایط زیر است:

- بلوک‌های تمرینی باید به‌شکل یکی‌درمیان، مربوط به ورزش دست و ورزش پا باشند.
- اولین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش دست باشد.
- آخرین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش پا باشد.
- یک بلوک تمرینیِ ورزشِ پا، نباید از بلوک تمرینیِ قبل از آن، مدت زمان بیشتری داشته باشد.

شکل زیر نمونه‌ای از یک برنامه‌ی تمرینی با شرایط مذکور را نشان می‌دهد. چند برنامه‌ی تمرینیِ ۱۲ ساعته وجود دارد که از نظر استاد شیفو مناسب باشد؟ دو برنامه‌ی تمرینی، متمایز محسوب می‌شوند اگر زمانی (در طولِ ۱۲ ساعت) وجود داشته باشد که در یک برنامه، برای آن زمان، ورزشِ دست تعیین شده باشد، و در برنامه‌ی دیگر، برای آن زمان، ورزشِ پا تعیین شده باشد.

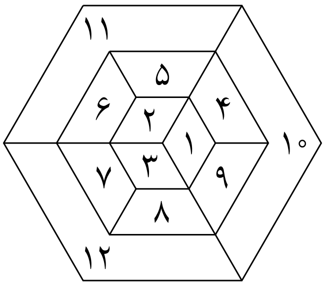


۱) ۲۸۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۶ ۴) ۱۲۳ ۵) ۱۵۵

۱۱ یک عدد صحیح نامنفی را **زیبا** می‌نامیم اگر هم مضربِ ۳ باشد و هم در نمایش دودوییِ آن، دو رقم یکِ متوالی وجود نداشته باشد. مثلا عددِ ۹ زیبا است چون هم مضربی از ۳ است و هم در نمایش دودوییِ آن (۱۰۰۱)، هیچ دو رقمِ یکی مجاور نیستند. چند عدد زیبا در بازه‌ی [۰, ۱۰۲۳] (شامل خودِ ۰ و ۱۰۲۳) وجود دارد؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۸ ۵) ۵۴

۱۲ سارا می‌خواهد هر یک از ۱۲ ناحیه‌ی شکل زیر را با یکی از سه رنگِ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کند، با این شرط که هر دو ناحیه‌ای که با هم ضلع مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. او به چند روش می‌تواند این رنگ‌آمیزی را انجام دهد؟ دو روش رنگ‌آمیزی متفاوت محسوب می‌شوند اگر ناحیه‌ای وجود داشته باشد که در این دو روش، رنگ متفاوتی داشته باشد.



۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۸ ۴) ۳۶ ۵) ۵

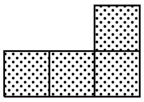
۱۳ سروش و بهرام روی یک جدول ۴ × ۴ بازی می‌کنند. در ابتدا، بهرام ۴ خانه‌ی متمایز را از جدول انتخاب می‌کند و هر یک از اعدادِ ۱ تا ۴ را در یکی از آن خانه‌ها پنهان می‌کند. سروش که از انتخابِ بهرام خبر ندارد، می‌خواهد با تعدادی پرسش، مکان هر ۴ خانه‌ی انتخابیِ بهرام را به‌همراه عددشان پیدا کند. سروش در هر پرسش می‌تواند یک زیرجدول را مشخص کند تا بهرام در پاسخ بگوید چه اعدادی در این زیرجدول وجود دارند (بدون اشاره به جایی که هر عدد پنهان شده است). یک زیر جدول، جدولی ناتهی است که از اشتراکِ تعدادی سطرِ متوالی و تعدادی ستونِ متوالی از جدولِ اصلی حاصل می‌شود. سروش حداقل به چند پرسش نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴ ۵) ۳

۱۴ برای دنباله‌ی دودوییِ $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$، عدد طبیعیِ $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$، **مشکل‌ساز** نامیده می‌شود اگر دنباله‌ی متشکل از i عنصرِ اولِ A با دنباله‌ی متشکل از i عنصرِ آخرِ A برابر باشد. به بیان دقیق‌تر، عددِ i زمانی برای دنباله مشکل‌ساز است که $\langle a_1, \ldots, a_i \rangle = \langle a_{n-i+1}, \ldots, a_n \rangle$. یک دنباله‌ی دودویی را **بی‌اشکال** می‌نامیم اگر هیچ عددی برای آن مشکل‌ساز نباشد. چند دنباله‌ی دودوییِ بی‌اشکالِ متمایز به‌ازای $n = 12$ وجود دارد؟

۱) ۵۶۸ ۲) ۲۰۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱۱۱۶ ۵) ۲۹۸۰

۱۵ امیرمحمد یک جدول ۵ × ۵ دارد. او می‌خواهد یکی از ۲۵ خانه‌ی این جدول را حذف کند، و باقی خانه‌های جدول را با ۶ قطعه به‌شکل زیر بپوشاند، با این شرط که هر یک از ۲۴ خانه‌ی باقی‌مانده از جدول، توسط دقیقا یک قطعه پوشانده شده باشد. او می‌تواند قبل از قرار دادنِ یک قطعه در جدول، آن را به‌میزان دل‌خواه، دَوران یا تقارن دهد. چند خانه از این جدول هستند که امیرمحمد می‌تواند با حذف آن خانه، باقی خانه‌های جدول را با شرایطِ گفته‌شده بپوشاند؟



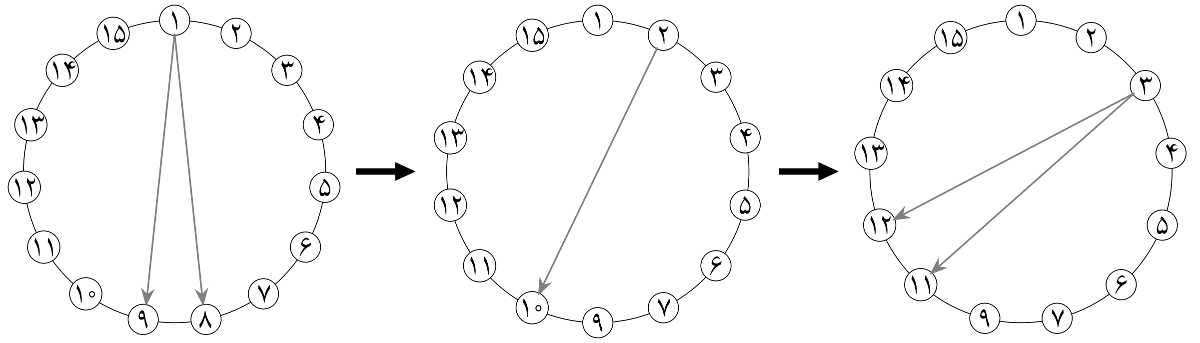
۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹ ۵) ۴

۱۶ ۱۵ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۵، مانند دایره‌ی سمت چپ شکل زیر، با فاصله‌های یک‌نواخت، به‌ترتیبِ ساعت‌گرد دورِ یک دایره ایستاده‌اند تا مراسم ویژه‌ای را اجرا کنند. این مراسم از تعدادی مرحله تشکیل شده است و در هر مرحله‌ی آن، کسی که نوبتش است (با شروع از فردِ شماره‌ی ۱ در نخستین مرحله)، به‌صورت زیر عمل می‌کند:

- اگر تعداد افراد دور دایره زوج باشد، فردی را که در آن مرحله، در جایگاه روبه‌روی قطریِ او در دایره ایستاده است، نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.
- اگر تعداد افراد دور دایره فرد باشد، از دو نفری که در آن مرحله، در جایگاه‌های روبه‌روی قطری‌اش در دایره قرار دارند، یک نفر را به تصادف (با احتمال یکسان) نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.

پس از این حرکت، کسی که به او شلیک شده، از دور خارج می‌شود و در ادامه، افراد باقی‌مانده جایگاه‌های خود را مجددا طوری در دایره تنظیم می‌کنند که با فاصله‌های یک‌نواخت دور آن قرار گرفته باشند. سپس برای مرحله‌ی بعدی، نوبت به کسی می‌رسد که در آن لحظه، بعد از فردِ شلیک‌کننده در دایره (در جهت ساعت‌گرد) قرار دارد. این مراسم تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تنها یک نفر دور دایره باقی مانده باشد. چه افرادی این شانس را دارند که آخرین فردِ باقی‌مانده در پایان مراسم باشند؟

در شکل زیر، مثالی از مراحل ابتداییِ اجرای این مراسم نشان داده شده است. در مرحله‌ی اولِ این مثال، فرد شماره‌ی ۱ از میان افراد با شماره‌های ۸ و ۹ که در جایگاه‌های روبه‌روی قطری او هستند، به تصادف، فرد شماره‌ی ۸ را انتخاب، و به او شلیک می‌کند تا از دور خارج شود. در مرحله‌ی بعد، نوبت به شلیک فرد شماره‌ی ۲ می‌رسد، که با توجه به زوج بودنِ تعداد افراد حاضر، به فرد شماره‌ی ۱۰ شلیک می‌کند. سپس، نوبت به فرد شماره‌ی ۳ می‌رسد که باید به یکی از افراد با شماره‌های ۱۱ یا ۱۲ شلیک کند.



۱) {۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲} ۲) {۳, ۵, ۶} ۳) {۲, ۳, ۵, ۶} ۴) {۲, ۳, ۴, ۵, ۶} ۵) {۸, ۹, ۱۱, ۱۲}

یک جدولِ ۶×۶ را در نظر بگیرید که در هر خانه‌ی آن، یک دانش‌آموزِ کلاسِ اول، دوم یا سوم ایستاده است. به مجموعه‌ی دانش‌آموزانِ هم‌سطر یا هم‌ستونِ یک دانش‌آموز (به‌غیر از خودش)، **سیطره‌ی دیدِ** آن دانش‌آموز گفته می‌شود. پس سیطره‌ی دید هر دانش‌آموز، مجموعه‌ای ۱۰ عضوی است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

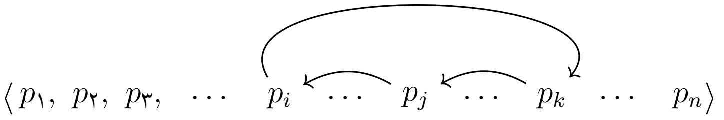
۱۷ اگر در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس اولی، حداقل یک دانش‌آموزِ کلاس دومی، و در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس دومی، حداقل یک دانش‌آموزِ کلاس سومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموزِ کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۱) ۲۵
۲) ۳۵
۳) ۳۰
۴) ۱۸
۵) ۲۹

۱۸ اگر در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس اولی، تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس دومی حداقل به‌اندازه‌ی تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس اولی (در سیطره‌ی دیدِ او) باشد، و در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس دومی، تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس سومی حداقل به‌اندازه‌ی تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس دومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموزِ کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۱) ۱۹
۲) ۱۵
۳) ۱۲
۴) ۲۱
۵) ۱۸

مارال جایگشتِ n تاییِ تماما صعودیِ $\langle ۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱, n\rangle$ را دارد و می‌خواهد آن را با تعدادی حرکت، به جایگشتِ تماما نزولیِ $\langle n, n-۱, \ldots, ۳, ۲, ۱\rangle$ تبدیل کند. او در هر حرکت، می‌تواند مانند شکل زیر، سه جایگاهِ (i, j, k) با شرطِ $۱ \leqslant i < j < k \leqslant n$ را در جایگشت خود انتخاب کند و اعدادِ این سه جایگاه را در آن، **دَوَران** دهد؛ یعنی عدد جایگاهِ j اُم را به جایگاهِ i اُم ببرد، عدد جایگاهِ k اُم را به جایگاهِ j اُم ببرد، و عدد جایگاهِ i اُم را به جایگاهِ k اُم ببرد. مثلا با فرضِ داشتنِ جایگشتِ $\langle ۳, ۶, ۵, ۴, ۱, ۲\rangle$، اگر او سه جایگاهِ $(۲, ۳, ۶)$ را برای حرکتِ دَوَران انتخاب کند، بعد از انجام این حرکت، به جایگشتِ $\langle ۳, ۵, ۲, ۴, ۱, ۶\rangle$ می‌رسد.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ به‌ازای چند عدد صحیحِ n در محدوده‌ی ۲۰۰۰ تا ۲۰۲۵ (شامل هر دوی این اعداد)، مارال می‌تواند با انجام تعدادی حرکت دَوَران، جایگشتِ n تاییِ تماما صعودیِ خود را به جایگشتی تماما نزولی تبدیل کند؟

۱) ۱۳
۲) ۱۷
۳) ۰
۴) ۲۶
۵) ۱۴

۲۰ به‌ازای $n = ۳۳۳۳$، مارال حداقل چند حرکت دَوَران نیاز دارد تا بتواند جایگشتِ n تاییِ تماما صعودیِ خود را به جایگشتی تماما نزولی تبدیل کند؟

۱) ۲۴۹۹
۲) ۱۱۱۳
۳) ۱۶۶۶
۴) ۲۲۲۲
۵) ۱۱۱۱

پاسخنامه اولیه المپیاد کامپیوتر مرحله دوم 1402-1403

لطفاً در این کادر و حاشیه پاسخنامه چیزی ننویسید.

مطابق توضیحات دفترچه تکمیل شود.

کد دفترچه ② ①

لطفاً گزینه را به صورت کامل و فقط با مداد مشکی نرم پر کنید. **صحیح:** ● **غلط:** ✓ ☒ ☒ ◒ ◓

۱	①	●	③	④	⑤
۲	①	②	③	●	⑤
۳	●	②	③	④	⑤
۴	●	②	③	④	⑤
۵	①	②	●	④	⑤
۶	●	②	③	④	⑤
۷	①	②	③	④	●
۸	①	②	③	●	⑤
۹	①	②	③	④	●
۱۰	①	②	●	④	⑤
۱۱	①	●	③	④	⑤
۱۲	●	②	③	④	⑤
۱۳	①	②	③	●	⑤
۱۴	①	②	③	●	⑤
۱۵	①	●	③	④	⑤
۱۶	①	②	●	④	⑤
۱۷	①	②	③	④	●
۱۸	①	②	③	④	●
۱۹	①	②	③	④	●
۲۰	①	②	●	④	⑤
۲۱	①	②	③	④	⑤
۲۲	①	②	③	④	⑤
۲۳	①	②	③	④	⑤
۲۴	①	②	③	④	⑤
۲۵	①	②	③	④	⑤
۲۶	①	②	③	④	⑤
۲۷	①	②	③	④	⑤
۲۸	①	②	③	④	⑤
۲۹	①	②	③	④	⑤
۳۰	①	②	③	④	⑤
۳۱	①	②	③	④	⑤
۳۲	①	②	③	④	⑤
۳۳	①	②	③	④	⑤
۳۴	①	②	③	④	⑤
۳۵	①	②	③	④	⑤
۳۶	①	②	③	④	⑤
۳۷	①	②	③	④	⑤
۳۸	①	②	③	④	⑤
۳۹	①	②	③	④	⑤
۴۰	①	②	③	④	⑤
۴۱	①	②	③	④	⑤
۴۲	①	②	③	④	⑤
۴۳	①	②	③	④	⑤
۴۴	①	②	③	④	⑤
۴۵	①	②	③	④	⑤
۴۶	①	②	③	④	⑤
۴۷	①	②	③	④	⑤
۴۸	①	②	③	④	⑤
۴۹	①	②	③	④	⑤
۵۰	①	②	③	④	⑤
۵۱	①	②	③	④	⑤
۵۲	①	②	③	④	⑤
۵۳	①	②	③	④	⑤
۵۴	①	②	③	④	⑤
۵۵	①	②	③	④	⑤
۵۶	①	②	③	④	⑤
۵۷	①	②	③	④	⑤
۵۸	①	②	③	④	⑤
۵۹	①	②	③	④	⑤
۶۰	①	②	③	④	⑤
۶۱	①	②	③	④	⑤
۶۲	①	②	③	④	⑤
۶۳	①	②	③	④	⑤
۶۴	①	②	③	④	⑤
۶۵	①	②	③	④	⑤
۶۶	①	②	③	④	⑤
۶۷	①	②	③	④	⑤
۶۸	①	②	③	④	⑤
۶۹	①	②	③	④	⑤
۷۰	①	②	③	④	⑤
۷۱	①	②	③	④	⑤
۷۲	①	②	③	④	⑤
۷۳	①	②	③	④	⑤
۷۴	①	②	③	④	⑤
۷۵	①	②	③	④	⑤
۷۶	①	②	③	④	⑤
۷۷	①	②	③	④	⑤
۷۸	①	②	③	④	⑤
۷۹	①	②	③	④	⑤
۸۰	①	②	③	④	⑤

اینجانب .... فرزند .... با کد ملی ....

صحت اطلاعات مندرج در پاسخ برگ را با مشخصات خود تأیید می‌نمایم.

محل امضاء

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر- روز اول

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۲/۱۲

تعداد سوالات	ساعت شروع	مدت آزمون (دقیقه)
۲۰	۸:۰۰	۲۱۰

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: ۰
کد ملی: ۰
نام پدر: ----
نام مدرسه: ----

استان: ----
منطقه: ----
پایه تحصیلی: ----

حوزه: ----

کد دفترچه: –

شماره صندلی: ۰۰۰۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه را بررسی نمایید و از وجود همه برگه های دفترچه سوال مطمئن شوید. در صورت وجود هر گونه نقصی، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۲. یک برگ پاسخ برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. کلیه جواب ها باید در پاسخ برگ وارد شود. پاسخ های نوشته شده در دفترچه سوال تصحیح نشده و به آن ها هیچ امتیازی تعلق نخواهد گرفت.

۴. پاسخ برگ شما را دستگاه تصحیح می کند. پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و پاسخ هر سوال را با مداد مشکی نرم در محل خانه مربوطه کاملا سیاه کنید.

۵. نام و نام خانوادگی خود را روی کلیه صفحات دفترچه سوال و پاسخ برگ بنویسید.

۶. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد

۷. پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست یک نمره منفی دارد

۸. ترتیب گزینه ها به صورت تصادفی است. سوالات ۱۳ تا ۲۰ در دسته های چند سوالی آمده اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.

۹. شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.

۱۰. دفترچه سوال باید به همراه پاسخ‌نامه به مسئول مربوطه تحویل شود..

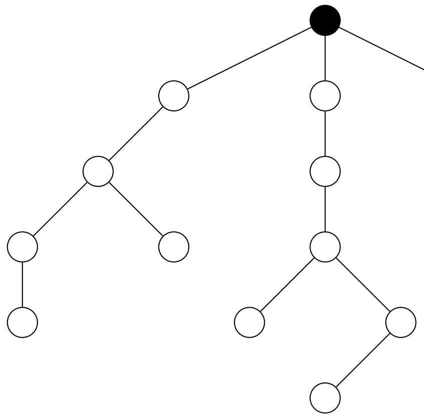
وب سایت کمیته ملی کامپیوتر: www.opedia.ir

مرحله‌ی دوم سی و سومین المپیاد کامپیوتر کشور—آزمون چندگزینه‌ای

- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۳ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

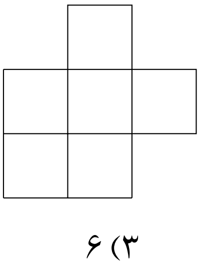
---

۱ امید مدت‌ها پیش در شهر زادگاهش یک مغازه‌ی ساندویچی باز کرده بود و حالا پس از گذشت سال‌ها تصمیم گرفته است تا کسب و کار خود را گسترش دهد. با توجه به محدودیت‌های مالی و استراتژیک، او در هر سال می‌تواند به ازای هر شعبه‌ی ساندویچی خود، در یکی از شهرهای همسایه‌ی آن شعبه، یک شعبه‌ی جدید باز کند (دقت کنید که امید به ازای هر شعبه در هر سال، می‌تواند یک شعبه‌ی جدید باز کند، بنابراین ممکن است در یک سال، بیش از ۱ شعبه‌ی جدید در کشور باز شود). اگر امید بهترین استراتژی را برای باز کردن شعبه‌های ساندویچی خود انتخاب کند، حداقل چند سال زمان نیاز دارد تا در تمامی شهرهای کشورش حداقل یک ساندویچی داشته باشد؟ نقشه‌ی کشور امید در شکل زیر کشیده شده است. در این نقشه، هر شهر با یک دایره نمایش داده شده و شهرهای همسایه با یک خط به هم‌دیگر وصل شده‌اند. هم‌چنین شهر زادگاه امید که اولین شعبه‌ی ساندویچی در آن قرار دارد، در شکل رنگ شده است.



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ ۵) ۳

۲ هدا ترجیح می‌دهد به جای این که در سفره‌ی هفت‌سین ماهی واقعی بگذارد، یک ماهی را نقاشی کند و از نقاشی‌اش استفاده کند. او یک جدول ۶ × ۶ دارد که در ابتدا، تمام خانه‌های آن سفید هستند. هدا می‌خواهد ۶ خانه از آن را به شکل زیر (یا دورانی از آن) قرمز کند تا یک ماهی تشکیل شود، اما برادر کوچک‌ترش می‌خواهد تعدادی از خانه‌های جدول را سیاه کند تا هدا نتواند این کار را انجام دهد. برادرش حداقل چند خانه را باید سیاه کند تا هدا نتواند روی خانه‌های سفید جدول ماهی بکشد؟



۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۵ ۵) ۴

۳ جعفر و سلاله در حال بازی روی یک دنباله به طول N هستند که همه‌ی اعضایش در ابتدا ۰ می‌باشند. جعفر بازی را شروع می‌کند و بعد از هر نفر، نوبت به شخص دیگر می‌رسد. جعفر در نوبتش یک عضو از دنباله را که ۰ است، انتخاب کرده و آن را به ۱ تغییر می‌دهد. به طور مشابه، سلاله هم در نوبت خود یک عضو از دنباله را که ۰ است، انتخاب می‌کند و آن را به ۲ تغییر می‌دهد. بازی زمانی پایان می‌یابد که هیچ ۰ ای در دنباله باقی نمانده باشد. در این زمان، امتیاز جعفر برابر با تعداد جفت ۱ های مجاور در دنباله، و امتیاز سلاله هم برابر با تعداد جفت ۲ های مجاور در دنباله است. مثلاً اگر در پایان بازی، دنباله به شکل زیر در آمده باشد، امتیاز هر دو نفر برابر ۲ می‌شود.

$$\langle ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۱, ۲, ۲, ۱ \rangle$$

در صورتی که امتیاز دو نفر برابر باشد، بازی مساوی می‌شود و در غیر این صورت، برنده کسی است که امتیاز بالاتری به دست آورده باشد. هدف هر فرد در بازی این است که برنده شود، و اگر برنده شدن ممکن نبود، حداقل در صورت امکان، بازی را به تساوی بکشاند. اگر هر دو نفر بهینه بازی کنند، نتیجه‌ی بازی برای $N = ۸$ و $N = ۹$ به ترتیب (از راست به چپ) چه خواهد بود؟

۱) برد سلاله، برد سلاله ۲) برد جعفر، برد سلاله ۳) برد سلاله، برد جعفر ۴) مساوی، برد جعفر ۵) مساوی، برد سلاله

۴ ۶ سکه با ظاهر یکسان ولی وزن‌های متفاوت داریم. می‌خواهیم این سکه‌ها را براساس وزنشان مرتب کنیم. برای این کار یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که می‌توانیم روی هر کفه‌اش یک سکه بگذاریم. این ترازو در هر بار استفاده، سکه‌ی سنگین‌تر را مشخص می‌کند. ما در ابتدا، ۹ جفت سکه‌ی متفاوت را انتخاب می‌کنیم و سپس آن جفت‌ها را با ترازو مقایسه، و نتایج را مشاهده می‌کنیم. در چند حالت از انتخاب این ۹ جفت، بعد از دیدن نتایج، می‌توانیم سکه‌ها را با اطمینان کامل براساس وزنشان مرتب کنیم؟ دو حالت از انتخاب جفت‌های سکه را متفاوت می‌گوییم اگر دو سکه وجود داشته باشند که در یک حالت، با هم جفت شده، و در حالت دیگر، با هم جفت نشده باشند.

۱) ۲۱۰ ۲) ۳۴۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۱۲۰ ۵) ۴۵۰

۵ یک زمین بسکتبال به شکل زیر داریم. مایکل بسکتبالیست معروف در ابتدا در خانه‌ی شماره‌ی ۱ قرار دارد. او می‌خواهد توپی را که در اختیارش است، به سمت حلقه‌ای که در سمت راست زمین قرار دارد، پرتاب کند. در هر مرحله، او می‌تواند یا یک خانه به سمت راست (در صورت وجود) حرکت کند، یا توپ را پرتاب کند. به علت افزایش مدافعان تیم حریف در نزدیکی حلقه، اگر از خانه‌ی i به خانه‌ی $i + ۱$ برود، به احتمال $\frac{۱}{۱۵-i}$ ممکن است توپ را از دست بدهد. هم‌چنین اگر از خانه‌ی i اقدام به پرتاب کند، توپ او با احتمال $\frac{i}{۱۵}$ گل می‌شود. اگر مایکل به شکلی عمل کند که احتمال گل کردن توپش بیشینه باشد، توپ او با چه احتمالی گل می‌شود؟

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

۱) $\frac{۲۳}{۶۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۷}{۳۰}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$ ۵) $\frac{۱}{۶}$

۶ ۶ سطل آب داریم که در یک ردیف با شماره‌های یک تا شش قرار دارند. در ابتدا، سطل اول ۱ لیتر آب دارد و باقی سطل‌ها هیچ آبی ندارند. در هر حرکت، می‌توانیم یک سطل را انتخاب کنیم و نصف آبی را که داخلش است، در سطل بعدی بریزیم. به عنوان مثال، اگر سطل سوم ۰٫۵ لیتر، و سطل چهارم ۰٫۱ لیتر آب داشته باشد، با انتخاب سطل سوم، مقدار آب درون سطل سوم به ۰٫۲۵ لیتر کاهش پیدا می‌کند و آب درون سطل چهارم به ۰٫۳۵ لیتر افزایش پیدا می‌کند. با انجام ۱۰ حرکت، حداکثر چه مقدار آب را می‌توان به سطل آخر رساند؟

۱) $\frac{۲۴۳}{۱۰۲۴}$ ۲) $\frac{۵۶۷}{۱۰۲۴}$ ۳) $\frac{۸۷}{۱۰۲۴}$ ۴) $\frac{۶۳}{۱۰۲۴}$ ۵) $\frac{۲۳}{۱۰۲۴}$

۷ نگار یک بازی با دنباله‌ها اختراع کرده است. او در این بازی، ابتدا یک دنباله از اعداد صحیح را روی کاغذ می‌نویسد. سپس در هر مرحله، دو عدد مجاور از دنباله را به صورت دل‌خواه انتخاب می‌کند و از هر دوی آن‌ها یک واحد کم می‌کند. اگر در انتها، تمام اعداد دنباله صفر شده باشند، او خوش‌حال می‌شود. چند دنباله به طولِ ۵ از اعداد ۰ و ۱ و ۲ وجود دارند که با شروع از آن‌ها، نگار می‌تواند طوری بازی کند که در انتها خوش‌حال شود؟

۱) ۳۱ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۲۴ ۵) ۲۳

۸ یک جام حذفی با ۸ تیم با شماره های ۱ تا ۸ برگزار می‌شود. در هر مرحله، تیم‌ها به دسته‌های دوتایی افراز می‌شوند و با هم بازی می‌کنند. بازنده حذف می‌شود و برنده به مرحله‌ی بعد صعود می‌کند. یک تیم تنها در صورتی شانسِ برد در یک بازی را دارد که شماره‌اش حداقل نصف شماره‌ی حریفش باشد. برای مثال، تیم شماره‌ی ۳ می‌تواند تیم‌های ۱ تا ۶ را ببرد، اما در مقابل تیم شماره‌ی ۷ شانس برد ندارد. در چند روایت از برگزاری جام، تیم شماره‌ی ۲ می‌تواند قهرمان شود؟ دو روایت متفاوت‌اند اگر حداقل در یک مرحله تیم‌ها را به دو صورت متفاوت افراز کرده باشند و یا برنده‌ی حداقل یکی از بازی‌های بین دو تیم در این دو روایت متفاوت باشد.

۱) ۱۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰ ۵) ۴

۹ برنامه‌ی زیر را که دارای سه متغیر a، b و c است، در نظر بگیرید:

۱. متغیرهای a، b و c را برابر ۰ قرار بده.
۲. اگر $c = ۱۰$ بود، به برنامه پایان بده.
۳. یک سکه بینداز و اگر شیر آمد، به خط ۵ برو.
۴. مقدار b را برابر با $b - ۱$ قرار بده.
۵. مقدار a را برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم $(a + ۱)$ بر ۴ قرار بده.
۶. c را برابر با $c + ۱$ قرار بده.
۷. به خط ۲ برو.

فرض کنید سکه‌ی استفاده شده در مرحله‌ی ۳، سکه‌ای سالم است و احتمال شیر و خط آمدنِ آن با هم برابر است. چه قدر احتمال دارد که در طول اجرای برنامه، حداقل در یک لحظه، به طور هم‌زمان $a = ۲$ و $b = ۰$ شود؟

۱) $\frac{۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳۱}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$ ۵) $\frac{۶۳}{۶۴}$

۱۰ به یک زیررشته (متوالی) از یک رشته‌ی دودویی **بد** می‌گوییم اگر تعداد صفرهای آن با تعداد یک‌هایش برابر باشد. چند رشته‌ی دودویی به طول ۲۰ وجود دارد که هیچ زیررشته‌ی بد به طول حداقل ۴ نداشته باشد؟

۱) ۹۰۷ ۲) ۳۶۲۸ ۳) ۱۸۱۴ ۴) ۲۷۲۱ ۵) ۱۰۲۴

۱۱ در رستوران سرزمین عجایب، صرفاً یک میز گرد با N صندلی وجود دارد و فقط به زوج‌ها سرویس داده می‌شود. آرتین و سارا، دو گارسون در این رستوران هستند. آرتین و سارا به صورت یکی در میان و با شروع از آرتین، به زوج‌هایی که از راه می‌رسند کمک می‌کنند تا جایی برای نشستن پیدا کنن. هر زوج باید کنار یکدیگر بنشینند و نمی‌توان این دو نفر را روی صندلی‌های غیرمجاور نشاند. هم‌چنین، یک خانم و آقا تنها در صورتی می‌توانند کنار هم بنشینند که زوج باشند. هنگام نشاندن یک زوج، آرتین همیشه آقا را سمت راست خانم می‌نشاند، و سارا همیشه آقا را سمت چپ خانم می‌نشاند. اولین کسی که نتواند جایی برای نشاندن یک زوج پیدا کند، توسط صاحب رستوران جریمه می‌شود. به ازای چند مورد از اعضای مجموعه‌ی $\{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ به‌عنوان N، آرتین می‌تواند طوری زوج‌ها را سر میز بنشاند که مستقل از نحوه‌ی نشاندن زوج‌ها توسط سارا، هیچ‌گاه جریمه نشود؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۱ ۵) ۳

۱۲ نیکو و امیرمحمد روی جایگشت $\langle ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱\rangle$ بازی می‌کنند. نیکو بازی را شروع می‌کند و بعد از هر نفر، نوبت به شخص دیگر می‌رسد. هر کسی در نوبتش جایگشت را از $\langle p_۱, p_۲, p_۳, p_۴, p_۵, p_۶\rangle$ به یکی از دو جایگشت $\langle p_{a_۱}, p_{a_۲}, p_{a_۳}, p_{a_۴}, p_{a_۵}, p_{a_۶}\rangle$ یا $\langle p_{b_۱}, p_{b_۲}, p_{b_۳}, p_{b_۴}, p_{b_۵}, p_{b_۶}\rangle$ تبدیل می‌کند که $A = \langle a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶\rangle$ و $B = \langle b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵, b_۶\rangle$ در ادامه مشخص می‌شوند. هر کسی که جایگشت تکراری بسازد، بازی را می‌بازد. به ازای کدام حالت‌های زیر برای A و B، نیکو همواره می‌تواند طوری بازی کند که مستقل از حرکات امیرمحمد، برنده‌ی بازی باشد؟

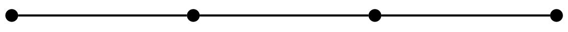
۱. $B = \langle ۳, ۴, ۵, ۶, ۱, ۲\rangle$ و $A = \langle ۵, ۶, ۱, ۲, ۳, ۴\rangle$
۲. $B = \langle ۴, ۱, ۵, ۶, ۲, ۳\rangle$ و $A = \langle ۲, ۵, ۶, ۱, ۳, ۴\rangle$
۳. $B = \langle ۵, ۶, ۱, ۲, ۳, ۴\rangle$ و $A = \langle ۶, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\rangle$

۱) حالت ۳ ۲) حالت ۱ ۳) حالت‌های ۲ و ۳ ۴) حالت ۲ ۵) هیچ‌کدام

منظور از **عددگذاری** یک گراف، نوشتن یک عدد صحیح روی هر رأس آن است. عددگذاری یک گراف را **زیبا** می‌گوییم اگر برای هر رأسِ v، عددِ روی آن برابر با تعداد همسایه‌هایی از v باشد که عددشان از عدد روی v کمتر است.

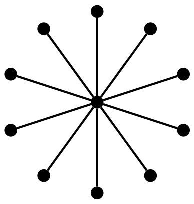
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ برای گراف زیر که یک مسیر ۴ رأسی است، چند عددگذاری زیبا وجود دارد؟



۱) ۱۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶ ۵) ۱۱

۱۴ برای گراف زیر که یک ستاره‌ی ۱۱ رأسی است، چند عددگذاری زیبا وجود دارد؟

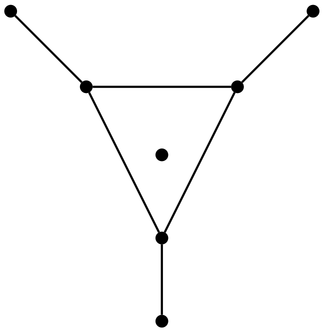


۱) ۱۰۲۴ ۲) ۱۰۲۵ ۳) ۳ ۴) ۲ ۵) ۲۰۴۸

می‌خواهیم اعداد ۱ تا n را روی رأس‌های یک گراف n رأسی بنویسیم به طوری که هر عدد دقیقاً یک بار نوشته شده باشد و اختلاف عددهای روی دو سرِ هر یال حداکثر ۲ باشد.

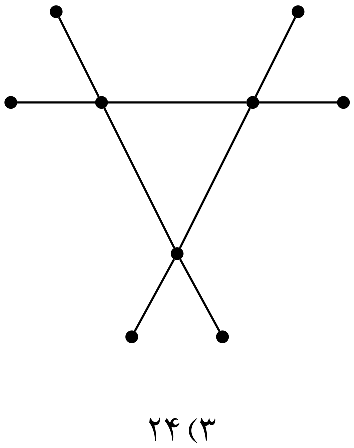
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ در گراف زیر، چند روش برای انجام کار خواسته شده وجود دارد؟



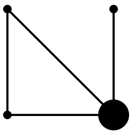
۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) ۶۰ ۵) ۱۸

۱۶ در این سوال ما اجازه داریم اعداد را به شکلی بگذاریم که شرط گفته شده درباره‌ی حداکثر یکی از یال‌ها برقرار نباشد؛ یعنی اختلاف عددهای دو سر یک یال می‌تواند از ۲ بیشتر شود. حال با توجه به شرایط جدید، چند روش برای انجام کار گفته شده در گراف زیر وجود دارد؟



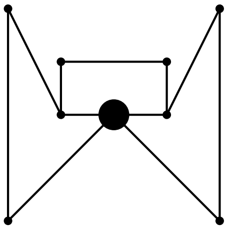
۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۰ ۵) ۴۸

بیژن یک جهانگرد باسابقه است که برای گشت و گذار در کشورها روش مخصوصی دارد. او همیشه سفرش در یک کشور را از پایتخت آن شروع می‌کند و در انتهای سفر نیز به پایتخت باز می‌گردد. او دوست دارد علاوه بر سر زدن به همه‌ی شهرهای یک کشور، از همه‌ی جاده‌های آن نیز حداقل یک بار عبور کند. بیژن از آن‌جا که بودجه‌ی محدودی دارد و چند بار عبور کردن از یک جاده برای او جذابیتی ندارد، می‌خواهد تعداد جاده‌هایی که از آن‌ها بیش از یک بار عبور می‌کند کمینه شود. هر کشور از تعدادی شهر و جاده تشکیل شده است. هر جاده دو شهر را به هم متصل می‌کند و دوطرفه است. در نقشه‌ی یک کشور، شهرها به صورت دایره‌های کوچک نمایش داده می‌شوند و شهر پایتخت دایره‌ی بزرگ‌تری دارد. برای مثال، شکل زیر نقشه‌ی یک کشور است که بیژن برای گشتن در آن، باید از حداقل یک جاده دو بار عبور کند.



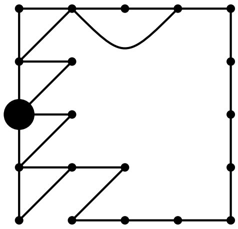
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ بیژن می‌خواهد در اولین سفر امسالش به کشوری برود که نقشه‌اش به شکل زیر است. اگر او بخواهد با روش مخصوص خودش کل کشور را بگردد، از حداقل چند جاده باید بیش از یک بار عبور کند؟



۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱ ۵) ۳

۱۸ بیژن در سفر دومش به کشوری می‌رود که نقشه‌اش به شکل زیر است. اگر او بخواهد این کشور را هم با روش مخصوص خودش بگردد، از حداقل چند جاده باید بیش از یک بار عبور کند؟

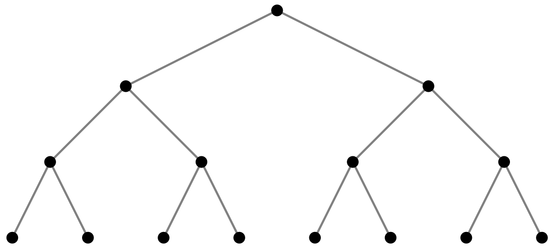


۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۴

آرین و پارمیس در حال انجام یک بازی روی یک گراف هستند و می‌خواهند رأس‌های آن را رنگ‌آمیزی کنند. در ابتدای بازی، رأس‌های گراف، قرمز، آبی، یا بدون رنگ هستند. بازی را آرین شروع می‌کند و بعد از هر نفر، نوبت به شخص دیگر می‌رسد. آرین در هر نوبتش، یک رأسِ بدون رنگ را که حداقل یک همسایه‌ی قرمز دارد، انتخاب، و آن را قرمز می‌کند. به طور مشابه، پارمیس هم در هر نوبت خود، یک رأسِ بدون رنگ را که حداقل یک همسایه‌ی آبی دارد، انتخاب، و آن را آبی می‌کند. هر کسی که نتواند رأس جدیدی را رنگ‌آمیزی کند، بازی را می‌بازد. دو رأس را همسایه می‌نامیم اگر بین‌شان یالی وجود داشته باشد.

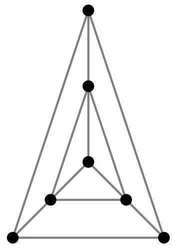
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ در این سوال، بازی روی گراف زیر انجام می‌شود. قبل از شروع بازی، ابتدا دو رأس متفاوت قرمز و آبی می‌شوند و سپس بازی آغاز می‌گردد. در چند مورد از وضعیت‌های شروع بازی، آرین می‌تواند طوری بازی کند که مستقل از نحوه‌ی بازی پارمیس، همواره برنده‌ی بازی باشد؟ دو وضعیت شروع بازی را متفاوت می‌دانیم اگر رنگ حداقل یک رأس در این دو وضعیت متفاوت باشد.



۱) ۱۵۴ ۲) ۱۷۵ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۳۳ ۵) ۱۴۰

۲۰ در این سوال، بازی روی گراف زیر انجام می‌شود. این بار قبل از شروع بازی، ابتدا آرین یک رأس را انتخاب، و آن را قرمز می‌کند، و بعد از آن، پارمیس به انتخاب خودش، یک رأس دیگر را آبی می‌کند، و سپس بازی شروع می‌شود. تعداد رأس‌هایی را بیابید که آرین اگر قبل از شروع بازی، یکی از آن‌ها را انتخاب کرده باشد، مستقل از نحوه‌ی بازی پارمیس یا رأسی که پارمیس قبل از شروع بازی انتخاب می‌کند، بتواند همواره برنده‌ی بازی باشد.



۱) ۶ ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) ۳ ۵) ۴

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۱ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات سی و سومین دوره المپیاد کامپیوتر- روز دوم

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۳۰۰ دقیقه

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: ۰
کد ملی: ۰
نام پدر: ----
نام مدرسه: ----
استان: ----
منطقه: ----
پایه تحصیلی: ----
حوزه: ----

شماره صندلی
۰۰۰۰

توضیحات مهم

۱. این پاسخ‌نامه به صورت نیمه‌کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
۲. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
۳. پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی گیرد.
۴. با توجه به این‌که برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک‌نویسی، حل کرده و آن گاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نماید.
۵. عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید، در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد
۶. از مخدوش کردن صفحه ها و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۷. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاب ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد
۸. سوالات ترتیب خاصی ندارند و لزوما از ساده به سخت نیستند. شخصیت و داستان سوالات ربطی به حل سوالات ندارند و صرفا جنبه طنز دارند.
۹. شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.
۱۰. تصحیح برگه آزمون روز دوم، مشروط به کسب حد نصاب مورد نظر کمیته علمی در آزمون تستی روز اول مرحله دوم دارد.
۱۱. دفترچه سوال به همراه دفترچه پاسخ نامه باید به مسئول مربوطه تحویل شود.

وب سایت کمیته ملی کامپیوتر: www.opedia.ir

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

سوال اول: چرخش .... ۱۸ نمره

عمل **چرخش** روی جایگشتِ $P = \langle P_{۱}, P_{۲}, \dots, P_{۱۴۰۲} \rangle$ از اعداد ۱ تا ۱۴۰۲ به این صورت تعریف می‌شود که عدد طبیعیِ i را انتخاب می‌کنیم (که $۱۴۰۲ \le i \le ۱$) و جایگشتِ P را از جایگاهِ i اُم می‌شکنیم تا دو زیرجایگشتِ $A = \langle P_{۱}, P_{۲}, \dots, P_{i} \rangle$ و $B = \langle P_{i+۱}, P_{i+۲}, \dots, P_{۱۴۰۲} \rangle$ ایجاد شوند؛ سپس جایگشت P را با یکی از جایگشت‌های زیر جایگزین می‌کنیم:

- $B.A = \langle P_{i+۱}, P_{i+۲}, \dots, P_{۱۴۰۲}, P_{۱}, P_{۲}, \dots, P_{i} \rangle$
- $A.\bar{B} = \langle P_{۱}, P_{۲}, \dots, P_{i}, P_{۱۴۰۲}, P_{۱۴۰۱}, \dots, P_{i+۱} \rangle$
- $\bar{A}.B = \langle P_{i}, P_{i-۱}, \dots, P_{۱}, P_{i+۱}, P_{i+۲}, \dots, P_{۱۴۰۲} \rangle$

جایگشت آغازینی از اعداد ۱ تا ۱۴۰۲ داده شده است. هدف، **منظم کردن** جایگشت است؛ به این معنی که با استفاده از تعدادی عمل چرخش به یکی از جایگشت‌های $\langle ۱, ۲, \dots, ۱۴۰۲ \rangle$ یا $\langle ۱۴۰۲, ۱۴۰۱, \dots, ۱ \rangle$ برسیم.

الف) نشان دهید هر جایگشت آغازینی را می‌توان با حداکثر ۲۸۰۰ بار استفاده از عمل چرخش، منظم کرد (۹ نمره).

ب) نشان دهید جایگشت آغازینی وجود دارد که نمی‌توان آن را با حداکثر ۱۴۰۰ بار استفاده از عمل چرخش، منظم کرد (۹ نمره).

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

سوال دوم: دستگاه درخت‌یاب .... ۱۸ نمره

درختی ۱۴۰۲ رأسی با مجموعه رأس‌های $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_{۱۴۰۲}\}$ داریم که از یال‌های آن اطلاع نداریم. دستگاهی داریم که به کمک آن می‌خواهیم یال‌های درخت را بفهمیم. در هر مرحله، می‌توانیم دو رأس دل‌خواهِ v_i و v_j را به عنوان ورودی به دستگاه بدهیم و به ازای هر یک از این دو رأس ورودی، مطلع شویم کدام رأس‌های درخت می‌توانند به آن رأس برسند، بدون این که نیاز باشد از رأس دیگرِ ورودی عبور کنند. برای مثال، فرض کنید درخت، یک مسیر ۱۴۰۲ رأسی باشد که به ازای هر k (برای $۱ \leq k \leq ۱۴۰۱$) رأس‌های v_k و $v_{k+۱}$ به هم یال داشته باشند؛ در این صورت، اگر رأس‌های $v_۳$ و $v_۷$ را به عنوان ورودی به دستگاه بدهیم، دستگاه اعلام می‌کند مجموعه رأس‌های $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_۶\}$ می‌توانند بدون عبور از $v_۷$، به $v_۳$ برسند و همچنین، مجموعه رأس‌های $\{v_۴, v_۵, \ldots, v_{۱۴۰۲}\}$ می‌توانند بدون عبور از $v_۳$، به $v_۷$ برسند.

نشان دهید کمینه‌ی تعداد مراحل مورد نیاز برای تشخیص کامل یال‌های درخت ۱۴۰۰ است. برای اثبات این موضوع، ابتدا باید روشی ارائه دهید که بتواند یال‌های هر درختی را با حداکثر ۱۴۰۰ مرحله به طور کامل تشخیص دهد و درستی روش خود را نیز ثابت کنید؛ سپس باید نشان دهید روشی وجود ندارد که بتواند یال‌های هر درختی را با کمتر از ۱۴۰۰ مرحله به طور کامل تشخیص دهد.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

سوال سوم: ستاره‌بازی .... ۲۲ نمره

به گراف ساده‌ای که دور نداشته باشد، **جنگل** می‌گوییم. هم‌چنین گراف **ستاره**، درختی است که در آن، یک رأس به همه‌ی رأس‌های دیگر یال داشته باشد.

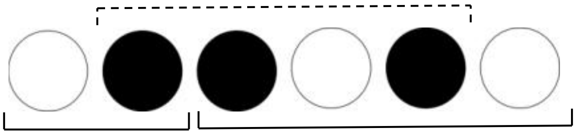
برای هر عدد طبیعیِ n، مقدار $f(n)$ را کمترین عدد طبیعیِ x ای تعریف می‌کنیم که بتوان یال‌های گراف کاملِ n رأسی را به x جنگل افراز کرد، طوری که هر کدام از این جنگل‌ها، اجتماع تعدادی ستاره باشند. برای مثال $f(۶) = ۴$ است. مقدار $f(۱۴۰۲)$ را بیابید.

برای حل این سوال:

- ابتدا باید مقدار $f(۱۴۰۲)$ را ارائه کنید. (۲ نمره)
- سپس اگر پاسخ شما برابرِ x است، باید نشان دهید که می‌توان یال‌های گراف کاملِ ۱۴۰۲ رأسی را به x جنگل با شرایط گفته شده افراز کرد. (۱۲ نمره، در صورت درستیِ x و درستی روش ارائه شده)
- در انتها اگر پاسخ شما برابرِ x است، باید نشان دهید که نمی‌توان یال‌های گراف کاملِ ۱۴۰۲ رأسی را به $x - ۱$ جنگل با شرایط گفته شده افراز کرد. (۸ نمره، در صورت درستیِ x و درستی اثبات ارائه شده)

سوال چهارم: توپ‌های سیاه و سفید .... ۲۲ نمره

به چیدنِ n توپ سفید و n توپ سیاه در یک ردیف، **چینش** می‌گوییم. یک زیردنباله‌ی متوالی ناتهی از توپ‌ها در یک چینش را **زیررشته** می‌نامیم. یک زیررشته **متوازن** است اگر تعداد توپ‌های سفید و سیاه در آن برابر باشد. **ارزش** یک چینش را برابر با تعداد اعضای مجموعه‌ی طول‌های زیررشته‌های متوازنِ آن تعریف می‌کنیم. برای مثال، فرض کنید $n = 3$ و رنگ توپ‌ها در چینش، مطابق شکل زیر باشد. در این چینش، زیررشته‌ی تشکیل شده از چهار توپ ابتدایی (از راست به چپ) و زیررشته‌ی تشکیل شده از دو توپ انتهایی، دو نمونه از زیررشته‌های متوازن هستند. در مقابل، زیررشته‌ی تشکیل شده از چهار توپ وسط (همه‌ی توپ‌ها به جز توپ ابتدایی و توپ انتهایی) متوازن نیست. پس مجموعه‌ی طول‌های زیررشته‌های متوازن در این چینش $\{2, 4, 6\}$ است و در نتیجه، ارزش این چینش ۳ می‌شود.



الف) برای $n = ۱۴۰۲$، نشان دهید چینشی وجود دارد که ارزش آن از ۷۰۲ بیشتر نیست. (۸ نمره)

ب) برای $n = ۱۴۰۲$، ثابت کنید ارزش هر چینشی حداقل ۷۰۲ است. (۱۴ نمره)
نکته: اگر ثابت کنید ارزش هر چینش حداقل ۳۸ است، ۶ نمره از بخش (ب) را دریافت می‌کنید.

مرحله دوم المپیاد کامپیوتر

۱۴۰۲,۲,۳

لطفاً گزینه را به صورت کامل و فقط با مداد مشکی نرم پر کنید.

صحیح ●

غلط: ✓ ✗

۱	○	●	○	○	○
۲	○	○	○	○	●
۳	○	○	○	●	○
۴	●	○	○	○	○
۵	○	○	○	●	○
۶	●	○	○	○	○
۷	●	○	○	○	○
۸	●	○	○	○	○
۹	○	○	●	○	○
۱۰	○	○	●	○	○
۱۱	○	○	○	●	○
۱۲	○	○	●	○	○
۱۳	○	○	○	○	●
۱۴	○	●	○	○	○
۱۵	○	●	○	○	○
۱۶	○	○	○	○	●
۱۷	○	●	○	○	○
۱۸	○	○	●	○	○
۱۹	○	○	○	○	●
۲۰	○	○	○	○	●
۲۱	○	○	○	○	○
۲۲	○	○	○	○	○
۲۳	○	○	○	○	○
۲۴	○	○	○	○	○
۲۵	○	○	○	○	○
۲۶	○	○	○	○	○
۲۷	○	○	○	○	○
۲۸	○	○	○	○	○
۲۹	○	○	○	○	○
۳۰	○	○	○	○	○
۳۱	○	○	○	○	○
۳۲	○	○	○	○	○
۳۳	○	○	○	○	○
۳۴	○	○	○	○	○
۳۵	○	○	○	○	○
۳۶	○	○	○	○	○
۳۷	○	○	○	○	○
۳۸	○	○	○	○	○
۳۹	○	○	○	○	○
۴۰	○	○	○	○	○
۴۱	○	○	○	○	○
۴۲	○	○	○	○	○
۴۳	○	○	○	○	○
۴۴	○	○	○	○	○
۴۵	○	○	○	○	○
۴۶	○	○	○	○	○
۴۷	○	○	○	○	○
۴۸	○	○	○	○	○
۴۹	○	○	○	○	○
۵۰	○	○	○	○	○
۵۱	○	○	○	○	○
۵۲	○	○	○	○	○
۵۳	○	○	○	○	○
۵۴	○	○	○	○	○
۵۵	○	○	○	○	○
۵۶	○	○	○	○	○
۵۷	○	○	○	○	○
۵۸	○	○	○	○	○
۵۹	○	○	○	○	○
۶۰	○	○	○	○	○
۶۱	○	○	○	○	○
۶۲	○	○	○	○	○
۶۳	○	○	○	○	○
۶۴	○	○	○	○	○
۶۵	○	○	○	○	○
۶۶	○	○	○	○	○
۶۷	○	○	○	○	○
۶۸	○	○	○	○	○
۶۹	○	○	○	○	○
۷۰	○	○	○	○	○
۷۱	○	○	○	○	○
۷۲	○	○	○	○	○
۷۳	○	○	○	○	○
۷۴	○	○	○	○	○
۷۵	○	○	○	○	○
۷۶	○	○	○	○	○
۷۷	○	○	○	○	○
۷۸	○	○	○	○	○
۷۹	○	○	○	○	○
۸۰	○	○	○	○	○

صاحب .... فرزند .... با کد ملی ....

صحت اطلاعات مندرج در پاسخ برگ را با مشخصات خود تایید می‌نمایم.

محل امضا

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

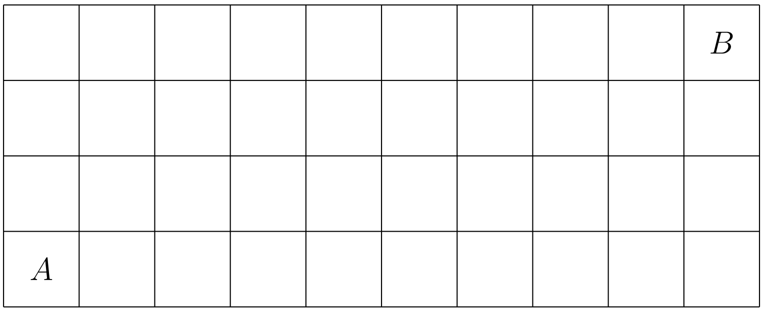
- آزمون ۲۰ سوال دارد و مدت زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- سوالات ۱۱ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.

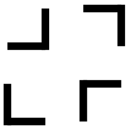
---

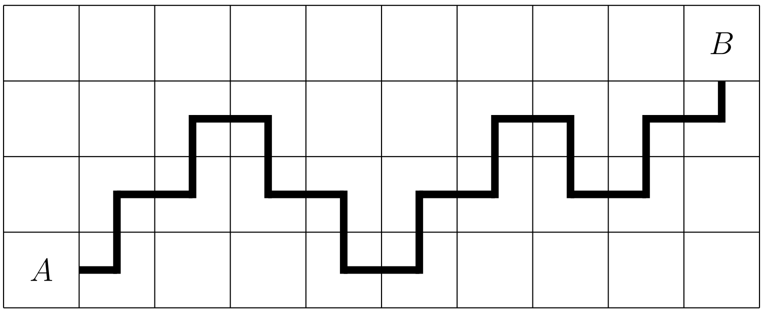
۱ آقای مدیر در راستای صیانت از محیط زیست، رفته بود کلنگ احداث کارخانه‌ای در جوار تالاب پایان‌کاله را بزند که با پشه روبه‌رو شد. آقای مدیر به اصرار پشه برای نیش زدن پاسخ منفی داد اما به او گفت: مسئله‌ای داریم که اگر حل شود، دستور می‌دهم مشکل معیشت شما را هم برطرف کنند. ما در این‌جا یک زمین داریم که به شکل یک جدول ۲۰۲۲ × ۱۴۰۱ است. در حال حاضر، همه‌ی خانه‌های این جدول را آب گرفته. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های جدول را خشک کنیم طوری که به ازای هر زیرمستطیل با بیش از یک خانه در این جدول، حداقل نصف خانه‌های آن زیرمستطیل خشک شده باشند. در راستای حمایت از جمعیت هم‌نوعان، پشه می‌خواهد تعداد خانه‌های خشک شده کمینه باشد. حداقل چند خانه از جدول باید خشک شوند؟

۱) ۲۱۲۴۱۱۱ ۲) ۲۱۲۴۶۱۶ ۳) ۱۸۸۸۵۴۸ ۴) ۱۴۱۶۴۱۱ ۵) ۹۴۴۲۷۴

۲ پشمک یک جدول ۱۰ × ۴ همانند شکل زیر دارد و می‌خواهد تعدادی لوله‌ی L-شکل در خانه‌های این جدول قرار دهد طوری که هر لوله داخل یک خانه قرار بگیرد و با طی کردن تعدادی لوله، از یکی از اضلاع خانه‌ی A به یکی از اضلاع خانه‌ی B مسیر وجود داشته باشد. پشمک دوست‌دار محیط‌زیست است و می‌خواهد با کم‌ترین تعداد لوله این کار را انجام دهد. پشمک به چند طریق می‌تواند تعدادی لوله در این جدول قرار دهد طوری که تعداد لوله‌ها کمینه باشد و از A به B مسیر وجود داشته باشد؟ یک نمونه از لوله‌گذاری که در آن از ضلع راست A به ضلع پایین B مسیر وجود دارد، در جدول زیرین آمده است. دقت کنید که تعداد لوله‌ها در این مثال لزوماً کمینه نیست.




لوله‌ها



یک نمونه از لوله‌گذاری با ۱۷ لوله

۱) ۵۸ ۲) ۴۲ ۳) ۴۶ ۴) ۷۶ ۵) ۶۸

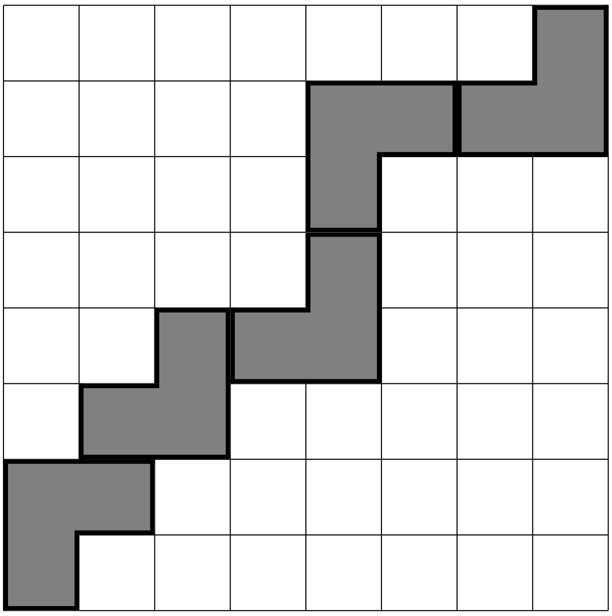
۳ سه نفر با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ دور دایره نشسته‌اند و با هم بازی می‌کنند. هر نفر دو کارت دارد که شماره‌ی افراد دیگر به جز خودش روی آن‌ها نوشته شده است. بازی از فرد با شماره‌ی ۱ شروع می‌شود. هر نفر در نوبت خود، از میان کارت‌هایی که در حال حاضر در اختیار دارد، یک کارت را به‌صورت تصادفی (با احتمال یکسان) انتخاب می‌کند و نوبت را به فردی که شماره‌اش روی کارت منتخب آمده است می‌دهد و آن کارت را دور می‌اندازد. بازی زمانی پایان می‌یابد که فردی که نوبتش است، هیچ کارتی نداشته باشد. پس از پایان بازی، امید ریاضی تعداد کل کارت‌های دور انداخته شده چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$ ۵) ۴

۴ در مغازه‌ی آقا جلال، کاشی‌هایی به شکل  فروخته می‌شود. یک جدول ۸ × ۸ داریم. می‌خواهیم تعدادی کاشی بخریم و آن‌ها را طوری در جدول قرار دهیم که کاشی‌کاری معتبر باشد. یک کاشی‌کاری معتبر است اگر همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

- هیچ دو کاشی‌ای هم‌پوشانی نداشته باشند.
- خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول حتماً کاشی‌کاری شده باشند.
- تنها با حرکت روی خانه‌های کاشی‌کاری شده‌ی جدول، بتوان از خانه‌ی پایین-چپ جدول شروع کرد، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور ضلعی رفت، و در انتها به خانه‌ی بالا-راست جدول رسید.

با توجه به قیمت بالای کاشی‌های مغازه‌ی آقا جلال، می‌خواهیم تعداد کاشی‌هایی که می‌خریم کمینه باشد. به چند طریق می‌توان جدول را به صورت معتبر و با کم‌ترین تعداد کاشی ممکن کاشی‌کاری کرد؟ لازم به ذکر است که دو کاشی‌کاری متفاوتند اگر و تنها اگر یک خانه از جدول وجود داشته باشد که فقط در یکی از این دو حالت کاشی‌کاری شده باشد. در شکل زیر، یک نمونه کاشی‌کاری معتبر نمایش داده شده است. توجه کنید که تعداد کاشی‌ها در این نمونه لزوماً کمینه نیست.



۱) ۲۲۴ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۲۸ ۴) ۹۶ ۵) ۱۹۲

۵ دنباله‌ای از سیاه‌چاله‌ها در یک ردیف و به ترتیب با اندازه‌های «۵, ۴, ۸, ۲, ۳, ۲, ۸, ۵, ۳, ۲, ۵, ۱, ۳» در فضا قرار گرفته‌اند. می‌دانیم با ادغام تعدادی سیاه‌چاله، یک سیاه‌چاله‌ی جدید با اندازه‌ای برابر با مجموع اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های اولیه به دست می‌آید. حال می‌خواهیم یک بازه‌ی متوالی از یک یا چند سیاه‌چاله را انتخاب کنیم و با ادغامشان یک سیاه‌چاله‌ی بزرگ بسازیم؛ سپس تا جایی که اندازه‌ی سیاه‌چاله‌مان از اندازه‌ی یکی از سیاه‌چاله‌های همسایه (راست یا چپ) بزرگ‌تر یا مساوی است، آن را با ادغام با سیاه‌چاله‌ی همسایه، بزرگ‌تر کنیم. چند بازه‌ی متوالی متمایز از دنباله‌ی سیاه‌چاله‌ها وجود دارد که در صورت انتخاب برای ادغام اولیه، می‌توان با این فرایند همه‌ی سیاه‌چاله‌ها را با هم ادغام کرد؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۴ ۳) ۷۸ ۴) ۸۲ ۵) ۷۶

۶ جک یک عدد ۹ رقمی دارد که می‌خواهد آن را «پالایش» کند. فرایند پالایش به این صورت است که در هر مرحله، ارقام عدد فعلی به کم‌ترین تعداد بازه‌ی متوالی تقسیم می‌شوند طوری که ارقام در هر بازه یکسان باشند. سپس برای ایجاد عدد جدید (جایگزین عدد فعلی)، به ازای هر یک از این بازه‌ها به ترتیب از چپ به راست، طول آن‌ها (تعداد ارقام در هر بازه) نوشته می‌شود. برای مثال، عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ بعد از یک مرحله پالایش به عدد ۱۲۱۱۴ تبدیل می‌شود. جک فرایند پالایش را تا وقتی که به یک عدد یک رقمی برسد ادامه می‌دهد. عدد یک رقمی نهایی چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ در مثال زیر، فرایند پالایش عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ را مشاهده می‌کنید که به عدد ۲ ختم می‌شود.

۱۲۲۳۱۸۸۸۸ → ۱۲۱۱۴ → ۱۱۲۱ → ۲۱۱ → ۱۲ → ۱۱ → ۲

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۶

۷ یک گراف ساده و همبند ۱۱ رأسی داریم که می‌توان از هر رأس آن با طیِ حداکثر ۵ یال به هر رأس دیگر رسید. از طرفی دو رأس در این گراف وجود دارند که برای رسیدن از یکی به دیگری طی کردن حداقل ۵ یال لازم است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶ ۵) ۳۰

۸ کلاه‌قرمزی یک جدول ۱۰×۱۰ دارد که سطرها و ستون‌های آن از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند و در هر خانه‌ی آن دقیقاً یک سوراخ وجود دارد. بچه‌ی فامیل دور که ۸ تیله دارد، این جدول را پیدا کرده است. او به ازای هر تیله، یکی از خانه‌های جدول را به صورت تصادفی با احتمال یکسان انتخاب می‌کند و تیله را در سوراخ آن خانه می‌اندازد (امکان دارد در سوراخ یک خانه، چندین تیله قرار بگیرد). حال اگر تعداد تیله‌های واقع در سوراخ خانه‌ی تقاطع سطر iاُم و ستون jاُم را با $c_{i,j}$ نمایش دهیم، زیبایی جدول با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times (c_{i,j})^{۲}$$

امید ریاضی زیبایی جدول پس از انداختن ۸ تیله چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۸۶۶۷}{۵۰}$ ۲) $\frac{۱۲۹۴۷}{۵۰}$ ۳) $\frac{۱۶۷۶۷}{۱۰۰}$ ۴) ۱۹۳۶ ۵) $\frac{۲۵۰۴۷}{۱۰۰}$

۹ یک گراف $\binom{۲۶}{۶}$ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی به طول ۲۶ با ۲۰ رقمِ صفر و ۶ رقمِ یک است. در این گراف، بین دو رأس متفاوت، یال (بدون جهت) می‌گذاریم اگر و تنها اگر رشته‌ی متناظر با یکی از آن‌ها با یک «شیفت دوری»، قابل تبدیل به رشته‌ی متناظر با رأس دیگر باشد. عملیات شیفت دوری روی یک رشته‌ی دودویی را این‌گونه تعریف می‌کنیم که راست‌ترین رقم رشته را حذف، و آن را در چپ‌ترین جایگاه رشته اضافه می‌کنیم. برای مثال، شیفت دوری رشته‌ی ۱۰۰۰۱۰۱، رشته‌ی ۱۱۰۰۰۱۰ را نتیجه می‌دهد. تعداد مؤلفه‌های همبندی این گراف را بشمارید.

۱) ۸۸۵۵ ۲) ۸۸۷۷ ۳) ۸۸۸۸ ۴) ۸۸۹۹ ۵) ۸۸۶۶

۱۰ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ ملایم می‌گوییم اگر حاصل ضرب هر دو عدد متوالی در جایگشت، حداکثر ۳۰ شود. چند جایگشتِ ملایم از اعداد ۱ تا ۱۰ داریم؟

۱) ۱۷۲۸ ۲) ۲۸۸۰ ۳) ۳۴۵۶ ۴) ۵۷۶ ۵) ۱۴۴

موشی و پیشی مشغول بازی با n کلید و n لامپ هستند. می‌دانیم که لامپ‌ها رنگ‌هایی متمایز دارند و هر کدام، همواره در یکی از دو وضعیت خاموش و روشن هستند. کلیدها نیز از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و با فشردن هر یک، لامپ متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد. در ابتدای بازی، پیشی به طور دل‌خواه کلیدها را سیم‌کشی کرده و هر کدام از آن‌ها را به دقیقاً یک لامپ متصل می‌کند (ممکن است چند کلید به یک لامپ وصل شده باشند). سپس، موشی که از شیوه‌ی سیم‌کشی پیشی بی‌اطلاع است، در هر درخواست، دو تا از کلیدها را انتخاب و برای پیشی مشخص می‌کند. پیشی پس از گرفتن یک آب‌نبات از موشی، آن دو کلید را هم‌زمان فشار می‌دهد. با فشرده شدن هر کلیدی، لامپ متصل به آن تغییر وضعیت می‌دهد؛ ولی اگر دو کلید فشرده شده به یک لامپ متصل بوده باشند، وضعیت لامپ‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. هدف موشی این است که بداند هر کلید به چه لامپی متصل شده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ اگر $n = ۸$ باشد و پیشی تضمین کند که همه‌ی لامپ‌ها در سیم‌کشی به کلیدی متصل شده‌اند، موشی حداقل به چند آب‌نبات نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۱) ۴ ۲) هیچ‌کدام ۳) ۶ ۴) ۷ ۵) ۵

۱۲ اگر $n = ۵$ باشد و موشی مقدار نامحدودی آب‌نبات در اختیار داشته باشد، به ازای چند سیم‌کشی مختلف می‌تواند به هدفش برسد؟

۱) ۲۸۲۰ ۲) ۲۸۰۰ ۳) ۳۱۲۵ ۴) ۳۱۲۰ ۵) ۰

پوپک و پرستو مشغول انجام یک بازی هستند. بازی آن‌ها به این صورت است که ابتدا پوپک یک عدد طبیعی مانند k را انتخاب می‌کند با این شرط که $۱ \leqslant k \leqslant ۲۰$. سپس پرستو سعی می‌کند عدد پوپک را حدس بزند. پرستو می‌تواند از پوپک تعدادی پرسش کند. در هر پرسش، پرستو یک عدد طبیعی مانند n را به پوپک می‌گوید و پوپک باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر k را به پرستو می‌گوید. هدف پرستو پیدا کردن عدد انتخاب شده توسط پوپک است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱
۵) ۲

۱۴ اگر اعدادی که پرستو می‌تواند بپرسد، حداکثر ۲۰ باشند ($۱ \leqslant n \leqslant ۲۰$)، کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱) ۱
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۲
۵) ۳

در کشور سلطان، ۱۳ شهر با شماره‌های ۱ تا ۱۳ وجود دارد که بین بعضی جفت‌های آن‌ها جاده‌ی خاکی وجود دارد. می‌دانیم که از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده‌ی خاکی به هر شهر دیگر رفت. هم‌چنین می‌دانیم بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ هیچ جاده‌ی خاکی‌ای وجود ندارد. سلطان می‌خواهد تعدادی از جاده‌های خاکی کشورش را آسفالت کند طوری که کم‌ترین تعداد جاده آسفالت شوند و بتوان تنها با استفاده از جاده‌های آسفالت شده بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ مسافرت کرد. فرض کنید نقشه‌ی جاده‌های خاکی را نمی‌دانیم اما می‌دانیم کمینه‌ی تعداد جاده‌هایی که باید آسفالت شوند برابر با k است. با دانستن مقدار k، نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

دو نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده را متفاوت در نظر می‌گیریم اگر دو شهر باشند که در یک نقشه، بین این دو شهر جاده‌ی آسفالت شده وجود داشته باشد و در نقشه‌ی دیگر خیر.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ جواب سوال را با فرض $k = ۴$ به دست آورید.

۱) ۲۷۰
۲) ۵۴۰
۳) ۱۰۸۰
۴) ۸۱۰
۵) ۱۳۵

۱۶ جواب سوال را با فرض $k = ۱۲$ به دست آورید.

۱) $۸۸ \times ۱۰!$
۲) $۸۵ \times ۱۰!$
۳) $۸۲ \times ۱۰!$
۴) $۵۵ \times ۱۰!$
۵) $۱۳۲ \times ۱۰!$

۲k نفر با شماره‌های ۱ تا ۲k به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره نشسته‌اند و می‌خواهند با یکدیگر بازی کنند. افراد ۱ تا k تیم اول، و افراد $k+۱$ تا ۲k تیم دوم را تشکیل می‌دهند. در ابتدا، توپی در دست نفر شماره‌ی ۱ است. در هر نوبت، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به یکی از t نفر بعدی‌اش (در ترتیب ساعت‌گرد) می‌دهد. تیمی که بعد از n نوبت، توپ در دست یکی از اعضای آن باشد، برنده می‌شود. می‌گوییم به ازای مقادیر مشخص k، t و n، یک تیم «استراتژی بُرد» دارد، اگر اعضای آن بتوانند در برابر هر شیوه‌ای از بازی تیم مقابل، طوری بازی کنند که حتماً برنده‌ی بازی شوند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ اگر $k = ۲$ و $t = ۲$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعضای $\{۵, ۶, ۱۰, ۱۵\}$، تیم اول استراتژی برد دارد؟

۱) ۰
۲) ۴
۳) ۱
۴) ۲
۵) ۳

۱۸ اگر $k = ۱۰$ و $t = ۲$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعداد ۱ تا ۳۰، تیم اول استراتژی برد دارد؟

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۵
۴) ۳۰
۵) ۲۰

گرافی با ۱۴۰۱ رأس و ۱۴۰۱ یال داریم که رأس‌های آن با اعداد ۱ تا ۱۴۰۱ شماره‌گذاری شده‌اند. به ازای هر i ($۱ \leqslant i \leqslant ۱۴۰۰$)، رأس‌های i و $i+۱$ با یک یال به هم متصل هستند. رأس‌های با شماره‌های ۱ و ۱۴۰۱ نیز با یک یال به هم متصل هستند. به مجموعه‌ای از رأس‌ها مستقل گوییم اگر هیچ یالی بین رأس‌های آن وجود نداشته باشد. به مجموعه‌ی مستقل با بیش‌ترین اندازه، بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گفته می‌شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل یکی کم‌تر شود؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۴
۵) ۱

۲۰ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل دو تا کم‌تر شود؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴
۵) ۳

سی و دومین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۴۰۱/۰۲/۱۷

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال اول .... ۱۸ نمره

یک جدول با ۱۴۰۱ سطر و ۳ ستون داریم. به خانه‌های تلاقیِ مجموعه‌ای از سطرهای متوالی و مجموعه‌ای از ستون‌های متوالی، یک زیرجدول می‌گوییم. در ابتدا ایمان به ازای هر سطر جدول، دقیقاً دو خانه از سه خانه را انتخاب می‌کند و داخل آن‌ها مهره قرار می‌دهد. سپس اسکندر در تعدادی حرکت، همه‌ی مهره‌های جدول را حذف می‌کند. او در هر حرکت، یک زیرجدول انتخاب می‌کند که تمام خانه‌های آن دارای مهره باشد و آن مهره‌ها را حذف می‌کند.

الف) ثابت کنید اسکندر همواره می‌تواند تمامی مهره‌ها را در حداکثر ۱۴۰۲ حرکت حذف کند. (۹ نمره)

ب) ثابت کنید ایمان می‌تواند در ابتدا طوری مهره‌ها را قرار دهد که اسکندر برای حذف همه‌ی آن‌ها حداقل ۱۴۰۲ حرکت لازم داشته باشد. (۹ نمره)

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال دوم .... ۱۸ نمره

در یک زندان، ۳۲ نفر با اسامی متمایز در ۳۲ سلول زندانی هستند. زندان‌بانِ زندان عوض شده و زندان‌بان جدید می‌خواهد لیستی از اسامی ۳۲ زندانی تهیه کند. او برای این کار با زندانی‌ها توافق می‌کند که این بازی را انجام دهند:

> هر روز، ابتدا زندان‌بان دو سلول را انتخاب می‌کند؛ سپس با مراجعه به آن دو سلول، زندانی‌های هرکدام از آن دو سلول را می‌بیند و اگر هر یک از آن‌ها را قبلاً ندیده باشد، اسم آن فرد را هم به لیست خود اضافه می‌کند. همان شب و دور از چشم زندان‌بان، یکی از آن دو زندانی سلولش را با یکی از ۳۱ زندانی دیگر عوض می‌کند.

آیا زندان‌بان در هر شرایطی (به ازای تمام عملکردهای ممکن زندانی‌ها) می‌تواند در حداکثر ۱۰۲۴ روز، لیستی از اسامی همه‌ی زندانی‌ها را تهیه کند؟

توضیح: اگر پاسخ شما برای این سوال «بله» است، باید روشی برای زندان‌بان ارائه کنید که در حداکثر ۱۰۲۴ روز، لیست اسامی زندانی‌ها را تهیه کند. هم‌چنین اگر پاسخ شما برای این سوال «خیر» است، باید اثبات کنید به ازای هر الگوریتمِ زندان‌بان، حالتی وجود دارد که او به هدفش نرسد.

سوال سوم .... ۱۸ نمره

تعدادی عدد متمایز دور یک دایره داریم که در ابتدا همه‌ی آن‌ها **سفید** هستند. یک عدد را **دره** می‌گوییم، اگر از هر دو عدد مجاورش کوچک‌تر باشد. هم‌چنین یک عدد را **قله** می‌نامیم، اگر از هر دو عدد مجاورش بزرگ‌تر باشد.

روی اعداد به ترتیب از کوچک به بزرگ، عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

- اگر دره است، آن را **سیاه** می‌کنیم.
- اگر قله است، از این عدد به دو جهت حرکت می‌کنیم تا به اولین دره‌ی سیاه برسیم و از میان این دو دره‌ی سیاه عدد بزرگ‌تر را انتخاب کرده و با قله‌ی مذکور **جفت** می‌کنیم و دره‌ای که جفت شده را **قرمز** می‌کنیم. (اگر از دو جهت به یک دره‌ی سیاه یکسان رسیدیم، همان را انتخاب می‌کنیم.)
- در غیر این صورت، کاری انجام نمی‌دهیم.

به این ترتیب، در نهایت دره‌ها و قله‌ها به جفت‌هایی افراز می‌شوند. در شکل زیر، افراز حاصل از اجرای الگوریتم در یک نمونه آمده است.

حال، هر عدد را با قرینه‌اش جایگزین کرده و الگوریتم گفته شده را با اعداد جدید اجرا می‌کنیم. ثابت کنید دو عدد در اجرای دوم الگوریتم جفت می‌شوند، اگر و تنها اگر اعداد متناظرشان (قرینه‌هایشان) در اجرای اول الگوریتم جفت شده باشند.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال چهارم .... ۲۶ نمره

فرض کنید n یک عدد طبیعی، و A زیرمجموعه‌ای از $\{۱,۲,\ldots,n-۱\}$ باشد. در یک درخت n رأسی، یک مسیر را A-پسند گوییم، اگر طولِ (تعداد یال‌های) آن عضوی از A باشد. $f(n,A)$ را بیشینه‌ی تعداد مسیرهای A-پسند در میان تمام درخت‌های n رأسی در نظر بگیرید. برای مثال:

$$f(۵,\{۱,۴\}) = ۵ \qquad \text{و} \qquad f(۵,\{۱,۲,۴\}) = ۱۰$$

الف) $f(۲۰۲۲,\{۳,۴,۵,\ldots,۱۴۰۱\})$ را بیابید. (۸ نمره)

ب) $f(۲۰۲۲,\{۳,۵,۷,\ldots,۱۳۹۹,۱۴۰۱\})$ را بیابید. (۵ نمره)

پ) $f(۲۰۲۲,\{۱۴۰۱\})$ را بیابید. (۱۳ نمره)

مرحله‌ی دوم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- آزمون ۲۰ سوال دارد و مدت زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- سوالات ۱۱ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.

---

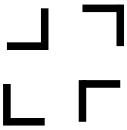
۱ آقای مدیر در راستای صیانت از محیط زیست، رفته بود کلنگ احداث کارخانه‌ای در جوار تالاب پایان‌کاله را بزند که با پشه روبه‌رو شد. آقای مدیر به اصرار پشه برای نیش زدن پاسخ منفی داد اما به او گفت: مسئله‌ای داریم که اگر حل شود، دستور می‌دهم مشکل معیشت شما را هم برطرف کنند. ما در این‌جا یک زمین داریم که به شکل یک جدول ۲۰۲۲ × ۱۴۰۱ است. در حال حاضر، همه‌ی خانه‌های این جدول را آب گرفته. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های جدول را خشک کنیم طوری که به ازای هر زیرمستطیل با بیش از یک خانه در این جدول، حداقل نصف خانه‌های آن زیرمستطیل خشک شده باشند. در راستای حمایت از جمعیت هم‌نوعان، پشه می‌خواهد تعداد خانه‌های خشک شده کمینه باشد. حداقل چند خانه از جدول باید خشک شوند؟

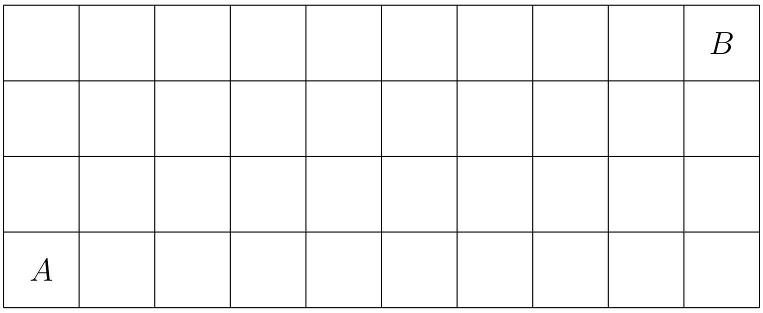
۱) ۲۱۲۴۱۱۱ ۲) ۲۱۲۴۶۱۶ ۳) ۱۸۸۸۵۴۸ ۴) ۱۴۱۶۴۱۱ ۵) ۹۴۴۲۷۴

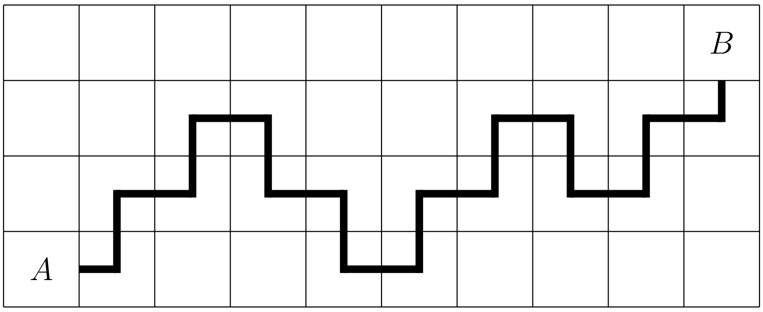
پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۲ پشمک یک جدول ۱۰ × ۴ همانند شکل زیر دارد و می‌خواهد تعدادی لوله‌ی L-شکل در خانه‌های این جدول قرار دهد طوری که هر لوله داخل یک خانه قرار بگیرد و با طی کردن تعدادی لوله، از یکی از اضلاع خانه‌ی A به یکی از اضلاع خانه‌ی B مسیر وجود داشته باشد. پشمک دوست‌دار محیط‌زیست است و می‌خواهد با کم‌ترین تعداد لوله این کار را انجام دهد. پشمک به چند طریق می‌تواند تعدادی لوله در این جدول قرار دهد طوری که تعداد لوله‌ها کمینه باشد و از A به B مسیر وجود داشته باشد؟ یک نمونه از لوله‌گذاری که در آن از ضلع راست A به ضلع پایین B مسیر وجود دارد، در جدول زیرین آمده است. دقت کنید که تعداد لوله‌ها در این مثال لزوماً کمینه نیست.


لوله‌ها





یک نمونه از لوله‌گذاری با ۱۷ لوله

۱) ۵۸ ۲) ۴۲ ۳) ۴۶ ۴) ۷۶ ۵) ۶۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۳ سه نفر با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ دور دایره نشسته‌اند و با هم بازی می‌کنند. هر نفر دو کارت دارد که شماره‌ی افراد دیگر به جز خودش روی آن‌ها نوشته شده است. بازی از فرد با شماره‌ی ۱ شروع می‌شود. هر نفر در نوبت خود، از میان کارت‌هایی که در حال حاضر در اختیار دارد، یک کارت را به‌صورت تصادفی (با احتمال یکسان) انتخاب می‌کند و نوبت را به فردی که شماره‌اش روی کارت منتخب آمده است می‌دهد و آن کارت را دور می‌اندازد. بازی زمانی پایان می‌یابد که فردی که نوبتش است، هیچ کارتی نداشته باشد. پس از پایان بازی، امید ریاضی تعداد کل کارت‌های دور انداخته شده چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$ ۵) ۴

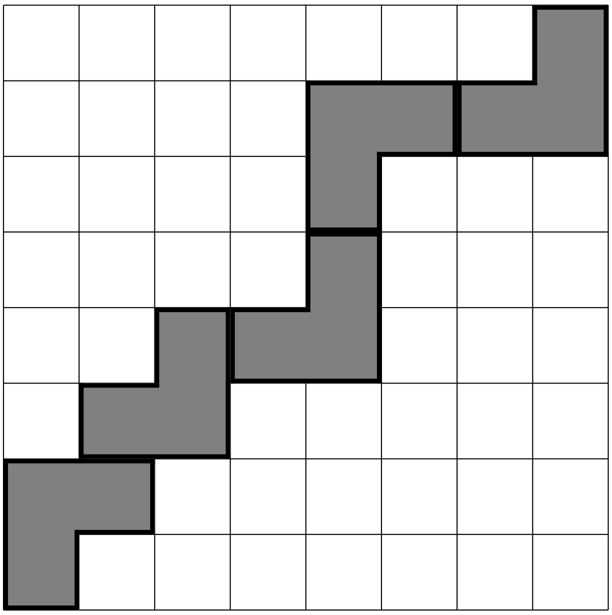
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۴ در مغازه‌ی آقا جلال، کاشی‌هایی به شکل  فروخته می‌شود. یک جدول ۸ × ۸ داریم. می‌خواهیم تعدادی کاشی بخریم و آن‌ها را طوری در جدول قرار دهیم که کاشی‌کاری معتبر باشد. یک کاشی‌کاری معتبر است اگر همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

- هیچ دو کاشی‌ای هم‌پوشانی نداشته باشند.
- خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول حتماً کاشی‌کاری شده باشند.
- تنها با حرکت روی خانه‌های کاشی‌کاری شده‌ی جدول، بتوان از خانه‌ی پایین-چپ جدول شروع کرد، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور ضلعی رفت، و در انتها به خانه‌ی بالا-راست جدول رسید.

با توجه به قیمت بالای کاشی‌های مغازه‌ی آقا جلال، می‌خواهیم تعداد کاشی‌هایی که می‌خریم کمینه باشد. به چند طریق می‌توان جدول را به صورت معتبر و با کم‌ترین تعداد کاشی ممکن کاشی‌کاری کرد؟ لازم به ذکر است که دو کاشی‌کاری متفاوتند اگر و تنها اگر یک خانه از جدول وجود داشته باشد که فقط در یکی از این دو حالت کاشی‌کاری شده باشد. در شکل زیر، یک نمونه کاشی‌کاری معتبر نمایش داده شده است. توجه کنید که تعداد کاشی‌ها در این نمونه لزوماً کمینه نیست.



۱) ۲۲۴ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۲۸ ۴) ۹۶ ۵) ۱۹۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

☐

۵ دنباله‌ای از سیاه‌چاله‌ها در یک ردیف و به ترتیب با اندازه‌های «۳, ۱, ۵, ۲, ۳, ۵, ۸, ۲, ۳, ۲, ۸, ۴, ۵» در فضا قرار گرفته‌اند. می‌دانیم با ادغام تعدادی سیاه‌چاله، یک سیاه‌چاله‌ی جدید با اندازه‌ای برابر با مجموع اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های اولیه به دست می‌آید. حال می‌خواهیم یک بازه‌ی متوالی از یک یا چند سیاه‌چاله را انتخاب کنیم و با ادغامشان یک سیاه‌چاله‌ی بزرگ بسازیم؛ سپس تا جایی که اندازه‌ی سیاه‌چاله‌مان از اندازه‌ی یکی از سیاه‌چاله‌های همسایه (راست یا چپ) بزرگ‌تر یا مساوی است، آن را با ادغام با سیاه‌چاله‌ی همسایه، بزرگ‌تر کنیم. چند بازه‌ی متوالی متمایز از دنباله‌ی سیاه‌چاله‌ها وجود دارد که در صورت انتخاب برای ادغام اولیه، می‌توان با این فرایند همه‌ی سیاه‌چاله‌ها را با هم ادغام کرد؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۴ ۳) ۷۸ ۴) ۸۲ ۵) ۷۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

☐

۶ جک یک عدد ۹ رقمی دارد که می‌خواهد آن را «پالایش» کند. فرایند پالایش به این صورت است که در هر مرحله، ارقام عدد فعلی به کم‌ترین تعداد بازه‌ی متوالی تقسیم می‌شوند طوری که ارقام در هر بازه یکسان باشند. سپس برای ایجاد عدد جدید (جایگزین عدد فعلی)، به ازای هر یک از این بازه‌ها به ترتیب از چپ به راست، طول آن‌ها (تعداد ارقام در هر بازه) نوشته می‌شود. برای مثال، عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ بعد از یک مرحله پالایش به عدد ۱۲۱۱۴ تبدیل می‌شود. جک فرایند پالایش را تا وقتی که به یک عدد یک رقمی برسد ادامه می‌دهد. عدد یک رقمی نهایی

چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ در مثال زیر، فرایند پالایش عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ را مشاهده می‌کنید که به عدد ۲ ختم می‌شود.

$$۱۲۲۳۱۸۸۸۸ \rightarrow ۱۲۱۱۴ \rightarrow ۱۱۲۱ \rightarrow ۲۱۱ \rightarrow ۱۲ \rightarrow ۱۱ \rightarrow ۲$$

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۷ یک گراف ساده و همبند ۱۱ رأسی داریم که می‌توان از هر رأس آن با طیِ حداکثر ۵ یال به هر رأس دیگر رسید. از طرفی دو رأس در این گراف وجود دارند که برای رسیدن از یکی به دیگری طی کردن حداقل ۵ یال لازم است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶ ۵) ۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۸ کلاه‌قرمزی یک جدول ۱۰ × ۱۰ دارد که سطرها و ستون‌های آن از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند و در هر خانه‌ی آن دقیقاً یک سوراخ وجود دارد. بچه‌ی فامیل دور که ۸ تیله دارد، این جدول را پیدا کرده است. او به ازای هر تیله، یکی از خانه‌های جدول را به صورت تصادفی با احتمال یکسان انتخاب می‌کند و تیله را در سوراخ آن خانه می‌اندازد (امکان دارد در سوراخ یک خانه، چندین تیله قرار بگیرد). حال اگر تعداد تیله‌های واقع در سوراخ خانه‌ی تقاطع سطر iاُم و ستون jاُم را با $c_{i,j}$ نمایش دهیم، زیبایی جدول با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times (c_{i,j})^{۲}$$

امید ریاضی زیبایی جدول پس از انداختن ۸ تیله چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۸۶۶۷}{۵۰}$ ۲) $\frac{۱۲۹۴۷}{۵۰}$ ۳) $\frac{۱۶۷۶۷}{۱۰۰}$ ۴) ۱۹۳۶ ۵) $\frac{۲۵۰۴۷}{۱۰۰}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۹ یک گراف $\binom{۲۶}{۶}$ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی به طول ۲۶ با ۲۰ رقمِ صفر و ۶ رقمِ یک است. در این گراف، بین دو رأس متفاوت، یال (بدون جهت) می‌گذاریم اگر و تنها اگر رشته‌ی متناظر با یکی از آن‌ها با یک «شیفت دوری»، قابل تبدیل به رشته‌ی متناظر با رأس دیگر باشد. عملیات شیفت دوری روی یک رشته‌ی دودویی را این‌گونه تعریف می‌کنیم که راست‌ترین رقم رشته را حذف، و آن را در چپ‌ترین جایگاه رشته اضافه می‌کنیم. برای مثال، شیفت دوری رشته‌ی ۱۰۰۰۱۰۱، رشته‌ی ۱۱۰۰۰۱۰ را نتیجه می‌دهد. تعداد مؤلفه‌های همبندی این گراف را بشمارید.

۱) ۸۸۵۵ ۲) ۸۸۷۷ ۳) ۸۸۸۸ ۴) ۸۸۹۹ ۵) ۸۸۶۶

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۰ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ ملایم می‌گوییم اگر حاصل ضرب هر دو عدد متوالی در جایگشت، حداکثر ۳۰ شود. چند جایگشتِ ملایم از اعداد ۱ تا ۱۰ داریم؟

۱) ۱۷۲۸ ۲) ۲۸۸۰ ۳) ۳۴۵۶ ۴) ۵۷۶ ۵) ۱۴۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

موشی و پیشی مشغول بازی با n کلید و n لامپ هستند. می‌دانیم که لامپ‌ها رنگ‌هایی متمایز دارند و هر کدام، همواره در یکی از دو وضعیت خاموش و روشن هستند. کلیدها نیز از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و با فشردن هر یک، لامپ متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد. در ابتدای بازی، پیشی به طور دل‌خواه کلیدها را سیم‌کشی کرده و هر کدام از آن‌ها را به دقیقاً یک لامپ متصل می‌کند (ممکن است چند کلید به یک لامپ وصل شده باشند). سپس، موشی که از شیوه‌ی سیم‌کشی پیشی بی‌اطلاع است، در هر درخواست، دو تا از کلیدها را انتخاب و برای پیشی مشخص می‌کند. پیشی پس از گرفتن یک آب‌نبات از موشی، آن دو کلید را هم‌زمان فشار می‌دهد. با فشرده شدن هر کلیدی، لامپ متصل به آن تغییر وضعیت می‌دهد؛ ولی اگر دو کلید فشرده شده به یک لامپ متصل بوده باشند، وضعیت لامپ‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. هدف موشی این است که بداند هر کلید به چه لامپی متصل شده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ اگر $n = ۸$ باشد و پیشی تضمین کند که همه‌ی لامپ‌ها در سیم‌کشی به کلیدی متصل شده‌اند، موشی حداقل به چند آب‌نبات نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۱) ۴ ۲) هیچ‌کدام ۳) ۶ ۴) ۷ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۲ اگر $n = ۵$ باشد و موشی مقدار نامحدودی آب‌نبات در اختیار داشته باشد، به ازای چند سیم‌کشی مختلف می‌تواند به هدفش برسد؟

۱) ۲۸۲۰ ۲) ۲۸۰۰ ۳) ۳۱۲۵ ۴) ۳۱۲۰ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

□

پوپک و پرستو مشغول انجام یک بازی هستند. بازی آن‌ها به این صورت است که ابتدا پوپک یک عدد طبیعی مانند k را انتخاب می‌کند با این شرط که $۱ \leqslant k \leqslant ۲۰$. سپس پرستو سعی می‌کند عدد پوپک را حدس بزند. پرستو می‌تواند از پوپک تعدادی پرسش کند. در هر پرسش، پرستو یک عدد طبیعی مانند n را به پوپک می‌گوید و پوپک باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر k را به پرستو می‌گوید. هدف پرستو پیدا کردن عدد انتخاب شده توسط پوپک است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۱۴ اگر اعدادی که پرستو می‌تواند بپرسد، حداکثر ۲۰ باشند ($۱ \leqslant n \leqslant ۲۰$)، کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

در کشور سلطان، ۱۳ شهر با شماره‌های ۱ تا ۱۳ وجود دارد که بین بعضی جفت‌های آن‌ها جاده‌ی خاکی وجود دارد. می‌دانیم که از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده‌ی خاکی به هر شهر دیگر رفت. هم‌چنین می‌دانیم بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ هیچ جاده‌ی خاکی‌ای وجود ندارد. سلطان می‌خواهد تعدادی از جاده‌های خاکی کشورش را آسفالت کند طوری که کم‌ترین تعداد جاده آسفالت شوند و بتوان تنها با استفاده از جاده‌های آسفالت شده بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ مسافرت کرد. فرض کنید نقشه‌ی جاده‌های خاکی را نمی‌دانیم اما می‌دانیم کمینه‌ی تعداد جاده‌هایی که باید آسفالت شوند برابر با k است. با دانستن مقدار k، نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

دو نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده را متفاوت در نظر می‌گیریم اگر دو شهر باشند که در یک نقشه، بین این دو شهر جاده‌ی آسفالت شده وجود داشته باشد و در نقشه‌ی دیگر خیر.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ جواب سوال را با فرض $k = ۴$ به دست آورید.

۱) ۲۷۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۱۰۸۰ ۴) ۸۱۰ ۵) ۱۳۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۱۶ جواب سوال را با فرض $k = ۱۲$ به دست آورید.

۱) $۸۸ \times ۱۰!$ ۲) $۸۵ \times ۱۰!$ ۳) $۸۲ \times ۱۰!$ ۴) $۵۵ \times ۱۰!$ ۵) $۱۳۲ \times ۱۰!$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

$۲k$ نفر با شماره‌های ۱ تا $۲k$ به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره نشسته‌اند و می‌خواهند با یکدیگر بازی کنند. افراد ۱ تا k تیم اول، و افراد $k+۱$ تا $۲k$ تیم دوم را تشکیل می‌دهند. در ابتدا، توپی در دست نفر شماره‌ی ۱ است. در هر نوبت، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به یکی از t نفر بعدی‌اش (در ترتیب ساعت‌گرد) می‌دهد. تیمی که بعد از n نوبت، توپ در دست یکی از اعضای آن باشد، برنده می‌شود. می‌گوییم به ازای مقادیر مشخص k، t و n، یک تیم «استراتژی بُرد» دارد، اگر اعضای آن بتوانند در برابر هر شیوه‌ای از بازی تیم مقابل، طوری بازی کنند که حتماً برنده‌ی بازی شوند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ اگر $k = ۲$ و $t = ۲$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعضای $\{۵, ۶, ۱۰, ۱۵\}$، تیم اول استراتژی برد دارد؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

۱۸ اگر $k = ۱۰$ و $t = ۲$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعداد ۱ تا ۳۰، تیم اول استراتژی برد دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰ ۵) ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

گرافی با ۱۴۰۱ رأس و ۱۴۰۱ یال داریم که رأس‌های آن با اعداد ۱ تا ۱۴۰۱ شماره‌گذاری شده‌اند. به ازای هر i ($1 \leqslant i \leqslant 1400$)، رأس‌های i و $i+1$ با یک یال به هم متصل هستند. رأس‌های با شماره‌های ۱ و ۱۴۰۱ نیز با یک یال به هم متصل هستند. به مجموعه‌ای از رأس‌ها مستقل گوییم اگر هیچ یالی بین رأس‌های آن وجود نداشته باشد. به مجموعه‌ی مستقل با بیش‌ترین اندازه، بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گفته می‌شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل یکی کم‌تر شود؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۵　　۴) ۴　　۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

□

۲۰ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل دو تا کم‌تر شود؟

۱) ۷　　۲) ۶　　۳) ۵　　۴) ۴　　۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

در صورت لزوم از این
صفحه به عنوان چرک
نویس استفاده کنید

مطالب این صفحه
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

سی و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم – ۱۴۰۰/۰۳/۲۳

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

سوال اول. جدول بازی .... ۲۴ نمره

امید و دخترش فرناز بازی زیر را در یک جدول $n \times n$ انجام می‌دهند:

امید بازی را شروع می‌کند. هر کس در هر نوبت خود در طول بازی، یکی از خطوط جدول (یکی از $n + ۱$ خط عمودی یا یکی از $n + ۱$ خط افقی) را به طور کامل پاک می‌کند. در ابتدای بازی، همه‌ی $n^۲$ خانه‌ی ۱×۱ جدول *سالم* هستند، اما پس از هر نوبت ممکن است تعدادی از خانه‌های سالم به دلیل پاک شدن یکی از ضلع‌هایشان *خراب* شوند (واضح است خانه‌ای که خراب شده است تا انتها خراب باقی می‌ماند). وضعیت جدول را *ویران* می‌نامیم، اگر تمام $n^۲$ خانه‌ی ۱×۱ از جدول اولیه خراب شده باشند. به محض این که جدول ویران شود، بازی به پایان می‌رسد.

می‌گوییم یک بازی‌کن *استراتژی برد* دارد اگر بتواند به نحوی بازی کند که مستقل از حرکات نفر مقابل همیشه برنده‌ی بازی باشد.

الف) در این بخش، کسی که آخرین حرکت بازی را انجام دهد بازنده‌ی بازی می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟ (۱۰ نمره)

ب) در این بخش، کسی که آخرین حرکت بازی را انجام دهد برنده‌ی بازی می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟ (۱۴ نمره)

سی و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۴۰۰/۰۳/۲۳

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم – ۱۴۰۰/۰۳/۲۳

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال دوم. بینش ابوالفضل مظفری .... ۲۴ نمره

یک گراف کامل ۱۴۰۰ رأسی داریم که رأس‌های آن با شماره‌های ۱ تا ۱۴۰۰ شماره‌گذاری شده‌اند. ابوالفضل هر یال آن را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی می‌کند (ممکن است تمام یال‌ها با یک رنگ، رنگ‌آمیزی شوند). مظفر می‌داند که گراف ابوالفضل یک گراف کامل ۱۴۰۰ رأسی است که یال‌های آن با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ‌آمیزی شده‌اند، اما از رنگ هر یال آن اطلاعی ندارد و می‌خواهد رنگ یال‌های گراف او را بفهمد. برای این کار، مظفر در هر مرحله یک دور از گراف را (با گفتن شماره‌ی رأس‌های دور به ترتیب) مشخص می‌کند و ابوالفضل تعداد یال‌های قرمز آن دور را به مظفر می‌گوید.

الف) مظفر ادعا می‌کند پس از آن که تعداد یال‌های قرمز در هر یک از دورهای ۱۴۰۰ رأسی را از ابوالفضل بپرسد، می‌تواند رنگ یال‌های گراف ابوالفضل را در هر شکلی از رنگ‌آمیزی بفهمد. نشان دهید ادعای مظفر اشتباه است. (۱۰ نمره)

ب) به مظفر نشان دهید اگر دست از لج‌بازی بردارد و علاوه بر دورهای ۱۴۰۰ رأسی، تعداد یال‌های قرمز در هر یک از دورهای ۱۳۹۹ رأسی را هم بپرسد، آن‌گاه می‌تواند رنگ یال‌های گراف ابوالفضل را در هر شکلی از رنگ‌آمیزی بفهمد. (۱۴ نمره)

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۴۰۰/۰۳/۲۳

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

سوال سوم. رأس نباید درجه یک باشد .... ۲۴ نمره

گراف ساده و n رأسی G را با این شرط در نظر بگیرید که دور همیلتونی (دور به طول n) دارد و T یک زیردرخت فراگیر آن است (یعنی زیرگرافی n رأسی که درخت باشد). $F(G,T)$ را کمینه‌ی تعداد یال‌هایی از G در نظر بگیرید که باید به درخت T اضافه کنیم تا درجه‌ی هر رأس آن حداقل ۲ شود.

مقدار $p(n)$ را برابر بیشینه‌ی مقدار $F(G,T)$ به ازای همه‌ی گراف‌های n رأسی G (با شرایط گفته شده) و همه‌ی زیردرخت‌های فراگیر T از G تعریف می‌کنیم. مقدار $p(n)$ به ازای $n \geq ۳$ چند است؟

توضیح: برای پاسخ لازم است ابتدا مقدار مورد نظر خود را بر حسب n بیان کنید (۲ نمره)، سپس به ازای هر n مثالی بزنید که مقدار بیشینه را داشته باشد (۸ نمره) و نهایتاً نشان دهید $F(G,T)$ برای هر گراف n رأسی G (با شرایط گفته شده) و هر زیردرخت فراگیر T از G از مقدار $p(n)$ مورد نظر شما بیش‌تر نمی‌شود. (۱۴ نمره).

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۴۰۰/۰۳/۲۳

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال چهارم. جبارزید و استاد سحرآمیز .... ۲۸ نمره

۱۴۰۰ نفر از سه کشور مختلف داریم. هدف جبارزید یافتن سه نفر از این افراد است که از سه کشور متمایز باشند. جبارزید تعداد افراد هر کشور را نمی‌داند و فقط می‌داند که این ۱۴۰۰ نفر، از سه کشور مختلف هستند و از هر کشور حداقل یک نفر وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند تعدادی از این افراد را انتخاب کند و به استاد نشان دهد تا استاد در جواب، عددی بین یک تا سه بگوید که مشخص می‌کند این افراد از چند کشور مختلف هستند. جبارزید می‌خواهد با کم‌ترین تعداد مرحله به هدف خود برسد.

الف) ثابت کنید جبارزید می‌تواند این کار را در حداکثر ۲۳ مرحله (یا حتی کم‌تر!) انجام دهد. (۱۴ نمره)

ب) ثابت کنید جبارزید نمی‌تواند در کم‌تر از ۱۲ مرحله به هدف خود برسد. (۱۴ نمره)

توضیح برای بخش ب: اگر ثابت کنید جبارزید در کم‌تر از ۱۱ مرحله نمی‌تواند این کار را انجام دهد ۸ نمره از ۱۴ نمره‌ی بخش را می‌گیرید و اگر ثابت کنید در کم‌تر از ۱۰ مرحله نمی‌تواند این کار را انجام دهد ۶ نمره از بخش را دریافت می‌کنید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۹ تا ۱۸ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

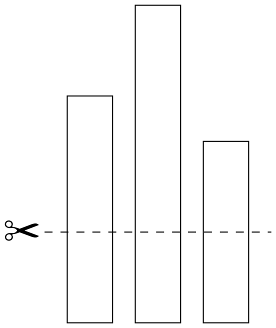
۱ آقای دایی از این که داور بازیکن تیم او را با نام اشتباهی خطاب کرده، ناراحت است و قصد دارد در نشست خبری بعد از بازی به این موضوع اعتراض کند. به همین منظور، او قالبی را برای متن خودش آماده کرده است که در این نشست آن را با انتخاب حروف الفبای مناسب ایراد خواهد کرد:

«محمدی» نامی کجای تیم من وجود داره؟
«عباس بوعذار» کجاش شبیه «محمدی» هست؟
از بین حروف «محمدی»، «عباس بوعذار» نه x داره نه y داره نه z داره!
فقط **یه دونه!** w داره، که اونم «محمدی» نداره!

آقای دایی می‌خواهد متغیرهای x، y، z و w را با حروف الفبای فارسی جایگزین کند. او چند متن سخن‌رانی صحیح متمایز می‌تواند ایجاد کند؟
توجه کنید که او حرف تکراری انتخاب نخواهد کرد!

۱) ۹۶ ۲) ۴۸۰ ۳) ۱۶۸ ۴) ۲۴۰۱ ۵) ۸۴۰

۲ پارسا در جگرکی آبولف استخدام شده و مسئول برش زدن جگرهاست. هر جگر در ابتدا به صورت یک نوار مستطیلی است که طول یک ضلع آن یک سانتی‌متر و طول ضلع دیگر عددی طبیعی (بر حسب سانتی‌متر) است. در هر عمل برش، پارسا می‌تواند تعدادی جگر را انتخاب کرده، آن‌ها را به صورت عمودی، از طرف ضلع یک سانتی‌متری در یک سطح قرار داده و با یک برش افقی، همگی را از ارتفاعی دل‌خواه برش بزند. برای مثال اگر سه جگر ۵ × ۱، ۷ × ۱ و ۴ × ۱ داشته باشیم، با برشی از ارتفاع ۲ سانتی‌متر، مطابق شکل زیر چهار تکه‌ی ۲ × ۱، یک تکه‌ی ۳ × ۱ و یک تکه‌ی ۵ × ۱ ساخته خواهد شد:



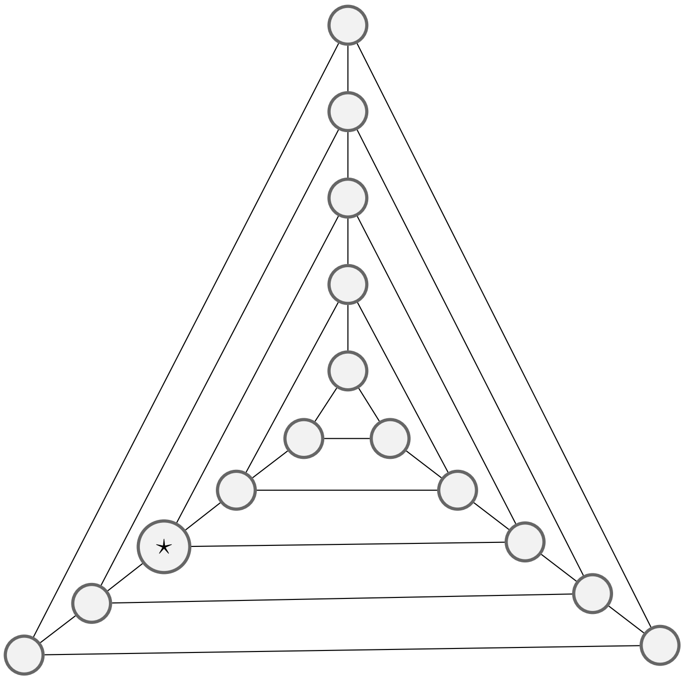
برش‌ها باید به نحوی باشند که اضلاع جگرها طبیعی باقی بمانند (بر حسب سانتی‌متر). مشتری‌های آبولف بسیار حساس هستند و دوست دارند جگرهای یک‌دست و هم‌اندازه‌ای تحویل بگیرند. فرض کنید پارسا در ابتدا پنج جگر با اندازه‌های ۹۱ × ۱، ۲۷۳ × ۱، ۴۲۹ × ۱، ۵۴۶ × ۱ و ۳۳۸ × ۱ داشته باشد. او حداقل به چند عمل برش نیاز دارد تا تمام تکه‌های جگر هم‌اندازه شوند (پارسا اجازه ندارد بخشی از جگرها را دور بریزد و باید همه‌ی آن‌ها را تحویل آشپز بدهد)؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۱۰

۳ می‌خواهیم یک جدول ۸×۲ را با استفاده از ۵ رنگ طوری رنگ‌آمیزی کنیم که مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در سطر اول با مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در سطر دومش برابر باشد. هم‌چنین می‌خواهیم به ازای هر i (برای $۱ \leqslant i < ۸$)، مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در i ستون نخست با مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در $۸ - i$ ستون دیگر برابر باشد. به چند روش می‌توان جدول را با این شرایط رنگ کرد؟

۱) ۸۱۹۲۰ ۲) ۶۵۵۳۵۵ ۳) ۱۶۱۳۰۵ ۴) ۸۰۶۵۵ ۵) ۱۶۳۸۴۵

۴ مدتی است تبلیغات انتخاباتی در کشور مثلث شروع شده است؛ دکتر مسلط با شعار «آینده‌ی مثلث، نیازمند تسلط»، در انتخابات ثبت نام کرده است و ستاد انتخاباتی او در حال برنامه‌ریزی برای سفر تبلیغاتی شهری‌اش می‌باشند. کشور مثلث شامل ۱۵ شهر است که شکل زیر اتصالات میان این شهرها را نشان می‌دهد. دکتر مسلط در شهر $\star$ زندگی می‌کند. او که قرار است از فردا سفرش را شروع کند، در ابتدای هر روز به یکی از شهرهای مجاورش می‌رود و در آن‌جا سخنرانی می‌کند. ستاد انتخاباتی او می‌خواهد مسیر حرکتی دکتر مسلط را طوری انتخاب کند که او در هر شهر فقط یک‌بار سخنرانی کند و آخرین سخنرانی‌اش در شهر $\star$ باشد. چند مسیر متفاوت وجود دارد که این ستاد انتخاباتی می‌تواند انتخاب کند؟



۱) ۷۲ ۲) ۲۴ ۳) ۸۱ ۴) ۲۷ ۵) ۱۸

۵ باب اسفنجی و پاتریک تصمیم گرفتند که پس از مدت‌ها، از مغزشان استفاده کنند. به همین دلیل از اختاپوس خواستند که یک بازی فکری به آن‌ها معرفی کند. اختاپوس یک جدول و یک مهره‌ی اسب شطرنج به آن دو داد و گفت:

«بازی من بر روی یک جدول ۴×۴ سفید رنگ انجام می‌شود. یک مهره نیز در این بازی وجود دارد که در هر زمان، در یکی از ۱۶ خانه‌ی جدول قرار می‌گیرد. زیر این مهره به رنگ سیاه آغشته است و در نتیجه، در هر خانه‌ای که قرار بگیرد، رنگ آن خانه سیاه می‌شود.

باب اسفنجی! ابتدا یک خانه از جدول را انتخاب کن و مهره را در آن بگذار(رنگ آن خانه پس از این کار سیاه

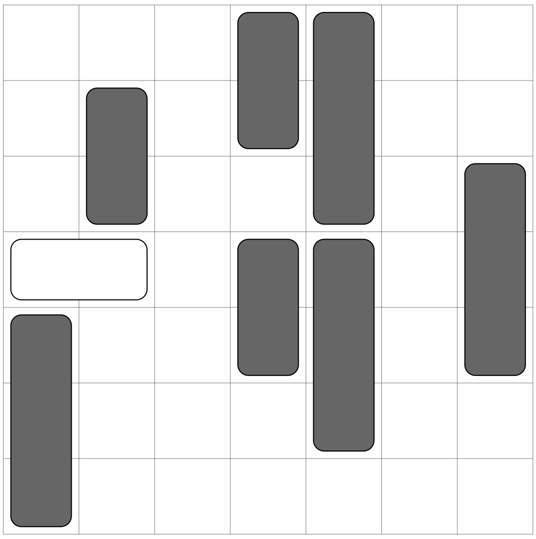
می‌شود). سپس بازی بین تو و پاتریک شروع می‌شود. پاتریک نفر اول است و پس از حرکت هر شخص، نوبت فرد دیگر می‌شود. هر کدام از شما در نوبت خود، حق دارید که مهره را مطابق حرکات اسب در شطرنج یک بار جابه‌جا کنید؛ اما تنها حق دارید مهره را به خانه‌ای سفید حرکت بدهید. رنگ خانه‌ی مقصد نیز پس از حرکت شما سیاه می‌شود. هر کس که نتواند مهره را حرکت دهد، بازی را می‌بازد.»
چند خانه از جدول هستند که اگر در ابتدای بازی، باب اسفنجی مهره را در یکی از آن‌ها قرار دهد، حتما می‌تواند پاتریک را شکست دهد؟
توضیح: حرکت مهره‌ی اسب در شطرنج به این صورت است که ابتدا دو خانه در جهت افقی یا عمودی جابه‌جا می‌شود و سپس ۹۰ درجه به چپ یا راست می‌پیچد و در نهایت یک خانه‌ی دیگر جلو می‌رود.

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۱۲ ۵) ۰

۶ اکبر آقا در هر یک از دو جیب شلوارش یک سکه‌ی ۲۰۰ تومانی و یک سکه‌ی ۵۰۰ تومانی دارد. او از هر کدام از جیب‌هایش یک سکه به صورت تصادفی درآورده و آن‌ها را پرتاپ می‌کند تا به احتمال برابر شیر یا خط بیایند. اگر بدانیم بین سکه‌های پرتاب شده سکه‌ی ۲۰۰ تومانی‌ای وجود دارد که شیر آمده باشد، چه‌قدر احتمال دارد که هر دو سکه شیر آمده باشند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$ ۵) $\frac{۱}{۳}$

۷ یک پارکینگ به شکل یک جدول ۷ × ۷ در نظر بگیرید که ماشین‌هایی به عرض ۱ و طول ۲ یا ۳ در آن پارک شده‌اند. هر خانه از جدول توسط حداکثر یک ماشین می‌تواند اشغال شده باشد. مانند شکل زیر، یک ماشین سفید به طول دقیقا ۲ به صورت افقی در انتهای چپ سطر چهارم قرار دارد و چند ماشین خاکستری نیز به صورت عمودی پارک شده‌اند. ماشین سفید فقط راست، و ماشین‌های خاکستری بالا یا پایین می‌توانند بروند (در صورتی که خانه‌ی مقصد خالی باشد). چند حالت قرار دادن ماشین‌های خاکستری (به هر تعداد دل‌خواه) وجود دارد که بتوان با تعدادی حرکت، ماشین سفید را به انتهای راست سطر چهارم رساند؟ باقیمانده جواب را بر ۱۰ پیدا کنید. در ضمن، ماشین‌های خاکستریِ هم‌طول هیچ تفاوتی با هم ندارند و نیز جلو و عقب ماشین‌ها هم با هم تفاوتی ندارد.



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۳

۸ بیماری کرونا به تازگی به شهر باب‌اسفنجی و دوستان رسیده است. آقای خرچنگ که صاحب یک رستوران است، حاضر نیست از درآمدش بگذرد و نمی‌خواهد رستورانش را تعطیل کند. اما سازمان بهداشت دریا به او این اجازه را

نداده است و رستورانش باید فقط به شکل بیرون‌بر فعالیت کند. رستوران آقای خرچنگ به شکل یک جدول ۷×۷ است و سه نفر در آن کار می‌کنند (آقای خرچنگ، اختاپوس و باب‌اسفنجی) که هر کدام در یک خانه‌ی متمایز از جدول قرار دارند. آقای خرچنگ که می‌ترسد یکی از کارکنان مریض شود و رستوران تعطیل گردد، می‌خواهد که کارکنان در ایمن‌ترین چینش ممکن رستوران کار کنند. مقدار ایمنی یک چینش مجموع فاصله‌ی **منهتنی** دوبه‌دوی کارکنان در آن چینش است. ایمن‌ترین چینش، بیشترین مقدار ممکن ایمنی را در بین تمام حالات چینش دارد. باب‌اسفنجی که عاشق چیدمان‌های جدید است، از شما می‌پرسد چند چینش ایمن‌ترین مختلف برای رستوران وجود دارد.

توضیح: فاصله‌ی منهتنی دو خانه، برابر است با مجموع قدر مطلق تفاضل طول‌ها و قدر مطلق تفاضل عرض‌های آن دو خانه.

۱) ۱۳۵۶ ۲) ۱۲۸۴ ۳) ۱۱۷۶ ۴) ۱۴۰۴ ۵) ۱۳۳۲

به تازگی امین وارد دنیای مین‌گذاری شده است. دنیای مین‌گذاری، یک بعدی و روی محور اعداد حقیقی است و هر مین، به صورت یک نقطه روی این محور قرار می‌گیرد. می‌دانیم که او در روز صفرم در دو نقطه‌ی ۰ و ۱ مین کاشته است. امین در هر روز، به ازای هر دو مین متوالی‌ای که در روزهای قبل در زمین کاشته است، به احتمال فاصله‌ی بین‌شان، مینی در میان‌شان می‌کارد. به بیانی دقیق‌تر، اگر a و b مکان کاشت دو مین متوالی در **انتهای** روز $i-۱$ ام باشند ($a<b$)، امین در روز i ام به احتمال $b-a$، در نقطه‌ی $\frac{a+b}{۲}$ مین می‌کارد. دقت کنید که مین‌هایی که امین در روزهای پیشین کاشته است از بین نمی‌روند و باقی می‌مانند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

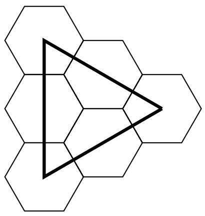
۹ امید ریاضی تعداد مین‌های کاشته شده از روز صفرم تا پایان روز ۱۲۸ام چه‌قدر است؟

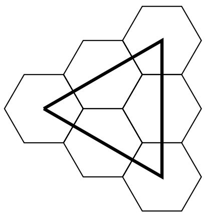
۱) ۱۲۸ ۲) ۶۶ ۳) ۱۳۰ ۴) ۶۴ ۵) ۹

۱۰ پس از گذشت ۷ روز، به چه احتمالی در نقطه‌ی $(۰/۱۱۰۱۰۰)_۲$ مین کاشته شده است؟ دقت کنید که عدد داده شده در مبنای ۲ نوشته شده است.

۱) $\frac{۳۸۵}{۲۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱۵}$ ۳) $\frac{۱۶۱}{۲۲۰}$ ۴) $\frac{۱۲۹}{۲۲۰}$ ۵) $\frac{۳۲۱}{۲۲۷}$

در کهکشان نمکستان سفینه‌های فضایی شکل خاصی دارند و از ۶ عدد شش‌ضلعی منتظم تشکیل شده‌اند که شکل آن را در پایین مشاهده می‌کنید.





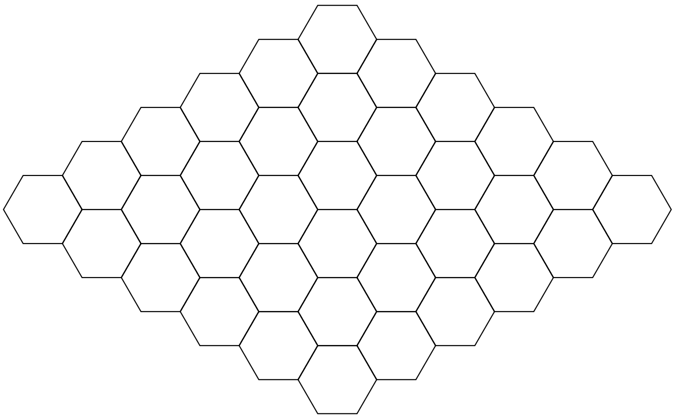
همچنین در نمکستان برای فرود این سفینه‌ها، به فرودگاه خاصی نیاز است که زمین آن از شش‌ضلعی های منتظم (با همان اندازه‌ی شش‌ضلعی‌های سفینه‌ها) تشکیل شده باشد. برای آن که یک سفینه بتواند در جایی از یک فرودگاه فرود بیاید، باید شش‌ضلعی‌های سفینه بر شش‌ضلعی‌های فرودگاه منطبق شود و همه‌ی شش‌ضلعی‌های فرودگاه که در زیر سفینه‌اند، سالم باشند.

«نمکیه» و «شکریه» دو سیاره در نمکستان هستند که به تازگی وارد جنگ با هم شده‌اند. نیروی هوایی سیاره‌ی

نمکیه با یک موشک نقطه‌زن می‌تواند یکی از شش‌ضلعی‌های فرودگاه سیاره‌ی شکریه را منهدم کند. هدف نیروی هوایی سیاره‌ی نمکیه این است که هیچ سفینه‌ای نتواند در فرودگاه فرود بیاید.

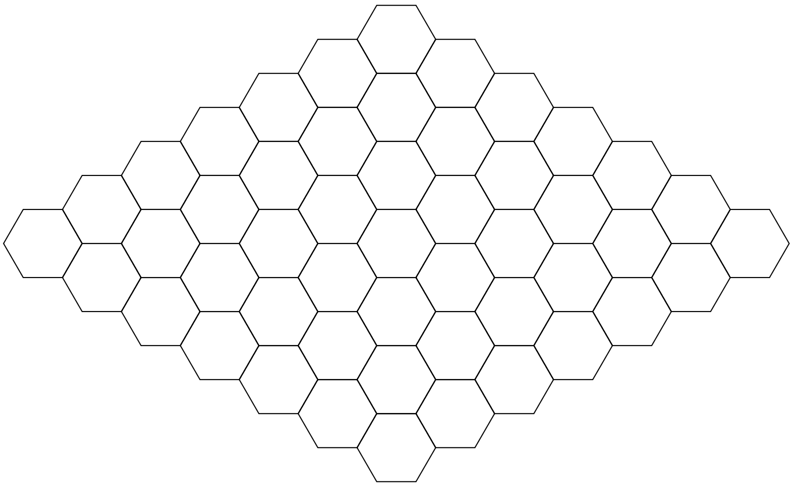
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ اگر تصویر زیر نشان‌دهنده‌ی فرودگاه سیاره‌ی شکریه باشد، نیروی هوایی نمکیه حداقل به چند موشک نیاز دارد؟



۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۷ ۵) ۵

۱۲ در یک عملیات ضربتی، نیروهای خدمت‌گزار سیاره‌ی شکریه از یک فرودگاه جدید و بزرگ‌تر مطابق شکل زیر پرده‌برداری کرده‌اند. مشابه سؤال قبلی، نیروی هوایی نمکیه حداقل به چند موشک نیاز دارد؟



۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸ ۵) ۷

الگوریتم زیر که Zip نام دارد، رشته‌ای دودویی (از ارقام ۰ و ۱) را به عنوان ورودی می‌گیرد و به صورت زیر اجرا می‌شود:

۱. S را مجموعه‌ای تهی در نظر بگیر و ورودی را در z بریز.

۲. اگر z یک‌رقمی است یا $z \in S$، آن را برگردان و به پایان برس.

۳. z را به S اضافه کن.
۴. دو رقم سمت راست z را در نظر بگیر؛ اگر این دو رقم برابر باشند، رقم سمت راست z را حذف کن؛ در غیر این صورت، رقم سمت راست z را حذف کن و آن را به سمت چپ z اضافه کن.
۵. به مرحله‌ی ۲ بازگرد.

برای مثال، اگر رشته‌ی ۱۱۱۰ را به عنوان ورودی به این الگوریتم بدهیم، مقدار z به این صورت تغییر می‌کند:

$$۱۱۱۰ \rightarrow ۰۱۱۱ \rightarrow ۰۱۱ \rightarrow ۰۱ \rightarrow ۱۰ \rightarrow ۰۱$$

و در نتیجه، مقدار $Zip(۱۱۱۰)$ برابر با ۰۱ می‌شود. دقت کنید که رقم سمت چپ رشته‌ی z می‌تواند صفر باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ به ازای همه‌ی رشته‌های دودویی یازده رقمی ممکن، این الگوریتم چند خروجی متفاوت را برمی‌گرداند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۲ ۴) ۵ ۵) ۲

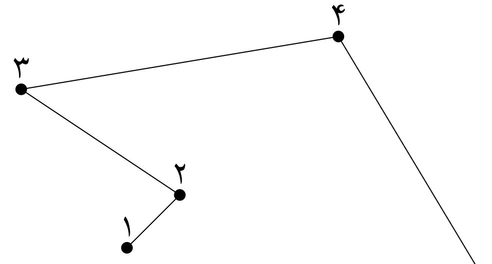
۱۴ بزرگ‌ترین مجموعه از رشته‌های دودویی یازده رقمی متمایز که خروجی الگوریتم برای همه‌ی اعضایش یکسان باشد، چه اندازه‌ای دارد؟

۱) ۳۳۰ ۲) ۲۵۲ ۳) ۵۰۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۴۶۲

فرض کنید n نقطه‌ی متمایز در صفحه داریم. عملیات **شکسته‌بندی** به صورت زیر انجام می‌شود:

> ابتدا نقاط با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری می‌شوند. سپس خطی شکسته کشیده می‌شود که به ازای هر i (برای $۱ \leqslant i \leqslant n - ۱$)، نقطه‌ی شماره‌ی i را به نقطه‌ی شماره‌ی $i + ۱$ متصل می‌کند.

برای مثال در شکل زیر، یک عملیات شکسته‌بندی روی پنج نقطه انجام شده است:



دو شکسته‌بندی متمایز هستند، اگر و تنها اگر شماره‌گذاری‌های متفاوتی داشته باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ ۹ نقطه‌ی متمایز در صفحه داریم که همگی روی یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان عملیات شکسته‌بندی را روی این نقاط انجام داد، طوری که خط شکسته‌ی ایجاد شده خودش را قطع نکند؟

۱) بسته به چینش نقاط، پاسخ متفاوت است. ۲) ۲۳۰۴ ۳) ۱۱۵۲ ۴) ۲۵۶ ۵) ۵۱۲

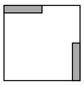
۱۶ ۹ نقطه در صفحه داریم که هیچ سه‌تا از آن‌ها هم‌خط نیستند. هم‌چنین، هیچ چهار نقطه‌ی متمایز A، B، C، و D از آن‌ها را نمی‌توان یافت که پاره‌خط‌های AB و CD موازی باشند. فرض کنید برای عملیات شکسته‌بندی، نقاط را به روش زیر شماره‌گذاری کنیم:

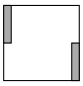
> ابتدا یک محور مختصات دو بُعدی را در جهتی (زاویه‌ای) دل‌خواه تعیین می‌کنیم، با این شرط که مقدار طول (x) هیچ دو نقطه‌ای برابر نباشد. سپس نقاط را طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که هر نقطه‌ی با طول (x) بیش‌تر، شماره‌ی بیش‌تری داشته باشد.

با این روش، چند شکسته‌بندی متمایز می‌توان انجام داد؟

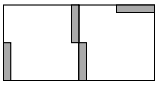
۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸ ۵) بسته به چینش نقاط، پاسخ متفاوت است.

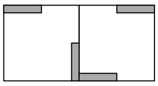
کاخ آبولف به شکل جدولی ۱۰ × ۱۰ است. در هر خانه از این جدول، دو دریچه وجود دارد که بر دو گوشه‌ی مقابل از آن خانه نصب شده‌اند. هر دریچه می‌تواند با چرخش ۹۰ درجه‌ای (حول گوشه‌ای که بر آن نصب شده)، از حالت افقی به عمودی یا برعکس، تغییر وضعیت بدهد. برای مثال در شکل زیر، با چرخش دریچه‌ای که به گوشه‌ی بالا چپ خانه‌ی جدول متصل است، می‌توانیم از وضعیت سمت چپ به وضعیت سمت راست برسیم:

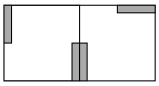




در صورتی که دو خانه‌ی مجاور (دارای ضلع مشترک) دو دریچه‌ی کاملا به هم چسبیده (و با نصب در گوشه‌ی یکسان) داشته باشند، یک فرد می‌تواند از یکی از این خانه‌ها به دیگری برود. برای مثال در شکل زیر، در حالت سمت چپ امکان جابه‌جایی بین دو خانه وجود دارد، اما در دو حالت دیگر خیر:

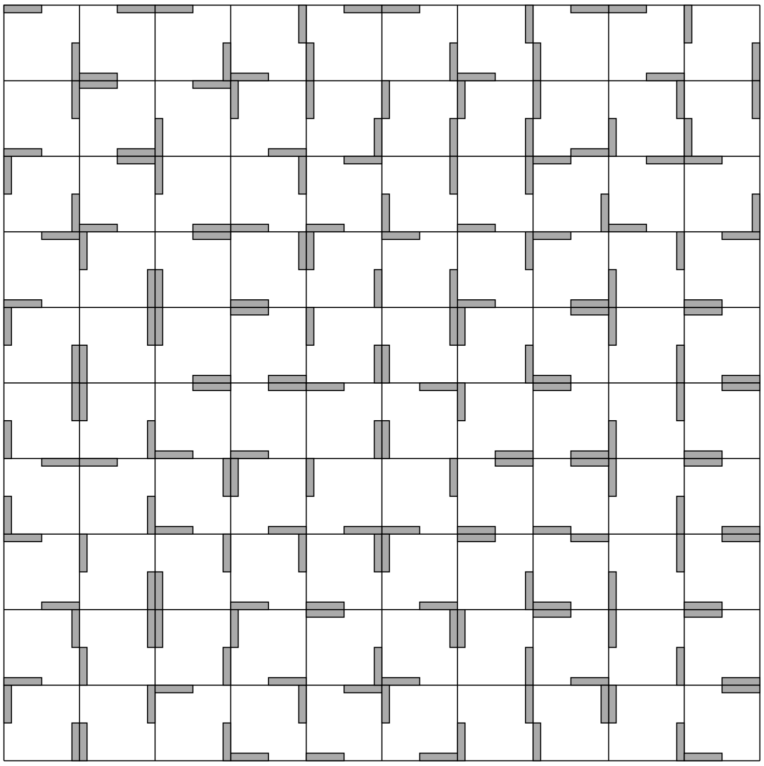






با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ در شکل زیر، آبولف در خانه‌ی پایین چپ جدول قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی بالا راست برود. او هر زمان که بخواهد، می‌تواند یکی از دریچه‌های یکی از خانه‌ها را انتخاب کند و به مأمور آن دریچه دستور دهد که آن را بچرخاند (لزومی ندارد دریچه‌ی انتخاب شده در خانه‌ی فعلی آبولف باشد). آبولف حداقل چند دستور باید بدهد تا بتواند به مقصد برسد؟



۱) ۱۹ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۷ ۵) ۲۰

۱۸ در بازسازی کاخ، آبولف می‌خواهد تمام دریچه‌ها را بردارد و برای خانه‌ها از نو دریچه بگذارد (همچنان برای هر خانه، باید دو دریچه در دو گوشه‌ی مقابل، هر یک به صورت افقی یا عمودی، قرار داده شود). او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد، طوری که از هر خانه بتوان با تعدادی گام به هر خانه‌ی دیگر رسید (می‌توان دریچه‌ها را حین پیمودن مسیر هم چرخاند)؟

۱) $۲^{۲۰۱}$ ۲) $۲^{۱۰۱}$ ۳) $۲^{۲۰۰}$ ۴) $۲^{۳۰۰}$ ۵) ۳×۲^{۳۰۰}

کلید اولیه آزمون مرحله دوم بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر

سؤال ۱) ۱ و ۳ (هر دو گزینه پذیرفته می‌شود.)

سؤال ۲) ۴

سؤال ۳) ۳

سؤال ۴) حذف

سؤال ۵) ۵

سؤال ۶) ۳

سؤال ۷) ۱

سؤال ۸) ۲

سؤال ۹) ۳

سؤال ۱۰) حذف

سؤال ۱۱) ۲

سؤال ۱۲) ۴

سؤال ۱۳) ۲

سؤال ۱۴) ۵

سؤال ۱۵) ۳

سؤال ۱۶) ۱

سؤال ۱۷) ۳

سؤال ۱۸) ۱

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه: **۱**

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

مرحله‌ی دوم سی‌امین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۰ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

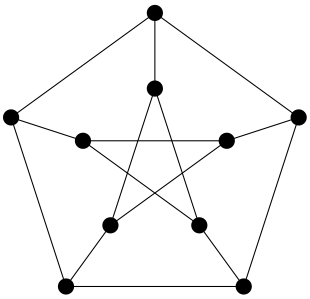
۱ فرض کنید a و b دو دنباله به طول n و از اعداد صحیح نامنفی باشند. منظور از $a+b$ دنباله‌ای به طول n است که عنصر iاُم آن حاصل‌جمع عنصرهای iاُم در a و b است ($۱ \leqslant i \leqslant n$). به زوج مرتب (a,b) **جایگشت ساز** می‌گوییم اگر و تنها اگر دنباله‌ی $a+b$ جایگشتی از اعداد ۱ تا n باشد. تعداد زوج مرتب‌های (a,b) جایگشت‌ساز به طول ۱۰ را بیابید که هر دو دنباله‌شان ناصعودی باشند. یک دنباله ناصعودی است اگر هر عضو از دنباله کوچک‌تر مساوی عضو پیشین باشد.

۱) ۵۸۷۸۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۱۱ ۵) ۵۶۳۲

۲ ناخدا و ۵ نفر از ملوانانش سر یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. هر کدام از افراد دور میز به احتمال $\frac{۱}{۲}$ کرونا دارند. پس از هر یک ساعت اگر فردی مریض باشد هر دو نفر کناریش را مریض می‌کند. چه قدر احتمال دارد پس از ۲ ساعت همه‌ی افرادی که دور میز نشسته‌اند مبتلا شده باشند؟

۱) $\frac{۵۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۶۳}{۶۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$ ۵) $\frac{۲۱}{۳۲}$

۳ پترسن می‌خواهد روی هر رأس از گراف زیر عددی صحیح و بزرگ‌تر از ۱ قرار دهد.



یک عددگذاری **پایدار** است اگر هر جفت رأس همسایه اعدادشان نسبت به هم اول باشند. پترسن می‌خواهد طوری عددگذاری کند که هم پایدار باشد و هم مجموع اعداد گذاشته شده کمینه باشد. مجموع اعدادی که روی گراف می‌نویسد چه‌قدر است؟

۱) ۳۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴ ۵) ۳۵

۴ جدولی $n \times n$ داریم که سطرهای آن از بالا به پایین و ستون‌های آن از چپ به راست با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. خانه‌ی واقع در سطر i و ستون j را با (i,j) نشان می‌دهیم. می‌خواهیم از خانه‌ی $(۱,۱)$ به خانه‌ی (n,n) برویم. حرکت‌های مجاز به صورت زیر هستند:

- حرکت از (i,j) به $(i+۱,j)$ با هزینه‌ی j.
- حرکت از (i,j) به $(i,j+۱)$ با هزینه‌ی i.

چند مسیر مجاز دارای کم‌ترین هزینه هستند؟

۱) $\binom{۲n}{n}$ ۲) ۲ ۳) n ۴) $\binom{۲n-۲}{n-۱}$ ۵) $\frac{۱}{۲}\binom{۲n}{n}$

۵ شنگدباو یک کوالای خوشحال دارد. او سه سکو دور یک دایره با فاصله‌های برابر قرار داده است که با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ در جهت ساعت‌گرد شماره‌گذاری شده‌اند. در ابتدا کوالا روی سکوی ۱ قرار دارد. این کوالای خوشحال در هر دقیقه به احتمال $\frac{۱}{۲}$ به سکوی بعدی در جهت ساعت‌گرد می‌پرد، به احتمال $\frac{۱}{۴}$ به سکوی بعدی در جهت پادساعت‌گرد می‌پرد و به احتمال $\frac{۱}{۴}$ سر جای خود می‌ماند. حالا شنگدباو با خود می‌اندیشد پس از ۱۳۹۹ دقیقه کوالا در کدام سکو به احتمال بیشتری می‌نشیند.

۱) احتمال نشستن در سکوهای ۱ و ۲ برابر است و از سکوی ۳ بیشتر است.
۲) احتمال نشستن روی سکوی ۱ از دو سکوی دیگر بیشتر است.
۳) احتمال نشستن در سکوهای ۱ و ۳ برابر است و از سکوی ۲ بیشتر است.
۴) احتمال نشستن روی سکوی ۳ از دو سکوی دیگر بیشتر است.
۵) احتمال نشستن روی سکوی ۲ از دو سکوی دیگر بیشتر است.

۶ علی از طرف عموی برنامه‌نویسش یک دستورالعمل «آرایه‌ساز» و یک آرایه‌ی ۸ خانه‌ای هدیه گرفته است. این دستورالعمل به صورت زیر کار می‌کند:

۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

۱. درون همه‌ی خانه‌های آرایه عدد ۰ را بنویس.
۲. مقدار i را برابر با ۰ قرار بده.
۳. مقدار i را $i + ۱$ قرار بده.
۴. i خانه‌ی متوالی در آرایه را به صورت تصادفی انتخاب کن. به اعداد درون همه‌ی این i خانه یک واحد اضافه کن.
۵. اگر i کوچکتر از ۸ است به مرحله‌ی ۳ بازگرد.
۶. پایان.

این دستورالعمل یک آرایه‌ی ۸ عضوی را به‌صورت تصادفی می‌سازد. از آن‌جا که علی این روزها به «جایگشت» علاقه‌مند شده است، فقط وقتی خوشحال می‌شود که دستورالعمل جایگشتی از اعداد ۱ تا ۸ خروجی بدهد. علی به چه احتمالی خوشحال می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲^۷}{۸!}$ ۳) $\frac{۲^۷}{۷!}$ ۴) $\frac{۲^۸}{۸!}$ ۵) $\frac{۱}{۸}$

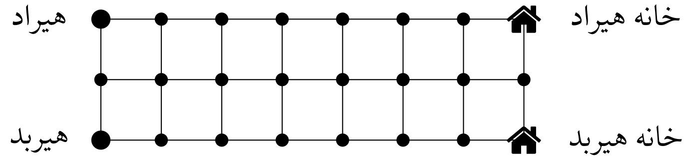
۷ هفته‌ی گذشته در سیسیل ایتالیا، جزیره‌ی خانواده‌های مافیایی، پسر دون کورلئونه به قتل رسید. دون کورلئونه همه‌ی پدرخوانده‌های خانواده‌های مافیایی را به یک جلسه‌ی اضطراری دعوت کرده است. از آن‌جایی که همه‌ی آن‌ها مشارکت در قتل را تکذیب کرده‌اند؛ دون کورلئونه یک آزمون برای شناسایی دروغ‌گوها از راست‌گوها طراحی کرده است. پس از آن که تمامی پدرخوانده‌ها دور میز n نفره نشستند، دون کورلئونه از هر فرد می‌خواهد روی کاغذی بنویسد که نفر سمت راست او دروغ‌گو است یا راست‌گو. از کنار هم قرار دادن نوشته‌های پدرخوانده‌ها (به ترتیب نشستن دور میز) یک دنباله‌ی nتایی ساخته می‌شود. به این دنباله **معتبر** می‌گوییم، اگر حداقل به یک روش بتوان راست‌گو یا دروغ‌گو بودن را به n نفر نسبت داد به طوری که:

- اگر فرد x راست‌گو است، دروغ‌گویی یا راست‌گویی نفر سمت راست او **همانند** اظهار نظر فرد x باشد.
- اگر فرد x دروغ‌گو است، دروغ‌گویی یا راست‌گویی نفر سمت راست او **مخالف** اظهار نظر فرد x باشد.

اگر دنباله معتبر نباشد دون کورلئونه از مافیای سیسیل ناامید شده و به زندگی همه پایان می‌دهد. چه تعدادی از دنباله‌ها معتبر هستند؟

۱) ۲^n ۲) n ۳) ۲ ۴) ۱ ۵) $۲^{n-۱}$

۸ هیربد و هیراد روی نقاط سمت چپ یک شبکه‌ی ۸ × ۳ ایستاده‌اند و خانه‌های آن‌ها در نقاط سمت راست جدول قرار دارد.



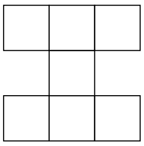
هر یک از آنها در هر گام می‌تواند به یکی از نقاط مجاور راستی، بالایی و یا پایینی‌اش (در صورت وجود) که قبلا از آن عبور نکرده، وارد شود.
این دو نفر قصد دارند به خانه‌هایشان بروند و متاسفانه امروز با هم قهر کرده‌اند؛ برای همین می‌خواهند طوری به خانه‌هایشان بروند که مسیرهای حرکتشان هیچ نقطه و یال مشترکی نداشته باشند. هیربد و هیراد به چند طریق می‌توانند مسیرهایشان را انتخاب کنند؟

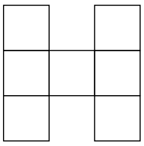
۱) ۷۲۹ ۲) ۱۳۹۳ ۳) ۱۷۱ ۴) ۵۷۷ ۵) ۲۳۹

۹ جزیره‌ی فلون که اکنون مسکونی شده است، ۱۰۰ شهر دارد که به شکل یک جدول ۱۰ × ۱۰ ساخته شده‌اند. در ابتدا شهر گوشه بالا راست جزیره به کرونا آلوده شده است. ابتدای هر روز، **تنها** یکی از شهرهای سالم که در مجاورت ضلعی حداقل یک شهر آلوده قرار گرفته است، به کرونا آلوده می‌شود. سپس دکتر ارنست یکی از شهرهای سالم را قرنطینه می‌کند و دیگر امکان ندارد آن شهر آلوده شود.
می‌دانیم شهرهای آلوده هیچ وقت به وضعیت سالم بر نمی‌گردند. دکتر ارنست با استفاده از دستگاه تشخیص کرونا از راه دور همواره می‌داند کدام شهرها آلوده هستند. هدف او کمینه کردن تعداد شهرهای آلوده است. اگر دکتر ارنست بهینه عمل کند، بیشینه‌ی تعداد شهرهای آلوده پس از گذشت ۱۰۰ روز از آغاز شیوع چه‌قدر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۶ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۱۱

یک جدول $n \times n$ که رنگ هر خانه‌ی آن سفید یا سیاه است را **قوی** می‌نامیم، اگر و تنها اگر هیچ یک از اشکال زیر در خانه‌های سفید جدول دیده نشود:





با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۰ کمینه‌ی تعداد خانه‌های سیاه را میان تمامی جدول‌های ۵ × ۵ قوی بیابید.

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵ ۵) ۱

۱۱ کمینه‌ی تعداد خانه‌های سیاه را میان تمامی جدول‌های ۷ × ۷ قوی بیابید.

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹ ۵) ۸

در فرودگاه شهری که شنگدباو در آن زندگی می‌کند یک هواپیمای مرموز وجود دارد. در بخش مسافران هواپیما، تنها یک ردیف ۱۰تایی صندلی با شماره‌های ۱ تا ۱۰ وجود دارد و هیچ صندلی دیگری نداریم!
این صندلی‌ها مانند صندلی‌های همه‌ی هواپیماهای دیگر هستند و ۱۱ دسته‌ی صندلی دارند که بین هر دو صندلی و هم‌چنین در دو انتهای ردیف قرار دارند. روی هر یک از ۱۱ دسته، شامل دو دسته‌ی انتهای ردیف، دو کمربند قرار دارد که یکی قفلی کمربند و دیگری قلاب آن است. هر فردی که روی یک صندلی نشسته، برای بستن کمربند خود باید قلاب یکی از دو دسته‌ی مجاورش را بردارد و به قفلی دسته‌ی دیگر ببندد.
همه‌ی اعضای شهر درگیر مسئله‌ی این ده صندلی شده‌اند و شنگدباو به‌عنوان یک دانشمند می‌خواهد به سوالات مردم شهر جواب دهد تا آن‌ها را آرام کند! اما ما می‌دانیم شنگدباو برای حل این معماها به کمک شما احتیاج دارد.
در تمامی سوالات، دو حالت بستن کمربندها را متمایز می‌دانیم اگر حداقل یک قفلی یا قلاب وجود داشته باشد که در یکی از حالات استفاده شده و در حالت دیگر استفاده نشده باشد. هم‌چنین، به حالتی که تمامی صندلی‌ها سرنشین دارند و تعدادی از افراد، طوری کمربندهای خود را بسته‌اند که **هیچ یک از افراد باقی‌مانده** نتوانند کمربند خود را ببندند، **حالت مزاحم** می‌گوییم. حالتی که تمامی افراد کمربندشان را بسته باشند، حالت مزاحم **نیست**.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۲ در چند حالت تمامی ۱۰ سرنشین کمربندشان را بسته‌اند؟

۱) ۲۰ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ ۵) ۲

۱۳ کمینه‌ی تعداد سرنشین‌ها با کمربند بسته میان تمامی حالات مزاحم چند است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۶ ۵) ۹

۱۴ چند حالت مزاحم وجود دارد؟

۱) ۲۹۶ ۲) ۵۴ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۰ ۵) ۱۰۸

لوک در یک جدول $n \times m$ به دنبال اسبش جالی می‌گردد. لوک تلاش می‌کند که اسبش را پیدا کند در حالی که جالی از دست او فرار می‌کند.
در هر مرحله، لوک k خانه از جدول را مشاهده می‌کند و اگر جالی داخل یکی از این خانه‌ها باشد جالی را پیدا می‌کند. در غیر این صورت، جالی یا سر جایش می‌ایستد یا یک حرکت انجام می‌دهد. از آن‌جایی که جالی یک اسب است، فقط می‌تواند مشابه اسب شطرنج حرکت کند. اسب شطرنج دو خانه در جهت افقی یا عمودی حرکت می‌کند و سپس ۹۰ درجه به چپ یا راست می‌پیچد و یک خانه‌ی دیگر حرکت می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ در یک جدول ۳ × ۳ کمینه‌ی k را بیابید به طوری که لوک حتما بتواند جالی را در متناهی مرحله پیدا کند.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۱

۱۶ در یک جدول ۴ × ۳ کمینه‌ی k را بیابید به طوری که لوک حتما بتواند جالی را در متناهی مرحله پیدا کند.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۲ ۵) ۸

در شهر یاخچی‌آباد، هر خانه به صورت یک نقطه است که یک خانواده در آن زندگی می‌کند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین خانه به هر خانه را **شعاع همسایگی** آن خانه می‌نامند. فاصله‌ی دو خانه برابر است با طول پاره‌خط واصل نقاط متناظرشان.

هر خانواده تمامی خانواده‌هایی را که در شعاع همسایگی‌اش باشند، **همسایه**‌ی خود می‌داند. دو خانواده **صمیمی** هستند اگر هر یک دیگری را همسایه‌ی خود بداند. تعداد جفت خانواده‌های صمیمی در یک محله **صمیمیت** آن محله محسوب می‌شود.

شهردار یاخچی‌آباد قصد دارد یک محله‌ی جدید با ۹۱ خانه تاسیس کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ شهردار که می‌داند صمیمیت زیاد افراد می‌تواند برای قدرت او تهدید به حساب آید، می‌خواهد صمیمیت این محله کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. این مقدار چه‌قدر است؟

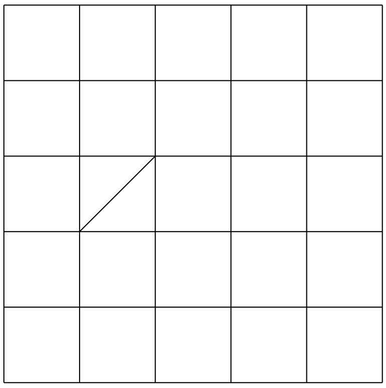
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۴۵ ۴) ۲ ۵) ۹۰

۱۸ معاون شهردار در راستای راهبرد و برنامه‌ی سیاسی خویش، می‌خواهد نقشه‌ای پیشنهاد بدهد که صمیمیت این محله بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. اگر این مقدار x باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- $x \geqslant$ ۸۰
- $x \geqslant$ ۱۶۰
- $x \geqslant$ ۲۴۰
- $x \geqslant$ ۳۲۰

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۲ ۵) ۳

یک جدول ۵ × ۵ داریم. به یک قطر از یک مربع واحد این جدول، **قطرک** می‌گوییم. برای مثال، یک قطرک در شکل زیر نشان داده شده است:



دو نقطه‌ی انتهایی هر قطرک، **مرزهای** آن قطرک نامیده می‌شوند. اگر یک نقطه مرز چهار قطرک رسم‌شده باشد، **اشباع** نامیده می‌شود (نقاط محیطی جدول هیچ‌گاه اشباع نمی‌شوند).

در هر یک از سوال‌های این دسته قرار است تعدادی قطرک رسم شود (ممکن است قطرک‌ها هم‌دیگر را قطع کنند).

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ حداکثر چند قطرک می‌توان در جدول رسم کرد، طوری که هیچ نقطه‌ای اشباع نباشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۶ ۴) ۴۲ ۵) ۳۴

۲۰ سلطان و ایلیچ یک جدول ۵ × ۵ خالی دارند و می‌خواهند بازی کنند. سلطان بازی را آغاز می‌کند. هر فرد در نوبتش یک قطرک (که تا به‌حال کشیده نشده) رسم می‌کند. نخستین کسی که پس از حرکتش نقطه‌ی اشباع به وجود بیاید، می‌بازد. **فان‌دی‌پلنر** (دوست ایلیچ) سه الگوریتم برای بازی کردن به ایلیچ پیشنهاد داده است.

- الگوریتم (آ): فرض کنید سلطان در نوبتش در خانه‌ای مانند A یک قطرک رسم کند. بلافاصله پس از آن، قطرک دیگر خانه‌ی A را رسم کن.
- الگوریتم (ب): هر قطرکی که سلطان کشید، آن را نسبت به «خط عمودی گذرنده از نقطه‌ی وسط جدول» قرینه کرده و قطرک متناظر را رسم کن.
- الگوریتم (پ): اگر سلطان قطرکی در خانه‌ی وسط جدول رسم کرد، قطرک باقی‌مانده در خانه‌ی وسط جدول را رسم کن؛ در غیر این صورت قطرک سلطان را نسبت به «نقطه‌ی وسط جدول» قرینه کرده و قطرک متناظر را رسم کن.

کدام الگوریتم‌ها (مستقل از نحوه‌ی بازی سلطان) باعث برد ایلیچ می‌شوند؟

۱) ب و پ ۲) هر سه مورد ۳) آ و ب ۴) ب ۵) هیچ‌کدام

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

سی امین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۹/۰۴/۲۳

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

- **ضدعفونی زمین (۲۰ نمره)**

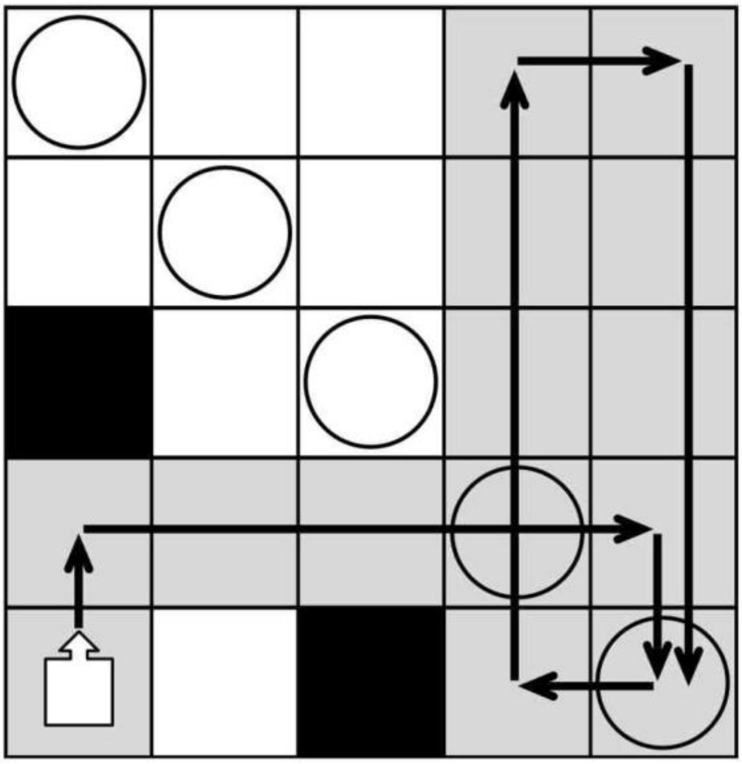
زاریچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، یک ربات برای ضدعفونی کردن زمین اتاق ساخته است. زمین اتاقی که ربات در آن قرار دارد از بالا به صورت جدولی مربع‌شکل دیده می‌شود. ربات در ابتدا روی خانه‌ی گوشه‌ی پایین-چپ جدول قرار دارد. در برخی خانه‌های جدول وسایل قرار دارد و آن خانه‌ها مسدود است. ربات ابتدا رو به بالای جدول قرار دارد و همواره به‌صورت زیر حرکت می‌کند:

- اگر ربات مقابل دیوار قرار نداشت و خانه‌ی مقابل ربات مسدود نبود، ربات یک خانه به جلو حرکت می‌کند.
- در غیر این صورت، ربات ۹۰ درجه در جهت ساعت‌گرد می‌چرخد.

این ربات در حین حرکت، روی هر خانه‌ای از جدول که برود، آن را ضدعفونی می‌کند. هدف زاریچ آن است که همه‌ی خانه‌های **قطر اصلی جدول** حداقل یک بار توسط ربات پیموده و ضدعفونی شوند. قطر اصلی مجموعه‌ای از خانه‌های جدول است که از خانه‌ی بالا-چپ جدول شروع می‌شود و تا خانه‌ی پایین-راست جدول ادامه می‌یابد.

امکان دست‌یابی به هدف زاریچ به این بستگی دارد که چه خانه‌هایی از جدول مسدود باشند. اگر در یک جدول، ربات (با شروع از خانه‌ی پایین-چپ و جهت اولیه‌ی رو به بالا، و حرکت طبق قواعد گفته شده) همه‌ی خانه‌های قطر اصلی را حداقل یک بار ضدعفونی کند، آن جدول را **مطلوب** می‌نامیم. بالطبع، هیچ یک از خانه‌های قطر اصلی و یا خانه‌ی شروع ربات در یک جدول مطلوب مسدود نیست.

مثلا در شکل زیر، یک نمونه از جدول ۵ × ۵ را می‌بینیم که مطلوب نیست. در این جدول، خانه‌های قطر اصلی با دایره، خانه‌های مسدود با رنگ سیاه، و خانه‌های ضدعفونی‌شده با رنگ خاکستری مشخص شده‌اند. همان‌طور که مشخص است، در این جدول ربات تنها ۲ خانه از ۵ خانه‌ی قطر اصلی را ضدعفونی می‌کند.



سی امین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۹/۰۴/۲۳

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

الف) یک نمونه جدول مطلوب ۵ × ۵ بکشید. (۵ نمره)

ب) آیا جدول مطلوب ۱۳۹۹ × ۱۳۹۹ داریم؟ در صورت وجود، آن را توصیف کنید، و در غیر این صورت، ثابت کنید که وجود ندارد. (۱۵ نمره)

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی امین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۹/۰۴/۲۳

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

- **فاصله‌گذاری اجتماعی (۲۰ نمره)**

زاریچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، اکنون درگیر یک بازی با ویروس کرونا شده است.
بازی روی یک جدول با n سطر و n ستون انجام می‌شود که در ابتدا خالی است. در طول بازی قرار است افرادی روی خانه‌های این جدول قرار بگیرند. با توجه به بحث فاصله‌گذاری اجتماعی، یک خانه‌ی جدول را **ایمن** می‌دانیم اگر در هیچ یک از خانه‌های مجاور ضلعی آن کسی قرار نگرفته باشد. در هر مرحله از بازی، ویروس کرونا یک قطر پراکنده از جدول را انتخاب می‌کند که همه‌ی خانه‌های آن خالی باشند (به مجموعه‌ای از n خانه‌ی جدول **قطر پراکنده** گفته می‌شود اگر هیچ دو خانه‌ای از آن هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند). سپس زاریچ یک خانه‌ی ایمن از این قطر پراکنده را انتخاب می‌کند و یک نفر را روی آن خانه قرار می‌دهد. اگر ویروس کرونا در نوبتش نتواند یک قطر پراکنده‌ی کاملا خالی پیدا کند می‌بازد. هم‌چنین اگر زاریچ در نوبت خود نتواند از بین خانه‌های قطر پراکنده‌ی پیشنهادی ویروس خانه‌ای ایمن پیدا کند، می‌بازد. اگر هر دو به بهترین نحو بازی کنند، زاریچ به ازای چه n هایی برنده‌ی بازی خواهد بود؟

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۲ **از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد**

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی امین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۹/۰۴/۲۳

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

- **ضدعفونی درخت (۲۰ نمره)**

زاریچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، عقیده دارد که برای شکست واقعی این ویروس لازم است درخت‌ها نیز ضدعفونی شوند (حتی اگر مفاهیمی ریاضی باشند).

یک درخت n رأسی در نظر بگیرید که رأس‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n شماره‌گذاری شده باشند. میزان **آلودگی** هر یال برابر تفاضل شماره‌های رأس‌های دو سرش است. مثلا یالی که دو رأس با شماره‌های ۳ و ۵ را به یکدیگر وصل می‌کند دارای آلودگی ۲ است. میزان **آلودگی** یک درخت برابر مجموع آلودگی یال‌هایش است.

زاریچ باید خود را برای پاک‌سازی هر نوع درختی آماده کند. لذا می‌خواهد بداند بیشینه‌ی آلودگی برای یک درخت n رأسی (با رأس‌های شماره‌گذاری شده از ۱ تا n) چه‌قدر است. این مقدار بیشینه را بیابید.

دقت کنید که ابتدا باید این مقدار را به ازای هر n به دست آورید و یک درخت n رأسی با بیشینه‌ی آلودگی را توصیف کنید، سپس اثبات کنید که درختی n رأسی با آلودگی بیشتر از آن وجود ندارد.

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۳

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

سی امین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۹/۰۴/۲۳

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

- **بخش‌بندی گراف (۲۰ نمره)**

زاریچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، از روی نقشه‌ی شهرهای آلوده یک گراف ساده‌ی ۳۰ رأسی ساخته است. او می‌خواهد رأس‌های این گراف را به تعدادی بخش افراز کند، طوری که بین رأس‌های درون هر بخش هیچ یالی وجود نداشته باشد (هر بخش یک مجموعه‌ی مستقل باشد). او پس از بررسی‌های فراوان فهمیده است که می‌تواند رأس‌های گراف را به ۱۰ بخش با شرایط بالا تقسیم کند، اما امکان انجام این کار برای ۹ بخش وجود ندارد.

الف) ثابت کنید گراف زاریچ دوری با حداکثر ۸ رأس دارد. (۱۰ نمره)
ب) ثابت کنید گراف زاریچ دوری با حداکثر ۵ رأس دارد. (۱۰ نمره؛ با حل این بخش، نمره‌ی بخش الف را نیز دریافت می‌کنید.)

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

لطفا در این کادر چیزی ننویسید.

کلید سؤالات دفترچه کد ۱
آزمون مهندسی [illegible] کامپیوتر روز اول
سال تحصیلی ۱۳۹۸-۹۹

مطابق توضیحات دفترچه تکمیل شود.

کد دفترچه ② ●

لطفا گزینه را به صورت کامل و فقط با مداد مشکی نرم پر کنید. صحیح ● غلط ✓ ● ☒ ☒ ●

۱ ① ② ● ④ ⑤
۲ ● ② ③ ④ ⑤
۳ ① ② ● ④ ⑤
۴ ① ② ③ ● ⑤
۵ ① ② ③ ④ ●
۶ ① ● ③ ④ ⑤
۷ ① ② ③ ④ ●
۸ ① ② ③ ● ⑤
۹ ① ② ● ④ ⑤
۱۰ ● ② ③ ④ ⑤
۱۱ ① ② ③ ④ ●
۱۲ ① ② ③ ④ ●
۱۳ ① ② ③ ● ⑤
۱۴ ① ② ③ ④ ●
۱۵ ● ② ③ ④ ⑤
۱۶ ① ● ③ ④ ⑤
۱۷ ① ● ③ ④ ⑤
۱۸ ① ② ③ ④ ●
۱۹ ① ② ③ ● ⑤
۲۰ ① ② ③ ● ⑤
۲۱ ① ② ③ ④ ⑤
۲۲ ① ② ③ ④ ⑤
۲۳ ① ② ③ ④ ⑤
۲۴ ① ② ③ ④ ⑤
۲۵ ① ② ③ ④ ⑤
۲۶ ① ② ③ ④ ⑤
۲۷ ① ② ③ ④ ⑤
۲۸ ① ② ③ ④ ⑤
۲۹ ① ② ③ ④ ⑤
۳۰ ① ② ③ ④ ⑤
۳۱ ① ② ③ ④ ⑤
۳۲ ① ② ③ ④ ⑤
۳۳ ① ② ③ ④ ⑤
۳۴ ① ② ③ ④ ⑤
۳۵ ① ② ③ ④ ⑤
۳۶ ① ② ③ ④ ⑤
۳۷ ① ② ③ ④ ⑤
۳۸ ① ② ③ ④ ⑤
۳۹ ① ② ③ ④ ⑤
۴۰ ① ② ③ ④ ⑤
۴۱ ① ② ③ ④ ⑤
۴۲ ① ② ③ ④ ⑤
۴۳ ① ② ③ ④ ⑤
۴۴ ① ② ③ ④ ⑤
۴۵ ① ② ③ ④ ⑤
۴۶ ① ② ③ ④ ⑤
۴۷ ① ② ③ ④ ⑤
۴۸ ① ② ③ ④ ⑤
۴۹ ① ② ③ ④ ⑤
۵۰ ① ② ③ ④ ⑤
۵۱ ① ② ③ ④ ⑤
۵۲ ① ② ③ ④ ⑤
۵۳ ① ② ③ ④ ⑤
۵۴ ① ② ③ ④ ⑤
۵۵ ① ② ③ ④ ⑤
۵۶ ① ② ③ ④ ⑤
۵۷ ① ② ③ ④ ⑤
۵۸ ① ② ③ ④ ⑤
۵۹ ① ② ③ ④ ⑤
۶۰ ① ② ③ ④ ⑤
۶۱ ① ② ③ ④ ⑤
۶۲ ① ② ③ ④ ⑤
۶۳ ① ② ③ ④ ⑤
۶۴ ① ② ③ ④ ⑤
۶۵ ① ② ③ ④ ⑤
۶۶ ① ② ③ ④ ⑤
۶۷ ① ② ③ ④ ⑤
۶۸ ① ② ③ ④ ⑤
۶۹ ① ② ③ ④ ⑤
۷۰ ① ② ③ ④ ⑤
۷۱ ① ② ③ ④ ⑤
۷۲ ① ② ③ ④ ⑤
۷۳ ① ② ③ ④ ⑤
۷۴ ① ② ③ ④ ⑤
۷۵ ① ② ③ ④ ⑤
۷۶ ① ② ③ ④ ⑤
۷۷ ① ② ③ ④ ⑤
۷۸ ① ② ③ ④ ⑤
۷۹ ① ② ③ ④ ⑤
۸۰ ① ② ③ ④ ⑤

محل امضاء

اینجانب [illegible] فر[redacted]

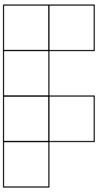
مطابقت اطلاعات مندرج در پاسخ برگ را با مشخصات خود تایید می نمایم.

مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارایه شده است.

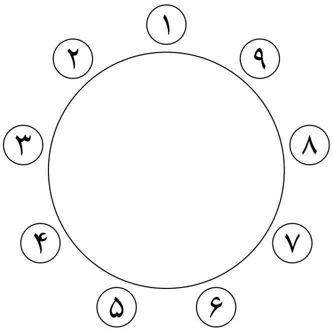
---

۱ یک جدول ۱۲ × ۴ داریم. حداقل چند خانه‌ی آن را باید مسدود کنیم تا نتوان در خانه‌های باقی‌مانده حتی یک کاشی به شکل زیر (یا دوران‌ها و قرینه‌های آن) قرار داد؟



۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸ ۵) ۱۶

۲ ۹ نفر با شماره های ۱ تا ۹ دور یک دایره نشسته‌اند:



به ازای هر نفر، دو نفری که بیش‌ترین فاصله را از او دارند، **دوستان** او گوییم. برای مثال دوستان فرد شماره ۱، افراد شماره ۵ و ۶ هستند. در ابتدا توپی در اختیار نفر شماره ۱ است. در هر مرحله، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به سمت یکی از دوستانش پرتاب می‌کند و دوست مورد نظر آن را می‌گیرد. به چند طریق می‌توان توپ را پس از دقیقاً ۱۴ مرحله به فرد شماره ۴ رساند؟ تا قبل از مرحله‌ی ۱۴ نیز توپ می‌تواند به نفر شماره ۴ برسد، اما مهم این است که پس از مرحله‌ی ۱۴اُم توپ در اختیار نفر شماره ۴ باشد.

۱) ۱۴ ۲) ۲۲۳ ۳) ۱۰۰۱ ۴) ۱۳۶۵ ۵) ۱۰۱۵

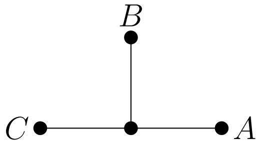
۳ پنج سیب یکسان و پنج پرتقال یکسان در یک سبد داریم. در هر مرحله، می‌توانیم یکی از سه کار زیر را انجام دهیم:

- یک سیب از سبد برداریم و بخوریم.
- یک پرتقال از سبد برداریم و بخوریم.
- یک سیب و یک پرتقال از سبد برداریم و بخوریم.

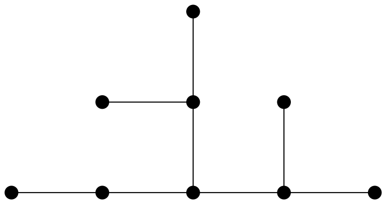
به چند طریق می‌توانیم کل میوه‌ها را بخوریم، طوری که به جز ابتدا و انتهای کار، در هیچ لحظه‌ای تعداد سیب و پرتقال‌های سبد برابر نباشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۶۸ ۴) ۴۷۲ ۵) ۸۴

۴ یک بوته در مبدأ صفحه‌ی مختصات کاشته شده است. به نقاط با مختصات صحیح صفحه، نقاط **شبکه‌ای** گوییم. در هر ثانیه از هر نقطه‌ی شبکه‌ای بوته که رشدی از آن صورت نگرفته، سه شاخه به طول واحد در جهت‌های راست، بالا و چپ شروع به رشد می‌کنند. در صورتی که در آن جهت شاخه‌ای از قبل موجود باشد، شاخه‌ی جدیدی رشد نمی‌کند. هم‌چنین اگر دو شاخه‌ی در حال رشد به یک نقطه برسند، یکی از آن‌ها به طور تصادفی می‌شکند. اگر هم شاخه‌ی در حال رشد به نقطه‌ای برسد که قبلاً در آن نقطه شاخه‌ای وجود داشته، می‌شکند. برای مثال پس از یک ثانیه بوته به شکل زیر در می‌آید:



در ثانیه‌ی دوم از هر کدام از نقاط شبکه‌ای جدید (A، B و C)، شاخه‌ها شروع به رشد می‌کنند. با توجه به این که شاخه‌ی سمت چپ A و شاخه‌ی سمت راست C از قبل موجود است، این دو شاخه رشد نخواهند کرد. هم‌چنین شاخه‌ی بالای A و شاخه‌ی سمت راست B به یک نقطه می‌رسند، پس یکی از آن‌ها باید به تصادف بشکند (همین امر برای شاخه‌ی بالای C و شاخه‌ی چپ B صادق است). برای مثال یکی از حالات بوته پس از ثانیه‌ی دوم در شکل زیر قابل مشاهده است:



پس از ۴ ثانیه، شکل بوته چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳۲۷۶۸ ۲) ۱۲۸ ۳) ۴۰۹۶ ۴) ۳۶ ۵) $\binom{۱۲}{۶}$

۵ شایان، بهنود و سینا به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف با سه صندلی نشسته‌اند و می‌خواهند بازی کنند. قرار است این افراد سه بار از صندلی‌ها بلند شده و به ترتیبی دیگر بنشینند. هر مرحله‌ی بازی به صورت زیر انجام می‌شود:

> اگر ترتیب کنونی افراد $\langle a, b, c\rangle$ باشد، فرد b یکی از دو حالت $\langle b, a, c\rangle$ یا $\langle a, c, b\rangle$ را برای ترتیب نشستن بعدی انتخاب می‌کند.

برنده‌ی بازی کسی است که پس از مرحله‌ی سوم روی صندلی وسط باشد. هر فرد یک **دشمن** نیز دارد. دشمن‌های شایان، بهنود و سینا به ترتیب بهنود، سینا و شایان هستند. هر فرد می‌خواهد در اولویت اول خودش ببرد و در اولویت دوم دشمنش نبرد. کدام گزاره یا گزاره‌های زیر درست هستند؟

آ) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، شایان برنده خواهد شد.
ب) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، بهنود برنده خواهد شد.
پ) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، سینا برنده خواهد شد.
ت) بهنود مستقل از نحوه‌ی بازی دیگران می‌تواند طوری بازی کند که سینا برنده نشود.

۱) ب و ت ۲) پ و ت ۳) آ ۴) ب ۵) آ و ت

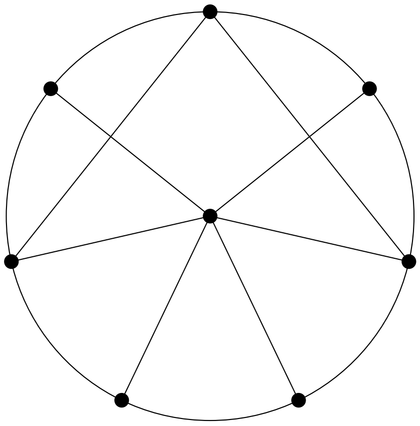
۶ ۱۳۹۸ نفر دور یک دایره هستند و همگی زامبی شده‌اند. دانشمندان دریافته‌اند که عامل زامبی شدن، ویروسی به نام **زابون** است و دستگاهی اختراع کرده‌اند که زابون را از بدن زامبی بیرون می‌کشد. هر زامبی یکی از این دستگاه‌ها در اختیار دارد. در هر مرحله به طور همزمان، هر زامبی زابون را از بدن خود با استفاده از دستگاه بیرون می‌کشد، سپس یکی از دو نفر مجاور خود را انتخاب کرده و ویروس را به او منتقل می‌کند. پس از انجام مرحله، هر فردی که از یک یا هر دو مجاور خود زابون دریافت کند، زامبی و بقیه سالم می‌شوند. کمینه‌ی تعداد مراحل را بیابید تا به وضعیتی برسیم که فقط دو زامبی در میان افراد باشد.

۱) رسیدن به چنین وضعیتی امکان ندارد ۲) ۱۳۹۸ ۳) ۶۹۹ ۴) ۶۹۸ ۵) ۱۳۹۷

۷ **سلطان** و **ایلیچ** با هم بازی می‌کنند. پنج ماشین به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۵ پشت سر هم قرار گرفته‌اند (ماشین شماره ۱ جلوترین ماشین است). ابتدا ایلیچ دنباله‌ای از اعداد ۲ تا ۵ ارائه می‌کند که به ازای هر $i \in \{۲, ۳, ۴, ۵\}$ عدد i دقیقاً $i - ۱$ بار در دنباله آمده است. سپس سلطان در جایی دل‌خواه از دنباله، یک عدد ۱ قرار می‌دهد؛ به این ترتیب دنباله‌ای از ۱۱ عدد مانند $\langle a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۱} \rangle$ به دست می‌آید. نهایتاً در مرحله‌ی jاُم ($۱ \leqslant j \leqslant ۱۱$)، ماشین a_j از ماشین جلوی خودش سبقت می‌گیرد (اگر a_j جلوترین ماشین بود، سبقتی در آن مرحله انجام نمی‌شود). سلطان می‌خواهد پس از انجام مراحل، ماشین شماره ۱ در جلوترین مکان ممکن و ایلیچ می‌خواهد ماشین شماره ۱ در عقب‌ترین مکان ممکن باشد. اگر دو نفر به شکل بهینه بازی کنند، ماشین شماره ۱ در کجای صف خواهد بود؟

۱) سومین ماشین از جلو ۲) دومین ماشین از جلو ۳) عقب‌ترین ماشین ۴) جلوترین ماشین ۵) چهارمین ماشین از جلو

۸ هشت شایعه‌ساز داریم که گراف آشنایی آن‌ها به شکل زیر است (آشنایی را رابطه‌ای دوطرفه در نظر بگیرید):



هر شایعه‌ساز هر روز می‌تواند یکی از سه کار زیر را انجام دهد:

- استراحت کند.
- یک شایعه‌ی جدید بسازد! در این صورت او به دلیل فشار کاری، روز بعد را باید استراحت کند.
- تمام شایعه‌هایی را که تا قبل از آن روز داشته (چه خودش ساخته باشد و چه از طریق آشنایانش گرفته باشد)، به تمام آشنایانش بگوید.

دریافت کردن شایعه‌های آشنایان، مستقل از سه حالت بالاست و حتی شایعه‌ساز در حال استراحت هم می‌تواند شایعه دریافت کند. به یک شایعه **فراگیر** گوییم، اگر تمام هشت نفر آن را بدانند. پس از ۱۶ روز حداکثر چند شایعه‌ی فراگیر متمایز وجود خواهد داشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۱۲ ۳) ۵۶ ۴) ۱۴ ۵) ۱۲۰

۹ در یک صف تاکسی تعداد زیادی آدم ایستاده‌اند. هر خودرو که می‌آید به احتمال $\frac{۱}{۲}$ سمند است که چهار نفر جلوی صف را سوار می‌کند و به احتمال $\frac{۱}{۲}$ ون است که ۱۰ نفر جلوی صف را سوار می‌کند. سلطان و ایلیچ نفرات ۹۹اُم و ۱۰۰اُم صف هستند. به چه احتمالی این افراد در یک خودرو قرار خواهند گرفت؟

۱) $\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$ ۲) $\frac{۲۰۴۷}{۲۰۴۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱ ۵) $\frac{۲^{۹۹}-۱}{۲^{۹۹}}$

۱۰ الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. مقادیر ans، s و i را به ترتیب ۰، ۰ و ۱ قرار بده.
۲. مجموعه‌ی X را تهی قرار بده.
۳. مقدار i را $i + ۱$ قرار بده.
۴. اگر i برابر ۱۰ بود، مقدار ans را $ans + s$ قرار بده؛ در غیر این صورت به مرحله‌ی ۳ برو.
۵. مقدار i را $i - ۱$ قرار بده.
۶. اگر i برابر صفر بود، به مرحله‌ی ۱۰ برو.
۷. اگر $i \in X$ نبود به مرحله‌ی ۹ برو.
۸. عدد i را از X حذف کن و مقدار s را $s - i$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۵ برو.
۹. عدد i را به X اضافه کن و مقدار s را $s + i$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۳ برو.
۱۰. پایان.

پس از پایان اجرای الگوریتم مقدار ans چه خواهد بود؟

۱) ۱۱۵۲۰ ۲) ۴۵ ۳) ۲۳۰۴۰ ۴) ۲۸۱۶۰ ۵) الگوریتم هیچ گاه پایان نمی‌یابد

۱۱ جدولی به شکل زیر داریم و رباتی در خانه‌ی ۱ قرار دارد. او در هر حرکت می‌تواند به یک خانه‌ی مجاور (در ضلع) برود.

۳	۲	۱
۶	۵	۴
۹	۸	۷

شایان یک عدد شش رقمی با ارقام ۲ تا ۹ به ربات می‌دهد که هیچ دو رقم متوالی آن یکسان نیستند. سپس ربات رقم سمت چپ عدد را می‌بیند و با کوتاه‌ترین مسیر ممکن به خانه‌ی متناظر آن رقم می‌رود (اگر چند کوتاه‌ترین مسیر وجود داشت، یکی را به دل‌خواه انتخاب می‌کند). سپس به ازای تمام ارقام دیگر عدد نیز به ترتیب از چپ به راست همین کار را انجام می‌دهد. اگر بدانیم دنباله‌ی خانه‌هایی که ربات دیده به ترتیب از چپ به راست برابر

$$۱, ۲, ۵, ۶, ۳, ۶, ۹, ۸, ۵, ۸, ۷$$

باشد، چند حالت برای عدد شایان وجود دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶ ۵) ۱۲

۱۲ ۱۳۹۸ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۸ در یک جمع حضور دارند. یک تاس ۱۳۹۸ وجهی داریم که روی وجه‌های آن اعداد ۱ تا ۱۳۹۸ حک شده‌اند و در هر پرتاب، اعداد به احتمال برابر می‌آیند. ابتدا یک بار تاس را می‌اندازیم و هر عددی مانند k آمد، تصمیم می‌گیریم یک تیم k نفره از جمع تشکیل دهیم. سپس هر مرحله تاس را می‌اندازیم و فرض کنید عدد a بیاید؛ اگر نفر شماره a در تیم انتخاب نشده بود، a را به تیم اضافه می‌کنیم و در غیر این صورت کاری نمی‌کنیم. آن قدر تاس را می‌اندازیم تا تعداد نفرات تیم k شود. امید ریاضی مجموع شماره‌ی افراد تیم را بیابید.

۱) $\frac{۱۳۹۸\times۱۳۹۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳۹۸^{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۱۳۹۸\times۱۳۹۹}{۴}$ ۴) $\frac{۱۳۹۹^{۲}}{۴}$ ۵) $\frac{۱۳۹۸\times۱۳۹۷}{۴}$

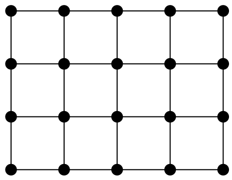
۱۳ سلطان، ایلیچ و آبولف سه برادر هستند. پدر آن‌ها شش هدیه برای آن‌ها خریده است. هر کدام از بچه‌ها به ازای هر هدیه گفتند به چه میزانی با گرفتن آن هدیه خوشحال می‌شوند. این مقادیر در جدول زیر آمده است:

	هدیه‌ی ۱	هدیه‌ی ۲	هدیه‌ی ۳	هدیه‌ی ۴	هدیه‌ی ۵	هدیه‌ی ۶
سلطان	۱۰	۱۳	۸	۶	۳	۴
ایلیچ	۲	۱۱	۴	۵	۶	۳
آبولف	۶	۱۰	۶	۴	۸	۴

پدر می‌خواهد این شش هدیه را بین سه فرزندش تقسیم کند. لزومی ندارد به هر کس دقیقاً دو هدیه برسد. هم‌چنین ممکن است مجموعه‌ی هدایای یک فرد تهی باشد. گوییم فرد A به فرد B **حسادت** خواهد کرد، اگر با عوض کردن هدیه‌هایشان، مجموع خوشحالی A بیش‌تر شود. تعداد زوج مرتب‌های (A, B) را که A به B حسادت کند، میزان **بدبختی** پدر می‌گوییم. کمینه‌ی میزان بدبختی پدر را بیابید.

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ ۵) ۴

فرض کنید یک جدول $m \times n$ داریم. نقاط گوشه‌های مربع‌های واحد جدول را رأس و اضلاع آن‌ها را یال در نظر بگیرید؛ به این ترتیب یک گراف به دست می‌آید. برای مثال به ازای $m = ۳$ و $n = ۴$ گرافی با ۲۰ رأس و ۳۱ یال به شکل زیر به دست می‌آید:



به این گراف، **گراف جدولی** حاصل از یک جدول $m \times n$ گوییم. فرض کنید G یک گراف جدولی و T یک زیردرخت فراگیر از آن باشد. به ازای هر خانه از جدول، تعداد یال‌هایی از T را که ضلع آن خانه هستند، **استحکام** آن خانه می‌نامیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

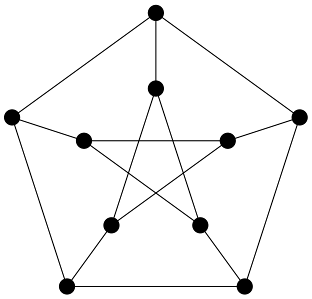
۱۴ به ازای $m = ۱۰$ و $n = ۱۰$، کمینه‌ی مجموع استحکام خانه‌ها را در میان تمام زیردرخت‌های فراگیر ممکن بیابید.

۱) ۲۰۱ ۲) ۱۹۹ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۹ ۵) ۲۴۰

۱۵ **دوام** هر خانه را مجذور استحکام آن (استحکام به توان دو) در نظر می‌گیریم. به ازای $m = ۱۰$ و $n = ۱۰$، کمینه‌ی مجموع دوام خانه‌ها را در میان تمام زیردرخت‌های فراگیر ممکن بیابید.

۱) ۹۰۱ ۲) ۴۰۱ ۳) ۳۰۱ ۴) ۲۹۲ ۵) ۴۰۵

سال‌ها پیش فردی به نام **پترسن** گراف زیر را از صندوق‌چه‌ی **سلطان** دزدید و به نام خود زد!



سلطان دلش برای این گراف تنگ شده است و می‌خواهد اندکی با آن بازی کند! او در ابتدا رأس‌های گراف را با قرمز و آبی رنگ می‌کند. سپس هر مرحله به طور همزمان رنگ هر رأس را برابر با رنگی قرار می‌دهد که در همسایه‌هایش بیش‌تر تکرار شده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۶ سلطان در ابتدا به چند طریق می‌تواند سه رأس را قرمز و بقیه را آبی کند، طوری که هم‌واره حداقل یک رأس قرمز در گراف باقی بماند؟ رأس‌های گراف را متمایز در نظر بگیرید.

۱) ۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰ ۵) ۱۲

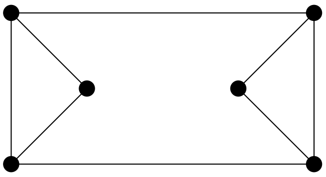
۱۷ کمینه‌ی k را بیابید، طوری که سلطان در ابتدا به هر روشی که k رأس را قرمز و بقیه را آبی کند، هم‌واره دست کم یک رأس قرمز در گراف باقی بماند.

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷ ۵) ۶

سلطان به تازگی شهردار **خوشوآباد** شده و می‌خواهد به روان شدن ترافیک شهر کمک کند. استراتژی او، یک‌طرفه کردن خیابان‌هاست. از طرفی او دوست ندارد با این کار، فاصله‌ی قسمت‌های مختلف شهر از هم خیلی زیاد شود. در هر سوال، گراف خیابان‌ها و تقاطع‌های یک محله داده می‌شود (رأس‌های گراف، تقاطع‌ها و یال‌های آن، خیابان‌های محله هستند) و از شما در مورد یک‌طرفه کردن خیابان‌های آن پرسشی صورت خواهد گرفت. در هر سه سوال، رأس‌های (تقاطع‌های) گراف را متمایز در نظر بگیرید.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

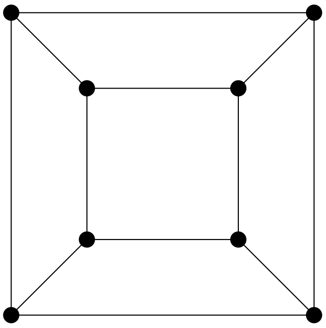
۱۸ محله‌ی کوچک **رامتینک** در این شهر گرافی به شکل زیر دارد:



سلطان می‌خواهد تمام خیابان‌های این محله را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب (X, Y) از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر چهار خیابان از X به Y برسیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶ ۵) ۰

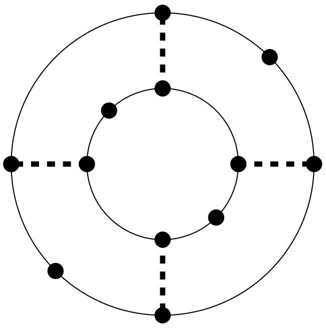
۱۹ محله‌ی قدیمی **میرزامحمد خان** گرافی به شکل زیر دارد:



سلطان می‌خواهد تمام خیابان‌های این محله را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب (X, Y) از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر سه خیابان از X به Y برسیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲ ۵) ۰

۲۰ محله‌ی زیبای **پارساییان** گرافی به شکل زیر دارد:



در این سوال بر خلاف دو سوال قبل، سلطان نمی‌خواهد تمام خیابان‌ها را یک‌طرفه کند، زیرا چهار خیابان مشخص شده با خط‌چین به اندازه‌ی کافی عریض هستند و نیازی به یک‌طرفه شدن آن‌ها نیست. سلطان به چند طریق می‌تواند تمام ۱۲ خیابان دیگر را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب (X, Y) از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر پنج خیابان از X به Y برسیم؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱۲ ۵) ۹۶

زابونیان در دریای مدیترانه . . . . ۲۰ امتیاز

کاروان ۱۳۹۸ نفره‌ی **زابونیان** در حال عبور از دریای مدیترانه بودند که در جزیره‌ی آدم‌خوارها گیر افتادند. رئیس قبیله‌ی آدم‌خوارها روش عجیبی برای محاکمه‌ی این ۱۳۹۸ نفر طراحی کرد. او به هر یک از ۱۳۹۸ نفر گفت: «از بین ۱۳۹۷ نفر دیگر، نام دو نفر متمایز را روی یک کاغذ بنویسید و به من تحویل دهید.»

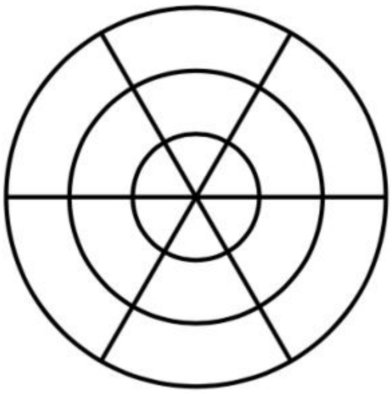
به یک نفر از کاروان، **سربه‌زیر** گوییم، اگر نامش دقیقاً یک بار روی کاغذها نوشته شده باشد. به فردی از کاروان که نامش بیش از یک بار روی کاغذها نوشته شده باشد، **رسوا** گوییم. به یک نفر از کاروان **رسواگر** گوییم، اگر نام حداقل یک فرد رسوا را روی کاغذش نوشته باشد.

رئیس قبلیه، تمام افراد سربه‌زیر و رسواگر را برای تهیه‌ی شام قبیله خواهد کشت و بقیه را آزاد خواهد کرد. حداکثر چند نفر از کاروان زابونیان جان سالم به در خواهند برد؟

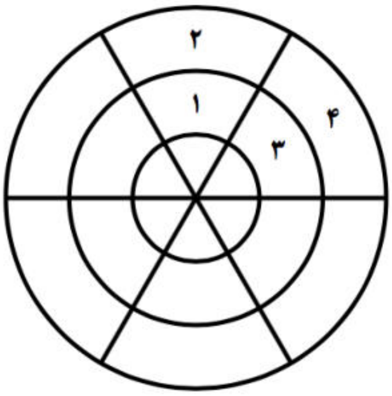
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح

دیرالسلطان . . . . ۲۰ امتیاز

دیرالسلطان شکلی است که از سه دایره‌ی هم‌مرکز و n قطاع تشکیل شده است $(n \geq ۳)$. برای مثال شکل زیر، یک دیرالسلطان به ازای $n = ۶$ است:



به این ترتیب، یک دیرالسلطان ۳n خانه دارد. دو خانه از یک دیرالسلطان را **مجاور** گوییم، اگر بیش از یک نقطه‌ی مرزی مشترک داشته باشند. برای مثال در شکل زیر، خانه‌ی ۱ با خانه‌های ۲ و ۳ مجاور است، ولی با خانه‌ی ۴ مجاور نیست:



آبولف و **ایلیچ** در حال بازی بر روی یک دیرالسلطان به ازای $n = ۱۳۹۸$ هستند. در هر مرحله آبولف یک قطاع را انتخاب می‌کند، طوری که آن قطاع حداقل یک خانه‌ی رنگ نشده داشته باشد؛ سپس ایلیچ یکی از خانه‌های رنگ نشده از قطاع را انتخاب می‌کند و آن خانه رنگ زده می‌شود. در مراحل زوج، خانه‌ی انتخاب شده را آبی و در مراحل فرد، خانه‌ی انتخاب شده را قرمز می‌کنیم. پس از آن که تمام خانه‌ها رنگ زده شد، بازی خاتمه می‌یابد.

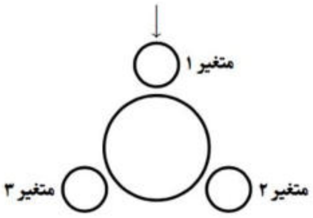
در انتها به ازای هر دو خانه‌ی مجاور ناهم‌رنگ، ایلیچ باید یک واحد به آبولف پول بدهد. اگر هر دو نفر به روش بهینه بازی کنند، ایلیچ چه مقدار پول خواهد داد؟

زبان چرخشی .... ۲۰ امتیاز

در این سوال با یک زبان برنامه‌نویسی جدید سر و کار دارید. ابتدا توضیحات زیر را در مورد بخش‌های مختلف زبان بخوانید:

حافظه و اشاره‌گر:

این زبان تنها از سه خانه‌ی حافظه با شماره‌های ۱ تا ۳ استفاده می‌کند که به شکل زیر، دور یک دایره قرار گرفته‌اند و هر کدام از آن‌ها می‌توانند یک عدد صحیح را ذخیره کنند. به این خانه‌ها متغیر نیز می‌گوییم. یک اشاره‌گر (که در شکل با فلش مشخص شده) هم وجود دارد که در هر لحظه به یکی از سه متغیر اشاره می‌کند و در هنگام شروع برنامه، روی متغیر شماره ۱ است. در هر لحظه از برنامه، به متغیری که اشاره‌گر به آن اشاره می‌کند، متغیر **درگیر** می‌گوییم. برنامه دارای تعدادی دستور است که پس از اجرای هر یک، اشاره‌گر یک واحد در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کند تا به متغیر بعدی اشاره کند.



زیربرنامه‌ها:

هر برنامه در این زبان از تعدادی زیربرنامه تشکیل می‌شود. فرض کنید زیربرنامه‌های یک برنامه به ترتیب $C_۱$ تا C_k باشند. به ازای هر $۱ \leq i \leq k - ۱$ زیربرنامه‌ی بعدی C_i را $C_{i+۱}$ در نظر می‌گیریم. زیربرنامه‌ی بعدی C_k را نیز $C_۱$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین به ازای هر $۲ \leq i \leq k$ زیربرنامه‌ی قبلی C_i را $C_{i-۱}$ در نظر می‌گیریم. زیربرنامه‌ی قبلی $C_۱$ را نیز C_k در نظر می‌گیریم.

هر زیربرنامه تعدادی خط دارد که در هر خط یک دستور نوشته شده است. به ازای هر دستور، منظور از دستور بعدی، دستور واقع در خط بعد زیربرنامه است. به ازای دستور آخر زیربرنامه نیز، دستور بعدی را دستور واقع در خط یکم زیربرنامه در نظر می‌گیریم.

اجرای برنامه از خط اول زیربرنامه‌ی $C_۱$ آغاز می‌شود.

دستورها:

دستورهای مجاز به صورت زیر هستند:

- **افزایش**: این دستور را با کلمه‌ی `INC` نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، به عدد متغیر درگیر یک واحد اضافه کرده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **کاهش**: این دستور را با کلمه‌ی `DEC` نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، از عدد متغیر درگیر یک واحد کم کرده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.

- **پرش**: این دستور را با کلمه‌ی JMP نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **خروج**: این دستور را با کلمه‌ی EXT نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، اجرای برنامه خاتمه می‌یابد؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **حرکت به جلو**: این دستور را با کلمه‌ی NXT نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، به خط اول زیربرنامه‌ی بعدی می‌رویم؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **حرکت به عقب**: این دستور را با کلمه‌ی PRV نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، به خط اول زیربرنامه‌ی قبلی می‌رویم؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.

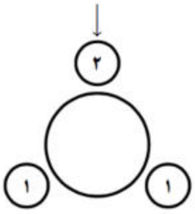
یادآوری می‌کنیم پس از اجرای هر یک از دستورات بالا، اشاره‌گر یک واحد در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کند.

حال می‌خواهیم یک برنامه برای شما مثال بزنیم که دو زیربرنامه به صورت زیر دارد:

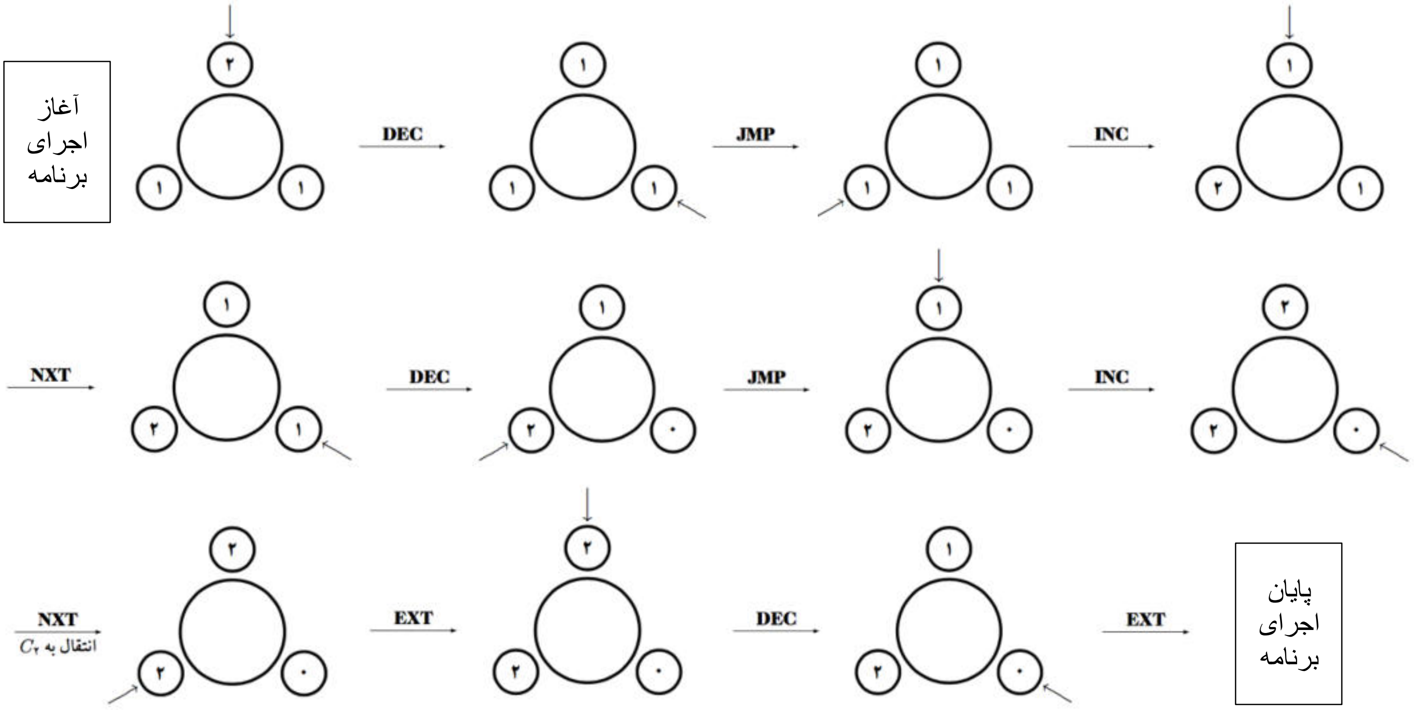
$C_۲$:
EXT
DEC

$C_۱$:
DEC
JMP
INC
NXT

فرض کنید در ابتدا مقادیر متغیرها به شکل زیر باشد:



در شکل زیر، مقدار متغیرها و موقعیت اشاره‌گر در حین روند اجرای برنامه به صورت مرحله به مرحله تا خاتمه‌ی آن آمده است:



پس در انتهای برنامه مقدار متغیرها به ترتیب ۱، ۰ و ۲ خواهد بود.

حال شما برای هر یک از قسمت‌های زیر، با زبان گفته شده یک برنامه متشکل از تعدادی زیربرنامه بنویسید. زیربرنامه‌های خود را با گذاشتن نام‌های $C_{۱}$، $C_{۲}$ و ... مشخص کنید و در هر زیربرنامه، دستورات را به صورت منظم و به ترتیب بنویسید. برای درستی برنامه‌ی خود اثباتی مختصر نیز بنویسید. تنها کسانی نمره‌ی کامل می‌گیرند که هر دوی برنامه و اثبات را به درستی نوشته باشند.

آ) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر $A + B$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

ب) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر $\max(A, B)$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

پ) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر ب.م.م دو عدد A و B شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

ت) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر عدد طبیعی N، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب N، صفر و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۲ برابر $N \times N$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۳ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

باغچه‌ی آفت‌زده‌ی آبولف . . . . ۲۰ امتیاز

باغچه‌ی **آبولف** به صورت یک جدول ۱۳۹۸ در ۱۳۹۸ است. به مجموعه‌ای از ۱۳۹۸ خانه‌ی جدول **سلطانی** گوییم، اگر هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند. خانه‌ی واقع در سطر iاُم و ستون jاُم را با (i,j) نشان می‌دهیم.

در ابتدا، در تمام خانه‌های (i,j) که $i < j$ است، آفتی قرار دارد. **دگرگون** کردن یک خانه به معنی تغییر وضعیت آفت داشتن یا نداشتن آن است؛ به عبارت دیگر اگر خانه‌ای آفت داشته باشد، پس از دگرگون کردن آفت نخواهد داشت و بالعکس. آبولف می‌خواهد با آفت‌ها مبارزه کند. او دستگاهی خریده است که در هر مرحله می‌تواند مجموعه‌ای سلطانی از جدول انتخاب کند و تمام خانه‌های آن را دگرگون کند. پس از تعداد دل‌خواهی مرحله استفاده از دستگاه، کمینه‌ی تعداد آفت‌هایی که آبولف در باغچه‌اش خواهد داشت چیست؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

کد ۱ المپیاد کامپیوتر

نام:
نام خانوادگی:
کد ملی: شماره پرونده:
شماره صندلی: کد دفترچه: ۱
حوزه امتحانی:
استان/منطقه:

مرحله دوم المپیاد کامپیوتر
۱۳۹۷-۹۸

نام و نام خانوادگی خود را با دستخط بنویسید

نام	نام خانوادگی

تمام سلول مورد نظر مطابق نمونه صحیح پر شود: صحیح ▬ غلط ● ✗ ✓ ⊙ ▭ ◐

۱	○	○	●	○	○
۲	○	○	○	○	●
۳	○	●	○	○	○
۴	○	○	●	○	○
۵	○	○	○	○	●
۶	○	○	○	●	○
۷	○	○	○	○	●
۸	○	○	●	○	○
۹	○	○	○	●	○
۱۰	●	○	○	○	○
۱۱	○	○	○	●	○
۱۲	○	○	○	●	○
۱۳	●	○	○	○	○
۱۴	●	○	○	○	○
۱۵	○	○	○	○	●
۱۶	○	○	○	●	○
۱۷	●	○	○	○	○
۱۸	○	○	○	●	○
۱۹	○	○	○	○	●
۲۰	○	○	●	○	○
۲۱	○	○	○	○	○
۲۲	○	○	○	○	○
۲۳	○	○	○	○	○
۲۴	○	○	○	○	○
۲۵	○	○	○	○	○
۲۶	○	○	○	○	○
۲۷	○	○	○	○	○
۲۸	○	○	○	○	○
۲۹	○	○	○	○	○
۳۰	○	○	○	○	○
۳۱	○	○	○	○	○
۳۲	○	○	○	○	○
۳۳	○	○	○	○	○
۳۴	○	○	○	○	○
۳۵	○	○	○	○	○
۳۶	○	○	○	○	○
۳۷	○	○	○	○	○
۳۸	○	○	○	○	○
۳۹	○	○	○	○	○
۴۰	○	○	○	○	○
۴۱	○	○	○	○	○
۴۲	○	○	○	○	○
۴۳	○	○	○	○	○
۴۴	○	○	○	○	○
۴۵	○	○	○	○	○
۴۶	○	○	○	○	○
۴۷	○	○	○	○	○
۴۸	○	○	○	○	○
۴۹	○	○	○	○	○
۵۰	○	○	○	○	○
۵۱	○	○	○	○	○
۵۲	○	○	○	○	○
۵۳	○	○	○	○	○
۵۴	○	○	○	○	○
۵۵	○	○	○	○	○
۵۶	○	○	○	○	○
۵۷	○	○	○	○	○
۵۸	○	○	○	○	○
۵۹	○	○	○	○	○
۶۰	○	○	○	○	○
۶۱	○	○	○	○	○
۶۲	○	○	○	○	○
۶۳	○	○	○	○	○
۶۴	○	○	○	○	○
۶۵	○	○	○	○	○
۶۶	○	○	○	○	○
۶۷	○	○	○	○	○
۶۸	○	○	○	○	○
۶۹	○	○	○	○	○
۷۰	○	○	○	○	○
۷۱	○	○	○	○	○
۷۲	○	○	○	○	○
۷۳	○	○	○	○	○
۷۴	○	○	○	○	○
۷۵	○	○	○	○	○

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

کد ۲ المپیاد کامپیوتر

نام:

نام خانوادگی:

کد ملی:

شماره صندلی:

حوزه امتحانی:

استان/منطقه:

شماره پرونده:

کد دفترچه: ۲

مرحله دوم المپیاد کامپیوتر
۱۳۹۷-۹۸

نام و نام خانوادگی خود را با دستخط بنویسید

نام	نام خانوادگی
....	....

تمام سلول مورد نظر مطابق نمونه صحیح پر شود: صحیح ● غلط ▨ ✗ ✓ ⊙ ▬ ◐

۵	●	۳	۲	۱	۱
۵	●	۳	۲	۱	۲
●	۴	۳	۲	۱	۳
●	۴	۳	۲	۱	۴
۵	۴	۳	●	۱	۵
۵	۴	۳	۲	●	۶
●	۴	۳	۲	۱	۷
●	۴	۳	۲	۱	۸
۵	۴	●	۲	۱	۹
۵	۴	۳	۲	●	۱۰
●	۴	۳	۲	۱	۱۱
۵	۴	۳	●	۱	۱۲
۵	۴	۳	●	۱	۱۳
۵	●	۳	۲	۱	۱۴
۵	۴	۳	۲	●	۱۵
۵	●	۳	۲	۱	۱۶
۵	۴	۳	۲	●	۱۷
۵	●	۳	۲	۱	۱۸
۵	۴	۳	●	۱	۱۹
۵	۴	۳	●	۱	۲۰
۵	۴	۳	۲	۱	۲۱
۵	۴	۳	۲	۱	۲۲
۵	۴	۳	۲	۱	۲۳
۵	۴	۳	۲	۱	۲۴
۵	۴	۳	۲	۱	۲۵
۵	۴	۳	۲	۱	۲۶
۵	۴	۳	۲	۱	۲۷
۵	۴	۳	۲	۱	۲۸
۵	۴	۳	۲	۱	۲۹
۵	۴	۳	۲	۱	۳۰
۵	۴	۳	۲	۱	۳۱
۵	۴	۳	۲	۱	۳۲
۵	۴	۳	۲	۱	۳۳
۵	۴	۳	۲	۱	۳۴
۵	۴	۳	۲	۱	۳۵
۵	۴	۳	۲	۱	۳۶
۵	۴	۳	۲	۱	۳۷
۵	۴	۳	۲	۱	۳۸
۵	۴	۳	۲	۱	۳۹
۵	۴	۳	۲	۱	۴۰
۵	۴	۳	۲	۱	۴۱
۵	۴	۳	۲	۱	۴۲
۵	۴	۳	۲	۱	۴۳
۵	۴	۳	۲	۱	۴۴
۵	۴	۳	۲	۱	۴۵
۵	۴	۳	۲	۱	۴۶
۵	۴	۳	۲	۱	۴۷
۵	۴	۳	۲	۱	۴۸
۵	۴	۳	۲	۱	۴۹
۵	۴	۳	۲	۱	۵۰
۵	۴	۳	۲	۱	۵۱
۵	۴	۳	۲	۱	۵۲
۵	۴	۳	۲	۱	۵۳
۵	۴	۳	۲	۱	۵۴
۵	۴	۳	۲	۱	۵۵
۵	۴	۳	۲	۱	۵۶
۵	۴	۳	۲	۱	۵۷
۵	۴	۳	۲	۱	۵۸
۵	۴	۳	۲	۱	۵۹
۵	۴	۳	۲	۱	۶۰
۵	۴	۳	۲	۱	۶۱
۵	۴	۳	۲	۱	۶۲
۵	۴	۳	۲	۱	۶۳
۵	۴	۳	۲	۱	۶۴
۵	۴	۳	۲	۱	۶۵
۵	۴	۳	۲	۱	۶۶
۵	۴	۳	۲	۱	۶۷
۵	۴	۳	۲	۱	۶۸
۵	۴	۳	۲	۱	۶۹
۵	۴	۳	۲	۱	۷۰
۵	۴	۳	۲	۱	۷۱
۵	۴	۳	۲	۱	۷۲
۵	۴	۳	۲	۱	۷۳
۵	۴	۳	۲	۱	۷۴
۵	۴	۳	۲	۱	۷۵

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات بیست و هشتمین دوره المپیاد کامپیوتر- روز اول

تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۴

تعداد سوالات	ساعت شروع	مدت آزمون (دقیقه)
۲۰	۱۶:۳۰	۲۰۰

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

کد دفترچه

۱

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- کد دفترچه شما یک است. این کد را با کدی که روی پاسخ‌نامه نوشته شده است تطبیق دهید. در صورت وجود مغایرت، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه را بررسی نمایید و از وجود همه برگه‌های دفترچه سوالات مطمئن شوید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳- یک برگه پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴- کلیه جواب‌ها باید در پاسخ‌نامه وارد شود. بدیهی است موارد مندرج در دفترچه سوالات تصحیح نشده و به آن‌ها هیچ نمره‌ای تعلق نخواهد گرفت.

۵- نام و نام خانوادگی خود را روی کلیه صفحات دفترچه سوالات و پاسخ‌نامه بنویسید.

۶- برگه پاسخ‌نامه شما را دستگاه تصحیح می‌کند. پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و بعلاوه پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملا سیاه کنید.

۷-پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست یک نمره منفی دارد.

۸- ترتیب گزینه‌ها به صورت تصادفی است. سوالات ۱۲ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.

۹- همراه داشتن لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب می‌شود.

۱۰- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.

۱۱- دفترچه سوالات باید همراه پاسخ‌نامه به مسئولین جلسه تحویل شود.

پایگاه اطلاع رسانی کمیته ملی کامپیوتر: www.inoi.ir

مرحله‌ی دوم بیست و هشتمین المپیاد کامپیوتر کشور

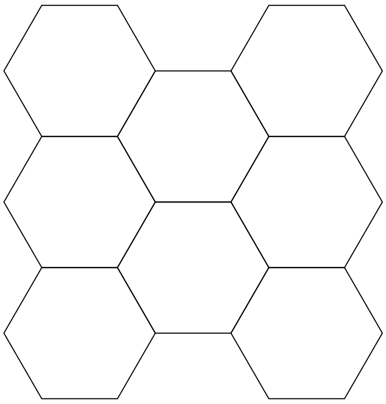
- زمان آزمون ۲۰۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتمن کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۲ تا ۲۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ تمام $۱۰^{۳}$ سه‌تایی مرتب (a, b, c) از مجموعه‌ی اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را در نظر بگیرید. این ۱۰۰۰ سه‌تایی مرتب در مجموع ۳۰۰۰ عدد دارند. از هر سه‌تایی مرتب بزرگ‌ترین عدد (یا اعداد) را نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم. برای مثال از سه‌تایی مرتب $(۱, ۲, ۳)$ اعداد ۱ و ۲ و از سه‌تایی مرتب $(۱, ۲, ۲)$ عدد ۱ حذف می‌شوند. مجموع اعداد باقی‌مانده چقدر است؟

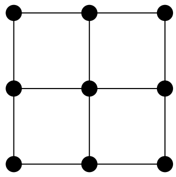
۱) ۹۰۷۵
۲) ۷۷۷۸
۳) ۱۰۲۵
۴) ۸۷۷۵
۵) ۸۳۲۵

۲ می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را در خانه‌های شکل زیر بنویسیم، طوری که اعداد هر دو خانه‌ی مجاور (دارای ضلع مشترک) نسبت به هم اول باشند. به چند طریق این کار ممکن است؟



۱) ۲۱۶
۲) ۲۸۸
۳) ۵۷۶
۴) ۴۳۲
۵) ۱۴۴

۳ به چند طریق می‌توان یال‌های گراف زیر را جهت‌دهی کرد، طوری که دور جهت‌دار تشکیل نشود؟



۱) ۵۷۶
۲) ۵۰۸
۳) ۱۶۶۰
۴) ۲۳۹۸
۵) ۲۷۲۲

۴ در یک جدول ۸×۸ به هشت خانه که هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند، **قطر پراکنده** می‌گوییم. به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول ۸×۸ را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد طوری که هر قطر پراکنده‌ی آن دقیقن چهار عدد ۱ داشته باشد؟

۱) ۴۹۰۰
۲) ۰
۳) ۷۰
۴) ۱۴۰
۵) !۸

۵ هشت مسافر در بازرسی بدنی یک فرودگاه به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۸ در صف ایستاده‌اند. **سلطان** مسئول بازرسی بدنی است. او هر بار فرد جلوی صف را بازرسی بدنی می‌کند، سپس به او اجازه می‌دهد از در وارد سالن فرودگاه شود. سلطان تنهاست و در هر لحظه می‌تواند فقط یک نفر را بازرسی بدنی کند. بنابراین در حین بازرسی هر نفر، ممکن است تعدادی (که می‌تواند صفر هم باشد) از افراد صف به ترتیب و بدون بازرسی وارد سالن شوند.

> برای مثال فرض کنید سلطان در حال بازرسی فرد شماره ۱ است. در این حین ممکن است افراد ۲ و ۳ به ترتیب از در وارد سالن شوند. سپس فرض کنید بازرسی فرد شماره ۱ تمام شود و او از در سالن عبور کند. سلطان پس از این کار به سراغ بازرسی فرد شماره ۴ می‌رود و روند ادامه پیدا می‌کند.

افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند از در وارد سالن شوند؟

۱) ۱۲۸
۲) ۱۴۴
۳) !۷
۴) ۲۵۶
۵) !۸

۶ یک گراف کامل پنج رأسی با رأس‌های $v_۱$ تا $v_۵$ داریم. به چند طریق می‌توان یال‌های این گراف را با قرمز و آبی رنگ کرد، طوری که هم زیرگراف پنج رأسی متشکّل از یال‌های آبی و هم زیرگراف پنج رأسی متشکّل از یال‌های قرمز همبند باشد؟

۱) ۴۳۲
۲) ۸۶۴
۳) ۲۱۲
۴) ۲۹۶
۵) ۵۹۲

۷ فرض کنید S رشته‌ای از ارقام ۰ و ۱ باشد. به این رشته **تجزیه‌ناپذیر** گوییم، اگر رشته‌ی t وجود نداشته باشد که با گذاشتن تعدادی (بیش از یک بار) از آن کنار هم، رشته‌ی S به دست آید. تعداد رشته‌های تجزیه‌ناپذیر ۱۲ رقمی را بیابید.

۱) ۴۰۰۲
۲) ۴۰۹۶
۳) ۴۰۱۲
۴) ۴۰۲۰
۵) ۴۰۳۲

۸ سلطان می‌خواهد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۰ بسازد. او در ابتدا عدد ۱ را می‌نویسد. سپس به ازای هر i به ترتیب از ۲ تا ۱۰ عدد i را به شکل زیر به جایگشت اضافه می‌کند:

> فرض کنید جایگشت کنونی $\langle \pi_۱, \pi_۲, \ldots, \pi_{i-۱} \rangle$ باشد. سلطان عدد i را به احتمال $\frac{۱}{۲^۱}$ در ابتدای جایگشت، به احتمال $\frac{۱}{۲^۲}$ بین $\pi_۱$ و $\pi_۲$، به احتمال $\frac{۱}{۲^۳}$ بین $\pi_۲$ و $\pi_۳$، ...و به احتمال $\frac{۱}{۲^{i-۱}}$ بین $\pi_{i-۲}$ و $\pi_{i-۱}$ می‌نویسد. هم‌چنین سلطان به احتمال $\frac{۱}{۲^{i-۱}}$ عدد i را در انتهای جایگشت کنونی (بعد از $\pi_{i-۱}$) می‌نویسد.

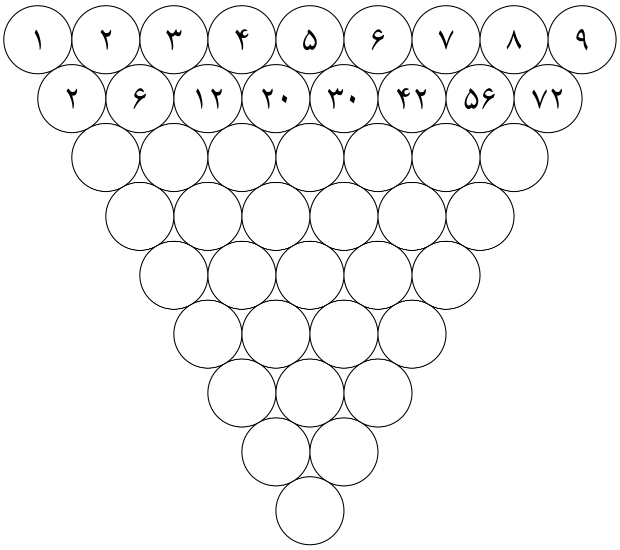
در جایگشت نهایی به دو عدد (نه لزومن متوالی) **وارون** گوییم، اگر عدد بزرگ‌تر قبل از عدد کوچک‌تر آمده باشد. امید ریاضی تعداد زوج‌های وارون را بیابید.

۱) $\frac{۱}{۲^{۱۰}} + \frac{\binom{۱۰}{۲}}{۲}$
۲) ۹
۳) $\frac{\binom{۱۰}{۲}}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲^۹} - ۱ + \binom{۹}{۲}$
۵) $\frac{۱}{۲^۹} - \binom{۹}{۲}$

۹ نقی دایره‌ای دارد که ۱۱ انگشتر دور آن چیده شده است. انگشترها از نظر ظاهری شبیه به هم هستند، اما در میان آن‌ها دقیقن دو انگشتر اصل وجود دارد. نقی دستگاهی دارد که در هر مرحله می‌تواند پنج انگشتر متوالی از دایره را به دستگاه نشان بدهد و تعداد انگشترهای اصل در میان این پنج انگشتر را بفهمد. نقی حق ندارد ترتیب انگشترهای دور دایره را عوض کند. او می‌خواهد دست کم یک انگشتر اصل را پیدا کند. نقی به دست کم چند بار استفاده از دستگاه نیاز دارد تا به طور مطمئن بتواند یک انگشتر اصل پیدا کند؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۵
۴) ۸
۵) ۶

۱۰ در شکل زیر، هر عدد برابر ضرب دو عدد بالایی خود است. اعداد دایره‌های سطر سوم به بعد را در شکل ننوشته‌ایم. عدد پایین‌ترین دایره چند رقم صفر در سمت راست خود دارد؟



۱) ۲۴۰
۲) ۷۰
۳) ۳۵
۴) ۴۶
۵) ۷۸

۱۱ سلطان اعداد طبیعی ۱ تا n را با قرمز و آبی رنگ کرده است. می‌دانیم هیچ سه عدد هم‌رنگ و متمایزی وجود ندارد که عدد بزرگ‌تر برابر جمع دو عدد دیگر باشد. بیشینه‌ی ممکن برای n چیست؟

۱) ۷
۲) ۹
۳) ۱۱
۴) ۱۰
۵) ۸

در خانه‌های یک جدول ۸ × ۸ اعدادی دوبه‌دو متمایز نوشته شده است. دو خانه از جدول را **هماهنگ** گوییم، اگر در زیرجدولی که این دو خانه، دو گوشه‌ی مقابل آن را تشکیل می‌دهند، اعداد کمینه و بیشینه در همین دو خانه باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ بیشینه‌ی ممکن تعداد زوج خانه‌های هماهنگ چیست؟

۱) ۴۴۸
۲) ۳۳۶
۳) ۱۲۳۲
۴) ۷۸۴
۵) ۵۶۰

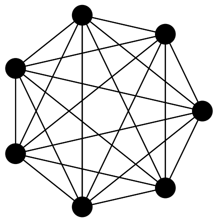
۱۳ کمینه‌ی ممکن تعداد زوج خانه‌های هماهنگ چیست؟

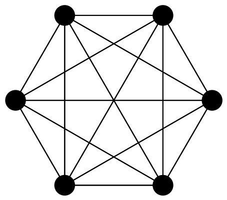
۱) ۴۴۸
۲) ۵۶
۳) ۱۷۶
۴) ۲۲۴
۵) ۱۱۲

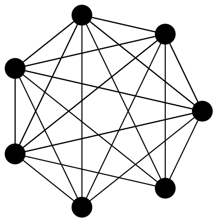
یک گراف ساده در نظر بگیرید که رأس‌های آن با قرمز و آبی رنگ شده‌اند. عمل **سلطان‌پیچ** روی گراف به این شکل انجام می‌شود که یک مجموعه از رأس‌ها مانند S را انتخاب می‌کنیم، سپس رنگ هر رأس خارج از S را که به تعداد فردی رأس از S یال دارد، عوض می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ فرض کنید در ابتدا تمام رأس‌های گراف‌های زیر قرمز هستند. در کدام گراف‌ها می‌توان با تعدادی عمل سلطان‌پیچ تمام رأس‌ها را آبی کرد؟

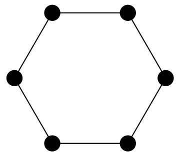

گراف (آ)

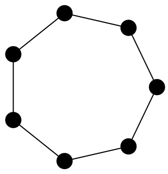

گراف (ب)

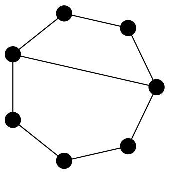

گراف (پ)

۱) گراف‌های (آ) و (پ) ۲) هیچ کدام ۳) گراف (آ) ۴) گراف‌های (ب) و (پ) ۵) هر سه گراف

۱۵ گراف‌های زیر به ترتیب از راست به چپ $۲^۶$، $۲^۷$ و $۲^۷$ رنگ‌آمیزی اولیه‌ی ممکن دارند. در هر کدام به ترتیب از راست به چپ، به ازای چند رنگ‌آمیزی اولیه می‌توان با تعدادی عمل سلطان‌پیچ تمام رأس‌ها را آبی کرد؟

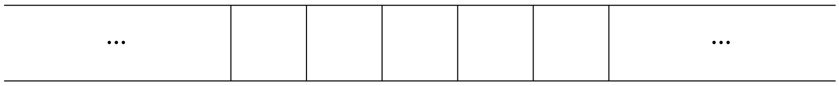






۱) ۳۲، ۱۲۸، ۹۶ ۲) ۶۴، ۶۴، ۱۲۸ ۳) ۳۲، ۶۴، ۱۲۸ ۴) ۶۴، ۱۲۸، ۶۴ ۵) ۶۴، ۱۲۸، ۱۲۸

نواری نامتناهی به شکل زیر داریم:



در ابتدا ۱۰ قورباغه در ۱۰ خانه‌ی متوالی از این نوار قرار دارند. در یک عمل **پرش**، یک قورباغه یکی از دو جهت (چپ یا راست) را انتخاب می‌کند و با حرکت در جهت انتخاب شده، به نخستین خانه‌ی خالی می‌پرد. توجه کنید یک عمل پرش توسط یک قورباغه انجام می‌شود و قورباغه‌ها هم‌زمان نمی‌پرند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ حداقل چند عمل پرش توسط قورباغه‌ها باید انجام شود تا بین هر دو قورباغه دست کم یک خانه‌ی خالی باشد؟

۱) ۹ ۲) ۵ ۳) ۱۸ ۴) رسیدن به چنین حالتی ممکن نیست ۵) ۱۷

۱۷ فرض کنید قورباغه‌ها شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داشته باشند. می‌خواهیم در انتها به وضعیتی برسیم که قورباغه‌ها در همین ۱۰ خانه‌ای قرار بگیرند که در ابتدا قرار دارند، امّا ترتیب شماره‌های‌شان از چپ به راست صعودی باشد. حداقل چند عمل پرش لازم داریم تا به ازای هر ترتیب اولیه بتوانیم کارمان را انجام دهیم؟

۱) ۱۵   ۲) ۱۰   ۳) ۱۱   ۴) ۱۹   ۵) ۲۰

در سرزمین سلطان نوعی باکتری به نام **مملی** زندگی می‌کند. هر مملی دو کروموزوم دارد. دو مملی می‌توانند با هم ازدواج و تولید مثل کنند. فرزند، از هر والد خود یک کروموزوم را به ارث می‌برد، بنابراین هر زوج حداکثر چهار فرزند متفاوت می‌توانند داشته باشند.
بیماری‌ای در سرزمین سلطان شایع شده که برخی از کروموزوم‌ها آسیب دیده‌اند. تحقیقات پزشکی به موارد زیر رسیده است:

- یک مملی با دو کروموزم آسیب‌دیده، ایدز دارد.
- یک مملی که کروموزم آسیب‌دیده نداشته باشد، ایدز ندارد.
- وضعیت در مورد مملی‌هایی که دقیقن یک کروموزم آسیب‌دیده دارند مشخص نیست، ولی می‌دانیم یا همه‌ی آن‌ها ایدز دارند (که در این صورت به ایدز بیماری **فراگیر** می‌گوییم) و یا هیچ کدام ایدز ندارند.

جدول موروثی دو مملی، جدولی ۲×۲ می‌باشد که هر سطر آن مربوط به یک کروموزوم از مملی اول و هر ستون آن مربوط به یک کروموزوم از مملی دوم است. در هر خانه از جدول، وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن فرزندی که از کروموزم‌های متناظر سطر و ستونش ساخته می‌شود، نوشته می‌شود. به راحتی می‌توانید بررسی کنید که دو جدول موروثی زیر، نامعتبر و غیر ممکن هستند (علامت ✓ به معنی داشتن ایدز و علامت × به معنی نداشتن ایدز است):

×	✓
✓	×

✓	×
×	✓

بنابراین در کل $۲^{۴} - ۲ = ۱۴$ جدول موروثی ممکن وجود دارد.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۸ دو مملی با هم ازدواج کرده و چهار فرزند مختلف به وجود آورده‌اند. به ما گفته‌اند دقیقن k تا از این فرزندها ایدز دارند. ما هیچ اطلاعاتی دیگری مانند این که والدین ایدز دارند یا خیر نداریم. به ازای چند مقدار k از ۰ تا ۴ می‌توانیم متوجه شویم ایدز یک بیماری فراگیر است یا خیر؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۰   ۴) ۲   ۵) ۵

۱۹ فرض کنید A و B دو مملی با جدول موروثی T باشند که سطرها مربوط به A و ستون‌ها مربوط به B است. فرض کنید وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن A و B را نمی‌دانیم. اگر با استفاده از جدول بتوانیم وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن هر دوی A و B را بفهمیم، دو امتیاز می‌گیریم؛ اگر بتوانیم فقط وضعیت ایدز داشتن یا نداشتن یکی از آن‌ها را بفهمیم، یک امتیاز می‌گیریم و اگر هم هیچ کدام را نتوانیم بفهمیم، امتیازی نمی‌گیریم. تمام ۱۴ حالت T را در نظر بگیرید. در مجموع این حالات، چند امتیاز می‌توانیم بگیریم؟

۱) ۲۸   ۲) ۰   ۳) ۲۰   ۴) ۱۶   ۵) ۸

۲۰ سلطان دستگاهی ساخته که دو مملی از ورودی می‌گیرد و جدول موروثی آن‌ها را تحویل می‌دهد (حتی اگر دو مملی ازدواج نکرده باشند، با فرض ازدواج آن‌ها جدول را می‌سازد). فرض کنید A و B دو مملی با چهار فرزند مختلف و جدول موروثی T باشند. به ازای هر دو فرزند از A و B آن‌ها را به دستگاه می‌دهیم و یک جدول تحویل

می‌گیریم. فرض کنید می‌دانیم هر خانه از T مربوط به کدام فرزند است. به ازای چند حالت از T، با استفاده از $\binom{۴}{۲}$ جدول موروثی دستگاه و هم‌چنین خود T می‌توانیم فراگیر بودن یا نبودن ایدز را تشخیص دهیم؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱۰ ۴) ۸ ۵) ۱۴

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۳ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات بیست و هشتمین دوره المپیاد کامپیوتر- روز دوم

تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۵ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- سوالات ترتیب خاصی ندارند و لزوما از ساده به سخت نیستند. شخصیت و داستان سوالات ربطی به حل سوالات ندارند و صرفا جنبه طنز دارند.

۸- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.

۹- تصحیح برگه آزمون روز دوم، مشروط به کسب حد نصاب مورد نظر کمیته علمی در آزمون تستی روز اول مرحله دوم می‌باشد.

پایگاه اطلاع رسانی کمیته ملی کامپیوتر: www.inoi.ir

بیست و هشتمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۷/۲/۵

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

هدیه‌ی معین... ۲۰ امتیاز

۱- مصطفی برای جشن تولدش، معین را دعوت کرده است. معین تصمیم گرفته کادوی تولد مصطفی را خودش بسازد. به دلیل علاقه‌ی مصطفی به گراف، معین یک گراف ساده‌ی ۲۰۱۸ رأسی با تعدادی توپ (به عنوان رأس) و میله (به عنوان یال) ساخته است.

روز قبل از تولد، معین یادش می‌آید مصطفی فقط گراف‌های ساده‌ای را دوست دارد که درجه‌ی تمام رأس‌ها در آن فرد است. معین می‌خواهد با اضافه کردن تعدادی میله (یال) به گراف کاری کند که درجه‌ی تمام رأس‌ها فرد شود و هم‌چنان گراف به صورت ساده باقی بماند.

او با بررسی گرافش متوجه شد تنها یک روش برای این کار وجود دارد! حداقل تعداد یال‌های ممکن برای گراف معین (قبل از اقدام برای اضافه کردن یال‌ها) را بیابید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

معین حریص.. ۲۰ امتیاز

۲- پس از حل مشکل تولد (در مسئله‌ی قبل)، مصطفی برای این که جشن تولد جذابی داشته باشد، یک بازی بین خود، امیر و معین برگزار می‌کند. پیش از شروع تولد، مصطفی $۱۷^{۳}$ عدد شکلات خریداری کرده و آن را درون یک مکعب $۱۷ \times ۱۷ \times ۱۷$ چیده است (در هر خانه دقیقا یک شکلات). شکلات واقع در سطر x، ستون y و ارتفاع z را با (x, y, z) نشان می‌دهیم. بازی به این صورت است که در آغاز کار، امیر شکلات $(۱,۱,۱)$ را خورده و بازی شروع می‌شود. سپس مصطفی، معین و امیر به نوبت بازی می‌کنند.

مصطفی در نوبت خود می‌تواند شکلات سمت راست یا سمت چپی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x+۱, y, z)$ یا $(x-۱, y, z)$ را بخورد.

معین می‌تواند شکلات جلو یا عقبی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x, y+۱, z)$ یا $(x, y-۱, z)$ را بخورد.

امیر می‌تواند شکلات بالا یا پایینی آخرین شکلات خورده شده را بخورد؛ یعنی اگر (x, y, z) آخرین شکلات خورده شده باشد، می‌تواند $(x, y, z+۱)$ یا $(x, y, z-۱)$ را بخورد.

اگر کسی نتواند در نوبت خود شکلاتی بخورد، می‌بازد و بازی تمام می‌شود.

الف) مصطفی برای این که دوست دارد تحت هر شرایطی امیر ببازد، با معین تبانی می‌کند و این دو سعی می‌کنند به نحوی بازی کنند که امیر ببازد. آیا این دو نفر می‌توانند طوری بازی کنند که امیر هرطور بازی کند بازنده باشد؟

ب) امیر که از این موضوع خبردار می‌شود، معین را راضی می‌کند که با او هم‌کاری کند. آیا امیر و معین می‌توانند طوری بازی کنند که مصطفی هرطور بازی کند بازنده باشد؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس
استفاده کنید مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

بیست و هشتمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۷/۲/۵

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

در جست و جوی مصطفی.. ۲۰ امتیاز

۳- مصطفی بعد از این‌که متوجه شد معین، دوست صمیمی او، با امیر توطئه کرده است تا او را شکست بدهد، از ناراحتی سر به بیابان می‌گذارد. n نفر از دوستان مصطفی از این موضوع مطلع می‌شوند و به دنبال او به بیابان می‌روند تا او را پیدا کنند و برگردانند.

بیابان یک زمین مسطح است (زمین از هر چهار طرف نامتناهی) که افراد می‌توانند در مختصات صحیح آن حرکت کنند. مصطفی روی یکی از این نقاط پنهان شده و به‌علت ناراحتی بسیار، از جایش تکان نمی‌خورد. تنها کسی او را می‌بیند که دقیقا روی همان نقطه باشد.

این n نفر در نقاطی دلخواه از بیابان مستقر شده و هرکدام جهتی را انتخاب می‌کنند (بالا، پایین، چپ یا راست). پس از شروع، هرکدام در جهتی که انتخاب کرده حرکت می‌کند و هر ثانیه یک قدم بر می‌دارد (یک واحد حرکت می‌کند و به نقطه‌ی صحیح بعدی می‌رود).

اگر دو نفر از روبه‌رو، در یک نقطه‌ی صحیح به هم برخورد کنند، هردو جهت خود را به سمت راست خود تغییر می‌دهند (۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت) و در جهت جدید، حرکت خود را ادامه می‌دهند. دقت کنید اگر دو نفر از جهت دیگری به هم برسند یا بین دو نقطه‌ی صحیح با هم روبه‌رو شوند، از کنار هم عبور کرده و تغییر جهت نمی‌دهند.

آیا دوستان مصطفی همواره می‌توانند طوری در بیابان قرار گیرند و جهت‌های مناسبی انتخاب کنند، که حتما مصطفی را پیدا کنند؟

بیست و هشتمین دوره المپیاد کامپیوتر روز دوم - ۱۳۹۷/۲/۵

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

احترام به پدر.. ۲۰ امتیاز

۴- پس از این که تولد مصطفی به خوبی برگزار نشد، خانواده‌ی او تصمیم گرفتند یک جشن تولد مردانه با حضور جمعی از مردان خاندان برگزار کنند. n نفر از مردان خاندان (از جمله بزرگ خاندان) در جشن شرکت کردند و به طرز جالبی پدر هر فرد حاضر در جشن (به جز بزرگ خاندان)، در تولد حضور داشت.

گوییم فرد A جد فرد B است، اگر A یکی از افراد زیر باشد:

پدر B، پدر پدر B، پدر پدر پدر B، ...، بزرگ خاندان

به زیرمجموعه‌ای از افراد حاضر در جشن **سلسله‌ای** گوییم، اگر از هر دو عضو زیرمجموعه، یکی جد دیگری باشد و هم‌چنین به جز بزرگ‌ترین فرد زیرمجموعه، پدر هر فرد زیرمجموعه، در زیرمجموعه باشد.

در انتهای جشن مصطفی تصمیم گرفت برای یادگاری تعداد عکس تهیه کند. او برای این کار یک عکاس آورد. بزرگ خاندان به عکاس گفت که تنها از زیرمجموعه‌های سلسله‌ای افراد حاضر در جشن، عکس بگیرد. سپس عکاس گفت که عکاسی از هر زیرمجموعه‌ی سلسله‌ای S_i، هزینه‌ی T_i را دارد.

خاندان مصطفی بسیار خانواده دوست هستند و به پدر خود احترام می‌گذارند. بنابراین تصمیم گرفتند تعدادی عکس بگیرند، طوری که هر کس با پدر خود در دست کم دو عکس آمده باشد. مصطفی برآورد کرد کمینه‌ی هزینه‌ی ممکن برای این کار m واحد است. ثابت کنید افراد می‌توانند کار خود را با m واحد هزینه، طوری انجام دهند که از هر زیرمجموعه‌ی سلسله‌ای، صفر یا دو بار عکس گرفته شده باشد.

کلید کد ۱:

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۴
۵) ۱
۶) ۱
۷) ۴
۸) ۴
۹) ۴
۱۰) ۲
۱۱) ۵
۱۲) ۳
۱۳) ۵
۱۴) ۴
۱۵) ۳
۱۶) ۱
۱۷) ۱
۱۸) ۴
۱۹) ۴
۲۰) جواب در گزینه‌ها موجود نیست و سوال باید حذف شود

رشته .... ۲۵ امتیاز

یک رشته‌ی n رقمی از حروف A، B و C داریم. در هر مرحله می‌توانیم دو حرف متوالي و متفاوت از رشته در نظر بگیریم و آن‌ها را با حرف سوم جایگزین کنیم. منظور از حرف سوم، حرفی از مجموعه‌ی $\{A,B,C\}$ است که در میان دو حرف گفته شده نیامده است. برای مثال می‌توانیم با تغییر حروف چهارم و پنجم (از سمت چپ) رشته‌ی $ABCBAA$ آن را به $ABCCCA$ تبدیل کنیم. فرض کنید تعداد حروف A، B و C در رشته‌ی گفته شده به ترتیب a، b و c باشد. باقی‌مانده‌ی a، b و c در تقسیم بر ۳ را به ترتیب r_a، r_b و r_c در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر دست کم دو تا از سه عدد r_a، r_b و r_c برابر باشند، می‌توانیم با تعدادی مرحله تمام حروف رشته را برابر کنیم.

پیاده‌سازی توابع .... ۲۵ امتیاز

یک زبان برنامه‌نویسی جدید داریم که در آن به پیاده‌سازی توابع می‌پردازیم. پیش از صحبت در مورد این زبان برنامه‌نویسی، مجموعه‌ی اعداد سرخ را تعریف می‌کنیم که برابر {۰,۱,۲} است. در این زبان برنامه‌نویسی فقط از اعداد سرخ استفاده می‌شود. به عبارت دیگر مقدار هر متغیر، هر عدد، هر ورودی، هر خروجی و ... فقط می‌تواند عدد سرخ باشد.

تنها تابع آماده‌ی این زبان، تابع branko است. این تابع دو عدد سرخ از ورودی می‌گیرد و یک عدد سرخ در خروجی برمی‌گرداند. این تابع را با $b(x,y)$ نشان می‌دهیم. خروجی این تابع به شکل زیر محاسبه می‌شود:

۱. ابتدا عدد کم‌تر در میان x و y انتخاب می‌شود.
۲. عدد انتخاب شده با یک جمع می‌شود.
۳. حاصل تابع، باقی‌مانده‌ی عدد محاسبه شده در تقسیم بر ۳ است.

برای درک به‌تر در جدول زیر خروجی تابع را به ازای ورودی‌های مختلف نوشته‌ایم:

$b(x,y)$	y	x
۱	۰	۰
۱	۱	۰
۱	۲	۰
۱	۰	۱
۲	۱	۱
۲	۲	۱
۱	۰	۲
۲	۱	۲
۰	۲	۲

هر برنامه در این زبان در قالب زیر نوشته می‌شود:

۱. در خط یکم برنامه، نام ورودی‌ها نوشته می‌شود. برای مثال، خط یکم یک برنامه با چهار ورودی می‌تواند به شکل زیر باشد:

$$x \quad y \quad inp \quad z2$$

۲. در خط دوم برنامه، نام خروجی نوشته می‌شود. در این زبان هر برنامه فقط یک خروجی دارد. برای مثال، خط دوم یک برنامه می‌تواند به شکل زیر باشد:

$$ans5$$

۳. در خط سوم برنامه، نام متغیرهای دیگری که در برنامه استفاده خواهد شد، نوشته می‌شود. برای مثال، خط سوم یک برنامه می‌تواند به شکل زیر باشد:

$$tmp1 \quad tmp2 \quad t4 \quad a \quad b$$

۴. از خط چهارم به بعد برنامه، قالب کلی هر خط به شکل زیر است:

$$v \leftarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

که در آن v یک متغیر ورودی، متغیر خروجی یا از متغیرهای دیگر است. هم‌چنین f یک تابع از پیش تعریف شده با n ورودی است. هر کدام از a_i ها نیز باید یک عدد سرخ یا یک متغیر مقداردار باشند. برای مثال یک نمونه در زیر آمده است (فرض کنید g یک تابع از پیش تعریف شده، x یک متغیر ورودی و r یک متغیر مقداردار است):

$$tmp1 \leftarrow g(2, x, r, x)$$

برای آشنایی بیش‌تر شما با این زبان یک مثال می‌زنیم. فرض کنید می‌خواهیم تابع $min(x, y)$ را پیاده‌سازی کنیم که با گرفتن دو عدد سرخ از ورودی، عدد کم‌تر را در خروجی برمی‌گرداند. شکل دقیق عمل‌کرد این تابع در جدول زیر آمده است:

$min(x, y)$	y	x
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۲	۰
۰	۰	۱
۱	۱	۱
۱	۲	۱
۰	۰	۲
۱	۱	۲
۲	۲	۲

توجه کنید قبل از نوشتن این برنامه، هیچ تابع دیگری تعریف نشده و تنها می‌توانیم از تابع $branko$ استفاده کنیم. پس از پیاده‌سازی تابع min می‌توانیم در برنامه‌های بعدی از آن استفاده کنیم. روش زیر، یک پیاده‌سازی برای تابع min است:

```
x  y
z
t
t <- b(x,y)
t <- b(t,t)
z <- b(t,t)
```

حال در هر یک از قسمت‌های زیر، باید به پیاده‌سازی تابع گفته شده بپردازید. می‌توانید قبل از پیاده‌سازی توابع گفته شده، توابعی دیگر را به ترتیبی مشخص در برنامه‌هایی جداگانه پیاده‌سازی کنید و از آن‌ها در برنامه‌های بعدی کمک بگیرید. برای هر تابعی که پیاده‌سازی می‌کنید، توضیح مختصری نیز ارائه دهید. توضیح تنها یا پیاده‌سازی تنها نمره‌ای نخواهد داشت و هر دو باید با هم انجام شود.

آ) تابع max را پیاده‌سازی کنید. این تابع دو ورودی می‌گیرد و عدد بیش‌تر را برمی‌گرداند. (۱۰ نمره)

ب) دو تابع $d1$ و $d3$ را پیاده‌سازی کنید که هر کدام دو ورودی می‌گیرند و باید به شکل زیر کار کنند:

$d3(x,y)$	$d1(x,y)$	y	x
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۲	۰	۲	۰
۱	۰	۰	۱
۲	۰	۱	۱
۰	۱	۲	۱
۲	۰	۰	۲
۰	۱	۱	۲
۱	۱	۲	۲

در حقیقت با کنار هم گذاشتن حاصل‌های $d1(x,y)$ و $d3(x,y)$ برای یک x و y مشخص، حاصل جمع دو رقمی x و y در مبنای سه به دست می‌آید. (۱۵ نمره)

صفحه .... ۲۵ امتیاز

روی یک صفحه n خط راست کشیده‌ایم، طوری که هیچ دو خطّی موازی و هیچ سه خطّی هم‌رس نیستند. این خطوط، صفحه را به تعدادی ناحیه افراز کرده‌اند. ثابت کنید می‌توانیم در هر یک از ناحیه‌ها یک عدد صحیح بنویسیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- اعداد نوشته شده دو به دو متمایز باشند.
- جمع چهار عدد ناحیه‌های مجاور هر نقطه‌ی ناشی از برخورد خطوط برابر ۰ باشد.

دورهای مرتبط ...... ۲۵ امتیاز

فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۵ است. یک گراف ساده‌ی n رأسی داریم که هر دو دور آن، دست کم یک رأس مشترک دارند. بیشینه‌ی تعداد یال‌های این گراف را بر حسب n بیابید.

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۵ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دفترچه سوالات بیست و هفتمین دوره المپیاد کامپیوتر- روز اول

تاریخ: ۱۳۹۶/۱/۲۹

تعداد سوالات	ساعت شروع	مدت آزمون (دقیقه)
۲۵	۱۴:۰۰	۲۲۵

شماره پرونده:
استان:
کد ملی:
منطقه:
نام پدر:
پایه تحصیلی:
نام مدرسه:
حوزه:

کد دفترچه: ۱
شماره صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- کد دفترچه شما یک است. این کد را با کدی که روی پاسخ‌نامه نوشته شده است تطبیق دهید. در صورت وجود مغایرت، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه را بررسی نمایید و از وجود همه برگه‌های دفترچه سوالات مطمئن شوید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳- یک برگه پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴- کلیه جواب‌ها باید در پاسخ‌نامه وارد شود. بدیهی است موارد مندرج در دفترچه سوالات تصحیح نشده و به آن‌ها هیچ نمره‌ای تعلق نخواهد گرفت.

۵- نام و نام خانوادگی خود را روی کلیه صفحات دفترچه سوالات و پاسخ‌نامه بنویسید.

۶- برگه پاسخ‌نامه شما را دستگاه تصحیح می‌کند. پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و بعلاوه پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملا سیاه کنید.

۷-پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست یک نمره منفی دارد.

۸- ترتیب گزینه‌ها به صورت تصادفی است. سوالات ۱۲ تا ۲۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.

۹- همراه داشتن لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب می‌شود.

۱۰- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش‌آموزان پایه دهم و سوم متوسطه انتخاب می‌شوند.

۱۱- دفترچه سوالات باید همراه پاسخ‌نامه به مسئولین جلسه تحویل شود.

پایگاه اطلاع رسانی کمیته ملی کامپیوتر: www.inoi.ir

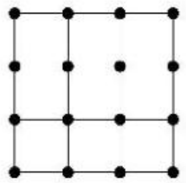
مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد کامپیوتر کشور

نام و نام خانوادگی:

۱ دستگاهی داریم که یک عدد دودویی ۹ رقمی روی نمایش‌گر آن دیده می‌شود. در ابتدا این عدد برابر ۰۰۰۱۰۱۱۰۱ یا همان ۴۵ است. این دستگاه دکمه‌ای دارد که اگر آن را فشار دهیم، عدد روی نمایش‌گر یک واحد زیاد می‌شود. آن قدر دکمه را می‌زنیم تا به نمایش دودویی عدد ۴۲۳ برسیم. هر کدام از این ۹ رقم در طول مراحل چندین بار تغییر کرده‌اند. مجموع تعداد این تغییرها چند تاست؟

۱) ۷۴۸   ۲) ۷۵۳   ۳) ۷۴۴   ۴) ۷۵۱   ۵) ۷۵۴

۲ در گراف زیر حداقل چند یال باید حذف کنیم تا طول هیچ دوری بیش از چهار نباشد؟



۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۹   ۴) ۶   ۵) ۸

۳ یک جدول ۴ × ۴ داریم و می‌خواهیم هر یک از خانه‌های آن را با سیاه یا سفید رنگ کنیم. یک خانه را **امن** گوییم، اگر در ستون اوّل، ستون آخر و سطر پایین نباشد و هم‌چنین هر سه خانه‌ی مجاور چپ، راست و پایین آن سیاه باشند. به چند طریق می‌توان خانه‌های جدول را رنگ‌آمیزی کرد، طوری که خانه‌ی امن نداشته باشیم؟

۱) ۳۱۶۸۴   ۲) ۱۷۸   ۳) ۱۹۳۲۱   ۴) ۲۲۵۰۰   ۵) $۲^{۱۲}$

۴ در مغازه‌ی گل‌فروشی دو گل قرمز، دو گل بنفش و دو گل زرد در یک ظرف دربسته قرار دارد. مرتضی طبق روال زیر، یک گل برای خود می‌خرد:

> ابتدا رنگ دل‌خواهش را قرمز انتخاب می‌کند و تصمیم می‌گیرد یک گل قرمز بخرد. سپس یک گل به تصادف از ظرف برمی‌دارد. اگر گل برداشته شده به رنگ دل‌خواهش بود، آن را می‌خرد و کار تمام می‌شود؛ در غیر این صورت رنگ دل‌خواهش را به رنگ آن گل تغییر می‌دهد و گل را به ظرف برمی‌گرداند. دوباره یک گل به تصادف از ظرف برمی‌دارد و همین روند تکرار می‌شود تا بالأخره یک گل خریده شود.

مرتضی به چه احتمالی گل قرمز خواهد خرید؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ ۵) $\frac{۳}{۵}$

۵ ۱۰۰ زیرجدول ۱۰۰ × ۱۰۰ متمایز در یک جدول ۲۰۰ × ۲۰۰ داریم. حداکثر چند خانه از جدول در تمام این زیرجدول‌ها هستند؟

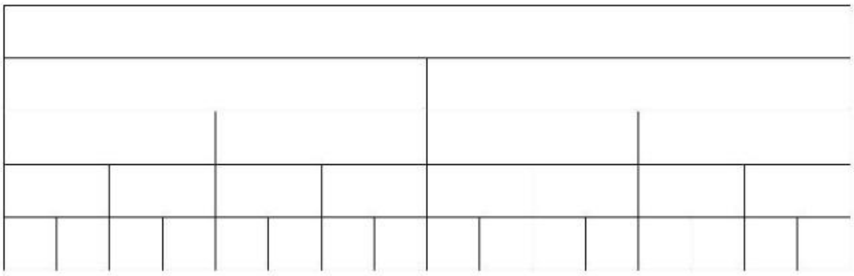
۱) ۶۴۰۰   ۲) ۹۰۰   ۳) ۸۱۰۰   ۴) ۱۰۰   ۵) ۸۲۸۱

نام و نام خانوادگی:

۶ ۱۰۰ زیرجدول ۱۰۰ × ۱۰۰ متمایز در یک جدول ۲۰۰ × ۲۰۰ داریم. حداکثر چند خانه از جدول هستند که در دقیقن ۹۹ تا از این زیرجدول‌ها آمده باشند؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۸۲۸۱ ۳) ۸۱۰۰ ۴) ۹۰۰۰ ۵) ۶۴۰۰

۷ دیوار زیر را در نظر بگیرید:



این دیوار از تعدادی آجر تشکیل شده است. به جز آجرهای سطر پایین، زیر هر کدام از آجرها دو آجر کوچک‌تر وجود دارد که آن‌ها را **فرزندان** آجر گفته شده می‌نامیم. در هر یک از شرایط زیر، گوییم آجر X به آجر Y راه دارد:

۱. Y فرزند X باشد.
۲. هر دو آجر در یک سطر بوده و مرز مشترک داشته باشند.
۳. هر دو آجر در یک سطر بوده و یکی در انتها و دیگری در ابتدای سطر باشد.

حال می‌خواهیم از آجر بالای دیوار شروع کنیم، هر مرحله به یک آجر که به آن راه داریم، برویم و کار را در یکی از آجرهای سطر پایین تمام کنیم. ممکن است در این مسیر، چند آجر از سطر پایین ببینیم و لزومن به محض رسیدن به سطر پایین، کار را تمام نمی‌کنیم. هم‌چنین تنها دنباله‌ی آجرها در مسیر مهم است و نحوه‌ی رفتن آن‌ها به یک‌دیگر مهم نیست. برای مثال دو آجر سطر دوم (از بالا) را در نظر بگیرید. این دو هم به دلیل شرط (۲) و هم به دلیل شرط (۳) به هم راه دارند. حال اگر در مسیری، از یکی از آن‌ها به دیگری برویم، مهم نیست از شرط (۲) استفاده کرده‌ایم یا شرط (۳). هم‌چنین با توجّه به شرایط گفته شده، امکان حرکت رو به بالا وجود ندارد. چند مسیر به شکل گفته شده وجود دارد، طوری که از هر آجر حداکثر یک بار بگذریم؟

۱) ۳۲۵۵×۲^{۴} ۲) ۳۲۵۵×۲^{۵} ۳) $۲^{۱۷}$ ۴) ۳۲۵۵×۲ ۵) $۲^{۱۴}$

۸ یک گراف کامل ۱۱ رأسی با رأس‌های ۰، ۱، ... و ۱۰ داریم. روی یال بین رأس‌های i و j مقدار باقی‌مانده‌ی $i + j$ در تقسیم بر ۱۱ را نوشته‌ایم. **عدد** یک مسیر را کم‌ترین عدد در میان یال‌های آن مسیر می‌نامیم. دو رأس دل‌خواه در نظر بگیرید. بیشینه‌ی عدد مسیر را در میان مسیرهای بین این دو رأس، میزان **دوستی** این دو رأس می‌نامیم. می‌خواهیم یک زیرگراف فراگیر از گراف داده شده انتخاب کنیم، طوری که میزان دوستی هر دو رأس در زیرگراف برابر با میزان دوستی‌شان در گراف اصلی باشد. کمینه‌ی ممکن مجموع اعداد یال‌های این زیرگراف چیست؟

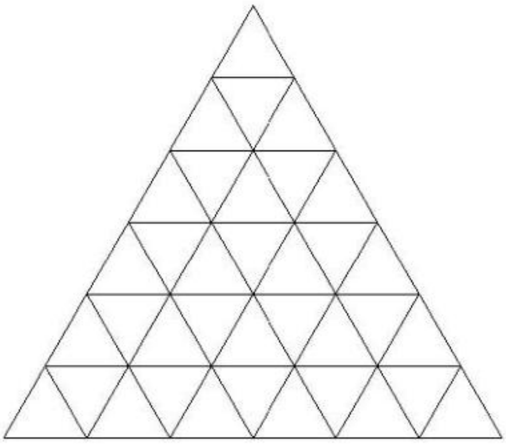
۱) ۲۷۰ ۲) ۵ ۳) ۹۵ ۴) ۱۰۱ ۵) ۲۷۵

نام و نام خانوادگی:

۹ فرض کنید ABC یک مثلّث متساوی‌الاضلاع باشد. **مکمّل** این مثلّث به شکل زیر ساخته می‌شود:

> یک رأس مثلّث را انتخاب می‌کنیم. برای مثال فرض کنید رأس A انتخاب شود. B و C را نسبت به A قرینه می‌کنیم تا نقاط B' و C' به دست آیند. مثلّث $AB'C'$ را مکمّل مثلّث ABC می‌نامیم.

توجه کنید یک مثلّث متساوی‌الاضلاع در صفحه دارای سه مکمّل است. حال یک مثلّث متساوی‌الاضلاع در صفحه در نظر بگیرید. هر ضلع آن را به n بخش برابر تقسیم کنید و با کشیدن خطوط موازی با اضلاع، درون مثلّث را به $n^۲$ مثلّث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم کنید. به مثلّث حاصل، یک **مثلّث مشبّک** n **تایی** گفته می‌شود. برای مثال شکل زیر یک مثلّث مشبّک شش تایی است:



به هر کدام از $n^۲$ مثلّث کوچک، **مثلّثک** می‌گوییم. گوییم مثلّثک P با مثلّثک Q **ارتباط** دارد، اگر بتوانیم از P شروع کرده، در هر مرحله به یک مثلّثک مکمّل برای مثلّثک فعلی برویم و در انتها به Q برسیم. توجه کنید در حین این مسیر نباید از مثلّث اصلی خارج شویم و تنها می‌توانیم از مثلّثک‌ها استفاده کنیم.
یک مثلّث مشبّک ۳۰ تایی در نظر بگیرید. می‌خواهیم تعدادی مثلّثک انتخاب کنیم، طوری که هر مثلّثک دیگر با دست کم یکی از مثلّثک‌های انتخاب شده ارتباط داشته باشد. کمینه‌ی تعداد مثلّثک‌هایی که باید انتخاب کنیم، چیست؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۶

۱۰ در ابتدا یک باکتری و یک لانه داریم. در هر مرحله هر باکتری می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد:

- یک لانه بسازد.
- درون یک لانه‌ی خالی برود و تکثیر شود؛ یعنی به دو باکتری تبدیل شود.

توجّه کنید در یک مرحله، در هر لانه حداکثر یک باکتری می‌تواند قرار بگیرد و تکثیر شود. پس از هفت مرحله، بیشینه‌ی ممکن تعداد باکتری‌ها چیست؟

۱) ۲۹ ۲) ۲۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶ ۵) ۳۴

نام و نام خانوادگی:

۱۱ سلطان n دست‌کش، n کلاه و n شال‌گردن دارد. هر کدام از دست‌کش‌ها، کلاه‌ها و شال‌گردن‌ها به یکی از سه رنگ قرمز، آبی و سبز هستند. او می‌خواهد n دست لباس زمستانی بسازد (هر دست شامل یک دست‌کش، یک کلاه و یک شال‌گردن است). **امتیاز** هر دست لباس، به اندازه‌ی تعداد رنگ‌هایی است که در آن به کار رفته است. برای مثال یک دست لباس شامل یک دست‌کش آبی، یک کلاه قرمز و یک شال‌گردن آبی دو امتیاز دارد. هدف سلطان، بیشینه کردن مجموع امتیاز n دست لباس است.

ایلیچ به سلطان برای ساختن n دست لباس، الگوریتم زیر را پیشنهاد داده است:

> تا زمانی که می‌توانیم با دست‌کش‌ها، کلاه‌ها و شال‌گردن‌های موجود یک دست لباس ۳ امتیازی دل‌خواه می‌سازیم. سپس تا زمانی که می‌توانیم یک دست لباس ۲ امتیازی دل‌خواه می‌سازیم و در انتها دست‌های ۱ امتیازی تشکیل می‌دهیم.

از میان گزاره‌های زیر، کدام گزاره یا گزاره‌ها صحیح هستند؟

آ) الگوریتم ایلیچ هم‌واره سلطان را به هدف‌ش می‌رساند؛ یعنی بیشینه‌ی مجموع امتیاز ممکن را می‌سازد.

ب) اگر در میان ۳n عنصر موجود از هر رنگ n عنصر داشته باشیم، می‌توان n دست لباس با مجموع امتیاز ۳n ساخت.

ج) اگر در میان ۳n عنصر موجود از هر رنگ n عنصر داشته باشیم، الگوریتم ایلیچ بیشینه‌ی مجموع امتیاز ممکن را می‌سازد.

د) اگر دست ۳ امتیازی قابل ساخت نباشد و هم‌چنین دست‌کش‌ها از دقیقن دو رنگ، کلاه‌ها از دقیقن دو رنگ و شال‌گردن‌ها نیز از دقیقن دو رنگ باشند، می‌توان نتیجه گرفت که ۳n عنصر موجود دقیقن از دو رنگ هستند.

۱) هیچ کدام از گزاره‌ها ۲) گزاره‌های ب، ج و د ۳) گزاره‌های ب و د ۴) فقط گزاره‌ی د ۵) تمام گزاره‌ها

یک جدول $n \times n$ داریم. دو خانه از این جدول را **مجاور** گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. ابتدا در هر یک از خانه‌های سطر پایین جدول یک مهره قرار گرفته است. در هر مرحله هر مهره می‌تواند ساکن بماند و یا به یک خانه‌ی مجاور برود. توجّه کنید قرار گرفتن بیش از یک مهره در یک خانه مشکلی ندارد. در پایان باید در هر یک از خانه‌های سطر بالای جدول یک مهره قرار گرفته باشد. می‌خواهیم کمینه‌ی تعداد مراحل لازم برای این کار را بیابیم، طوری که در حین مراحل، هر دو مهره در دست کم یک مرحله در یک خانه بوده باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ پاسخ مسئله به ازای $n =$ ۱۱ چیست؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰ ۵) ۳۳

۱۳ پاسخ مسئله به ازای $n =$ ۱۰ چیست؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۱ ۳) ۹۹ ۴) ۱۸ ۵) ۱۹

نام و نام خانوادگی:

یک گراف ساده را **سلطانی** گوییم، اگر اختلاف درجه‌ی هیچ دو رأس آن برابر یک نباشد. برای مثال گراف زیر سلطانی نیست، زیرا هم رأس با درجه‌ی یک و هم رأس با درجه‌ی دو دارد:

توجه کنید در یک گراف سلطانی، وجود دو رأس با درجه‌ی برابر مشکلی ندارد. برای مثال، گراف زیر سلطانی است:

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ یک گراف ساده‌ی ۱۱ رأسی سلطانی داریم که کامل نیست. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۳ ۳) ۵۲ ۴) ۴۵ ۵) ۵۴

۱۵ یک گراف ساده‌ی ۱۱ رأسی سلطانی داریم. در این گراف هیچ سه رأسی وجود ندارد که دو به دو به هم وصل باشند. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۹ ۳) ۲۸ ۴) ۲۷ ۵) ۳۰

---

۲۲ نفر می‌خواهند با هم فوتبال بازی کنند. آن‌ها برای این کار باید به دو تیم ۱۱ نفری غیر نشان‌دار تقسیم شوند. منظور از غیر نشان‌دار این است که تیم‌ها نام و شماره‌ی اعضا ندارند. در حقیقت، تنها هم‌تیمی بودن و نبودن افراد مهم است. هر یک از این ۲۲ نفر به یک نفر دیگر علاقه دارد. به فرد مورد علاقه، **محبوب** او نیز می‌گوییم. طبیعی است که رابطه‌ی محبوب بودن لزومن دوطرفه نیست! هر یک از این ۲۲ نفر از یک نفر دیگر متنفّر است. به فرد مورد تنفّر، **منفور** او نیز می‌گوییم. بالطّبع رابطه‌ی تنفّر نیز لزومن دوطرفه نیست!
طبیعی است که کسی محبوب یا منفور خودش نیست! هم‌چنین یک نفر می‌تواند محبوب یا منفور بیش از یک نفر باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ می‌خواهیم تیم‌کشی طوری انجام شود که هیچ کس با منفورش هم‌تیم نباشد. در میان تمام حالات برای روابط افراد، کمینه و بیشینه‌ی تعداد حالات تیم‌کشی به ترتیب چیست؟

۱) ۱ و ۱ ۲) ۰ و 2^{11} ۳) ۱ و 2^{11} ۴) ۰ و ۱ ۵) ۰ و 2^{10}

نام و نام خانوادگی:

۱۷ می‌خواهیم تیم‌کشی طوری انجام شود که هر کس با محبوب‌ش هم‌تیم باشد. در میان تمام حالات برای روابط افراد، بیشینه‌ی تعداد حالات تیم‌کشی چیست؟

۱) ۷۰
۲) ۰
۳) ۲۴
۴) ۷۲۰
۵) ۲۵۲

محسن یک دیگ بزرگ برنج و یک قاشق دارد. به او گفته می‌شود که تعدادی روز فرصت دارد تا برنج بخورد. تعداد دقیق روزها به محسن گفته نمی‌شود، امّا به او گفته می‌شود این تعداد از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است. به عبارت دقیق‌تر محسن به احتمال $\frac{۱}{n}$ دقیقن یک روز فرصت دارد، به احتمال $\frac{۱}{n}$ دقیقن دو روز فرصت دارد، ... و به احتمال $\frac{۱}{n}$ دقیقن n روز فرصت دارد. محسن در هر روز می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد:

- تعداد قاشق‌هایش را دو برابر کند.
- هر قاشق‌ش را پر از برنج کند و بخورد.

هر گاه فرصت محسن تمام شود، به او گفته می‌شود که پایان کار فرا رسیده است! محسن می‌خواهد روشی را در پیش بگیرد که امید ریاضی مجموع میزان برنجی که می‌خورد بیشینه شود. به عبارت دیگر او می‌خواهد روشی در پیش گیرد که به طور میانگین در میان n حالت موجود (برای تعداد روزهایی که فرصت دارد)، بیش‌ترین میزان برنج خورده شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۸ فرض کنید $n = ۴$ باشد؛ یعنی به محسن گفته می‌شود تعداد روزهای فرصت‌ش از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است. بیشینه‌ی امید ریاضی گفته شده چند قاشق برنج است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۱۷}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۴
۵) ۸

۱۹ فرض کنید $n = ۲۰$ باشد؛ یعنی به محسن گفته می‌شود تعداد روزهای فرصت‌ش از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ است. بیشینه‌ی امید ریاضی گفته شده چند قاشق برنج است؟

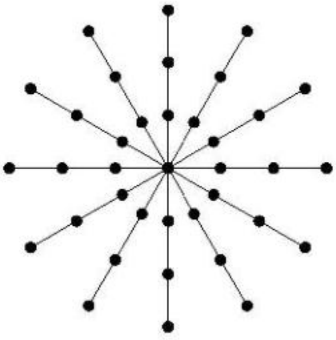
۱) $۲^{۱۹}$
۲) $\frac{۲۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۵} \times ۲^{۱۵}$
۴) $۲^{۱۵}$
۵) $\frac{۳}{۵} \times ۲^{۱۶}$

فرض کنید یک گراف ساده‌ی همبند داریم. **فاصله‌ی** دو رأس در گراف، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌هاست. **استادِ بزرگ** یکی از رأس‌های گراف را در ذهن خود انتخاب می‌کند و ما باید آن رأس را پیدا کنیم. ما در هر مرحله می‌توانیم یک رأس گراف را به استاد بزرگ بدهیم و او فاصله‌ی رأس ما تا رأس خودش را می‌گوید. کمینه‌ی تعداد مراحلی که لازم داریم تا به طور تضمینی بتوانیم رأس استاد بزرگ را پیدا کنیم، **عدد گراف** می‌نامیم. لزومی ندارد در روند یافتن رأس استاد بزرگ، فاصله‌ی خود این رأس نیز از استاد بزرگ پرسیده شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

نام و نام خانوادگی:

۲۰ عدد گراف زیر چیست؟



۱) ۱۱　　۲) ۱۲　　۳) ۱۳　　۴) ۱۰　　۵) ۹

۲۱ تمام گراف‌های ساده‌ی همبند را در نظر بگیرید که دقیقن ۱۰۰ رأس و ۱۰۰ یال دارند. کمینه و بیشینه‌ی عدد گراف در میان گراف‌های گفته شده به ترتیب چیست؟

۱) ۱ و ۹۷　　۲) ۲ و ۹۸　　۳) ۲ و ۹۷　　۴) ۱ و ۹۸　　۵) ۱ و ۹۹

۲۲ یک گراف ۱۳۹۶ رأسی با رأس‌های ۱، ۲، ... و ۱۳۹۶ داریم. در این گراف، دو رأس با شماره‌های i و j به هم وصل هستند، اگر و تنها اگر ۱۰ $\leqslant |i - j|$ باشد. عدد این گراف چیست؟

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۵　　۴) ۱۱　　۵) ۱۴۰

فرض کنید یک جدول داریم. دو خانه از جدول را **مجاور** گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به یک مجموعه از خانه‌های جدول **همبند** گوییم، اگر به ازای هر دو خانه‌ی آن مانند x و y بتوانیم از x شروع کرده، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور از آن مجموعه برویم و پس از تعدادی مرحله به y برسیم. می‌خواهیم خانه‌های جدول را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم، طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

- خانه‌های هر رنگ، یک مجموعه‌ی همبند تشکیل بدهند.
- شکل حاصل از خانه‌های سیاه و شکل حاصل از خانه‌های سفید، هم‌نهشت (قابل انطباق در صفحه با عملیّات‌های انتقال، دوران و تقارن) باشند.

هدف ما پیدا کردن تعداد روش‌های انجام این رنگ‌آمیزی است. در این دسته سؤال، دو رنگ‌آمیزی را که با دوران، تقارن و اعمال مشابه از روی هم به دست بیایند، متفاوت در نظر می‌گیریم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳ تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را در یک جدول ۲ × ۸ بیابید.

۱) ۱۴　　۲) ۱۲　　۳) ۱۶　　۴) ۸　　۵) ۶

نام و نام خانوادگی:

۲۴ تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را در یک جدول ۴ × ۴ بیابید.

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) ۳۶ ۴) ۵۲ ۵) ۴۴

۲۵ این بار فرض کنید یک مکعّب ۲ × ۲ × ۲ داریم. دو مکعّب واحد را **مجاور** گوییم، اگر یک وجه مشترک داشته باشند. به یک مجموعه از مکعّب‌های واحد **همبند** گوییم، اگر به ازای هر دو مکعّب واحد آن مانند x و y بتوانیم از x شروع کرده، در هر مرحله به یک مکعّب واحد مجاور از آن مجموعه برویم و پس از تعدادی مرحله به y برسیم. می‌خواهیم مکعّب‌های واحد را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنیم، طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

- مکعّب‌های واحد هر رنگ، یک مجموعه‌ی همبند تشکیل بدهند.
- شکل حاصل از مکعّب‌های واحد سیاه و شکل حاصل از مکعّب‌های واحد سفید، هم‌نهشت (قابل انطباق در فضا با عملیّات‌های انتقال، دوران و تقارن) باشند.

تعداد روش‌های رنگ‌آمیزی گفته شده را بیابید.

۱) ۴۰ ۲) ۳۲ ۳) ۲۶ ۴) ۱۴ ۵) ۳۸

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

کلید اولیه آزمون المپیاد کامپیوتر
مرحله دوم کد ۱
تاریخ برگزاری ۹۶/۱/۲۹

نام و نام خانوادگی خود را با دستخط بنویسید

نام	نام خانوادگی
....	....

تمام سلول مورد نظر مطابق نمونه صحیح پر شود: صحیح ■ غلط ▨ ✗ ✓ ⊙ ▬ ◧

۱	۱	۲	۳	۴	■
۲	■	۲	۳	۴	۵
۳	■	۲	۳	۴	۵
۴	۱	۲	■	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴	■
۶	۱	■	۳	۴	۵
۷	۱	■	۳	۴	۵
۸	۱	۲	■	۴	۵
۹	۱	۲	۳	■	۵
۱۰	۱	۲	۳	۴	■
۱۱	۱	■	۳	۴	۵
۱۲	۱	۲	۳	■	۵
۱۳	۱	۲	۳	۴	■
۱۴	۱	۲	■	۴	۵
۱۵	۱	۲	■	۴	۵
۱۶	۱	۲	۳	۴	■
۱۷	■	۲	۳	۴	۵
۱۸	■	۲	۳	۴	۵
۱۹	۱	۲	۳	۴	■
۲۰	■	۲	۳	۴	۵
۲۱	۱	۲	■	۴	۵
۲۲	۱	۲	■	۴	۵
۲۳	۱	۲	■	۴	۵
۲۴	۱	۲	۳	۴	■
۲۵	۱	۲	۳	۴	■
۲۶	۱	۲	۳	۴	۵
۲۷	۱	۲	۳	۴	۵
۲۸	۱	۲	۳	۴	۵
۲۹	۱	۲	۳	۴	۵
۳۰	۱	۲	۳	۴	۵
۳۱	۱	۲	۳	۴	۵
۳۲	۱	۲	۳	۴	۵
۳۳	۱	۲	۳	۴	۵
۳۴	۱	۲	۳	۴	۵
۳۵	۱	۲	۳	۴	۵
۳۶	۱	۲	۳	۴	۵
۳۷	۱	۲	۳	۴	۵
۳۸	۱	۲	۳	۴	۵
۳۹	۱	۲	۳	۴	۵
۴۰	۱	۲	۳	۴	۵
۴۱	۱	۲	۳	۴	۵
۴۲	۱	۲	۳	۴	۵
۴۳	۱	۲	۳	۴	۵
۴۴	۱	۲	۳	۴	۵
۴۵	۱	۲	۳	۴	۵
۴۶	۱	۲	۳	۴	۵
۴۷	۱	۲	۳	۴	۵
۴۸	۱	۲	۳	۴	۵
۴۹	۱	۲	۳	۴	۵
۵۰	۱	۲	۳	۴	۵
۵۱	۱	۲	۳	۴	۵
۵۲	۱	۲	۳	۴	۵
۵۳	۱	۲	۳	۴	۵
۵۴	۱	۲	۳	۴	۵
۵۵	۱	۲	۳	۴	۵
۵۶	۱	۲	۳	۴	۵
۵۷	۱	۲	۳	۴	۵
۵۸	۱	۲	۳	۴	۵
۵۹	۱	۲	۳	۴	۵
۶۰	۱	۲	۳	۴	۵
۶۱	۱	۲	۳	۴	۵
۶۲	۱	۲	۳	۴	۵
۶۳	۱	۲	۳	۴	۵
۶۴	۱	۲	۳	۴	۵
۶۵	۱	۲	۳	۴	۵
۶۶	۱	۲	۳	۴	۵
۶۷	۱	۲	۳	۴	۵
۶۸	۱	۲	۳	۴	۵
۶۹	۱	۲	۳	۴	۵
۷۰	۱	۲	۳	۴	۵
۷۱	۱	۲	۳	۴	۵
۷۲	۱	۲	۳	۴	۵
۷۳	۱	۲	۳	۴	۵
۷۴	۱	۲	۳	۴	۵
۷۵	۱	۲	۳	۴	۵

مرحله‌ی دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های **۱۶ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

---

۱ در جزیره‌ای ۱۰۰ نفر زندگی می‌کنند. هر نفر یا سفیدپوست است، یا سیاه‌پوست و یا سرخ‌پوست (دقیقن یکی از این سه حالت). نوع یک جزیره به شکل زیر تعیین می‌شود:

- اگر حداقل ۹۰ سفیدپوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سفید» است.
- اگر حداقل ۸۰ سیاه‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سیاه» است.
- اگر حداقل ۷۰ سرخ‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سرخ» است.

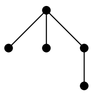
می‌دانیم جزیره دقیقن یکی از سه نوع سفید، سیاه و سرخ است. ما به جزیره رفته‌ایم. حداقل چند نفر از افراد جزیره را باید ببینیم تا بتوانیم نوع جزیره را تشخیص دهیم؟

۱) ۵۱ ۲) ۲۱ ۳) ۶۱ ۴) ۸۱ ۵) ۴۱

۲ یک جایگشت نزولی از اعداد ۱ تا n داریم. در هر گام دو عدد متمایز به صورت تصادفی انتخاب شده و به احتمال $\frac{1}{2}$ جای آنها عوض می‌شود. اگر پس از چند گام این جایگشت مرتّب شود (یعنی اعداد به ترتیب صعودی در جایگشت قرار بگیرند)، علیرضا می‌برد و در غیر این صورت سپهر برنده‌ی بازی است (تعداد گام‌ها محدودیتی ندارد). به چه احتمالی علیرضا برنده می‌شود؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{n}$ ۴) $\frac{1}{n!}$ ۵) ۱

۳ یک گراف ساده‌ی ۱۰۰ رأسی داریم که زیرگراف به شکل زیر ندارد:



توجه کنید منظور از زیرگراف لزومن القایی نیست. حداکثر تعداد یال‌های این گراف چیست؟ (زیرگراف القایی زیرگرافی است که انتخاب رأس‌ها در آن اختیاری است ولی بین دو رأس از زیرگراف یال وجود دارد اگر و تنها اگر در گراف اصلی بین آنها یال وجود داشته باشد)

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۰۰ ۵) ۱۲۰

۴ به جایگشت $p_1, p_2, \dots, p_n$ از اعداد ۱ تا n زیبا گوییم هرگاه به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$ داشته باشیم: $p_i \leqslant p_{i+1} + 3$. به ازای $n = 9$، باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد جایگشت‌های زیبا بر ۵ چند است؟

۱) ۳ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲ ۵) ۴

۵ به گراف ۱۶ رأسی G گراف **فرد زده** گوییم، اگر هر رأس آن هم در دوری به طول ۳ و هم در دوری به طول ۵ و … و هم در دوری به طول ۱۵ باشد. حال فرض کنید یک گراف دوبخشی کامل داریم که هر بخش آن ۸ رأس دارد. می‌خواهیم تعدادی یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود. حداقل چند یال باید اضافه کنیم؟

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶ ۵) ۱

۶ در سؤال قبل فرض کنید یک گراف ۱۶ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی ۴ رقمی متمایز است. دو رأس در این گراف به هم یال دارند، اگر و تنها اگر رشته‌های متناظر آن رأس‌ها دقیقن در یک رقم تفاوت داشته باشند. حداقل چند یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود؟

۱) ۸ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۳

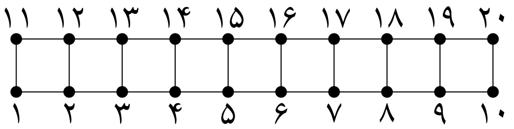
۷ یک جدول $n \times n$ داریم که در هر خانه‌ی آن یکی از دو عدد ۰ و ۱ نوشته شده است. چهار خانه شامل عدد ۰ را که از محل‌های تقاطع دو سطر و دو ستون به دست آیند، **صفر- مستطیلی** می‌نامیم. هم‌چنین چهار خانه شامل عدد ۱ را که هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر و هم‌ستون نیستند، **یک- پراکنده** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفر- مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یک- پراکنده وجود نداشته باشد.

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴ ۵) ۷

۸ همان سؤال قبل را در نظر بگیرید. چهار خانه شامل عدد ۱ را که هم‌سطر باشند، **یک- خطی** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفر- مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یک- خطی وجود نداشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۶

۹ گراف ۲۰ رأسی زیر با رأس‌های ۱, ۲, ..., ۲۰ را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان از این گراف تعدادی یال حذف کرد به طوری که گراف هم‌بند بماند؟ توجه کنید یک حالت این است که هیچ یالی حذف نکنیم.



۱) ۲۰۷۳۹۱ ۲) ۹۴۶۰۲۵ ۳) ۲×۴^{۱۰} ۴) ۸۳۴۲۶۱ ۵) ۷۳۸۶۳۴

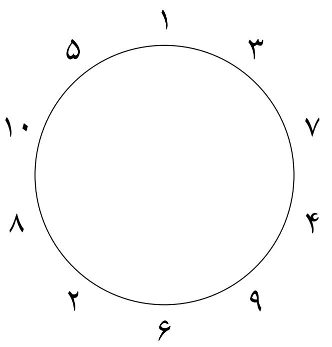
۱۰ علیرضا در صفحه‌ی مختصات قرار دارد. او در هر حرکت می‌تواند از نقطه‌ی با مختصات صحیح (a, b) به یکی از نقاط $(۱۰۲۴ \% (۲a), b)$ و یا $(a, (۲b) \% ۱۰۲۴)$ برود که در آن‌ها منظور از $x \% y$ باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر y است. علیرضا یک نقطه‌ی (x, y) برای شروع انتخاب می‌کند که $۰ \leqslant x \leqslant ۵۰, ۰ \leqslant y \leqslant ۱۰۰$ باشد. اگر (u, v) نقطه‌ای با بیش‌ترین مجموع مختصه‌ها ($u + v$ بیشینه) در بین تمامی نقاط قابل رسیدن با حرکات بالا باشد، باقی‌مانده تقسیم $u + v$ بر ۵ چند است؟

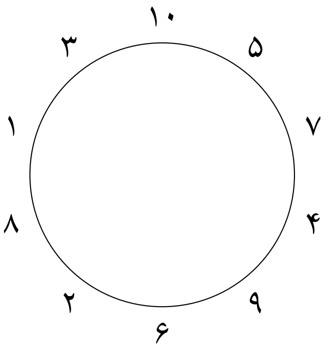
۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۲

۱۱ دو مجموعه‌ی ناتهی A و B نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر هر عضو مجموعه‌ی A نسبت به هر عضو مجموعه‌ی B اول باشد (دو عدد نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر ب.م.م شان یک باشد). فرشید و فرشاد هر کدام یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\{۱, ۲, ..., ۹\}$ انتخاب می‌کنند. احتمال این که مجموعه‌های فرشید و فرشاد نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۷۲۳}{۳۷۳۰۳}$ ۲) $\frac{۵۰۶۱}{۲۵۵\times۲^{۱۰}}$ ۳) $\frac{۶۰۸۴}{۱+۲۵۵\times۲^{۱۰}}$ ۴) $\frac{۲۵۳۰}{۲۵۵\times۲^{۹}}$ ۵) $\frac{۵۰۶۰}{۱+۲۵۵\times۲^{۱۰}}$

۱۲ ده توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۰ به ترتیب دور یک دایره قرار دارند. در هر مرحله می‌توان دو توپ مجاور مانند A و B در نظر گرفت و آن‌ها را به همان ترتیب در میان دو توپ مجاور دیگر قرار داد. برای مثال با برداشتن توپ‌های ۱ و ۳ و گذاشتن آن‌ها در میان دو توپ ۵ و ۷ می‌توان از شکل سمت چپ به شکل سمت راست رسید:





از میان !۹ جایگشت دوری که این توپ‌ها دارند، به چند جایگشت می‌توان رسید؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{۹!}{۲}$ ۲) $۸!$ ۳) $\frac{۹!}{۶}$ ۴) $۹!$ ۵) $۹! - ۸!$

۱۳ در سؤال قبل فرض کنید ۱۰ توپ در آرایشی به شکل زیر قرار گرفته‌اند:

۱۰
۶ ۹
۳ ۵ ۸
۱ ۲ ۴ ۷

در هر مرحله می‌توان سه توپ را که دوبه‌دو بر یک‌دیگر مماس هستند، انتخاب کرد و مثلث آن‌ها را یک واحد در جهت ساعت‌گرد چرخاند. برای مثال با اعمال این حرکت روی توپ‌های ۲، ۳ و ۵ در شکل بالا به شکل زیر می‌رسیم:

۱۰
۶ ۹
۵ ۵ ۸
۱ ۳ ۴ ۷

از حالت اولیه به چند آرایش متفاوت از !۱۰ آرایش ممکن برای توپ‌ها می‌توانیم برسیم؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{۱۰!}{۲}$ ۲) $\frac{۱۰!}{۳}$ ۳) $۹!$ ۴) $۱۰!$ ۵) $\frac{۱۰!}{۶}$

۱۴ در ابتدا عدد $x = ۰$ را داریم. در هر مرحله می‌توانیم عدد x را به یکی از دو عدد $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ یا $۴x + ۲$ تبدیل کنیم. با استفاده از این حرکات چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{۷۷, ۵۱۱, ۲۱۰, ۱۷۰, ۲۳۸\}$ را می‌توان ساخت؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۰

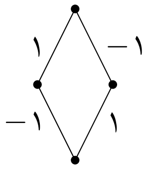
۱۵ اعداد ۱ تا **۱۳۹۵** را دور دایره‌ای نوشته‌ایم. دستگاه پاک‌کننده‌ای داریم که ابتدا روی عدد ۱ قرار دارد. در هر مرحله با فرض این که دستگاه روی i اُمین عدد قرار دارد یکی از دو عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

- عدد $i + ۱$ اُمی را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i + ۲$ اُم می‌گذاریم.
- اعداد $i + ۱$ اُم و $i + ۲$ اُم را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i + ۳$ اُم می‌گذاریم.

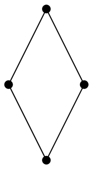
آن‌قدر این اعمال را انجام می‌دهیم تا تنها یک عدد دور دایره باقی بماند (توجه کنید اگر دو عدد باقی بماند، باید طبق روش اول یکی از اعداد را پاک کنیم). عدد نهایی که دور دایره باقی می‌ماند، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۳۹۵   ۲) ۶۹۷   ۳) ۱۳۹۳   ۴) ۱۳۹۴   ۵) ۱

فرض کنید G یک گراف باشد که روی هر یال آن یکی از دو عدد ۱ و ۱− نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یک رأس از گراف در نظر گرفت و عدد تمام یال‌های متصل به آن را قرینه کرد. کمینه‌ی تعداد یال‌های با عدد ۱− را که می‌توان با انجام تعدادی مرحله به آن رسید، $f(G)$ می‌نامیم. برای مثال در گراف زیر مقدار تابع f برابر ۰ است.



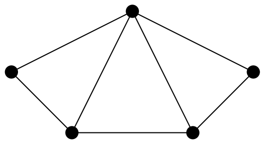
بیشینه‌ی مقدار $f(G)$ را به ازای تمام مقادیر اولیه‌ی ممکن برای یال‌ها، $h(G)$ در نظر می‌گیریم. برای مثال در گراف زیر مقدار h برابر ۱ است:



همان‌طور که در مثال بالا می‌بینید، ورودی تابع f گرافی با یال‌های مقداردهی‌شده و ورودی تابع h گرافی با یال‌های مقداردهی‌نشده است.

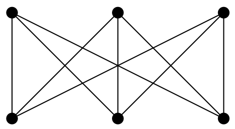
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:



۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۰   ۵) ۴

۱۷ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:



۱) ۲   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۴   ۵) ۳

۱۸ کدام گزاره‌های زیر درست هستند؟

- الف) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا کم‌تر نیست (به مجموعه‌ای از دورها، دورهای یال‌مجزا می‌گوییم اگر هر یال از گراف در حداکثر یکی از دورهای آن مجموعه آمده باشد).
- ب) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا بیش‌تر نیست.
- ج) فرض کنید G یک گراف با یک مقداردهی اولیه باشد که $f(G) = ۰$. اگر G دارای k مؤلفه باشد، دقیقن ۲^k روش وجود دارد که در آن هر رأس انتخاب شود یا نشود و در انتها عدد روی تمام یال‌ها ۱ شوند.

۱) الف و ب   ۲) الف و ج   ۳) الف   ۴) ب و ج   ۵) الف و ب و ج

فرض کنید G یک گراف ساده باشد. منظور از فاصله‌ی بین دو رأس در گراف، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌هاست. منظور از قطر یک گراف، بیشینه‌ی فاصله‌ی دوبه‌دوی میان رأس‌هاست. توجه کنید در یک گراف ناهم‌بند، قطر گراف ∞ است. به یک گراف **قطر بحرانی** گوییم، اگر با حذف هر یال از آن، قطر گراف زیاد شود. هم‌چنین به یک گراف **قطر بحرانی معکوس** گوییم، اگر با اضافه کردن یال بین هر دو رأس غیر همسایه، قطر گراف کم شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ تعداد گراف‌های ۶ رأسی و ۶ یالی را بیابید که قطر بحرانی و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند. (دو گراف را یک‌ریخت می‌نامیم اگر بتوان با نام‌گذاری مجدّد رأس‌های اولی، گرافی برابر با گراف دومی ساخت)

۱) ۶   ۲) ۲   ۳) ۵   ۴) ۳   ۵) ۴

۲۰ تعداد گراف‌های هم‌بندِ غیرکامل ۷ رأسی را بیابید که قطر بحرانی معکوس و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند.

۱) ۹   ۲) ۸   ۳) ۱۱   ۴) ۱۰   ۵) ۷

محسن دستگاهی دارد که به عنوان ورودی یک گراف می‌گیرد و در خروجی گرافی دیگر به او می‌دهد! کارهایی که دستگاه او می‌تواند انجام دهد به شرح زیر است:

- ببین دو رأس مجاور انتخاب شده یک رأس اضافه کند.
- رأس جدیدی را به دو رأس مجاور انتخاب شده متصل نماید.

محسن یک بازی خطرناک با دستگاه خود شروع می‌کند. به این ترتیب که با یک گراف مثلث ($C_۳$) شروع می‌کند و هر بار گراف خود را به دستگاه می‌دهد و گراف خروجی را برای دور بعد در نظر می‌گیرد و هر موقعی که از بازی خسته شود، گرافش را به عنوان نتیجه‌ی بازی اعلام می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۱ کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند نتیجه‌ی بازی محسن با دست‌گاه خود باشد؟

شکل الف)

شکل ب)

شکل ج)

۱) الف ۲) ب و ج ۳) الف و ج ۴) ج ۵) هیچ‌کدام

۲۲ **عدد هم‌بندی** یک گراف را حداقل تعداد رأس‌هایی در نظر می‌گیریم که باید از آن گراف حذف شود تا آن گراف

ناهم‌بند شود. (توجه کنید به طور قراردادی عدد هم‌بندی را برای یک گراف کامل n رأسی برابر $n - ۱$ در نظر می‌گیریم).
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد همبندی چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵ ۵) تا هر عددی می‌تواند زیاد شود

۲۳ گراف مسطح به گرافی می‌گوییم که بتوان آن را در صفحه کشید، بدون آن که یال‌هایش یک‌دیگر را قطع کنند. در این وضعیت، صفحه به **ناحیه**هایی تقسیم می‌شود. به غیر از ناحیه‌ی نامحدودی که اطراف گراف را در بر می‌گیرد، بقیه‌ی ناحیه‌ها را **محدود** می‌نامند. مثلن گراف شکل الف در سؤال قبل، دارای ۴ ناحیه‌ی محدود است. دو ناحیه با هم مجاورند اگر حداقل در یک یال با هم مرز مشترک داشته باشند.
عدد رنگی سطحی را برای گراف‌های مسطح، حداقل تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ کردن ناحیه‌های محدود گراف تعریف می‌کنیم؛ به طوری که هیچ دو ناحیه‌ی محدود مجاوری هم‌رنگ نباشند.
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد رنگی سطحی چند است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ممکن است گرافی نامسطح نتیجه‌ی این بازی خطرناک باشد ۴) ۵ ۵) ۳

اعضای تیم پلیس مخفی سلطان شامل پنج پلیس ماهر با شماره‌های ۱ تا ۵ است. این پنج نفر در آفتاب سوزان بندر دور یک میز گرد نشسته و هر کدام یک عینک آفتابی زده‌اند. عینک‌های آفتابی این افراد، یکی از سه رنگ قرمز، آبی و زرد را دارد. طبیعی است که این افراد، اجسام را به رنگ واقعی نمی‌بینند؛ بلکه ترکیب رنگ آن جسم با رنگ عینک خود را می‌بینند! برای مثال فردی که عینک زرد به چشم زده است، یک جسم آبی را به رنگ سبز و یک جسم زرد را به رنگ زرد می‌بیند. فرض کنید شیوه‌ی ترکیب رنگ اجسام با عینک‌ها مطابق جدول زیر است:

	قرمز	آبی	زرد
قرمز	قرمز	بنفش	نارنجی
آبی	بنفش	آبی	سبز
زرد	نارنجی	سبز	زرد

این قاعده برای عینک‌ها هم صادق است. پس برای مثال اگر پلیس A عینک قرمز و پلیس B عینک زرد داشته باشد، A با نگاه کردن به B تصوّر می‌کند رنگ عینک B نارنجی است!

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۴ سلطان که در کویری دور در حال انجام مأموریتی دیگر است، جویای احوال پلیس‌های خود می‌شود. هر یک از پلیس‌ها در گزارش خود، مجموعه‌ی رنگ‌هایی را که در میان عینک بقیه‌ی پلیس‌ها می‌بیند، می‌گوید. برای مثال فرض کنید پلیس‌ها به ترتیب عینک‌های قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد داشته باشند. پلیس شماره ۲ در پیام خود به سلطان می‌گوید:
«درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من در عینک‌های پلیس‌های دیگر، رنگ‌های قرمز، بنفش و نارنجی را می‌بینم.»
حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید که سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس، قرمز یا زرد یا آبی است. به ازای چند حالت از $۳^۵$ حالت

(برای رنگ عینک پلیس‌ها)، سلطان پس از دریافت گزارش‌ها به طور یک‌تا می‌تواند بفهمد رنگ عینک هر پلیس چیست؟

۱) ۲۱۳ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۸۳ ۴) ۱۵۰ ۵) ۱۵۳

۲۵ در نوع جدید پیام‌رسانی، هر پلیس، یک پلیس دیگر را انتخاب کرده و به سلطان پیام می‌دهد که رنگ عینک آن پلیس را چگونه می‌بیند. برای مثال فرض کنید رنگ عینک پلیس‌ها به ترتیب قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد باشد. پیام‌های پلیس‌ها می‌تواند به شکل زیر باشد:

- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۱ هستم. من عینک پلیس شماره ۵ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را قرمز می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۳ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را بنفش می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۴ هستم. من عینک پلیس شماره ۲ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۵ هستم. من عینک پلیس شماره ۴ را زرد می‌بینم.»

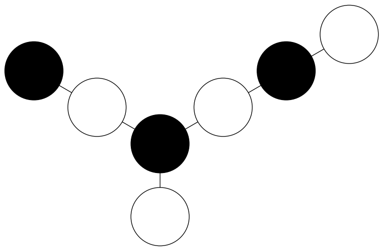
حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس قرمز یا زرد یا آبی است. $۳^۵$ حالت برای رنگ عینک پلیس‌ها و $۴^۵$ حالت برای این داریم که هر پلیس، رنگ عینک چه کسی را بفرستد. از این $۴^۵ \times ۳^۵$ حالت، در چند حالت سلطان به طور یک‌تا نمی‌تواند رنگ عینک پلیس‌ها را تشخیص دهد؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۱۸۸۴۰ ۳) ۱۳۶۸۰ ۴) ۰ ۵) ۱۷۷۶۰

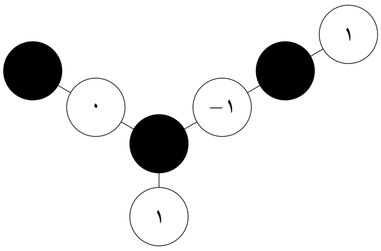
مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

درخت ساده! .... ۱۷ امتیاز

پیام یک درخت n رأسی دارد $(n \geq ۳)$. او هر رأس این درخت را با یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده؛ طوری که هر دو رأس مجاور ناهم‌رنگ شده‌اند و هم‌چنین تعداد رأس‌های سفید بیش‌تر از تعداد رأس‌های سیاه شده است. حسام باید روی هر رأس سفید، یکی از اعداد $-۱, ۰, ۱$ را بنویسد؛ طوری که عدد حداقل یک رأس سفید برابر ۰ نباشد. حسام باید طوری این کار را انجام دهد که به ازای هر رأس سیاه، مجموع اعداد هم‌سایه‌های آن برابر ۰ شود. برای مثال اگر درخت پیام به شکل (۱) باشد، حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۲) انجام دهد. ثابت کنید درخت پیام به هر شکلی که باشد، حسام قادر به انجام کارهای گفته شده، خواهد بود.



شکل (۱)



شکل (۲)

دست‌کش‌های مشکوک! .... ۲۲ امتیاز

حسام یک دست‌کش آبی در دست راست و یک دست‌کش قرمز در دست چپ خود دارد. پیام و حسام یک عدد طبیعی n انتخاب می‌کنند $(n \geq ۲)$؛ سپس حسام یک عدد طبیعی k برمی‌گزینند که $۱ \leq k \leq n$ باشد و پیام باید k را بفهمد. در هر مرحله پیام می‌تواند یکی از دو پرسش زیر را از حسام بپرسد:

- دست‌کش دست راست تو چه رنگی است؟
- دست‌کش دست چپ تو چه رنگی است؟

حسام در هر پرسش، یکی از دو پاسخ «قرمز» یا «آبی» را می‌گوید. پرسش‌های پیام را به ترتیب با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, q$ شماره‌گذاری کنید. روش پاسخ‌گویی حسام به این صورت است که او پاسخ k پرسش نخست پیام را به طور دل‌خواه می‌دهد (دروغ یا راست)؛ سپس به ازای هر $i > k$، در پاسخ پرسش شماره‌ی i، پاسخ درست پرسش شماره‌ی $i-k$ را می‌دهد. توجه کنید پاسخ k پرسش نخست به صورت دل‌خواه داده می‌شود و حسام هیچ روش از پیش تعیین شده‌ای برای پاسخ‌گویی به آن ندارد.

توجه کنید پیام دست‌کش‌های حسام را می‌بیند و هم‌چنین از روش پاسخ‌گویی حسام آگاه است؛ امّا k را نمی‌داند و با توجه به پاسخ‌های حسام باید آن را بفهمد. کمینه‌ی تعداد پرسش‌هایی که پیام باید بپرسد تا به طور تضمینی k را بفهمد، چیست؟ پاسخ را بر حسب n بیابید.

پارکینگ‌های مشکوک! .... ۲۵ امتیاز

آرمان در شرکت خود یک پارکینگ دارد که مدیریت آن را به پیام و حسام، واگذار کرده است. این پارکینگ دارای n جای‌گاه با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ است. شرکت نیز، n کارمند با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ دارد. می‌دانیم عدد n به صورت $۲^k + ۱$ است. هر روز این کارمندها طبق دستور حسام برای پارک کردن اتومبیل‌های‌شان طبق الگوریتم زیر عمل می‌کنند:

> کارمندها به ترتیب شماره پارک می‌کنند؛ یعنی ابتدا کارمند شماره ۱، سپس کارمند شماره ۲ و ... و در انتها کارمند شماره n پارک می‌کند. کارمندهای بازار به طرز عجیبی تنّوع‌طلب و البته تنبل هستند! بنابراین هر کارمند در هنگام پارک کردن، مجموعه‌ی جای‌گاه‌های خالی را که تاکنون کم‌تر در آن‌ها رفته است، در نظر می‌گیرد و در میان آن‌ها جای‌گاهی را انتخاب می‌کند که کم‌ترین شماره را دارد.

برای مثال اگر $n = ۳$ باشد، کارمندان در سه روز نخست به ترتیب زیر در جای‌گاه‌ها پارک می‌کنند:

	جای‌گاه ۱	جای‌گاه ۲	جای‌گاه ۳
روز یکم	کارمند ۱	کارمند ۲	کارمند ۳
روز دوم	کارمند ۲	کارمند ۱	کارمند ۳
روز سوم	کارمند ۲	کارمند ۳	کارمند ۱

به روزهایی شماره‌ی تمام کارمندان با شماره‌ی جای‌گاه اتومبیل‌شان یک‌سان باشد، روزهای **منظّم** می‌گوییم! برای مثال روز یکم یک روز منظّم است. ثابت کنید بعد از روز یکم، نخستین باری که یک روز منظّم دیگر رخ می‌دهد، روز $n(n-۱)+۱$ است.

بازی قهرمانی! .... ۳۶ امتیاز

فرهاد و علی‌رضا یک گراف کامل n رأسی دارند و با آن بازی می‌کنند. منظور از یک دور **همیلتونی** در گراف، یک دور به طول n است. در ابتدا علی‌رضا هر یال گراف را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌کند. سپس فرهاد تعدادی متناهی عمل **تعویض** انجام می‌دهد. هر عمل تعویض شامل انتخاب کردن یک دور همیلتونی از گراف و تغییر رنگ تمام یال‌های آن دور (از قرمز به آبی و بالعکس) است. توجه کنید تنها نقش علی‌رضا در بازی، رنگ‌آمیزی اولیه‌ی گراف

است. فرهاد در کمال هوشمندی می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف کمینه شود و علی‌رضا می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف بیشینه شود.

آ) اگر n فرد باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۱۵ امتیاز)

ب) اگر n زوج باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۲۱ امتیاز)

پاسخ را بر حسب n بیابید.
توجه: فرض کنید پاسخ به دست آمده توسط شما بر حسب n برابر A باشد. در هر یک از دو قسمت سوال، در صورتی که A نادرست باشد، امتیازی به شما تعلّق نمی‌گیرد. هم‌چنین در هر یک از دو قسمت سوال، باید دو مورد زیر را در مورد عدد به دست آمده اثبات کنید:

۱. علی‌رضا روشی برای رنگ‌آمیزی دارد که در انتها حداقل A یال آبی خواهیم داشت.

۲. فرهاد روشی دارد که به ازای هر رنگ‌آمیزی علی‌رضا، در انتها حداکثر A یال آبی خواهیم داشت.

در هر قسمت درستی A به تنهایی یک امتیاز و دو مورد بالا به ترتیب در قسمت (آ) ۵ و ۹ امتیاز و در قسمت (ب) ۷ و ۱۴ امتیاز دارند.

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های **۱۲ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

---

۱ رستم ۱۳۹۴ سکه با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۴ بر روی میز قرار داده است. تعدادی از این سکه‌ها عادی (یک رو شیر و یک رو خط) و بقیه‌ی سکه‌ها هر دو رو شیر هستند (این تعداد می‌تواند صفر هم باشد). سهراب می‌خواهد تعداد سکه‌های هر دو رو شیر را پیدا کند ولی چشمانش بسته است. او تنها می‌تواند در هر حرکت تعدادی از سکه‌ها را انتخاب کرده و از رستم بخواهد آنها را پشت و رو کند. پس از آن رستم تعداد سکه‌های روی میز که به سمت شیر هستند را به سهراب می‌گوید.
سهراب می‌داند در ابتدای کار دقیقا ۱۰۰ سکه به سمت شیر هستند، حداقل چند حرکت لازم است تا سهراب تعداد سکه‌های دو رو شیر را بیابد؟

۱) ۱۳۹۳ ۲) ۱ ۳) ۱۳۹۴ ۴) ۱۱ ۵) ۱۰

۲ می‌خواهیم در خانه‌های جدول زیر، اعداد ۱ تا ۹ را قرار دهیم، به صورتی که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر، برابر باشد. جای دو تا از اعداد (۱ و ۵) نیز مشخص شده است.
برای یک خط مانند L در صفحه، $f(L)$ برابر مجموع اعداد خانه‌هایی از جدول است که با آن خط، تقاطع دارند (یک خانه از جدول با خط L تقاطع دارد، اگر حداقل ۲ نقطه‌ی مشترک با آن خط داشته باشد). بیشینه‌ی ممکن $f(L)$، در میان تمام جدول‌ها و خط‌های ممکن چند است؟ (هر خانه از جدول یک مربع به طول واحد است)

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۱ ۴) ۲۷ ۵) ۳۰

۳ می‌خواهیم ۷ رقم ۰ و ۱ را دور دایره بچینیم. می‌گوییم رشته‌ی S در این چینش آمده است، اگر چند رقم متوالی در دایره وجود داشته باشند که با کنار هم قرار دادنشان به ترتیب ساعت‌گرد، رشته‌ی S تشکیل شود. تعداد دفعات وجود S در چینش را $f(S)$ می‌نامیم.
برای مثال، در چینش روبرو، $f(۱۱۰) = ۱$ و $f(۱۱) = ۳$ و $f(۰۱۱۱۰) = ۰$ است.
یک چینش اعداد دور دایره را در نظر بگیرید. به ازای هر رشته‌ی دودویی S که حداکثر ۳ رقم دارد، $۲^{f(S)}$ را محاسبه می‌کنیم و این مقادیر را با هم جمع می‌کنیم (به عنوان مثال در شکل مقابل این عدد برابر ۷۰ می‌شود). عدد نهایی حداقل چند است؟ (برای رشته‌هایی که در چینش وجود ندارند $f(S) = ۰$ است.)

۱) ۵۵ ۲) ۵۱ ۳) ۵۶ ۴) ۶۳ ۵) ۵۳

۴ ۱۵ دایره همانند شکل روبرو داریم. هر دایره می‌تواند سفید یا سیاه باشد. رنگ دایره‌ها به صورت زیر مشخص می‌گردد:

- دایره‌های سطر بالا به صورت مستقل می‌توانند سفید یا سیاه باشند.
- بقیه‌ی دایره‌ها (همه به جز سطر بالا) به رنگ سیاه هستند، اگر و تنها اگر دو دایره‌ی مجاور سطر بالای آن ناهمرنگ باشند.

در بین تمامی حالات ممکن، حداکثر چند دایره‌ی سیاه می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۲ ۵) ۱۳

۵ در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تمامی حالات ممکن را روی تخته کشیده‌ایم. در مجموع چند دایره‌ی سیاه خواهیم داشت؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۲۰۸ ۵) ۲۲۴

۶ یک جایگشت

$$\pi = \langle \pi_{۱}, \pi_{۲}, \ldots, \pi_{۹} \rangle$$

از اعداد $۱, ۲, \ldots, ۹$ را در نظر بگیرید. عدد جایگشت π برابر تعداد اعضایی از جایگشت مانند π_i است که زوجیت i و π_i برابر باشد. برای مثال عدد جایگشت $\langle ۵, ۶, ۳, ۴, ۲, ۱, ۷, ۹, ۸ \rangle$ برابر ۵ است. با در نظر گرفتن تمام جایگشت‌های ممکن، به طور میانگین عدد یک جایگشت چند است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $\frac{۴۱}{۹}$ ۴) ۵ ۵) $\frac{۹}{۲}$

۷ یک عدد را **وارونه** می‌گوییم، هر گاه به صورت $\frac{۱}{n}$ باشد که n عددی طبیعی است. می‌خواهیم عدد ۱ را به صورت جمع k عدد وارونه‌ی متمایز بنویسیم. به ازای چند مقدار $۲ \leqslant k \leqslant ۶$ می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۰ ۵) ۴

۸ تیم فوتبال سلطان، با سیستم ۲ — ۴ — ۴ بازی می‌کند؛ یعنی ۱ دروازه‌بان، ۴ مدافع و ۴ هافبک و ۲ مهاجم دارد. هر توپی که به یک بازیکن در این تیم می‌رسد، یا آن را با یک شوت، تبدیل به گل می‌کند یا پاس می‌دهد.

هیچ بازیکنی حق ندارد به بازیکنی پاس بدهد که قبلا توپ به او رسیده و یا در خطوط عقب‌تر بازی می‌کند؛ برای مثال یک هافبک نمی‌تواند به یک مدافع پاس بدهد، اما می‌تواند به یک هافبکی که توپ به آن نرسیده و یا یک مهاجم پاس بدهد.
فرض کنید توپ در ابتدا در اختیار دروازه‌بان است و تیم می‌خواهد یک گل بزند (همانند شکل زیر). به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (حتی دروازه‌بان هم می‌تواند با یک ضربه‌ی مستقیم گل بزند.)

۱) ۲۳۰۴ ۲) ۱۱۵۲ ۳) ۵۰۴۳ ۴) ۲۸۶۲۵ ۵) ۲۱۱۲۵

۹ سه توپ سیاه و سه توپ سفید داریم که به شکل زیر، در هفت جعبه جای گرفته‌اند:

فاصله‌ی دو جعبه تعداد جعبه‌های بین آن دو است. برای مثال فاصله‌ی دو جعبه‌ی مجاور صفر است. در هر حرکت می‌توان یک توپ که فاصله‌ی جعبه‌اش با یک جعبه‌ی خالی، حداکثر یک است را به خانه‌ی خالی انتقال داد. می‌خواهیم به حالتی برسیم که سه توپ سفید در سه جعبه‌ی سمت چپ و سه توپ سیاه در سه جعبه‌ی سمت راست باشند. حداقل چند حرکت برای این کار لازم است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷ ۵) ۱۶

۱۰ جایگشت $a_1, a_2, \cdots, a_6$ از اعداد ۱ تا ۶ را در نظر بگیرید. در ابتدا یک عدد را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و سپس در هر مرحله اگر عدد a_i انتخاب شده بود در مرحله‌ی بعد به ازای $a_i \neq 6$ عدد a_{a_i+1} و برای $a_i = 6$ عدد a_1 انتخاب می‌شود. به ازای چند جایگشت مختلف می‌توان عدد اول را به گونه‌ای انتخاب کرد که بعد از تعدادی مرحله، همه‌ی اعداد جایگشت حداقل یک‌بار انتخاب شده باشند؟

۱) ۳۴۵ ۲) ۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۷۲۰ ۵) ۱۲۰

۱۱ مجموعه‌ی $S = \{1, 2, ..., 7\}$ داده شده است. دو تابع داریم:
$f(A)$ که مکمل زیرمجموعه‌ی A و $g(A, B)$ که اشتراک A و B را می‌دهد.
یک کیسه داریم که همه‌ی زیرمجموعه‌های S را درون آن ریخته‌ایم. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه از کیسه بیرون آوریم تا با استفاده از آن‌ها و توابع بتوان تمام زیرمجموعه‌های S را تولید کرد (برای تولید زیرمجموعه‌ها می‌توان از هر زیرمجموعه به تعداد دل‌خواه استفاده کرد).
فرض کنید $\{1, 2, 5, 6\}$، $\{2, 5, 3\}$ و $\{5, 6\}$ را از کیسه بیرون آورده‌ایم. حداقل چند زیرمجموعه‌ی دیگر از کیسه بیرون بکشیم تا مطمئن باشیم با آن‌ها می‌توان مسئله را حل کرد؟

۱) ۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۷ ۴) ۶۴ ۵) ۳

یک کلمه درون یک پرونده‌ی متنی داده شده است و می‌خواهیم با کم‌ترین تعداد اعمال کپی (Copy) و درج (Paste) تعداد مشخصی نسخه از آن ایجاد کنیم.
در هر مرحله می‌توانیم تعداد دل‌خواهی از کلمات نوشته‌شده درون پرونده را در حافظه کپی کنیم و یا کلمات درون حافظه را در پرونده درج کنیم. (مثل کپی و پیست در ویرایشگرها، می‌توان یک بار کپی کرد و سپس چند بار درج کرد.)
هر کپی ۱ واحد و هر درج نیز ۱ واحد هزینه دارد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ با حداقل چند واحد هزینه می‌توانیم دقیقا ۹۹ کلمه‌ی دیگر مشابه با کلمه‌ی اول ایجاد کنیم؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۰ ۵) ۲۲

۱۳ با ۱۴ واحد هزینه حداکثر چند کلمه (با احتساب کلمه‌ی اولیه) می‌توان ایجاد کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۴۳ ۴) ۸۱ ۵) ۱۶۲

فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های a_1 تومانی، a_2 تومانی و ... داریم و بخواهیم مقدار n تومان را پرداخت کنیم (پرداخت یک‌طرفه است یعنی نمی‌توانیم مقداری را بپردازیم و بقیه‌ی پول را پس بگیریم). در صورتی که بتوان n تومان را پرداخت کرد، n را عددی **خوب** می‌گوییم. برای مثال اگر اسکناس‌های $50, 100, 200, 500$ و ۱۰۰۰ تومانی داشته باشیم، ۲۹۰۰ عددی خوب است؛ اما ۲۹۵۳ عددی خوب نیست. هم‌چنین عددی مانند n را **عجیب** گوییم، اگر بتوان n تومان را پرداخت کرد؛ طوری که از هر نوع اسکناس حداکثر یک بار استفاده شود. در مثال قبل ۹۰۰ عجیب نیست.
اگر n یک عدد خوب باشد، کمینه‌ی تعداد اسکناس‌ها برای پرداختش را $f(n)$ می‌نامیم. فرض کنید یک نفر الگوریتم زیر را برای پرداخت انتخاب کند:

در هر مرحله بزرگ‌ترین اسکناسی که مقدار آن از n بیش‌تر نیست را انتخاب می‌کنیم. این مبلغ را پرداخت می‌کنیم و برای باقی پول همین روش را ادامه می‌دهیم تا پرداخت به طور کامل انجام شود.
عدد n را **زیبا** گوییم، اگر تعداد اسکناس‌هایی که با الگوریتم بالا پرداخت می‌کنیم، برابر $f(n)$ شود. به یک کشور، **افسانه‌ای** گوییم، اگر تمام اعداد طبیعی خوب، زیبا نیز باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $۱, ۳, ۳^۲, ۳^۳, \dots$ تومانی داشته باشیم. می‌خواهیم یک نوع اسکناس از بین گزینه‌های زیر به اسکناس‌های‌مان اضافه کنیم. با اضافه کردن کدام گزینه تعداد اعداد عجیب n که $۱ \leqslant n \leqslant ۲۴۹$ بیش‌تر از بقیه گزینه‌ها است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۲

۱۵ فرض کنید گزینه‌های زیر اسکناس‌های ۵ کشور مختلف باشند. کدام گزینه مربوط به یک کشور افسانه‌ای نیست؟

۱) $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$
۲) $۱!, ۲!, ۳!, \dots$
۳) $۱, ۲, ۳, ۵, ۹, \dots$ (۱ و ($۲^n + ۱$)ها)
۴) $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$
۵) گزینه‌های ۳ و ۴

گراف ساده‌ی n رأسی G با رئوس $۱, ۲, \dots, n$ را در نظر بگیرید. **ماتریس مسیریاب گراف**، یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی سطر iام و ستون jام آن، تعداد مسیرهای بین رأس i و رأس j است (مسیر دنباله‌ای از رئوس است که بین هر دو رأس متوالی یک یال وجود دارد و هر رأس حداکثر یک بار آمده است).
در صورتی که $i = j$ باشد، مقدار ۱ را در ماتریس قرار می‌دهیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ کدام یک از ماتریس‌های زیر، می‌تواند یک ماتریس مسیریاب باشد؟

ماتریس ۱:

۱	۲	۱	۱	۱
۱	۲	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۲	۲
۱	۱	۱	۱	۱

ماتریس ۲:

۳	۳	۳	۳	۱
۳	۳	۳	۱	۳
۳	۳	۱	۳	۳
۳	۱	۳	۳	۳
۱	۳	۳	۳	۳

ماتریس۳:

۱	۲	۱	۱
۲	۲	۱	۱
۲	۱	۲	۲
۱	۲	۲	۱

ماتریس۴:

۳	۳	۴	۱
۳	۳	۱	۴
۳	۱	۳	۳
۱	۳	۳	۳

ماتریس۵:

۲	۳	۳	۱
۳	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۳
۱	۳	۳	۲

۱) ماتریس ۲ ۲) ماتریس ۳ ۳) ماتریس ۴ ۴) ماتریس ۱ ۵) ماتریس ۵

۱۷ می‌خواهیم با پرسیدن تعدادی از خانه‌های ماتریس مسیریاب یک گراف، تعداد مؤلفه‌های گراف را تشخیص دهیم. در هر گام می‌توان یکی از خانه‌های ماتریس را پرسید. در حداقل چند گام به طور تضمینی به هدف می‌رسیم؟

۱) n ۲) $n - 1$ ۳) $n - 2$ ۴) $\binom{n-1}{2} + 1$ ۵) $\binom{n}{2}$

۱۸ با استفاده از ماتریس مسیریاب یک گراف، پاسخ چند تا از موارد زیر را همواره می‌توان فهمید؟ (رأس برشی، رأسی است که پس از حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف افزایش یابد.)

- آیا گراف رأس برشی دارد؟
- آیا رأس v برشی است؟
- بین دو رأس v و u یال وجود دارد یا نه؟
- آیا گراف حداقل ۲ (نه لزوما مجزا) دور دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۲ ۵) ۴

روال جام حذفی بدین صورت است که 2^n تیم در n مرحله با هم مسابقه می‌دهند به نحوی که در هر مرحله هر تیم با یک تیم دیگر مسابقه می‌دهد (مثلا در مرحله‌ی اول 2^{n-1} مسابقه انجام می‌شود) و تیم‌هایی که شکست بخورند حذف می‌شوند. تیم‌های پیروز شده (نیمه‌ی دیگر تیم‌ها) به مرحله‌ی بعد می‌روند و دوباره به همین ترتیب مسابقه می‌دهند تا جایی که فقط یک تیم باقی بماند که تیم قهرمان نامیده می‌شود.

هر تیم عددی بین ۰ تا $2^n - 1$ دارد که قدرت آن تیم را نیز نشان می‌دهد (قدرت هیچ دو تیمی با هم برابر نیست). در مسابقه‌ی بین دو تیم، تیمی پیروز خواهد شد که قدرت بیشتری داشته باشد مگر در شرایطی که هر سوال مشخص می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ این مسابقات با شرکت ۶۴ تیم برگزار می‌شود ($n = 6$). در یک مسابقه اگر قدرت دو تیم را در مبنای دو بنویسیم و همه‌ی رقم‌های آنها به جز یکی برابر باشند هر دو تیم ممکن است پیروز شوند، در غیر این صورت تیم قوی‌تر پیروز می‌شود. برای مثال اگر ۲ و ۱۰ با هم مسابقه بدهند، هر دو تیم می‌توانند پیروز شوند. اما اگر ۱۶ و ۷ با هم مسابقه بدهند، حتما ۱۶ پیروز خواهد شد. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳۱ ۲) ۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱ ۵) ۹

۲۰ در یک جام حذفی ۳۲ تیم حضور دارند ($n = 5$) و چهار تیم ۳۱، ۲۳، ۱۴ و ۵ آمادگی کافی ندارند و ممکن است در یک مسابقه به طور اتفاقی شکست بخورند. با این شرایط ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۰

۲۱ در یک جام حذفی ۱۶ تیم حضور دارند ($n = 4$) و هر تیم ممکن است به طور اتفاقی در یک مسابقه پیروز شود. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۷

دنباله‌ای اکیدا صعودی مانند $a_1, a_2, \dots, a_n$ از اعداد داریم. ما هیچ اطلاعاتی درباره‌ی اعداد نداریم و فقط می‌دانیم اکیدا صعودی هستند. عدد x در این دنباله موجود است اما نمی‌دانیم کجای دنباله است و می‌خواهیم مکان عدد

x در دنباله را بیابیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از a_iها را انتخاب کنیم؛ سپس به ما نتیجه‌ی مقایسه‌ی x با a_i گفته می‌شود؛ یعنی یکی از عبارات زیر گزارش داده می‌شود:

$$x < a_i, \quad x = a_i, \quad x > a_i$$

هزینه‌ی مقایسه‌ی عدد a_i با x، برابر w_i است. w_i داده شده است.
می‌خواهیم الگوریتمی ارائه دهیم که مکان عدد x در دنباله را بیابد. کمینه‌ی هزینه‌ای که بتوان به طور تضمینی این کار را انجام داد

$$f(w_۱, w_۲, ..., w_n)$$

می‌نامیم. برای مثال می‌توان نشان داد اگرتمام w_iها برابر ۱ باشند، این مقدار برابر $\lfloor \lg(n) \rfloor$ خواهد شد (منظور از $\lg(n)$، لگاریتم n در مبنای ۲ است).

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۲ مقدار

$$f(\underbrace{۲, ۳, ..., ۱۰, ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰, ..., ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰}_{\text{۳۱۹ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

۲۳ مقدار

$$f(\underbrace{۱, ۱, ..., ۱}_{\text{۵۱۱ عدد}}, \underbrace{۲, ۲, ..., ۲}_{\text{۵۱۱ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۹ ۳) ۲۷ ۴) ۱۲ ۵) ۱۸

۲۴ فرض کنید $n \geqslant ۴$ باشد. مقدار

$$f(n, n^۲, n^۳, ..., n^n)$$

چند است؟

۱) $n^{n-۳} + n^{n-۱}$
۲) $\left\lfloor n^{\frac{n}{۲}} + n^{\frac{۳n}{۴}} + n^{\frac{۷n}{۸}} + ... \right\rfloor$
۳) $\sum_{۱ \leqslant ۲k+۱ \leqslant n} n^{۲k+۱}$
۴) $\lfloor \lg(۱ + n + n^۲ + ... + n^n) \rfloor$
۵) $n + n^۲ + ... + n^{n-۱}$

۲۵ فرض کنید $n \geqslant ۳$ و تمام w_iها متمایز هستند. چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

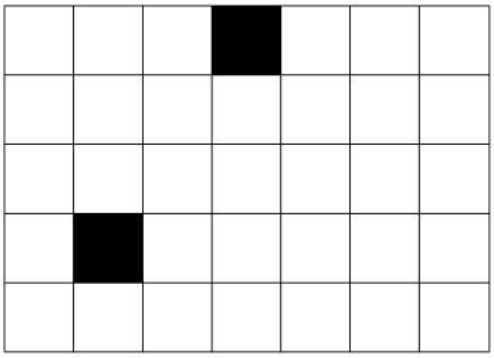
- هیچ الگوریتم بهینه‌ای در مرحله‌ی اول w_i بیشینه را انتخاب نمی‌کند.

- الگوریتم بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_iای را انتخاب می‌کند که $|\sum_{j<i} w_j - \sum_{j>i} w_j|$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در هیچ مرحله‌ای، a_1 را انتخاب نکند.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_i کمینه را انتخاب کند.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۰ ۵) ۳

فرهاد و علی‌رضا در منهتن .... ۳۰ امتیاز

فرهاد و علی‌رضایک جدول $m \times n$ دارند ($m,n > 1$) و روی آن بازی می‌کنند. خانه‌ی واقع در سطر i-ام و ستون j-ام جدول را با (i,j) نشان می‌دهیم. **فاصله‌ی** دو خانه‌ی (r_1,c_1) و (r_2,c_2) را برابر $|r_1-r_2|+|c_1-c_2|$ تعریف می‌کنیم. برای مثال، در جدول زیر، فاصله‌ی دو خانه‌ی مشخص شده برابر ۵ است:



فرهاد k خانه‌ی $a_1,a_2,\dots,a_k$ از جدول را انتخاب می‌کند و به علی‌رضا می‌گوید؛ سپس علی‌رضا یک خانه از جدول مانند X را انتخاب می‌کند و پس از این انتخاب، اعداد $b_1,b_2,\dots,b_k$ را به فرهاد می‌گوید که b_i، فاصله‌ی خانه‌ی X تا خانه‌ی a_i است. در واقع علی‌رضا به ازای هر خانه‌ی انتخابی فرهاد، فاصله‌ی X را تا آن خانه به فرهاد می‌گوید. حال باید فرهاد با توجه به این k عدد، خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا (X) را پیدا کند. فرهاد در صورتی می‌برد که خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا را بفهمد. فرض کنید هر دو نفر به بهترین نحو ممکن بازی می‌کنند.

اگر k کم‌ترین عددی باشد که فرهاد، روشی برای انتخاب k خانه داشته باشد که ببرد، تعداد روش‌های انتخاب این k خانه که فرهاد با انتخاب آن‌ها، به هدفش می‌رسد را حساب کنید. توجه کنید تنها با یافتن k، می‌توانید ۱۵ نمره بگیرید.

زبان اعصاب .... **۵۰ امتیاز**

فرهاد هم‌واره دوست داشت که توابع را به صورت ساده بیان کند. به همین دلیل، امروز به این نتیجه رسید که اکثر توابع را می‌توان با تعدادی تابع اولیه و عمل‌گر ساده پیاده‌سازی کرد. از شما می‌خواهیم که به فرهاد در پیاده‌سازی برخی از این توابع کمک کنید. هم‌چنین فرهاد تنها به توابعی علاقه دارد که ورودی و خروجی آن‌ها، اعدادی صحیح و نامنفی هستند. علی‌رضا به فرهاد توابع ساده‌ی اولیه‌ی زیر را پیشنهاد داده است:

۱. **تابع پوچ**: این تابع تنها یک ورودی می‌گیرد و در خروجی، عدد 0 را تحویل می‌دهد. این تابع را با z نشان می‌دهیم. برای مثال $z(10) = 0$.

۲. **تابع افزون‌گر**: این تابع تنها یک ورودی می‌گیرد و اگر عدد n در ورودی به آن داده شود، عدد $n+1$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. این تابع را با inc نشان می‌دهیم. برای مثال $inc(5) = 6$. فرهاد برای سادگی نمادی نیز تعریف کرده است. او به جای $x+1$ یا همان $inc(x)$ از نماد x' استفاده می‌کند.

۳. **توابع بازتاب**: این توابع به صورت $P_i^n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هستند که n عدد از ورودی می‌گیرند و i-امین عدد را تحویل می‌دهند. برای مثال تابع P_3^{10} تابعی است که با گرفتن 10 ورودی، هم‌واره سومین ورودی را برمی‌گرداند. به عنوان مثالی دیگر $P_2^3(0, 10, 8) = 10$ است.

با توابع بالا به تنهایی کار خاصی نمی‌توان کرد. به همین دلیل علی‌رضا عمل‌گرهای زیر را نیز به فرهاد پیشنهاد داده است. فایده‌ی این عمل‌گرها این است که با گرفتن چند تابع می‌توان توابع جدید ساخت.

۱. **عمل‌گر ترکیب**: این عمل‌گر یک تابع اصلی f می‌گیرد. فرض کنید f، m ورودی بگیرد. سپس این عمل‌گر توابع $g_1, g_2, \dots, g_m$ را نیز از ورودی تحویل می‌گیرد که g_i-ها ورودی‌های یک‌سانی می‌گیرند (مثلن $x_1, x_2, \dots, x_n$). به این ترتیب تابع جدید h ساخته می‌شود که $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$،
$$f\big(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$$
را برمی‌گرداند. این عمل‌گر را با
$$CN[f, g_1, g_2, \dots, g_m]$$
نشان می‌دهیم.

۲. **عمل‌گر بازگشت**: این عمل‌گر، دو تابع f, g را می‌گیرد که f تابعی با یک ورودی و g تابعی با سه ورودی است. سپس این عمل‌گر، تابع بازگشتی h (با دو ورودی) را به صورت زیر می‌سازد:
$$\begin{cases} h(x, 0) = f(x) \\ h(x, y') = g\big(x, y, h(x, y)\big) \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم منظور از y' همان $y+1$ یا $inc(y)$ است. در واقع این عمل‌گر برای محاسبه‌ی $h(x,y')$، مقدار $h(x,y)$ را به صورت بازگشتی محاسبه می‌کند و سپس حاصل $g\big(x,y,h(x,y)\big)$ را برمی‌گرداند. این عمل‌گر را با $\mathrm{P}R[f,g]$ نشان می‌دهیم.

فرهاد که حسابی گیج شده بود، از علی‌رضا خواست تا چند مثال برای او بزند. علی‌رضا دو مثال زیر را برای بهتر فهمیدن فرهاد ارائه کرد:

۱. فرض کنید می‌خواهیم تابع $const_1$ را بسازیم. این تابع باید به ازای هر ورودی x، هم‌واره عدد 1 را به عنوان خروجی تحویل دهد. قبل از پیاده‌سازی این تابع، به هدف پیاده‌سازی این تابع توجه کنید. توابع و عمل‌گرهای تعریف شده، بسیار ساده و مقدماتی هستند و شما حتی دست‌رسی مستقیم به یک عدد صحیح ندارید و حتی نمی‌توانید مستقیمن یک عدد صحیح به عنوان ورودی یک تابع بدهید؛ به همین دلیل برای ساختن عدد 1، این تابع را می‌سازیم. پس از پیاده‌سازی این تابع، دست‌رسی به عدد 1 خواهیم داشت. علی‌رضا روش زیر را برای پیاده‌سازی این تابع، پیشنهاد کرد:

$$const_1 = CN[inc, z]$$

این تابع در واقع با گرفتن عدد x، ابتدا آن را به تابع z و حاصل یا همان صفر را به تابع inc می‌دهد و در انتها خروجی ۱ برگردانده می‌شود.

فرض کنید $const_i$ تابعی باشد که با گرفتن هر عدد x، عدد ثابت i را برگرداند. علی‌رضا به این نکته توجه کرد که به ازای هر c ثابت، با داشتن تابع $const_{c-1}$، تابع $const_c$ را می‌توان به صورت زیر، پیاده‌سازی کرد:

$$const_c = CN[inc, const_{c-1}]$$

سپس با استقرا نتیجه گرفت به ازای هر c ثابت، تابع $const_c$ را می‌توان پیاده‌سازی کرد.

۲. فرض کنید می‌خواهیم تابع جمع (sum) را بسازیم. این تابع باید با گرفتن دو ورودی x,y، جمع آن‌ها $(x+y)$ را تحویل دهد. علی‌رضا برای پیاده‌سازی این تابع به صورت زیر استدلال کرد:

«در صورتی که $y=0$ باشد، آن‌گاه حاصل $x+y$ برابر x می‌شود؛ در غیر این صورت، حاصل $x+y$ برابر $sum\big(x,(y-1)\big)+1$ است. پس می‌توان به صورت بازگشتی، این تابع را پیاده‌سازی کرد و کافی است دو تابع f,g را برای عمل‌گر بازگشت، تعریف کنیم:

- از آن‌جایی که $sum(x,0)=x$، پس باید تابع f را طوری تعریف کنیم که $f(x)=x$ شود. تابع بازتاب P_1^1 با گرفتن یک ورودی، همان را برمی‌گرداند؛ پس اگر قرار دهیم $f(x)=P_1^1(x)$، تابع مطلوب f را ساخته‌ایم. پس
$$f = P_1^1$$
- داریم $sum(x,y')=sum(x,y)+1$ و باید $sum(x,y')=g\big(x,y,sum(x,y)\big)$ شود. با استفاده از تابع بازتاب P_3^3 روی ورودی‌های تابع g، می‌توانیم ورودی سوم آن یا همان $sum(x,y)$ را به دست آوریم. سپس اگر حاصل را به تابع inc بدهیم، مقدار مورد نظر یا همان $sum(x,y')$ ساخته می‌شود؛ پس اگر قرار دهیم
$$g\big(x,y,sum(x,y)\big) \;=\; inc\left(P_3^3\big(x,y,sum(x,y)\big)\right)$$
تابع مطلوب g را ساخته‌ایم. پس $g \;=\; CN[inc, P_3^3]$.

پس توابع f,g را برای پیاده‌سازی توسط عمل‌گر بازگشت، ساختیم.»

علی‌رضا پس از استدلال بالا، پیاده‌سازی زیر را ارائه داد:

$$sum = PR\left[P_1^1, CN[inc, P_3^3]\right]$$

حال برای پیاده‌سازی توابع زیر، به فرهاد کمک کنید. توجه کنید فقط باید از توابع و عمل‌گرهای گفته شده، استفاده کنید. برای ساده نوشتن، می‌توانید چند تابع کمکی تعریف کرده و پیاده‌سازی کنید و در پیاده‌سازی تابع خواسته شده، از آن‌ها استفاده کنید. در هر قسمت توضیحی کوتاه (در حد چند جمله) نیز برای پیاده‌سازی خود بدهید.

الف) تابع ضرب (mul) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید دو عدد x, y به عنوان ورودی بگیرد و $x \times y$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $mul(x, y) = x \times y$ شود. (۱۰ امتیاز)

ب) تابع $poly$ را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید یک عدد x به عنوان ورودی بگیرد و $x^2 + x + 2$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $poly(x) = x^2 + x + 2$ شود. (۱۰ امتیاز)

پ) تابع فاکتوریل ($fact$) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید عدد n را به عنوان ورودی بگیرد و $n!$ را به عنوان خروجی تحویل دهد. در واقع باید $fact(n) = n!$ شود. (۱۰ امتیاز)

ت) تابع مینیمم (min) را پیاده‌سازی کنید. این تابع باید عدد x, y را به عنوان ورودی بگیرد و عدد کوچک‌تر را از میان دو عدد x, y تحویل دهد. برای مثال اگر 3,4 به عنوان ورودی به این تابع داده شوند، باید عدد 3 و اگر 7,7 داده شوند، باید عدد 7 به عنوان خروجی داده شود. (۲۰ امتیاز)

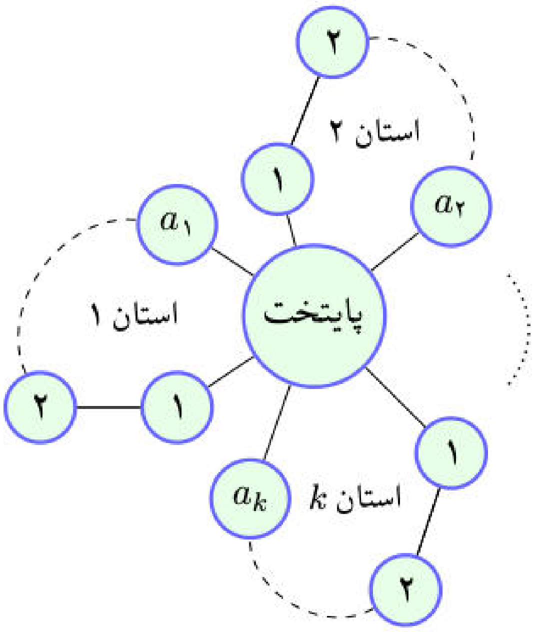
توپ‌های بهروز .... ۳۵ امتیاز

بهروز b جعبه و n نوع توپ دارد ($b \geq n$). در هر جعبه، تعدادی توپ وجود دارد. توجه کنید یک نوع توپ می‌تواند در چند جعبه وجود داشته باشد. می‌دانیم هر n جعبه‌ای را در نظر بگیریم، می‌توان از هر کدام، یک توپ انتخاب کرد؛ طوری که هیچ دو توپی از n توپ انتخاب شده، هم‌نوع نباشند. فرض کنید مجموع تعداد توپ‌های جعبه‌ها s باشد. کمینه‌ی ممکن s را بیابید (در واقع شما باید یک s پیدا کنید که حالتی با s توپ داشته باشیم؛ ولی هیچ حالتی با $s - 1$ توپ وجود نداشته باشد).

بمب‌گذاری واس‌اوناس! .... ۶۵ امتیاز

در یک دنیا، هر کشور تعدادی شهر دارد و بین هر دو شهر، یا جاده‌ی مستقیم دوطرفه وجود دارد یا وجود ندارد. دو شهر را **مجاور** می‌گوییم، اگر با جاده‌ی مستقیم به هم وصل باشند. می‌دانیم از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده، به هر شهر دیگر رسید. **فاصله‌ی** بین دو شهر را کم‌ترین تعداد جاده‌هایی در نظر می‌گیریم که برای رفتن از یکی از این دو شهر به دیگری باید طی کرد.

الف) علی‌رضا و فرهاد، در کشور **واس‌ماس** زندگی می‌کنند. این کشور از یک پایتخت و k استان با شماره‌های $1, 2, \dots, k$ تشکیل شده است. استان i، a_i شهر با شماره‌های $1, 2, \dots, a_i$ دارد. در هر استان i، شهرهای ۱ و ۲ به هم، شهرهای ۲ و ۳ به هم، ... و شهرهای $a_i - 1$ و a_i به هم جاده دارند. هم‌چنین در هر استان i، شهرهای ۱ و a_i به پایتخت جاده دارند. در واقع جاده‌های این کشور مانند شکل زیر است:



یک تروریست در یکی از شهرهای این کشور، بمب‌گذاری کرده است. علی‌رضا و فرهاد که به تازگی پلیس شده‌اند، برای پیدا کردن شهر بمب‌گذاری شده، مأمور شده‌اند. آن‌ها یک دستگاه بمب‌یاب دارند. اگر در شهری مانند T این دستگاه را استفاده کنند، چنان‌چه شهر T بمب‌گذاری شده باشد، دستگاه به ما می‌گوید و اگر شهر T بمب‌گذاری نشده باشد، دستگاه در میان شهرهای مجاور T، شهری را نشان می‌دهد که کم‌ترین فاصله را با شهر بمب‌گذاری شده دارد (اگر چند شهر با این خاصیت وجود داشت، دستگاه به طور تصادفی یکی از آن‌ها را نشان می‌دهد). استفاده از این دستگاه، بسیار هزینه‌بر است؛ پس علی‌رضا و فرهاد می‌خواهند با کم‌ترین تعداد استفاده از دستگاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند. کم‌ترین تعداد دفعاتی که آن‌ها باید از دستگاه استفاده کنند تا بتوانند بمب را پیدا کنند، چقدر است؟ پاسخ را بر حسب اعداد $a_1, a_2, \dots, a_k$ بیان کنید. (۱۰ امتیاز)

ب) اتفاق ناگوار بمب‌گذاری، در کشور **ماس‌ماس** نیز رخ داد. پادشاه کشور ماس‌ماس تصمیم گرفته است از گروهی زبده برای خنثی کردن این بمب استفاده کند. پس از عمل‌کرد فوق‌العاده‌ی علی‌رضا و فرهاد در خنثی کردن بمب کشور واس‌ماس، پادشاه کشور ماس‌ماس تصمیم گرفت مأموریت را به این دو نفر و دست‌گاه عجیب‌شان بسپارد. پادشاه کشور ماس‌ماس به هر شهر، یک عدد نسبت داده است و آن عدد برابر با فاصله‌ی دورترین شهر کشور تا شهر مذکور است. علی‌رضا و فرهاد، اطلاعاتی در مورد تعداد شهرها و نحوه‌ی جاده‌کشی کشور ماس‌ماس ندارند. آن‌ها فقط می‌دانند کم‌ترین عدد نسبت داده شده به شهرها، r است. علی‌رضا و فرهاد ادعا می‌کنند پس از گرفتن نقشه‌ی جاده‌کشی کشور، خواهند توانست با حداکثر $f(r)$ بار استفاده از دست‌گاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند. پادشاه نیز پس از شنیدن این حرف، نقشه را به آن‌ها می‌دهد. با توجه به این که فرهاد و علی‌رضا هنگام بیان ادعا، تعداد شهرها و نقشه‌ی جاده‌کشی آن‌ها را نمی‌دانند، کمینه‌ی $f(r)$ را بیابید. (۲۵ امتیاز)

ج) عصبانیت بمب‌گذاران پس از خنثی شدن دو اقدام قبلی، دو چندان شد و آن‌ها این بار تصمیم گرفتند در کشور دوست و هم‌سایه (**باس‌ماس**) بمب‌گذاری کنند! این کشور n شهر دارد. ثابت کنید هر گونه شهرهای این کشور جاده‌کشی شده باشند، علی‌رضا و فرهاد می‌توانند با کم‌تر از $\lfloor lg(n) \rfloor + 1$ بار استفاده از دست‌گاه، شهر بمب‌گذاری شده را پیدا کنند.

توجه: منظور از $lg(n)$، لگاریتم n در مبنای ۲ است. برای مثال $lg(1024) = 10$ و ... $4.32192 = lg(20)$ است. هم‌چنین منظور از $\lfloor x \rfloor$، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست. برای مثال $2 = \lfloor 2.3 \rfloor$ و $5 = \lfloor 5 \rfloor$ است. (۳۰ امتیاز)

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر کشور

- سؤال‌های **۱۲ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

---

۱ رستم ۱۳۹۴ سکه با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۴ بر روی میز قرار داده است. تعدادی از این سکه‌ها عادی (یک رو شیر و یک رو خط) و بقیه‌ی سکه‌ها هر دو رو شیر هستند (این تعداد می‌تواند صفر هم باشد). سهراب می‌خواهد تعداد سکه‌های هر دو رو شیر را پیدا کند ولی چشمانش بسته است. او تنها می‌تواند در هر حرکت تعدادی از سکه‌ها را انتخاب کرده و از رستم بخواهد آنها را پشت و رو کند. پس از آن رستم تعداد سکه‌های روی میز که به سمت شیر هستند را به سهراب می‌گوید.
سهراب می‌داند در ابتدای کار دقیقا ۱۰۰ سکه به سمت شیر هستند، حداقل چند حرکت لازم است تا سهراب تعداد سکه‌های دو رو شیر را بیابد؟

۱) ۱۳۹۳ ۲) ۱ ۳) ۱۳۹۴ ۴) ۱۱ ۵) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر در حرکت اول سهراب تمامی سکه‌ها را پشت و رو کند به هدف می‌رسیم. می‌دانیم سکه‌های دو رو شیر تنها در بین ۱۰۰ سکه‌ای هستند که ابتدا شیر بودند. اگر هیچ‌کدام از آنها اینگونه نباشند جواب سهراب ۱۲۹۴ خواهد بود. ولی به ازای هر سکه‌ی دو رو شیر، این تعداد افزایش می‌یابد. در نتیجه اگر سهراب x را اعلام کند، تعداد سکه‌های دو رو شیر برابر $x - ۱۲۹۴$ است. □

۲ می‌خواهیم در خانه‌های جدول زیر، اعداد ۱ تا ۹ را قرار دهیم، به صورتی که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر، برابر باشد. جای دو تا از اعداد (۱ و ۵) نیز مشخص شده است.
برای یک خط مانند L در صفحه، $f(L)$ برابر مجموع اعداد خانه‌هایی از جدول است که با آن خط، تقاطع دارند (یک خانه از جدول با خط L تقاطع دارد، اگر حداقل ۲ نقطه‌ی مشترک با آن خط داشته باشد). بیشینه‌ی ممکن $f(L)$، در میان تمام جدول‌ها و خط‌های ممکن چند است؟ (هر خانه از جدول یک مربع به طول واحد است)

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۱ ۴) ۲۷ ۵) ۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر دوران‌ها و حالت‌های متقارن را یکی در نظر بگیریم، جدول به صورت یکتا پر می‌شود. هم‌چنین خط حداکثر می‌تواند از ۵ خانه بگذرد. اگر خط بخواهد از ۸ بگذرد، حداکثر مجموع ۲۷ را تولید خواهد کرد. اگر از ۸ نگذرد نیز، $۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۹ = ۳۱$ بیشینه‌ی ممکن خواهد بود که مثال آن وجود دارد. □

۳ می‌خواهیم ۷ رقم ۰ و ۱ را دور دایره بچینیم. می‌گوییم رشته‌ی S در این چینش آمده است، اگر چند رقم متوالی در دایره وجود داشته باشند که با کنار هم قرار دادن‌شان به ترتیب ساعت‌گرد، رشته‌ی S تشکیل شود. تعداد دفعات وجود S در چینش را $f(S)$ می‌نامیم.
برای مثال، در چینش روبرو، $f(۱۱۰) = ۱$ و $f(۱۱) = ۳$ و $f(۰۱۱۱۰) = ۰$ است.
یک چینش اعداد دور دایره را در نظر بگیرید. به ازای هر رشته‌ی دودویی S که حداکثر ۳ رقم دارد، $۲^{f(S)}$ را محاسبه می‌کنیم و این مقادیر را با هم جمع می‌کنیم (به عنوان مثال در شکل مقابل این عدد برابر ۷۰ می‌شود). عدد نهایی حداقل چند است؟ (برای رشته‌هایی که در چینش وجود ندارند $f(S) = ۰$ است.)

۱) ۵۵ ۲) ۵۱ ۳) ۵۶ ۴) ۶۳ ۵) ۵۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به ازای رشته‌های یک رقمی بهترین حالت این است ۴ تا از اعداد یکسان باشند.
به ازای رشته‌های دو رقمی بهترین حالت این است که از سه حالت ۲ بار و از یک حالت ۱ بار وجود داشته باشد.
و در نهایت به ازای رشته‌های سه رقمی بهترین حالت این است که از هر حالت حداکثر یک بار آمده باشد و از یک رشته اصلا نیاید.
اگر دنباله دور دایره به صورت ۱۱۱۰۰۱۰ باشد به چنین حالتی می‌رسیم و در نتیجه این جواب بهینه است. با محاسبه‌ی مجموع اعداد فوق عدد ۵۳ بدست می‌آید که پاسخ مسئله است. □

۴ ۱۵ دایره همانند شکل روبرو داریم. هر دایره می‌تواند سفید یا سیاه باشد. رنگ دایره‌ها به صورت زیر مشخص می‌گردد:

- دایره‌های سطر بالا به صورت مستقل می‌توانند سفید یا سیاه باشند.
- بقیه‌ی دایره‌ها (همه به جز سطر بالا) به رنگ سیاه هستند، اگر و تنها اگر دو دایره‌ی مجاور سطر بالای آن ناهمرنگ باشند.

در بین تمامی حالات ممکن، حداکثر چند دایره‌ی سیاه می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۲ ۵) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

شکل مقابل روشی را نشان می‌دهد که ۱۰ دایره‌ی سیاه داریم. از طرف دیگر در هر چهار مثلثی که در شکل نشان داده شده حداقل یک دایره‌ی سفید داریم، در نتیجه جواب حداکثر ۱۱ خواهد بود. اگر حالتی وجود داشته باشند که جواب ۱۱ باشد، سه خانه‌ی دیگر سیاه خواهند بود ولی با فرض سیاه بودن آنها می‌توان دایره‌ها را پر کرد که در این صورت به ۱۱ دایره نمی‌رسیم. □

۵ در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تمامی حالات ممکن را روی تخته کشیده‌ایم. در مجموع چند دایره‌ی سیاه خواهیم داشت؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۲۰۸ ۵) ۲۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

می‌توان مجموع دایره‌های سیاه هر سطر را بصورت مجزا محاسبه نمود و در نهایت اعداد پنج سطر را با هم جمع کرد.
در هر سطر هر وضعیت، یک حالت معکوس دارد که رنگ همه‌ی دایره‌ها برعکس شده‌اند. از طرف دیگر مستقل از انتخاب رنگ دایره‌ها، هر وضعیت در یک سطر مشخص در تعداد وضعیت یکسانی ظاهر می‌شود (چون برای سطر بالایی آن ۲ انتخاب داریم، برای سطر دو تا بالاتر ۴ انتخاب و ... تا به سطر اول برسیم). بدین ترتیب بصورت میانگین در هر سطر نیمی از دایره‌ها سفید و نیمی سیاه هستند. پس جواب برابر است با تعداد کل دایره‌ها تقسیم بر ۲ که می‌شود: $\frac{۱۵\times ۲^{۵}}{۲} = ۲۴۰$. □

۶ یک جایگشت

$$\pi = \langle \pi_{۱}, \pi_{۲}, \ldots, \pi_{۹} \rangle$$

از اعداد ۱, ۲, ..., ۹ را در نظر بگیرید. عدد جایگشت π برابر تعداد اعضایی از جایگشت مانند π_i است که زوجیت i و π_i برابر باشد. برای مثال عدد جایگشت ⟨۸, ۹, ۷, ۱, ۲, ۴, ۳, ۶, ۵⟩ برابر ۵ است. با در نظر گرفتن تمام جایگشت‌های ممکن، به طور میانگین عدد یک جایگشت چند است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $\frac{۴۱}{۹}$ ۴) ۵ ۵) $\frac{۹}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

می‌توان با حالت‌بندی و شمارش مسئله را حل کرد اما راه ساده‌تر به شرح زیر است:
a_i را برابر احتمال آن که زوجیت i و π_i برابر باشد در نظر می‌گیریم. در امید ریاضی این خاصیت وجود دارد که امید ریاضی جمع چند متغیر برابر با جمع امید ریاضی تک تک آن متغیرهاست؛ پس امید ریاضی خواسته شده، برابر با جمع a_iـ ها است. پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۴ \times ۴ + ۵ \times ۵}{۹} = \frac{۴۱}{۹}$$

□

۷ یک عدد را **وارونه** می‌گوییم، هر گاه به صورت $\frac{۱}{n}$ باشد که n عددی طبیعی است. می‌خواهیم عدد ۱ را به صورت جمع k عدد وارونه‌ی متمایز بنویسیم. به ازای چند مقدار $۲ \leqslant k \leqslant ۶$ می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۰ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به ازای $k = ۲$ نمی‌توان این کار را انجام داد زیرا باید $۱ = \frac{۱}{i} + \frac{۱}{j}$ باشد. اگر $i = ۱$ یا $j = ۱$ باشد، حاصل از ۱ بیش‌تر می‌شود. پس $i, j \geqslant ۲$ و از طرفی نمی‌توانند هر دو برابر ۲ باشند. پس حاصل کم‌تر از ۱ خواهد شد.
به ازای $k = ۳$ کار به شکل زیر قابل انجام است:

$$۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶}$$

حال فرض کنید کار به ازای $k = m$ برقرار باشد. مخرج تمام کسرها را ضرب در ۲ کنید و حاصل را با $\frac{۱}{۲}$ جمع کنید. به این ترتیب کار برای $k = m + ۱$ نیز انجام می‌شود. پس به ازای $k = ۳, ۴, ۵, ۶$ کار قابل انجام است.
□

۸ تیم فوتبال سلطان، با سیستم $۴ - ۴ - ۲$ بازی می‌کند؛ یعنی ۱ دروازه‌بان، ۴ مدافع و ۴ هافبک و ۲ مهاجم دارد. هر توپی که به یک بازیکن در این تیم می‌رسد، یا آن را با یک شوت، تبدیل به گل می‌کند یا پاس می‌دهد.

هیچ بازیکنی حق ندارد به بازیکنی پاس بدهد که قبلا توپ به او رسیده و یا در خطوط عقب‌تر بازی می‌کند؛ برای مثال یک هافبک نمی‌تواند به یک مدافع پاس بدهد، اما می‌تواند به یک هافبکی که توپ به آن نرسیده و یا یک مهاجم پاس بدهد.

فرض کنید توپ در ابتدا در اختیار دروازه‌بان است و تیم می‌خواهد یک گل بزند (همانند شکل زیر). به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (حتی دروازه‌بان هم می‌تواند با یک ضربه‌ی مستقیم گل بزند.)

۱) ۲۳۰۴ ۲) ۱۱۵۲ ۳) ۵۰۴۳ ۴) ۲۸۶۲۵ ۵) ۲۱۱۲۵

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

فرض کنید یک خط در این سیستم k نفر داشته باشد. می‌خواهیم تعداد حالاتی را از لحظه‌ی رسیدن توپ به یکی از بازی‌کنان این خط تا لحظه‌ی بیرون کردن توپ از این خط (با پاس رو به جلو یا شوت) حساب کنیم. این تعداد حالات را a_k می‌نامیم. یک حالت وجود دارد که توپ اصلن به هیچ یک از بازی‌کنان این خط نرسد. در غیر این صورت k حالت برای انتخاب بازی‌کن شروع کننده در این خط وجود دارد. انجام بقیه‌ی کار به $a_{k-۱}$ حالت توسط بقیه‌ی بازی‌کنان این خط قابل انجام است. پس

$$a_k = ka_{k-۱} + ۱$$

حال طبق اصل ضرب پاسخ برابر ”تعداد حالات توپ در خط دفاعی ضرب در تعداد حالات توپ در خط هافبک ضرب در تعداد حالات توپ در خط حمله“ است. پس پاسخ برابر

$$a_۴ \times a_۴ \times a_۲$$

خواهد بود. از طرفی

$$a_۱ = ۲, a_۲ = ۲ \times ۲ + ۱ = ۵, a_۳ = ۳ \times ۵ + ۱ = ۱۶, a_۴ = ۴ \times ۱۶ + ۱ = ۶۵$$

پس پاسخ برابر

$$۶۵ \times ۶۵ \times ۵ = ۲۱۱۲۵$$

است. □

۹ سه توپ سیاه و سه توپ سفید داریم که به شکل زیر، در هفت جعبه جای گرفته‌اند:

فاصله‌ی دو جعبه تعداد جعبه‌های بین آن دو است. برای مثال فاصله‌ی دو جعبه‌ی مجاور صفر است. در هر حرکت می‌توان یک توپ که فاصله‌ی جعبه‌اش با یک جعبه‌ی خالی، حداکثر یک است را به خانه‌ی خالی انتقال داد. می‌خواهیم به حالتی برسیم که سه توپ سفید در سه جعبه‌ی سمت چپ و سه توپ سیاه در سه جعبه‌ی سمت راست باشند. حداقل چند حرکت برای این کار لازم است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

تعداد جابجایی‌ها برای هر توپ چهار خانه است. در نتیجه هر توپ حداقل باید دو حرکت انجام دهد تا به خانه‌ی هدفش برسد (۱۲ حرکت). از طرف دیگر حرکت اول و آخر همواره شامل یک واحد حرکت هستند. در نتیجه هر کدام از آن مهره‌ها باید یک حرکت اضافه‌تر انجام دهند که در مجموع ۱۴ حرکت می‌شود.
اگر ۱۴ جواب مسئله باشد باید بتوان با همین روند (بجز دو حالت همواره حرکات ۲ واحدی) به انتها رسید. کافیست از حرکت اول دنباله‌ی حرکت را پیگیری کنیم تا ببینیم پس از پنج حرکت بازی به حالتی می‌رسد که باید یک حرکت یک واحدی اضافی انجام شود و در نتیجه تعداد حرکات برای رسیدن به جواب ۱۵ می‌شود.
از طرفی با ادامه دادن همین روند مثالی با ۱۵ حرکت هم یافت می‌شود. □

۱۰ جایگشت $a_{۱}, a_{۲}, \cdots, a_{۶}$ از اعداد ۱ تا ۶ را در نظر بگیرید. در ابتدا یک عدد را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و سپس در هر مرحله اگر عدد a_i انتخاب شده بود در مرحله‌ی بعد به ازای $a_i \neq ۶$ عدد $a_{a_i+۱}$ و برای $a_i = ۶$ عدد $a_{۱}$ انتخاب می‌شود. به ازای چند جایگشت مختلف می‌توان عدد اول را به گونه‌ای انتخاب کرد که بعد از تعدادی مرحله، همه‌ی اعداد جایگشت حداقل یک‌بار انتخاب شده باشند؟

۱) ۳۴۵ ۲) ۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۷۲۰ ۵) ۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

برای هر جایگشت می‌توان یک نوع دیگر گراف جایگشت ساخت به طوری که از هر عدد به عدد بعدی یک یال جهت‌دار رسم کرد حالا ما می‌خواهیم گراف جایگشت یک دور به طول ۶ باشد که برای این کار ۵! حالت وجود دارد. □

۱۱ مجموعه‌ی $S = \{۱, ۲, ..., ۷\}$ داده شده است. دو تابع داریم:
$f(A)$ که مکمل زیرمجموعه‌ی A و $g(A, B)$ که اشتراک A و B را می‌دهد.
یک کیسه داریم که همه‌ی زیرمجموعه‌های S را درون آن ریخته‌ایم. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه از کیسه بیرون آوریم تا با استفاده از آن‌ها و توابع بتوان تمام زیرمجموعه‌های S را تولید کرد (برای تولید زیرمجموعه‌ها می‌توان از هر زیرمجموعه به تعداد دل‌خواه استفاده کرد).
فرض کنید $\{۱, ۲, ۵, ۶\}$، $\{۲, ۵, ۳\}$ و $\{۵, ۶\}$ را از کیسه بیرون آورده‌ایم. حداقل چند زیرمجموعه‌ی دیگر از کیسه بیرون بکشیم تا مطمئن باشیم با آن‌ها می‌توان مسئله را حل کرد؟

۱) ۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۷ ۴) ۶۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

از اشتراک هر ۳ مجموعه به مجموعه‌ی $\{۵\}$ می‌رسیم. از تفریق این مجموعه و مجموعه‌ی $\{۵, ۶\}$ به $\{۶\}$ می‌رسیم. از تفریق دو مجموعه‌ی اول به دو مجموعه‌ی $\{۲, ۳\}$ ، $\{۱, ۲\}$ می‌رسیم که ما را به مجموعه‌های ۱ تا ۳ می‌رساند. نکته اینجاست که در هر مجموعه‌ای که در نظر بگیریم یا ۴ و ۷ هر دو نیامده‌اند یا هر دو آمده‌اند. بنابراین با هیچ تابعی بر حسب مجموعه‌های فعلی نمی‌توان به مجموعه‌هایی رسید که یکی از این دو را داشته باشد. در ضمن کافی است مجموعه‌ای داشته باشیم شامل یکی از این دو. با استفاده از عملیات تفریق و مجموعه‌های تک عضوی بدست آمده ابتدا به مجموعه‌ی تک عضوی ۴ یا ۷ می‌رسیم. سپس با استفاده از این توابع به هر زیرمجموعه‌ای خواستیم می‌رسیم. بنابراین این کار را تا زمانی می‌توان ادامه داد که به مجموعه‌ای برسیم که یکی از ۴ یا ۷ را داشته باشد. تعداد مجموعه‌هایی که یا هردوی ۴ و ۷ را دارند یا هیچکدام برابر با $۲^{۶} = ۶۴$ می‌باشد. بنابراین کافی است ۶۵ عضو داشته باشیم تا مساله حل شود. از آنجا که در ابتدا ۳ عضو داریم، ۶۲ جواب خواهد بود. □

یک کلمه درون یک پرونده‌ی متنی داده شده است و می‌خواهیم با کم‌ترین تعداد اعمال کپی (Copy) و درج (Paste) تعداد مشخصی نسخه از آن ایجاد کنیم.
در هر مرحله می‌توانیم تعداد دل‌خواهی از کلمات نوشته‌شده درون پرونده را در حافظه کپی کنیم و یا کلمات درون حافظه را در پرونده درج کنیم. (مثل کپی و پیست در ویرایشگرها، می‌توان یک بار کپی کرد و سپس چند بار درج کرد.)
هر کپی ۱ واحد و هر درج نیز ۱ واحد هزینه دارد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ با حداقل چند واحد هزینه می‌توانیم دقیقا ۹۹ کلمه‌ی دیگر مشابه با کلمه‌ی اول ایجاد کنیم؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۰ ۵) ۲۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر یک بار کپی و یک بار پیست کنیم در نهایت با ۱۴ حرکت می‌توان به عدد صد رسید. اما اگر در ابتدا یک بار کپی و دو بار پیست کنیم، سپس یک بار کپی و دو بار پیست کنیم، و سپس یک بار کپی و سه بار پیست کنیم به عدد ۳۶ می‌رسیم. حال اگر ۳۲ کلمه را کپی کنیم و دو بار پیست کنیم ۱۰۰ کلمه خواهیم داشت و تعداد حرکات ۱۳ تا شده است.

برای اثبات کمینه بودن پاسخ سوال بعدی را ببینید. □

۱۳ با ۱۴ واحد هزینه حداکثر چند کلمه (با احتساب کلمه‌ی اولیه) می‌توان ایجاد کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۴۳ ۴) ۸۱ ۵) ۱۶۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

کافی است $f(k)$ را بیش‌ترین تعداد کلمه با k واحد هزینه تعریف کنیم. به سادگی می‌توان دید که:

$$f(۲) = ۲, f(۳) = ۳, \dots, f(n) = \max_k\{kf(n-k)\}$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$f(۱۲) = ۸۱, f(۱۳) = ۱۰۸, f(۱۴) = ۱۶۲$$

□

فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $a_۱$ تومانی، $a_۲$ تومانی و ... داریم و بخواهیم مقدار n تومان را پرداخت کنیم (پرداخت یک‌طرفه است یعنی نمی‌توانیم مقداری را بپردازیم و بقیه‌ی پول را پس بگیریم). در صورتی که بتوان n تومان را پرداخت کرد، n را عددی **خوب** می‌گوییم. برای مثال اگر اسکناس‌های $۵۰, ۱۰۰, ۲۰۰, ۵۰۰$ و ۱۰۰۰ تومانی داشته باشیم، ۲۹۰۰ عددی خوب است؛ اما ۲۹۵۳ عددی خوب نیست. هم‌چنین عددی مانند n را **عجیب** گوییم، اگر بتوان n تومان را پرداخت کرد؛ طوری که از هر نوع اسکناس حداکثر یک بار استفاده شود. در مثال قبل ۹۰۰ عجیب نیست.
اگر n یک عدد خوب باشد، کمینه‌ی تعداد اسکناس‌ها برای پرداختش را $f(n)$ می‌نامیم. فرض کنید یک نفر الگوریتم زیر را برای پرداخت انتخاب کند:
در هر مرحله بزرگ‌ترین اسکناسی که مقدار آن از n بیش‌تر نیست را انتخاب می‌کنیم. این مبلغ را پرداخت می‌کنیم و برای باقی پول همین روش را ادامه می‌دهیم تا پرداخت به طور کامل انجام شود.
عدد n را **زیبا** گوییم، اگر تعداد اسکناس‌هایی که با الگوریتم بالا پرداخت می‌کنیم، برابر $f(n)$ شود. به یک کشور، **افسانه‌ای** گوییم، اگر تمام اعداد طبیعی خوب، زیبا نیز باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $۱, ۳, ۳^۲, ۳^۳, \dots$ تومانی داشته باشیم. می‌خواهیم یک نوع اسکناس از بین گزینه‌های زیر به اسکناس‌های‌مان اضافه کنیم. با اضافه کردن کدام گزینه تعداد اعداد عجیب n که $۱ \leqslant n \leqslant ۲۴۹$ بیش‌تر از بقیه گزینه‌ها است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

در صورتی که یک سکه مثل a اضافه شود به ازای هر عدد مثل i که قبلا تولید می‌شد می‌توان یک عدد تولید کرد به صورت $i + a$ مگر اینکه این عدد خود قابل تولید توسط اعداد قبلی باشد. هرچه تعداد این اعداد مشترک کمتر باشد اعداد عجیب بیشتری خواهیم داشت. حال به ازای هر a باید ببینیم در چند حالت i و $a+$ هر دو عجیب هستند.
اگر اعداد را در مبنای ۳ بنویسیم اعدادی عجیب هستند که تنها از ارقام ۰ و ۱ تشکیل شده باشند. حال با این ویژگی اگر $a = ۲$ باشد تنها زمانی i و $i + ۲$ عجیب هستند که دو رقم سمت راست i برابر ۰۱ باشد. به همین ترتیب برای $a = ۴$ باید دو رقم آخر ۰۰، برای $a = ۵$ باید سه رقم آخر ۰۱۱، برای $a = ۶$ باید سه رقم آخر ۰۱۱ یا ۰۱۰ و برای $a = ۷$ باید سه رقم آخر ۰۱۰ باشد.
با این توضیحات به ازای $a = ۵$ و $a = ۷$ تعداد اعداد بصورت i و $i + a$ که هر دو عجیب باشند کمتر است و در نتیجه در مجموع اعداد عجیب بیشتری تولید می‌کنند. ولی از این میان یکی از اعداد به شکل $i + ۷$ خارج از محدوده‌ی مسئله (یعنی کمتر مساوی ۲۴۹) می‌شود که $۲۴۳ + ۷ = ۲۵۰$ است. در نتیجه در مجموع تعداد اعداد عجیب ساخته شده به ازای $a = ۵$ بیشتر از بقیه‌ی گزینه‌ها است. □

۱۵ فرض کنید گزینه‌های زیر اسکناس‌های ۵ کشور مختلف باشند. کدام گزینه مربوط به یک کشور افسانه‌ای نیست؟

۱) $۱!, ۲!, ۳!, \ldots$
۲) $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$
۳) $۱, ۲, ۳, ۵, ۹, \ldots$ (۱ و $(۲^n + ۱)$ها)
۴) $۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots$
۵) گزینه‌های ۳ و ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در صورتی که در یک کشور هر سکه از مجموع سکه‌های کوچکتر از آن بزرگتر باشد الگوریتم یاد شده درست است (چرا؟). در نتیجه گزینه‌های اول و دوم هر دو افسانه‌ای هستند. برای گزینه‌ی چهارم به ازای $n = ۱۸$ الگوریتم بهینه نیست و در نتیجه کشور افسانه‌ای نخواهد بود.
ولی گزینه‌ی سوم هم کشوری افسانه‌ای است. فرض کنید چنین نباشد، در این صورت به ازای nای روش ما تعداد سکه‌ی بیشتری انتخاب می‌کند. فرض کنید در انتخاب بهینه بزرگترین عدد انتخاب نشود. در این صورت باید از یکی از اعداد دیگر چند بار انتخاب شود. ولی می‌دانیم بجای انتخاب دو عدد یکسان، می‌توان سکه‌ی بزرگترش را به همراه عدد ۱ انتخاب کرد. در نتیجه با انتخاب بزرگترین عدد نیز می‌توان با همان تعداد سکه به جواب بهینه رسید. پس این گزینه هم کشوری افسانه‌ای است. □

گراف ساده‌ی n رأسی G با رئوس $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. **ماتریس مسیریاب گراف**، یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی سطر iام و ستون jام آن، تعداد مسیرهای بین رأس i و رأس j است (مسیر دنباله‌ای از رئوس است که بین هر دو رأس متوالی یک یال وجود دارد و هر رأس حداکثر یک بار آمده است).
در صورتی که $i = j$ باشد، مقدار ۱ را در ماتریس قرار می‌دهیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ کدام یک از ماتریس‌های زیر، می‌تواند یک ماتریس مسیریاب باشد؟

ماتریس ۱:

۱	۲	۱	۱	۱
۱	۲	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۲	۲
۱	۱	۱	۱	۱

ماتریس ۲:

۳	۳	۳	۳	۱
۳	۳	۳	۱	۳
۳	۳	۱	۳	۳
۳	۱	۳	۳	۳
۱	۳	۳	۳	۳

ماتریس ۳:

۱	۲	۱	۱
۲	۲	۱	۱
۲	۱	۲	۲
۱	۲	۲	۱

ماتریس ۴:

۳	۳	۴	۱
۳	۳	۱	۴
۳	۱	۳	۳
۱	۳	۳	۳

ماتریس ۵:

۲	۳	۳	۱
۳	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۳
۱	۳	۳	۲

۱) ماتریس ۲ ۲) ماتریس ۳ ۳) ماتریس ۴ ۴) ماتریس ۱ ۵) ماتریس ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ماتریس مسیریاب یک درخت، ماتریسی با درایه‌های ۱ است. اضافه کردن یک یال باعث می‌شود دوری بوجود آید که حداقل شامل سه راس است و تعداد مسیرهای بین آنها ۲ خواهد شد. در نتیجه ماتریس ۱ نمی‌تواند ماتریس مسیریاب یک گراف باشد. به همین استدلال ماتریس ۳ نیز باید یک دور سه تایی با یک راس متصل به آنها باشد که در این حالت هم ماتریس گراف برابر ماتریس ۳ نمی‌شود.
در صورتی که در یک مولفه‌ی گراف دو دور داشته باشیم دو راس خواهیم داشت که تعداد مسیرهای بین آنها حداقل ۴ تا باشد در نتیجه ماتریس ۲ و ۵ هم قابل دست‌یابی نیست. با بررسی گراف‌های چهار راسی می‌توان مثالی برای ماتریس ۴ یافت (گرافی با ۵ یال). □

۱۷ می‌خواهیم با پرسیدن تعدادی از خانه‌های ماتریس مسیریاب یک گراف، تعداد مؤلفه‌های گراف را تشخیص دهیم. در هر گام می‌توان یکی از خانه‌های ماتریس را پرسید. در حداقل چند گام به طور تضمینی به هدف می‌رسیم؟

۱) n ۲) $n - ۱$ ۳) $n - ۲$ ۴) $\binom{n-۱}{۲} + ۱$ ۵) $\binom{n}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

واضح است که با $\binom{n}{۲}$ تعداد یال می‌توان به هدف رسید (هر دو راسی که در یک مولفه باشند درایه‌ی متناظر با آنها بزرگتر از صفر است). ادعا می‌کنیم با کمتر از این تعداد نمی‌توان به هدف رسید.
فرض کنید $\binom{n}{۲} - ۱$ پرسش انجام داده‌ایم و پاسخ تمام آنها صفر باشد. در این صورت گرافی داریم که هیچ یالی ندارد مگر اینکه بین دو راسی که سوال نپرسیده‌ایم یال باشد (که هنوز درباره‌ی آن اطلاعی نداریم). پس در این حالت خاص بدون پرسش آخر نمی‌توان تعداد مولفه‌ها را تشخیص داد. □

۱۸ با استفاده از ماتریس مسیریاب یک گراف، پاسخ چند تا از موارد زیر را همواره می‌توان فهمید؟ (رأس برشی، رأسی است که پس از حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف افزایش یابد.)

- آیا گراف رأس برشی دارد؟
- آیا رأس v برشی است؟
- بین دو رأس v و u یال وجود دارد یا نه؟
- آیا گراف حداقل ۲ (نه لزوما مجزا) دور دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۲ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

سوال اول: می‌توان فهمید. اگر راس برشی در گرافی باشد، آن راس و همسایگانش تنها یک مسیر به یکدیگر دارند. پس در این حالت حداقل سه راس هستند که درایه‌ی متناظرشان ۱ است. از طرفی اگر چنین سه راسی وجود داشته باشند بدین معنی است که یکی از آنها بین دو راس دیگر است (در غیر این صورت تعداد مسیرهای بین این دو راس حداقل ۲ بود). حال پس از حذف راس میانی دو راس دیگر در دو مولفه جدا قرار می‌گیرند.
سوال دوم و سوم: نمی‌توان فهمید. یک درخت را در نظر بگیرید. در این حالت متریس مسیریاب آن تماما ۱ است. در یک درخت برگ‌ها برشی نیستند ولی بقیه‌ی رئوس برشی هستند. از طرفی در این درخت نمی‌توان فهمید که بین دو راس مشخص یال هست یا نه.
سوال چهارم: می‌توان فهمید. ابتدا مولفه‌ها را از روی ماتریس می‌یابیم. حال اگر در یک ماتریس مسیریاب هر مولفه تنها ۱ وجود داشت دور ندارد، اگر تنها شامل ۱ و ۲ بود یک دور وجود دارد ولی اگر شامل اعداد ۳ یا بیشتر بود حداقل دو دور وجود دارد. □

روال جام حذفی بدین صورت است که 2^n تیم در n مرحله با هم مسابقه می‌دهند به نحوی که در هر مرحله هر تیم با یک تیم دیگر مسابقه می‌دهد (مثلا در مرحله‌ی اول 2^{n-1} مسابقه انجام می‌شود) و تیم‌هایی که شکست بخورند حذف می‌شوند. تیم‌های پیروز شده (نیمه‌ی دیگر تیم‌ها) به مرحله‌ی بعد می‌روند و دوباره به همین ترتیب مسابقه می‌دهند تا جایی که فقط یک تیم باقی بماند که تیم قهرمان نامیده می‌شود.
هر تیم عددی بین ۰ تا $2^n - 1$ دارد که قدرت آن تیم را نیز نشان می‌دهد (قدرت هیچ دو تیمی با هم برابر نیست). در مسابقه‌ی بین دو تیم، تیمی پیروز خواهد شد که قدرت بیشتری داشته باشد مگر در شرایطی که هر سوال مشخص می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ این مسابقات با شرکت ۶۴ تیم برگزار می‌شود ($n = 6$). در یک مسابقه اگر قدرت دو تیم را در مبنای دو بنویسیم و همه‌ی رقم‌های آنها به جز یکی برابر باشند هر دو تیم ممکن است پیروز شوند، در غیر این صورت تیم قوی‌تر پیروز می‌شود. برای مثال اگر ۲ و ۱۰ با هم مسابقه بدهند، هر دو تیم می‌توانند پیروز شوند. اما اگر ۱۶ و ۷ با هم مسابقه بدهند، حتما ۱۶ پیروز خواهد شد. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳۱ ۲) ۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱ ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

تمامی تیم‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ قرار دهید و مسابقات را با این چینش انجام دهید. در این صورت هر تیم با شماره‌ی زوج با تیم حریفش تنها در رقم یکان متفاوت است. پس تیم‌های زوج می‌توانند برنده باشند. بدین ترتیب به حالتی می‌رسیم که تمام اعداد زوج صعود کرده‌اند. همین روند را برای ۳۲ بعدی انجام دهید (رقم یکان همه صفر است و می‌توان همه‌ی اعداد را بر ۲ تقسیم کرد تا به اعداد ۱ تا ۳۱ برسیم. به ازای این اعداد هم همین روال را انجام دهید. با تکرار این کار در مراحل بعدی می‌توان به حالتی رسید که تیم با قدرت صفر برنده‌ی مسابقات شود. □

۲۰ در یک جام حذفی ۳۲ تیم حضور دارند ($n = 5$) و چهار تیم ۳۱، ۲۳، ۱۴ و ۵ آمادگی کافی ندارند و ممکن است در یک مسابقه به طور اتفاقی شکست بخورند. با این شرایط ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

می‌دانیم تیم قهرمان باید ۵ بازی را ببرد و در شرایط سوال، ۴ تیم گفته شده است که ممکن است در شرایطی از تیمی ضعیف‌تر شکست بخورند. پس تیم ۰ نمی‌تواند قهرمان شود.
حال می‌خواهیم ساختاری ارائه دهیم که طی آن تیم ۱ قهرمان شود. تیم ۱ به ترتیب با تیم‌های ۰ و ۵ و ۱۴ و ۲۳ و ۳۱ بازی کند و در ۴ مسابقه‌ی آخر تیم حریف به طور اتفاقی شکست می‌خورند.
تیم ۵ با تیم‌های ۲ و ۱ و تیم ۱۴ با تیم‌های ۶ و ۴ و ۱ و تیم ۲۳ با تیم‌های ۱۳ و ۱۲ و ۱۰ و ۱ و تیم ۳۱ با تیم‌های ۳۰ و ۲۹ و ۲۷ و ۲۲ و ۱ بازی خواهند کرد و طی این ساختار تیم ۱ قهرمان می‌شود. □

۲۱ در یک جام حذفی ۱۶ تیم حضور دارند ($n = ۴$) و هر تیم ممکن است به طور اتفاقی در یک مسابقه پیروز شود. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

ابتدا اثبات می‌کنیم تیم ۳ نمی‌تواند قهرمان شود. چون هر تیم برای قهرمانی باید ۴ بازی را ببرد و اگر فرض کنیم تیم ۳ قهرمان شده است باید حتما با هر سه تیم ضعیف‌تر از خودش بازی کند زیرا یک بازی را فقط می‌تواند از تیم قوی‌تری پیروز شود، پس در یکی از بازی‌های فینال یا نیمه نهایی باید تیم ۳ از تیمی ضعیف‌تر از خود پیروز شود.
یعنی آن تیم حداقل باید ۲ بازی را پیروز شده باشد تا به آن مرحله رسیده باشد که با توجه به اینکه هر ۳ تیم ضعیف‌تر از ۳ از خود ۳ شکست خواهند خورد پس هیچ کدام از این تیم‌ها نمی‌تواند ۲ پیروزی داشته باشد (یک بازی را می‌توانند از تیم قوی‌تر ببرند و تیم ضعیف‌تری نیز وجود ندارد که از آن ببرند) تا به نیمه نهایی برسند پس تیم ۳ نمیتواند قهرمان شود.
حال ساختاری حریصانه برای قهرمانی تیم ۴ ارائه می‌دهیم:
تیم ۴ با تیم‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۱۵ بازی می‌کند و تیم ۱۵ با تیم‌های ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۴ بازی می‌کند. تیم ۳ با تیم‌های ۰ و ۷ و ۴ بازی می‌کند و تیم ۲ با تیم‌های ۶ و ۴ بازی می‌کند و همچنین تیم ۱ با تیم ۴ بازی می‌کند.
□

دنباله‌ای اکیدا صعودی مانند $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد داریم. ما هیچ اطلاعاتی درباره‌ی اعداد نداریم و فقط می‌دانیم اکیدا صعودی هستند. عدد x در این دنباله موجود است اما نمی‌دانیم کجای دنباله است و می‌خواهیم مکان عدد x در دنباله را بیابیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از a_iها را انتخاب کنیم؛ سپس به ما نتیجه‌ی مقایسه‌ی x با a_i گفته می‌شود؛ یعنی یکی از عبارات زیر گزارش داده می‌شود:

$$x < a_i, \quad x = a_i, \quad x > a_i$$

هزینه‌ی مقایسه‌ی عدد a_i با x، برابر w_i است. w_i داده شده است.
می‌خواهیم الگوریتمی ارائه دهیم که مکان عدد x در دنباله را بیابد. کمینه‌ی هزینه‌ای که بتوان به طور تضمینی این کار را انجام داد

$$f(w_۱, w_۲, \ldots, w_n)$$

می‌نامیم. برای مثال می‌توان نشان داد اگرتمام w_iها برابر ۱ باشند، این مقدار برابر $\lfloor \lg(n) \rfloor$ خواهد شد (منظور از $\lg(n)$، لگاریتم n در مبنای ۲ است).

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۲ مقدار

$$f(\underbrace{۲, ۳, ..., ۱۰, ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰, ..., ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰}_{\text{۳۱۹ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

پاسخ: بهترین این است که با کمترین هزینه تعداد کل حالات را نصف کنیم. ۳۱ عدد ۱ وجود دارد که پس از ۵ بار پرسش اگر عدد مورد نظر یافت نشود یک بازه از اعداد ۲ تا ۱۰ می‌ماند. اگر بازه‌ای شامل اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ باشد حداقل ۹ واحد هزینه لازم است تا عدد را تشخیص دهیم. در نتیجه برای یافتن این بازه بصورت حداقلی عدد ۷ انتخاب می‌شود (در غیر اینصورت بازه به ۷ تا ۱۰ می‌رسد که باز هم حداقل ۱۶ واحد هزینه لازم دارد). در نتیجه در مجموع ۱۶ واحد هزینه لازم است. با انتخاب اولیه‌ی عدد ۷ این اتفاق می‌افتد و با هزینه‌ی حداکثر ۱۶ واحد به جواب می‌رسیم (بازه ۱ تا ۶ با ۸ واحد هزینه حل می‌شود). در نتیجه جواب نهایی مسئله برابر ۲۱ است. □

۲۳ مقدار

$$f(\underbrace{۱, ۱, ..., ۱}_{\text{۵۱۱ عدد}}, \underbrace{۲, ۲, ..., ۲}_{\text{۵۱۱ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۹ ۳) ۲۷ ۴) ۱۲ ۵) ۱۸

پاسخ: فرض کنید بازه تنها شامل ۵۱۱ عدد ۲ باشد. طبق مسئله‌ی کلاسیک این مبحث می‌دانیم حداقل باید ۸ پرسش انجام شود و اگر تعداد این اعداد یکی هم بیشتر شود (۵۱۲ یا بیشتر)، ۹ پرسش لازم است. حال عدد اولیه اگر شامل عددی بجز عدد ۲ وسطی باشد همچنان ۸ پرسش دیگر لازم است و اگر همان ۲ وسطی باشد ۵۱۱ عدد یک در سمت چپ وجود دارند که می‌توانند جواب مسئله باشند. در نتیجه حداقل ۱۷ واحد هزینه لازم است. از طرفی اگر سمت راست‌ترین ۱ را انتخاب کنیم با ۱۷ واحد هزینه می‌توانیم به خواسته‌ی خود برسیم. □

۲۴ فرض کنید $n \geqslant ۴$ باشد. مقدار

$$f(n, n^{۲}, n^{۳}, ..., n^{n})$$

چند است؟

۱) $n^{n-۳} + n^{n-۱}$

۲) $\left\lfloor n^{\frac{n}{۲}} + n^{\frac{۳n}{۴}} + n^{\frac{۷n}{۸}} + ... \right\rfloor$

۳) $\sum_{۱\leqslant ۲k+۱\leqslant n} n^{۲k+۱}$

۴) $\lfloor \lg(۱ + n + n^{۲} + ... + n^{n}) \rfloor$

۵) $n + n^{۲} + ... + n^{n-۱}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

پاسخ این سوال شبیه به سوال اول این بخش است. فرض کنید تنها چهار عدد بزرگتر مانده باشند. در این صورت تعداد حالات مختلف پرسش محدود هستند و می‌توان به سادگی بدست آورد که $n^{n-۱} + n^{n-۳}$ واحد هزینه لازم است. از طرفی مجموع بقیه‌ی اعداد بازه کمتر از $n^{n-۱}$ است. در نتیجه این هزینه برای کل بازه هم درست است.
□

۲۵ فرض کنید $n \geqslant ۳$ و تمام w_iها متمایز هستند. چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

- هیچ الگوریتم بهینه‌ای در مرحله‌ی اول w_i بیشینه را انتخاب نمی‌کند.
- الگوریتم بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_iای را انتخاب می‌کند که $|\sum_{j<i} w_j - \sum_{j>i} w_j|$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در هیچ مرحله‌ای، $a_۱$ را انتخاب نکند.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_i کمینه را انتخاب کند.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۰ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

هیچ‌کدام از گزاره‌ها درست نیستند.
گزاره‌ی ۱: اگر وزن‌ها به ترتیب ۱ و ۳ و ۲ باشد، بهترین انتخاب این است که ابتدا عدد وسطی را انتخاب کنیم که بیشینه وزن را دارد.
گزاره‌ی ۲: مثال سوال قبل، مثال نقضی برای این گزاره است.
گزاره‌ی ۳: اگر در مثال سوال قبل، تنها چهار عدد بزرگتر را در نظر بگیریم در سوال اول بهتر است که عدد اول انتخاب شود.
گزاره‌ی ۴: مثال سوال قبل، مثال نقضی برای این گزاره است. □

پاسخ تشریحی مرحله دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر ایران

فرهاد و علی‌رضا در منهتن! .... ۳۰ امتیاز

□ ابتدا ثابت می‌کنیم کمینه‌ی k برابر ۲ است. ابتدا نشان می‌دهیم کمینه‌ی k نمی‌تواند ۱ باشد. اگر فرهاد تنها یک خانه را انتخاب کند و علی‌رضا پاسخ ۱ به او بدهد، از آن‌جایی که هر خانه دست کم ۲ خانه‌ی مجاور (ضلعی) دارد، پس فرهاد نمی‌تواند به طور یکتا خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا را مشخص کند. حال نشان می‌دهیم فرهاد می‌تواند با انتخاب ۲ خانه، به هدفش برسد. فرض کنید فرهاد دو خانه‌ی $(۱,۱)$ و $(۱,m)$ را انتخاب کند و علی‌رضا برای این دو خانه، به ترتیب پاسخ‌های p و q بدهد. اگر خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا (r,c) باشد، باید $r+c=p+۲$ و $c-r=q-(m-۱)$ باشد. با حل دو معادله و دو مجهول بالا، r,c به طور یکتا دست می‌آید. ■

□ حال ثابت می‌کنیم تعداد روش‌های انتخاب ۲ خانه، طوری که فرهاد به هدفش برسد، ۴ است. اگر فرهاد دو خانه‌ی گوشه‌ای در طول یک ضلع را انتخاب کند، مانند روش بالا فرهاد می‌تواند به هدفش برسد. حال فرض کنید دو خانه به صورتی دیگر انتخاب شوند و این دو خانه، $(r_۱,c_۱),(r_۲,c_۲)$ باشند. ثابت می‌کنیم فرهاد نمی‌تواند به هدفش برسد. دو حالت داریم:

- فرض کنید این دو خانه، دو خانه در دو گوشه‌ی روبه‌روی جدول باشند. دو خانه‌ی مجاور $(r_۱,c_۱)$ را در نظر بگیرید. اگر علی‌رضا یکی از این دو خانه را انتخاب کند، در هر صورت دنباله‌ی اعدادی که به فرهاد تحویل می‌دهد، یک‌سان است و فرهاد به هدفش نمی‌رسد.

- فرض کنید دست کم یکی از این دو خانه، در گوشه نباشند. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $(r_۱,c_۱)$ در گوشه نباشد. پس حداقل ۳ خانه‌ی مجاور دارد. اگر فاصله‌ی دو خانه‌ی انتخابی فرهاد را d در نظر بگیریم، فاصله‌ی خانه‌ی $(r_۲,c_۲)$ تا ۳ خانه‌ی مذکور تنها می‌تواند $d-۱$ یا $d+۱$ باشد. فاصله‌ی این ۳ خانه‌ی مذکور تا $(r_۱,c_۱)$ نیز ۱ است. پس طبق اصل لانه کبوتر، حداقل دو تا از این خانه‌ها هستند که اگر علی‌رضا آن‌ها را انتخاب کند، دنباله‌ی اعداد یک‌سانی به فرهاد تحویل داده می‌شود و فرهاد به هدفش نمی‌رسد.

پس در هر حالت جز ۴ حالت گفته شده، فرهاد نمی‌تواند به هدفش برسد و پاسخ برابر ۴ است. ■

زبان اعصاب! .... ۵۰ امتیاز

الف) کاملن مانند مثال جمع در متن سوال عمل می‌کنیم. اگر $y=۰$ باشد، $x\times y=۰$ و در غیر این صورت $x\times y=x\times(y-۱)+x$ است. پس اگر در عمل‌گر بازگشت، تابع f را برابر تابع z و تابع g را برابر $sum(x,mul(x,y-۱))$ قرار دهیم، پیاده‌سازی انجام می‌شود. به دست آوردن $x,mul(x,y-۱)$ جهت

پاسخ تشریحی مرحله دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر ایران

دادن ورودی به تابع sum به راحتی توسط تابع P انجام می‌شود؛ زیرا هر دو مورد در ورودی‌های تابع g موجود هستند. پس داریم:

$$mul(x,y) = PR\big[z, CN[sum, P_{۱}^{۳}, P_{۳}^{۳}]\big]$$

ب) داریم $x^{۲} + x + ۲ = x(x+۱) + ۲$. ابتدا $x \times (x+۱)$ را محاسبه می‌کنیم. برای ساختن $x+۱$ باید از تابع inc و برای ساختن $x(x+۱)$ باید از تابع mul نوشته شده در قسمت قبل استفاده کنیم و آن‌ها را ترکیب کنیم. پس برای ساختن $x(x+۱)$ کافی است تابع

$$tri(x) = CN\big[mul, P_{۱}^{۱}, inc\big]$$

را در نظر بگیریم. حال باید حاصل را با دو جمع کنیم. پس پاسخ برابر

$$f(x) = CN\Big[sum, tri, const_{۲}\Big]$$

ج) ابتدا تابعی مانند $sudoFact(x,y)$ می‌نویسیم که $sudoFact(x,y) = y!$ شود. از عمل‌گر بازگشت استفاده می‌کنیم. اگر $y = ۰$ باشد، باید ۱ برگردانده شود؛ پس کافی است در عمل‌گر بازگشت، f را برابر $const_{۱}$ قرار دهیم که در متن سوال پیاده‌سازی شده است. اگر $y = ۰$ نباشد، $sudoFact(x,y') = y' \times sudoFact(x,y)$ است. پس تابع g باید y' را در $sudoFact(x,y)$ ضرب کند. پیاده‌سازی زیر برای g این کار را انجام می‌دهد:

$$g\big(x, y, sudoFact(x,y)\big) = CN\Big[mul, P_{۳}^{۳}, CN[inc, P_{۲}^{۳}]\Big]$$

پس تابع $sudoFact$ را می‌توان به شکل زیر، پیاده‌سازی کرد:

$$sudoFact(x,y) = PR\Big[const_{۱}, CN\big[mul, P_{۳}^{۳}, CN[inc, P_{۲}^{۳}]\big]\Big]$$

اکنون فقط کافی است تابع $sudoFact$ را به تابعی با یک ورودی تبدیل کنیم که عمل‌گر $CN[sudoFact, P_{۱}^{۱}, P_{۱}^{۱}]$ این کار را برای ما انجام می‌دهد. پس تابع فاکتوریل را می‌توان به شکل زیر پیاده‌سازی کرد:

$$fact(n) = CN\big[sudoFact, P_{۱}^{۱}, P_{۱}^{۱}\big]$$

د) ابتدا تابع $dec(x)$ را تعریف می‌کنیم که با گرفتن x، عدد $x - ۱$ را تحویل می‌دهد. البته در صورتی که $x = ۰$ باشد، تابع باید عدد ۰ را تحویل دهد. این تابع به شکل زیر می‌تواند پیاده‌سازی شود:

$$dec(x) = CN\Big[PR\big[z, P_{۲}^{۳}\big], P_{۱}^{۱}, P_{۱}^{۱}\Big]$$

حال تابع $sub(x,y)$ را تعریف می‌کنیم که در آن اگر $x \leq y$ باشد، مقدار ۰ و در غیر این صورت مقدار $x-y$ باید برگردانده شود. با استفاده از تابع dec، تابع sub (تفریق) می‌تواند به شکل زیر پیاده‌سازی شود:

$$sub(x,y) = PR\big[P^{۱}_{۱}, CN[dec, P^{۳}_{۳}]\big]$$

حال تابع $sign(x)$ را تعریف می‌کنیم. اگر $x = ۰$ باشد، این تابع عدد ۰ و در غیر این صورت ($x > ۰$)، این تابع باید عدد ۱ را برگرداند. این تابع به شکل زیر می‌تواند پیاده‌سازی شود:

$$sign(x) = CN\big[sub, const_{۱}, CN[sub, const_{۱}, P^{۱}_{۱}]\big]$$

حال $\overline{sign}(x)$ را تعریف می‌کنیم که برعکس تابع $sign$ عمل می‌کند؛ یعنی اگر $x = ۰$ باشد، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار ۰ را برمی‌گرداند. این تابع می‌تواند با استفاده از تابع $sign$ به صورت زیر نوشته شود:

$$\overline{sign}(x) = CN\big[sub, const_{۱}, CN[sign, P^{۱}_{۱}]\big]$$

حال تابع خواسته‌شده (min) را پیاده‌سازی می‌کنیم. با تعریف‌های بالا، به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$min(x,y) = sign(x-y) \times x + \overline{sign}(x-y) \times y$$

$sign(x-y) \times x$ را به صورت

$$case۱ = CN\Big[mul, CN\big[sign, CN[sub, P^{۲}_{۱}, P^{۲}_{۲}]\big], P^{۲}_{۱}\Big]$$

و $\overline{sign}(x-y) \times y$ را به صورت مشابه

$$case۲ = CN\Big[mul, CN\big[\,\overline{sign}, CN[sub, P^{۲}_{۱}, P^{۲}_{۲}]\big], P^{۲}_{۲}\Big]$$

پیاده‌سازی می‌کنیم. پس:

$$min(x,y) = CN[sum, case۱, case۲]$$

پاسخ تشریحی مرحله دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر ایران

توپ‌های بهروز .... ۳۵ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $n \times (b - n + ۱)$ است.

☐ ابتدا ثابت می‌کنیم در هر آرایش، حداقل این تعداد توپ داریم. هر نوع توپی که در نظر بگیرید، باید در حداقل $b - n + ۱$ جعبه آمده باشد. برهان خلف می‌زنیم. فرض کنید این طور نباشد. یعنی یک نوع توپ وجود دارد که در حداقل n جعبه نیامده است. آن n جعبه را در نظر بگیرید. نمی‌توان از آن‌ها توپ‌هایی انتخاب کرد که تمام انواع توپ‌ها انتخاب شوند و با فرض مسئله به تناقض می‌رسیم. پس $s \geq n \times (b - n + ۱)$ است. ■

☐ حال ثابت می‌کنیم آرایشی با $n \times (b - n + ۱)$ توپ وجود دارد. حکم را با استقرا روی b ثابت می‌کنیم. برای پایه، حالت $b = n$ را در نظر می‌گیریم. برای هر نوع توپ، یک جعبه‌ی جدا در نظر می‌گیریم و یک توپ از آن نوع در جعبه‌ی مذکور می‌گذاریم. به این ترتیب آرایشی با $n = n \times (b - n + ۱)$ توپ ارائه می‌شود. حال فرض کنید حکم برای $b = k$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $b = k + ۱$ نیز برقرار است. یک جعبه را کنار می‌گذاریم و در k جعبه‌ی باقی‌مانده، آرایشی با $n \times (k - n + ۱)$ توپ، مطابق فرض استقرا ارائه می‌کنیم. حال در جعبه‌ی کنار گذاشته شده از هر نوع توپ، یکی می‌گذاریم. به این ترتیب یک آرایش مطلوب به دست می‌آید که $n \times (k - n + ۲)$ توپ دارد و حکم ثابت می‌شود. ■

بمب‌گذاری واس اوناس! .... ۶۵ امتیاز

الف) ثابت می‌کنیم پاسخ مسئله برابر با

$$\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

است.

☐ ابتدا ثابت می‌کنیم، اگر شکل گراف شهرهای یک کشور، یک مسیر به ترتیب با شهرهای $v_۱, v_۲, \ldots, v_p$ باشد، حداقل $\lfloor lg(p) \rfloor$ مرحله، لازم است. برای این کار، کافی است ثابت کنیم اگر $p \geq ۲^q$ باشد، حداقل q مرحله، لازم است. از استقرای قوی روی p استفاده می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا، $p = ۱$ را در نظر می‌گیریم. داریم $p \geq ۲^۰$ و تعداد مراحل لازم برای انجام کار، ۰ است. فرض کنید حکم برای $< p$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای p نیز برقرار است. فرض کنید در مرحله‌ی ابتدایی، شهر v_i را انتخاب کنیم. اگر $i \leq ۲^{q-۱}$ باشد؛ ممکن است دست‌گاه شهر $v_{i+۱}$ را نشان دهد، متوجه می‌شویم بمب در یکی از شهرهای $v_{i+۱}, v_{i+۲}, \ldots, v_p$ است و طبق فرض استقرا دست کم $q - ۱$ مرحله لازم است (زیرا $p - i \geq ۲^{q-۱}$). پس با یک مرحله‌ی ابتدایی، دست کم q مرحله لازم است و حکم ثابت می‌شود. در حالتی که $i > ۲^{q-۱}$ نیز به طریق مشابه اثبات انجام می‌شود. ■

پاسخ تشریحی مرحله دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر ایران

□ به روشی مشابه روند بالا، می‌توان به راحتی ثابت کرد برای یک مسیر p رأسی، $\lfloor lg(p) \rfloor$ مرحله کافی نیز هست (روش جست‌وجوی دودویی). ■

□ حال فرض کنید شکل گراف شهرهای یک کشور، به صورت یک دور به طور p باشد. هر رأسی در ابتدا انتخاب شود، نیمی از رأس‌ها حذف می‌شوند و تنها یک مسیر به طور $\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor$ باقی می‌ماند. انتخاب هر شهر دیگر به جز این مسیر، اطلاعاتی در مورد شهر بمب‌گذاری شده به ما اضافه نمی‌کند و یک مسیر باقی می‌ماند. پس طبق قسمت قبل، برای یک دور به طول p، کمینه‌ی تعداد مراحل برابر $\lfloor lg(p) \rfloor = \lfloor lg(\frac{p}{۲}) \rfloor + ۱$ است. ■

□ حال ثابت می‌کنیم علی‌رضا و فرهاد، دست کم به

$$\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

مرحله در کشور واس‌ماس نیاز دارند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $a_۱ \geq a_۲, a_۳, \dots, a_k$ باشد. فرض کنید بمب در یکی از شهرهای استان ۱ باشد و علی‌رضا و فرهاد این اطلاعات اضافه را از ابتدا بدانند. انتخاب هر شهر جز پایتخت و شهرهای استان ۱، پاسخ مشخصی دارد و اطلاعات جدیدی اضافه نمی‌کند. پس یک دور باقی می‌ماند و فرهاد و علی‌رضا طبق قسمت قبل حداقل به

$$\lfloor lg(a_۱ + ۱) \rfloor = \lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

مرحله نیاز دارند. ■

□ پس فقط کافی است ثابت کنیم

$$\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

مرحله برای پیدا کردن بمب کافی است. اگر فرهاد و علی‌رضا در ابتدا پایتخت را انتخاب کنند و پایتخت یکی از شهرهای استان i را به آن‌ها نشان بدهد (بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید شهر شماره ۱ از این استان)، آنگاه بمب در یکی از شهرهای $۱, ۲, \dots, a_{\lfloor \frac{a_i+۱}{۲} \rfloor}$ است و طبق قسمت‌های گفته شده می‌توان با حداکثر $\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(\frac{a_k+۱}{۲}) \rfloor$ مرحله بمب را پیدا کرد. با احتساب یک مرحله‌ی اولیه، می‌توان نتیجه گرفت با حداکثر

$$\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

می‌توان بمب را پیدا کرد. ■

پاسخ تشریحی مرحله دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر ایران

ب) ثابت می‌کنیم پاسخ برابر r است.

☐ ابتدا ثابت می‌کنیم r مرحله برای پیدا کردن بمب، کافی است. آن شهری که کم‌ترین عدد نسبت داده شده را دارد، در ابتدا انتخاب می‌کنیم. سپس در هر مرحله همان شهری را انتخاب می‌کنیم که دست‌گاه به ما نشان می‌دهد. به این ترتیب پس از حداکثر r مرحله، شهر بمب‌گذاری شده پیدا می‌شود (توجه کنید اگر rـامین مرحله انجام شد و هنوز بمب پیدا نشده بود، بمب حتمن در شهر بعدی است و نیازی به چک کردن آن نیست). ■

☐ حال ثابت می‌کنیم نقشه‌ای با کمینه‌ی عدد r وجود دارد که حداقل r مرحله نیاز دارد. یک درخت دودویی کامل با ارتفاع r در نظر بگیرید.

با استقرا روی r ثابت می‌کنیم برای پیدا کردن بمب، حداقل r مرحله لازم است. برای پایه‌ی استقرا $r = ۰$ (درخت تک‌رأسی) را در نظر می‌گیریم و حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $r - ۱$ برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم برای r نیز برقرار است.

- اگر در ابتدا ریشه‌ی درخت انتخاب شود، زیردرختی که بمب در آن است، مشخص می‌شود. انتخاب هر شهر از زیردرخت دیگر در ادامه، اطلاعاتی اضافه نمی‌کند؛ زیرا پاسخ آن مشخص است. پس طبق فرض استقرا در ادامه حداقل به $r - ۱$ مرحله نیاز داریم و حکم ثابت می‌شود.
- اما اگر در ابتدا ریشه را انتخاب نکنیم، ممکن است بمب در زیردرخت دیگر باشد. فرض کنید علاوه بر این که بمب، یک شهر را نشان می‌دهد، پس از این انتخاب، این اطلاعات اضافی نیز به علی‌رضا و فرهاد داده شود که بمب در زیردرخت دیگر است. پس انتخاب هر شهر جز زیردرخت دیگر، اطلاعاتی به آن دو اضافه نمی‌کند و پاسخ آن مشخص است. پس طبق فرض استقرا باز هم در ادامه نیاز به حداقل $r - ۱$ مرحله داریم و حکم ثابت می‌شود.

پس ثابت کردیم گرافی داریم که در آن حداقل r مرحله لازم است. ■

پس پاسخ برابر r است.

ج) در هر مرحله، مجموعه‌ی تمام رأس‌هایی که ممکن است بمب در آن‌ها باشد را S در نظر می‌گیریم. واضح است که در ابتدا S مجموعه‌ی تمام شهرهاست. در هر مرحله، آن شهری از S را در نظر می‌گیریم که مجموع فواصلش از دیگر شهرهای درون S، کمینه باشد. این رأس را $v(S)$ می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم با پاسخی که دست‌گاه به ما می‌دهد، می‌توانیم نتیجه بگیریم حداقل نیمی از شهرهای S، نمی‌توانند بمب داشته باشند. به این ترتیب در هر مرحله S حداقل نصف می‌شود و حکم ثابت خواهد شد.

برهان خلف می‌زنیم. فرض کنید یکی از شهرهای مجاور $v(S)$ مانند u انتخاب شود و تعداد شهرهای نامزد برای بمب داشتن، بیش از نصف S بماند. پس u به ازای بیش از $\frac{|S|}{۲}$ شهر، فاصله‌ی کم‌تری از آن شهرها نسبت به $v(S)$ دارد و فاصله‌ی دیگر شهرهای S نیز از u، حداکثر یکی بیش‌تر از فاصله‌ی‌شان از $v(S)$ است. پس مجموع فواصل u از بقیه‌ی شهرهای S در این مرحله کم‌تر بوده است و به تناقض می‌رسیم. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

---

۱ افشین در یک خانه از جدول $n \times n$ $(n > ۱)$ قرار دارد و پیمان می‌خواهد او را دستگیر کند. در هر گام افشین باید به یکی از خانه‌های مجاور (مجاور ضلعی) محل کنونی‌اش که مسدود نشده باشد، برود. پیمان نیز در هر گام می‌تواند یک خانه را انتخاب کند و همه‌ی خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستون آن را مسدود کند. افشین در دو صورت زیر دستگیر می‌شود:

- در نوبت خود نتواند حرکت کند (تمام خانه‌های مجاورش مسدود شده باشند).
- پیمان محلی که افشین در آن قرار دارد را مسدود کند.

اگر پیمان نتواند محل افشین در جدول را ببیند، حداقل چند خانه باید انتخاب کند تا مطمئن باشد افشین را دستگیر کرده است؟

۱) $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ ۲) $n - ۱$ ۳) n ۴) $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ ۵) $\lceil \frac{n}{۴} \rceil$

۲ اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر کس در نوبت خود عدد $۱ \leqslant i \leqslant n$ را انتخاب می‌کند و سپس i و تمام مضارب آن (که از n بیشتر نیستند) را روی تخته می‌نویسد. هر عدد باید حداکثر k بار نوشته شود. کسی که در نوبت خود نتواند عددی انتخاب کند (برای هر عدد i خود i یا حداقل یکی از مضاربش k بار نوشته شده باشند)، می‌بازد. فرض کنید $n = ۲۰۱۴$ است. به ازای چند مقدار k از بین مجموعه‌ی اعداد $\{۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵\}$ نفر اول می‌تواند برنده‌ی بازی باشد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۰

۳ دنباله‌ی $\langle a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۳۹۲} \rangle$ شامل ۱۳۹۲ عدد متمایز داده شده است. یک جادوگر قادر است در یک چشم بر هم زدن ۶۹۶ عدد متوالی از این دنباله را به‌طور صعودی مرتب کرده و بر روی مکان‌های همان ۶۹۶ عدد از کوچک به بزرگ (صعودی) بگذارد. می‌خواهیم با تعدادی درخواست از جادوگر اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. هر درخواست بدین شکل است که از جادوگر می‌خواهیم از عدد iام تا عدد $i + ۶۹۵$ام که در مجموع ۶۹۶ عدد می‌شوند را مرتب کند (عدد i می‌تواند حداقل ۱ و حداکثر ۶۹۷ باشد). با حداقل چندبار درخواست از جادوگر می‌توان اعضای دنباله را مرتب کرد؟

۱) ۳ ۲) ۱۳۹۲ ۳) ۶ ۴) $\lceil \log_۲ ۱۳۹۲ \rceil$ ۵) ۴

۴ سلطان در ابتدا عدد ۰ را روی تخته نوشته است. در هر مرحله اگر عدد x روی تخته نوشته شده باشد، او می‌تواند آن را با یکی از اعداد $\lfloor \frac{x}{۳} \rfloor$، $۳x$ و $۹x + ۵$ جای‌گزین کند. به ازای چند تا از اعداد ۰ تا ۵۰۰، سلطان می‌تواند پس از تعداد متناهی گام، به آن عدد برسد؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵۰ ۳) ۱۶۹ ۴) ۲۳۹ ۵) ۴۰۸

۵ جدولی $n \times n$ در نظر بگیرید. به یک خانه از این جدول ناسازگار می‌گوییم اگر بتوان تمام خانه‌های جدول به جز این خانه را با بلوک‌های ۳×۱ پوشاند (بلوک‌ها نباید هم‌پوشانی داشته باشند و از جدول بیرون بزنند). برای $n = ۵$ و $n = ۷$ تعداد خانه‌های ناسازگار به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۱ و ۱۷ ۲) ۱ و ۹ ۳) ۹ و ۴۹ ۴) ۹ و ۹ ۵) ۹ و ۱۷

۶ جایگشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را «سه‌گریز n تایی» می‌گوییم هرگاه $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. تعداد جایگشت‌های سه‌گریز ۷ تایی و ۸ تایی به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۳۶۰ و ۰　۲) ۳۶۰ و ۱۵۱۲　۳) ۴۸۰ و ۱۵۱۲　۴) ۴۸۰ و ۰　۵) ۴۸۰ و ۴۸۰

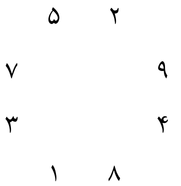
۷ جایگشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را «سه‌گریز پیشرفته n تایی» می‌گوییم هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد:

- $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ باقی‌مانده‌اش بر ۳ برابر یک باشد.
- جمع هر ۶ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

تعداد جایگشت‌های سه‌گریز پیشرفته‌ی ۹ تایی چند است؟

۱) $۹ \times ۳!^۳$　۲) $۴ \times ۳!^۳$　۳) $۸ \times ۳!^۳$　۴) ۰　۵) $۲۷ \times ۳!^۳$

۸ در جدول روبه‌رو می‌توانیم با کشیدن هر یک از دو قطر هر خانه، یک آینه‌ی دو طرفه در آن خانه قرار دهیم. در واقع برای هر خانه سه حالت متصور است. یا آینه‌ای درون آن نیست و یا این‌که یکی از قطرهای آن کشیده شده است. برای مثال در شکل روبه‌رو دو آینه که با خط‌چین مشخص شده‌اند در جدول وجود دارند. به ازای هر وضعیت جدول، مقدار آن وضعیت به این صورت تعیین می‌شود که هر دو عددی که همدیگر را می‌بینند (با توجه به آینه‌ها) در هم ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها، مقدار آن وضعیت جدول را مشخص می‌کند (دید اعداد به گونه‌ای است که در صورتی که آینه‌ای وجود نداشته باشد هر عددی، عدد مقابل خود را می‌بیند). برای مثال مقدار وضعیت روبرو به این صورت محاسبه می‌شود: $۷۶ = ۷ \times ۵ + ۴ \times ۲ + ۸ \times ۳ + ۹ \times ۱$.
کم‌ترین مقداری که می‌توان با کمک آینه‌ها برای این جدول به دست آورد چند است؟



۱) ۷۰　۲) ۶۹　۳) ۶۷　۴) ۶۸　۵) ۶۶

۹ در یک گراف فاصله‌ی بین دو رأس طول کوتاهترین مسیر بین آن دو رأس است. قطر یک گراف بیش‌ترین فاصله‌ی بین هر دو راس از آن گراف می‌باشد. حال مجموعه‌ی تمام درخت‌های متمایز ۷ راسی با راس‌های $۱, ۲, \ldots, ۷$ را در نظر بگیرید (دو درخت متمایزند اگر و فقط اگر دو راس مانند i, j وجود داشته باشند که یال ij در یکی وجود داشته باشد و در دیگری نباشد). فرض کنید می‌خواهیم با اضافه کردن تعدادی یال به این مجموعه یک درخت بزرگ ایجاد کنیم. کم‌ترین قطر ممکن برای این درخت چند است؟

۱) ۱۳　۲) ۸　۳) ۹　۴) ۱۲　۵) ۷

۱۰ درخت روبه‌رو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اعداد $۱, ۲, \ldots, ۱۲$ را در رأس‌های این درخت قرار دهیم به طوری که عدد هر رأس از اعداد فرزندان آن بیش‌تر باشد. به چند حالت این کار امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۴۷۸۴۰　۲) ۴۴۳۵۲۰　۳) ۷۳۹۲۰۰　۴) ۸۸۷۰۴۰　۵) ۲۹۵۶۸

۱۱ خیکوله یک دستمال کاغذی ۴×۴ پیدا کرده است و ۱۶ پوست‌پسته جمع کرده است که iامین آنها در i ثانیه می‌سوزد. او می‌خواهد پوست‌پسته‌ها را روی خانه‌های دستمال کاغذی بگذارد و خانه‌ی بالا سمت راست آن را آتش بزند تا کل دستمال کاغذی بسوزد. نحوه‌ی سوختن دستمال کاغذی به این نحو است:

- هر وقت یک خانه‌ی دستمال کاغذی آتش گرفت، اگر روی آن خانه یک پوست‌پسته باشد که در t ثانیه می‌سوزد، بعد از t ثانیه آن خانه می‌سوزد و خانه‌های مجاور ضلعی‌اش (درصورتی که قبلا آتش نگرفته باشند) آتش می‌گیرند.

حال خیکوله می‌خواهد طوری پوست‌پسته‌ها را روی جدول بچیند که در هر خانه یک پوست پسته قرار بگیرد و کل دستمال کاغذی در کم‌ترین زمان ممکن بسوزد. این کم‌ترین زمان چقدر است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸ ۵) ۲۷

۱۲ اعداد $\{۲^i | ۰ \leqslant i \leqslant ۹\}$ روی تخته نوشته شده‌اند. مولین و مرلون بازی زیر را انجام می‌دهند: در هر مرحله بازیکنی که نوبت اوست، دو عدد x و y را انتخاب می‌کند و بعد از پاک کردن آن‌ها عدد $\lceil \frac{x+y}{۲} \rceil$ یا $\lfloor \frac{x+y}{۲} \rfloor$ را روی تخته می‌نویسد و این روند ادامه می‌یابد تا فقط یک عدد باقی بماند. هدف مولین بیشینه کردن این عدد و هدف مرلون کمینه کردن آن است. اگر هر دو بازیکن بهترین بازی خود را انجام دهند و مولین شروع‌کننده‌ی بازی باشد و عدد نهایی برابر p باشد، باقی‌مانده‌ی p بر ۵ برابر چند است؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۴

---

۴۰ توپ را در ۵ جعبه با شماره‌های $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ قرار می‌دهیم (جعبه‌ها می‌توانند خالی هم باشند). عمل «وسطبه‌دوطرف» عملی است که در طی آن دو توپ از جعبه‌ی $۲ \leqslant i \leqslant ۴$ (در صورت وجود) خارج می‌شوند و یکی از آن‌ها به جعبه‌ی $i - ۱$ و یکی به جعبه‌ی $i + ۱$ می‌رود.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۳ تعداد راه‌های قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها به نحوی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد، در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

۱) $[۲۰۰, ۴۰۰]$ ۲) $[۶۰۰, ۸۰۰]$ ۳) $[۴۰۰, ۶۰۰]$ ۴) $[۸۰۰, +\infty)$ ۵) $[۰, ۲۰۰]$

۱۴ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها در سبد حالت «گوشه‌گیر» می‌گوییم اگر با انجام تعدادی عمل وسطبه‌دوطرف از آن حالت به حالتی برسیم که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی اول و آخر قرار بگیرند. تعداد حالت‌های گوشه‌گیر چند است؟

۱) تعداد حالت‌هایی که تعداد توپ‌های جعبه‌ِی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد.
۲) صفر
۳) ۴۱
۴) ۴۰
۵) تعداد حالت‌هایی که مجموع توپ‌های خانه‌های دوم و سوم و چهارم زوج باشد.

۱۵ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها «بی‌حرکت» می‌گوییم اگر نتوان هیچ عمل وسط‌به‌دوطرفی روی آن انجام داد. با شروع از یک حالت دلخواه حداکثر چند مرحله طول می‌کشد تا به یک وضعیت بی‌حرکت برسیم؟

۱) ۷۹
۲) ۸۰
۳) ۷۷
۴) ۷۵
۵) ۷۸

ده نفر با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, ۱۰$ در صف یک بانک قرار دارند که سه باجه برای انجام امور متقاضیان دارد. در ابتدا همه‌ی باجه‌ها خالی هستند. با شروع از فرد شماره ۱، هر کس به اولین باجه خالی می‌رود و هرگاه کار کسی در باجه‌ای تمام شد، بلافاصله نفر اول صف جایگزین او می‌شود. علاوه بر این، کار هر نفر حداقل یک ثانیه طول می‌کشد و هیچ دو نفری دقیقا همزمان باجه‌ها را ترک نمی‌کنند. پس از اتمام کار نفر دهم این فرآیند پایان می‌یابد. در این فرآیند دو نفر را «همزمان» گوییم اگر لحظه‌ای وجود داشته باشد که در آن هردو در حال انجام کار در باجه‌ها باشند. «وزن» یک زوج را برابر با قدرمطلق تفاضل شماره‌های این دو نفر فرض می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ اگر $\{۲,۶\}$ و $\{۳,۷\}$ دو زوج همزمان باشند، چندتا از زوج‌های زیر نمی‌توانند همزمان باشند؟

$$\{۷,۱\}, \{۹,۶\}, \{۷,۴\}, \{۴,۳\}, \{۸,۲\}, \{۵,۱\}$$

۱) ۴
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲
۵) 5

۱۷ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای تعداد زوج های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) ۱۷, ۱۷
۲) ۲۴, ۱۰
۳) ۲۴, ۱۹
۴) ۲۴, ۱۷
۵) ۱۹, ۱۰

۱۸ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای مجموع وزن زوج‌های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) ۸۱, ۲۵
۲) ۸۰, ۲۵
۳) ۸۱, ۲۳
۴) ۸۰, ۲۴
۵) ۸۱, ۲۴

۱۹ اگر $\{۲,۵\}$ و $\{۴,۸\}$ و $\{۶,۹\}$ سه زوج همزمان باشند، این افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند در باجه‌ها قرار گیرند؟ (دو ترتیب مختلف محسوب می‌شوند، اگر و فقط اگر زوجی وجود داشته باشد که در یکی همزمان باشند و در دیگری همزمان نباشند.)

۱) ۱۶
۲) ۱۴۴
۳) ۷۲
۴) ۲۴
۵) صفر

جدولی $n \times n$ داریم (طول ضلع n است) که هر واحد ضلع آن یک چوب‌کبریت است. ما هر بار زیرمجموعه‌ای از چوب‌کبریت‌ها (این زیرمجموعه می‌تواند تهی باشد) را برمی‌داریم و سپس تعداد مسیرهای ممکن از گوشه‌ی پایین چپ به بالا راست (فقط با حرکات راست و یا بالا) را می‌شماریم. پس از این‌کار چوب‌کبریت‌ها را به حالت اولیه برمی‌گردانیم و دوباره زیرمجموعه‌ای جدید را حذف می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۰ فرض کنید $n = ۳$ است. به ازای تمام زیرمجموعه‌های ممکن از چوب‌کبریت‌ها حرکت بالا را انجام داده و عدد نهایی را روی تخته نوشته‌ایم. در نهایت روی تخته چند عدد مختلف وجود دارد؟

۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۱۹
۴) ۲۱
۵) ۱۶

۲۱ فرض کنید $n = ۴$ است. تنها زیرمجموعه‌هایی از چوب کبریت‌ها را در نظر بگیرید که تعداد مسیرهای معتبرشان برابر ۶۰ است. این بار به ازای هر کدام از این زیرمجموعه‌ها تعداد چوب‌کبریت‌های حذف‌شده را روی تخته می‌نویسیم. کمینه و بیشینه عددی که روی تخته نوشته شده چند است؟

۱) ۲, ۱۰ ۲) ۲, ۸ ۳) هیچ حالتی ۶۰ مسیر معتبر ندارد. ۴) ۱, ۱۰ ۵) ۱, ۸

۲۲ فرض کنید $n = ۵$ است. به ازای چند تا از اعداد مجموعه‌ی {۳۲, ۶۴, ۱۲۸, ۲۴۳, ۲۴۹} می‌توان چوب‌کبریت‌ها را به‌شکلی حذف کرد که تعداد مسیرهای معتبر برابر با آن عدد شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۱

جدولی $n \times n$ ($n > ۱$) داریم که یک ربات در گوشه‌ی پایین چپ آن قرار دارد. این ربات یک برنامه دریافت کرده و آن را دستور به دستور اجرا می‌کند و هر بار پس از انجام آخرین دستور دوباره به دستور اول بازمی‌گردد و همین کار را تکرار می‌کند. دستورات این برنامه می‌تواند شامل چهار حرکت (بالا، پایین، چپ و راست) باشد که روبات در صورت امکان آن‌ها را انجام می‌دهد و در غیر این صورت (در صورتی که از جدول خارج شود و یا به خانه‌ی غیرمجاز هدایت شود) به سراغ دستور بعدی می‌رود. فرض کنید طول یک برنامه تعداد دستورهای آن است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳ جدول زیر را در نظر بگیرید. خانه‌های خاکستری غیرمجاز هستند. طول کوتاه‌ترین برنامه‌ای که ربات با اجرای آن حداقل یک بار به خانه‌ی هدف (انتهای مسیر سفید) می‌رسد، چند است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۰ ۵) ۲۱

۲۴ فرض کنید تمام خانه‌های جدول مجاز هستند. می‌خواهیم برنامه‌ای به ربات دهیم تا تمامی خانه‌های جدول را حداقل یک بار بپیماید (مهم نیست ربات در انتها در کدام خانه است). طول کوتاه‌ترین برنامه با این هدف برای $n = ۱۰$ چند است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۰ ۵) ۱۵

۲۵ خانه‌ای را در جدول خوب می‌نامیم که اگر تنها آن خانه غیرمجاز باشد، برنامه‌ای به طول حداکثر $۳n$ وجود داشته باشد که تمام خانه‌های مجاز را بپیماید. برای $n = ۷$ چند خانه‌ی خوب در جدول وجود دارد؟ (خانه‌ی محل استقرار ربات یعنی خانه‌ی گوشه‌ی چپ پایین خوب نیست.)

۱) ۴۸ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۴۳ ۵) ۱۱

بازی رنگی

دیروز ببعی و گاوی پس از چریدن طولانی خسته شدند و تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. در این بازی ۳ دایره وجود دارد که هر یک به $3n$ قطاع برابر تقسیم شده‌اند. ابتدا ببعی هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۱ را با یکی از رنگ‌های زرد، نارنجی و بنفش رنگ می‌کند. گاوی پس از دیدن رنگ‌آمیزی ببعی، هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۲ را با یکی از همین سه‌رنگ، رنگ می‌کند. ببعی نیز پس از دیدن رنگ‌آمیزی گاوی، دایره‌ی شماره‌ی ۲ را روی دایره‌ی شماره‌ی ۱ می‌گذارد و آن را به هر مقداری که می‌خواهد، می‌چرخاند به طوری‌که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌ی شماره‌ی ۱ منطبق شود. حال دایره‌ی شماره‌ی ۳ روی دو دایره‌ی دیگر گذاشته می‌شود، طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌های زیرین منطبق شود. پس از این کار هر قطاع دایره‌ی شماره‌ی ۳ به صورت زیر رنگ می‌شود:

- اگر رنگ دو قطاع زیرین دایره‌های شماره‌ی ۱ و ۲ یکسان بود، این قطاع را نیز به همان رنگ درمی‌آوریم.
- اگر رنگ دو قطاع زیرین یکسان نبود، رنگ این قطاع را به رنگ سوم (رنگی که در دو قطاع زیرین نیامده است) درمی‌آوریم.

گاوی اصلیتی هلندی دارد و به همین دلیل به رنگ نارنجی بسیار علاقه‌مند است و می‌خواهد تا حد ممکن تعداد قطاع‌های نارنجی دایره‌ی شماره‌ی ۳ زیاد شود؛ در حالی که ببعی می‌خواهد از این کار جلوگیری کند.

الف) ثابت کنید گاوی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداقل n قطاع نارنجی داشته‌باشد.(۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید ببعی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداکثر n قطاع نارنجی داشته‌باشد.(۲۰ نمره)

وزنه‌ها و ماشین جادویی

ببعی $3n-2$ وزنه‌ی یک گرمی و دو وزنه‌ی نیم گرمی دارد که همگی از نظر ظاهری کاملا شبیه به‌هم هستند $(n > 2)$. وزنه‌ها با شماره‌های ۱ تا $3n$ شماره‌گذاری شده‌اند، ولی وزن هیچ وزنه‌ای را نمی‌دانیم. گاوی یک ماشین جادویی دارد. در هربار استفاده از ماشین جادویی، گاوی می‌تواند ۲ وزنه را روی ماشین جادویی‌اش قرار دهد و ماشین جادویی به او می‌گوید که آیا مجموع وزن این دو وزنه، عددی طبیعی است یا خیر.

الف) ثابت کنید گاوی همواره می‌تواند با حداکثر $2n-1$ بار استفاده از ماشین جادویی خود یک وزنه‌ی نیم گرمی را پیدا کند. (۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید گاوی نمی‌تواند روشی ارائه دهد که با کمتر از $2n-1$ بار استفاده از ماشین جادویی تضمین کند که یک وزنه‌ی نیم‌گرمی را می‌تواند پیدا کند. (۳۰ نمره)

گاوی خسیس

کشوری که گاوی و ببعی در آن زندگی می‌کنند، دارای n شهر می‌باشد $(n > 2)$. بین برخی از شهرهای کشور، جاده‌ی دوطرفه کشیده شده است. هم‌چنین می‌دانیم بین هیچ دو شهری بیش از یک جاده وجود ندارد. از آن‌جایی که مردم این کشور صمیمی هستند، می‌دانیم در هر شهری که باشیم، با استفاده از جاده‌های این کشور می‌توانیم به هر شهر دیگر که بخواهیم، برسیم. ارزش یک شهر برابر است با تعداد شهرهایی که به طور مستقیم با یک جاده به آن شهر متصل هستند. ببعی در یکی از شهرهای این کشور قرار دارد. گاوی که در شهر دیگری است، می‌خواهد به دیدن ببعی برود. می‌دانیم اگر گاوی در مسیر رفتن به شهر ببعی، از شهری با ارزش k عبور کند، باید k تومان عوارض بدهد (شهر آغاز و پایان مسیر نیز مشمول عوارض هستند). از آن جایی که گاوی دوست ندارد زیاد پول خرج کند، مسیری را انتخاب می‌کند که کمترین هزینه را داشته باشد.

الف) فرض کنید محل گاوی و ببعی مشخص باشد. ثابت کنید به ازای هر n $(n > 2)$، می‌توان جاده‌های بین شهری را طوری قرار داد که گاوی مجبور باشد دست کم $3n - 5$ تومان به دولت عوارض بدهد. (۱۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر n $(n > 2)$، هر طوری جاده‌ها را قرار دهیم و ببعی و گاوی در هر دو شهری باشند، گاوی با حداکثر $3n - 5$ تومان می‌تواند به هدفش برسد. (۳۵ نمره)

انتقال مهره‌های گاوی

نقاط صحیح صفحه مختصات (نقاطی که طول و عرض آن‌ها عددی صحیح است) را در نظر بگیرید. ببعی n نقطه از این نقاط را به رنگ آبی درآورده است و n مهره نیز در n نقطه‌ی دیگر از صفحه قرار داده است (در هر نقطه یک مهره). می‌دانیم نقاط آبی و مهره‌ها ویژگی‌های زیر را دارند:

- در هیچ نقطه‌ی آبی، مهره‌ای قرار ندارد.
- هیچ دو نقطه‌ی آبی در یک سطر نیستند.

ببعی و گاوی تصمیم می‌گیرند تا مهره‌ها را به نقاط آبی برسانند (هر مهره را در یک نقطه‌ی آبی قرار دهند). هر دو برای این کار یک ماشین مخصوص به خود دارند. ماشین گاوی در هر مرحله می‌تواند تعدادی از مهره‌ها (و یا هیچ مهره‌ای) را ثابت نگه دارد و بقیه را به طور همزمان یک واحد به بالا، چپ، راست یا پایین حرکت دهد. توجه کنید که جهت حرکت مهره‌های مختلف در یک مرحله می‌تواند با هم یکسان نباشد و هم‌چنین پس از انجام یک مرحله ممکن است در یک خانه بیش از یک مهره قرار گیرد.
ماشین ببعی نیز مانند ماشین گاوی عمل می‌کند با این تفاوت که ماشین ببعی در یک مرحله نمی‌تواند بیش از یک مهره را در یک نقطه قرار دهد.

فرض کنید کمترین تعداد مراحل لازم برای رساندن مهره‌ها به نقاط آبی به طوری که در هر نقطه‌ی آبی یک مهره قرار گیرد، با استفاده از ماشین گاوی t_1 و با استفاده از ماشین ببعی t_2 باشد. ثابت کنید $t_1 = t_2$. (۶۰ نمره)

توجه: شما با اثبات $t_2 \leq 2t_1$ نیمی از نمره را می‌توانید بگیرید.

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور

- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

---

۱ افشین در یک خانه از جدول $n \times n$ ($n > ۱$) قرار دارد و پیمان می‌خواهد او را دستگیر کند. در هر گام افشین باید به یکی از خانه‌های مجاور (مجاور ضلعی) محل کنونی‌اش که مسدود نشده باشد، برود. پیمان نیز در هر گام می‌تواند یک خانه را انتخاب کند و همه‌ی خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستون آن را مسدود کند. افشین در دو صورت زیر دستگیر می‌شود:

- در نوبت خود نتواند حرکت کند (تمام خانه‌های مجاورش مسدود شده باشند).
- پیمان محلی که افشین در آن قرار دارد را مسدود کند.

اگر پیمان نتواند محل افشین در جدول را ببیند، حداقل چند خانه باید انتخاب کند تا مطمئن باشد افشین را دستگیر کرده است؟

۱) $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ ۲) $n - ۱$ ۳) n ۴) $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ ۵) $\lceil \frac{n}{۴} \rceil$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای دستگیر کردن افشین، پیمان کافیست تا برای هر $۱ \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$، خانه‌ی $(۲i, ۲i)$ از جدول را انتخاب کند. در این صورت افشین یا در یک خانه‌ی مسدود است یا در خانه‌ای مجاور یک خانه‌ی مسدود، پس دستگیر می‌شود. علاوه بر این این تعداد خانه لازم نیز می‌باشد زیرا در غیر این‌صورت دو خانه‌ی مجاور هستند که هیچ کدام مسدود نشده‌اند و افشین می‌تواند بین آن دو به صورت متناوب حرکت کند. □

۲ اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر کس در نوبت خود عدد $۱ \leqslant i \leqslant n$ را انتخاب می‌کند و سپس i و تمام مضارب آن (که از n بیشتر نیستند) را روی تخته می‌نویسد. هر عدد باید حداکثر k بار نوشته شود. کسی که در نوبت خود نتواند عددی انتخاب کند (برای هر عدد i خود i یا حداقل یکی از مضاربش k بار نوشته شده باشند)، می‌بازد. فرض کنید $n = ۲۰۱۴$ است. به ازای چند مقدار k از بین مجموعه‌ی اعداد $\{۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵\}$ نفر اول می‌تواند برنده‌ی بازی باشد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

به ازای اعداد فرد نفر اول و به ازای اعداد زوج نفر دوم استراتژی برد دارد. به ازای اعداد زوج: نفر دوم هر عددی که نفر اول انتخاب کرد را دوباره انتخاب می‌کند. در نتیجه همواره نفر دوم می‌تواند عدد انتخاب کند و نفر اول بالاخره خواهد باخت. به ازای اعداد فرد: نفر اول ابتدا عدد ۱ را انتخاب می‌کند و در بازی جدید همانند نفر دوم در بازی قبل عمل خواهد کرد. □

۳ دنباله‌ی $\langle a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۳۹۲} \rangle$ شامل ۱۳۹۲ عدد متمایز داده شده است. یک جادوگر قادر است در یک چشم بر هم زدن ۶۹۶ عدد متوالی از این دنباله را به‌طور صعودی مرتب کرده و بر روی مکان‌های همان ۶۹۶ عدد از کوچک به بزرگ (صعودی) بگذارد. می‌خواهیم با تعدادی درخواست از جادوگر اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. هر درخواست بدین شکل است که از جادوگر می‌خواهیم از عدد iام تا عدد $i + ۶۹۵$ام که در مجموع ۶۹۶ عدد می‌شوند را مرتب کند (عدد i می‌تواند حداقل ۱ و حداکثر ۶۹۷ باشد). با حداقل چندبار درخواست از جادوگر می‌توان اعضای دنباله را مرتب کرد؟

۱) ۳ ۲) ۱۳۹۲ ۳) ۶ ۴) $\lceil \log_۲ ۱۳۹۲ \rceil$ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

فرض کنید بزرگترین عدد در خانه اول و کوچکترین عدد در خانه ۱۳۹۲ ام باشد. هر کدام از این دو عدد برای انکه به مکان مطلوب خود برسند نیاز به سه درخواست دارند. فقط یک درخواست است که هر دو عدد فوق را شامل می‌شود. بنابراین حداقل ۵ درخواست برای انکه کوچکترین و بزرگترین عدد به مکان مطلوب خود برسند نیاز داریم. با ۶ بار می‌توان بدین شکل اعداد را مرتب کرد. ابتدا نیمه اول و نیمه دوم را با دو درخواست مرتب می‌کنیم. سپس نیمه وسط (از عدد ۳۴۹ام تا ۱۰۴۴ام) را مرتب می‌کنیم. مجدد با دو درخواست دیگر نیمه اول و دوم را مرتب کرده و نهایتا نیمه وسط را مرتب می‌کنیم. برای اثبات درستی الگوریتم فوق فرض کنید در ابتدا برای $i < j$ داشته باشیم $a_i > a_j$. می‌توان با حالت گیری نشان داد در یکی از درخواست‌ها حتما این دو عدد جابه‌جا می‌شوند. □

۴ سلطان در ابتدا عدد ۰ را روی تخته نوشته است. در هر مرحله اگر عدد x روی تخته نوشته شده باشد، او می‌تواند آن را با یکی از اعداد $\lfloor \frac{x}{۳} \rfloor$، $۳x$ و $۹x + ۵$ جای‌گزین کند. به ازای چند تا از اعداد ۰ تا ۵۰۰، سلطان می‌تواند پس از تعداد متناهی گام، به آن عدد برسد؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵۰ ۳) ۱۶۹ ۴) ۲۳۹ ۵) ۴۰۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

شرط لازم برای رسیدن به یک عدد این است که در نمایش آن عدد در مبنای ۳، تمام ارقام ۲ سمت راست یک رقم ۱ باشند. زیرا تنها راه تولید رقم ۲ استفاده از عمل $۹x + ۵$ است که این خاصیت را دارد. دو عمل دیگر نیز یا یک صفر در سمت راست عدد قرار می‌دهند و یا سمت راست‌ترین رقم آن را حذف می‌کنند. حال فرض کنید a_n تعداد رشته‌های nبیتی در مبنای ۳ باشد که این خاصیت را دارند. این رشته‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. دسته‌ی اول آن‌هایی که با ۰ شروع می‌شوند و دسته‌ی دوم آن‌هایی که با ۱ . بدیهی است که تعداد رشته‌های دسته‌ی اول برابر $a_{n-۱}$ است. علاوه بر این رشته‌های دسته‌ی دوم اگر رقم دومشان ۲ باشد تعدادشان برابر $a_{n-۲}$ است و یا در غیر این صورت تعدادشان $a_{n-۱}$ است. پس در کل داریم $a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$. برای $n = ۲$ هم داریم : $a_۲ = ۵$. به راحتی می‌توان مشاهده کرد تمام اعداد ۶ رقمی که در این خاصیت صدق می‌کنند، کمتر از ۵۰۰ می‌باشند پس تعداد این اعداد برابر است با $a_۶ = ۱۶۹$. □

۵ جدولی $n \times n$ در نظر بگیرید. به یک خانه از این جدول ناسازگار می‌گوییم اگر بتوان تمام خانه‌های جدول به جز این خانه را با بلوک‌های ۳×۱ پوشاند (بلوک‌ها نباید هم‌پوشانی داشته باشند و از جدول بیرون بزنند). برای $n = ۵$ و $n = ۷$ تعداد خانه‌های ناسازگار به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۱ و ۱۷ ۲) ۱ و ۹ ۳) ۹ و ۴۹ ۴) ۹ و ۹ ۵) ۹ و ۱۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

جدول را به صورت متناوب و یک در میان با اعداد ۱ و ۲ و ۳ رنگ‌آمیزی کنید به طوری که هر بلوک که در جدول گذاشته می‌شود، دقیقا یک خانه از هر رنگ را بپوشاند. مثلا برای جدول ۵×۵ این رنگ‌آمیزی به این صورت است :

۱	۲	۳	۱	۲
۳	۱	۲	۳	۱
۲	۳	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۱	۲
۳	۱	۲	۳	۱

حال اگر خانه‌ای ناسازگار باشد باید رنگ آن ۱ باشد، زیرا تعداد خانه‌های به رنگ ۱ یکی از ۲ و ۳ بیشتر است. از طرفی هر خانه ای که سازگار باشد معادل آن خانه پس از چرخش ۹۰، ۱۸۰، ۲۷۰ درجه‌ای جدول نیز باید ناسازگار باشد. تنها خانه‌ای که در جدول ۵ × ۵ این خاصیت را دارد، خانه‌ی وسطی است. برای جدول ۷ × ۷ نیز ۹ خانه این خاصیت را دارند.

□

۶ جایگشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را «سه‌گریز n تایی» می‌گوییم هرگاه $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. تعداد جایگشت‌های سه‌گریز ۷ تایی و ۸ تایی به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۳۶۰ و ۰ ۲) ۳۶۰ و ۱۵۱۲ ۳) ۴۸۰ و ۱۵۱۲ ۴) ۴۸۰ و ۰ ۵) ۴۸۰ و ۴۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

برای $n = ۸$ این مقدار برابر صفر است. زیرا جمع اعداد $۱, \ldots, ۸$ برابر ۳۶ است که بر ۳ بخشپذیر است. حال $n = ۷$ را در نظر بگیرید. اگر فقط باقیمانده‌ی اعداد بر ۳ را نگاه کنیم. به این نتیجه میرسیم که جایگشت‌های ۳گریز باید به صورت ۲ ,۱ ,۲ ,۱ ,۱ ,۱ باشند که اعداد مضرب ۳ ، یعنی ۳ و ۶ نیز در بین این‌ها(جایگشت نباید با ۳ و ۶ شروع شود) قرار گرفته اند. پس با تعیین ترتیب ۵ عدد دیگر، ۲ × ۱۵ روش برای قرار دادن ۳ و ۶ داریم. از طرفی برای قرار دادن ۵ عدد دیگر نیز !۲ × !۳ روش وجود دارد، یعنی در کل ۳۶۰ حالت برای $n = ۷$ داریم.

□

۷ جایگشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را «سه‌گریز پیشرفته n تایی» می‌گوییم هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد:

- $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ باقی‌مانده‌اش بر ۳ برابر یک باشد.
- جمع هر ۶ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

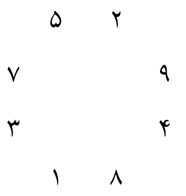
تعداد جایگشت‌های سه‌گریز پیشرفته‌ی ۹ تایی چند است؟

۱) $۹ \times ۳!^۳$ ۲) $۴ \times ۳!^۳$ ۳) $۸ \times ۳!^۳$ ۴) ۰ ۵) $۲۷ \times ۳!^۳$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

با استفاده از این نکته که جمع هر ۶ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است، به راحتی مشاهده می‌شود که باقیمانده‌ی عدد عدد اول، دوم و سوم بر ۳ به ترتیب با باقیمانده‌ی عدد هفتم، هشتم و نهم برابر است. از طرفی اگر فقط باقیمانده‌ی اعداد بر ۳ را در نظر بگیریم، از گزاره‌ی قبل به این نتیجه می‌توان رسید که ۳ تایی اول، دوم هر کدام یک جایگشت از اعداد ۰ تا ۲ هستند و ۳ تایی سوم با سه تایی اول برابر است. علاوه بر این با استفاده از خاصیت اول این جایگشت‌ها به این نتیجه می‌رسیم که ۳ رقم اول و دوم هر کدام باید به یکی از سه شکل ۱ ,۰ ,۲، ۰ ,۱ ,۲ و ۱ ,۲ ,۰ باشند. پس در کل فقط با در نظر گرفتن باقیمانده‌ها ۹ حالت داریم. از طرفی برای هر کدام از ارقام ۲ ,۱ ,۰، !۳ حالت برای ترتیب اعداد با آن باقیمانده داریم. پس تعداد جایگشت‌های کلی برابر $۹ \times ۳!^۳$ است.

□



۸ در جدول روبه‌رو می‌توانیم با کشیدن هر یک از دو قطر هر خانه، یک آینه‌ی دو طرفه در آن خانه قرار دهیم. در واقع برای هر خانه سه حالت متصور است. یا آینه‌ای درون آن نیست و یا این‌که یکی از قطرهای آن کشیده شده است. برای مثال در شکل روبه‌رو دو آینه که با خط‌چین مشخص شده‌اند در جدول وجود دارند. به ازای هر وضعیت جدول، مقدار آن وضعیت به این صورت تعیین می‌شود که هر دو عددی که همدیگر را می‌بینند (با توجه به آینه‌ها) در هم ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها، مقدار آن وضعیت جدول را مشخص می‌کند (دید اعداد به گونه‌ای است که در صورتی که آینه‌ای وجود نداشته باشد هر عددی، عدد مقابل خود را می‌بیند). برای مثال مقدار وضعیت روبرو به این صورت محاسبه می‌شود: $۱ \times ۹ + ۳ \times ۸ + ۲ \times ۴ + ۵ \times ۷ = ۷۶$.
کم‌ترین مقداری که می‌توان با کمک آینه‌ها برای این جدول به دست آورد چند است؟

۱) ۷۰ ۲) ۶۹ ۳) ۶۷ ۴) ۶۸ ۵) ۶۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر جدول و آینه‌ای در کار نبود کم‌ترین مقدار، زمانی حاصل می‌شد که

$$۱ \times ۹ + ۲ \times ۸ + ۳ \times ۷ + ۴ \times ۵ = ۶۶$$

اما امکان ساخت این مقدار در جدول وجود ندارد. اما مقدار زیر را می‌توان ساخت که تنها یک واحد بیش‌تر است و خوب طبیعتا جواب است

$$۱ \times ۸ + ۲ \times ۹ + ۳ \times ۷ + ۴ \times ۵ = ۶۷$$

□

۹ در یک گراف فاصله‌ی بین دو رأس طول کوتاهترین مسیر بین آن دو رأس است. قطر یک گراف بیش‌ترین فاصله‌ی بین هر دو راس از آن گراف می‌باشد. حال مجموعه‌ی تمام درخت‌های متمایز ۷ راسی با راس‌های $۱, ۲, \ldots, ۷$ را در نظر بگیرید (دو درخت متمایزند اگر و فقط اگر دو راس مانند i, j وجود داشته باشند که یال ij در یکی وجود داشته باشد و در دیگری نباشد). فرض کنید می‌خواهیم با اضافه کردن تعدادی یال به این مجموعه یک درخت بزرگ ایجاد کنیم. کم‌ترین قطر ممکن برای این درخت چند است؟

۱) ۱۳ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

فرض کنید جواب مساله مربوط به درخت T باشد. از روی T، درخت T' را این گونه بسازید :
هر درخت ۷ راسی را معادل یک راس در نظر بگیرید و اگر بین دو راس از دو درخت در T یالی بود، بین دو راس متناظر آن دو در T' یک یال بگذارید. حال دو برگ از T' را در نظر بگیرید. فرض کنید این دو برگ معادل دو درخت $T_۱, T_۲$ از T باشند. فرض کنید رئوسی از $T_۱$ و $T_۲$ که به بیرون از این دو درخت یال دارند، به ترتیب $t_۱$ و $t_۲$ باشند(چون $T_۱$ و $T_۲$ برگ هستند این راس یکتاست). چون $T_۱$ و $T_۲$ درختهای ۷ راسی هستند رئوسی مانند $t'_۱$ و $t'_۲$ وجود دارند که $d_T(t_۱, t'_۱) \geqslant ۳$ و $d_{T_۲}(t_۲, t'_۲) \geqslant ۳$. حال به وضوح می‌توان دید که $d_T(t'_۱, t'_۲) \geqslant ۸$.پس قطر T حداقل ۸ است. حال اگر T' را یک گراف ستاره‌ای در نظر بگیریم و به ازای هر یال مانند $T_۱T_۲$ در T'، مرکز درخت $T_۱$ را به مرکز درخت $T_۲$ در T متصل کنیم. با توجه به اینکه شعاع هر گراف ۷ راسی حداکثر ۳ است، قطر گراف حاصل ۸ می‌شود. پس پاسخ مساله برابر ۸ است.
شعاع گراف G برابر است با : $\min_{v \in V(G)}\{\max_{w \in V(G)} d(v, w)\}$.

□

۱۰ درخت روبه‌رو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اعداد $۱, ۲, \ldots, ۱۲$ را در رأس‌های این درخت قرار دهیم به طوری که عدد هر رأس از اعداد فرزندان آن بیش‌تر باشد. به چند حالت این کار امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۴۷۸۴۰ ۲) ۴۴۳۵۲۰ ۳) ۷۳۹۲۰۰ ۴) ۸۸۷۰۴۰ ۵) ۲۹۵۶۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

ریشه درخت حتما عدد ۱۲ است. حال کافیست ۵ عدد برای درخت سمت چپ در نظر بگیریم و ۶ عدد هم برای درخت سمت راست و به صورت بازگشتی مساله را حل کنیم. در هر مرحله عدد روی ریشه به صورت یکتا مشخص می‌شود و بقیه اعداد باید در زیر درخت‌ها افراز شوند. پاسخ نهایی برابر است با :

$$\binom{۱۱}{۵}\binom{۳}{۴}\binom{۱}{۲}\binom{۳}{۵}\binom{۱}{۲}\binom{۱}{۲} = ۱۴۷۸۴۰$$

□

۱۱ خیکوله یک دستمال کاغذی ۴×۴ پیدا کرده است و ۱۶ پوست‌پسته جمع کرده است که iامین آنها در i ثانیه می‌سوزد. او می‌خواهد پوست‌پسته‌ها را روی خانه‌های دستمال کاغذی بگذارد و خانه‌ی بالا سمت راست آن را آتش بزند تا کل دستمال کاغذی بسوزد. نحوه‌ی سوختن دستمال کاغذی به این نحو است:

- هر وقت یک خانه‌ی دستمال کاغذی آتش گرفت، اگر روی آن خانه یک پوست‌پسته باشد که در t ثانیه می‌سوزد، بعد از t ثانیه آن خانه می‌سوزد و خانه‌های مجاور ضلعی‌اش (درصورتی که قبلا آتش نگرفته باشند) آتش می‌گیرند.

حال خیکوله می‌خواهد طوری پوست‌پسته‌ها را روی جدول بچیند که در هر خانه یک پوست پسته قرار بگیرد و کل دستمال کاغذی در کم‌ترین زمان ممکن بسوزد. این کم‌ترین زمان چقدر است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸ ۵) ۲۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای سوختن خانه‌ی پایین سمت چپ حداقل به اندازه‌ی جمع اعداد ۱ تا ۷ (یعنی ۲۸ ثانیه) زمان لازم است. می‌توان بقیه را طوری چید که این زمان حاصل شود. جدول زیر نمونه‌ای از این چینش‌ها را نشان می‌دهد.

۱	۲	۱۱	۱۴
۱۵	۳	۹	۱۲
۸	۴	۵	۱۳
۱۰	۱۶	۶	۷

□

۱۲ اعداد $\{۲^i | ۰ \leqslant i \leqslant ۹\}$ روی تخته نوشته شده‌اند. مولین و مرلون بازی زیر را انجام می‌دهند: در هر مرحله بازیکنی که نوبت اوست، دو عدد x و y را انتخاب می‌کند و بعد از پاک کردن آن‌ها عدد $\lceil\frac{x+y}{۲}\rceil$ یا $\lfloor\frac{x+y}{۲}\rfloor$ را

روی تخته می‌نویسد و این روند ادامه می‌یابد تا فقط یک عدد باقی بماند. هدف مولین بیشینه کردن این عدد و هدف مرلون کمینه کردن آن است. اگر هر دو بازیکن بهترین بازی خود را انجام دهند و مولین شروع‌کننده‌ی بازی باشد و عدد نهایی برابر p باشد، باقی‌مانده‌ی p بر ۵ برابر چند است؟

۱) ۲
۲) ۰
۳) ۱
۴) ۳
۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

بهترین راه برای مولین در هر مرحله این است که دو عددی که کمترین مجموع را دارند را انتخاب کند و سقف عدد حاصل را بنویسد. مرلون نیز باید دو عددی که بیشترین مجموع را دارند بنویسد و کف عدد حاصل را روی تخته بنویسد. با انجام این کار عدد نهایی که روی تخته می‌ماند ۵۴ است. □

---

۴۰ توپ را در ۵ جعبه با شماره‌های $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ قرار می‌دهیم (جعبه‌ها می‌توانند خالی هم باشند). عمل «وسط‌به‌دوطرف» عملی است که در طی آن دو توپ از جعبه‌ی $۲ \leqslant i \leqslant ۴$ (در صورت وجود) خارج می‌شوند و یکی از آن‌ها به جعبه‌ی $i - ۱$ و یکی به جعبه‌ی $i + ۱$ می‌رود.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۳ تعداد راه‌های قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها به نحوی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد، در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

۱) $[۲۰۰, ۴۰۰]$
۲) $[۶۰۰, ۸۰۰]$
۳) $[۴۰۰, ۶۰۰]$
۴) $[۸۰۰, +\infty)$
۵) $[۰, ۲۰۰]$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

فرض کنید در جعبه‌ی iام a_i توپ قرار داشته باشد. چون $a_۵ = a_۱$ و $a_۴ = a_۲$ پس $a_۳$ زوج است. داریم : $a_۱ + a_۲ + \frac{a_۳}{۲} = ۲۰$. پس تعداد پاسخ‌ها برابر است با $\binom{۲۲}{۲}$. □

۱۴ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها در سبد حالت «گوشه‌گیر» می‌گوییم اگر با انجام تعدادی عمل وسط‌به‌دوطرف از آن حالت به حالتی برسیم که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی اول و آخر قرار بگیرند. تعداد حالت‌های گوشه‌گیر چند است؟

۱) تعداد حالت‌هایی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد.
۲) صفر
۳) ۴۱
۴) ۴۰
۵) تعداد حالت‌هایی که مجموع توپ‌های خانه‌های دوم و سوم و چهارم زوج باشد.

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

پس از انجام هر عمل وسط‌به‌دوطرف حداقل یک توپ به یکی از جعبه‌های ۲ و ۳ و ۴ منتقل می‌شود، پس یک حالت گوشه‌گیر است اگر و فقط اگر از ابتدا گوشه‌گیر باشد یعنی ۴۱ حالت گوشه‌گیر داریم. □

۱۵ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها «بی‌حرکت» می‌گوییم اگر نتوان هیچ عمل وسطبه‌دوطرفی روی آن انجام داد. با شروع از یک حالت دلخواه حداکثر چند مرحله طول می‌کشد تا به یک وضعیت بی‌حرکت برسیم.

۱) ۷۹　۲) ۸۰　۳) ۷۷　۴) ۷۵　۵) ۷۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

وضعیت بی حرکت وضعیتی است که در هرکدام از جعبه‌های ۲ و ۳ و۴ حداکثر یک توپ قرار داشته باشد. بیشترین تعداد گام در حالتی رخ می‌دهد که توپ‌ها در ابتدا همه در جعبه‌ی سوم باشند. حال برای هر حالت مقدار s را اینگونه تعریف کنید : $s = \sum_{i=۱}^{۵} a_i^۲$. پس از هر عمل وسطبه‌دوطرف دقیقا دو واحد به s اضافه می‌شود. از طرفی هنگامی که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی سوم باشند، به راحتی مشاهده می‌شود که حالت بی‌حرکت نهایی حالتی است که در آن : $a_۱ = ۱۹, a_۲ = ۱, a_۳ - = ۰, a_۴ = ۱, a_۵ = ۱۹$. تعداد مراحل برای رسیدن به این حالت برابر است با $\frac{۱}{۲}(s_{end} - s_{start}) = \frac{۵۱۴-۳۶۰}{۲} = ۷۷$. □

ده نفر با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, ۱۰$ در صف یک بانک قرار دارند که سه باجه برای انجام امور متقاضیان دارد. در ابتدا همه‌ی باجه‌ها خالی هستند. با شروع از فرد شماره ۱، هر کس به اولین باجه خالی می‌رود و هرگاه کار کسی در باجه‌ای تمام شد، بلافاصله نفر اول صف جایگزین او می‌شود. علاوه بر این، کار هر نفر حداقل یک ثانیه طول می‌کشد و هیچ دو نفری دقیقا همزمان باجه‌ها را ترک نمی‌کنند. پس از اتمام کار نفر دهم این فرآیند پایان می‌یابد. در این فرآیند دو نفر را «همزمان» گوییم اگر لحظه‌ای وجود داشته باشد که در آن هردو در حال انجام کار در باجه‌ها باشند. «وزن» یک زوج را برابر با قدرمطلق تفاضل شماره‌های این دو نفر فرض می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ اگر $\{۲, ۶\}$ و $\{۳, ۷\}$ دو زوج همزمان باشند، چندتا از زوج‌های زیر نمی‌توانند همزمان باشند؟

$$\{۵, ۱\}, \{۸, ۲\}, \{۴, ۳\}, \{۷, ۴\}, \{۹, ۶\}, \{۷, ۱\}$$

۱) ۴　۲) ۱　۳) ۳　۴) ۲　۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

چون $\{۲, ۶\}$ و $\{۳, ۷\}$ دو زوج همزمان هستند، زمانی وجود دارد که $۲, ۳, ۶$ در باجه‌ها قرار دارند. در این صورت زوج‌های $\{۱, ۷\}$ و $\{۴, ۷\}$ و $\{۱, ۵\}$ نمی‌توانند همزمان باشند. زوج‌های دیگر را نیز به راحتی می‌توان مشاهده کرد که می‌توانند همزمان باشند. □

۱۷ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای تعداد زوج های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) $۱۷, ۱۷$　۲) $۲۴, ۱۰$　۳) $۲۴, ۱۹$　۴) $۲۴, ۱۷$　۵) $۱۹, ۱۰$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

با توجه به شرایطی که در مسئله گفته شده، هر نفر که وارد یک باجه می‌شود، دو زوج همزمان ایجاد می‌شوند و در ابتدا نیز $۱, ۲, ۳$ سه زوج همزمان تشکیل می‌دهند. پس مستقل از ترتیب ورود و خروج افراد تعداد زوج‌های همزمان برابر است با : $۳ + ۷ \times ۲ = ۱۷$

□

۱۸ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای مجموع وزن زوج‌های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) ۸۱, ۲۵ ۲) ۸۰, ۲۵ ۳) ۸۱, ۲۳ ۴) ۸۰, ۲۴ ۵) ۸۱, ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

کمترین مجموع زمانی رخ می‌دهد که در آن ترتیب خروج افراد از باجه‌ها صعودی باشد، در این صورت با اضافه شدن هر نفر سه واحد به مجموع اضافه می‌شود و در ابتدا نیز که $۱, ۲, ۳$ در باجه‌ها هستند، مجموع برابر ۴ است.
پس در کل کمترین مجموع برابر است با : $۴ + ۷ \times ۳ = ۲۵$.
بیشترین مجموع نیز در حالتی رخ می‌دهد که در هر مرحله فردی از باجه خارج شود که بزرگ ترین شماره را دارد.
در این صورت هنگامی که فرد iام وارد می‌شود، مقدار $i - ۱ + i - ۲$ به مجموع اضافه می‌شود، در این صورت مجموع کلی برابر می‌شود با: $\sum_{i=۱}^{۹} i + \sum_{j=۱}^{۸} j = ۴۵ + ۳۶ = ۸۱$

□

۱۹ اگر $\{۲, ۵\}$ و $\{۴, ۸\}$ و $\{۶, ۹\}$ سه زوج همزمان باشند، این افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند در باجه‌ها قرار گیرند؟ (دو ترتیب مختلف محسوب می‌شوند، اگر و فقط اگر زوجی وجود داشته باشد که در یکی همزمان باشند و در دیگری همزمان نباشند.)

۱) ۱۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴ ۵) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

زوج‌های $\{۱, ۳\}$، $\{۲, ۵\}$ و $\{۴, ۸\}$ را در نظر بگیرید. هر کدام از این زوج‌ها برای ترتیب خروج از باجه ۲ حالت دارند که این دو حالات تاثیری بر ترتیب ورود و خروج بقیه افراد ندارند. از طرفی هنگامی که نفر دهم می‌خواهد وارد شود، ۳ حالت برای نفری که از باجه خارج می‌شود می‌توان در نظر گرفت. پس در کل $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ برای ترتیب قرار گرفتن افراد در باجه‌ها داریم.

□

جدولی $n \times n$ داریم (طول ضلع n است) که هر واحد ضلع آن یک چوب‌کبریت است. ما هر بار زیرمجموعه‌ای از چوب‌کبریت‌ها (این زیرمجموعه می‌تواند تهی باشد) را برمی‌داریم و سپس تعداد مسیرهای ممکن از گوشه‌ی پایین چپ به بالا راست (فقط با حرکات راست و یا بالا) را می‌شماریم. پس از این‌کار چوب‌کبریت‌ها را به حالت اولیه برمی‌گردانیم و دوباره زیرمجموعه‌ای جدید را حذف می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۰ فرض کنید $n = ۳$ است. به ازای تمام زیرمجموعه‌های ممکن از چوب‌کبریت‌ها حرکت بالا را انجام داده و عدد نهایی را روی تخته نوشته‌ایم. در نهایت روی تخته چند عدد مختلف وجود دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تمامی اعداد ۰ تا ۲۰ را می‌توان تولید نمود. □

۲۱ فرض کنید $n = ۴$ است. تنها زیرمجموعه‌هایی از چوب کبریت‌ها را در نظر بگیرید که تعداد مسیرهای معتبرشان برابر ۶۰ است. این بار به ازای هر کدام از این زیرمجموعه‌ها تعداد چوب‌کبریت‌های حذف‌شده را روی تخته می‌نویسیم. کمینه و بیشینه عددی که روی تخته نوشته شده چند است؟

۱) ۲, ۱۰ ۲) ۲, ۸ ۳) هیچ حالتی ۶۰ مسیر معتبر ندارد. ۴) ۱, ۱۰ ۵) ۱, ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

گزینه‌ی ۱ درست است. با حذف یکی از چوب‌کبریت‌ها ۱۰ مسیر حذف می‌شود و می‌توان به ۶۰ مسیر معتبر رسید. از طرفی چوب‌کبریت‌های کناری که مجموعا ۱۲ تا هستند ۱۶ مسیر را حذف می‌کنند و بقیه چوب‌کبریت‌ها حداقل ۱۰ مسیر را حذف خواهند کرد (که مقرون به صرفه نیست آنها را حذف کنیم). می‌توان با حذف ۸ چوب‌کبریت از آنها ۱۰ مسیر را حذف نمود. از طرفی با اضافه کردن ۴ چوب‌کبریت از بین این ۱۲ تا حداکثر ۶ مسیر اضافه می‌شود. پس بیشترین تعداد نیز ۸ عدد است. □

۲۲ فرض کنید $n = ۵$ است. به ازای چند تا از اعداد مجموعه‌ی {۲۴۹, ۲۴۳, ۱۲۸, ۶۴, ۳۲} می‌توان چوب‌کبریت‌ها را به‌شکلی حذف کرد که تعداد مسیرهای معتبر برابر با آن عدد شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تنها عدد ۲۴۹ را نمی‌توان ساخت و بقیه اعداد قابل تولید هستند. برای هر یک مثالی وجود دارد که آن را به دست می‌آورد. □

جدولی $n \times n$ ($n > ۱$) داریم که یک ربات در گوشه‌ی پایین چپ آن قرار دارد. این ربات یک برنامه دریافت کرده و آن را دستور به دستور اجرا می‌کند و هر بار پس از انجام آخرین دستور دوباره به دستور اول بازمی‌گردد و همین کار را تکرار می‌کند. دستورات این برنامه می‌تواند شامل چهار حرکت (بالا، پایین، چپ و راست) باشد که روبات در صورت امکان آن‌ها را انجام می‌دهد و در غیر این صورت (در صورتی که از جدول خارج شود و یا به خانه‌ی غیرمجاز هدایت شود) به سراغ دستور بعدی می‌رود. فرض کنید طول یک برنامه تعداد دستورهای آن است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳ جدول زیر را در نظر بگیرید. خانه‌های خاکستری غیرمجاز هستند. طول کوتاه‌ترین برنامه‌ای که ربات با اجرای آن حداقل یک بار به خانه‌ی هدف (انتهای مسیر سفید) می‌رسد، چند است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۰ ۵) ۲۱

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در هر بار اجرای برنامه (در حالت کمینه) مجموعا حرکتی به سمت راست و بالا داریم. در هنگام رسیدن به خانه‌ی بالا راست، باید حداقل ۴ حرکت به چپ و همچنین ۵ حرکت به پایین داشته باشیم وگرنه در یک بار اجرای برنامه در همان نقطه خواهیم ماند. پس حداقل نیاز به ۲۰ حرکت داریم. برنامه‌ی زیر با طول ۲۰ خط ربات را به هدف می‌رساند: ۵ راست، ۶ بالا، ۴ چپ، ۵ پایین. □

۲۴ فرض کنید تمام خانه‌های جدول مجاز هستند. می‌خواهیم برنامه‌ای به ربات دهیم تا تمامی خانه‌های جدول را حداقل یک بار بپیماید (مهم نیست ربات در انتها در کدام خانه است). طول کوتاه‌ترین برنامه با این هدف برای $n = ۱۰$ چند است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۰ ۵) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

گزینه‌ی ۵ درست است. به طور کلی برای جدول $n \times n$، $۲n - ۱$ حرکت کمترین تعداد حرکت لازم است. در صورتی که در یکی از جهت‌ها $n - ۱$ حرکت نداشته باشیم، پس از اجرای یک بار برنامه هر دو گوشه‌ی جدول خالی هستند و ما جابجا شده‌ایم. بدین ترتیب با توجه به اینکه در نهایت به کدام سمت رفته باشیم یکی از گوشه‌ها خالی خواهد ماند. در نتیجه باید در یکی از جهت‌ها $n - ۱$ حرکت داشته باشیم و اگر در جهت عکس آن کمتر حرکت داشته باشیم همچنان یک سطر یا ستون خالی خواهد ماند. پس در کل $۲n - ۲$ حرکت خواهیم داشت که برای اینکه بتوانیم تمامی جدول را پیمایش کنیم باید در یک جهت دیگر حداقل یک حرکت داشته باشیم که برابر $۲n - ۱$ می‌شود. با روش زیر نیز می‌توان با این تعداد حرکت به جواب رسید:
$n - ۱$ راست، $n - ۱$ چپ، ۱ بالا. □

۲۵ خانه‌ای را در جدول خوب می‌نامیم که اگر تنها آن خانه غیرمجاز باشد، برنامه‌ای به طول حداکثر $۳n$ وجود داشته باشد که تمام خانه‌های مجاز را بپیماید. برای $n = ۷$ چند خانه‌ی خوب در جدول وجود دارد؟ (خانه‌ی محل استقرار ربات یعنی خانه‌ی گوشه‌ی چپ پایین خوب نیست.)

۱) ۴۸ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۴۳ ۵) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به طور کلی برای هر جدولی، تمامی خانه‌ها خوب هستند. فرض کنید خانه‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم خوب است، در ستون k ام جدول قرار داشته‌باشد. در این صورت برنامه‌ی زیر تمام خانه‌ها به جز این خانه را طی می‌کند.:
k راست، ۱ بالا، $n - k$ راست، ۱ پایین، $n - k$ چپ، ۱ بالا، k چپ. □

بازی رنگی

الف) پس از رنگ‌آمیزی دایره‌ی شماره ۱ توسط ببعی، طبق اصل لانه کبوتری رنگی وجود دارد که دست کم n قطاع، به آن رنگ در آمده باشد. اگر این رنگ، نارنجی، زرد یا بنفش باشد، به ترتیب کافی است گاوی تمام قطاع‌های دایره‌ی شماره ۲ را به رنگ نارنجی، بنفش یا زرد در بیاورد. با این کار در دایره‌ی شماره ۳ دست کم n قطاع نارنجی تولید خواهد شد.

ب) در ابتدا ببعی برای هر رنگ، n قطاع از دایره‌ی شماره ۱ انتخاب می‌کند و آن‌ها را به آن رنگ در می‌آورد. فرض کنید گاوی در رنگ‌آمیزی خود، x قطاع به رنگ زرد، y قطاع به رنگ بنفش و $n-x-y$ قطاع را به رنگ نارنجی در آورده باشد. $۳n$ انتخاب ممکن برای چرخش دایره‌ی شماره ۲ برای ببعی وجود دارد. تعداد قطاع‌های نارنجی‌ای که در مجموع این $۳n$ حالت در دایره‌ی شماره ۳ پدید خواهند آمد برابر است با:

$$(x \times n) + (y \times n) + ((n-x-y) \times n) = ۳ \times n^{۲}$$

پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری، انتخابی برای ببعی وجود دارد که در آن حالت دست کم

$$\lceil \frac{۳n^{۲}}{۳n} \rceil = n$$

قطاع از دایره‌ی شماره ۳ به رنگ نارنجی در بیاید.

وزنه‌ها و ماشین جادویی

به وضوح هنگام استفاده از ماشین اگر مجموع وزن دو سکه طبیعی بود، یعنی دو سکه هم‌نوع هستند و در غیر این صورت یعنی هم‌نوع نیستند. پس می‌توان عمل استفاده از ماشین را یک عمل مقایسه نامید که در پایان آن می‌توان فهمید دو سکه‌ی گذاشته شده، هم‌نوع هستند یا خیر.

الف) با استقرا روی n ثابت می‌کنیم گاوی با حداکثر $۲n - ۱$ بار استفاده از ماشین جادویی می‌تواند یک سکه‌ی نیم-گرمی از بین $۳n$ سکه، پیدا کند.
برای پایه، $n = ۳$ را در نظر می‌گیریم. با کمی حالت‌بندی می‌توان نشان داد با حداکثر ۵ حرکت می‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را مشخص کرد.
حال فرض می‌کنیم حکم برای $n = k$ برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم برای $n = k + ۱$ نیز برقرار است. برای اثبات حکم، $۳k + ۳$ سکه را در نظر می‌گیریم. ۲ سکه را با هم مقایسه می‌کنیم. دو حالت می‌توان متصور بود:

- اگر متفاوت بودند، کافی است یکی از آن‌ها (x) را برداشته و با ۳ سکه‌ی دیگر مقایسه کنیم. اگر در این ۳ مقایسه، دست کم ۲ تا از آن‌ها به تساوی کشید، یعنی x سکه‌ای ۱-گرمی است

و سکه‌ی مقابل آن در مقایسه‌ی نخست، نیم-گرمی است؛ در غیر این صورت x سکه‌ای نیم-گرمی است.

- اگر برابر بودند، یکی از آن‌ها را برداشته و با سکه‌ای دیگر مقایسه می‌کنیم. اگر باز هم برابر بودند، یعنی این ۳ سکه، ۱-گرمی هستند و برای بقیه‌ی سکه‌ها، طبق فرض استقرا می‌توان کار را انجام داد؛ اما اگر این ۲ برابر نبودند، کافی است باز هم ۳ سکه‌ی دل‌خواه دیگر انتخاب کنیم و مانند حالت قبل، کار را انجام دهیم.

ب) ابتدا ثابت می‌کنیم هر گراف ساده‌ی n رأسی با k مولفه، دست کم $n-k$ یال دارد. ابتدا یال‌ها را در نظر نمی‌گیریم و یکی پس از دیگری، یال‌ها را می‌گذاریم. هر یالی که می‌گذاریم، حداکثر یکی از تعداد مولفه‌ها کم می‌کند. پس گراف n رأسی با k مولفه، دست کم $n-k$ یال دارد.
فرض کنید گاوی با تعدادی مقایسه، سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرده باشد. گرافی ساده با $۳n$ رأس می‌سازیم که هر رأس آن یک سکه باشد و بین دو رأس، یال می‌کشیم اگر و تنها اگر گاوی بین سکه‌های متناظر آن‌ها، مقایسه انجام داده باشد.
ابتدا ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۲ مولفه‌ی ۱ رأسی دارد. فرض کنیم دست کم ۳ مولفه‌ی ۱ رأسی داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۳ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد.
حال ثابت می‌کنیم این گراف حداکثر ۱ مولفه‌ی ۲ رأسی دارد. مانند قسمت قبل فرض کنید دست کم ۲ مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم. اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ رأس باشند، نمی‌توان با اطمینان یک سکه‌ی نیم-گرمی را تشخیص داد.
حال ثابت می‌کنیم امکان ندارد هم مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مولفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. فرض کنید هم مولفه‌ی ۲ رأسی داشته باشیم و هم ۲ مولفه‌ی تک رأسی وجود داشته باشد. در این صورت اگر سکه‌های نیم-گرمی در بین این ۴ سکه باشند، باز هم با اطمینان نمی‌توان سکه‌ای نیم-گرمی را پیدا کرد.
حال اگر در گراف مورد نظر، ۲ مولفه‌ی تک رأسی داشته باشیم، گراف ما حداکثر

$$\lfloor \frac{۳n-۲}{۳} \rfloor + ۲ = n + ۱$$

مولفه دارد؛ در غیر این صورت نیز گراف ما حداکثر

$$\lfloor \frac{۳n-۳}{۳} \rfloor + ۱ + ۱ = n + ۱$$

مولفه خواهد داشت. پس گراف ما دست کم $۳n - (n+۱) = ۲n - ۱$ یال لازم دارد که حکم مسئله را ثابت می‌کند.

گاوی خسیس

کشور مورد نظر را به گراف مدل کنید. به جای هر شهر یک راس و به جای هر جاده یک یال در نظر بگیرید. ارزش یک شهر برابر با درجه راس متناظر آن است. هزینه یک مسیر نیز برابر است با مجموع درجات راس های داخل مسیر.

الف) یک گراف کامل را در نظر بگیرید. یال بین دو راس a و b را از این گراف جدا کنید. حال ببعی را در راس a و گاوی را در راس b قرار دهید. اکنون هزینه سفر برابر است با:

$$n - ۲ + n - ۲ + n - ۱ = ۳n - ۵$$

.

ب) فرض کنید ببعی در راس a و گاوی در راس b است. کوتاه‌ترین مسیر را از a به b در نظر بگیرید.به جز یال‌های خود مسیر بین هیچ دو راسی داخل مسیر یال نخواهیم داشت چون اگر یال باشد مسیر کوتاه تر می‌شود. هر راس خارج از مسیر نیز حداکثر سه یال به راس های داخل مسیر دارد، چون در غیر این صورت دوباره مسیر کوتاه‌تری می‌توانستیم پیدا کنیم. حال مجموع درجات راس‌های داخل مسیر را می‌شماریم. به ازای هر یال داخل مسیر به مجموع درجات دو واحد اضافه می‌شود. به ازای هر یال از یک راس خارج از مسیر به یک راس داخل مسیر هم یک واحد به مجموع درجات اضافه می‌شود. اگر تعداد راس‌های درون مسیر k باشد، هزینه کل ما حداکثر برابر با:

$$۲ * (k - ۱) + ۳ * (n - k) = ۳n - k - ۲$$

اگر $k > ۲$ باشد که سوال حل است. در غیر این صورت, مسیر ما فقط متشکل از دو راس بوده است که هر کدام حداکثر می‌توانستند درجه‌ای حداکثر برابر با $n - ۱$ داشته باشند. پس در آن صورت هزینه کل ما برابر با $۲n - ۲$ می‌شد که با توجه به اینکه $n > ۲$ است، $۲n - ۲ \geq ۳n - ۵$ است.

انتقال مهره‌های گاوی

جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. چون در ماشین او در یک لحظه می‌تواند در یک خانه بیش از یک مهره باشد، پس می‌توان فرض کرد که اگر مهره‌ای با مختصات $(x_۱, y_۱)$ را بخواهیم به نقطه ای با مختصات $(x_۲, y_۲)$ انتقال دهیم، می‌توانیم ابتدا این مهره را به نقطه‌ی $(x_۱, y_۲)$ برده و سپس آن را به خانه‌ی $(x_۲, y_۲)$ ببریم. به حرکات موجود در انتقال اول، حرکت عمودی و به حرکات موجود در انتقال دوم حرکت افقی می‌گوییم. به عبارتی ابتدا مهره را با تعدادی حرکت عمودی به سطر مورد نظر انتقال می‌دهیم و سپس با تعدادی حرکت افقی به ستون مورد نظر می‌بریم. همچنین به هر مهره زوج مرتب (c, d) را نسبت دهید که در آن c به معنای تعداد حرکت‌های عمودی لازم برای این نقطه و d برابر با تعداد حرکت های افقی لازم به ازای این نقطه است.

لم ۱
به ازای یک بعد سوال درست است. فرض کنید دو مهره در مسیر حرکت خود با هم برخورد داشته باشند

(مثلا مهره‌های a و b که a می‌خواهد به خانه‌ی A برود و b به خانه‌ی B). مقصد این دو مهره را با هم عوض کنید (a به B برود و b به A برود). با این کار حداقل یک واحد از تعداد برخوردها کاسته می‌شود. در ضمن می‌دانیم با این کار جواب ما از حالت قبلی‌اش بیش‌تر نمی‌شود. این کار را آن‌قدر تکرار کنید که دیگر برخوردی نداشته باشیم. پس جواب ماشین ببعی و گاوی به ازای یک بعد برابر است.

حل نصف نمره

به ازای مهره iام ($۱ \le i \le n$) e_i را برابر $\max(c_i, d_i)$ تعریف کنید. حال فرض کنید $F = \max_{i=۱}^{n}(e_i)$. واضح است که $t_۱ \ge F$ است. حال جواب ماشین گاوی را در نظر بگیرید. طبق لم ۱، ماشین گاوی می‌تواند به ما جوابی بدهد که هیچ برخوردی بین دو مهره که در حال انجام حرکات عمودی خود هستند رخ ندهد. حال هر مهره‌ای، حرکت عمودی خود را انجام دهد و صبر کند تا تمامی مهره‌ها حرکت‌های عمودی خود را انجام دهند. سپس هر مهره‌ای حرکت افقی خود را انجام دهد. اکنون هرکس به خانه‌ی مورد نظر خود رسیده است. حال خواهیم داشت

$$t_۲ \le max(c_i) + max(d_i) \le F + F \le ۲t_۱$$

حل کامل

از بین جواب‌های موجود برای ماشین گاوی جوابی را در نظر بگیرید که $\sum_{i=۱}^{n} c_i^۲$ در آن کمینه شود. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر همچین جوابی را در نظر بگیریم، در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک خانه نخواهند بود. فرض کنید دو مهره در یک ستون باشند و هنگامی که حرکت عمودی انجام می‌دهند به یک نقطه برسند. فرض کنید مهره‌ی a بخواهد به نقطه‌ی A انتقال یابد و مهره‌ی b نیز به خانه‌ی B انتقال یابد. حال مهره‌ی a را به نقطه‌ی B انتقال دهید و مهره‌ی b را به خانه‌ی A. c_a و c_b هر دو کم‌تر شده است چون هیچ دو نقطه‌ی آبی‌ای در یک سطر نیستند. پس مجموع مورد نظر ما کم‌تر شده است. حال فرض کنید دو مهره از دو ستون مختلف به هم برخورد کنند. در این صورت یکی از آن‌ها در حال انجام حرکت عمودی خود بوده است و دیگری در حال انجام حرکت افقی خود، زیرا اولا هیچ دو نقطه آبی‌ای در سطر یکسانی نیستند، ثانیا این دو مهره در یک ستون نبودند و قرار بود هر مهره‌ای که می‌خواهد به مقصد خود برود، اول حرکات عمودی‌اش را انجام دهد، سپس حرکات افقی‌اش را. اکنون مقصد این دو مهره را با هم عوض کنید. از آن جایی که این دو مهره در یک زمان در یک نقطه بوده‌اند و همچنین یکی از آن‌ها در حال حرکت افقی بوده و دیگری در حال حرکت عمودی، پس جواب ما بیشتر نشده است. همچنین اثبات می‌کنیم که مجموع مورد نظر ما کمتر شده است. اگر جهت حرکت‌های این دو مهره با هم متفاوت باشد که از c هر دوی آن‌ها کاسته شده است پس مجموع نیز کم‌تر شده است (دقت کنید نقطه‌های نهایی در یک سطر نیستند). حال اگر جهت حرکت این دو مهره یکسان باشد، بدون این که از کلیت سوال کاسته شود فرض کنید که جهت حرکت هر دوی آن‌ها به بالا بوده باشد. حال این مهره‌ها را با ۱ و ۲ نشان دهید. همچنین فرض کنید:

$$c_۱ < c_۲ \Rightarrow y_۱ > y_۲$$

$$p = c_۲ + y_۲ - (c_۱ + y_۱)$$

حال قرار است مهره ۱، $c_۱ + p$ حرکت عمودی انجام دهد و مهره ۲، $c_۲ - p$ حرکت عمودی انجام دهد. مجموع ما به اندازه‌ی $۲p(c_۱ + p - c_۲)$ اضافه می‌شود. داریم:

$$۲p > ۰$$
$$c_۱ + p - c_۲ = y_۲ - y_۱ < ۰$$

پس $۲p(c_۱ + p - c_۲) < ۰$ است و مجموع ما کمتر شده است. پس اگر مجموع ما کمینه شود، ماشین به ما جوابی را می‌دهد که در هیچ لحظه‌ای دو مهره در یک نقطه نباشند که این همان خواسته‌ی ماشین ببعی است.

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور، روز اول، آزمون تستی

- سؤال‌های **۱۳ تا ۲۰** در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سؤال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سوال به شکل تصادفی است.

۱) در شکل روبرو تصویری هوایی از ۵ ساختمان شهر اتوپیا را می‌بینید که خطوط در آن نشان دهنده‌ی اختلاف ارتفاع ساختمان‌ها است. در واقع هر ناحیه‌ی بسته یک ساختمان را نشان می‌دهد که ارتفاعش عددی طبیعی بین ۱ تا ۴ است و با هیچ یک از ساختمان‌های مجاورش هم‌ارتفاع نیست. ارتفاع ساختمان‌های این شهر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۹۶ ۵) ۲۴

۲) عدد صحیح k، مرید عدد طبیعی n است اگر جایگشتی از اعداد ۱ تا n مانند $\langle a_۱, a_۲, \dots, a_n \rangle$ داشته باشیم که در آن به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $|a_i - i|$ مساوی با k شود. اگر قدرت یک عدد مساوی با بزرگترین مرید آن باشد، جمع قدرت اعداد ۱ تا ۲۰ چند است؟

۱) ۸۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۶۴ ۵) ۵۵

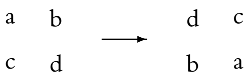
۳) گرافی ۱۰۰ راسی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بین بعضی از رئوس آن یال قرار دهیم به طوری که بین هر دو راس حداکثر یک یال باشد و اگر راس‌ها را به هر روشی به دو بخش افراز کنیم، در حداقل یکی از بخش‌ها دور وجود داشته باشد. حداقل چند یال لازم داریم؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۲ ۵) ۶

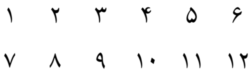
۴) خیکول و هرکول روی یک جدول $n \times ۲$ به نوبت بازی می‌کنند. در ابتدا خانه‌های جدول خالی است. هرکس در نوبت خود دوخانه‌ی مجاور را که قبلاً هیچ‌کدام خط نخورده‌اند، خط می‌زند و کسی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است. دو خانه مجاور هستند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. با فرض اینکه خیکول شروع کننده‌ی بازی است، به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{۶۴, ۳۴, ۳۲, ۲۱, ۱۳, ۸, ۵, ۳\}$، خیکول می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

۵) یک جدول ۶×۲ داریم که اعداد ۱ تا ۱۲ در خانه‌های آن نوشته شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۴ خانه را که تشکیل یک مربع ۲×۲ می‌دهند انتخاب کنیم و مثل شکل «الف» خانه‌های قطری را با هم جابه‌جا کنیم. هدف این است که بعد از چند مرحله اعداد جدول را مثل شکل «ب» مرتب کنیم. به ازای چند حالت قرارگیری اعداد در جدول اولیه این‌کار امکان‌پذیر است؟



شکل «الف»



شکل «ب»

۱) $\binom{۱۲}{۶}$ ۲) $۶!^۲$ ۳) $۱۲!$ ۴) $۲^۵$ ۵) $۶!$

۶) خیکوله یک گراف ساده‌ی ۴ راسی کشیده است و راس‌های آن را با اعداد ۱ تا ۴ شماره‌گذاری کرده است. او از نازخیکول می‌خواهد با پرسیدن تعدادی پرسش گرافش را حدس بزند. پرسش‌هایی که نازخیکول می‌پرسد به این شکل است که «بین راس‌های x و y و z در مجموع چند یال وجود دارد؟».

به ازای چندتا از گراف‌هایی که خیکوله می‌تواند بکشد، نازخیکول با پرسیدن تعداد دلخواهی از این پرسش‌ها می‌تواند آن را حدس بزند؟ دقت کنید که راس‌ها شماره دارند و بنابراین خیکوله ۶۴ گراف مختلف می‌تواند بکشد.

۱) ۴۴ ۲) ۴۶ ۳) ۴۸ ۴) ۴۰ ۵) ۴۲

۷) دارا و سارا اعداد ۱ تا ۵ را روی تخته نوشته‌اند. آنها به نوبت بازی می‌کنند و هرکس در نوبت خود یکی از دو عمل زیر را انجام می‌دهد:

- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و حاصل جمع آنها را روی تخته می‌نویسد.
- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و قدر مطلق تفاضل آنها را روی تخته می‌نویسد.

سارا می‌خواهد عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند بیشینه شود و دارا می‌خواهد این عدد کمینه شود. با فرض اینکه سارا بازی را شروع می‌کند و هردوی آنها به بهترین شکل ممکن بازی می‌کنند، عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵ ۵) ۳

۸) قورباغه‌ای می‌خواهد از نقطه‌ی A در شکل مقابل به یکی از ۷ نقطه‌ی مشخص شده برود. با فرض اینکه او در هر مرحله می‌تواند k واحد ($۱ \leq k \leq ۶$) به سمت بالا یا به سمت راست بپرد، به چند طریق می‌تواند به نقاط مشخص شده برسد؟ برای مثال یک مسیر ممکن این است که در یک پرش ۶ واحد به سمت راست بپرد. یک مسیر دیگر این است که ابتدا ۳ واحد به سمت راست بپرد، سپس ۳ واحد دیگر به سمت راست بپرد.

۱) $\frac{۱۴!}{۷!\times۷!}$ ۲) ۲×۳^{۵} ۳) $۲^{۱۴}$ ۴) $\frac{۱۴!}{۶!\times۶!}$ ۵) $\frac{۱۲!}{۲\times۶!\times۶!}$

۹) می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را درون خانه‌های جدولی به شکل روبرو بچینیم به‌طوری‌که اختلاف هر دو عدد مجاور بیش از یک باشد. دو خانه مجاور هستند اگر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند. برای مثال خانه‌های وسط جدول با ۶ خانه مجاور هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۱۶

۱۰) یک جدول ۵×۵ زیباست اگر شرایط زیر را داشته باشد:

۱. در هر خانه‌ی آن عددی صحیح بین ۱ تا ۵ نوشته شده باشد (خود ۱ و ۵ هم می‌تواند باشد).
۲. عدد نوشته شده در حداقل یکی از خانه‌ها برابر ۵ باشد.
۳. عدد هر خانه از عدد خانه‌ی بالایی و راستی‌اش (در صورت وجود) کمتر نباشد.
۴. به ازای هر خانه مثل x حداقل یکی از دو عبارت زیر درست باشد:
   - عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد سطری است که x در آن قرار دارد.
   - عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد ستونی است که x در آن قرار دارد.

چند جدول زیبای ۵×۵ داریم؟

۱) ۱ ۲) $۵!^{۲}$ ۳) $\binom{۸}{۴}^{۲}$ ۴) $۵^{۸}$ ۵) $\binom{۹}{۴}^{۲}$

۱۱) خیز یک نوع میز است که ۷ پایه دارد و پایه‌های آن به صورت یک ۷ ضلعی منتظم در محیطاش قرار گرفته‌اند. اگر بدانیم بر اثر زلزله هر پایه‌ی خیز مستقل از بقیه پایه‌ها به احتمال ۰.۵ می‌شکنند، احتمال افتادن خیز بر اثر زلزله چقدر است؟ خیز در صورتی می‌افتد که خطی گذرنده از مرکز آن وجود داشته باشد، به طوری که همه‌ی پایه‌های سالم یک طرف آن خط باشند. به عنوان مثال اگر فقط یک پایه‌ی خیز بشکنند، نمی‌افتد.

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۷۱}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۵۰}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۵۷}{۱۲۸}$ ۵) $\frac{۷۸}{۱۲۸}$

۱۲) در پارکینگ خیکول‌آباد ۸ ماشین که با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند، مطابق شکل در راهروی A قرار دارند. در هر مرحله یا بالاترین ماشین راهروی A وارد یکی از راهروهای B یا C می‌شود، یا بالاترین ماشین راهروی B وارد راهروی C می‌شود.
فرض کنید در انتها تمام ماشین‌ها در ستون C باشند. در این صورت تعداد جفت اعداد متوالی در ستون C که حاصل‌جمع‌شان مضرب ۳ است حداکثر چند است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶ ۵) ۴

سؤال‌های ۱۳ تا ۲۰ در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.

یک جایگشت nتایی را «دانا» می‌نامیم، هرگاه به ازای هر i، عددی که در جای iام نوشته شده است به اضافه‌ی شماره‌ی جایگاهی که عدد i در آن نوشته شده است، برابر با $n + ۱$ باشد. برای مثال جایگشت $\langle ۲, ۴, ۱, ۳\rangle$ یک جایگشت ۴تایی داناست، اما جایگشت $\langle ۱, ۲, ۳, ۴\rangle$ دانا نیست.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۳) به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{۲۰۱۰, ۲۰۱۱, ۲۰۱۲, ۲۰۱۳, ۲۰۱۴\}$، جایگشت nتایی دانا وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۵ ۵) ۳

۱۴) چند جایگشت دانای ۲۱تایی وجود دارد؟

۱) $\frac{۱۰!}{۵!\times ۲^{۱۰}}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱۰!}{۵!\times ۲^{۵}}$ ۴) $۱۰!$ ۵) $\frac{۱۰!}{۵!}$

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. عدد x را از ورودی بگیر.
۲. y را برابر صفر قرار بده. s را برابر یک قرار بده.
۳. b را برابر با باقیمانده‌ی تقسیم x بر ۲ قرار بده.
۴. مقدار $s \times b$ را به y اضافه کن.
۵. x را برابر $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ قرار بده.
۶. اگر x بزرگتر از صفر بود، s را برابر $-s$ قرار بده و به سطر سه برو.
۷. پایان

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۵) به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا ۱۰۲۳، در پایان y برابر صفر خواهد بود؟

۱) $\binom{۶}{۳}$ ۲) $\binom{۱۰}{۵}$ ۳) $۳^{۵}$ ۴) ۳۰۰ ۵) $۲^{۸}$

۱۶) به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا ۱۰۲۳، در پایان y مضرب سه خواهد بود؟

۱) ۲×۳^{۵} ۲) $\binom{۸}{۴}$ ۳) ۳۴۲ ۴) ۲۴۳ ۵) ۳×۲^{۷}

خالپشت‌ها، موجوداتی قابل برنامه‌ریزی هستند که در جدول‌های $n \times n$ زندگی می‌کنند. در بعضی خانه‌های این جدول‌ها دیوار وجود دارد و عبور از آنها ممکن نیست.

خالپشت‌ها دنباله‌ای از دستورها را دریافت می‌کنند و آنها را به ترتیب اجرا می‌کنند. دستورها می‌توانند از چهار نوع زیر باشند:

- بالا: خالپشت به خانه‌ی بالایی خود می‌رود.
- پایین: خالپشت به خانه‌ی پایینی خود می‌رود.
- چپ: خالپشت به خانه‌ی چپی خود می‌رود.
- راست: خالپشت به خانه‌ی راستی خود می‌رود.

در صورتی که اجرای یک دستور، خالپشت را به خارج از جدول یا به خانه‌ای که در آن دیوار است ببرد، خالپشت دستور را اجرا نمی‌کند و به سراغ دستور بعدی می‌رود.

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۷) خیکوله خالپشتی پیدا کرده است که در یک جدول ۴ × ۴ به شکل روبرو زندگی می‌کند. خالپشت در خانه‌ی A قرار دارد و خانه‌های هاشور خورده، خانه‌هایی هستند که در آنها دیوار است. خیکوله می‌خواهد دنباله‌ای با کمترین تعداد دستور به خالپشت بدهد که بعد از اجرای آن خالپشت از همه‌ی خانه‌های جدول حداقل یکبار عبور کرده باشد. تعداد دستورات این دنباله چند است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰ ۵) ۱۴

۱۸) نازخیکول به خیکوله دو جدول ۳×۳ به شکل روبرو می‌دهد که در هرکدام یک خالپشت در خانه‌ی A وجود دارد. نازخیکول از خیکوله می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، از همه‌ی خانه‌های جدول خود حداقل یکبار عبور کنند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۹ ۵) ۱۳

۱۹) حالا خیکوله به نازخیکول یک جدول ۴ × ۴ به شکل روبرو می‌دهد و به او می‌گوید که در این جدول دو خالپشت وجود دارد اما جای خالپشت‌ها را به نازخیکول نمی‌گوید. خیکوله از نازخیکول می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، مستقل از اینکه در ابتدا در کجای نقشه بوده‌اند، در انتها هردو در یک خانه قرار داشته باشند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۶ ۵) ۷

۲۰) نازخیکول یک خالپشت را در یک جدول ۴ × ۴ مخفی کرده است و از خیکوله می‌خواهد جای آن‌را پیدا کند. برای این کار خیکوله می‌تواند در هر مرحله یک مربع ۲ × ۲ را مشخص کند و از نازخیکول بپرسد که «آیا خالپشت در این مربع ۲ × ۲ قرار دارد؟». با فرض اینکه خالپشت جای خود را در جدول عوض نمی‌کند، در بدترین حالت خیکوله حداقل چند سوال باید بپرسد تا بتواند جای خالپشت را تشخیص دهد؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴ ۵) ۶

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

رشته نزدیک (۱۵ نمره)

۱۳۹۲ رشته به طول ۱۳۹۲ از حروف کوچک انگلیسی با نام‌های $p_{۱}, p_{۲}, \dots, p_{۱۳۹۲}$ در اختیار داریم.
فاصله دو رشته $A = a_{۱}, a_{۲}, \dots, a_n$ و $B = b_{۱}, b_{۲}, \dots, b_n$ را با $d(A, B)$ نمایش می‌دهیم و این مقدار برابر است با تعداد اندیس‌های i که $a_i \neq b_i$. به عنوان مثال فاصله دو رشته salam و palas برابر با ۲ است زیرا تنها در مکان‌های اول و آخر با هم تفاوت دارند.
برای رشته X به طول ۱۳۹۲ مجموع فاصله‌هایش از این ۱۳۹۲ رشته را D_X می‌نامیم. به رشته‌ای مانند M به طول ۱۳۹۲، **نزدیک** می‌گوییم اگر به ازای هر رشته X به طول ۱۳۹۲:

$$D_M \leq D_X$$

الف) به ازای هر سه رشته هم طول دلخواه A, B, C نشان دهید $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. (۵ نمره)

ب) نشان دهید رشته‌ای مانند p_i از این ۱۳۹۲ رشته وجود دارد به طوری که $D_M \leq D_{p_i} \leq 2D_M$. (۱۰ نمره)

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

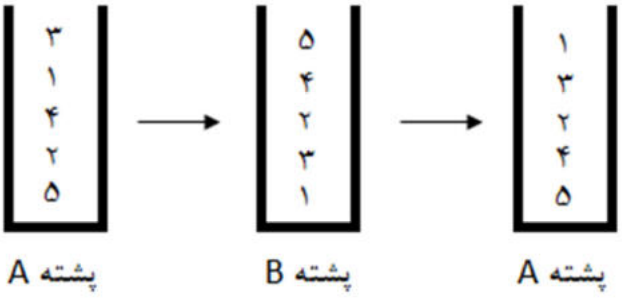
مرتب‌ساز پشته‌ای (۱۵ نمره)

مرتب‌ساز پشته‌ای یک مرتب‌ساز با دو پشته است. در ابتدا در پشته اول که آن را پشته A می‌نامیم اعداد ۱ تا n با ترتیبی دلخواه قرار دارند و پشته دوم با نام B خالی است. این مرتب‌ساز قادر است عملیات زیر را انجام دهد:

- در هر مرحله دو عدد بالای پشته A را در نظر می‌گیرد و عدد کوچکتر را به پشته B انتقال می‌دهد و این کار را آنقدر تکرار می‌کند که در پشته A تنها یک عنصر باقی بماند و آن را نیز به پشته B منتقل می‌کند. سپس اعداد پشته B را به پشته A انتقال می‌دهد(توجه کنید که چون A و B پشته هستند ترتیب عناصر برعکس می‌شود).

اگر مرتب‌ساز پشته‌ای عملیات فوق را $۱ \le k \le n$ بار انجام دهد به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد ۱ تا n درون A، در نهایت اعداد بصورت مرتب شده در پشته A قرار خواهند گرفت (عدد ۱ در بالای پشته و عدد n در پایین پشته). جواب را بر حسب n و k محاسبه و اثبات کنید.

بعنوان مثال در شکل زیر وضعیت پشته A بعد از یک بار انجام عملیات نمایش داده شده است. در این شکل سه گام مشخص شده است که به ترتیب عبارتند از: وضعیت اولیه پشته A، نحوه قرار گرفتن اعداد در پشته B، وضعیت اعداد در پشته A بعد از عملیات.



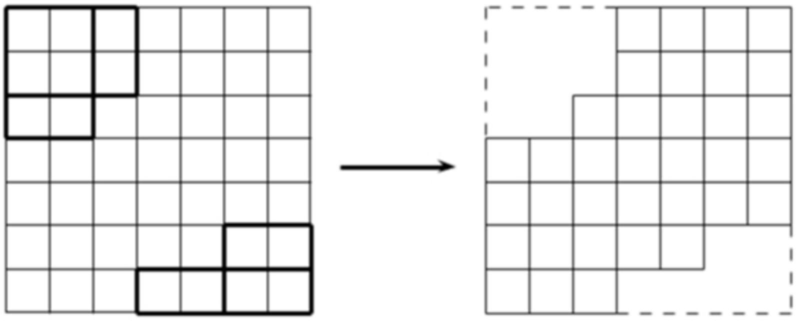
مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

شکلات تخت (۱۵ نمره)

حامد و امیرمهدی یک شکلات تخت به صورت جدولی $n \times n$ در اختیار دارند. آنها می‌خواهند در حین خوردن شکلات یک بازی نیز باهم انجام دهند. بازی به این صورت است:

حامد از گوشه بالا چپ و امیرمهدی از گوشه پایین راست بازی را شروع می‌کند و به نوبت بازی می‌کنند. اولین حرکت را حامد انجام می‌دهد. هر کس در نوبت خودش باید تکه‌ای مستطیلی (که شامل گوشه خودش باشد) را گاز بزند و حتما باید یک خانه از شکلات را بخورد (در واقع نمی‌تواند مستطیلی را انتخاب کند که همه خانه‌هایش در نوبت‌های قبلی خورده شده باشند). کسی که آخرین تکه از شکلات را بخورد بازنده است. نشان دهید امیرمهدی همیشه می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

در شکل زیر حالتی نشان داده شده است که حامد و امیرمهدی هر کدام دو نوبت بازی می‌کنند و در نوبت‌هایشان مستطیل‌های پررنگ را می‌خورند. شکل سمت راست شکلات باقی‌مانده پس از این حرکات را نشان می‌دهد.



مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

کارت‌های همانی (۲۵ نمره)

سعید ۱۳۹۲ کارت با رنگ‌های متمایز ۱ تا ۱۳۹۲ دارد و می‌خواهد با نوید یک بازی انجام دهد. در این بازی سعید کارت‌ها را دوبار دسته‌بندی می‌کند. او در هر بار دسته‌بندی کارت‌ها را به ۹۹ دسته تقسیم می‌کند به طوری که در هر دسته حداقل یک کارت قرار گیرد. سعید بعد از اینکه دسته‌بندی اول را انجام می‌دهد، دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری می‌کند و پشت هر کارت شماره دسته‌اش را می‌نویسد و سپس برای بار دوم کارت‌ها را دسته‌بندی می‌کند. سعید به نوید قول می‌دهد که در دسته‌بندی دوم هیچ دو کارتی که در دسته‌بندی اول در یک دسته بوده‌اند دوباره در یک دسته قرار نگیرند. بعد از اینکه سعید دسته‌بندی دوم را انجام داد دسته‌ها را به نوید می‌دهد و نوید باید دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری کند و شماره دسته را در طرف دیگر کارت بنویسد. نوید به دنبال بیشینه کردن تعداد کارت‌هایی است که اعداد دو طرفشان با هم برابر باشد و این کارت‌ها را کارت‌های همانی می‌نامد.

الف) نشان دهید سعید هر طور کارت‌ها را دسته‌بندی کند نوید می‌تواند حداقل ۱۵ کارت همانی درست کند. (۱۵ نمره)

ب) نشان دهید سعید می‌تواند طوری کارت‌ها را دسته‌بندی کند که نوید نتواند بیشتر از ۱۵ کارت همانی درست کند. (۱۰ نمره)

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

کار گروهی (۳۰ نمره)

آقای امینی معلم کلاسی شامل nk دانش‌آموز می‌باشد. در این کلاس تعدادی رابطه دوستی بین دانش‌آموزان برقرار است (رابطه دوستی دوطرفه است، یعنی اگر دانش‌آموز a با دانش‌آموز b دوست باشد، دانش‌آموز b هم با a دوست هست). آقای امینی به کارهای گروهی خیلی علاقه‌مند هست. او می‌خواهد دانش‌آموزان را به n گروه k نفری تقسیم کند. اما برای او مهم است که افراد یک گروه همه با هم دوست باشند. ما می‌دانیم حداقل یک راه برای دسته‌بندی دانش‌آموزان با شرایط گفته شده وجود دارد. دانش‌آموزان که از این امر مطلع شده‌اند به دنبال این هستند که دسته‌بندی معلم را از قبل پیش‌بینی کنند.

الف) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی برابر با $\binom{k}{۲}n^{۲}$ باشد، حالتی از روابط دوستی وجود دارد که دسته‌بندی معلم به صورت یکتا مشخص شود. (۱۵ نمره)

ب) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی بیشتر از $\binom{k}{۲}n^{۲}$ باشد، هیچ حالتی نیست که دسته‌بندی بصورت یکتا انجام پذیرد. (۱۵ نمره)

باسمه تعالی

کلید مرحله‌ی دوم المپیاد کامپیوتر کشور – سال ۱۳۹2

شماره سوال	مشروح گزینه	گزینه‌ی درست در کد یک	گزینه‌ی درست در کد دو
1	48	2	1
2	55	5	3
3	10	2	1
4	4	2	3
5	6!	5	4
6	46	2	1
7	7	3	4
8	2*3^5	2	1
9	4	3	1
10	c(8,4)^2	3	4
11	57/128	4	3
12	6	4	5
13	2	1	2
14	10!/5!	5	3
15	c(10, 5)	2	1
16	342	3	1
17	16	3	1
18	9	4	5
19	6	4	1
20	5	2	4

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

سوال اول– رشته نزدیک

الف) کافی است توجه کنیم که اگر دو رشته A و C در جایگاه i ام با هم اختلاف داشته باشند حداقل یکی از دو جفت (A,B) یا (B,C) در جایگاه i ام با هم اختلاف دارند. در نتیجه هر اختلافی که در $d(A,C)$ شمرده می‌شود حداقل در یکی از $d(A,B)$ یا $d(B,C)$ نیز شمرده می‌شود که حکم مسئله را نتیجه می‌دهد.

ب) p_j را نزدیکترین رشته به رشته M در بین ۱۳۹۲ رشته در نظر می‌گیریم و D_{p_j} را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{p_j} = \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(p_i, p_j) \le \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(p_i, M) + d(M, p_j) = D_M + \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M, p_j) \quad (1)$$

اما با توجه به نحوه انتخاب p_j به ازای هر i می‌دانیم $d(M,p_j) \le d(M,p_i)$ و از این موضوع نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M, p_j) \le \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} d(M, p_i) = D_M \quad (2)$$

از (1) و (2) خواهیم داشت $D_{p_j} \le 2D_M$.

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

سوال دوم– مرتب‌ساز پشته‌ای

مشاهده۱. تبدیل مساله‌ی پشته به مساله‌ی آرایه

عملیات گفته شده مانند این است که یک آرایه از اعداد $a_1, a_2, ..., a_n$ داشته باشیم. سپس از دو عنصر اول آرایه یعنی a_1 و a_2 شروع کنیم و آن دو را با هم مقایسه کنیم. اگر a_1 بزرگتر بود جای آن دو را با هم عوض کنیم. سپس به سراغ دو عنصر بعدی برویم و همین‌طور تا آخرین دو عنصر آرایه، این کار را انجام دهیم. هدف این است که در اتنها آرایه مرتب شود. یعنی: $a_1 <= a_2 <= ... <= a_n$

نکته خارج از راه‌حل: درواقع این عملیات، بخشی از مرتب‌سازی حبابی است. در مرتب‌سازی حبابی با n بار انجام این عملیات مطمئن می‌شویم که آرایه مرتب شده است.

با توجه به مشاهده۱ کافی است ببینیم که به ازای چه آرایه‌هایی از اعداد ۱ تا n، با k بار انجام دادن عملیات بالا، در انتها به یک آرایه‌ی مرتب شده می‌رسیم.

لم۱. اگر در آرایه‌ی A با عناصر $a_1, a_2, ..., a_n$ که جایشگتی از اعداد ۱ تا n هستند، شرط زیر برقرار باشد، با k بار انجام دادن عملیات مذکور در مشاهده۱، دنباله مرتب می‌شود و در غیر این صورت دنباله در انتها نامرتب خواهد بود:

- به ازای هر $1 \le i \le n$، تعداد اعدادی که بیشتر از a_i هستند و در آرایه قبل از آن قرار دارند، حداکثر k باشد.

اثبات. در ابتدا نشان می‌دهیم درصورتی که شرط گفته شده برقرار نباشد، در انتها جایگشت مرتب‌شده نخواهد بود. فرض کنید قبل از a_i بیشتر از k عدد باشند که از آن بیشتر هستند. در هر بار اجرای عملیات بالا، حداکثر یکی از این اعداد از a_i رد می‌شود و بعد از آن قرار می‌گیرد. بنابراین در انتها حداقل یکی از آنها قبل از a_i باقی می‌ماند و بنابراین جایشگت مرتب نمی‌شود.

حال نشان می‌دهیم درصورتی که شرط گفته شده برقرار باشد، در انتها دنباله مرتب می‌شود. این فرض را با استقرا روی n نشان می‌دهیم.

حالت پایه: وقتی است که $n=1$ که مرتب است.

گام استقرا:

عدد ۱ را در دنباله در نظر بگیرید. با توجه به شرط لم، حداکثر k عدد دیگر قبل از عدد یک قرار دارند. از طرفی چون عدد یک، کوچکترین عدد دنباله است، در هر مرحله جایگاه‌اش یک واحد به سمت چپ انتقال پیدا می‌کند تا وقتی که به سمت چپ‌ترین نقطه برسد. بنابراین بعداز k مرحله، عدد یک در جایگاه درست قرار می‌گیرد.

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

حال اگر عدد یک را در نظر نگیریم، بقیه‌ی اعداد مستقلا باید شرط لم را داشته باشند (چون عدد یک کوچکترین عدد است). از طرفی جایگاه عدد یک در ترتیب مقایسه‌ی این اعداد تاثیری ندارد. بنابراین طبق فرض استقرا اگر روی آنها k مرحله عملیات گفته شده را انجام دهیم مرتب می‌شوند. بنابراین بعداز k مرحله کل دنباله مرتب خواهد شد.

قضیه. تعداد جایگشت‌هایی که با k بار انجام عملیات گفته شده ($k \leq n$) قابل مرتب شدن هستند، برابر است با $k! * \left(k + ۱\right)^{n-k}$.

اثبات.

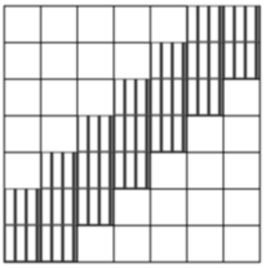
اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم:

پایه: n=k. در این صورت با توجه به لم۱ همه‌ی جایشگت‌ها قابل مرتب شدن هستند.

گام استقرا: برای اینکه دنباله مرتب شود باید شرط لم۱ را داشته باشد. از طرفی با حذف عدد یک از دنباله، دنباله‌ای که باقی می‌ماند، مستقل از عدد یک باید همچنان شرط لم۱ را داشته باشد. بنابراین بدون در نظر گرفتن عدد یک، $n - ۱$ عدد داریم که طبق فرض استقرا $k! * (k + 1)^{n-1-k}$ جایگشت از آنها قابل مرتب شدن هستند. حال به ازای هر جایگشت، برای اینکه شرط لم۱ برقرار بماند، دقیقا $k + 1$ حالت برای اضافه کردن عدد یک وجود دارد. پس در کل $k! * (k + 1)^{n-k}$ جایگشت قابل مرتب شدن هستند.

سوال سوم– شکلات تخت

شکل زیر را در نظر بگیرید:



در واقع قطر فرعی به همراه دو قطر پایینی و بالایی آن هاشور خورده‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم نفر دوم همیشه می‌تواند طوری عمل کند که شکل نسبت به قطر فرعی قرینه باشد و هیچ یک از مربع‌های قسمت هاشور خورده، خورده نشده باشند. توجه کنید که در صورتی که بازی به جدولی به اندازه ۱ یا ۲ با خاصیت فوق برسد براحتی می‌توان نشان داد که نفر دوم می‌تواند برنده شود(چرا؟).

فرض کنید یک جدول قرینه نسبت به قطر فرعی که خانه‌های هاشور خورده آن سالم است به نفر اول می‌رسد(در اول کار این شرط برقرار است). در این صورت برای حرکت نفر اول دو حالت وجود دارد:

۱- هیچ یک از خانه‌های هاشور خورده، خورده نمی‌شوند.

۲- مستطیل خورده شده توسط نفر اول شامل حداقل یک خانه‌ی هاشور خورده می‌باشد.

در حالت اول نفر دوم می‌تواند قرینه حرکت نفر اول را نسبت به قطر فرعی انجام دهد(چرا؟)

در حالت دوم یا کل جدول خورده شده است یا نفر دوم می‌تواند یک جدول کوچکتر با شرایط گفته شده ایجاد کند(چرا؟).

همانطور که می‌دانیم در هر حرکت حداقل یک خانه خورده می‌شود در نتیجه تعداد خانه‌های باقی‌مانده در حال کم شدن است و حتما در جایی یا نفر اول کل شکلات را می‌خورد یا به یک شکلات ۲×۲ یا ۱×۱ می‌رسد.

سوال چهارم– کارت‌های همانی

قسمت الف)

راه حل اول-

نوید می‌تواند به !۹۹ حالت دسته‌بندی سعید را شماره گذاری کند. . نشان می‌دهیم حتما در یکی از این !۹۹ حالت شماره گذاری، ۱۵ کارت همانی وجود دارد. دسته‌ها را در دسته‌بندی دوم به ترتیب $A_1, A_2, \ldots, A_{99}$ نام گذاری می‌کنیم.

جدولی با !۹۹ سطر و ۹۹ ستون در نظر بگیرید. ستون i ام این جدول را نماینده دسته A_i و سطر j ام این جدول را نماینده حالت j ام شماره گذاری دسته‌ها توسط نوید در نظر بگیرید. در خانه تقاطع سطر j ام و ستون i ام این جدول، تعداد کارت‌های همانی که در دسته A_i در ترتیب j ام وجود دارد را یادداشت می‌کنیم.

حال مجموع اعداد جدول را به صورت ستون به ستون محاسبه می کنیم. می دانیم ستون j ام معرف دسته A_j است. ادعا می کنیم مجموع اعداد ستون j ام برابر است با $|A_j|$ * !۹۸. یک کارت خاص موجود در دسته A_j را در نظر بگیرید و آن را x بنامید . x در صورتی همانی است که شماره دسته‌اش در شماره گذاری نوید نیز برابر با j باشد. پس آن دسته‌ای که حاوی تیله x است (در ترتیب نوید) باید شماره‌اش j شود و بقیه ۹۸ دسته می‌توانند هر شماره دلخواهی پیدا کنند. پس x در !۹۸ شماره گذاری مختلف همانی است. با توجه به این استدلال واضح است که مجموع اعداد ستون j ام برابر است با $|A_j|$ * !۹۸. پس مجموع اعداد جدول برابر است با :

$$\sum_{i=۱}^{۹۹}|\mathrm{A_i}| \times ۹۸! = ۹۸! \times \sum_{i=۱}^{۹۹}|\mathrm{A_i}| = ۹۸! \times ۱۳۹۲$$

از طرفی چون این جدول !۹۹ سطر دارد، طبق اصل لانه کبوتر، سطری با مجموع $\left\lceil\frac{۹۸!\times ۱۳۹۲}{۹۹!}\right\rceil = ۱۵$ وجود خواهد داشت. اما همانطور که در ابتدا گفتیم، هر سطر نشان‌دهنده‌ی یک روش شماره‌گذاری توسط نوید بود. این یعنی نوید می‌تواند طوری دسته‌هایش را شماره گذاری کند که حداقل ۱۵ کارت همانی وجود داشته باشد و حکم ثابت شد.

توجه: در این راه از اینکه در دسته‌بندی دوم هیچ دو کارت هم‌دسته در دسته‌بندی اول هم‌دسته نیستند استفاده نشده است.

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

راه‌حل دوم-

این مسئله را می‌توان با گراف و مسئله تطابق مدل کرد. از روی دسته‌بندی‌های سعید می‌توان یک گراف دوبخشی ساخت. در این گراف دوبخشی هر بخش متناظر با یکی از دسته‌بندی‌ها خواهد بود و در هر بخش ۹۹ راس متناظر با ۹۹ دسته‌ی دسته‌بندی وجود دارد. حال بین هر دو راسی که دسته‌های متناظر آنها شامل یک کارت مشترک است یک یال می‌گذاریم.

مشاهده۱. این گراف یال چندگانه ندارد (چرا؟).

مشاهده۲. در هر شیوه شماره‌گذاری کارت‌های همانی معادل یک تطابق در گراف دو بخشی هستند(چرا؟).

قضیه. در گراف فوق تطابق بیشنه حداقل ۱۵ یال دارد.

اثبات. یک راه برای اثبات این قضیه اثبات از طریق برهان خلف می‌باشد.

راه حل سوم-

در این روش از شیوه احتمالاتی[۱] استفاده شده است، که انتظار نمی‌رود دانش‌آموزان از این روش مسئله را حل کنند، لیکن برای آشنایی علاقه‌مندان این روش نیز بیان می‌گردد.

اگر یک شماره‌گذاری تصادفی را در نظر بگیریم احتمال اینکه یک کارت، کارت همانی باشد برابر با $\frac{۱}{۹۹}$ خواهد بود. حال اگر X را متغیر تصادفی تعداد کارت‌های همانی در یک شماره گذاری بنامیم. می‌دانیم:

$$X = X_{۱} + X_{۲} + \cdots + X_{۱۳۹۲}$$

که X_i متغیرتصادفی شاخص همانی بودن کارت i ام خواهد بود و می‌دانیم امید ریاضی X_i برابر است با:

$$E[X_i] = \Pr\left[X_i = ۱\right] = \frac{۱}{۹۹}$$

واما برای امیدریاضی X خواهیم داشت:

$$E[X] = E\left[\sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} X_i\right] = \sum_{i=۱}^{۱۳۹۲} E[X_i] = \frac{۱۳۹۲}{۹۹} > ۱۴$$

اما با توجه به اینکه همیشه حالتی وجود دارد که $X \geq E[X]$ و اینکه مقدار X عدد صحیح می‌باشد پس شماره‌گذاری وجود دارد که در آن X یعنی تعداد کارت‌های همانی بیشتر از ۱۴ باشد.

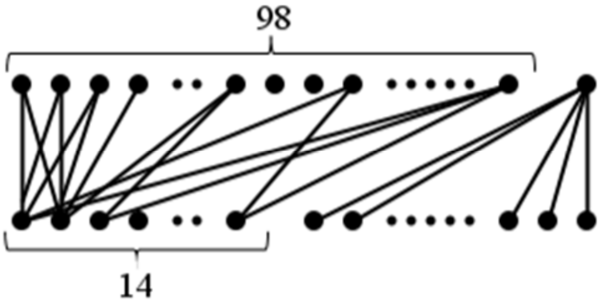
---

[1] Probabilistic Method

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

قسمت ب)

از راه‌حل دوم قسمت الف استفاده می‌کنیم و یک گراف دوبخشی به شکل زیر می‌سازیم.



در گراف نشان داده شده ۹۵ راس از بخش پایین به یک راس از بخش بالا وصل شده اند و بقیه یال‌ها بین دسته ۱۴تایی و ۹۸ تایی قرار می‌گیرد. می‌دانیم که می‌توانیم ۱۳۸۶ = ۱۴ * ۹۹ یال از نوع دوم داشته‌باشیم که بیشتر از نیاز ما نیز می‌باشد. اما در این گراف تطابق بیشینه حداکثر برابر با ۱۵ خواهد بود و با توجه به قسمت الف می‌دانیم این مقدار دقیقا برابر ۱۵ می‌باشد.

پاسخ سوالات تشریحی مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران

سوال پنجم– کار گروهی

قسمت اول

گراف روابط دوستی دانش‌آموزان را در نظر می‌گیریم. در واقع مسئله از ما خواسته است تا اثبات کنیم گرافی nk راسی با $\binom{k}{۲}n^{۲}$ یال وجود دارد که افراز آن به خوشه‌های k راسی یکتا مشخص شود. برای اثبات این حکم از استقرا روی n استفاده می کنیم.

پایه: حکم برای $n = ۱$ برقرار است چرا که $\binom{k}{۲}$ یال دقیقا یک خوشه را تشکیل می‌دهند.

فرض می‌کنیم برای کلاسی با nk دانش‌آموز چنین حالتی وجود داشته باشد.

کلاسی با $(n + ۱)k$ نفر را در نظر بگیرید. ابتدا k نفر از کلاس حذف و برای nk نفر باقی‌مانده تعداد $\binom{k}{۲}\mathrm{n}^{۲}$ رابطه‌ی دوستی در نظر می‌گیریم. حال k نفر را به nk نفر بر می‌گردانیم. برای این که شرایط مساله بر قرار باشد لازم است $\binom{k}{۲}((n+1)^2 - n^2) = \binom{k}{۲}(۲n + ۱) = \binom{k}{۲} + (k - ۱) * (nk)$ رابطه‌ی دوستی به روابط دوستی اضافه کنیم. به $\binom{k}{۲}$ رابطه دوستی که برای گروه کردن k دانش‌آموز نیاز داریم. پس $(k - ۱) * (nk)$ رابطه‌ی دوستی باقی می‌ماند که آنها را باید به شکلی نسبت دهیم. با کمی دقت در میابیم که کافی است از شکل همین عبارت این ایده به ذهن می رسد که از آن k نفر، یک نفر را کنار گذاشته ایم و بقیه را با تمام nk نفر دوست کرده‌ایم. حال ادعا می‌کنیم که با این ساختار گروه بندی یکتا است (چرا؟).

قسمت دوم

طبق آنچه در صورت سوال آمده، تعداد روابط دوستی حداقل $\binom{k}{۲}n^{۲} + ۱$ می‌باشد و حداقل یک گروه‌بندی وجود دارد. روابط دوستی غیر از رابطه‌ی هم گروه‌ها در این گروه‌بندی را در نظر بگیرید. تعداد این رابطه‌ها حداقل برابر است با $\binom{k}{۲}n^2 + ۱ - n\binom{k}{۲} = \binom{k}{۲}n(n - ۱) + ۱$.

اما تعداد زوج گروه‌ها برابر با $\binom{n}{۲}$ است و $\binom{k}{۲}n(n-۱)+۱$ رابطه دوستی بین این $\binom{n}{۲}$ زوج گروه قرار دارد. پس طبق اصل لانه‌کبوتر حداقل یک زوج گروه وجود دارد که تعداد روابط دوستی بین اعضای آن بیشتر از یا مساوی با $\left\lceil\frac{\binom{k}{۲}n(n-1)+1}{\binom{n}{۲}}\right\rceil = k*(k-۱)+۱$ باشد. از سوی دیگر کل روابط دوستی بین اعضای این دو گروه با یکدیگر

حداکثر $k*k$ تا بوده و حالا تنها $k-۱$ رابطه‌ی دوستی از کل این رابطه‌ها را نداریم. پس در هر گروه عضوی هست که با تمامی اعضای گروه دیگر دوست باشد و در نتیجه با عوض کردن جای این دو نفر می‌توان یک گروه بندی جدید ایجاد کرد. با توجه به آنچه گفته شد در صورتیکه تعداد یال‌ها بیشتر از $\binom{k}{۲}n^2$ باشد و حداقل یک گروه‌بندی وجود داشته باشد، نمی‌توان گروه‌بندی را بصورت یکتا مشخص کرد.

مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۱: ماشین عجیب .... ۲۰ امتیاز

سعید دارای ماشین عجیبی است که دارای ۱۰۰۰ خانه حافظه می‌باشد. به هر خانه حافظه یک بیت گفته می‌شود و بیت iام را با $M[i]$ نشان می‌دهیم. هر بیت حافظه یکی از دو مقدار ۰ و ۱ را در خود ذخیره می‌کند. متاسفانه مقادیر ذخیره شده در حافظه ماشین قابل رویت نیست. تنها می‌دانیم اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۸۰۱ تا ۹۰۰ برابر ۰ و اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۹۰۱ تا ۱۰۰۰ برابر ۱ هستند.

این ماشین عجیب تنها توانایی اجرای دستورات زیر را دارد:

- $M[i] = M[i_۱] \wedge M[i_۲] \cdots \wedge M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که اعداد ذخیره شده در بیت‌های $i_۱$ام، $i_۲$ام و $\cdots$ و i_kام برابر ۱ باشند مقدار $M[i]$ یک و در غیر این صورت صفر خواهد شد.
- $M[i] = M[i_۱] \vee M[i_۲] \cdots \vee M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که اعداد ذخیره شده در بیت‌های $i_۱$ام، $i_۲$ام و $\cdots$ و i_kام برابر ۰ باشند مقدار $M[i]$ صفر و در غیر این صورت یک خواهد شد.
- $M[i] = M[i_۱] \oplus M[i_۲] \cdots \oplus M[i_k]$: با اجرای این دستور در صورتی که تعداد یک‌های ذخیره شده در بیت‌های $i_۱$ام، $i_۲$ام و $\cdots$ و i_kام فرد باشد مقدار $M[i]$ یک و در غیر این صورت صفر خواهد شد.

در واقع این سه دستور به ترتیب and، or و xor منطقی می‌باشند. بدیهی است که بلافاصله بعد از این که سعید به دستگاه دستور می‌دهد، دستگاه دستور را اجرا می‌کند. توجه کنید اندیس‌های $i, i_۱, \cdots, i_k$ حداقل ۱ و حداکثر ۱۰۰۰ می‌باشند و k نیز حداقل ۱ و حداکثر ۱۰۰۰ می‌باشد.

در کنار دستورات فوق، این ماشین عجیب به سوال زیر هم پاسخ می‌دهد.

- آیا هنوز اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۸۰۱ام تا ۹۰۰ام برابر با ۰ و اعداد ذخیره شده در بیت‌های ۹۰۱ام تا ۱۰۰۰ام برابر با ۱ است؟

جواب ماشین به این سوال بله یا خیر خواهد بود.

سعید می خواهد در مورد عدد $x = ۸ \times M[۱] + ۴ \times M[۲] + ۲ \times M[۳] + M[۴]$ اطلاعاتی کسب کند. او دوست دارد این اطلاعات را با اجرای کمترین تعداد دستور و تنها یک بار سوال پرسیدن کسب کند. به او کمک کنید تا اطلاعات زیر را بدست اورد.

توجه: در هر قسمت ابتدا دستورات خود را نوشته و سپس آن را در چند سطر توضیح دهید. در هر قسمت باید از کمترین تعداد دستور ممکن استفاده کنید، اما نیازی به اثبات کمینه بودن تعداد دستورات نیست . دقت کنید در هر قسمت فقط یک‌بار می‌توانید سوال بپرسید.

الف) آیا x بزرگتر از ۵ است؟

ب) آیا x توانی از ۲ است؟ (دقت کنید که ۱ توانی از ۲ است).

پ) آیا x بر ۳ بخش‌پذیر است؟

مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۲: بازی .... ۲۵ امتیاز

به یک جدول $n \times n$ یک مربع لاتین می‌گوییم، هرگاه درهر یک از خانه‌های آن یکی از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ نوشته شده باشد و در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری نداشته باشیم. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰ است. $n!$ نفر روی یک مربع لاتین $n \times n$ دلخواه شروع به بازی می‌کنند. هر کس درنوبت خود می‌تواند جای دو سطر و یا دو ستون از جدول را با هم عوض کند. اولین کسی که حرکتی انجام بدهد که یک مربع لاتین تکراری ایجاد شود بازنده‌ی بازی است و بقیه افراد برنده می‌شوند. ثابت کنید $n! - ۱$ نفر اول می‌توانند با هم تبانی کنند تا نفر $n!$ام (آخرین نفری که حرکت اولش را انجام می‌دهد) بازنده شود.

مسئله‌ی ۳: تکرار رشته‌ها .... ۲۵ امتیاز

فرض کنید $w_۱, \ldots, w_n$ رشته‌هایی متمایز با حروف انگلیسی کوچک باشند که مجموع طول آن‌ها از Q تجاوز نمی‌کند. W را نیز یک رشته انگلیسی دلخواه با طول Q در نظر بگیرید.
عدد a_i (که $i = ۱, \ldots, n$ است) را برابر تعداد ظاهرشدن رشته w_i در W تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال، اگر $w_۱ = ab$، $w_۲ = aca$، $w_۳ = bb$ و $W = abcabbb$ باشند، آنگاه $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۰$ و $a_۳ = ۲$ خواهد بود.
ثابت کنید:

$$\min(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) \leq \frac{۲ \times Q \times \sqrt{Q}}{n}$$

مسئله‌ی ۴: رنگ‌آمیزی بازه‌ها .... ۳۰ امتیاز

فرض کنید $[x_۱, y_۱], [x_۲, y_۲], \cdots, [x_n, y_n]$، n بازه روی محور اعداد حقیقی باشند. می‌خواهیم این بازه‌ها را با تعدادی رنگ که هر رنگ با یک عدد طبیعی شناخته می‌شود، رنگ‌آمیزی کنیم.
در یک رنگ‌آمیزی، $f(x)$ را برابر بزرگترین رنگ بازه‌ها بین بازه‌هایی که شامل نقطه‌ی x می‌شوند، تعریف می‌کنیم. بدیهی است که $f(x)$ فقط برای نقاطی که حداقل درون یک بازه قرار دارند تعریف می‌شود. به یک رنگ‌آمیزی زیبا می‌گوییم، اگر برای هر نقطه مثل x روی محور اعداد حقیقی که حداقل درون یک بازه قرار دارد، دقیقا یک بازه با رنگ $f(x)$ شامل نقطه‌ی x شود.
ما در ابتدا همه‌ی بازه‌ها را در اختیار نداریم و بازه‌ها یکی یکی در اختیار ما قرار می‌گیرند. به محض آنکه یک بازه را دریافت کردیم باید یک رنگ به آن اختصاص دهیم و مجاز به تغییر آن در آینده نیستیم. از روش زیر برای رنگ‌آمیزی بازه‌ها استفاده می‌کنیم:

فرض کنید بازه v را دریافت کرده باشیم. رنگ‌های $۱, ۲, ۳, \ldots$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ امتحان می‌کنیم تا به اولین رنگی برسیم که اگر آن رنگ را به بازه‌ی v اختصاص بدهیم، رنگ‌آمیزی زیبا بماند. (با توجه به محدود بودن تعداد بازه‌ها، چنین رنگی حتما وجود دارد.) بازه‌ی v را با آن رنگ، رنگ می‌کنیم و به سراغ بازه‌ی بعد می‌رویم و تا آخرین بازه همین روند را انجام می‌دهیم.

الف) فرض کنید iامین بازه‌ای که دریافت می‌کنیم $[x_i, y_i]$ باشد و در ضمن بدانیم $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n$ و $y_۱ < y_۲ < \cdots < y_n$. نشان دهید بعد از دریافت n بازه، تعداد رنگ‌های استفاده شده، از $\log_۲ n + ۱$ تجاوز نمی‌کند.

ب) با فرض آنکه بازه‌ها دلخواه باشند و با یک ترتیب دلخواه بازه‌ها را دریافت کنیم، نشان دهید بعد از دریافت n بازه، تعداد رنگ‌های استفاده شده، از $۳\sqrt{n}$ تجاوز نمی‌کند.

مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۱: مرتب سازی .... ۲۰ امتیاز

دنباله A شامل $n^۲$ عدد طبیعی، داده شده‌است. می‌دانیم هر یک از اعداد ۱ تا n دقیقا n بار در این دنباله آمده‌اند. می‌خواهیم این دنباله را به صورت صعودی مرتب کنیم. در هر مرحله می‌توان n عضو این دنباله را انتخاب کرده و آن‌ها را به یک ترتیب دلخواه در مکان‌های قبلی‌شان نوشت. می‌خواهیم در کمترین تعداد مرحله، دنباله را مرتب کنیم. به عنوان مثال، دنباله زیر در ۲ مرحله مرتب می‌شود:

$$< ۱, ۱, \underline{۲}, \underline{۳}, ۲, ۳, ۲, ۳, \underline{۱} >\Rightarrow< ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, \underline{۳}, \underline{۲}, ۳, \underline{۳} >\Rightarrow< ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳ >$$

ثابت کنید هر دنباله دلخواه A را می‌توان در حداکثر $n + ۱$ مرحله مرتب کرد.

مسئله‌ی ۲: جاده‌ها .... ۲۵ امتیاز

کشور آتلانتیس دارای $۲n$ شهر است که هر دو شهر با یک جاده (خاکی یا آسفالت) مستقیم به یکدیگر متصل هستند. یک روز، وزارت راه این کشور که سابقه طولانی در اتخاذ تصمیم‌های عجیب و غریب دارد، تصمیم می‌گیرد تا شهرهای کشور را به دو استان (نه لزوماً با تعداد شهرهای برابر) تقسیم کند. این تصمیم باید طوری اجرایی شود که هر جاده میان دو شهر در یک استان، آسفالت باشد. برای انجام این هدف، وزارت راه در نظر دارد هر روز n جاده که هیچ دو جاده‌ای به یک شهر منتهی نیستند را انتخاب کرده و همه‌ی جاده‌های خاکیِ انتخاب شده را آسفالت و همه‌ی جاده‌های آسفالتِ انتخاب شده را خاکی کند. با فرض این که نوع جاده‌ها در روز آغازین دلخواه هستند، آیا وزارت راه موفق می‌شود کشور را به دو استان با شرایط گفته شده تقسیم کند؟

مسئله‌ی ۳: خرگوش نامرئی .... ۲۵ امتیاز

۱۳۹۱ سکو در یک ردیف قرار دارند و یک خرگوش نامرئی روی یکی از سکوها نشسته‌است. می‌خواهیم این خرگوش را شکار کنیم. در هر مرحله می‌توانیم به یکی از این سکوها شلیک کنیم. اگر خرگوش روی سکویی که به آن شلیک شده نشسته باشد، شکار می‌شود؛ در غیر این صورت به علت ترس از صدای تیراندازی، روی یکی از دو سکوی مجاورش (در صورت وجود) می‌پرد. روشی برای تیراندازی‌ها ارائه‌دهید که مطمئن باشیم بعد از حداکثر ۱۰۰۰۰ شلیک، خرگوش حتما شکار می‌شود.

مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۴: رایانه باستانی .... ۳۰ امتیاز

باستان‌شناسان در زمان حفاری شهر باستانی آتلانتیس به یک رایانه باستانی برخوردند که در عین سادگی دارای توانایی‌های بسیاری بود. بعد از انجام بررسی‌های اولیه مشخص شد که این رایانه برای انجام محاسبات، اعداد را به صورت نمایش در مبنای ۲ و در رشته‌های به طول ۳۲ از ارقام ۰ و ۱ نگهداری می‌کند. به هر یک از ارقام ۰ و ۱ در نمایش دودویی، یک بیت گفته می‌شود و بیت‌ها را از سمت راست به چپ با اعداد ۰ تا ۳۱ شماره‌گذاری می‌کنیم. به عنوان مثال این رایانه برای ذخیره عدد ۲۷ رشته زیر را نگهداری می‌کند:

00000000000000000000000000011011

برای نگهداری اعداد، این رایانه یک حافظه ۲۶ خانه‌ای دارد که در هر خانه می‌تواند یک عدد ۳۲ بیتی را ذخیره کند. این خانه‌ها با حروف a تا z نام‌گذاری می‌شوند. همچنین مشخص شده‌است این رایانه توانایی انجام عملیات‌های "و بیتی"، "یا بیتی"، "نقیض بیتی"، "شیفت بیتی به سمت راست"، جمع و ضرب را دارد.

برای نمایش راحت‌تر اعداد، هر عدد را به صورت یک عدد ۸ رقمی در مبنای ۱۶ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال عدد ۲۷ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم: (دقت کنید ارقام ۱۵ , ... ,۱۱ ,۱۰ در مبنای ۱۶ با $A, B, \ldots, F$ نمایش داده می‌شوند)

$0000001B$

هر دستور در این رایانه، یکی از عملیات‌های بالا را روی اعداد ثابت یا اعداد درون حافظه‌ها اجرا کرده و نتیجه را در یکی از خانه‌های حافظه ذخیره می‌کند. دستورهای این رایانه به شکل زیر استفاده می‌شوند:

دستور	عملکرد	توضیح
ADD a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل جمع b و c قرار می‌دهد	
MLT a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل ضرب b و c قرار می‌دهد	
AND a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل "و منطقی" b و c قرار می‌دهد	بیت iام در حافظه a در صورتی برابر ۱ می‌شود که بیت iام هم در b و هم در c برابر ۱ باشد
OR a, b, c	مقدار حافظه a را برابر حاصل "یا منطقی" b و c قرار می‌دهد	بیت iام در حافظه a در صورتی برابر ۱ می‌شود که بیت iام در حداقل یکی از b و c برابر ۱ باشد
SHR a, b, c	b را c واحد به سمت راست شیفت داده و در a ذخیره می کند.	مقدار a را برابر ۰۰۰۰۰۰$b_{۳۱}b_{۳۰}\ldots b_c$ قرار می دهد(مقدار b تغییر نمی‌کند)
NOT a, b	"نقیض منطقی" b را در a ذخیره می کند.	بیت iام در حافظه a در صورتی برابر ۱ می‌شود که بیت iام درb برابر ۰ باشد

هر برنامه در این کامپیوتر دنباله‌ای از دستورها است که به ترتیب اجرا می‌شوند. به عنوان مثال فرض کنید دو عدد در حافظه‌های a و b ذخیره شده‌اند. برنامه زیر مشخص می‌کند که حاصل جمع آن‌ها به ۲ بخش‌پذیر است یا نه (اگر بخش‌پذیر باشد عدد ۱ را در حافظه z ذخیره می‌کند و در غیر این صورت عدد ۰ را در حافظه z ذخیره می‌کند)

```
ADD c, a, b
AND d, c, 00000001
NOT e, d
AND z, e, 00000001
```

بعد از انجام تحقیقات مرحله دوم مشخص شد که این رایانه دارای یک دستور عجیب نیز هست که تعداد بیت‌های در اندیس‌های زوج یک عدد که دارای مقدار ۱ هستند را در یک خانه حافظه ذخیره می‌کند. برای استفاده از این دستور باید به شکل زیر عمل کرد:

```
CNT a, b
```

بعد از اجرای این دستور، تعداد بیت های ۱ در اندیس‌های زوج عدد در حافظه b(یا عدد ثابت b) در خانه حافظه a ذخیره می‌شود. به عنوان مثال بعد از اجرای برنامه زیر، عدد ۲ در متغیر z ذخیره می‌شود،زیرا بیت‌های $a.$ و $a_{۲}$ دارای مقدار ۱ خواهند بود :

```
ADD a, 00000002, 00000005
CNT z, a
```

توجه: *در هر قسمت ابتدا برنامه خود را نوشته و سپس آن را در چند سطر توضیح دهید.*

الف) برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از ۴ دستور، تعداد بیت‌های با مقدار ۱ عددی را که در حافظه a ذخیره شده است را در حافظه z ذخیره کند.

ب) اولین برنامه‌ای که برای این کامپیوتر کشف شد، برنامه‌ای بود که تعداد تکرارهای رشته ۰۱ را در نمایش دودویی عددی که در حافظه a ذخیره شده است، به شرطی که ۰ در یک اندیس فرد و ۱ در یک اندیس زوج آمده باشد را محاسبه و در حافظه z ذخیره می‌کرد. به عنوان مثال اگر عدد درون حافظه a برابر $DDABCDEF$ باشد، این مقدار برابر ۳ است.

$a = 11\underline{01}11\underline{01}10101011110011\underline{01}11101111$

برنامه‌ای با حداکثر ۴ دستور بنویسید تا این کار را انجام دهد. برای برنامه خود شیوه کارکرد آن را در چند سطر توضیح دهید.

پ) بعد از کشف برنامه قسمت قبل، محققان برنامه‌ای را پیدا کردند که عملکرد دستور CNT را شبیه‌سازی می‌کرد. اما متاسفانه یک عدد در دستور آخر برنامه قابل خواندن نبود. این برنامه به شکل زیر است:(می‌توانید فرض کنید عدد درون حافظه a برابر ۵۵۵۵۵۵۵۵ نیست)

```
AND b, a, 55555555
SHR c, b, 00000002
ADD d, b, c
AND e, d, 33333333
MLT f, e, 11111111
SHR z, f, ...
```

عدد مربوط به مکان خالی را کامل کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

- جواب درست به سؤال‌های **یک** تا**دوازده** ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره منفی دارد.
- جواب درست به سؤال‌های **سیزده** تا **هجده** ۶ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱/۵ نمره منفی دارد.

۱) کدام رقم، به عنوان سمت چپ‌ترین رقم نمایش دهدهی اعداد مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۴, ۸, \cdots, ۲^{۱۰۰}\}$ بیشتر ظاهر شده است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۱ و ۲ هـ) ۲ و ۴

۲) اعداد ۱ تا ۱۰ را دور دایره طوری قرار داده‌ایم که مجموع قدرمطلق اختلاف هر دو عدد مجاور بیشینه شده است. این مقدار بیشینه چند است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۵۴ ب) ۵۳ ج) ۵۲ د) ۵۱ هـ) ۵۰

۳) ۷ چراغ روشن روی یک ریسه خطی، پشت سر هم قرار دارند. آیدین و مرتضی به نوبت و تنها یک بار هر کدام یک چراغ از این ریسه را خاموش می‌کنند. پس از آن ارزش این ریسه که ۵ چراغ روشن دارد سنجیده می‌شود. ارزش ریسه به طور یکتا معلوم می‌شود و برابرست با حاصل‌ضرب طول تمام دسته‌های متوالی از چراغ‌های روشن. برای مثال اگر چراغ روشن را با ۱ و چراغ خاموش را با صفر نشان دهیم، ارزش ریسه‌ی ۱۱۰۰۱۱۱ برابر با ۶ و ارزش ریسه‌ی ۱۰۱۱۰۱۱ برابر با ۴ است. می‌دانیم آیدین دوست دارد ارزش ریسه نهایی تا حد امکان کم شود و مرتضی دوست دارد این ارزش زیاد بشود. اگر آیدین شروع کننده باشد و بهترین حرکتش را برای رسیدن به مقصودش انجام دهد، ارزش نهایی ریسه چند خواهد شد؟ اگر مرتضی شروع‌کننده باشد چه‌طور؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) آیدین ۴ و مرتضی ۶ ب)آیدین ۴ و مرتضی ۴ ج) آیدین ۵ و مرتضی ۵
د) آیدین ۶ و مرتضی ۴ هـ)آیدین ۵ و مرتضی ۴

۴) ماشین «بازپرور» یک رشته‌ی ارقام در مبنای دو را به‌عنوان ورودی گرفته و یک رشته‌ی جدید برمی‌گرداند. اگر رشته‌ی ورودی $S = s_۱s_۲\cdots s_n$ باشد، این ماشین با در نظر گرفتن یک رشته خروجی تهی در ابتدا، از چپ به راست بیت‌های S را می‌خواند، سپس به ازای هر بیت که یک باشد خود S و به ازای هر بیت که صفر باشد نقیض S را به رشته خروجی می‌چسباند. منظور از نقیض یک رشته، رشته‌ای با همان طول است که هر بیت صفر آن به یک و هر بیت یک آن صفر شده باشد. برای مثال اگر به این ماشین رشته‌ی ۱۰۱۱ را بدهیم، رشته‌ی خروجی ۱۰۱۱۰۱۰۰۱۰۱۱۱۰۱۱ خواهد بود. واضح است که اگر طول رشته ورودی n باشد، طول رشته خروجی $n^۲$ خواهد بود.

رشته سه بیتی $A = a_۱a_۲a_۳$ را طلایی گوییم، اگر با شروع از یکی از اعضای مجموعه $\{۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱\}$ و استفاده مکرر از دستگاه بازپرور بتوان به رشته‌ای مانند $B = b_۱b_۲\cdots b_m$ رسید که رشته‌ی A زیررشته آن باشد. رشته‌ی A زیررشته B است، اگر اندیسی مانند i وجود داشته باشد که $i \le m - ۲$ و $b_i = a_۱$، $b_{i+۱} = a_۲$ و $b_{i+۲} = a_۳$. برای مثال رشته ۱۰۰ طلایی است چرا که با شروع از ۱۰ و یک بار استفاده از دستگاه به رشته ۱۰۰۱ می‌رسیم که رشته ۱۰۰ زیررشته‌ی آن است. چند تا از رشته‌های مجموعه‌ی $\{۱۱۱, ۰۰۰, ۰۱۰, ۱۰۱\}$ طلایی هستند؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۵) امروز تولد حسام است. پدر حسام برنامه زیر را نوشته و آن را به حسام داده است:

```
۱. جایگشت $\langle a_۱, a_۲, \cdots, a_{۱۰} \rangle$ از اعداد ۱ تا ۱۰ را از ورودی بگیر.
۲. مقدار $S$ را برابر صفر قرار بده.
۳. برای $i$ از ۱ تا ۸ کارهای زیر را انجام بده.
    ۱.۳. مقدار $C$ را برابر $a_i$ قرار بده.
    ۲.۳. در صورتی‌که مقدار $a_{i+۱}$ از $C$ بیشتر است، مقدار $C$ را برابر $a_{i+۱}$ قرار بده.
    ۳.۳. در صورتی‌که مقدار $a_{i+۲}$ از $C$ بیشتر است، مقدار $C$ را برابر $a_{i+۲}$ قرار بده.
    ۴.۳. مقدار $C$ را به مقدار کنونی $S$ اضافه کن و حاصل را در همان $S$ بریز.
۴. مقدار $S$ را به‌عنوان خروجی برگردان.
```

پدر حسام به وی گفته است که تنها یک بار می‌تواند یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ را به این برنامه بدهد و خروجی هر چند شد، حسام آن مقدار سکه از پدرش جایزه می‌گیرد. برای مثال اگر حسام جایگشت $\langle ۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \rangle$ را به‌عنوان ورودی به این برنامه بدهد، پدرش به او ۵۲ سکه به‌عنوان کادوی تولد می‌دهد. حداکثر تعداد سکه‌هایی که حسام می‌تواند با دادن بهترین ورودی از پدرش بگیرد چند تاست؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف)۶۴ ب) ۶۸ ج) ۷۳ د) ۸۱ ه) ۸۸

۶) دنباله $\langle ۱, ۴, ۸, ۴۳, ۲۱, ۳۳, ۱۷, ۵۲, ۴۲, ۵۲, ۴۲, ۷, ۸, ۲۲, ۱۵ \rangle$ از اعداد طبیعی داده شده است. به ازای هر تعداد متوالی از این اعداد، باقیمانده‌ی مجموع آن اعداد بر ۳ را روی یک کاغذ یادداشت می‌کنیم. چند عدد صفر روی کاغذ نوشته‌ایم؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۳۳ ب) ۳۴ ج) ۳۶ د) ۳۸ ه) ۴۰

۷) افراز عدد m به n عدد طبیعی، نوشتن عدد m به شکل $\langle a_۱, a_۲, \cdots, a_n \rangle$ با شرایط زیر است:

- $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = m$
- $۱ \leq a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_n$

افراز $\langle a_۱, a_۲, \cdots, a_n \rangle$ از افراز $\langle b_۱, b_۲, \cdots, b_n \rangle$ کوچک‌تر است، اگر به ازای یک اندیس i که $۱ \leq i \leq n$ داشته باشیم:

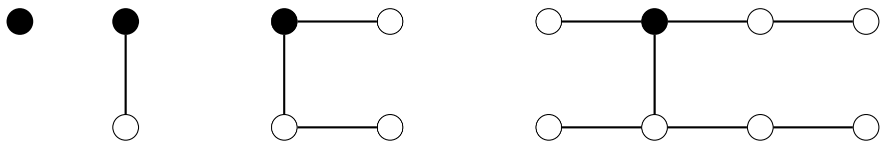
- مقدار a_i از b_i کوچک‌تر باشد.
- برای تمام اندیس‌های j کمتر از i مقدارهای a_j و b_j برابر باشند.

تمام افرازهای عدد ۲۰ به ۷ قسمت را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. در این صورت اولین افراز $\langle ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱۴ \rangle$ و آخرین افراز $\langle ۲, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳ \rangle$ است. اگر افراز بعد از $\langle ۱, ۲, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴ \rangle$ افراز $\langle c_۱, c_۲, \cdots, c_۷ \rangle$ باشد، مقدار $c_۱ - c_۳ + c_۵ - c_۷$ کدام است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱− ب) ۲− ج) ۳− د) ۴− ه) ۵−

مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

۸) تلسکوپ فضایی هابل عصر روز اول فروردین ماه سال ۱۳۹۰ حضور یک موجود فضایی تنها از نوع موسوم به گولولی را روی کره ماه گزارش کرده است. دانشمندان می‌دانند که این موجود هر روز ظهر یک نمونه کاملاً مشابه با خودش می‌سازد. سپس با یک طناب از جنس سیلیکات کربن (که در کره ماه یافت می‌شود)، خودش را به موجود جدید وصل می‌کند! با این وصف دانشمندان انتظار دارند که در عصر هر یک از روزهای اول تا چهارم فروردین ماه شکلی شبیه زیر از گولولی‌ها روی کره ماه مشاهده کنند. گولولی‌ها با دایره و طناب‌های سیلیکات کربن با خط مشخص شده‌اند. گولولی اوّل تیره رسم شده است.



فاصله هر گولولی از گولولی اوّلیه برابر با تعداد طناب‌های سیلیکات کربن بین کوتاه‌ترین مسیر گوگولیایی موجود بین آن دو است. در پایان روز سیزدهم فروردین مجموع فواصل تمام گولولی‌های موجود از گولولی اوّلیه چند است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱۳۲
ب) ۱۵۶
ج)۸۱۹۲
د) ۲۴۵۷۶
ه) ۲۶۶۲۴

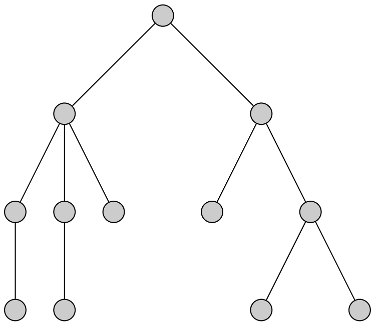
۹) ۱۰ جعبه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ داریم که در مجموع ۳۰ توپ در آن‌ها قرار دارند. وضعیت هر لحظه جعبه‌ها را با $\langle a_۱, a_۲, \cdots, a_{۱۰} \rangle$ نشان می‌دهیم که a_i تعداد توپ‌های جعبه‌ی i است. در هر گام یک اندیس i بین ۱ تا ۱۰ انتخاب می‌کنیم و در صورت وجود جعبه a_i، تمام توپ‌های جعبه i را به جعبه a_i منتقل کنیم. یک گام مجاز است اگر با انجام آن تعداد توپ‌های داخل جعبه‌ها تغییر کند. با شروع از چند تا از آرایش‌های اولیه زیر می‌توان ۵۰ گام مجاز انجام داد؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

$\langle ۳, ۷, ۲, ۱, ۵, ۵, ۶, ۰, ۰, ۱ \rangle$ $\quad$ $\langle ۶, ۵, ۲, ۳, ۱, ۱, ۴, ۰, ۰, ۸ \rangle$

$\langle ۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۱, ۵, ۴, ۴, ۵ \rangle$ $\quad$ $\langle ۰, ۲, ۳, ۲, ۳, ۴, ۶, ۵, ۳, ۲ \rangle$

الف) ۰
ب) ۱
ج) ۲
د) ۳
ه) ۴

۱۰) گراف G در شکل داده شده است. هدف این است که از یک رأس دلخواه شروع به حرکت کنیم و تمام رأس‌ها را حداقل یک بار ملاقات کنیم. در هر گام می‌توان از رأس فعلی به یکی از رئوس مجاور آن رفت. حداقل چند گام برای دستیابی به هدف مورد نظر لازم است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)



الف) ۱۴
ب) ۱۵
ج) ۱۶
د) ۱۷
ه) ۱۸

۱۱) خیکوله می‌خواهد یک دستگاه خودپرداز بسازد. برای این کار او ۵ ماشین پرداخت کننده با شماره‌های ۱ تا ۵ خریده است. ماشین i اُم یک منبع ذخیره‌ی سکه دارد که در آن می‌توان به تعداد i سکه با ارزش یکسان گذاشت. روی ماشین i اُم تعداد i دکمه با شماره‌های ۱ تا i وجود دارد. با زدن دکمه‌ی شماره j یک ماشین، آن ماشین j سکه از منبعش می‌دهد.

خیکوله می‌تواند سکه با هر ارزشی بسازد. او می‌تواند روی هر ماشین به تعداد دلخواه سکه بگذارد با این شرط که ارزش تمام سکه‌های روی یک ماشین یکسان باشند. برای پرداخت ارزش مشخصی از سکه‌ها از هر ماشین حداکثر یک بار می‌توان استفاده کرد. برای مثال فرض کنید که در ماشین اول تا سوم سکه‌هایی با ارزش ۱ تومان و در ماشین‌های چهارم و پنجم سکه‌هایی با ارزش ۱۰ تومان داریم. در این صورت:

- برای پرداخت ۷ تومان روشی وجود ندارد.
- برای پرداخت ۱۳ تومان می‌توان دکمه‌ی ۳ از ماشین سوم و دکمه‌ی ۱ از ماشین چهارم را فشار داد.

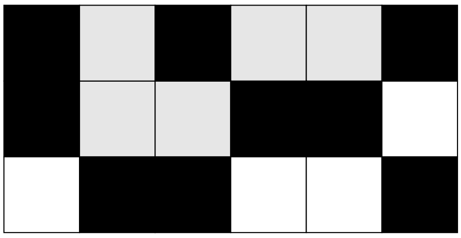
فرض کنید S کوچکترین عدد طبیعی باشد که با استفاده از دستگاه خودپرداز خیکوله، روشی برای پرداخت آن وجود ندارد. خیکوله می‌خواهد ارزش سکه‌های هر یک از ماشین‌های پرداخت کننده را طوری تعیین کند که مقدار S بیشینه شود. بیشینه مقدار S چند است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۶۴ ب) ۱۲۰ ج) ۱۲۸ د) ۷۲۰ ه) ۱۰۲۴

۱۲) جدول مقابل شامل ۹ زوج خانه می‌باشد که با حروف مشابه (به‌عنوان مثال $A_۱$ و $A_۲$) مشخص شده‌اند. از هر زوج خانه دقیقاً یکی را سیاه می‌کنیم تا در پایان ۹ خانه از ۱۸ خانه سیاه باشند.

$A_۱$	$A_۲$	$D_۱$	$D_۲$	$G_۱$	$G_۲$
$B_۱$	$B_۲$	$E_۱$	$E_۲$	$H_۱$	$H_۲$
$C_۱$	$C_۲$	$F_۱$	$F_۲$	$I_۱$	$I_۲$

از بالای جدول یک جریان آب به سمت پایین سرازیر می‌شود. می‌دانیم آب هیچ‌گاه سر بالا نمی‌رود. در حقیقت آب از هر بلوک سفید به تمام بلوک‌های سفید مجاورش (که حداقل یک ضلع مجاور دارند و بالای بلوک فعلی نیستند) جریان می‌یابد. به چند طریق می‌توانیم رنگ‌آمیزی را انجام دهیم که آب به پایین جدول نرسد؟ یکی از این روش‌ها و هم‌چنین سطح دسترسی یافته توسط آب در شکل مقابل نمایش داده شده است. (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)



الف) ۱۹۲ ب) ۱۸۴ ج) ۲۱۶ د) ۲۰۲ ه) ۲۰۴

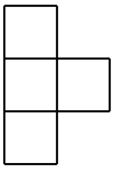
۱۳) ۵۰ نقطه روی یک خط قرار دارند. می‌خواهیم هر نقطه را با یکی از رنگ‌های ۱ تا k طوری رنگ کنیم که به ازای هر تعداد نقطه متوالی دلخواه، حداقل یک رنگ وجود داشته باشد که دقیقاً یک بار در بین این نقاط ظاهر شده است. حداقل مقدار k چند است؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

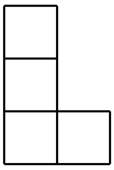
الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

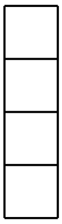
۱۴) یک جدول ۴ × ۴ داریم. مرتضی و مصطفی یکی در میان و با شروع از مرتضی خانه‌های جدول را علامت می زنند. مرتضی در نوبت خود در یک خانه خالی از جدول X قرار می‌دهد و مصطفی در نوبت خود در یک خانه خالی از جدول O قرار می‌دهد. مرتضی و مصطفی با هم چهار بازی مختلف انجام می‌دهند. بازی i برای $۱ \leq i \leq ۴$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

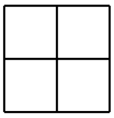
- بازی i: مرتضی می‌خواهد شکل i و یا شکل‌های مشابه، حاصل از دوران و تقارن این شکل را با X بسازد و مصطفی می‌خواهد جلوی او را بگیرد.

در چند بازی مرتضی برنده می‌شود؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)


شکل ۱


شکل ۲


شکل ۳


شکل ۴

الف) ۰
ب) ۱
ج) ۲
د) ۳
ه) ۴

۱۵) برنامه زیر را در نظر بگیرید:

۱. مقدار X را از ورودی بگیر.
۲. مقدار S را برابر صفر قرار بده.
۳. مقدار C را برابر صفر قرار بده.
۴. مقدار Y را برابر مقدار X قرار بده.
۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم Y بر دو را در B و خارج قسمت آن را در خود Y بریز.
۶. مقدار S را برابر با $S + (C + ۱) \times B$ قرار بده.
۷. مقدار C را برابر با $C - ۱$ قرار بده.
۸. اگر Y بزرگتر از صفر بود به خط ۵ برو.
۹. اگر S برابر با X بود مقدار S را به‌عنوان خروجی برگردان و به برنامه خاتمه بده.
۱۰. مقدار X را برابر با S قرار بده.
۱۱. به خط ۲ برو.

به ازای چند تا از اعضای مجموعه‌ی $\{۱۳۹۰, ۱۳۹۱, ۱۳۹۲, \ldots, ۱۴۸۸\}$ اگر آن عدد را به‌عنوان ورودی به این برنامه بدهیم، برنامه خاتمه یافته و خروجی برابر با ۱ خواهد بود؟

(۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۰
ب) ۹۹
ج) ۲۵
د) ۵۰
ه) ۳۳

۱۶) هشت وزنه در اختیار داریم که وزن هیچ یک از آن‌ها را نمی‌دانیم. در عوض می‌دانیم که وزن هریک از وزنه‌ها یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۸, ۳۰, ۴۵\}$ است و هم‌چنین وزن هیچ دو وزنه‌ای برابر نیست. یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. در هر بار استفاده از آن می‌توانیم تعدادی وزنه را در کفه‌ی سمت چپ و تعدادی وزنه را در کفه‌ی سمت راست ترازو قرار دهیم و وزن آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. دقت کنید که در هر مقایسه میزان سنگین‌تر بودن یک کفه را نمی‌توان فهمید. بلکه در هر مقایسه فقط می‌توان فهمید که وزنه‌های موجود در کدام کفه سنگین‌تر است و یا وزنه‌ها موجود در دو کفه وزن یکسان دارند. حداقل چند بار از ترازو استفاده کنیم، تا وزن حداقل یکی از وزنه‌ها را بدست آوریم؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۷

۱۷) دستگاه «عجیب» به عنوان ورودی زوج مرتب $\langle a, , b\rangle$ را می‌گیرد و یکی از شش زوج مرتب $\langle a, a+b\rangle$، $\langle a, ۲a\rangle$، $\langle a, ۲b\rangle$، $\langle a+b, b\rangle$، $\langle ۲a, b\rangle$ یا $\langle ۲b, b\rangle$ را تولید می‌کند. زوج مرتب $\langle x, y\rangle$ را قابل تولید گوییم اگر با شروع از $\langle ۱, ۱\rangle$ و به تعداد دلخواه استفاده از دستگاه، بتوان زوج مرتب $\langle x, y\rangle$ را تولید کرد. چند زوج مرتب $\langle x, x\rangle$ با $۱ \leq x \leq ۱۰۰$ قابل تولید هستند؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۹۹ ب) ۵۱ ج) ۴۲ د) ۱۴ ه) ۷

۱۸) امروز تولد آیدا، یکی از ساکنین کشور سه‌سوسا است. در این کشور عدد سه بسیار باارزش تلقی می‌شود. طبق یک رسم دوستانه قدیمی، دوستانش قرارست برای او بسته‌های حاوی کلوچه کادو بیاورند. میدانیم شکل ظاهری کلوچه‌های موجود در یک بسته کاملاً شبیه هم است اما وزن آن‌ها ممکن‌ست با هم متفاوت باشند. هم‌چنین وزن کلوچه‌ها یک عدد طبیعی است.

یک آئین قدیمی می‌گوید که اگر فرد A به‌عنوان کادوی تولد برای فرد B یک بسته حاوی k عدد کلوچه بیاورد و مجموع وزن این k کلوچه مضربی از ۳ گرم باشد، آنگاه A یک «دوست واقعی» B است! برای تشخیص دوستان واقعی، آیدا به بازار می‌رود تا ترازو بخرد. او متوجه می‌شود که ترازوهای موجود در بازار همگی یک کفه‌ای هستند و به‌جای عقربه یا صفحه دیجیتال، تنها فقط یک چراغ دارند که در صورتی که مجموع وزن اشیاء روی کفه ترازو مضربی از ۳ گرم باشد، چراغ روشن می شود! علاوه بر این، ترازوهای موجود دارای محدودیت جالبی در حجم کفه هستند. به این معنی که در بازار ترازوهای مدل $W_۱$، مدل $W_۲$، مدل $W_۳$ و مدل $W_۴$ وجود دارند که ترازوی مدل W_i تنها در صورتی کار می‌کند که روی آن دقیقاً i تا کلوچه (و نه کمتر یا بیشتر) قرار بگیرد.

متأسفانه آیدا نمی‌داند که هر یک از دوستانش ممکن‌ست چند تا کلوچه برایش بیاورند. و برای همین باید با خرید یک یا چند ترازو و چندین بار استفاده از آن‌ها، بتواند مضرب ۳ بودن مجموع هر بسته کلوچه را تشخیص دهد. یک مجموعه از ترازوها را کامل می‌گوییم اگر بتوانیم با کمک ترازوهای موجود در آن مجموعه، برای هر بسته کلوچه حاوی بیش از ۳ کلوچه، با کمک آن ترازوها و استفاده از قدرت تحلیل و استدلال تشخیص بدهیم که مجموع وزن این بسته کلوچه بر ۳ بخش‌پذیر است یا نه؟ از بین مجموعه‌های $\{W_۱, W_۲\}$، $\{W_۱, W_۳\}$، $\{W_۲, W_۳\}$ و $\{W_۱, W_۴\}$ چند تایشان کامل هستند؟

(۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۱: تبدیل دودویی .... ۱۵ امتیاز

ماشین مبدل دودویی یک عدد دودویی با n رقم را از ورودی می‌گیرد و با فشار دادن یکی از دو دکمه‌ی آن، یکی از دو تبدیل زیر را روی عدد ورودی انجام می‌دهد.

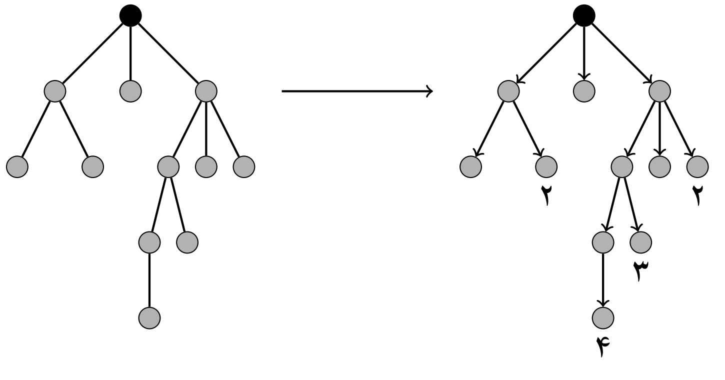
۱. دکمه یک: سمت راست‌ترین رقم را از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد.

۲. دکمه دو: سمت راست‌ترین رقم ۱ را پیدا می‌کند و رقم سمت چپ آن را از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد. دقت کنید در صورتی که سمت راست‌ترین ۱ در سمت چپ‌ترین مکان باشد یا رشته تمام ۰ باشد، تغییری انجام نمی‌دهد.

برای مثال با استفاده از ماشین مبدل دودویی می‌توان عدد ۰۰۱۰۰۱ را به ۰۱۱۰۰۱ تبدیل کرد. روش تبدیل به این صورت است که ابتدا دکمه یک، سپس دکمه دو و در انتها دکمه یک را فشار می‌دهیم. ثابت کنید با استفاده از ماشین مبدل دودویی می‌توان هر عدد دودویی با n رقم را به هر عدد دودویی با n رقم تبدیل کرد.

مسئله‌ی ۲: پاک کردن درخت .... ۲۰ امتیاز

گراف همبند و بدون دور را درخت گویند. درخت T را از رأس r به این صورت ریشه‌دار می‌کنیم که درخت را از رأس r آویزان می‌کنیم و تمام یال‌ها را از بالا به پایین جهت‌دار می‌کنیم. به بیانی دیگر یال‌های درخت را به این صورت جهت‌دار می‌کنیم که تمام یال‌های متصل به r را از r به سمت بیرون جهت می‌دهیم، و بقیه یال‌ها را طوری جهت‌دهی می‌کنیم که تعداد یال‌های وارد شده به هر رأس به غیر از r برابر ۱ شود. دقت کنید که در این صورت تعداد یال‌های وارد شده به r برابر صفر است. فاصله ریشه تا رأس دلخواه i، برابر تعداد یال‌هایی است که برای رسیدن از ریشه به رأس i طی می‌کنیم. برای مثال درخت شکل زیر را از رأس سیاه رنگ ریشه‌دار کرده‌ایم. هم‌چنین فاصله بعضی از رأس‌ها تا ریشه در شکل نشان داده شده است.

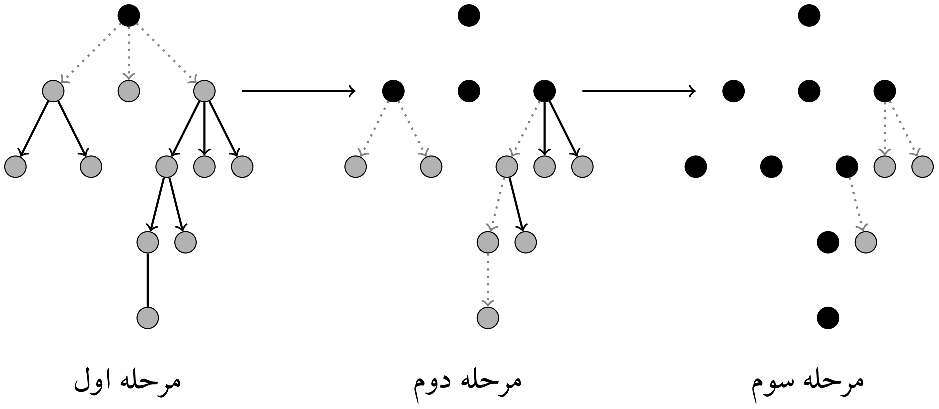


مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

هدف پاک کردن یال‌های یک درخت ریشه‌دار در کمترین تعداد مرحله است. در هر مرحله مجاز به انجام یکی از دو عملیات زیر برای هر درخت ریشه‌دار باقی‌مانده هستیم:

- عملیات اول: تمام یال‌های متصل به ریشه را پاک کن.
- عملیات دوم: یکی از رأس‌هایی که بیشترین فاصله را تا ریشه دارند مانند i انتخاب کن. از ریشه و از روی یال‌ها و در جهت یال‌ها به سمت i حرکت کن و یال‌هایی که از آن‌ها عبور کرده‌ای را پاک کن.

در حقیقت در هر مرحله می‌توان بر روی هر درخت ریشه‌دار باقی‌مانده، هر یک از عملیات اول یا دوم را انجام داد. دقت کنید که با پاک شدن یال‌ها، هر درخت ریشه‌دار به یک یا چند درخت ریشه‌دار تبدیل می‌شود. برای مثال در شکل تمام یال‌های درخت اولیه در ۳ مرحله پاک شده‌اند. در این شکل ریشه‌ی درخت‌ها با رنگ سیاه نشان داده شده‌اند. دقت کنید که بعد از مرحله‌ی اول درخت ریشه‌دار اولیه با ۱۲ رأس، به ۴ درخت ریشه‌دار با ۳، ۱، ۱ و ۷ رأس تبدیل شده است.



الف) یک درخت ریشه‌دار با ۱۰۰ رأس داده شده است. روشی ارائه دهید که در ۱۴ مرحله تمام یال‌های آن را پاک کند.

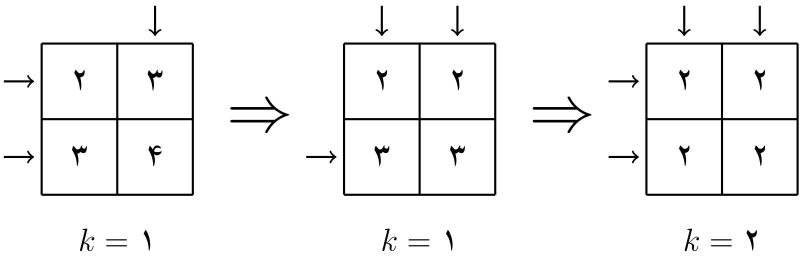
ب) یک درخت ریشه‌دار با ۱۰۰ رأس مثال بزنید که در کمتر از ۱۰ مرحله نتوان تمام یال‌های آن را پاک کرد.

مسئله‌ی ۳: جدول جادویی .... ۲۵ امتیاز

جدول جادویی $n \times n$ جدولی است که برای هر i و j که $۱ \le i \le n$ و $۱ \le j \le n$، در خانه‌ی (i, j) آن عدد $i + j$ نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان این جدول را به صورت زیر تغییر داد.

- در هر مرحله یک زیرمجموعه از سطرها مانند S، یک زیر مجموعه از ستون‌ها مانند T و یک عدد $k > ۰$ انتخاب می‌کنیم. سپس عدد تمام خانه‌های (i, j) که $i \in S$ و $j \in T$ را k واحد کم می‌کنیم.

در مثال زیر تمام اعداد یک جدول جادویی ۲×۲ در سه مرحله صفر شده‌اند. زیر مجموعه‌های S و T توسط پیکان در شکل نشان داده شده‌اند.



الف) روشی ارائه دهید که در ۱۵ مرحله تمام اعداد یک جدول جادویی ۱۰۰×۱۰۰ را صفر کند.

ب) ثابت کنید در کمتر از ۱۴ مرحله نمی‌توان تمام اعداد یک جدول جادویی ۱۰۰×۱۰۰ را صفر کرد.

مسئله‌ی ۴: مرتب ساز .... ۲۰ امتیاز

تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\pi = \langle \pi_۱, \pi_۲, \cdots, \pi_n \rangle$ به طول n برابر تعداد اندیس‌های i و j است که $i < j$ و $\pi_i > \pi_j$. برای مثال تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\langle ۱, ۳, ۴, ۲ \rangle$ برابر ۲ و تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\langle ۳, ۲, ۴, ۱ \rangle$ برابر ۴ است. تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت π را با $f(\pi)$ نشان می‌دهیم.

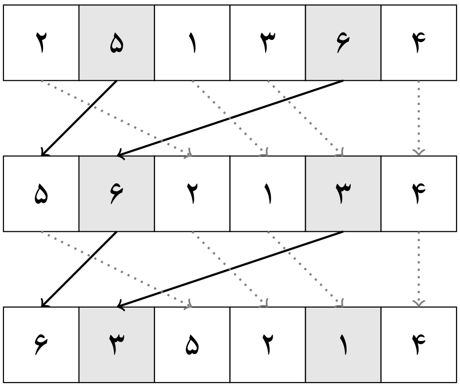
۱۰۰ کارت داریم که پشت هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده است. به بیان دیگر اعداد نوشته شده پشت کارت‌ها تشکیل یک جایگشت می‌دهند. هم‌چنین یک ماشین با ۱۰۰ جایگاه مخصوص کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ در اختیار داریم. کارت‌ها را با ترتیب دلخواه در این ۱۰۰ جایگاه طوری قرار می‌دهیم که در هر جایگاه دقیقاً یک کارت قرار گیرد. کارت‌ها طوری قرار داده شده‌اند که عدد نوشته شده پشت آن‌ها را نمی‌بینیم. دقت کنید که هر وضعیت قرار گرفتن کارت‌ها در ماشین مشخص کننده‌ی یک جایگشت π است. جایگشت π به این صورت مشخص می‌شود که عدد نوشته شده بر روی کارت موجود در جایگاه i ماشین نشان‌دهنده‌ی π_i است. وضعیت ایده‌آل وضعیتی است که کارت با عدد i در جایگاه با شماره i قرار گیرد. هدف رسیدن به وضعیت ایده‌آل است. برای رسیدن به این هدف می‌توان در هر مرحله به صورت زیر عمل کرد:

- دو عدد i و j را به ماشین می‌دهیم. فرض کنید وضعیت فعلی ماشین مشخص کننده‌ی جایگشت π است. ماشین کارت‌های موجود در جایگاه i و j را با هم جابجا می‌کند. فرض کنید وضعیت ماشین در حالت جدید مشخص کننده‌ی جایگشت π' است. ماشین علاوه بر جابجایی کارت‌های موجود در جایگاه i و j مقدار $f(\pi') - f(\pi)$ را نیز در خروجی نشان می‌دهد.

روشی ارائه دهید که برای هر گونه وضعیت اولیه قرار گرفتن کارت‌ها در ماشین، آن‌ها را در ۱۹۸ مرحله به وضعیت ایده‌آل تبدیل کند.

مسئله‌ی ۵: ماشین درهم ساز .... ۲۰ امتیاز

n کارت روی n خانه‌ی متوالی قرار گرفته‌اند. بر روی کارت‌ها جایگشت π از اعداد ۱ تا n نوشته شده است. ابتدا عدد دلخواه k را انتخاب می‌کنیم و k تا از خانه‌ها را علامت می‌زنیم. سپس در هر مرحله کارت‌های خانه‌های علامت خورده، با حفظ ترتیب، برداشته شده و به k خانه‌ی ابتدایی منتقل می‌شوند. $n-k$ کارت دیگر نیز با حفظ ترتیب در $n-k$ خانه‌ی انتهایی قرار داده خواهند شد. مثالی از انجام این حرکت در دو مرحله در زیر آمده است. در این مثال خانه‌های علامت زده شده با رنگ تیره مشخص شده‌اند.



الف) آیا به ازای هر انتخاب اولیه‌ی خانه‌های علامت‌دار، اتفاق زیر برای هر جایگشت π رخ می‌دهد؟

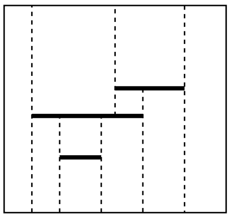
«با تکرار این حرکت هر جایگشت اولیه π برای اعداد کارت‌ها، به خود آن جایگشت تبدیل شود.»

ب) آیا انتخاب اولیه‌ای برای خانه‌های علامت‌دار وجود دارد که، اتفاق زیر برای هر جایگشت π رخ دهد؟

«با تکرار این حرکت هر جایگشت اولیه π برای اعداد کارت‌ها، به جایگشت صعودی مرتب شده‌ی ۱ تا n تبدیل شود.»

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)



۱) یک مربع بزرگ را در نظر بگیرید. در داخل آن ۱۳۸۹ پاره‌خط افقی رسم می‌کنیم به‌طوری‌که پاره‌خط‌ها هیچ تقاطع یا تماسی با یکدیگر یا با حاشیه‌ی مربع نداشته باشند. از دو سر هر پاره‌خط یک خط عمودی رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم به‌طوری‌که از بالا و پایین به دو پاره‌خط دیگر یا اضلاع افقی مربع برسد. حداکثر تعداد مستطیل‌های مجزا از هم در شکل حاصل چند تاست؟ (مثلاً در شکل مقابل ۱۰ مستطیل مجزا وجود دارد).

الف) ۵۵۵۶ ب) ۲۷۸۰ ج) ۵۵۵۸ د) ۴۱۶۸ ه) ۵۵۵۷

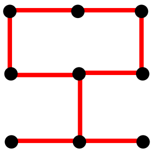
۲) ۲۰۱۰ عدد طبیعی دل‌خواه (نه لزوما متمایز) کوچک‌تر از $۲^{۱۳۸۹}$ را جمع می‌زنیم و حاصل‌جمع را در مبنای دو نمایش می‌دهیم. حداکثر تعداد یک‌های حاصل‌جمع این اعداد در مبنای ۲ چندتا می‌تواند باشد؟

الف) ۱۳۸۹ ب) ۲۰۱۰ ج) ۱۳۹۹ د) ۱۳۹۶ ه) ۱۳۹۷

۳) یک مکعب ۳ × ۳ × ۳ داریم که شامل ۲۷ خانه‌ی واحد (۱ × ۱ × ۱) سفید رنگ است. می‌خواهیم کم‌ترین تعداد خانه‌ی واحد را سیاه کنیم، طوری که هیچ مکعب مستطیل ۱ × ۲ × ۲ (و دوران‌های آن) وجود نداشته باشد که همه‌ی خانه‌های آن سفید باشد. کم‌ترین تعداد خانه‌های سیاه لازم چند است؟

الف) ۱۲ ب) ۸ ج) ۶ د) ۷ ه) ۹

۴) در یک شبکه‌ی ۳ × ۳ نقطه‌ای، بین هر دو نقطه‌ی مجاور می‌توان یک پاره خط به طول ۱ رسم‌کرد (حداکثر ۱۲ پاره‌خط). یک زیرمجموعه از ۱۲ پاره‌خط را «اشباع‌شده» می‌نامیم اگر:



۱) با رسم پاره‌خط‌های این زیرمجموعه هیچ مربع واحدی (۱ × ۱) ایجاد نشود، و همچنین

۲) اگر هر پاره‌خطی که در این زیرمجموعه نیست را اضافه کنیم، حداقل یک مربع ۱ × ۱ به وجود آید.

تعداد زیرمجموعه‌های مختلف اشباع‌شده چند تاست؟ یکی از آن‌ها در شکل دیده می‌شود.

الف) ۵۰ ب) ۳۸ ج) ۳۴ د) ۴۲ ه) ۴۶

۵) ۲۰ سکه‌ی طلا با شماره‌های ۱ تا ۲۰ داده شده که تعدادی از آن‌ها اصل و بقیه بدلی هستند ولی به لحاظ ظاهری کاملا مشابه‌اند. یک دستگاه در اختیار داریم که ۳ سکه را می‌گیرد و آن‌ها را در دو خروجی خود قرار می‌دهد، به‌طوری‌که سکه‌های اصل در یک خروجی و سکه‌های بدلی در خروجی دیگر قرار گیرند. دقت کنید که لزومی ندارد این دستگاه همیشه سکه‌های اصل را در یک خروجی مشخص قرار دهد.

حداقل با چند بار استفاده از دستگاه می‌توان همواره همه‌ی سکه‌ها را برحسب نوع‌شان به دو دسته تقسیم کرد؟ توجه کنید که لازم نیست نوع هر دسته را بدانیم.

الف) ۷ ب) ۹ ج) ۱۱ د) ۸ ه) ۱۰

مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

۶) علی یک سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کند تا نتیجه‌ی دو پرتاب متوالی، مثل هم بیاید (هردو رو یا هردو پشت). چقدر احتمال دارد که علی بیش از ۴ بار سکه را پرتاب کند؟

الف) $\frac{۱}{۸}$ ب) $\frac{۱}{۳۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۱}{۱۶}$ هـ) $\frac{۱}{۴}$

۷) حداکثر چند مربع ۳ × ۳ را که تمام گوشه‌های آن‌ها مختصات صحیح دارد می‌توان در صفحه‌ی مختصات رسم کرد به‌طوری که هر جفت از آن‌ها حداقل در یک مربع ۱ × ۱ مشترک باشد؟ دقت کنید هیچ دو مربعی نمی‌توانند بر یکدیگر منطبق باشند.

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۹ د) ۱۵ هـ) ۱۶

۸) n سکه دور یک دایره با فواصل مساوی چیده شده اند و در ابتدای کار همه‌ی آنها به رو هستند. به‌ازای هر $i \in \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ دقیقاً یک‌بار i سکه‌ی متوالی دل‌خواه را انتخاب می‌کنیم و همه‌ی آن ها را برمی‌گردانیم. مقدار n برابر کدام یک از گزینه‌های زیر باشد تا بتوان این n مرحله را طوری انجام داد که بعد از پایان کار، همه‌ی سکه‌ها در وضعیت اولیه (به‌رو) باشند؟

الف) ۲۰۰۹ ب) ۱۳۹۱ ج) ۲۰۱۰ د) ۱۳۸۹ هـ) ۱۳۹۰

۹) ۳ کلید دو وضعیته روی دیوار یک اتاق نصب هستند. هر کلید در هر لحظه در یکی از دو وضعیت ۱ یا ۲ قرار دارد. این وضعیت داخلی است و ما آن را نمی‌دانیم؛ اما می‌توانیم با یک بار فشردن هر کلید، آن را تغییر وضعیت دهیم.

از سقف این اتاق نیز یک لامپ آویزان شده است که در ابتدا خاموش است. می‌دانیم لامپ تنها زمانی روشن می‌شود که وضعیت داخلی هر سه کلید یکسان باشد (همه در وضعیت ۱ یا همه در وضعیت ۲).

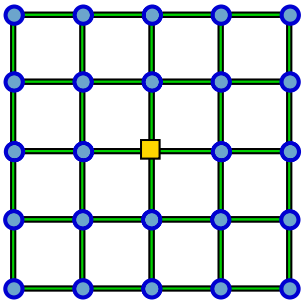
حداقل مقدار k چند باید باشد تا بتوانیم در هر حالتی با حداکثر k بار فشردن کلید لامپ را روشن کنیم؟ (k را تعداد کل فشردن دو کلید در نظر بگیرید).

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) لزوماً نمی‌توان لامپ را روشن کرد

۱۰) شکل زیر یک شهر را با ۲۴ خانه (دایره‌ها) و یک اداره‌ی پست (در مرکز) نشان می‌دهد. این شهر ۴۰ خیابان به طول ۱ دارد که هر خیابان دو محل (خانه یا اداره‌ی پست) را به یکدیگر متصل می‌کند. ۳ پست‌چی وظیفه دارند نامه‌های مردم را از اداره‌ی پست به درب خانه‌شان برسانند.

یک روز صبح ۳ پست‌چی که به اداره‌ی پست می‌روند متوجه می‌شوند برای هر خانه دقیقا یک نامه آمده است. این پست‌چی‌ها می‌خواهند طوری برنامه‌ریزی کنند که رساندن همه‌ی نامه‌ها به مقصد در سریع‌ترین زمان ممکن به پایان برسد. می‌دانیم هر پست‌چی هر خیابان مستقیم (به طول ۱) را در یک دقیقه طی می‌کند و هر پست‌چی در لحظه می‌تواند حداکثر یک نامه در دست داشته باشد.

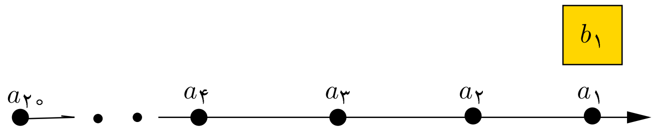
حداقل چند دقیقه پس از شروع کار، همه‌ی نامه‌ها به مقصد می‌رسد؟



الف) ۳۹ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۲۸ هـ) ۳۶

۱۱) ۲۰ دانشجو به‌فاصله‌ی ۱ متر از هم به‌ترتیب در یک صف ایستاده‌اند. هر دانشجو یک کارت دارد که بر روی آن یک عدد صحیح نوشته شده است. در امتداد این صف ۸ میز با شماره‌های ۱ تا ۸ و با فاصله‌های یک متر از هم قرار گرفته است. پشت هر میز یک استاد نشسته است و کارتی دارد که بر روی آن عدد ۱۳۸۹ نوشته شده است. (در شکل زیر a_i ها متناظر دانشجویان و b_j ها میز استادان است.)

در ابتدا، دانشجوی اول صف درست در مقابل میز شماره‌ی ۱ قرار دارد. کار در ۱۵ مرحله انجام می‌شود و در هر مرحله دو سوت زده می‌شود. با سوت اول هر مرحله، هر دانشجو که مقابل میز یک استاد قرار دارد کارتش را به آن استاد نشان می‌دهد و در صورتی که عدد کارت دانشجو کم‌تر از عدد کارت استاد باشد، آن‌ها کارت‌هایشان را باهم عوض می‌کنند. با سوت دوم هر مرحله، همه‌ی دانشجویان یک متر به جلو می‌روند.



اگر عدد کارت دانشجویان به ترتیب $\langle ۱۳, ۲, ۴, ۱, ۸, ۳, ۹, ۱۲, ۲۰, ۵, ۷, ۱۴, ۹, ۸, ۱۴, ۶, ۸, ۱۵, ۱۰, ۱۲\rangle$ باشد ($a_۱ = ۱۲$)، پس از پایان ۱۵ مرحله استاد دوم چه کارتی را در اختیار خواهد داشت؟

الف) ۸
ب) ۳
ج) ۶
د) ۱۴
ه) ۵

۱۲) در راهروی نقاشی‌های ارزشمند یک موزه، n تابلوی نقاشی با شماره‌های ۱ تا n در یک ردیف کنار هم به دیوار آویخته شده‌اند. یک سارق می‌خواهد از این موزه دزدی کند. او می‌داند ارزش تابلوی i ام برابر v_i است. به دلیل نزدیک بودن تابلوها به هم، اگر سارق تابلوی شماره i را از دیوار بکند، دو تابلوی مجاور آن با شماره‌های $i - ۱$ و $i + ۱$ (در صورت وجود) پاره و بی‌ارزش می‌گردند.

هدف سارق سرقت تعدادی از تابلوهای موزه است که مجموع ارزش تابلوهای سرقتی (سود وی) بیشینه شود. $P(i)$ را برابر بیشینه‌ی سود سارق تعریف می‌کنیم در حالتی که فقط تابلوهای شماره‌ی ۱ تا i قابل سرقت هستند. در این صورت کدام رابطه‌ی زیر برقرار است؟ (فرض کنید $P(۰) = ۰$ و $P(-۱) = ۰$ قرارداد شده است. منظور از $\max(a, b)$، مقدار بیشینه‌ی a و b است)

الف) $P(i) = \max(v_i + P(i-۱), P(i-۲))$
ب) $P(i) = v_i + \max(P(i-۱), P(i-۲))$
ج) $P(i) = P(i-۱) + \max(v_i, P(i-۲))$
د) $P(i) = P(i-۲) + \max(v_i, P(i-۱))$
ه) $P(i) = \max(v_i + P(i-۲), P(i-۱))$

۱۳) n راننده با ماشین‌های هم اندازه به طول L می‌خواهند طوری در یک طرف خیابانی به طول ۱۳۸۹ پارک کنند که یک ماشین تازه وارد، هیچ جای پارکی به طول حداقل M در همان طرف خیابان نداشته باشد. منظور از جای پارک فاصله‌ی بین دو ماشین متوالی، ویا فاصله‌ی بین ابتدا یا انتهای خیابان با نزدیک‌ترین ماشین است. در کدام یک از گزینه‌های زیر n راننده به هدف خود نمی‌رسند؟ (در هر گزینه (n, L, M) داده شده است)

الف) $(۱۹۹, ۱, ۶)$
ب) $(۹۹, ۳, ۱۲)$
ج) $(۹, ۵۰, ۱۰۵)$
د) $(۴, ۱۰۰, ۲۴۸)$
ه) $(۲۹۹, ۱, ۳)$

مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

۱۴) ۲۰ سکه با شماره‌های ۱ تا ۲۰ و وزن‌های متفاوت در اختیار داریم، ولی وزن هیچ یک از سکه‌ها را نمی‌دانیم. به صفی از سکه‌ها که از چپ به راست چیده شده‌اند «مرتب» می‌گوییم اگر هر سکه از سکه‌ی سمت راستش سبک‌تر باشد. دستگاه مرتب‌سازی در اختیار داریم که در هر بار استفاده ۱۰ سکه را می‌گیرد و صف مرتب آن‌ها را در خروجی تحویل می‌دهد. حداقل مقدار k چند باید باشد که در هر حالتی با حداکثر k بار استفاده از دستگاه بتوانیم صف مرتب همه‌ی سکه‌ها را ایجاد کنیم؟

الف) ۸ ب) ۶ ج) ۹ د) ۵ ه) ۷

۱۵) در یک لیگ فوتبال ۸ تیم حضور دارند. هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند، هر برد برای برنده ۳ امتیاز و هر مساوی برای هر دو تیم ۱ امتیاز دارد ولی باخت امتیازی ندارد. در پایان مسابقات تیم‌ها در جدول رده‌بندی بر اساس مجموع امتیازشان مرتب می‌شوند، و اگر چند تیم امتیاز برابر کسب کنند بر اساس ترتیب دل‌خواهی در رده‌های متوالی جدول قرار می‌گیرند. می‌دانیم هر تیم حداقل ۱ برد، حداقل ۱ باخت و حداقل ۱ مساوی دارد. حداکثر اختلاف امتیاز تیم اول و سوم جدول رده‌بندی چند امتیاز می‌تواند باشد؟

الف) ۹ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۱۲ ه) ۱۱

۱۶) یک الگوریتم بر روی متغیرهای n، b، s و r عملیات زیر را انجام می‌دهد:

۱) مقدار n را به‌عنوان ورودی بگیر.
۲) مقدار b و s را برابر ۰ قرار بده.
۳) باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۲ را در r بریز.
۴) اگر مقدار r با مقدار b متفاوت بود مقدار s را یک واحد افزایش بده.
۵) مقدار r را در b بریز.
۶) مقدار خارج قسمت تقسیم n بر ۲ را پیدا کن. این مقدار را در n بریز.
۷) اگر مقدار n بیش‌تر از ۰ بود به مرحله‌ی ۳ برو.
۸) مقدار s را در خروجی چاپ کن.

اگر این الگوریتم را یک بار برای ورودی $n =$ ۱، یک بار برای ورودی $n =$ ۲، ... و یک بار برای ورودی $n =$ ۱۲۸ اجرا کنیم، بیش‌ترین مقداری که در حین این ۱۲۸ اجرای مستقل در خروجی چاپ می‌شود چند است؟

الف) ۹ ب) ۶ ج) ۸ د) ۷ ه) ۵

مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

۱۷) الگوریتم زیر مقدار متغیرهای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ را از ورودی می‌گیرد، از متغیرهای m و s استفاده می‌کند و مقدار s را در خروجی چاپ می‌کند:

۱) مقدار s را برابر ۰ قرار بده.

۲) مقدار m را برابر مقدار $a_۱$ قرار بده.

۳) کار زیر را یک بار برای $i = ۲$، یک بار برای $i = ۳$ و یک بار برای $i = ۴$ انجام بده:

اگر مقدار a_i از مقدار m بیش‌تر است: مقدار a_i را در m بریز و هم‌چنین به مقدار s یک واحد اضافه کن.

۴) مقدار s را در خروجی چاپ کن.

مثلاً برای ورودی $\langle a_۱, a_۲, a_۳, a_۴ \rangle = \langle ۱, ۳, ۲, ۴ \rangle$ مقدار ۲ در خروجی نوشته می‌شود چرا که شرط سطر سوم تنها برای $i = ۲$ و $i = ۴$ برقرار می‌شود.

می‌دانیم اعداد ۱ تا ۴ را می‌توان به $۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ حالت مختلف در متغیرهای $a_۱$ تا $a_۴$ قرار داد.

فرض کنید برای تمام این ۲۴ حالت، برنامه‌ی بالا را اجرا می‌کنیم تا ۲۴ عدد در خروجی نوشته شود. حاصل‌جمع این ۲۴ عدد چند است؟

الف) ۳۲ ب) ۲۶ ج) ۴۸ د) ۳۶ ه) ۳۰

۱۸) ۶ لامپ با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک ردیف قرار دارند. عمل $P(k)$ (که $۱ \leq k \leq ۶$) وضعیت تمام لامپ‌هایی که شماره‌ی آن‌ها مضرب k است عوض می‌کند (از روشن به خاموش و از خاموش به روشن). مثلاً $P(۲)$ لامپ‌های شماره‌ی ۲، ۴ و ۶ را تغییر وضعیت می‌دهد و $P(۵)$ فقط وضعیت لامپ شماره ۵ را عوض می‌کند.

مریم وظیفه دارد که وضعیت اوّلیه‌ی لامپ‌ها را تعیین کند و سپس عمل‌های $P(۱)$، $P(۲)$، ... تا $P(۶)$ را به همین ترتیب انجام بدهد. با این کار او ۷ صحنه از لامپ‌ها خواهد داشت: وضعیت اولیه، وضعیت بعد از انجام $P(۱)$، وضعیت بعد از $P(۲)$، ...و وضعیت بعد از $P(۶)$.

امتیاز هر صحنه برابر تعداد لامپ‌های روشن در آن صحنه است. مریم می‌خواهد طوری وضعیت اولیه‌ی لامپ‌ها را تعیین کند که مجموع امتیازهای این ۷ صحنه بیشینه شود. این مقدار بیشینه چند است؟

الف) ۲۹ ب) ۲۴ ج) ۳۶ د) ۲۱ ه) ۱۷

۱۹) جدول A به صورت زیر داده شده است:

۱۱	۳	۴	۱	۲
۶	۱	۶	۴	۵
۲	۱۰	۳	۲	۱
۸	۲	۳	۹	۶
۵	۸	۲	۵	۱

می‌خواهیم در یک جدول ۵ × ۵ دیگر به اسم B، مقادیر ۱ تا ۲۵ را، هر کدام دقیقاً یک بار، به‌گونه‌ای قرار دهیم که مقدار S کمینه شود. مقدار S به‌صورت زیر به دست می‌آید:

> جدول A و B را روی هم قرار می‌دهیم. در هر خانه دو مقدارِ روی هم قرار گرفته از جدول A و B را در یک‌دیگر ضرب می‌کنیم تا ۲۵ عدد جدید به دست آید. مجموع ۵ عدد جدید هر سطر را جلوی آن سطر می‌نویسیم. S برابر کوچکترین عدد از میان اعداد جلوی سطرها است.

به‌عنوان مثال اگر مقادیر خانه‌های B معادل جدول ۵ × ۵ تعیین شود، اعداد قرار گرفته در مقابل هر سطر برابر جدول ۱ × ۵ زیر می‌گردد و مقدار S برابر ۱۷۳ خواهد بود:

۲۰	۵	۴	۱۹	۱
۷	۶	۲	۱۲	۱۳
۲۱	۱۴	۸	۳	۹
۲۲	۱۵	۱۰	۱۱	۱۸
۲۳	۲۴	۱۶	۱۷	۲۵

۲۷۲
۱۷۳
۲۲۱
۴۴۳
۴۴۹

مقدار کمینه‌ی S به ازای تمام حالت‌های مختلف جدول B چقدر است؟

الف) ۳۵ ب) ۴۱ ج) ۲۹ د) ۴۶ ه) ۵۴

۲۰) ۲۴ طراح در جلسات طرح سوال یک آزمون شرکت کرده‌اند و هریک از آن‌ها تعدادی (بیش از صفر) سوال طرح کرده است. در پایان کار سه شرط زیر می‌بایست برقرار باشد:

- (شرط اطمینان) هر سؤالِ طرح شده، باید دقیقاً توسط سه نفر دیگر (غیر از طراح آن سؤال) «بازبینی» بشود.
- (شرط عدم تبانی) هیچ طراحی نمی‌تواند بیش از یک سوال از یک طراح دیگر را بازبینی کند.
- (شرط عدالت) به‌ازای هر دو طراح A و B، اگر A یکی از سؤالات B را بازبینی می‌کند B نیز باید دقیقاً یک سؤال از A را بازبینی بکند.

حداکثر تعداد سؤالات طرح شده چقدر می‌تواند باشد به‌طوری که تمام شرایط فوق نیز برقرار شود؟

الف) ۱۹۲ ب) ۱۶۸ ج) ۲۴ د) ۹۲ ه) ۹۶

مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۱: استخدام .... ۲۰ امتیاز

در یک شهر کوچک دو شرکت تازه‌تاسیس برای جذب کارمند آگهی استخدام داده‌اند. آن‌ها می‌دانند دقیقاً n نفر متقاضی کار در این شهر وجود دارد که همه‌ی آن‌ها ناگزیرند در یکی از این دو شرکت به‌کار مشغول شوند. هر یک از دو شرکت در آگهی استخدام خود، یک لیست با n خانه درج کرده‌اند که مشخص می‌کند اگر آن شرکت i کارمند ($۱ \leq i \leq n$) داشته باشد، به هر یک از آن‌ها چه حقوقی تعلق خواهد گرفت (حقوق همه‌ی کارمندان در یک شرکت مساوی و فقط به تعداد کارمندان آن وابسته است). توجه کنید که اعداد نوشته‌شده در هر یک از این دو جدول مثبت ولی دل‌خواه هستند و لزوماً هیچ ترتیب خاصی ندارند.

ثابت کنید که n کارمند هم‌واره می‌توانند طوری در این دو شرکت استخدام شوند که هیچ‌یک از کارمندان تمایلی به تغییر شرکت نداشته باشد. زمانی یک کارمند مایل به تغییر شرکت خود خواهد بود که در صورت این تغییر، میزان حقوقش افزایش یابد.

مسئله‌ی ۲: جای‌گشت .... ۲۰ امتیاز

به دنباله‌ی π به‌طول n از اعداد $\{۱,\ldots,n\}$ یک «جای‌گشت» می‌گوییم اگر و تنها اگر هر کدام از این اعداد دقیقاً یک‌بار در دنباله ظاهر شود. عددی که در مکان iام جای‌گشت ظاهر می‌شود را با $\pi(i)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال $\langle ۱,۳,۴,۲ \rangle : \pi$ یک جای‌گشت به‌طول ۴ می‌باشد. پدر علی به او جای‌گشتی از اعداد ۱ تا ۲^k داده است ($k \geq ۱$). علی می‌خواهد کاری کند که به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n = ۲^k$، داشته باشیم $\pi(i) = i$. او برای این کار از الگوریتم زیر استفاده می‌کند:

۱) i را برابر ۱ قرار بده.

۲) عدد $\pi(i)$ را با $\pi(\pi(i))$ جابه‌جا کن.

۳) به i یک واحد اضافه کن.

۴) اگر $i \leq ۲^k$ بود، به مرحله‌ی ۲ برو.

۵) پایان.

مثلاً، پس از اجرای الگوریتم فوق برای مثال بالا ($\langle ۱,۳,۴,۲ \rangle : \pi$)، به جای‌گشت $\langle ۱,۲,۳,۴ \rangle : \pi'$ می‌رسیم.

الف) ثابت کنید با k بار اجرای الگوریتم فوق، تمام اعداد سرجای خود قرار می‌گیرند.

ب) برای هر عدد k، جای‌گشتی مثال بزنید که نتوان با $k - ۱$ بار اجرای الگوریتم فوق تمام اعداد را در جای خود قرار داد.

مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۳: بزرگ‌راه‌ها .... ۲۰ امتیاز

بین n شهر در یک کشور ($n > 2$)، $n - 1$ بزرگ‌راه به‌گونه‌ای احداث شده‌اند که از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان سفر کرد. هر بزرگ‌راه دقیقاً دو شهر را به یک‌دیگر وصل می‌کند که این زوج شهرها را «مجاور» هم می‌نامیم. قرار است به هر بزرگ‌راه یک عدد به‌عنوان عوارض اختصاص یابد به‌گونه‌ای که هر خودرویی که از آن بزرگ‌راه می‌گذرد مجبور باشد آن مقدار عوارض را به هر یک از دو شهر در دو سر آن بزرگ‌راه بپردازد. درآمد هر شهر برابر مجموع عوارض اختصاص یافته به بزرگ‌راه‌هایی است که یک سرشان به آن شهر متصل است.

یک تیم کارشناسی به‌ازای هر بزرگ‌راه دو عدد مختلف پیش‌نهاد کرده است و ما می‌توانیم یکی از این دو عدد را به‌عنوان عوارض آن بزرگ‌راه تعیین کنیم. ولی به‌دلیل افزایش رقابت بین شهرها، عوارض تعیین‌شده برای بزرگ‌راه‌ها باید طوری باشد که درآمد هر شهر با هیچ یک از شهرهای مجاورش یک‌سان نباشد.

الف) ثابت کنید اگر تمامی عددهای پیش‌نهادی حقیقی و بزرگ‌تر از صفر باشند، هم‌واره می‌توان عوارض بزرگ‌راه‌ها را طوری تعیین کرد که شرط رقابت شهرها برقرار بماند.

ب) فرض کنید امکان پیشنهاد عدد صفر هم باشد (یعنی امکان دریافت نکردن عوارض در بعضی از بزرگ‌راه‌ها). مثالی ارائه کنید که در آن نتوان عوارض هر بزرگ‌راه را از بین اعداد پیشنهادی به گونه‌ای انتخاب کرد که شرط رقابت شهرها برقرار بماند. دقت کنید که در مثال خود باید برای هر بزرگ‌راه دو عدد متفاوت پیش‌نهاد کنید که دست‌کم یکی از آن دو عدد بزرگ‌تر از صفر باشد.

مسئله‌ی ۴: کشور عجیب .... ۲۰ امتیاز

در کشور «عجیب» تعدادی شهر وجود دارد که بعضی از آن‌ها با جاده‌ی دو طرفه به‌هم وصل شده‌اند. می‌دانیم در این کشور از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان با عبور از تعدادی جاده مسافرت کرد. در این کشور عجیب تنها یک اتومبیل وجود دارد. یک جهان‌گرد با خرید آن اتومبیل وارد یکی از شهرها شده است. او قصد دارد از همه‌ی شهرهای این کشور بازدید کند. در این کشور عجیب هر شهر تنها از یک میدان تشکیل شده است که تمام جاده‌های منتهی بدان شهر، به این میدان می‌رسند. در وسط میدان هر شهر یک پلیس ایستاده است و در هر لحظه تنها یک جاده را برای خروج از شهر باز می‌گذارد اما اجازه‌ی ورود به شهر را از هر جاده‌ای می دهد.

فرض کنید پلیس هر شهر بلافاصله پس از خروج اتومبیل از آن شهر، خروجی باز را می‌بندد و جاده‌ی بعد از آن را (در جهت ساعت‌گرد دور میدان) برای خروج باز می‌کند. ثابت کنید جهان‌گرد با شروع از هر شهر دل‌خواه و با هر وضعیت اولیه‌ی خروجی‌های باز، می‌تواند از همه شهرها دیدن کند. توجه کنید جاده‌ها تنها در میدان شهرها با یک‌دیگر تقاطع دارند.

مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۵: دنباله .... ۲۰ امتیاز

دنباله‌ی $A = \langle a_۱, a_۲, \cdots, a_n \rangle$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. در ابتدای کار، به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ می‌دانیم که $a_i = i$. هم‌چنین یک متغیر b تعریف می‌کنیم و مقدار اولیه‌ی آن را برابر ۰ می‌گذاریم.

فرض کنید $f(z)$ برابر تعداد اعدادی از دنباله‌ی A است که مقدارشان برابر z است. مثلا اگر $n = ۸$ در ابتدای کار داریم: $A = \langle ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸ \rangle$ و هم‌چنین $f(۸) = ۱$ و $f(۹) = ۰$. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید که در هر بار اجرا، دو عدد طبیعی x و y را از ورودی می‌گیرد و پردازش می‌کند ($۱ \leq x, y \leq n$):

۱) مقدار x و y را از ورودی دریافت کن.

۲) اگر $a_x = a_y$، به مرحله‌ی ۹ برو، در غیر این صورت به مرحله‌ی ۳ برو.

۳) اگر $f(a_x) \leq f(a_y)$، به مرحله‌ی ۴ برو، در غیر این صورت به مرحله‌ی ۷ برو.

۴) B را به اندازه‌ی $f(a_x)$ واحد اضافه کن.

۵) تمام اعداد دنباله‌ی A که مقدارشان برابر a_x است را به a_y تبدیل کن.

۶) به مرحله‌ی ۹ برو.

۷) B را به اندازه‌ی $f(a_y)$ واحد اضافه کن.

۸) تمام اعداد دنباله‌ی A که مقدارشان برابر a_y است را به a_x تبدیل کن.

۹) پایان.

برای مثال اگر $n = ۸$ و الگوریتم را دو بار، ابتدا به ازای $(x, y) = (۲,۳)$ و سپس به ازای $(x, y) = (۲,۷)$ اجرا کنیم، پس از اجرای الگوریتم خواهیم داشت: $A = \langle ۱,۳,۳,۴,۵,۶,۳,۸ \rangle$. هم‌چنین، مقدار B بعد از این دو اجرا برابر ۲ خواهد بود.

الف) فرض کنید $n = ۱۶$ و می‌خواهیم الگوریتم را ۱۵ بار اجرا کنیم. مقدار x و y را برای هر اجرا طوری تعیین کنید که پس از پایان کار، مقدار B برابر ۳۲ باشد.

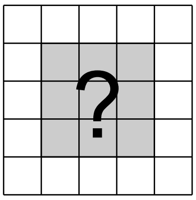
ب) فرض کنید $n = ۲^k$ و می‌خواهیم الگوریتم را $n - ۱$ بار اجرا کنیم ($k \geq ۱$). ثابت کنید نمی‌توان مقادیر x و y را در این دفعات اجرا طوری تعیین کرد که پس از پایان کار مقدار B بیش‌تر از $k \times ۲^k$ شود.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اوّل)

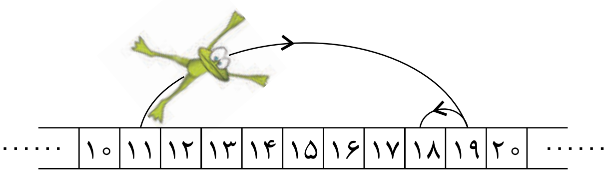
مسئله‌ی ۱: جدول ۵ × ۵ .... ۲۰ امتیاز

احمد یک مربع ۳ × ۳ در جدول ۵ × ۵ مقابل انتخاب کرده‌است. علی قصد دارد با تعدادی پرسش محل این مربع را کشف کند. او در هر نوبت می‌تواند به یکی از خانه‌های جدول اشاره کند و از احمد بپرسد که آیا این خانه در مربع مورد نظر او قرار دارد یا خیر. کمترین تعداد پرسش‌های لازم برای آن که علی بتواند مکان مربع احمد را کشف کند چند تا است؟ برای اثبات ادعای خود، باید یک روش ارائه دهید و نیز نشان دهید با کمتر از این تعداد سوال نمی‌توان همیشه به جواب رسید.



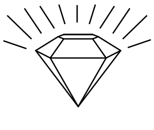
مسئله‌ی ۲: قورباغه‌ی پهلوان .... ۲۰ امتیاز

یک قورباغه‌ی پهلوان روی محور اعداد صحیح قرار گرفته است. او در هر جهش می‌تواند به اندازه‌ی توانی از ۲ به چپ یا راست بپرد. به عنوان مثال او می‌تواند با دو جهش از ۱۱ به ۱۸ برسد: ابتدا با یک جهش از ۱۱ به ۱۹ و در جهش بعدی از ۱۹ به ۱۸ می‌پرد. نشان دهید دو عدد صحیح a، b وجود دارند که او نمی‌تواند با کم‌تر از ۱۰۰ جهش از a به b برسد.



مسئله‌ی ۳: الماس نسبتاً درخشان .... ۲۰ امتیاز

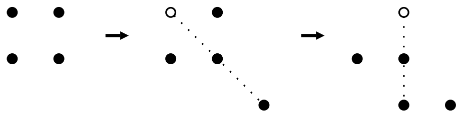
علی‌بابا در غار n الماس درخشان پیدا کرده است و می‌خواهد یکی از آن‌ها را انتخاب کند و با خود ببرد. او انسان قانعی است و اصراری ندارد که حتماً درخشان‌ترین الماس را انتخاب کند. بلکه فقط می‌خواهد الماسی که با خود می‌برد، یکی از ۱۰ الماس برتر باشد (n از ۱۰ بزرگ‌تر است).



برای ارزیابی درخشش الماس‌ها، یک آینه‌ی سخن‌گو وجود دارد که علی‌بابا می‌تواند دو الماس را در برابر آن قرار دهد و آینه به او می‌گوید که کدام یک از این دو درخشان‌تر است. با توجه به این که دزدان هر لحظه ممکن است سر برسند، وی باید با کم‌ترین سوال از آینه، الماسی را انتخاب کند. او با حداقل چند سوال می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسئله‌ی ۴: چهار ملخ جهنده .... ۲۰ امتیاز

چهار ملخ در چهار راس یک مربع بر روی صفحه قرار گرفته‌اند. هر بار یکی از ملخ‌ها با یک جهش از روی ملخ دیگری می‌پرد و در نقطه‌ی مقابل (قرینه‌ی مکان قبلی خود نسبت به مکان ملخ دیگر) فرود می‌آید. آیا ممکن است بعد از مدتی ملخ‌ها روی چهار راس یک مربع بزرگ‌تر قرار بگیرند؟ (مربع بزرگ‌تر ممکن است دوران یافته باشد.)



مسئله‌ی ۵: کتاب‌خانه‌ی زندان .... ۲۰ امتیاز

یک کتاب مهم از کتاب‌خانه‌ی زندان دزدیده شده است. رییس زندان می‌خواهد دزد را پیدا کند. در روزی که کتاب مفقود شده است، شش زندانی به کتاب‌خانه رفته‌اند. هر کدام یک بار وارد کتاب‌خانه شده، مدتی در آن‌جا مانده و سپس کتاب‌خانه را ترک کرده است. می‌دانیم که اگر دو نفر از آن‌ها هم‌زمان در کتاب‌خانه بوده‌باشند، حتماً دست‌کم یکی از آن‌ها دیگری را دیده است. رییس زندان از هر کدام از این زندانی‌ها به‌طور مخفی سوال می‌کند که چه کسانی را دیده است. پاسخ‌ها به صورت زیر است:

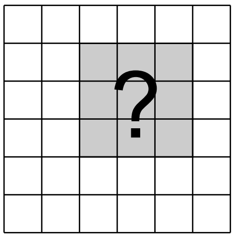
زندانی	افرادی که دیده است
A	B، E
B	A، F
C	D، F
D	A، F
E	B، C
F	C، E

رییس زندان معتقد است که هر زندانی به‌درستی دیگر زندانی‌هایی را که در کتاب‌خانه دیده گزارش کرده‌است، به‌جز فرد دزد، که علاوه بر کسانی که دیده‌است، یک نفر دیگر را به دروغ نام برده‌است. با فرض این‌که نظر رییس زندان درست است، توضیح دهید که دزد کیست و دلایل خود را بنویسید.
توجه مهم: ذکر نام دزد بدون استدلال کافی نمره‌ای ندارد.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

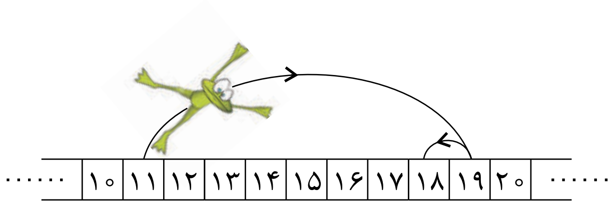
مسئله‌ی ۱: مربع مخفی .... ۲۵ امتیاز



احمد یک زیرجدول ۳ × ۳ از جدول ۶ × ۶ مقابل را انتخاب کرده‌است. علی قصد دارد با تعدادی پرسش محل این مربع را کشف کند. او در هر نوبت می‌تواند به یکی از خانه‌های جدول اشاره کند و از احمد بپرسد که آیا این خانه در مربع مورد نظر او قرار دارد یا خیر. کمترین تعداد پرسش‌های لازم برای آن که علی بتواند مکان مربع احمد را کشف کند چند تا است؟ برای اثبات ادعای خود، باید یک روش ارائه دهید و نیز نشان دهید با کمتر از این تعداد سوال نمی‌توان همیشه به جواب رسید.

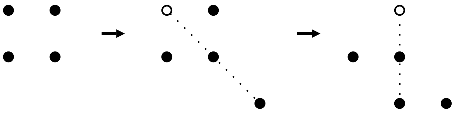
مسئله‌ی ۲: قورباغه‌ی پهلوان .... ۲۵ امتیاز

یک قورباغه‌ی پهلوان روی محور اعداد صحیح قرار گرفته است. او در هر جهش می‌تواند به اندازه‌ی توانی از ۲ به چپ یا راست بپرد. به عنوان مثال او می‌تواند با دو جهش از ۱۱ به ۱۸ برسد: ابتدا با یک جهش از ۱۱ به ۱۹ و در جهش بعدی از ۱۹ به ۱۸ می‌پرد. نشان دهید دو عدد صحیح a، b وجود دارند که او نمی‌تواند با کم‌تر از ۱۰۰ جهش از a به b برسد.

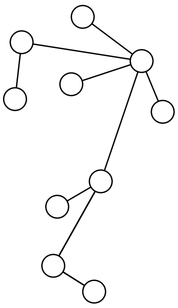


مسئله‌ی ۳: چهار ملخ جهنده .... ۲۵ امتیاز

چهار ملخ در چهار راس یک مربع بر روی صفحه قرار گرفته‌اند. هر بار یکی از ملخ‌ها با یک جهش از روی ملخ دیگری می‌پرد و در نقطه‌ی مقابل (قرینه‌ی مکان قبلی خود نسبت به مکان ملخ دیگر) فرود می‌آید. آیا ممکن است بعد از مدتی ملخ‌ها روی چهار راس یک مربع بزرگتر قرار بگیرند؟ (مربع بزرگتر ممکن است دوران یافته باشد.)



مسئله‌ی ۴: درخت رنگارنگ .... ۲۵ امتیاز

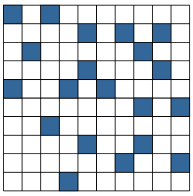


منظور از «درخت» تعدادی دایره است که با پاره‌خط‌هایی به هم متصل شده‌اند طوری که پاره‌خط‌ها همدیگر را قطع نمی‌کنند و بین هر دو دایره دقیقاً یک مسیر از طریق پاره‌خط‌های واصل وجود دارد. مریم و مینا بازی «رنگ آمیزی» زیر را بر روی یک درخت دل‌خواه انجام می‌دهند: با شروع از مریم، هر کس در نوبت خود یکی از دایره‌هایی که هنوز رنگ نشده را با یکی از ۶ رنگ قرمز، آبی، سبز، زرد، بنفش یا نارنجی رنگ می‌کند ولی باید رنگی که انتخاب می‌کند با رنگ هیچ‌کدام از دایره‌هایی که با یک پاره‌خط به این دایره متصل هستند و تا کنون رنگ شده‌اند یکی نباشد. مینا می‌خواهد بازی را به بن‌بست بکشاند یعنی وضعیتی ایجاد کند که هنوز دایره‌ی رنگ نشده‌ای وجود داشته باشد ولی حرکت دیگری ممکن نباشد. نشان دهید مریم می‌تواند با یک روش بازی خوب، مینا را ناکام بگذارد!

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۵: رنگ‌آمیزی پراکنده .... ۲۵ امتیاز



یک رنگ‌آمیزی از خانه‌های یک جدول با دو رنگ سیاه و سفید را «پراکنده» می‌گوییم اگر هیچ دو خانه سیاه در یک ضلع مشترک نباشند. نشان دهید تعداد رنگ‌آمیزی‌های پراکنده‌ی جدول ۱۰ × ۱۰ از $۱۰^{۱۵}$ بیشتر و از $۱۰^{۲۵}$ کمتر است.

مسئله‌ی ۶: سطل‌ها و توپ‌ها .... ۲۵ امتیاز

۱۰۰ سطل در یک ردیف کنار هم قرار گرفته‌اند و ۵۰ توپ درون آن‌ها پخش شده است. هر بار یکی از سطل‌ها را انتخاب می‌کنیم و اگر k توپ درون آن بود آن‌ها را خارج کرده و بین k سطل دل‌خواه دیگر توزیع می‌کنیم طوری که به هر سطل یک توپ اضافه شود. نشان دهید در هر ۲۰ حرکت متوالی ناچاریم دست‌کم یک بار به سراغ سطلی با کمتر از ۱۰ توپ برویم.

مسئله‌ی ۷: ساختمان روشنایی .... ۲۵ امتیاز

ساختمان روشنایی تعداد زیادی چراغ و کلید دارد. هر کلید به بعضی از چراغ‌ها متصل است و با زدن آن وضعیت همه‌ی آن چراغ‌ها تغییر می‌کند (یعنی اگر خاموش بودند روشن و اگر روشن بودند خاموش می‌شوند). در ضمن میدانیم که هر چراغ دست‌کم به یک کلید متصل است. نشان دهید اگر در ابتدا همه‌ی چراغ‌ها خاموش باشند می‌توان با زدن بعضی از کلیدها به حالتی رسید که بیش از نیمی از چراغ‌ها روشن باشند.

مسئله‌ی ۸: رشته‌های مشابه .... ۲۵ امتیاز

مرتضی n کارت و کیان ۱ کارت دارند که روی هر یک از آن‌ها یک رشته از صفر و یک به طول l نوشته شده است. در بین کارت‌های مرتضی، دست‌کم یک کارت وجود دارد که رشته‌ی آن با رشته‌ی نوشته‌شده روی کارت کیان کمتر از d رقم اختلاف دارد. منظور از اختلاف دو رشته، تعداد رقم‌های متفاوت در آن‌ها است، مثلا اختلاف دو رشته‌ی ۱۰۱۱۰۱ و ۰۰۱۱۱۱ برابر ۲ است زیرا در اولین و پنجمین رقم (از سمت چپ) تفاوت دارند. هدف مرتضی این است که با تعداد کمی پرسش، کارتی را پیدا کند که اختلاف رشته‌ی آن با رشته‌ی کارت کیان کمتر از d رقم باشد.

هر بار مرتضی یک عدد i انتخاب می‌کند و کیان رقم iام رشته‌ی خود را به او می‌گوید. ثابت کنید مرتضی می‌تواند با کمتر از nd پرسش کارت مورد نظرش را پیدا کند.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اوّل)

مسئله‌ی ۱: وزنه‌ها .... ۱۰ امتیاز

n عدد وزنه‌ی متفاوت با وزن‌های $۲^۰$، $۲^۱$، ...، تا $۲^{n-۱}$ (از هر کدام یک عدد)، و یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. وزن هر وزنه بر روی آن نوشته شده‌است. در ابتدای کار، هیچ وزنه‌ای روی ترازو قرار ندارد. در هر حرکت یکی از وزنه‌هایی که روی ترازو نیست را برداشته و روی یکی از کفه‌های ترازو قرار می‌دهیم؛ پس از این کار، اگر کفه‌ی سمت چپ ترازو پایین‌تر بود (سنگین‌تر بود)، حرف L و اگر کفه‌ی سمت راست ترازو پایین‌تر بود، حرف R را روی کاغذ می‌نویسیم. (می‌توان نشان داد که کفه‌ها هیچ‌وقت مساوی نمی‌شوند!) این کار را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. دقت کنید حروف را به ترتیب پشت سر هم می‌نویسیم. هم‌چنین توجه کنید که هرگز حق نداریم وزنه‌ای را از روی یک کفه برداریم. با این حساب وقتی وزنه‌ای روی یک کفه قرار گرفت تا پایان کار همان‌جا باقی می‌ماند.

در پایان کار، یعنی زمانی که همه وزنه‌ها روی ترازو قرار گرفتند، یک رشته به طول n از حروف L و R ایجاد می‌شود. ثابت کنید که به‌ازای هر رشته به طول n از L و R، می‌توان وزنه‌ها را به ترتیبی روی ترازو قرار داد که رشته مورد نظر ساخته شود.

مسئله‌ی ۲: نوارهای دودویی سارا .... ۲۰ امتیاز

سارا علاقه‌ی زیادی به نمایش اعداد در مبنای ۲ دارد! یک روز صبح، او تمام اعداد ۰ تا $۲^n - ۱$ را روی ۲^n عدد نوارِ کاغذی، در مبنای ۲ می‌نویسد و در سمت چپ اعدادی که کم‌تر از n رقمِ دودویی (اصطلاحاً «بیت») دارند، آن‌قدر صفر می‌گذارد تا تمام اعداد دقیقاً n بیتی بشوند.

عصر همان روز، دارا (برادر سارا)، نوارهای او را برداشته و به اتاق خودش می‌رود. سپس، دور از چشم سارا، ابتدا نوارها را با یک ترتیب دل‌خواه زیر هم قرار می‌دهد (تا چیزی شبیه یک جدول با ۲^n سطر و n ستون از ارقام ۰ یا ۱ درست شود)؛ و بعد از آن روی هر کدام از $۲^n \times n$ بیتِ این نوارها، یک سکّه قرار می‌دهد تا بیتِ زیر آن دیده نشود. پس از این کار، دارا از سارا می‌خواهد که به اتاقش بیاید و با برداشتن حداقل تعداد سکّه از روی بیت‌های نوارها، تعیین کند که نوارِ هر کدام از سطرها، دقیقاً کدام‌یک از اعدادِ ۰ تا $۲^n - ۱$ اوّلیه است.

بعد از کمی فکر کردن، سارا تمام سکّه‌های همه‌ی نوارها به‌جز نوار آخر را بر می‌دارد (تا اعداد آن‌ها را به‌سادگی ببیند) و سپس نتیجه می‌گیرد که بیت‌های زیرِ سکّه‌هایِ آخرین نوار، عددی از اعدادِ ۰ تا $۲^n - ۱$ را تشکیل می‌دهند که در نوارهای دیگر نیامده است! دارا که چندان از ایده‌ی سارا خوشش نیامده، از او می‌خواهد که سعی کند با برداشتن تعداد کم‌تری سکّه، ماهیت همه‌ی نوارها را تشخیص دهد.

به سارا کمک کنید و روشی ارائه دهید که برای هر $n \geq ۲$، او بتواند با برداشتن حداکثر $((n - ۱) \times ۲^n) + ۱$ سکه، تمام نوارها را به‌طور دقیق شناسایی کند.

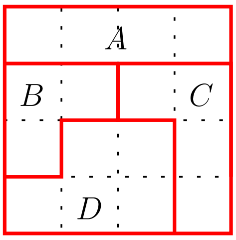
مسئله‌ی ۳: خانه‌های تک‌رنگ .... ۲۰ امتیاز

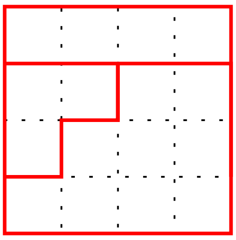
یک جدول $n \times n$ از اعداد ۱، ۲، تا ...n داده شده است. در هیچ سطر یا ستونی از این جدول عدد تکراری یافت نمی‌شود؛ به عبارت دیگر، در هر سطر یا ستون تمام اعداد ۱، ۲، تا ...n وجود دارند.

اگر x یک عدد اعشاری باشد، $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحِ کوچک‌تر از x است. با این تعریف، ثابت کنید که می‌توان $[\frac{n}{۲}]$ تا از خانه‌های این جدول را انتخاب نمود به‌طوری‌که اوّلاً، هیچ زوج از این خانه‌ها در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند. ثانیاً، هیچ زوج از این خانه‌ها شامل عدد یک‌سانی نباشد.

مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اوّل)

مسئله‌ی ۴: برش نواحی .... ۲۵ امتیاز





یک جدول $n \times n$ در اختیار داریم. در ابتدا جدول از $n^۲$ ناحیه تشکیل شده است ($n^۲$ مربع ۱×۱). در هر مرحله می‌توانیم **تمام** دو ناحیه‌ی مجاور (یعنی دو ناحیه که لااقل یک پاره‌خط مشترک دارند) را از جدول انتخاب کنیم و این دو ناحیه را با هم ادغام کنیم؛ یعنی مرز مشترک بین این دو ناحیه را پاک کنیم. فرض کنید طول این مرز مشترک در مرحله‌ی i ام a_i باشد. اگر بعد از k مرحله، تنها یک ناحیه باقی بماند (یعنی یک مربع $n \times n$)، اعداد $a_۱, \ldots, a_k$ به‌دست می‌آیند. برای مثال، در شکل سمت چپ بالا اگر نواحی C و D را بخواهیم با هم ادغام کنیم، محیط مشترک بین این دو ناحیه ۳ واحد بوده و نهایتاً به شکل پایین می‌رسیم.

الف) (۱۰ نمره) روشی ارائه دهید که در آن هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد.

ب) (۱۵ نمره) نشان دهید کم‌ترین مقدار $\sum_{i=۱}^{k} a_i^۲$ وقتی رخ می‌دهد که هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد و با استفاده از این نکته جواب مسئله، یعنی کم‌ترین مقدار $\sum_{i=۱}^{k} a_i^۲$ را به‌دست آورید.

مسئله‌ی ۵: عمو نقاش .... ۲۵ امتیاز

دیوار خانه‌ی عمو نقّاش به صورت یک جدول $n \times n$ می‌باشد. عمو نقّاش برای این‌که مصداق ضرب‌المثل «کوزه‌گر از کوزه شکسته آب می‌خوره» نشود، می‌خواهد دیوار خانه‌اش را رنگ‌آمیزی کند. برای این‌کار عمو هر بار قلم‌موی خودش را درون یک سطل رنگِ متفاوت با رنگ‌های قبلی که تا به حال استفاده کرده، می‌کند و قلم‌موی رنگی را روی یک سطر یا یک ستون جدول به‌طور کامل می‌کشد.

عمو نقّاش می‌خواهد هر کسی به خانه‌شان می‌آید، هنرش را بفهمد. به‌همین خاطر او می‌خواهد طوری دیوار را رنگ‌آمیزی کند که تعداد رنگ‌هائی که روی دیوار دیده می‌شود، بیش‌ترین باشد.

شما به عمو نقّاش کمک کنید؛ به این معنی که اولاً، برای هر عدد n، یک روش رنگ‌آمیزی ارائه دهید که در آن با بیش‌ترین تعداد رنگ دیوار رنگ‌آمیزی شود و ثانیاً، ثابت کنید این مقدار بیشینه است.

موفق باشید!

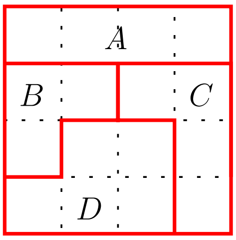
مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

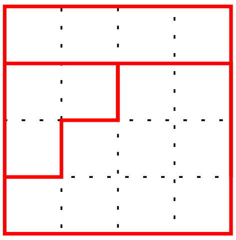
مسئله‌ی ۱: خانه‌های دورنگی .... ۲۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ از اعداد ۱، ۲، تا ... n. داده شده است. در هیچ سطر یا ستونی از این جدول عدد تکراری یافت نمی‌شود؛ به عبارت دیگر، در هر سطر یا ستون تمام اعداد ۱، ۲، تا ... n. وجود دارند.

اگر x یک عدد اعشاری باشد، $\lfloor x \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x است. با این تعریف، ثابت کنید که می‌توان $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ تا از خانه‌های این جدول را انتخاب نمود که هیچ زوجِ از خانه‌های انتخاب‌شده در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند و به‌ازای هر عدد $1 \le i \le n$ حداکثر دو تا از این خانه‌ها شامل عدد i باشند.

مسئله‌ی ۲: برش نواحی .... ۲۵ امتیاز





یک جدول $n \times n$ در اختیار داریم. در ابتدا جدول از n^2 ناحیه تشکیل شده است (n^2 مربع 1×1). در هر مرحله می‌توانیم **تمام** دو ناحیه‌ی مجاور (یعنی دو ناحیه که لااقل یک پاره‌خط مشترک دارند) را از جدول انتخاب کنیم و این دو ناحیه را با هم ادغام کنیم؛ یعنی مرز مشترک بین این دو ناحیه را پاک کنیم. فرض کنید طول این مرز مشترک در مرحله iام a_i است. اگر بعد از k مرحله، تنها یک ناحیه باقی بماند (یعنی یک مربع $n \times n$)، اعداد $a_1, \ldots, a_k$ به‌دست می‌آیند. برای مثال، در شکل سمت چپ بالا اگر نواحی C و D را بخواهیم با هم ادغام کنیم، محیط مشترک بین این دو ناحیه ۳ واحد بوده و نهایتاً به شکل پایین می‌رسیم.

الف) (۱۰ نمره) روشی ارائه دهید که در آن هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد.

ب) (۱۵ نمره) نشان دهید کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ وقتی رخ می‌دهد که هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد و با استفاده از این نکته جواب مسئله، یعنی کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ را بدست آورید.

مسئله‌ی ۳: عمو نقاش .... ۲۵ امتیاز

دیوار خانه‌ی عمو نقّاش به صورت یک جدول $n \times n$ می‌باشد. عمو نقّاش برای این‌که مصداق ضرب‌المثل «کوزه‌گر از کوزه شکسته آب می‌خوره» نشود، می‌خواهد دیوار خانه‌اش را رنگ‌آمیزی کند. برای این‌کار عمو هر بار قلم‌موی خودش را درون یک سطل رنگِ متفاوت با رنگ‌های قبلی که تا به حال استفاده کرده، می‌کند و قلم‌موی رنگی را روی یک سطر یا یک ستون جدول به‌طور کامل می‌کشد.

عمو نقّاش می‌خواهد هر کسی به خانه‌شان می‌آید، هنرش را بفهمد. به‌همین خاطر او می‌خواهد طوری دیوار را رنگ‌آمیزی کند که تعداد رنگ‌هائی که روی دیوار دیده می‌شود، بیش‌ترین باشد.

شما به عمو نقّاش کمک کنید؛ به این معنی که اولاً، برای هر عدد n، یک روش رنگ‌آمیزی ارائه دهید که در آن با بیش‌ترین تعداد رنگ دیوار رنگ‌آمیزی شود و ثانیاً، ثابت کنید این مقدار بیشینه است.

مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۴: تلویزیون .... ۳۰ امتیاز

ایستگاه راه‌آهن شهر المپیادی‌ها n سالن انتظار دارد و در هر سالن یک تلویزیون برنامه پخش می‌کند. می‌دانیم صداوسیمای کشور المپیادی‌ها دارای n شبکه تلویزیونی است. در اولین روز سال ۱۳۸۷ در تلویزیون هر سالن انتظار، یکی از این شبکه‌ها پخش می‌شود، به‌طوری‌که هر یک از n شبکه بر روی دقیقاً یکی از این n تلویزیون دیده می‌شود. می‌دانیم راه‌آهن ترتیب پخش شبکه‌ها روی این n تلویزیون را به ترتیب خاصی در پایان هر روز تغییر می‌دهد.

> یک تعریف: یک ترتیب نوشتن اعداد ۱ ...تا n در یک ردیف را یک جای‌گشت از این اعداد گوییم. مثلاً ⟨۴,۵,۲,۱,۳⟩ (از چپ‌به‌راست) یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا ۵ است و ۲ عدد سوم این جای‌گشت است.

راه‌آهن یک جای‌گشت سرّی به نام π از اعداد ۱ تا n دارد که ما از آن بی‌اطلاعیم. البته می‌دانیم که به‌ازای هر i، اگر تلویزیونی در یک روز شبکه iام را نشان دهد، در روز بعد حتماً شبکه‌ی شماره‌ی π_i (یعنی عدد iام از جای‌گشت π) را نشان خواهد داد.

متأسفانه ما در هر روز مجازیم تنها یکی از سالن‌های انتظار (و در نتیجه فقط تلویزیون آن سالن) را به‌انتخاب خود ببینیم و به این ترتیب شماره‌ی شبکه‌ای که در آن پخش می‌شود را متوجه شویم.

روشی برای انتخاب سالن انتظار در هر روز و دیدن تلویزیون آن ارائه کنید تا به‌کمک آن در حداکثر $۲n - ۱$ روز به جای‌گشت π دست پیدا کنیم و در نتیجه روند تغییر پخش شبکه‌ها در تلویزیون‌ها را بفهمیم.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۵: علی کوچولو .... ۲۰ امتیاز

علی کوچولو در تصورات خود، کشوری به‌نام «اُتوپیا» دارد. کشور او دارای n شهر است، منتها بین شهرهای اتوپیا، هیچ راه ارتباطی‌ای وجود ندارد. برای برقراری ارتباط بین این شهرها، علی کوچولو می‌خواهد تعدادی جاده بین برخی از شهرهای کشورش بکشد. ولی از آن‌جایی که او به اصول و فنون راه‌سازی آشنایی ندارد، به سراغ کتاب «اصول و فنون راه‌سازی» می‌رود. در این کتاب آمده است:

> ” اگر می‌خواهید بین m شهر تعدادی جاده دوطرفه بکشید، به‌طوری‌که بتوان از هر شهر، به هر شهر دیگر رفت، باید حداقل $m - ۱$ جاده بین این شهرها کشیده شود. دقت کنید که هر جاده بین دقیقاً دو شهر کشیده می‌شود و از شهر A می توان به شهر B رفت اگر و فقط اگر بتوان با شروع از شهر A و با حرکت روی تعدادی از جاده‌ها به شهر B رسید.“

علی کوچولو برای سر و سامان دادن به اوضاع کشور، دو هدف زیر را دنبال می‌کند.

۱) بین تعدادی از شهرهای اُتوپیا، جاده‌ی دو طرفه بکشد به‌طوری‌که بتوان از هر شهر آن به هر شهر دیگرش رفت.

۲) تعدادی مرکز پلیس، در برخی از شهرهای کشورش (در هر شهر، حداکثر یک مرکز پلیس) تأسیس کند. به یک کشور«d–حفاظت شده» گفته می‌شود، اگر برای رفتن از هر مرکزِ پلیس به یک مرکز پلیس «دیگر» مجبور به طی کردن حداقل d جاده‌باشیم. قهرمان داستان ما می‌خواهد مراکز پلیسِ اُتوپیا را طوری تاسیس کند که کشورش d–حفاظت شده باشد.

بیش‌ترین تعداد مراکزِ پلیس که باید تاسیس شود (بر حسب n و d) چه‌قدر باید باشد تاعلی کوچولو به دو هدف گفته‌شده برسد؟ در واقع باید طوری جاده‌ها ساخته و مراکز پلیس را تأسیس شوند که به اهداف بالا برسید و و بیش‌ترین تعداد مرکز پلیس را داشته باشید.

در هر صورت، لازم است گفته‌ی خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۶: وند-آزاد .... ۲۰ امتیاز

یک زبان از n کلمه تشکیل شده است و هر کلمه از تعدادی حرف. مجموعه‌ی حروف ما $\{a, b, \ldots, z\}$ است و هر کدام از این حروف برای خود وزنی دارند. وزن حرف a، برابرِ $c_۱$، وزن حرف b برابر $c_۲$ و به همین ترتیب، وزن حرف z، برابر $c_{۲۶}$ است. وزن هر کلمه هم برابر جمع وزن‌های حروف آن کلمه است و وزن یک زبان برابر جمع وزن‌های کلمات آن زبان. به عنوان مثال اگر $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ به ترتیب برابر با ۱، ۲ و ۳ باشند. وزن زبانِ $\{acb, abba\}$ برابر است با $۱۲ = (۱ + ۲ + ۲ + ۱) + (۲ + ۳ + ۱)$.

یک کلمه «پیشوند» یک کلمه‌ی دیگر است اگر و فقط اگر در ابتدای آن ظاهر شده باشد. مثلاً abzd پیشوند abzdsdf است. به همین شکل، یک کلمه «پسوند» یک کلمه‌ی دیگر است اگر و فقط اگر در انتهای آن ظاهر شده باشد. مثلاً sjf پسوند hgsjf است.

یک زبان را «پیشوند–آزاد» می‌گوییم اگر و فقط اگر هیچ کلمه‌ای در آن پیشوند دیگری نباشد، و یک زبان را «پسوند–آزاد» می‌گوییم اگر و فقط اگر هیچ کلمه‌ای در آن پسوند دیگری نباشد.

فرض کنید وزنِ کم‌وزن‌ترین زبانِ n کلمه‌ایِ پیشوند–آزاد برابر X است. ثابت کنید که وزنِ کم‌وزن‌ترین زبانِ n کلمه‌ای که هم پیشوند–آزاد باشد و هم پسوند–آزاد حداکثر $۲X$ است.

مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۷: سه‌تائی‌های پایدار .... ۲۵ امتیاز

n زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی از مجموعه‌ی اعداد $\{۱,۲,\ldots,n\}$ داده شده است. ثابت کنید می‌توان $[\frac{n}{۴}]$ تا از اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,n\}$ را رنگ کرد به‌طوری‌که هیچ کدام از n زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی ما پیدا نشود که هر سه عضوش رنگ شده باشند.

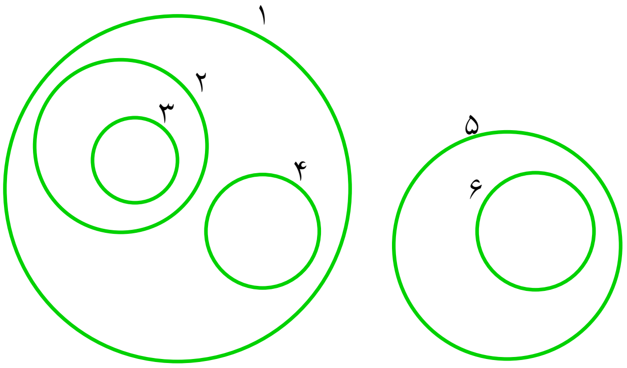
مسئله‌ی ۸: دایره‌های عجیب .... ۳۵ امتیاز

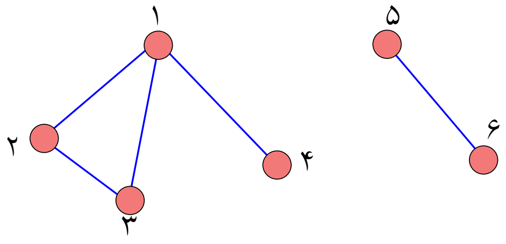
در یک جمع n نفره، هر دو نفر یا با هم آشنا هستند یا نیستند. فرض کنید افراد با شماره‌های ۱، ۲ تا n نام‌گذاری شده‌اند و آشنایی رابطه‌ای دوطرفه است؛ یعنی اگر i با j آشنا باشد حتماً j هم با i آشناست.

الف) (۱۰ نمره) با دانستن تمام روابط آشنایی در یک جمع n نفره، دایره‌های دوبه‌دو نامتقاطع $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n در صفحه کشیده‌اند به‌طوری که دایره‌های C_i و C_j متداخل‌اند اگر و فقط اگر بین فرد i و فرد j رابطه‌ی آشنایی وجود داشته باشد. ثابت کنید در این جمع، به‌ازای هر چهار فرد متمایزِ a، b، c و d، که a با b، b با c و c با d آشناست، حتماً یا a با c آشناست یا b با d.

ب) (۲۵ نمره) جمعی را درنظر بگیرید که در آن به‌ازای هر چهار فرد متمایزِ a، b، c و d، که a با b، b با c و c با d آشناست، حتماً یا a با c آشناست یا b با d. ثابت کنید با دانستن تمام آشنایی‌های این جمع، می‌توان دایره‌های دوبه‌دو نامتقاطع $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n را در صفحه کشید به‌طوری‌که دایره‌های C_i و C_j متداخل باشند اگر و فقط اگر بین فرد i و فرد j در آن جمع رابطه‌ی آشنایی وجود داشته باشد.

برای مثال در شکل زیر افرادی که با پاره‌خط به هم وصل شده‌اند با هم آشنا هستند و دایره‌های نیز بر همین اساس رسم شده‌اند.

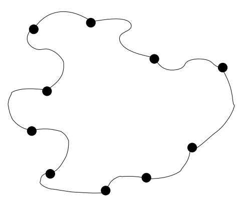




موفق باشید!

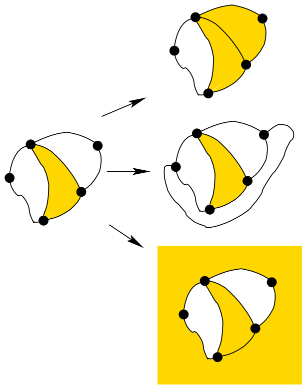
مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۱: نقطه، خط، ناحیه .... ۲۰ امتیاز



هابیل و قابیل با هم یک بازی عجیب می‌کنند. آن‌ها ابتدا n نقطه روی صفحه رسم می‌کنند و نقطه‌ها را طوری با n خط (نه لزوماً راست) به هم وصل می‌کنند که هیچ دو خط هم‌دیگر را قطع نکنند (مگر در سرهایشان) و یک دور به وجود آید که از همه‌ی نقاط دقیقاً یک بار عبور کند. شکل روبه‌رو مثالی را برای $n =$ ۱۰ نشان می‌دهد.

هابیل بازی را شروع می‌کند. هر بازی‌کن در نوبت خودش باید یکی از دو حرکت زیر را انجام دهد:



- یکی از ناحیه‌های صفحه را که توسط خطوط رسم شده در بازی به وجود آمده، به طور کامل رنگ کند. این ناحیه نباید قبلاً رنگ شده باشد. می‌توان ناحیه‌ی بیرونی (ناحیه‌ای که مساحت نامتناهی دارد) را هم انتخاب و رنگ کرد.
- دو نقطه که تاکنون با خطی به هم وصل نشده‌اند را با یک خط (نه لزوماً راست) به هم وصل کند، به شرطی که این خط جدید از ناحیه‌های رنگ شده عبور نکند و با هیچ خط و نقطه‌ی دیگری برخورد نکند.

شکل مقابل حرکت‌هایی قابل قبول را برای صحنه‌ای از بازی نشان می‌دهد. کسی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده‌ی بازی است.

برای چه n هایی، قابیل می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده‌ی بازی شود؟ ادعای خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲: مهمان‌نوازی افراطی .... ۲۵ امتیاز

چنگیزخان در شهر A زندگی می‌کند. ۱۰ نفر از دوستانِ او از ساکنانِ شهرِ B مدتی در شهر A مهمان او هستند. او دوست ندارد که همه‌ی آن‌ها به شهرشان بازگردند. به همین دلیل، به روشِ عجیبی برایشان بلیط هواپیما می‌خرد. در کشور آن‌ها چند شرکت هواپیمایی هست و هر کدام تعدادی خط پرواز دارد. هر خط پرواز، بین دو شهر مشخص (A، B یا شهرهای دیگر) است و رفتن از هر یک از آن دو را به دیگری میسر می‌کند. برای استفاده از یک خط پرواز باید بلیطی از شرکت ارائه‌کننده‌اش داشت و هر بلیط تنها برای یک‌بار استفاده اعتبار دارد. برای رفتن از یک شهر به یک شهر دیگر می‌توان با پروازهای مستقل از چند شهر میانی نیز عبور کرد، به شرطی که بلیط برای پرواز به شهر میانی را هم داشت.

چنگیزخان از هر شرکت هواپیمایی تنها یک بلیط می‌خرد و آن‌ها را به دوستانش می‌دهد. او ادعا می‌کند که بلیط‌هایی که خریده است خاصیت‌های زیر را دارند و این را به دوستانش توضیح می‌دهد:

- با این بلیط‌ها همه با هم نمی‌توانید از اینجا (شهر A) به شهر B بازگردید.
- اگر از این‌ها دو تا بلیط را به دل‌خواه پس بگیرم (هر زوج بلیط ممکن)، با بلیط‌های باقی‌مانده حتماً دست‌کم یک نفر از شما می‌تواند به شهر B برسد.

آیا ممکن است چنگیزخان راست گفته باشد؟ یا او حتماً دروغ گفته است؟ اگر امکان راست گفتن برای چنگیزخان وجود دارد، مثالی بزنید که با حرف‌های او سازگار باشد. در غیر این صورت، اثبات کنید این اتفاق هیچ‌گاه امکان‌پذیر نمی‌باشد.

مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۳: روبات برق‌کار .... ۲۵ امتیاز

n تا کلید با شماره‌های ۱ تا n در یک ردیف از راست‌به‌چپ قرار دارند که تعدادی از آن‌ها خراب و بقیه سالم‌اند. همه‌ی کلیدها به برق متصل‌اند و هر کلید دو حالت «بالا» و «پایین» دارد. هر کلید یک سیم خروجی دارد. اگر کلید سالم باشد سیم خروجی آن فقط وقتی که کلید «بالا» باشد برق دارد. سیم خروجی کلیدهای خراب همیشه برق دارد. برای یافتن کلیدهای خراب از یک روبات استفاده می‌کنیم. به این روبات فهرستی از دستورها داده شده است و او باید دستورها را از ابتدا تا انتها به ترتیب اجرا کند. دستورها فقط یکی از گونه‌های زیرند:

- حالت کلید مقابل خود را بررسی کن،
- حالت کلید مقابل را عوض کن،
- به کلید بعدی یا قبلی برو،
- بررسی کن که آیا خروجی کلید مقابل برق دارد یا خیر،
- توقف کن و کلیدهای خراب را گزارش بده.

روبات در ابتدا کار خود را از کلید شماره‌ی ۱ آغاز می‌کند. ولی متاسفانه روبات ما یک اشکال فنی دارد: اگر پس از بررسی کلید مقابلش، خروجی آن به برق وصل باشد، روبات به‌طور خودکار کارش را مجدداً از کلید شماره‌ی ۱ آغاز می‌کند و اجرای همان دستورات داده شده را از دستور اول از سر می‌گیرد.

فرض کنید که همه‌ی کلیدها در ابتدا «بالا» هستند. شما باید دنباله‌ای از دستورات را ارایه دهید تا اگر روبات آن‌ها را دنبال کند، پس از توقف همه‌ی کلیدهای خراب را به‌درستی گزارش دهد.

مسئله‌ی ۴: کشور برهوت .... ۳۰ امتیاز

کشوری با n شهر داده شده است. در حال حاضر جاده‌ای بین شهرها نیست ولی می‌توانیم بین هر دو شهری که بخواهیم یک جاده‌ی دوطرفه بسازیم. هزینه‌ی ساخت هر جاده α واحد است. پس، هزینه‌ی کلِ ساخت α برابر تعداد جاده‌هایی می‌شود که می‌سازیم. در این کشور وقتی از یک جاده عبور کنیم باید یک واحد پول به عنوان عوارض پرداخت کنیم. حال فرض کنید که پس از ساخت جاده‌های مورد نظرمان بخواهیم از شهر دل‌خواه i به شهر دل‌خواه j برویم. ممکن است برای رسیدن از i به j مسیرهای مختلفی موجود باشد (یک مسیر می‌تواند شامل عبور از چند جاده باشد.) هزینه‌ی هر مسیر تعداد جاده‌های آن است. $d_{i,j}$ را هزینه‌ی کوتاه‌ترین (کم‌جاده‌ترین) راه بین i و j بنامید. اگر بین i و j هیچ راهی وجود نداشته باشد، مقدارِ $d_{i,j}$ ، برابر بی‌نهایت خواهد بود. مقدار عوارض پرداختی بین دو شهر i و j برابر $d_{i,j}$ خواهد بود. «هزینه‌ی کل جاده‌ها» برای یک کشور را برابر مجموع هزینه‌ی ساخت جاده‌ها و جمع عوارض‌ها به ازای هر دو شهرِ i و j تعریف می‌کنیم. مثلاً اگر n ، برابرِ ۳، و مقدارِ α ، برابر ۱۰ باشد، و ما یک جاده بین شهرهای ۱ و ۲، و یک جاده هم بین شهرهای ۲ و ۳ بسازیم، آن‌گاه هزینه‌ی ساخت برابر $۲\alpha = ۲۰$ و مقدار عوارض برابر $d_{۱,۲} + d_{۱,۳} + d_{۲,۳} = ۱ + ۲ + ۱ = ۴$ و بنابراین هزینه‌ی کل جاده‌های آن برابر ۲۴ خواهد بود. می‌خواهیم طوری جاده‌های کشور را بسازیم که هزینه‌ی کل جاده‌های آن کمینه شود. این مقدارِ کمینه را بر حسب n و α به‌دست آورید. (راهنمایی: $\alpha \leq ۱$ و $\alpha > ۱$ را جداگانه بررسی کنید.)

مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

می‌توانید از مطلب زیر بدون اثبات در حل سؤالات این آزمون استفاده کنید.
n تا شهر داریم. تعدادی جاده بین این شهرها کشیده شده به طوری که هر جاده دقیقاً دو شهر را به هم متصل می‌کند. برای اینکه از هر شهر بتوان با استفاده از این جاده‌ها به هر شهر دیگر مسافرت نمود، لازم است که تعداد جاده‌ها دست‌کم $n - ۱$ باشد.

مسئله‌ی ۵: فاصله‌ی جای‌گشت‌ها .... ۲۰ امتیاز

اگر اعداد ۱، ۲، ... ، n را به ترتیبی دل‌خواه از چپ به راست بنویسیم، یک جای‌گشت به طول n حاصل می‌شود. مثلاً $\langle ۱,۳,۲,۴ \rangle$ یک جای‌گشت به طول ۴ است. فاصله‌ی دو جای‌گشت (با طول یک‌سان) برابر است با تعداد مکان‌های متناظری از دو جای‌گشت که با هم متفاوت‌اند. مثلاً فاصله‌ی $\pi' = \langle ۱,۳,۲,۴ \rangle$ و $\pi'' = \langle ۱,۴,۳,۲ \rangle$ برابرِ ۳ است، چون این دو جای‌گشت در مکان‌های دوم، سوم و چهارم متفاوت‌اند.

مجموعه‌ی A شامل ۱۳۸۶ جای‌گشت به طول n و با نام‌های $\pi_۱$، $\pi_۲$، ... و $\pi_{۱۳۸۶}$ است. فاصله‌ی یک جای‌گشت دل‌خواه π به طول n تا مجموعه‌ی A برابر است با فاصله‌ی π و $\pi_۱$، به علاوه‌ی فاصله‌ی π و $\pi_۲$، ... ، به علاوه‌ی فاصله‌ی π و $\pi_{۱۳۸۶}$. از بین همه‌ی جای‌گشت‌های به طول n، جای‌گشتی را در نظر بگیرید که کم‌ترین فاصله را تا A دارد و این فاصله را x بنامید. ثابت کنید که دست کم یکی از اعضای A (یکی از π_i ها) وجود دارد که فاصله‌اش تا A حداکثر $۲x$ است.

مسئله‌ی ۶: جمع مجموعه‌ها .... ۲۵ امتیاز

سه مجموعه‌ی A، B و C از اعداد را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی $A + B + C$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی مانند x تعریف می‌کنیم که x را بتوان به‌صورت جمع سه عددِ a ، b و c نوشت که $a \in A$ ، $b \in B$ و $c \in C$. مثلاً اگر $A = \{۱,۲\}$، $B = \{۲,۴\}$ و $C = \{۳,۱۰\}$ باشند $A + B + C$ برابر است با $\{۶,۷,۸,۹,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶\}$.

اگر A، B و C به ترتیب m، n و k عضو داشته باشند، حداقل تعداد اعضای مجموعه‌ی $A + B + C$ بر حسب m، n و k چه‌قدر است؟ گفته‌ی خود را ثابت کنید.

مسئله‌ی ۷: سفر دوستان .... ۲۵ امتیاز

$۲n$ تا دوست دسته‌جمعی به مسافرت رفته‌اند. در طول مسافرت، تعدادی «تبادل پول» بین آن‌ها صورت می‌گیرد. در هر تبادل پول، یک نفر می‌تواند به یک نفر دیگر مقداری پول بدهد. بعد از این که مسافرت تمام شد و این $۲n$ نفر به خانه‌هایشان بازگشتند، معلوم شد که درست n نفر از آن‌ها در این مسافرت ضرر کرده‌اند (یعنی مقدار پولی که به بقیه داده‌اند، بیش‌تر از مقداری است که از بقیه گرفته‌اند) و n نفر دیگر سود کرده‌اند.

ما می‌دانیم که این $۲n$ نفر در خانه‌هایشان هر چه‌قدر که بخواهند پول دارند. با توجه به این موضوع، می‌خواهیم بین این $۲n$ نفر تعدادی تبادل پول دیگر ترتیب دهیم. هدف این است که بعد از انجام تبادل پول‌هایی که در این مرحله ترتیب داده‌ایم، هیچ‌کس وجود نداشته باشد که سود، یا ضرر کرده باشد (به عبارت دیگر این $۲n$ نفر «بی‌حساب» شوند.)

کوچک‌ترین x ای را بیابید که همیشه بتوان با انجام حداکثر x تبادل پول، این $۲n$ نفر را بی‌حساب کرد.

مسئله‌ی ۸: شکارچیان خرس .... ۳۰ امتیاز

سرزمین خرس‌ها ۱۳۸۶ شهر دارد با تعدادی جاده بین آن‌ها. هر جاده، دو شهر از این شهرها را به هم متصل می‌کند. لزوماً هر دو شهر مستقیماً با یک جاده به هم متصل نیستند، اما می‌دانیم که با کمک جاده‌ها می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت.

اعضای گروه شکارچیان خرس، در تعدادی از شهرهای این منطقه مستقر شده‌اند. قانون اول این گروه می‌گوید هیچ دو عضوی از گروه نمی‌توانند هم‌زمان در یک شهر باشند (بنابراین تعداد شهرهایی که در هر زمان محل استقرار شکارچیان‌اند، با تعداد اعضای گروه برابر است).

گروه ناگهان تصمیم می‌گیرد که اعضایش در مجموعه‌ای جدید از شهرها مستقر شوند. واضح است که طبق قانون اول، تعداد شهرهای این مجموعه‌ی جدید نیز با تعداد اعضای گروه برابر است. برای رسیدن به هدف فوق، هر روز، درست یک نفر از اعضای گروه می‌تواند با طی کردن فقط یک عدد از جاده‌ها، از شهری که در آن مستقر است به شهری دیگر (بالطّبع خالی) برود و در آن مستقر شود. برای گروه تنها این مهم است که هر یک از شهرهای مجموعه‌ی جدید، محل استقرار یکی از اعضا شود. این مهم نیست که کدام عضو در پایانِ کار، در کدام شهر از شهرهای مقصد مستقر شده است.

اگر تصمیم گروه در همه‌ی حالات (یعنی برای هر مجموعه‌ی فعلی، هر مجموعه‌ی مقصد و نیز هر ترکیب قابل قبول از جاده‌ها) قابل اجرا باشد، حداقل تعداد روزهای لازم برای استقرار همه‌ی افراد در شهرهای انتخابی در بدترین حالت ممکن چه‌قدر است؟ اگر حالتی وجود دارد که چنین تصمیمی در آن عملی نیست، آن حالت کدام است؟ و چرا در این حالت، تصمیم گروه قابل اجرا نیست؟

ببخشید! ما نمی‌تونیم پیتزایی که سفارش دادین براتون ایمیل کنیم!

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اول)

مسئله‌ی ۱: جمع بخش‌پذیر .... ۱۵ امتیاز

$n^۲ - n$ عدد طبیعی داده شده است. ثابت کنید n تا از آن‌ها هستند که جمع‌شان بر n بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۲: رنگین‌مسیر .... ۱۵ امتیاز

بازی «رنگین‌مسیر» یک بازی دونفره است که روی یک صفحه‌ی $n \times ۴$ (۴ سطر و n ستون) که در ابتدا سفید رنگ است انجام می‌شود. بهروز و حمید مشغول انجام این بازی هستند و به نوبت طبق قوانین بازی حرکت می‌کنند. بهروز از رنگ آبی و حمید از رنگ قرمز استفاده می‌کند. بازی به این صورت انجام می‌شود که بهروز در هر مرحله دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک هستند و تشکیل یک مستطیل ۱×۲ (یک سطر و دو ستون) می‌دهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (آبی) در می‌آورد. حمید نیز در نوبت خود دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک باشند و تشکیل یک مستطیل ۲×۱ (دو سطر و یک ستون) بدهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (قرمز) در می‌آورد. اگر کسی نتواند در نوبت خود حرکت کند (یعنی نتواند دو خانه‌ی مجاور با شرایط گفته‌شده پیدا کند) نوبت بازی به نفر مقابل می‌رسد و اگر هیچ یک از دو نفر قادر به انجام حرکت نباشند بازی تمام می‌شود.

در پایان اگر دنباله‌ای از خانه‌های آبی وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در ستون اول جدول و آخرین خانه در ستون آخر قرار داشته باشد، در این صورت بهروز برنده‌ی بازی است.

اگر دنباله‌ای از خانه‌های قرمز وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در سطر اول جدول و آخرین خانه در سطر آخر قرار داشته باشد، در این صورت حمید برنده‌ی بازی است.

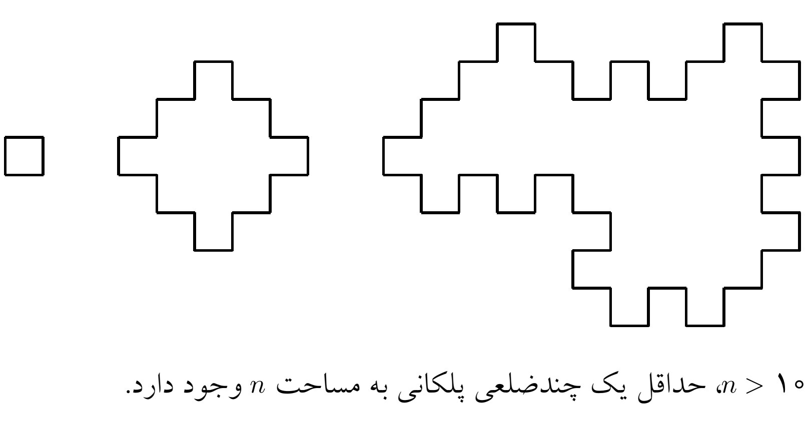
اگر هیچ یک از دو حالت فوق اتفاق نیفتد، بازی مساوی می‌شود. با فرض اینکه هر دو نفر به بهترین نحو ممکن بازی می‌کنند، به ازای هر $n \geq ۷$:

الف) [۷ امتیاز] اگر حمید شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه‌کسی بازی را می‌برد؟

ب) [۸ امتیاز] اگر بهروز شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه‌کسی بازی را می‌برد؟

مسئله‌ی ۳: چندضلعی پلکانی .... ۲۰ امتیاز

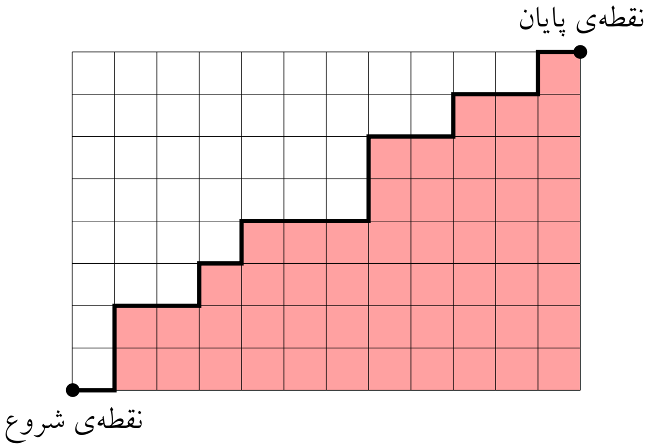
یک چندضلعی را پلکانی می‌گوییم اگر (۱) هر دو ضلع متوالی آن بر هم عمود باشند، (۲) طول همه‌ی اضلاع آن یک باشد، (۳) خودش را قطع نکند. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از چندضلعی‌های پلکانی هستند:



نشان دهید برای هر $n > ۱۰$، حداقل یک چندضلعی پلکانی به مساحت n وجود دارد.

مسئله‌ی ۴: مساحت مسیر .... ۲۰ امتیاز

پریسا در نقطه‌ی پایین سمت چپ یک جدول $m \times n$ (دارای m سطر و n ستونِ خانه) ایستاده است و می‌خواهد با $m + n$ حرکت خود را به نقطه‌ی بالا سمت راست این جدول برساند. او در هر حرکت می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا بر روی خطوط جدول برود. به این ترتیب، پریسا در حرکت خود از نقطه‌ی پایین سمت چپ به نقطه‌ی بالا سمت راست، مسیری به طول $m + n$ را طی می‌کند. تعداد خانه‌های زیرِ یک مسیر را «مساحت» یک مسیر می‌نامیم. در شکل زیر نمونه‌ای از یک مسیر را در یک جدول ۱۲ × ۸ مشاهده می‌کنید. خانه‌های زیر مسیر در آن مشخص شده‌اند و مساحت مسیر برابر ۵۳ است.



فرض کنیم پریسا به A حالت مختلف بتواند از گوشه‌ی پایین سمت چپ جدول به بالا سمت راست آن برود. مجموع مساحت‌های این A مسیر را B می‌نامیم. $\frac{B}{A}$ چه‌قدر است؟ (به عبارت دیگر میانگین مساحتِ مسیرهایی که پریسا می‌تواند طی کند، چه‌قدر است؟)

مسئله‌ی ۵: جدول طلایی .... ۳۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ را «طلایی» می‌گوییم اگر برای هر دو سطر a و b و هر دو ستون c و d آن داشته باشیم:

$$M_{ac} + M_{bd} \neq M_{ad} + M_{bc}$$

۰	۰	۱
۰	۱	۰
۱	۰	۰

منظور از M_{ij}، خانه‌ی سطر iاُم و ستون jاُم جدول است. به عنوان مثال، جدول ۳ در ۳ روبه‌رو یک جدول طلایی است.

ثابت کنید اگر همه‌ی عناصر یک جدول طلایی از مجموعه‌ی $\{۰, ۱, ۲, \cdots, k\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه $۲k + ۱ \geq n$ است.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اول)

مسئله‌ی ۱: دنباله‌ی آینه‌ای .... ۱۰ امتیاز

دنباله‌ی $\mathcal{F}(i,j)$ را به این صورت می‌سازیم:

$$\begin{aligned} F_{۰} &= i \\ F_{۱} &= j \\ F_n &= F_{n-۱}+F_{n-۲} \end{aligned}$$

روشن است که $\mathcal{F}(۰,۱)$ همان دنباله‌ی فیبوناچی است. اگر این رابطه را برای مقادیر منفی n هم باز کنیم اعداد زیر به‌دست می‌آیند:

$$\ldots, ۱۳, -۸, ۵, -۳, ۲, -۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, \ldots$$

اگر علامت‌های منفی را در نظر نگیریم دنباله «آینه‌ای» می‌شود، یعنی اعداد نسبت به عدد $F_{۰}$ قرینه هستند. در این صورت می‌گوییم $\mathcal{F}(۰,۱)$ آینه‌ای است.

به‌ازای کدام مقادیر دیگر i و j دنباله‌ی $\mathcal{F}(i,j)$ آینه‌ای خواهد بود؟ اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲: جوش‌کاری .... ۲۰ امتیاز

می‌خواهیم n قطعه آهن $f_{۱}$، $f_{۲}$، تا f_n به‌ترتیب با طول‌های $\ell_{۱}$، $\ell_{۲}$، تا ℓ_n را به‌همین ترتیب (از چپ به راست) به هم جوش دهیم تا یک قطعه آهن بزرگ از آن‌ها ایجاد شود. برای این‌کار این قطعات را به‌همین ترتیب پشت سرهم در یک ردیف می‌چینیم و هر بار دو تا از قطعه‌های کنار هم را برداشته، به هم جوش می‌دهیم و در جای قبلی‌شان قرار می‌دهیم (با این کار یک عدد از تعداد قطعه آهن‌ها کم می‌شود). این کار را اگر $n-۱$ بار تکرار کنیم، کار به پایان رسیده است.

اما می‌دانیم که هزینه‌ی جوش‌دادن دو قطعه آهن کنار هم به طول‌های a و b برابر $a+b$ است. می‌خواهیم قطعه‌آهن‌ها را به‌ترتیبی به هم جوش دهیم تا مجموع کل هزینه‌ی این کار کمینه شود.

برای این کار یک زیرمسئله‌ی P_{ij} تعریف می‌کنیم که آن جوش دادن f_i، $f_{i+۱}$، تا f_j $(j > i)$ به هم با همین ترتیب است. هزینه‌ی کمینه‌ی این کار را C_{ij} می‌نامیم.

الف. یک فرمول بازگشتی برای C_{ij} و برحسب C_{rk} بنویسید به‌طوری که $r < k$ و $k-r < j-i$. بدیهی است که $C_{ii} = ۰$.

ب. نشان دهید که $C_{۱n}$ برای مسئله‌ی اصلی چه‌گونه محاسبه می‌شود.

ج. برای $n = ۵$ و ورودی $\ell_{۱} = ۶$، $\ell_{۲} = ۲$، $\ell_{۳} = ۴$، $\ell_{۴} = ۳$ و $\ell_{۵} = ۵$ بند «ب» را دنبال کنید و مقدار هزینه‌ی کل و ترتیب جوش دادن را به‌دست آورید.

مسئله‌ی ۳: ناریا .... ۲۰ امتیاز

کشوری با n شهر را «صرفه‌جو» گوییم اگر دقیقاً $n-۱$ جاده بین شهرهای آن به‌گونه‌ای کشیده شده باشد که بتوان با شروع از هر یک از شهرهای آن با استفاده از جاده‌ها به هر شهر دیگری از آن رسید. توجه کنید که هر جاده بین دو شهر کشیده می‌شود. می‌توان ثابت کرد که اگر هر یک از جاده‌های یک کشور صرفه‌جو از بین برود، کشور به دو زیر کشور صرفه‌جو، تقسیم می‌شود. مثلاً اگر یک کشور صرفه‌جو با ۲ شهر داشته باشیم و تنها جاده‌ی موجود در آن را حذف کنیم دو کشور صرفه‌جو که هر کدام ۱ شهر دارند به دست می‌آید. کشور ناریا یک کشور صرفه‌جو با n شهر است. در ضمن می‌دانیم که به هر کدام از شهرهای این کشور حداکثر ۳ جاده متصل شده است. ثابت کنید در این کشور جاده‌ای وجود دارد که با حذف آن ۲ کشوری که به‌دست می‌آیند هرکدام حداقل $\lfloor \frac{n}{۳} \rfloor$ و حداکثر $\lceil \frac{۲n}{۳} \rceil$ شهر داشته باشند. ($\lceil r \rceil$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی r و $\lfloor r \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی r است.)

مسئله‌ی ۴: جای‌گشت نقره‌ای .... ۲۵ امتیاز

یک جای‌گشت، ترتیبی از اعداد ۱ تا n است که هر عدد دقیقاً یک‌بار در آن ظاهر شده‌است. مثلاً «۴ ۱ ۵ ۲ ۳» یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا ۵ را نشان می‌دهد. فرض کنید عدد π_n آخرین عدد جای‌گشت π باشد. هر عمل وارون تعداد π_n عنصر آخر π را در دنباله معکوس می‌کند (به ترتیب عکس قرار می‌دهد) تا جای‌گشت $rev(\pi)$ به‌دست آید. مثلاً اگر عمل وارون را روی جای‌گشت بالا اعمال کنیم «۲ ۵ ۱ ۴ ۳» به‌دست می‌آید. گوییم π یک جای‌گشت نقره‌ای است اگر $rev(\pi) = \pi$ باشد. ثابت کنید با انجام متناهی بار عمل وارون روی هر جای‌گشت π سرانجام یک جای‌گشت نقره‌ای به‌دست می‌آید.

مسئله‌ی ۵: کیسه‌ها .... ۲۵ امتیاز

$۲n$ مهره داریم که روی هر یک عددی نوشته شده است. می‌دانیم هر یک از اعداد ۱ تا n روی دقیقاً دو مهره نوشته شده است. مهره‌ها در n جعبه طوری گذاشته شده‌اند که در هر جعبه دو مهره (با اعداد نه لزوماً یک‌سان) قرار دارند و مهره‌های درون جعبه‌ها دیده می‌شوند. یک مهره از یکی از جعبه‌ها اخیراً گم شده است.

می‌خواهیم از هر جعبه تنها یک مهره برداریم به‌طوری‌که از همه‌ی اعداد ۱ تا n مهره‌ای برداشته باشیم.

آیا این کار همواره ممکن است؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، این موضوع را اثبات کرده و در صورت منفی بودن، یک مثال نقض بزنید.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۱: مادربزرگِ مهدی و ایلیا .... ۱۵ امتیاز

مهدی و ایلیا مهمان مادربزرگ‌شان بودند که او این سوال را مطرح کرد: n عدد مثبت داریم و در هر مرحله می‌توانیم دو عدد از این اعداد را برداریم و به جای آن دوعدد مجموع یا تفاضل‌شان را قرار دهیم (تفاضل دو عدد، همیشه نامنفی است،) تا فقط یک عدد باقی بماند. می‌خواهیم تنها عدد باقی‌مانده کمینه شود.

مهدی گفت در هر مرحله دو بزرگ‌ترین عدد را می‌گیریم، حذف می‌کنیم و تفاضل‌شان را به جای آن دو قرار می‌دهیم و این کار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا فقط یک عدد باقی بماند. ایلیا گفت در هر مرحله بزرگ‌ترین عدد و کوچک‌ترین عدد را حذف می‌کنیم و تفاضل‌شان را قرار می‌دهیم و این کار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا به یک عدد برسیم.

مادربزرگ به آنها گفت که هیچ کدام از این دو روش نمی‌تواند کمینه بودن عدد آخر را تضمین کند. و در ضمن برخلاف روش‌های شما که فقط از تفاضل استفاده می‌کند، می‌توان فقط با یک بار استفاده از تفاضل به عدد کمینه رسید.

الف. این‌که روش مهدی و ایلیا ممکن است به کوچک‌ترین عدد ممکن نرسد را با مثال‌هایی تایید کنید.

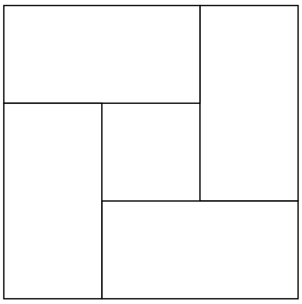
ب. ثابت کنید که برای رسیدن به عدد کمینه کافی است تنها یک‌بار از تفاضل استفاده کرد.

مسئله‌ی ۲: فرش .... ۲۰ امتیاز

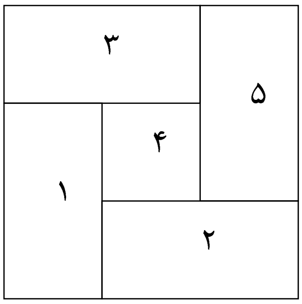
کف یک اتاق مستطیل شکل را می‌خواهیم با تعدادی متناهی فرش بپوشانیم. تمام فرش‌ها مستطیل شکل‌اند و ابعادی حقیقی دارند. یک نقشه‌ی قابل قبول، نحوه‌ی قرار گرفتن هر فرش در اتاق را نشان می‌دهد به‌طوری‌که هر نقطه‌ی اتاق دقیقاً توسط یک فرش پوشانده شده باشد؛ یعنی فرش‌ها روی هم قرار نگرفته‌اند و هیچ جای اتاق خالی نیست. می‌دانیم در هر نقشه‌ی قابل قبول، ضلع‌های هر فرش موازی اضلاع اتاق خواهد بود.

یک نقشه‌ی قابل قبول داده شده است. می‌خواهیم ترتیب پهن کردن فرش‌ها را مشخص کنیم، یعنی به هر یک از فرش‌ها شماره‌ای اختصاص دهیم که مشخص کند آن فرش، چندمین فرشی است که باید پهن شود. یک ترتیب را خوب می‌نامیم اگر زمانی که طبق آن ترتیب فرشی پهن می‌شود، ضلع‌های پایین و چپ آن فرش، یا دیوار باشد و یا هیچ قسمت فرش نشده‌ای نداشته باشد.

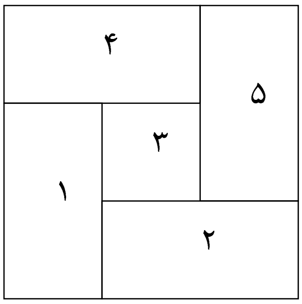
مثلاً در زیر شکل (۱) یک نقشه‌ی قابل قبول است، و شکل (۲) آن یک ترتیب غیر خوب را نشان می‌دهد، چرا که هنگام اضافه شدن فرش شماره‌ی ۳ قسمتی از پایین این فرش هنوز پوشانده نشده است، که بعداً توسط فرش ۴ پوشانده می‌شود. شکل (۳) یک ترتیب خوب را نشان می‌دهد.



(۱)



(۲)



(۳)

ثابت کنید که به‌ازای هر نقشه‌ی قابل قبول، یک ترتیب خوب وجود دارد.

مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۳: جشن تولد آیدا .... ۳۰ امتیاز

آیدا قصد دارد جشن تولد بگیرد. متأسفانه به‌دلیل مشغله‌ی زیاد، تصمیم گرفته است مسئولیت کلیه‌ی تدارکات مراسم عروسی را به دوستش آقای «کاف» بدهد! آقای «کاف» پس از جست‌وجوی فراوان برای تدارکات نور عروسی، موفق به خرید یک «ریسه»ی ۱۰۰ لامپی (شامل ۱۰۰ عدد سرپیچ لامپ و ۱۰۰ عدد لامپ) شده است. ریسه تعدادی سرپیچ متصل به‌هم است که در صورتی که به آن‌ها لامپ بسته شود، به‌زیبایی روشن می‌شوند. البته فروشنده گفته است که دقیقاً ۵۰ تا از لامپ‌ها سالم و ۵۰ تای بقیه خراب‌اند. هم‌چنین دقیقاً ۵۰ تا از سرپیچ‌ها سالم و بقیه خراب‌اند!

آقای کاف قصد دارد، لامپ‌ها و سرپیچ‌های سالم را پیدا کرده و سپس برای به‌دست آوردن حداکثر نور در جشن تولد، پنجاه لامپ سالم را به پنجاه سرپیچ سالم وصل کند تا پنجاه لامپ روشن در ریسه موجود باشد. برای این منظور آقای کاف ریسه را به برق وصل کرده و شروع به امتحان لامپ‌ها و سرپیچ‌ها می‌کند. از آن‌جا که او هیچ وسیله‌ی اضافه‌ای در اختیار ندارد و لامپ‌های سالم و خراب و نیز سرپیچ‌های سالم و خراب کاملاً شبیه هم هستند، او می‌تواند فقط با بستن و بازکردن لامپ‌ها و سرپیچ‌ها به یک‌دیگر، آن‌ها را بیازماید. می‌دانیم که یک لامپ اگر به یک سرپیچ بسته شود، تنها در صورتی روشن می‌شود که هم سرپیچ سالم باشد و هم لامپ.

ضمناً می دانیم که باز کردن یک لامپ از یک سرپیچ دقیقاً یک دقیقه طول می‌کشد ولی از آن‌جا آقای کاف در بستن لامپ به سرپیچ مهارت زیادی دارد، زمان بستن یک لامپ صفر ثانیه فرض می‌شود.

الگوریتمی برای آقای کاف بنویسید (یعنی مراحل دقیق انجام کار را مشخص کنید) که در حداقل زمان بتواند لامپ‌های سالم و نیز سرپیچ‌های سالم را پیدا کرده و ریسه را با ۵۰ لامپ روشن برای جشن تولد آماده کند. دقت کنید که لزومی ندارد که در انتهای کار تمامی لامپ‌ها به تمامی سرپیچ‌ها متصل باشند. یک الگوریتم درست (ولی با زمان بد) چنین است:

۱) یکی از لامپ‌هایی که تا کنون آزموده نشده است را بردار.

۲) لامپ برداشته شده را با تمام سرپیچ‌هایی که خالی هستند امتحان کن، درصورتی که روشن شد، لامپ را در آن سرپیچ رها کرده وگرنه به سراغ سرپیچ بعدی برو.

۳) اگر لامپ آزموده نشده‌ای باقی مانده است به مرحله‌ی ۱ برو.

می‌توان ثابت کرد این الگوریتم در بدترین حالت، ۷۵۵۰ دقیقه طول می‌کشد.

الف. الگوریتمی بنویسید که حداکثر در ۵۰۰ دقیقه، ریسه را با ۵۰ لامپ روشن آماده کند. (۱۵ امتیاز)

ب. الگوریتمی بنویسید که حداکثر در ۲۵۰ دقیقه، ریسه را با ۵۰ لامپ روشن آماده کند. (۱۵ امتیاز)

توجه: حتماً در سطر اول پاسخ‌نامه، حداکثر زمان الگوریتم خود را بنویسید. در صورتی که فقط قسمت «ب» را به‌درستی حل کنید، نمره‌ی کامل این مسئله را خواهید گرفت.

مسئله‌ی ۴: خط ارتباطی .... ۳۵ امتیاز

محمد در اصفهان زندگی می‌کند و حسین در تهران. بین اصفهان و تهران یک خط ارتباطی ارزان وجود دارد که محمد برای فرستادن پیغام‌هایش به حسین از آن استفاده می‌کند. هر پیغام دنباله‌ای از ارقام ۰ یا ۱ (تعدادی بیت) است. متأسفانه تعدادی از دشمنان این دو دوست قصد دارند بین‌شان تفرقه ایجاد کنند؛ به همین دلیل برخی مواقع تعدادی از بیت‌های پیغامی که از این خط مبادله می‌شود را تغییر می‌دهند. محمد که از این موضوع مطلع شد یک خط ارتباطی گران قیمت بین اصفهان و تهران خرید. این خط از جاهای مخفی می‌گذرد و تضمین شده که بیت‌هایی که از آن رد می‌شود تغییری نخواهد کرد. ولی چون این خط ارتباطی گران قیمت است محمد دوست دارد تا حد ممکن مقدار کمی اطلاعات را از طریق این خط منتقل کند.

فرض کنید محمد قصد دارد 2^k بیت را از خط ارزان قیمت منتقل کند. بر حسب اطلاعات قبلی او می‌داند که حداکثر ۲ بیت از این اطلاعات ممکن است توسط دشمنان تغییر کند. حال او قصد دارد حداقل تعداد بیت را به عنوان اطلاعات کمکی هم‌زمان از خط گران قیمت برای حسین بفرستد به‌طوری‌که حسین با استفاده از این اطلاعات اضافی بتواند تشخیص دهد که آیا هیچ‌یک از 2^k بیت دریافتی تغییر کرده است یا خیر.

ثابت کنید اگر محمد کم‌تر از $k+1$ بیت اطلاعات از خط گران‌قیمت بفرستد حسین نمی‌تواند قاطعانه تشخیص دهد که آیا بیت‌های فرستاده‌شده تغییر کرده‌اند یا خیر.

موفق باشید!

مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۵: صندوق‌چه‌ها .... ۱۵ امتیاز

۵۲۸ صندوق‌چه با درهای بسته با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ موجودند. افرادی با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ این صندوق‌چه‌ها را یک‌به‌یک مورد بررسی قرار می‌دهند. در بررسی صندوق‌چه‌ی i توسط k، اگر i بر k بخش‌پذیر باشد، فرد شماره‌ی k وضعیت درِ صندوق‌چه‌ی i را تغییر حالت می‌دهد؛ اگر باز بود می‌بندد و اگر بسته بود آن‌را باز می‌کند.

می‌خواهیم تعدادی از این افراد را انتخاب کنیم تا آن‌ها هر کدام همه‌ی صندوق‌چه‌ها را بررسی کنند و در انتها فقط درِ صندوق‌چه‌ی شماره‌ی ۱ باز بماند و بقیه‌ی صندوق‌چه‌ها بسته باشند. ثابت کنید که دقیقاً یک گروه مشخص از افراد جواب این سوال است. درستی ادعای خود را اثبات نمایید.

مسئله‌ی ۶: جدول اصلاح‌پذیر .... ۲۰ امتیاز

جدولی به اندازه‌ی $m \times n$ که در هر خانه‌اش ۰ یا ۱ نوشته شده موجود است. در هر مرحله مقدار خانه‌ها را به این صورت عوض می‌کنیم:

مقدار جدید یک خانه در مرحله‌ی $i + 1$ام ۱ است اگر و فقط اگر در مرحله‌ی iام در خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستونش (به جز خود آن خانه) تعداد فردی ۱ وجود داشته باشد.

توجه کنید که برای هر خانه $m + n - 2$ خانه‌ی دیگر هم‌سطر یا هم‌ستونش وجود دارد.

یک جدول را «اصلاح‌پذیر» می‌گوییم اگر با شروع از این جدول و چند مرحله انجام عمل فوق بر روی کلیه‌ی خانه‌های جدول دوباره به جدول اصلی برسیم. اگر m و n هر دو زوج باشند، تعداد جداول اصلاح‌پذیر با اندازه‌ی $m \times n$ را به‌دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.

مسئله‌ی ۷: کلاه‌گذاری .... ۳۰ امتیاز

۱۳۸۵ دانش‌آموز با شماره‌های ۱ تا ۱۳۸۵ که شماره‌ی هر یک بر روی پیراهنش نوشته شده به‌ترتیب شماره‌هایشان در یک صف قرار گرفته‌اند. بر روی سر هر یک از این افراد کلاهی به رنگ آبی یا قرمز قرار دارد. هر فرد از رنگ کلاه خود بی‌خبر است ولی رنگ کلاه‌های حداکثر ۱۰ نفر جلوی خود و ۱۰ نفر پشت‌سرخود و شماره‌های این‌افراد را می‌تواند ببیند.

حال هر فرد بدون آن‌که با دیگران صحبتی کند رنگ کلاه خود را حدس می‌زند و با شماره‌ی خودش بر روی یک کاغذ می‌نویسد و به سرپرست تحویل می‌دهد. توجه کنید که کسی تقلب نمی‌کند. اگر بیش از ۴۰٪ بچه‌ها رنگ کلاه خود را درست تشخیص دهند به همه جایزه داده می‌شود. این دانش‌آموزان می‌توانند قبل از شروع این بازی با هم مشورت کنند و سیاست واحدی را اتخاذ کنند تا برنده شوند.

شما این سیاست را تعیین کنید و مشخص کنید که هر کس چه جوابی باید بدهد تا گروه برنده شود. درستی روش خود را اثبات کنید.

مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

مسئله‌ی ۸: آنتونیو .... ۳۵ امتیاز

کشور آنتونیو مقررات عجیبی برای خیابان‌کشی دارد. خیابان‌های این کشور باید مستقیم باشند و دو طرف هر خیابان پیاده‌رو داشته باشد. هر خیابان باید از دو طرف از شهر بیرون برود. هم‌چنین در شهرهای این کشور فقط چهارراه وجود دارد، یعنی هر تقاطعی محل برخورد تنها دو خیابان است.

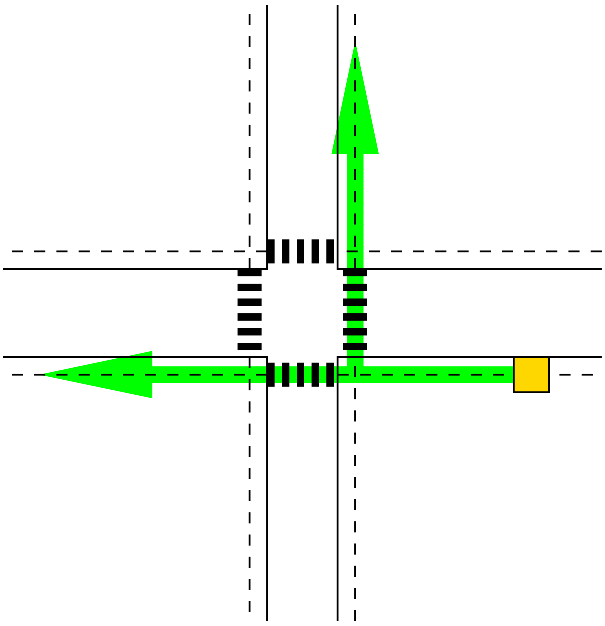
مردم پیاده فقط مستقیم بر روی پیاده‌رو حرکت می‌کنند مگر هنگامی که به چهار راه برسند، که در آن‌صورت دقیقاً از خط‌کشی عابر پیاده‌ی یکی از خیابان‌های آن چهار راه عبور می‌کنند و در همان جهتِ عبور به راه خود ادامه می‌دهند.

قرار است نقشه‌ی خیابان‌های یک شهر و محل خانه‌ی شهردار (در کنار یک خیابان) را طوری طراحی کنیم که اگر شهردار برای پیاده‌روی از خانه‌اش بیرون بیاید و مطابق مقررات حرکت کند بتواند به خانه‌اش برگردد.

برای این طراحی حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:

- خیابان‌ها فقط افقی و عمودی باشند.
- خیابان‌ها می‌توانند در هر راستایی باشند.

در هر حالت فوق تعیین کنید که آیا می‌توان چنین شهری را طراحی کرد یا خیر. در صورت مثبت بودن جواب مثالی بزنید که در آن خانه‌ی شهردار و مسیر حرکت او مشخص شده باشد. برای جواب منفی، ادعای خود را ثابت کنید.

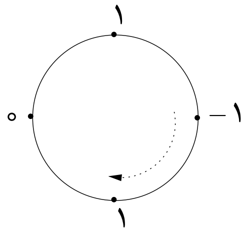


موفق باشید!

مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۱: دایره‌ی اعداد .... ۱۵ امتیاز

n عدد حقیقی ($n \geq ۱$) روی یک دایره نوشته شده‌اند. مجموع این اعداد ۱ است. از یک عدد دل‌خواه روی دایره شروع می‌کنیم و به‌ترتیب ساعت‌گرد، اعداد را می‌خوانیم. n عدد خوانده شده را به‌ترتیب در $۱^۳$، $۲^۳$، ... و $n^۳$ ضرب می‌کنیم. این n عدد را با هم جمع می‌کنیم. مثلاً در شکل زیر $n = ۴$ است.



اگر از عدد ۱− کار را آغاز کنیم، مجموع برابر

$$(-۱) \times ۱^۳ + ۱ \times ۲^۳ + ۰ \times ۳^۳ + ۱ \times ۴^۳ = ۷۱$$

می‌شود.

نشان دهید می‌توان از عددی بر روی دایره این کار را شروع کرد که نتیجه به‌دست آمده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{n^۳}{۴}$ باشد.

مسئله‌ی ۲: نقشه‌ی قابل ساخت .... ۲۵ امتیاز

در کشور عجایب تعدادی شهر، که یکی از آن‌ها پایتخت است، و تعدادی جاده وجود دارد که هر جاده دو شهر را به هم وصل می‌کند. می‌دانیم از هر شهر به پایتخت مسیری (شامل چند جاده و شهر میانی) وجود دارد. به زیرمجموعه‌ای از جاده‌ها یک «نقشه» می‌گوییم اگر دو شرط زیر را داشته باشد:

الف) با این مجموعه از جاده‌ها از هر شهری مسیری به پایتخت موجود باشد.

ب) با حذف هر یک از این جاده‌ها شرط «الف» دیگر برقرار نباشد.

در یک نقشه یک شهر غیر پایتخت را «تنها» می‌گوییم اگر با استفاده از جاده‌های این نقشه فقط به یکی از شهرهای دیگر جاده‌ی مستقیم داشته باشد. در یک نقشه فاصله‌ی هر شهر تا پایتخت برابر است با تعداد جاده‌های آن نقشه که باید طی کرد تا از آن شهر به پایتخت رسید. هزینه‌ی یک نقشه برابر مجموع فواصل شهرهای تنها تا پایتخت است.

یک نقشه «قابل ساخت» است اگر در بین همه‌ی نقشه‌ها کم‌ترین هزینه را داشته باشد. (ممکن است بیش از یک نقشه‌ی قابل ساخت داشته باشیم.)

ثابت کنید نقشه‌ی قابل ساختی وجود دارد که بین هیچ‌کدام از شهرهای تنهای آن جاده‌ای (از بین جاده‌های نقشه یا سایر جاده‌ها) وجود ندارد.

مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۳: دوربین‌های عکاسی .... ۳۰ امتیاز

شرکتی دوربین‌های عکاسی تولید می‌کند. هر مدلِ دوربینِ این شرکت با مجموعه‌ی قابلیت‌هایی که دارد شناخته می‌شود (یعنی دو دوربین با یک مجموعه‌ی قابلیت، از یک مدل محسوب خواهند شد و برعکس). مجموعه‌ی کل قابلیت‌هایی که یک دوربین می‌تواند داشته باشد برابر با مجموعه‌ی $A = \{a_۱, a_۲, \dots, a_n\}$ است.

در سال اولِ تأسیس، این شرکت دوربین‌های مدلِ $X_۱, X_۲, \dots, X_m$ را به بازار ارائه داد که به ترتیب دارای مجموعه‌ی قابلیت‌های $A_۱, A_۲, \dots, A_m$ بودند. برای این‌که تمام مدل ها دارای جذابیت مخصوص به‌خود باشند، هیچ کدام از این مدل‌ها تمام قابلیت های یک مدل دیگر را دارا نبود (یعنی اگر $A_i \subset A_j$ آن‌گاه $i = j$).

در سال دوم این شرکت تصمیم گرفت مجموعه‌ای از مدل‌ها را از روی مدل‌های ارائه شده در سال اول طراحی کند و به بازار ارائه کند. روش به این گونه بود که هر مدلی مثل Y با مجموعه‌ی قابلیت های B که دارای دو شرط زیر بود به بازار ارائه شد.

۱) به‌ازای هر مدل سال قبل مثل X_i، باید Y حداقل یکی از قابلیت‌های X_i را دارا باشد. (یعنی $B \cap A_i \neq \emptyset$).

۲) به‌ازای هر زیرمجموعه از B مثل B' که $B \neq B'$، مدلی که با قابلیت‌های B' تعیین می‌شود دارای شرط اول نباشد.

این شرکت همان طور که مجموعه‌ی مدل‌های سال دوم را از روی مدل‌های سال اول طراحی کرد، دقیقاً با همین روش مجموعه‌ی مدل‌های سال سوم را از روی مجموعه‌ی مدل‌های سال دوم طراحی کرد. ثابت کنید که مجموعه‌ی مدل‌های سال اول و سوم عیناً مانند هم است.

مسئله‌ی ۴: جای‌گشت‌ها .... ۳۰ امتیاز

تعریف: یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا n ترتیبی از اعداد ۱ تا n است که هر کدام از این اعداد دقیقاً یک‌بار در این ترتیب ظاهر شده است. (مثلاً $\langle ۴, ۳, ۱, ۲ \rangle$ یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا ۴ است).

بر روی جای‌گشتِ $P = \langle p_۱, p_۲, \dots, p_{۲k}, p_{۲k+۱} \rangle$ از اعداد ۱ تا $۲k + ۱$ تنها دو عمل زیر را می‌توانیم انجام دهیم:

چرخش سر: با حرف s نمایش داده می‌شود که جای‌گشتِ P را به جای‌گشتِ $\langle p_{۲k}, p_۱, p_۲, \dots, p_{۲k-۱}, p_{۲k+۱} \rangle$ تبدیل می‌کند.

چرخش دُم: با حرف d نمایش داده می‌شود که جای‌گشتِ P را به جای‌گشتِ $\langle p_۱, p_{۲k+۱}, p_۲, p_۳, \dots, p_{۲k} \rangle$ تبدیل می‌کند.

می‌خواهیم بدانیم با دو عمل بالا، چند تا از جای‌گشت‌های اعداد ۱ تا $۲k+۱$ را می‌توان مرتب کرد. برای مثال جای‌گشت $\langle ۴, ۲, ۱, ۳, ۵ \rangle$ (در این حالت $k = ۲$ است) به‌صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\langle ۴, ۲, ۱, ۳, ۵ \rangle \xrightarrow{d} \langle ۴, ۵, ۲, ۱, ۳ \rangle \xrightarrow{s} \langle ۱, ۴, ۵, ۲, ۳ \rangle \xrightarrow{d} \langle ۱, ۳, ۴, ۵, ۲ \rangle \xrightarrow{d} \langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \rangle$$

تعداد جای‌گشت‌های قابل مرتب شدن را به‌صورت یک فرمول برحسب k به‌دست آورید. این فرمول را در بالای برگه‌ی جواب به صورت واضح بنویسید و سپس گفته‌ی خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۵: صفر پاک‌کن .... ۲۰ امتیاز

اعداد ۱ تا ۱۰۰,۰۰۰ را پشت سر هم و با یک فاصله‌ی خالی بین هر دو عدد بر روی کاغذ می‌نویسیم. سپس رقم‌های صفر آن‌ها را پاک می‌کنیم (یعنی آن‌ها را با فاصله‌ی خالی جای‌گزین می‌کنیم.) توجه کنید که ممکن است با این کار از یک عدد تعدادی عدد دیگر تولید شوند: مثلاً از ۷۰۰۹۰ دو عدد ۷ و ۹ تولید می‌شوند. جمع اعداد حاصل چند است؟

نحوه‌ی محاسبه‌ی خود را به دقت و طی مراحل مشخص نشان دهید.

مسئله‌ی ۶: مجموعه‌ها .... ۲۵ امتیاز

فرض کنید که مجموعه‌های r عضوی $A_{۱}, A_{۲}, \dots, A_n$ و $B_{۱}, B_{۲}, \dots, B_n$ به‌گونه‌ای هستند که: $A_i \cap B_j = \emptyset$ اگر و تنها اگر $i = j$.

فرض کنید که مجموعه‌ی X از اجتماع تمام این مجموعه‌ها تشکیل شده باشد (یعنی $X = \bigcup_{i=۱}^{n}(A_i \cup B_i)$). هر جای‌گشتی از اعضای X را به‌صورت $\langle x_{۱}, \cdots, x_m \rangle$ نشان می‌دهیم (یک جای‌گشت از یک مجموعه یک ترتیب از اعضای آن است که هر عضوی از مجموعه دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده است.)

اگر A و B هر دو زیرمجموعه‌ی X و مجزا از یکدیگر باشند (یعنی $A \cap B = \emptyset$)، تعریف می‌کنیم که جای‌گشتِ $P = \langle x_{۱}, \dots, x_m \rangle$ از X، زوج مرتبِ (A, B) را تقسیم می‌کند، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $a \in A$ و هر $b \in B$، جایی که a در P ظاهر شده است قبل از جایی باشد که b ظاهر شده است (یعنی اگر $x_i = a$ و $x_j = b$ در آن صورت $i < j$).

الف) (۱۰ نمره) ثابت کنید امکان ندارد i و j وجود داشته باشند که $i \neq j$ باشد و جای‌گشتِ P از اعضای X یافت شود به‌طوری‌که جای‌گشت P زوج مرتب‌های (A_i, B_i) و (A_j, B_j) را تقسیم کند.

ب) (۱۵ نمره) ثابت کنید $n \leq \binom{۲r}{r}$.

مسئله‌ی ۷: مدار منطقی .... ۲۵ امتیاز

یک متغیر منطقی مانند a متغیری است که تنها مقادیر ۰ و ۱ را می‌پذیرد. دستگاهی داریم که $n + ۱$ متغیر منطقی x_i $(۰ \leq i \leq n)$ و $n + ۱$ متغیر منطقی y_i $(۰ \leq i \leq n)$ به آن وارد می‌شوند و یک متغیر منطقی r از آن خارج می‌شود. به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم $y_i = ۱ - x_i$. در ضمن همیشه $x_۰ = ۰$ و $y_۰ = ۱$ است. اگر دست‌کم دو تا از متغیرهای x_i مقدار ۱ داشته باشند، $r = ۱$ و در غیر این صورت $r = ۰$ خواهد بود.

دو نوع قطعه‌ی منطقی داریم که در ساخت این دستگاه از آن استفاده شده است. هر کدام از این قطعات دو ورودی و یک خروجی دارند. خروجی قطعه‌ی از نوع A تنها وقتی ۱ است که هر دو ورودی ۱ باشد. حال آن‌که خروجی قطعه‌ی از نوع B تنها وقتی ۰ است که هر دو ورودی ۰ باشد.

در ساخت این دستگاه از K قطعه استفاده کرده‌ایم که با شماره‌های ۱ تا K نشان داده می‌شوند. هر یک از ورودی‌های یک قطعه می‌تواند از ورودی‌های دستگاه (یعنی x_iها و y_iها) یا خروجی قطعات قبلی (با شماره کوچک‌تر) باشد. در ضمن خروجی دستگاه (همان r) خروجی آخرین قطعه است.

به‌عنوان مثال، ورودی‌های قطعه شماره ۱ ممکن است $x_۱$ و $y_۲$ باشند. قطعه‌ی شماره ۲ ممکن است ورودی‌هایش $x_۱$ و خروجی قطعه‌ی شماره ۱ باشند. قطعه‌ی شماره ۳ نیز ممکن است ورودی‌هایش را از خروجی قطعات ۱ و ۲ بگیرد.

الف) (۱۵ نمره) ثابت کنید که عدد $۱ \leq i \leq n$ و دو قطعه‌ی P و Q وجود دارند به‌طوری‌که هر یک از دو قطعه‌ی P و Q حداقل یکی از ورودی‌هایشان را از مجموعه‌ی $\{x_i, y_i\}$ می‌گیرند.

ب) (۱۰ نمره) نشان دهید که $K \geq ۲n - ۴$.

مسئله‌ی ۸: جدول‌های ستون‌متعادل .... ۳۰ امتیاز

یک جدول $n \times m$ (دارای n سطر و m ستون) از اعداد صفر و یک «ستون‌متعادل» است، اگر هر دو ستون مجزا از آن را که کنار هم قرار دهیم، تعداد زوج‌های ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱ که در سطرهای مختلف از این دو ستون قرار دارند برابر باشند. مثلاً جدول زیر ستون‌متعادل است زیرا اگر ستون ۱ و ۲ یا ۲ و ۳ و یا ۱ و ۳ از آن را در کنار هم قرار دهیم، از هر زوج ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱ یکی تولید می‌شود.

۰	۰	۰
۱	۰	۱
۰	۱	۱
۱	۱	۰

الف) (۱۵ نمره) به ازای هر k ($k \geq ۳$) یک جدول ستون‌متعادل $۲^k \times (۲^k - ۱)$ بسازید. (دارای ۲^k سطر و $۲^k - ۱$ ستون)

ب) (۱۵ نمره) می‌دانیم هیچ جدول ستون‌متعادلِ $۲^k \times (۲^k + ۱)$ وجود ندارد. حال ثابت کنید هیچ جدول ستون‌متعادل $۲^k \times ۲^k$ نیز نمی‌توان ساخت.

موفق باشید!

مسئله‌ی ۱: لیوان‌بازی .... ۲۰ امتیاز

یک میز چرخان مربع شکل را در نظر بگیرید که در هر یک از چهار گوشه‌ی آن یک عدد لیوان قرار دارد. هر لیوان یا رو به بالا (∪) است یا رو به پایین (∩). «محمد» که چشمانش بسته است، می‌خواهد با توجه به قواعد زیر با حداقل تعداد «حرکت» همه‌ی لیوان‌ها را یا رو به بالا کند و یا همه را رو به پایین. این کار زیر نظر یک داور انجام می‌شود. هر حرکت شامل همه‌ی مراحل زیر است که به‌ترتیب اجرا می‌شوند:

۱) داور میز را به دل‌خواه می‌چرخاند تا هر لیوانی که بخواهد در گوشه‌ی مورد نظرش قرار گیرد.

۲) محمد دو گوشه‌ی میز را انتخاب می‌کند. اگر این دو گوشه دو سر یک ضلع مربع باشند آن‌ها را گوشه‌های مجاور و اگر دو سر یک قطر باشند آن‌ها را گوشه‌های روبه‌رو می‌گوییم.

۳) محمد دو لیوان در گوشه‌های انتخابی را لمس می‌کند و می‌فهمد که هریک رو به بالاست یا رو به پایین.

۴) محمد با برعکس کردن تعدادی (شاید هیچ‌کدام) از این دو لیوان آن دو را به‌هر صورتی که لازم ببیند در می‌آورد.

۵) داور به محمد می‌گوید که آیا همه‌ی لیوان‌ها هم‌جهت هستند یا خیر. اگر هم‌جهت باشند که محمد موفق شده است و کار تمام است، وگرنه باید حرکت بعدی را انجام دهد.

آیا محمد می‌تواند با تعداد محدودی حرکت این کار را انجام دهد؟ در صورتی که جواب شما منفی است آن‌را اثبات کنید. برای جواب مثبت، حداقل تعداد حرکت‌ها را به‌دست آورید و نشان دهید که آن تعداد حرکت کمینه است.

نکته‌ی مهم: برای بیان استدلال یا الگوریتم خود <u>حتماً</u> از نمادهای ∩، ∪ و یا ? استفاده کنید و وضعیت لیوان‌ها را به‌صورت دنباله‌ی چهارتایی از این نمادها نشان دهید. مثلاً در ابتدا وضعیت ???? است، یعنی محمد نمی‌داند که لیوان‌ها در چه وضعی قرار دارند. اگر او در اولین حرکت دو لیوان مجاور را رو به پایین کند، وضعیت به صورت ∩∩??، ?∩∩?، ??∩∩ یا ∩??∩ در می‌آید و اگر وضعیت مثلاً ?∪∩? باشد و او دو لیوان روبه‌رو را به سمت بالا در آورد وضعیت به‌صورت ?∪∩∪ یا ∪∪∪? درمی‌آید.

مسئله‌ی ۲: مهره‌ها .... ۲۵ امتیاز

تعدادی مهره داریم که روی هرکدام یک عدد طبیعی نوشته شده است. هربار می‌توانیم یک مهره به شماره‌ی n را برداریم و به‌جای آن دو مهره‌ی جدید، یکی به شماره‌ی $n + ۱$ و یکی به شماره‌ی $۲n$ قرار دهیم. آیا همیشه، به ازای هر تعداد مهره‌ی اولیه (که ممکن است بعضی از آن‌ها شماره‌ی یکسان داشته باشند)، می‌توان با در پیش گرفتن روش مناسب به جایی رسید که هیچ دو مهره‌ای شماره‌ی برابر نداشته باشند؟

مسئله‌ی ۳: سیاره‌ی آلفا .... ۳۰ امتیاز

در سیاره‌ی آلفا که اخیراً کشف شده، $m \times n$ کشور وجود دارد. اطلاعات زیر درباره‌ی این کشورها کشف شده است:

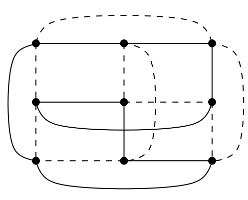
- $n \geq ۳$ و $m \geq ۳$.
- هر کشور با یک زوجِ مرتب از اعداد طبیعی به صورت (i,j) که $۱ \leq j \leq n$ و $۱ \leq i \leq m$ نام‌گذاری شده است.
- دو کشور $(i_۱,j_۱)$ و $(i_۲,j_۲)$ به هم جاده دارند، اگر و تنها اگر:
  - -- $i_۱ = i_۲$ و $|j_۱ - j_۲| = ۱$.
  - -- و یا اینکه $i_۱ = i_۲$ و $|j_۱ - j_۲| = n - ۱$.
  - -- و یا اینکه $j_۱ = j_۲$ و $|i_۱ - i_۲| = ۱$.
  - -- و یا اینکه $j_۱ = j_۲$ و $|i_۱ - i_۲| = m - ۱$.

  (در واقع هر کشوری به چهار کشورِ دیگر جاده دارد.)

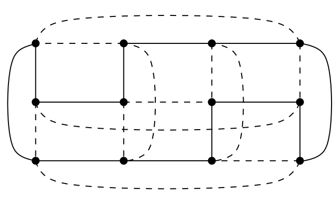
دو جهانگرد قصد دارند با شروع از یک کشورِ دلخواه، هر کدام سفری را به تمامِ کشورها انجام دهند و از هر کشوری در طول سفر دقیقاً یک بار عبور کنند و سرانجام به کشور شروعِ سفر بازگردند. امّا آن دو به دلایلی مایل نیستند از هیچ جاده‌ای که قبلا جهانگردِ دیگر از آن عبور کرده و یا درحال عبور است، عبور کنند.

ثابت کنید این دو نفر همواره می‌توانند سفرهای خود را با موفقیت برنامه‌ریزی کنند و به انجام برسانند.

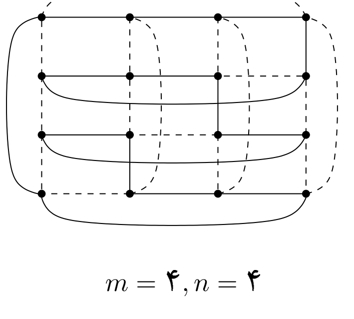
در شکل زیر، ۳ مثال برای حالت های $m = ۳, n = ۳$ و $m = ۳, n = ۴$ و $m = ۴, n = ۴$ کشیده شده است. خطوطِ نقطه چین مسیرِ سفرِ یکی و خطوطِ پررنگ مسیرِ سفرِ جهانگردِ دیگر است. در هر شکل، شهر (i,j) در سطر i و ستون j قرار دارد.



$m = ۳, n = ۳$



$m = ۳, n = ۴$



$m = ۴, n = ۴$

مسئله‌ی ۴: خاطره‌نویسی بارون .... ۲۵ امتیاز

پس از این‌که «ویولانته دو ریوالنده» (Violante de Rivalonde) برای همیشه از نزد «بارون کوزیمو لاورس دو روندو» (Baron Cosimo Laverse du Rondo) رفت، بارون از فرط ناراحتی خاطره‌نویسی‌های روزانه خود را متوقف کرد. اما پس از مدتی تصمیم گرفت دوباره آن را آغاز کند. اما این بار می‌خواست طوری بنویسد که تنها خودش بفهمد. بنابراین یک زبان رمز ابداع کرد که فقط از دو علامت X و O تشکیل شده بود و از این علائم برای نشان دادن حروف، فواصل خالی و نشانه‌های سجاوندی زبان مادری خود (که از این به بعد به آن‌ها هم حروف می‌گوییم) استفاده می‌کرد. به این ترتیب که برای هر کدام از این حروف، رمزی از علائم X و O تعیین کرد؛ مثلاً برای حرف d از رمز OX، برای s از رمز OOX، برای n از OXO، برای l از XO، برای a از XX، برای p از OO و برای e از X استفاده کرد. او برای نشان دادن یک کلمه، رمزهای تک‌تک حروف آن کلمه را به‌ترتیب پشت‌سرهم می‌نوشت.

یک روز که بارون یادداشت‌هایش را مرور می‌کرد به کلمه‌ی OOXXXOXOOX برخورد و نفهمید که این کلمه در اصل sand بوده یا pales. (شما هم امتحان کنید)

پس تصمیم گرفت رمزهای حروف را طوری تغییر دهد که هیچ دو ترتیب متفاوت از حروف (با معنی یا بی معنی) پس از رمز شدن به رشته‌ی یکسانی از علائم تبدیل نشود و در این کار موفق شد.

اگر در زبان مادری بارون k حرف وجود داشته باشد، و طول رمزهای جدید مربوط به این حروف برابر $\ell_۱$، $\ell_۲$، ...، ℓ_k شده باشند، نشان دهید:

$$\frac{۱}{۲^{\ell_۱}} + \frac{۱}{۲^{\ell_۲}} + \ldots + \frac{۱}{۲^{\ell_k}} \leq ۱$$

مسئله‌ی ۵: تحوّل و تطوّر .... ۲۵ امتیاز

به دنباله‌ای متناهی از حروف a و b که پشت سرهم قرار گرفته باشند یک کلمه می‌گوییم. مثلاً bbab یا aaaaa هر کدام یک کلمه هستند. قاعده‌ای به نام «قاعده‌ی تحول» وجود دارد که طبق آن با داشتن کلمه‌ای مثل W، اگر جایی در W، ab مشاهده کردیم می‌توانیم آن را به bba تبدیل کنیم و به این ترتیب کلمه‌ی جدیدی مثل W' به وجود بیاوریم. مثلاً کلمه‌ی aabab را می‌توان با قاعده‌ی تحول به هر یک از کلمات abbaab یا aabbba تبدیل کرد (بر حسب این‌که قاعده را روی اولین یا دومین ab اجرا کنیم).

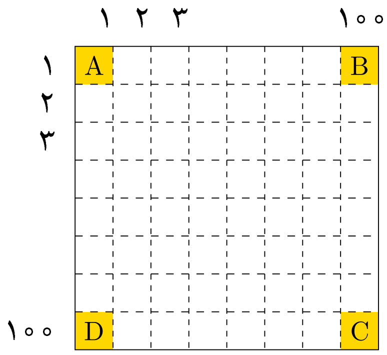
یک متخصص دستورزبان ادعا کرده‌است که «قاعده‌ی تحول توقف پذیر است.» یعنی اگر با هر کلمه‌ی دل‌خواه مثل $W_{۱}$ شروع کنیم، با قاعده‌ی تحول آن را به کلمه‌ای مثل $W_{۲}$ تبدیل کنیم، سپس مجدداً با قاعده‌ی تحول $W_{۲}$ را به کلمه‌ای مثل $W_{۳}$ تبدیل کنیم، و همین‌طور ادامه دهیم، به جایی می‌رسیم که دیگر روی کلمه‌ی به‌دست آمده نمی‌توان قاعده‌ی تحول را اجرا کرد.

الف) (۱۵ نمره) درستی یا نادرستی این ادعا را اثبات کنید.

ب) (۱۰ نمره) قانون دیگری به نام «قانون تطوّر» وجود دارد که شبیه به قاعده‌ی تحول است با این تفاوت که اگر در کلمه‌ی W، رشته‌ی ab را مشاهده کردیم، می‌توانیم آن را به bbaa تبدیل کنیم. آیا قانون تطوّر توقف‌پذیر است؟

مسئله‌ی ۶: حلزونِ آزمایشگاهی .... ۲۵ امتیاز

محققی بر روی رفتار نوعی حلزون تحقیق می‌کند. او دستگاهی شامل یک جدول ۱۰۰ × ۱۰۰ ساخته است و حلزون را روی آن قرار داده است. حلزون هر روز صبح شروع به حرکت می‌کند و هنگام شب به یکی از خانه‌های مجاور آن می‌رسد (اگر دو خانه ضلع مشترک داشته باشند می‌گوییم مجاورند) و شب را در آن‌جا استراحت می‌کند. فردا صبح دوباره حرکت را شروع می‌کند. در ضمن حلزون نمی‌تواند از جدول خارج شود. جدول در شکل زیر نشان داده شده است. نام چهار گوشه‌ی جدول را مطابق شکل خانه‌های A، B، C و D می‌گذاریم.



در هر یک از خانه‌های B، C و D یک دستگاه پرتاب کننده قرار دارد. این ۳ دستگاه هر شب فعال شده و در صورتی که حلزون در یکی از آن خانه‌ها باشد، آنرا به خانه‌ی A پرتاب می‌کند. در نتیجه در نیمه‌ی شب حلزون در خانه‌ی A قرار می‌گیرد و هنگام صبح حرکت را از آن‌جا ادامه می‌دهد.

محقق ما می‌خواهد بداند که حلزون چند بار و هر بار از چه خانه‌ای پرتاب شده است. بدین منظور بعضی روزها، هنگامی که حلزون می‌خواهد شروع به حرکت کند سر دستگاه می‌آید و یادداشت می‌کند که حلزون در کدام خانه قرار دارد.

فرض کنید که محقق صبحِ روز اول، صبح روز $k + 1$ام، صبح روز $2k + 1$ام، ...(یعنی هر k روز یک بار، از روز اول) به سراغ دستگاه می‌آید و هر بار، پس از دادن غذا به او، مکان حلزون را یادداشت می‌کند.

هدف محقق این است که تنها از اطلاعات یادداشت شده‌ی خود جواب سؤال را پیدا کند. یعنی همه‌ی دفعاتی که حلزون پرتاب شده و این‌که هربار از کدام خانه پرتاب شده را محاسبه کند. از طرف دیگر چون محقق سرش شلوغ است، می‌خواهد خیلی کم به حلزون سر بزند، یا به عبارت دیگر می‌خواهد مقدار k را بیشینه کند.

k را طوری محاسبه کنید که محقق بتواند به هدف خود برسد و نیز ثابت کنید جواب شما بزرگترین kی ممکن است.

در ابتدای جواب خود در برگه، مقداری را که برای k به دست آورده‌اید بنویسید.

مسئله‌ی ۷: اعداد نحس .... ۲۵ امتیاز

منظور از یک رشته عددیِ «از راست نامتناهی» دنباله‌ای بی‌پایان از رقم‌هاست که از سمت راست پشت سر هم قرار گرفته باشند. اگر دنباله‌ی رقم‌ها نه فقط از سمت راست، بلکه از سمت چپ نیز بدون توقف ادامه داشته باشد، آن رشته‌ی عددی را «از دو طرف نامتناهی» می‌گوییم.

می‌گوییم عدد N در یک رشته‌ی عددی وجود دارد، اگر در قسمتی از آن رشته عیناً ظاهر شده باشد. مثلاً عدد ۱۳۸۳ در رشته‌ی از راست نامتناهیِ زیر

۱۰۰۹۹۷۱۳۸۳۳۰۵......

و عدد ۲۰۰۴ در رشته‌ی از دوطرف نامتناهیِ زیر

......۹۳۲۲۰۰۲۰۰۴۰۱۵......

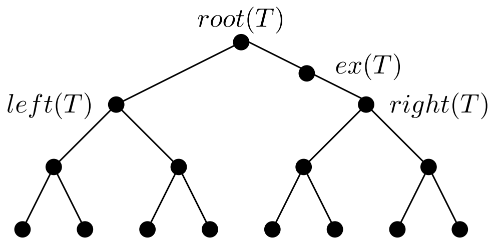
وجود دارد.

در یک تحقیق، تمام اعدادی را به‌دست آورده‌اند که از نظر ساکنین قبایل استوایی «نحس» شمرده می‌شوند. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ این اعداد باشند. نشان دهید اگر یک رشته‌ی عددیِ از راست نامتناهی موجود باشد که هیچ کدام از اعداد نحسِ فوق در آن وجود نداشته باشند، آن‌گاه یک رشته‌ی عددیِ از دو طرف نامتناهی با این خاصیت هم وجود دارد.

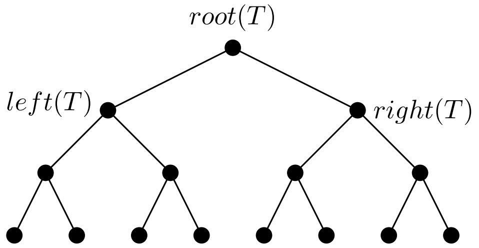
مسئله‌ی ۸: نشاندن درخت پُرگل .... ۲۵ امتیاز

در این مسئله نیاز به موجودی به‌نام «گراف» داریم؛ ولی فقط به شکل آن نه به مفاهیم نظریه‌ی گراف. گراف شکلی است شامل تعدادی «رأس» که با علامت • نشان داده می‌شوند و تعدادی یال بین برخی از رأس‌ها که با خطوط بین آن یال‌ها نشان داده می‌شوند. هر یال دقیقاً دو رأس را به‌هم وصل می‌کند که به آن رأس‌ها رئوس مجاور می‌گوییم.

درخت پُرِ T گرافی است با $۲^n - ۱$ رأس که یک رأس آن ریشه است که $root(T)$ خوانده می‌شود. $root(T)$ دو رأس مجاور دارد به نام‌های $left(T)$ و $right(T)$ که هر کدام ریشه‌ی درخت پُری با $۲^{n-۱} - ۱$ رأس هستند. اگر یک رأس بین ریشه و یکی از دو فرزند درخت پُرِ T اضافه کنیم، درختی با ۲^n رأس به‌دست می‌آید که آن‌را «پُرگل» و رأس اضافه را $ex(T)$ می‌نامیم. شکل زیر یک درخت پر با ۱۵ رأس و یک درخت پرگل با ۱۶ رأس را نشان می‌دهد.

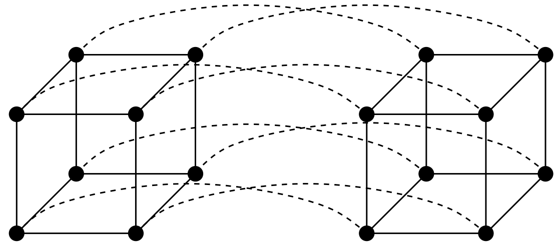


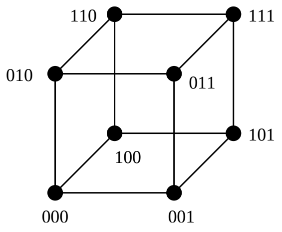
درخت پُرگل T



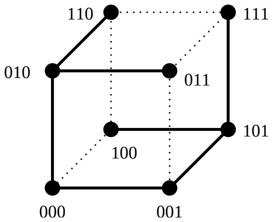
درخت پُر T

فوق مکعب از درجه‌ی n هم گرافی است با ۲^n رأس، که اگر هر رأس آن را با یک عدد n رقمی متمایز در مبنای ۲ نشان دهیم، هر رأس $a_۱a_۲\ldots a_n$ (که a_i یا صفر است و یا ۱) به n رأس دیگر وصل است. دو رأس به هم متصل‌اند اگر نمایش دودویی آن‌دو دقیقاً در یک رقم اختلاف داشته باشد. می‌توان دید که اگر دو فوق مکعب از درجه‌ی n را بگیریم و بین هر دو رأس از هر دو فوق مکعب با نمایش بیتی یکسان یک یال اضافه کنیم، یک فوق مکعب از درجه‌ی $n + ۱$ به‌دست می‌آید. شکل زیر یک فوق مکعب از درجه‌ی ۳ و فوق مکعب درجه‌ی ۴ را نشان می‌دهد.





نشان دهید که می‌توان یک درخت پرگل T با ۲^n رأس را در یک فوق مکعب ۲^n رأسی Q نشاند. یعنی می‌توان هر رأس T را در یک رأس Q قرار داد به‌طوری که دو رأس مجاور در T در Q نیز مجاور هم باشند. به شکل مقابل برای $n = ۳$ دقت کنید. روشن است که مسئله جواب‌های مختلف دارد و یکی کافی است.



الف) (۱۰ نمره) فقط با رسم شکل نشان دهید که چه‌گونه درخت پرگل ۱۶ رأسی را می‌توان در فوق مکعبی با ۱۶ رأس نشاند.

ب) (۱۵ نمره، ولی مشکل!) این مسئله را برای حالت کلی حل کنید.

مسئله‌ی اول: علی باینری .... ۲۰ امتیاز

علی کوچولو جمع اعداد دودویی را تازه یاد گرفته است و هنوز برخی از جمع‌ها را به‌خوبی انجام نمی‌دهد. در واقع او هنوز «دو بریک» (همان ده بر یک در مبنای دو) را حساب نمی‌کند. مثلاً اگر او بخواهد دو عدد ۱۰۱۰ و ۰۰۱۱ را جمع کند حاصل‌جمع را به‌صورت ۱۰۰۱ می‌نویسد، در صورتی‌که اگر «دو بر یک»‌ها را در نظر می‌گرفت جواب برابر ۱۱۰۱ می‌شد. در ضمن علی کوچولو یک بازی جدید یاد گرفته و بسیار هیجان‌زده است.

الف) (۱۰ امتیاز) او تمام رشته‌های از ۰ و ۱ به طول ۴ (به‌استثنای رشته‌ی ۰۰۰۰) را روی یک صفحه‌ی کاغذ نوشته است (جمعاً ۱۵ رشته)، هدف او از این بازی این است که این رشته‌ها را به ۴ دسته طوری تقسیم کند که وقتی دو عدد را از یک دسته جمع می‌کند حاصل‌جمع در یک دسته‌ی دیگر قرار داشته باشد (توجه کنید که علی کوچولو جمع دو عدد را به‌صورت بالا انجام می دهد). او چند روش را برای این تقسیم‌بندی امتحان کرده است ولی نتوانسته است این مسئله را حل کند و اکنون از شما می‌خواهد که به او کمک کنید.

این ۴ دسته‌بندی را بروی برگه‌ی پاسخ خود بنویسید.

ب) (۱۰ امتیاز) مادر علی کوچولو به او گفته که بلد است سؤال قسمت قبل را با ۳ دسته حل کند (یعنی ۱۵ رشته را به ۳ دسته و با همان شرایط تقسیم کند). با توجه به این اطلاعات ثابت کنید می‌توان تمام رشته‌های به طول $۴n$ به‌استثنای رشته‌ی ۰...۰۰ را به $۳n$ دسته طوری تقسیم کرد که جمعِ هیچ دو عدد از یک دسته (به‌روشِ علی کوچولو) در همان دسته نباشد.

مسئله‌ی دوم: جدول خوش ریخت .... ۲۵ امتیاز

می‌خواهیم خانه‌های یک جدول $n \times ۳$ (با n سطر و ۳ ستون) که n عددی فرد است را با اعداد ۱ تا $۳n$ به‌گونه‌ای پر کنیم که هر عدد دقیقاً در یک خانه نوشته شود و مجموع اعداد نوشته شده در هر یک از n سطر با سطر های دیگر یکسان باشد. مثلاً برای $n = ۳$، در جدول زیر که از اعداد ۱ تا ۹ پر شده است جمع اعداد خانه‌های هر سطر برابر ۱۵ است.

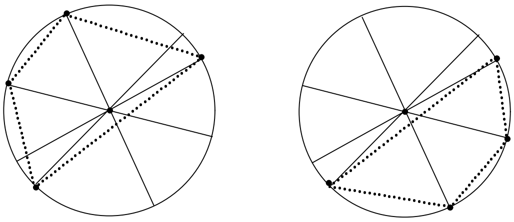
۱	۶	۸
۲	۴	۹
۳	۵	۷

آیا می‌توانید این کار را برای سایر مقادیر فردِ n انجام دهید؟ شما باید در جواب یک روش کلی برای پر کردن جدول‌های $n \times ۳$ ارایه دهید.

مسئله‌ی سوم: قطرها .... ۲۵ امتیاز

در دایره‌ای n قطر مختلف رسم شده است. هر قطر دو نقطه‌ی انتهایی دارد (نقاط تلاقی قطر با دایره)، پس در مجموع $۲n$ نقطه انتهایی داریم. یک مجموعه‌ی «متعادل» مجموعه‌ای از n نقطه‌ی انتهایی است به‌گونه‌ای که دقیقاً یکی از دو نقطه‌ی انتهایی هر قطر در این مجموعه باشد، و علاوه بر آن، اگر یک n ضلعی ساده رسم کنیم که رئوس آن، نقاطِ عضو این مجموعه باشند، مرکز دایره داخل این n ضلعی قرار گیرد. (منظور از n ضلعی ساده، شکلی است با n راس و n ضلع که اضلاع آن فقط در رأس ها با یکدیگر برخورد می کنند).

مثلاً در یکی از دو شکل زیر نقاط مشخص شده یک مجموعه‌ی متعادل را تشکیل می‌دهند در صورتی‌که در شکل دیگر مجموعه‌ی مشخص شده متعادل نیست، چون مرکز دایره درون ۴ ضلعی قرار ندارد.



به‌ازای هر عدد طبیعی n ($n > ۲$) اگر در دایره n قطر مختلف و دل‌خواه رسم کنیم، چند مجموعه‌ی متعادل مختلف از نقاط خواهیم داشت؟ ادعای خود را دقیقاً اثبات نمایید.

مسئله‌ی چهارم: صندوقچه‌های پر رمز و راز .... ۳۰ امتیاز

n صندوقچه‌ی جادویی با شماره‌های ۱ تا n داریم. زیرِ هر صندوقچه، یک عدد بین ۱ تا n نوشته شده است (ممکن است اعداد نوشته شده در زیر چند صندوقچه با هم یکسان باشند). توجه کنید ما نمی‌توانیم اعداد نوشته‌شده در زیر صندوقچه‌ها را بخوانیم.

در هر صندوقچه تعدادی یاقوت سرخ وجود دارد. ابتدا درِ همه‌ی صندوقچه‌ها بسته است، ولی می‌توان هر بار درِ یک صندوقچه را باز کرد، تعداد یاقوت‌های درون آن را شمرد و درِ آن‌را بست. نکته‌ی اسرارآمیز این صندوقچه‌ها آن‌است که به‌محض بستن درِ یک صندوقچه تمامی یاقوت‌های درون آن به صندوقچه‌ای منتقل می‌شوند که شماره‌ی آن، زیرِ این صندوقچه نوشته شده است.

به‌عنوان مثال، به جدول زیر توجه کنید:

شماره‌ی صندوقچه	عدد نوشته شده زیر صندوقچه	تعداد اولیه‌ی یاقوت‌ها
۱	۲	۶
۲	۲	۸
۳	۱	۳

اگر در ابتدا درِ صندوقچه شماره‌ی ۳ را باز کنیم، ۳ یاقوت می‌بینیم ولی به محض بستن درِ آن، این صندوقچه خالی شده و تمام یاقوت‌های آن به صندوقچه‌ی شماره ۱ منتقل می‌شود. حال اگر درِ صندوقچه‌ی شماره ۲ را باز کنیم، ۸ یاقوت می‌بینیم ولی با بستن در، چون زیرِ این صندوقچه عدد ۲ نوشته شده است ۸ یاقوت در همین صندوقچه باقی می‌مانند. سپس اگر درِ صندوقچه‌ی شماره‌ی ۱ را باز کنیم، ۹ یاقوت می‌بینیم (۶ یاقوت از قبل و ۳ یاقوت از صندوقچه‌ی شماره‌ی ۳). با بستن درِ آن، این صندوقچه هم خالی می شود و اکنون در صندوقچه‌ی شماره‌ی ۲، ۱۷ یاقوت موجود است. اگر دوباره درِ صندوقچه‌ی شماره‌ی ۱ را باز کنیم یاقوتی نمی‌بینیم.

توجه کنید که مجاز نیستیم هم‌زمان درِ چند صندوقچه را باز کنیم یا به یاقوت‌ها دست بزنیم؛ فقط می‌توانیم درِ یک صندوقچه‌ی دل‌خواه را باز کنیم، یاقوت‌های درون آن را بشماریم و درِ آن را ببندیم.

ثابت کنید با انجام عمل فوق (به تعدادِ دل‌خواه) می‌توان از تعداد کل یاقوت‌ها مطلع شد.

(موفق باشید)

مسئله‌ی پنجم: لامپ‌ها .... ۲۰ امتیاز

شرکت «برادران علی‌کوچولو» یک شرکت بزرگ تولید جغجغه‌های رنگی است که ساختمان آن تعداد زیادی اتاق و تعداد زیادی لامپ دارد. این شرکت برای سیم‌کشی لامپ‌های ساختمانش «آوریل دالتون» را استخدام کرده بود. بعد از سیم‌کشی معلوم شد که آوریل نه تنها از تعداد مساوی کلید و لامپ استفاده نکرده، بلکه هر کلید را به چند لامپ و هر لامپ را به چند کلید وصل کرده است. به این ترتیب، با زدن یک کلید، هر یک از لامپ‌های متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد (یعنی از روشن به خاموش یا برعکس تغییر می‌کند.) به‌این دلیل، در پایان هر روز که کارمندان می‌خواهند با زدن کلیدها همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کنند با مشکل مواجه می‌شوند. (این تنها راه خاموش کردن لامپ‌هاست. قطع فیوز، یا شُل کردن لامپ‌ها یا کارهای مشابه‌ی دیگر مجاز نیست!) می‌دانیم که در آغاز هر روز همه‌ی لامپ‌ها خاموش‌اند. پس در پایان روز همیشه می‌توان بعضی از کلیدها را زد که همه‌ی لامپ‌ها دوباره خاموش شوند.

شرکت برای حل مشکل خاموش کردن لامپ‌ها «لوک خوش‌شانس» را استخدام کرده است تا در پایان هر روز همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کند. «لوک» پس از عقد قرارداد و بررسی مشکل، کلیدهارا از ۱ تا N (N تعداد کلیدها) شماره‌گذاری کرد و جدولی با N خانه تهیه کرد تا در خانه‌ی iام بنویسد که کلید iام زده می‌شود یا خیر. او در انتهای هر روز، جدول را بر اساس وضعیت فعلی لامپ‌ها پر می‌کرد و بعضی از کلیدها را مطابق آن می‌زد. با این کار همه‌ی لامپ‌ها خاموش می‌شدند.

الف) (۱۰ امتیاز) ثابت کنید که تعداد جدول‌های مختلفی که لوک برای خاموش کردن همه‌ی لامپ‌ها در انتهای هر روز می‌تواند تهیه کند ثابت است و این تعداد بستگی به وضعیت لامپ‌ها در انتهای روز ندارد و فقط به نحوه‌ی سیم‌کشی آوریل وابسته است.

ب) (۱۰ امتیاز) ثابت کنید که این تعداد توانی از ۲ است.

مسئله‌ی ششم: جدولِ رنگی .... ۲۵ امتیاز

یک جدولِ «مجموعه‌ای»، جدولی با ۲ سطر و n ستون ($n \geq ۲$) است که در هریک از ۲n خانه‌ی آن یکی از ۳ مجموعه‌ی $\{۱,۲\}$، $\{۱,۳\}$ و یا $\{۲,۳\}$ نوشته شده است. دو خانه از جدول را «مجاور» می‌نامیم اگر در یک ضلع مشترک باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم خانه‌ی اولِ هر سطر و خانه‌ی nاِم همان سطر مجاور هستند. (بنابراین هر خانه‌ی جدول دقیقاً با سه خانه‌ی دیگر مجاور است.)

اگر یکی از دو عددِ مجموعه‌ی نوشته شده در هر خانه‌ی یک جدولِ مجموعه‌ای را پاک کنیم (در هر خانه تنها یک عدد باقی بماند)، به‌گونه‌ای که اعداد باقی‌مانده در هیچ دو خانه‌ی مجاور آن یکسان نباشند، یک جدولِ «رنگی» ساخته‌ایم.

برای مثال در زیر یک جدول مجموعه‌ای با دو جدول رنگی به‌دست آمده از آن نمایش داده شده است.

۳	۱	۳	۲
۲	۳	۲	۱

⟹

$\{۲,۳\}$	$\{۱,۲\}$	$\{۱,۳\}$	$\{۱,۲\}$
$\{۱,۲\}$	$\{۲,۳\}$	$\{۱,۲\}$	$\{۱,۳\}$

⟸

۲	۱	۳	۱
۱	۳	۲	۳

یک جدولِ مجموعه‌ای داده شده است که در آن هیچ دو خانه‌ی مجاوری وجود ندارند که مجموعه‌های نوشته‌شده در آن خانه‌ها یکسان باشد. ثابت کنید می‌توان از این جدول حداقل دو جدول رنگی مختلف ساخت.

مسئله‌ی هفتم: مرتب‌سازی کارتی .... ۲۵ امتیاز

شرکت YSC دستگاه‌های الکترونیکی مختلفی را تولید و به بازار روانه کرده است. از جمله دستگاه کارت‌خوان، دستگاه مقایسه‌گر و کارت‌های مغناطیسی. هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان و نیز هر کارت مغناطیسی یک حافظه دارد که یک عدد در آن ذخیره می‌شود. هنگامی که یک کارت مغناطیسی را به دستگاه کارت‌خوان وارد کنیم دو نوع عمل می‌توانیم انجام بدهیم:

- با فشار دادن دکمه‌ی «سبز» دستگاه کارت‌خوان، عدد ذخیره شده در کارت پاک می‌شود و به‌جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت‌خوان نوشته می‌شود.
- با فشار دادن دکمه‌ی «قرمز» عکس این عمل انجام می‌شود، یعنی عدد ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان پاک می‌شود و به‌جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت نوشته می‌شود.

کار دستگاه مقایسه‌گر آن است که وقتی دو کارت را به‌طور هم‌زمان به دو ورودی آن وارد کنیم دستگاه نشان می‌دهد که عدد ذخیره‌شده در کدام‌یک از کارت‌ها بزرگ‌تر است. در صورت مساوی بودن این دو عدد دستگاه آن‌را نیز مشخص می‌دهد.

در یک روز تعطیل، شرکت YSC تصمیم گرفت یک بازی دسته‌جمعی بین ۱۰۰ کارمند خود برگزار کند. برای این بازی ۱۰۰ دستگاه کارت‌خوان روی یک میز طولانی به‌ترتیب از چپ به راست قرار داده شد. هم‌چنین دو عدد کارت و یک دستگاه مقایسه‌گر و یک قلم و دفترچه‌ی یادداشت به هر کارمند داده شد.

این بازی در ۱۰۱ مرحله انجام می‌شود. در هر مرحله‌ی بازی، هریک از کارمندان می‌تواند یکی از دستگاه‌های کارت‌خوان را انتخاب و یک بار از آن استفاده کند (یعنی یکی از کارت‌های خود را وارد آن دستگاه نماید، فقط یکی از کلیدهای سبز یا قرمز را فشار دهد و کارت را خارج کند). توجه کنید که هر دستگاه کارت‌خوان در هر مرحله تنها می‌تواند مورد استفاده‌ی یک کارمند قرار گیرد. اما هر کارمند می‌تواند به هر تعداد و در هر زمان از دستگاه مقایسه‌گر خود استفاده کند.

چون اعداد به‌صورت الکترونیکی در حافظه‌ها ذخیره می‌شوند کارمندان به هیچ روشی نمی‌توانند از مقدار عددهای ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها یا کارت‌ها مطلع شوند. هم‌چنین هیچ‌یک از کارمندان نمی‌تواند کارت خود را در اختیار هم‌کارانش بگذارد یا به دستگاه مقایسه‌گر دیگران وارد کند.

در ابتدای بازی در حافظه‌ی هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان یک عدد ذخیره شده است به‌طوری‌که این اعداد از هم متمایزند. هدف آن است که اعدادی که که در ابتدای بازی در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها ذخیره شده بودند در انتهای مرحله‌ی ۱۰۱ ام به‌صورت مرتب‌شده از چپ به راست در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها قرار داشته باشند. یعنی کوچک‌ترین عدد از بین ۱۰۰ عدد اولیه، در پایان بازی در حافظه‌ی سمت چپ ترین کارت‌خوان، دومین عدد در حافظه‌ی کارت‌خوان بعدی و ...و به همین ترتیب بزرگ‌ترین عدد در حافظه‌ی سمت راست‌ترین کارت‌خوان ذخیره شده باشد.

یک شیوه طراحی کنید که اگر کارمندان بر اساس آن قبل از شروع بازی هماهنگ شوند و بر طبق آن بازی کنند، به هدف بازی دست پیدا کنند. برای این‌کار نشان دهید که یک کارمند دل‌خواه در هر مرحله چه‌کاری و با کدام کارت‌خوان انجام می‌دهد.

مسئله‌ی هشتم: انتقال مهره‌ها .... ۳۰ امتیاز

سارا و برادرش دارا مشغول یک بازی هستند. این بازی روی یک صفحه‌ی شطرنجی بسیار بزرگ انجام می‌شود. صفحه در ابتدا خالی است و سارا ۹۰۰ مهره دارد. بازی به‌صورت مرحله‌ای انجام می‌شود و هدف آن است که سارا و دارا با مشارکت هم کاری کنند که در کم‌ترین تعداد مرحله تمام مهره‌های سارا به دارا منتقل شود.

در هر مرحله از بازی یکی از دو کار زیر را می‌توان انجام داد.

۱) سارا می‌تواند یک سطر از جدول را انتخاب کند و تعدادی از مهره‌های خود را در خانه‌های دل‌خواهی از آن سطر قرار دهد.

۲) دارا می‌تواند یک ستون را انتخاب کند و همه‌ی مهره‌های آن ستون را بردارد.

شرط مهم بازی آن‌است که در هیچ زمانی تعداد مهره‌های موجود در صفحه نباید از ۳۶ عدد بیش‌تر شود. بدیهی است که در یک زمان نمی‌توان بیش از یک مهره در یک خانه قرار داد.

روشن است که این‌کار را در ۳۰۰ مرحله می‌توان انجام داد. این روش در زیر نمایش داده شده است که در آن هر x یک مهره است و عددها شماره‌های مرحله‌ها را نشان می‌دهند. اگر شماره‌ی یک مرحله در سمت چپ سطری نوشته شده باشد، در آن مرحله سارا در آن سطر ۶ مهره گذاشته است. شماره‌ی مرحله در بالای یک ستون به این معنی است که دارا در آن مرحله ۶ مهره‌ی موجود در آن ستون را برداشته است. روشن است که لزومی ندارد که سارا و دارا یک در میان بازی کنند.

```
   7  8  9 10 11 12
 1 x  x  x  x  x  x
 2 x  x  x  x  x  x
 3 x  x  x  x  x  x
 4 x  x  x  x  x  x
 5 x  x  x  x  x  x
 6 x  x  x  x  x  x 19 20 21 22 23 24
                  13 x  x  x  x  x  x
                  14 x  x  x  x  x  x
                  15 x  x  x  x  x  x
                  16 x  x  x  x  x  x
                  17 x  x  x  x  x  x
                  18 x  x  x  x  x  x
                                   25 ..................
                                   26 ..................
```

روشی برای این بازی ارایه دهید که تعداد مرحله‌های آن

الف) (۲۰ امتیاز) از ۲۳۰ تا ۲۴۰ باشد،

ب) (کل امتیاز) کم‌تر از ۲۳۰ باشد.

راه‌حل‌های خود را به‌طور خلاصه توضیح دهید و مانند شکل فوق آن‌را نمایش دهید.

(موفق باشید)

مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

مسأله‌ی اول: جدولِ پُرِیک .... ۱۰ امتیاز

در هر خانه از یک جدول، که ۲^k سطر و n ستون دارد، یکی از اعداد صفر یا ۱ نوشته شده است به‌طوری‌که تعداد ۱ های هر سطر بیش‌تر یا مساوی تعداد صفرهای آن است. ثابت کنید که می‌توان k (یا کم‌تر از k) ستون از n ستون جدول را انتخاب کرد و خانه‌های آن ستون‌ها را رنگ نمود، به گونه‌ای که حداقل یکی از ۱ های هر سطر در خانه‌های رنگ شده باشد.

مسأله‌ی دوم: دوایر مسلط .... ۱۵ امتیاز

n نقطه در صفحه داده شده است. می‌خواهیم به‌ازای k ی داده‌شده، k دایره با شعاع مساوی را طوری در صفحه رسم‌کنیم که تمام n نقطه را در برگیرند (یعنی هر نقطه داخل یا روی محیط لااقل یک دایره بیافتد) و شعاع دایره‌ها در حد امکان کوچک باشد.

برای این کار ابتدا مجموعه‌ی تهی S را در نظر می‌گیریم. سپس یکی از نقاط را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و در مجموعه‌ی S قرار می‌دهیم. در مرحله‌ی اول نقطه‌ای را به مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌ترین فاصله را با نقطه‌ی درون S دارد؛ این فاصله را $a_۱$ می‌نامیم. به همین ترتیب در مرحله‌ی i ام نقطه‌ای را به مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌ترین فاصله را از مجموعه‌ی S دارد (فاصله‌ی یک نقطه‌ی دل‌خواهِ A از مجموعه نقاط S را فاصله‌ی A تا نزدیک‌ترین نقطه‌ی S به A تعریف می‌کنیم). این بیش‌ترین فاصله را a_i می‌نامیم. بعد از انجام $k - ۱$ مرحله، حال مجموعه‌ی S شامل k نقطه است و فاصله‌های $a_۱$، $a_۲$، ...، و $a_{k-۱}$ تعیین شده‌اند. فرض کنید مرحله‌ی k ام را نیز انجام دهیم ولی با این تفاوت که در این مرحله نقطه‌ی به دست آمده را به S اضافه نمی‌کنیم، و فقط فاصله‌ی a_k را یادداشت می‌کنیم.

الف) ثابت کنید اگر k دایره به مراکز نقاط درون S و به شعاع a_k در صفحه رسم کنیم، این دایره‌ها تمام n نقطه را در برمی‌گیرند. (۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر عدد r، اگر k دایره‌ی دل‌خواه به شعاع r وجود داشته باشند که تمام n نقطه را در برگیرند، آن‌گاه خواهیم داشت: $a_k \leq ۲r$. (۱۰ نمره)

مسأله‌ی سوم: مستطیل‌های سیاه .... ۱۵ امتیاز

خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با دو رنگ سفید و سیاه به طور دل‌خواه رنگ کرده‌ایم. یک زیر مجموعه‌ی مستطیل شکل به ابعاد a و b ($۱ \leq a \leq m$ و نیز $۱ \leq b \leq n$) از خانه‌های جدول را یک زیر مستطیل سیاه می‌نامیم اگر تمامی $a \times b$ خانه‌ی داخل آن، سیاه باشند. یک زیرمستطیل سیاه را «غیر قابل گسترش» می‌نامیم، هرگاه هیچ زیرمستطیل سیاه دیگری شامل تمامی خانه‌های آن نباشد. ثابت کنید تعداد زیرمستطیل‌های سیاهِ غیر قابل گسترش بیش‌تر از mn نیست.

مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

مسأله‌ی چهارم: ماشینِ کوانتومیِ هاتی .... ۲۰ امتیاز

ماشین محاسباتی «هاتی» دارای n خانه‌ی حافظه‌ی $M_۱$، $M_۲$، ...، و M_n است. هر یک از این خانه‌های حافظه می‌توانند یکی از مقادیر ۰ یا ۱ را در خود ذخیره کنند. برای راحتی کار اعداد ذخیره شده در خانه‌های حافظه را با یک رشته به طول n از ۰ و ۱ نمایش می‌دهیم که در آن $M_۱$ عنصر سمت چپ است: $(M_۱, M_۲, \ldots, M_n)$.

هاتی می‌تواند دو نوع دستورالعمل ساده را اجرا کند:

- دستورِ `C i`. در این دستور `i` یک عدد صحیح بین ۱ تا n است. با اجرای این دستور، عدد ذخیره‌شده در خانه‌ی حافظه‌ی M_i عوض می‌شود (از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌کند).
- دستورِ `D i`. در این‌جا نیز `i` یک عدد صحیح بین ۱ تا n است. هاتی برای اجرای این دستور عدد ذخیره‌شده در تمامی خانه‌های حافظه به‌جز M_i را بررسی می‌کند: در صورتی که تمامی این مقادیر ۱ بودند، فقط عدد ذخیره‌شده در M_i را عوض می‌کند، و در غیر این صورت (اگر حداقل یکی از آن‌ها صفر بود) تغییری در مقادیر خانه‌ها ایجاد نمی‌کند.

مثلا فرض کنید هاتی ۳ خانه‌ی حافظه دارد که مقادیر $(۱, ۰, ۰)$ در آن ذخیره شده‌اند. حال اگر دستور `C 2` را به ماشین بدهیم، این مقادیر تبدیل به $(۱, ۱, ۰)$ خواهند شد. در ادامه اگر دستور `D 1` را وارد کنیم، حاصل برابر $(۱, ۱, ۱)$ می‌شود. اما اگر دستور `D 1` را قبل از دادن دستور `C 2` به ماشین می‌دادیم، حاصل همان $(۱, ۰, ۰)$ باقی می‌ماند.

یک «جدول صورتِ مسأله»، جدولی شامل ۲^n سطر و ۲ ستون است که در هر ستون آن تمامی رشته‌های به طول n از ۰ و ۱، هر رشته دقیقاً یک بار، آمده است. به رشته‌های ستون اول «رشته‌های ورودی» و به رشته‌های ستون دوم «رشته‌های خروجی» می‌گوییم. ما باید برای هاتی یک «برنامه» بنویسیم به نحوی که اگر هر یک از رشته‌های ورودی در خانه‌های حافظه‌ی هاتی باشد، پس از اجرای این برنامه، رشته‌ی خروجی هم‌سطر با آن رشته‌ی ورودی در حافظه‌ی هاتی قرار گرفته باشد.

یک برنامه شامل چند دستورالعمل است که پشت سرهم نوشته شده‌اند. هنگامی که یک برنامه را به هاتی بدهیم، دستورالعمل‌های این برنامه به ترتیب اجرا می‌شوند. مثلاً فرض کنید هاتی ۲ خانه‌ی حافظه دارد ($n = ۲$) و جدول صورت مسأله‌ی زیر داده شده است:

رشته‌ی ورودی	رشته‌ی خروجی
$(۰, ۰)$	$(۰, ۱)$
$(۰, ۱)$	$(۱, ۰)$
$(۱, ۰)$	$(۱, ۱)$
$(۱, ۱)$	$(۰, ۰)$

یک برنامه‌ی نمونه که این کار را انجام می‌دهد به‌صورت زیر است:

```
D 1
C 2
```

الف) یک جدول صورت مسأله را «ساده» می‌نامیم اگر در آن هر رشته‌ی ورودی مساوی رشته‌ی خروجیِ هم‌سطرش باشد، به جز دو رشته‌ی A و B که این دو رشته فقط در یکی از n عنصر خود با هم تفاوت داشته باشند. توجه کنید که در این جدول، A رشته‌ی خروجی هم سطر با رشته‌ی ورودی B و هم‌چنین B، رشته‌ی خروجی هم سطر با رشته‌ی ورودی A است. ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مسأله‌ی ساده، یک برنامه نوشت. (۵ نمره)

ب) ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مسأله، یک برنامه نوشت. (۱۰ نمره)

«موفق باشید»

مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

مسأله‌ی پنجم: جغجغه‌های رنگارنگ .... ۱۰ امتیاز

یک کارخانه‌ی تولید اسباب‌بازی، جغجغه‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند. این کارخانه برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که n جغجغه در هریک جا می‌گیرد. ثابت کنید کارخانه می‌تواند هر nk جغجغه (با تعداد دلخواهی جغجغه از هر رنگ) را به گونه‌ای در k بسته جای دهد که در هر جعبه، جغجغه‌ها حداکثر ۲ رنگ مختلف داشته باشند.

مسأله‌ی ششم: کارت‌های دور دایره .... ۲۰ امتیاز

۵۵ کارت داریم که روی آن‌ها اعداد مختلفی نوشته شده‌است، و ما از مقادیر آن‌ها بی‌اطلاع هستیم. کارت‌ها روی دایره‌ای به پشت چیده شده اند به گونه‌ای که ما عدد نوشته شده روی آن‌ها را نمی‌بینیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از کارت‌ها را انتخاب کرده، آن را برگردانیم، عدد نوشته‌شده روی آن را بخوانیم و دوباره آن را سر جای خود بگذاریم. می‌خواهیم روشی ارائه دهیم که با برگرداندن تعداد کمی کارت، ۳ کارت مجاور هم پیدا کنیم که عدد نوشته شده روی کارت وسط از اعداد نوشته شده روی دو کارت کناری آن بیش‌تر باشد.

الف) ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حداکثر ۱۳ کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم. (۱۰ نمره)

ب) ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حداکثر ۹ کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم. (حل این بند با برگرداندن حداکثر ۱۰ کارت ۵ نمره خواهد داشت.) (۱۰ نمره)

مسأله‌ی هفتم: مشکلات دولت .... ۳۰ امتیاز

به علت برخی مشکلات سیاسی در کشور «یوتوپیا»، بین نمایندگان مجلس این کشور اختلاف افتاده است به طوری که هر نماینده‌ی مجلس با تعدادی از نمایندگان دیگر مشکل پیدا کرده است و حاضر به نشستن با هیچ‌یک از آن‌ها سر یک میز نیست. رئیس‌جمهور این کشور برای حل این مشکل به شرکت «زتروس» روی آورده است. این شرکت دو ماشین قابل برنامه‌ریزی A و B را خریداری کرده است. هر برنامه‌ای که به این ماشین‌ها داده می‌شود از چهار قسمت تشکیل شده است:

- قسمت اول شامل تعدادی متغیر است که باید نام‌های آن‌ها به ماشین داده شوند.
- در قسمت دوم تعدادی نابرابری به ماشین داده می‌شود که همگی باید به شکل زیر باشند:

$$a_{۱}x_{۱} + a_{۲}x_{۲} + \ldots + a_k x_k \geq b$$

توجه کنید که جهت بزرگتر نابرابری‌ها باید رو به متغیرها باشد. در نابرابری بالا k یک عدد طبیعی دل‌خواه است. همچنین $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، a_k و b اعداد حقیقی دل‌خواه و $x_{۱}$، $x_{۲}$، ...، و x_k تعدادی از متغیرها هستند.

- درقسمت سوم یکی از دو کلمه‌ی minimum و یا maximum به ماشین داده می‌شود.
- در قسمت چهارم تعدادی از متغیرها به عنوان «متغیرهای اصلی» به ماشین معرفی می‌شوند.

اگر چنین برنامه‌ای را به ماشین A بدهیم، این ماشین به هر یک از متغیرها یک مقدار حقیقی نامنفی طوری نسبت می‌دهد که اولاً تمامی نابرابری‌ها برقرار باشند و ثانیاً مجموع متغیرهای اصلی بر حسب این‌که کلمه‌ی انتخاب شده minimum یا maximum بوده، کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار ممکن خود را داشته باشد. در پایان، ماشین مقادیر نسبت داده شده به متغیرها و مجموع متغیرهای اصلی را چاپ می‌کند.

فرق ماشین B با ماشین A تنها در این نکته است که این ماشین به جای مقادیر حقیقی نامنفی، فقط می‌تواند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را به متغیرها نسبت دهد. این ماشین نیز مانند ماشین A کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار مجموع متغیرهای اصلی را با حفظ درستی نابرابری‌ها به دست می‌آورد.

برای مثال برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

متغیرها	x, y, z
نابرابری‌ها	$-۲x - y - z \geq -۲$ $x \geq \frac{۱}{۶}$
کلمه‌ی انتخاب شده	maximum
متغیرهای اصلی	y, z

با دادن این برنامه به ماشین A، ماشین عدد $\frac{۵}{۳}$ را به عنوان بیش‌ترین مقدار ممکن برای $y + z$ چاپ می‌کند، که مثلا به ازای $x = \frac{۱}{۶}$، $y = ۰$، و $z = \frac{۵}{۳}$ به دست می‌آید. (توجه کنید که مقادیر دیگری نیز برای x، y،و z وجود دارند که در نابرابری‌ها صدق کنند و مجموع $y + z$ را برابر $\frac{۵}{۳}$ قرار دهند. ولی نمی‌توان مقادیری برای متغیرها یافت که نابرابری‌ها برقرار بمانند و $y + z$ از $\frac{۵}{۳}$ بیش‌تر شود.)

حال اگر همین مسأله را به ماشین B بدهیم، عدد ۰ را به عنوان جواب اعلام می‌کند که مثلا به ازای $x = ۱$، $y = ۰$، و $z = ۰$ به‌دست می‌آید.

شرکت زتروس اعلام کرد که حاضر است مسائل پیشنهاد شده توسط دولت را حل کند. اولین مسأله‌ای که پیشنهاد شد از طرف وزارت بهداشت بود. در این مسأله وزارت بهداشت قصد داشت در بعضی از شهرهای کشور مقداری دارو برای مواقع اضطراری ذخیره کند به گونه‌ای که مجموع داروی موجود در هر شهر و تمام شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد بیش‌تر از ۱۰۰ تن باشد. هدف این بود که مجموع کل داروهای ذخیره شده در تمام شهرها کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. توجه کنید که اگر از شهر a به b پرواز مستقیم وجود داشته باشد، از b نیز به a پرواز مستقیم وجود دارد.

زتروس برای حل این مسأله با استفاده از ماشین A برنامه‌ای به این منظور طراحی کرد. در این برنامه به هر شهر یک متغیر نسبت داده شده که نشان‌گر مقدار دارویی است که باید در آن شهر ذخیره شود. به این ترتیب اگر n را تعداد شهرها فرض کنید، آن‌گاه متغیرهای برنامه $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n می‌باشند.

سپس به ازای هر شهر یک نابرابری در برنامه قرار داده شد به این ترتیب که مجموع متغیر مربوط به آن شهر و متغیر مربوط به شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰۰ باشد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و تمامی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی گردیدند.

برای مثال اگر کشور، پنج شهر داشته باشد و بین شهرهای ۱ و ۲، شهرهای ۲ و ۳، شهرهای ۳ و ۴، و شهرهای ۳ و ۵ پرواز مستقیم وجود داشته باشد، برنامه‌ای که به ماشین داده می‌شود به صورت زیر است:

متغیرها	$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$
نابرابری‌ها	$x_۱ + x_۲ \geq ۱۰۰$ $x_۲ + x_۱ + x_۳ \geq ۱۰۰$ $x_۳ + x_۲ + x_۴ + x_۵ \geq ۱۰۰$ $x_۴ + x_۳ \geq ۱۰۰$ $x_۵ + x_۳ \geq ۱۰۰$
کلمه‌ی انتخاب شده	minimum
متغیرهای اصلی	$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵$

که جواب ماشین برابر ۲۰۰ است که به ازای مثلا $x_۱ = ۱۰۰$، $x_۲ = ۰$، $x_۳ = ۱۰۰$، $x_۴ = ۰$، و $x_۵ = ۰$ به دست می‌آید.

مسأله‌ی بعدی توسط وزارت مبارزه با قاچاق پیشنهاد شد. این وزارت قصد داشت در بعضی از فرودگاه‌های کشور مراکز مبارزه با قاچاق تاسیس کند به طوری که تعداد این مراکز تا حد امکان کم باشد و در حداقل یکی از فرودگاه‌های مبدا یا مقصد هر پرواز یک مرکز مبارزه با قاچاق وجود داشته باشد.

زتروس برای حل این مسأله با استفاده از ماشین B برنامه‌ای ارائه داد. در این برنامه به ازای هر فرودگاه یک متغیر وجود داشت. در این صورت اگر n فرودگاه داشته باشیم، متغیرها $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n خواهند بود. سپس برای هر پرواز بین

فرودگاه i و j، نابرابری $x_i + x_j \geq ۱$ در برنامه قرار داده شد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و همه‌ی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی شدند.
عددی که ماشین B به عنوان کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع متغیرهای اصلی اعلام کرد، برابر کم‌ترین تعداد مراکزی بود که باید تاسیس می شدند، و متغیرهایی که مقدار ۱ گرفتند، فرودگاه‌هایی را تعیین کردند که باید در آن‌ها مرکز مبارزه با قاچاق تاسیس می‌شد.
اکنون شما باید زتروس را یاری کنید که بتواند مسأله‌های پیشنهادی دیگری را نیز با موفقیت به انجام برساند. همان‌طور که در مثال‌های بالا ملاحظه کردید طراحی برنامه‌ها باید به گونه‌ای باشد که نوشتن برنامه‌ی نهایی از روی اطلاعاتی که در دسترس شرکت قرار می‌گیرد، به سادگی امکان‌پذیر باشد.

الف) رئیس‌جمهور یوتوپیا با مشاهده‌ی موفقیت این شرکت در حل مسایل یاد شده، مسأله‌ی زیر را به این شرکت پیشنهاد داد: آقای رئیس‌جمهور می‌خواهد تعدادی از نمایندگان مجلس را به جلسه‌ای دعوت کند ولی به علت مشکلی که در ابتدا گفته شد، او نمی‌خواهد که جلسه به مشاجره کشیده شود و از طرفی قصد دارد که حداکثر تعداد نمایندگان ممکن را دعوت کند. به همین خاطر، او لیست نمایندگانی را که باهم خصومت دارند تهیه کرده و به شرکت داده و از آن خواسته است که بیش‌ترین تعداد نمایندگانی را تعیین کند که هیچ دوتای آن‌ها با هم خصومت نداشته باشند. با استفاده از ماشین B به زتروس کمک کنید که این مسأله را حل کند. (۱۰ نمره)

ب) وزارت کار هم مسأله‌ای مطرح کرده است. این وزارت تعدادی پروژه دارد که می‌خواهد آن‌ها را به چند شرکت واگذار کند. هر شرکت لیست پروژه‌هایی را که توانایی انجام آن‌ها را دارد به این وزارت داده است. این وزارت قصد ندارد به هیچ شرکتی بیش از یک پروژه واگذار کند و یا پروژه‌ای را به بیش از یک شرکت واگذار کند. از طرفی می‌خواهد تعداد پروژه‌های واگذار شده بیش‌ترین تعداد ممکن باشد. این مسأله را با استفاده از ماشین B حل کنید. (۱۰ نمره)

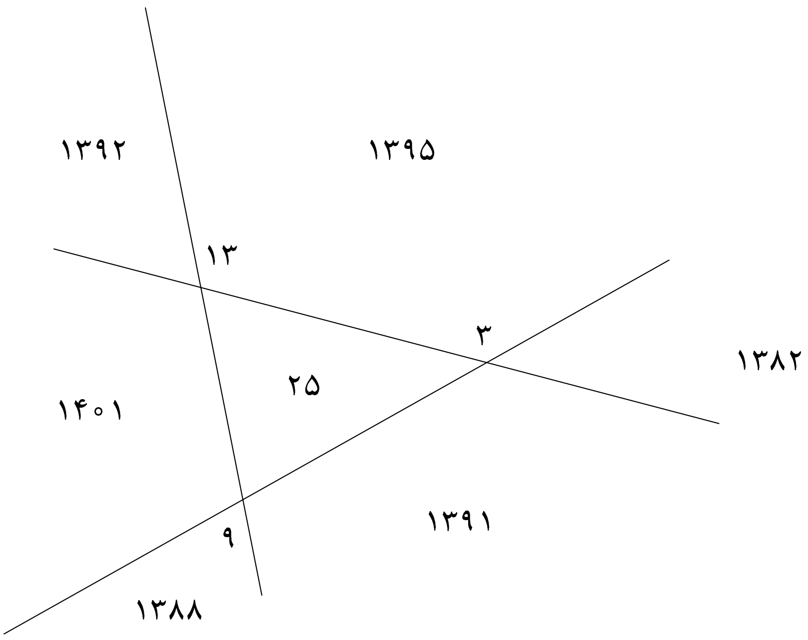
ج) ثابت کنید که اگر در مسأله‌ی وزارت مبارزه با قاچاق، برنامه‌ی تهیه شده برای ماشین B اشتباهاً به ماشین A داده شود، جواب به‌دست آمده کم‌تر نصف جواب به‌دست آمده از ماشین B نخواهد بود . (یعنی مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین A کم‌تر از مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین B نخواهد بود). (۱۰ نمره)

«موفق باشید»

مرحله‌ی دوم دهمین المپیاد کامپیوتر کشور

مسأله‌ی اول: ناحیه‌ها .... ۱۰ امتیاز

n خط روی صفحه داده شده‌اند، به‌طوری‌که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی همرس نیستند (به عبارت دیگر، هر دو خط دل‌خواه یک نقطه‌ی تلاقی منحصر به فرد دارند). روی هر نقطه‌ی تلاقی یک عدد دل‌خواه نوشته شده است. این n خط صفحه را به تعدادی ناحیه تقسیم می‌کنند که بعضی از آن‌ها بسته و بعضی باز هستند. به هر ناحیه‌ی بسته یا باز یک عدد نسبت می‌دهیم که از مجموع اعداد نقاط دور آن ناحیه به‌دست می‌آید. برای ناحیه‌های باز عدد ۱۳۷۹ را نیز به عدد محاسبه شده اضافه می‌کنیم. شکل زیر یک مثال برای $n = ۳$ است. در این مثال اعداد روی نقاط تقاطع ۱۳،۹ و ۳ هستند.



ثابت کنید اگر n مضرب ۴ باشد، آن‌گاه همه‌ی اعداد ناحیه‌ها نمی‌توانند فرد باشند.

مسأله‌ی دوم: چراغ‌ها .... ۱۰ امتیاز

روی یک خط، n چراغ با شماره‌های ۱ تا n قرار دارند که تعدادی از آن‌ها خاموش و بقیه روشن هستند. دو نفر به نام‌های A و B این بازی را با هم انجام می‌دهند. از ابتدا و در تمام مراحل بازی، چشم B بسته است و او وضعیت لامپ‌ها را نمی‌داند. در هر مرحله از بازی، B مجموعه‌ای از اعداد ۱ تا n را انتخاب می‌کند و به A می‌گوید. A لامپ‌هایی که شماره‌ی آن‌ها در آن مجموعه است را تغییر وضعیت می‌دهد؛ یعنی اگر لامپ خاموش بود، آن را روشن و اگر روشن بود آن را خاموش می‌کند. مثلاً اگر ۳ لامپ داشته باشیم و لامپ‌های ۱ و ۳ خاموش باشند و لامپ ۲ روشن باشد و B مجموعه‌ی $\{۱,۲\}$ را انتخاب کند، در مرحله‌ی بعد لامپ ۱ روشن و لامپ‌های ۲ و ۳ خاموش خواهند شد.

در هر مرحله‌ای که تمام لامپ‌ها خاموش شوند بازی به نفع B تمام می‌شود. مثلاً اگر $n = ۲$ و B به‌ترتیب مجموعه‌های $\{۱,۲\},\{۱\},\{۱,۲\}$ را انتخاب کند، به هر ترتیب B برنده‌ی بازی خواهد شد. ثابت کنید برای هر n، B می‌تواند طوری بازی کند که ببرد. یعنی می‌تواند دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,\cdots,n\}$ را انتخاب کند که برای هر وضعیت اولیه‌ی دل‌خواه از چراغ‌ها در حین انجام عمل به جایی برسیم که همه‌ی چراغ‌ها خاموش باشند.

مسأله‌ی سوم: رمزیابی .... ۱۵ امتیاز

رشته‌ی S را با n حرف در نظر بگیرید. مجموعه‌ی جایگشت‌های دوری S به نام R را به‌صورت $R = \{S_۱, S_۲, \cdots, S_n\}$ نشان می‌دهیم به‌طوری‌که $S_۱ = S$ و $S_{i+۱}$ ($۱ \le i < n$) را از S_i به این شرح به‌دست می‌آوریم: حرف انتهایی S_i را برمی‌داریم و در اول رشته‌ی باقیمانده قرار می‌دهیم.

یک روش رمزکردن رشته‌ی S به این صورت است: رشته‌های $S_۱$ تا S_n را به‌ترتیب الفبایی مرتب می‌کنیم و رشته‌های مرتب شده را به‌ترتیب در سطرهای یک جدول $n \times n$ قرار می‌دهیم. مثلاً جدول متناظر رشته‌ی banan مطابق شکل زیر است:

$$\begin{array}{rccccc} S_۱= & \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{a} & \mathrm{n} \\ S_۲= & \mathrm{n} & \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{a} \\ S_۳= & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{n} \\ S_۴= & \mathrm{n} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{b} & \mathrm{a} \\ S_۵= & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{b} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{b} \\ \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{n} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{a} & \mathrm{n} \\ \mathrm{n} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{b} & \mathrm{a} \\ \mathrm{n} & \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{n} & \mathrm{a} \end{array}$$

رمز شده‌ی رشته‌ی S از دو قسمت تشکیل شده است: قسمت اول رشته‌ای است که از حروف ستون آخر جدول از بالا به پایین به دست می‌آید و قسمت دوم شماره‌ی سطر S در جدول است. با توجه به جدول بالا رمزشده‌ی banan، زوج (bnnaa, ۳) است. ثابت کنید این روش رمز کردن برگشت‌پذیر است. به‌عبارت دیگر ثابت کنید می‌توان از هر زوج رمزشده‌ی متناظر یک رشته، به رشته‌ی منحصر به فرد اولیه رسید. روشی برای به‌دست آوردن رشته‌ی اولیه بیان کنید. روش خود را به‌صورت دقیق و گام‌به‌گام بیان کنید و مراحل مختلف آن را برای رمزیابی زوج (sfaraf, ۶) نشان دهید.

مسأله‌ی چهارم: جدول عجیب .... ۱۵ امتیاز

جدولی را در نظر بگیرید که از سمت چپ، راست و پایین نامتناهی است و فقط از طرف بالا محدود می‌باشد . بالاترین سطر جدول سطر شماره‌ی ۱ است و سطرها به طرف پایین شماره‌گذاری می‌شوند. در سطر اول در یک خانه عدد ۱ و در بقیه‌ی خانه‌های آن عدد صفر نوشته شده است. در سطرهای بعد یک خانه مقدار ۱ دارد اگر و فقط اگر دقیقاً یکی از خانه‌های چپ و راستِ خانه‌ی بالای آن ۱ باشد، در غیر این‌صورت مقدارش صفر خواهد بود. در مثال زیر چند سطر اول این جدول نوشته شده است.

سطر اول	...	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	...
سطر دوم	...	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	...
سطر سوم	...	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	...
سطر چهارم	...	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	...
سطر پنجم	...	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	...
سطر ششم	...	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	...

سطر ۱۳۷۹ ام این جدول حاوی چند عدد ۱ است؟ روش محاسبه‌ی خود را دقیقاً بیان و اثبات کنید.

مسئله‌ی اول: تقسیم پول .... ۱۰ امتیاز

مقداری پول را بین n نفر تقسیم کرده‌ایم. عدد طبیعی k را در نظر بگیرید؛ می‌خواهیم کاری کنیم که اختلاف مقدار پولی که این افراد دارند از k تومان بیشتر نباشد. برای این کار عمل زیر را انجام می‌دهیم:

- دو نفر مانند a و b پیدا می‌کنیم که a حداقل $k + ۱$ تومان بیشتر از b پول داشته باشد. سپس a را مجبور می‌کنیم که k تومان به b بدهد.

این کار را تا وقتی که چنین دو نفری وجود داشته باشند، تکرار می‌کنیم. ثابت کنید به هر ترتیبی که این کار را انجام دهیم، بالاخره به حالتی خواهیم رسید که هیچ دو نفری وجود نداشته باشند که اختلاف مقدار پول‌شان از k تومان بیشتر باشد.

مسئله‌ی دوم: بازی .... ۱۰ امتیاز

دو نفر این بازی را با تعدادی سنگ‌ریزه انجام می‌دهند: در ابتدا، n سنگ‌ریزه موجود است ($n > ۱$). با توجه به قاعده‌ی زیر، دو نفر به ترتیب، یک در میان، از این سنگ‌ریزه‌ها برمی‌دارند. قاعده‌ی بازی به این صورت است که در اولین حرکت، بازی‌کن می‌تواند به هر تعدادی که بخواهد از این سنگ‌ریزه‌ها بردارد؛ ولی باید حداقل یک، و حداکثر $n - ۱$ سنگ‌ریزه بردارد. پس از آن هر بازی‌کن در نوبت خودش، می‌تواند حداقل یک، و حداکثر به اندازه‌ی تعدادی که بازی‌کن دیگر در حرکت قبل برداشته، سنگ‌ریزه بردارد. برای مثال، اگر بازی‌کن اول، در اولین حرکت‌اش ۲ سنگ‌ریزه بردارد، در حرکت بعد، بازی‌کن دوم می‌تواند ۱ یا ۲ سنگ‌ریزه بردارد.

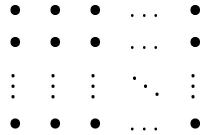
برنده‌ی بازی کسی خواهد بود که آخرین سنگ‌ریزه را بردارد.

الف) ثابت کنید اگر $n = ۶$ باشد، نفر اول (کسی که بازی را شروع کرده است) می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود؛ یعنی نفر اول می‌تواند به‌گونه‌ای بازی کند که اگر نفر دوم در هر مرحله بهترین حرکتی که می‌تواند را انجام دهد، نفر اول برنده شود.

ب) ثابت کنید که در حالت کلی اگر n توانی از دو باشد، نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود، و در غیر این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود.

مسئله‌ی سوم: مسیر فراگیر .... ۱۵ امتیاز

یک شبکه‌ی $m \times n$ شامل mn نقطه است که مطابق شکل زیر در m ردیف و n ستون قرار گرفته‌اند.



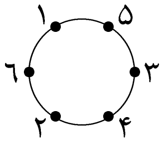
یک مسیر فراگیر در این شبکه، مسیری است که از نقطه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت چپ آغاز شده، از هر نقطه‌ی شبکه دقیقاً یک بار عبور کند، و به نقطه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت راست شبکه برسد. در طی این مسیر تنها مجازیم که از هر نقطه به یکی از نقاط سمت راست، چپ، بالا، یا پایین آن (در صورت وجود) برویم.

ثابت کنید که مسیر فراگیر تنها در صورتی وجود دارد که دست‌کم یکی از m و n فرد باشد.

مسئله‌ی چهارم: اعداد روی دایره .... ۱۵ امتیاز

۲n نقطه محیط یک دایره را به ۲n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. A' را نقطه‌ی مقابل نقطه‌ی A می‌نامیم، اگر AA' یک قطر دایره باشد. می‌خواهیم هر یک از عددهای ۱ تا ۲n را روی یکی از این نقاط بنویسیم (هر نقطه یک عدد) به طوری که برای هر دو نقطه‌ی متوالی روی دایره مانند A و B، اگر نقطه‌های مقابل این دو نقطه به ترتیب A' و B' باشد، مجموع عددهای نوشته‌شده روی A و B، با مجموع عددهای نوشته شده روی A' و B' برابر باشد.

برای مثال شکل زیر یک جواب مسئله برای حالت $n =$ ۳ است.



الف) ثابت کنید که اگر n یک عدد فرد باشد، این کار همواره ممکن است.

ب) ثابت کنید که اگر n یک عدد زوج باشد، این کار ممکن نیست.

مسئله‌ی پنجم: فرش‌ها .... ۱۰ امتیاز

یک اتاق به شکل مستطیل را با تعدادی فرش مستطیل شکل پوشانده‌ایم؛ به طوری که هر نقطه از کف اتاق توسط دقیقاً یک فرش پوشانده شده است.

ثابت کنید مجموع عرض این فرش‌ها از عرض اتاق کم‌تر نیست. منظور از عرض یک مستطیل، اندازه‌ی کوتاه‌ترین ضلع آن است.

مسئله‌ی ششم: پیچ‌ها و مهره‌ها .... ۱۰ امتیاز

n پیچ و n مهره که از نظر ظاهری شبیه به هم هستند، داده شده‌اند. می‌دانیم که هر پیچ تنها به یک مهره می‌خورد (با آن هم‌اندازه است) و هیچ دو پیچی هم‌اندازه نیستند.

عمل «آزمون» یعنی برداشتن یک پیچ و یک مهره و امتحان کردن آن‌ها. با این کار تشخیص می‌دهیم که پیچ از مهره بزرگ‌تر است، مهره از پیچ بزرگ‌تر است، یا این که هر دو هم‌اندازه هستند.

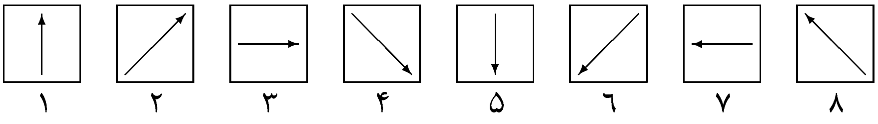
می‌خواهیم با انجام تعدادی عمل «آزمون»، کوچک‌ترین پیچ و کوچک‌ترین مهره (که مسلماً به هم می‌خورند) را پیدا کنیم. توجه کنید که نمی‌توان دو مهره یا دو پیچ را مستقیماً با هم مقایسه کرد.

الف) نشان دهید که برای $n = ۲$ مسئله را در بدترین حالت می‌توان با دو آزمون حل کرد.

ب) روشی ارائه دهید تا بتوان مسئله را در حالت کلی با $۲n - ۲$ آزمون حل کرد.

مسئله‌ی هفتم: فلش‌ها .... ۱۵ امتیاز

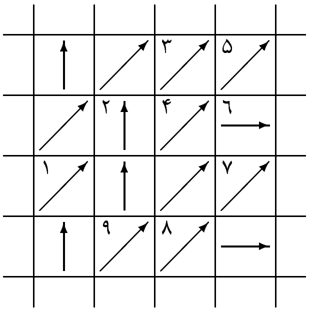
در هر یک از خانه‌های یک جدول ۱۰۰۰×۱۰۰۰، یک فلش رسم شده است. هر فلش یکی از هشت جهت زیر را نشان می‌دهد.



دو خانه از این جدول مجاور به حساب می‌آیند، اگر دست‌کم در یک رأس مشترک باشند. (بنابراین هر یک از خانه‌های این جدول حداکثر ۸ خانه‌ی مجاور دارد.) می‌دانیم که جهت فلش‌های کشیده‌شده در دو خانه‌ی مجاور حداکثر به اندازه‌ی ۴۵ درجه با هم

اختلاف دارند. یعنی برای مثال اگر فلش یک خانه به شکل ۱ (مطابق با شکل فوق) باشد، فلش هر یک از خانه‌های مجاورش به یکی از سه شکل ۱، ۲، یا ۸ است.

الف) از یک خانه‌ی دل‌خواه این جدول شروع به حرکت می‌کنیم و در هر مرحله، به یکی از خانه‌های مجاور خانه‌ای که در آن هستیم، می‌رویم. با توجه به شرایط مسئله، جهت فلش خانه‌ای که به آن می‌رویم نسبت به جهت فلش خانه‌ای که در آن هستیم، به اندازه‌ی −۴۵، ۰، یا ۴۵ درجه در جهت عقربه‌های ساعت اختلاف دارد. مقدار این اختلاف درجه را یادداشت می‌کنیم. برای مثال، اگر شکل زیر نشان‌دهنده‌ی قسمتی از جدول باشد و به ترتیب خانه‌های ۱ تا ۹ را طی کرده و به خانه‌ی ۱ بازگردیم، به ترتیب عددهای −۴۵، ۴۵، ۰، ۰، ۴۵، −۴۵، ۰، ۰، و ۰ را یادداشت خواهیم کرد.



ثابت کنید اگر پس از طی چند مرحله به خانه‌ای که حرکت را از آن‌جا آغاز کرده بودیم برسیم، مجموع عددهایی که یادداشت کرده‌ایم، برابر با صفر خواهد بود.

ب) حال می‌خواهیم در این جدول با توجه به جهت فلش‌ها حرکت کنیم؛ به این صورت که از یک خانه‌ی دل‌خواه جدول شروع می‌کنیم و در هر مرحله اگر در خانه‌ی a باشیم، به خانه‌ی مجاوری می‌رویم که فلش a به سمت آن اشاره می‌کند. اگر a کنار جدول باشد و فلش آن به سمت خارج از جدول اشاره کند، از جدول خارج می‌شویم. ثابت کنید که با این نحوه‌ی حرکت بالاخره از جدول خارج خواهیم شد.

مسئله‌ی هشتم: ماتریس عجیب .... ۱۵ امتیاز

یک ماتریس به ابعاد $n^2 \times (n+1)$ (n^2 سطر و $n+1$ ستون) داده شده است. این ماتریس با اعداد ۱ تا n پر شده است، به طوری که برای هر دو ستون این ماتریس، اگر عناصر این دو ستون را در کنار هم بنویسیم، هر یک از n^2 زوج ممکن از عددهای ۱ تا n را در یک

سطر می‌بینیم. برای مثال، برای $n = ۲$، ماتریس زیر دارای چنین خاصیتی است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

ثابت کنید هر دو سطر این ماتریس دقیقاً در یک درایه‌ی متناظر، با هم برابرند؛ یعنی برای هر دو سطر دل‌خواه i و j، فقط یک ستون وجود دارد که مقادیر درایه‌های سطر iام و سطر jام در آن یکسان باشند.

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مدت آزمون: ۳/۵ ساعت

سوال ۱ .... ۱۰ امتیاز

در یک مهمانی n نفر حضور دارند. هر یک از این افراد با k نفر از بقیه‌ی مهمان‌ها دست می‌دهد (k یک عدد ثابت بین ۱ و $n - ۱$ است). می‌دانیم که لااقل $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$ نفر وجود دارند که دوبه‌دو با هم دست داده‌اند. ثابت کنید که در این مهمانی هر دو نفری با هم دست داده‌اند.

سوال ۲ .... ۱۰ امتیاز

دو نفر با هم یک بازی را به این صورت انجام می‌دهند:

دو نفر به طور متناوب ارقام یک عدد $۲k$ رقمی را روی کاغذ می‌نویسند، بدین معنی که ابتدا نفر اول رقم اول، سپس نفر دوم رقم دوم، سپس نفر اول رقم سوم، ...، و در k امین دور بازی نفر اول رقم $۲k - ۱$ ام و نفر دوم رقم $۲k$ ام این عدد را می‌نویسند. هر یک از این افراد در نوبت خود تنها می‌توانند یکی از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، و یا ۵ را بنویسند.

در صورتی که عدد $۲k$ رقمی حاصل بر ۹ بخش‌پذیر باشد، نفر دوم، و در غیر این صورت نفر اول برنده‌ی این بازی است.

برای چه مقادیری از k نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که در این بازی برنده شود؟ ادعای خود را ثابت کنید.

سوال ۳ .... ۱۰امتیاز

سه میله با شماره‌های ۱، ۲، و ۳ و n مهره‌ی سوراخ‌دار با شماره‌های ۱ تا n داریم. مهره‌های زوج قرمز و مهره‌های فرد آبی هستند. هر مهره فقط می‌تواند روی مهره‌ی بزرگتر و غیر همرنگ با خود قرار بگیرد. همچنین بزرگترین مهره‌ی میله‌ی شماره‌ی ۱ و ۲ باید آبی و بزرگترین مهره‌ی میله‌ی شماره‌ی ۳ باید قرمز باشد. با این قواعد به چند طریق می‌توان این مهره‌ها را روی میله‌ها قرار داد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

موفق باشید.

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مدت آزمون: ۴/۵ ساعت

سوال ۱ .... ۸ امتیاز

می‌خواهیم با استفاده از $\frac{n^۳-(n-۲)^۳}{۲}$ عدد آجر ۲ × ۱ × ۱ شکل پوسته‌ی خارجی یک مکعب $n \times n \times n$ را بسازیم. (منظور از پوسته‌ی خارجی مکعب $n \times n \times n$، یک مکعب $n \times n \times n$ است که یک مکعب $(n-۲) \times (n-۲) \times (n-۲)$ از وسط آن برداشته شده است.) ثابت کنید که این کار تنها وقتی امکان پذیر است که n عددی زوج باشد.

سوال ۲ .... ۱۰ امتیاز

فرض کنید یک ماشین در اختیار داریم که می‌تواند این سه کار را بر روی کارت‌هایی که بر روی هر یک از آنها یک کلمه نوشته شده است انجام دهد:

- دو کارت که بر روی آنها دو کلمه نوشته شده است را بگیرد و یک کارت تولید کند که بر روی آن این دو کلمه پشت سر هم نوشته شده‌اند. (برای مثال اگر بر روی کارت اول رشته‌ی aab و بر روی کارت دوم رشته‌ی bab نوشته شده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن aabbab نوشته شده است.)
- یک کارت که بر روی آن کلمه‌ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن $\mathrm{a}S\mathrm{b}$ نوشته شده است. (برای مثال

اگر بر روی کارت ورودی کلمه‌ی aba نوشته شده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه‌ی aabab نوشته شده است.)

- یک کارت که بر روی آن کلمه‌ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن bSa نوشته شده است. (برای مثال اگر بر روی کارت ورودی هیچ کلمه‌ای نوشته نشده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه‌ی ba نوشته شده است.)

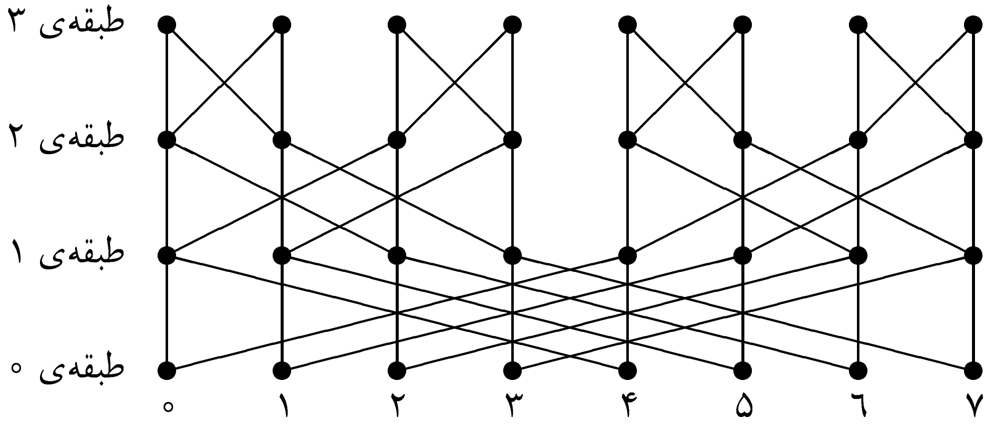
در ابتدا تعداد زیادی کارت که بر روی آنها هیچ کلمه‌ای نوشته نشده است در اختیار ما قرار گرفته است.

۱) نشان دهید که با استفاده از این کارت‌ها و با این ماشین می‌توان کارتی را ایجاد کرد که بر روی آن کلمه‌ی abbaba نوشته شده باشد.

۲) ثابت کنید که با استفاده از این ماشین می‌توان هر کارتی که بر روی آن یک کلمه نوشته شده است را تولید کرد، اگر و فقط اگر این کلمه تنها از a و b تشکیل شده باشد و تعداد a های آن برابر با تعداد b های آن باشد.

سوال ۳ .... ۱۷ امتیاز

یک ساختمان چهار طبقه به شکل عجیبی ساخته شده‌است. طبقات با شماره‌های صفر (همکف) تا ۳ شماره گذاری شده‌اند. در هر طبقه ۸ اتاق با شماره‌های صفر تا ۷ (به ترتیب از چپ به راست) قرار دارند و در هر یک از اطاق‌های طبقات ۱ تا ۳، یک نفر قرار دارد. اتاق‌ها از طریق کانال‌های «مستقیم» و یا «کج» مطابق شکل زیر به اتاق‌های طبقه‌ی پایین راه دارند.



۱) فرض کنید که یک توپ در اتاق شماره‌ی i از طبقه‌ی سوم قرار دارد ($۰ \leq i \leq ۷$). بر روی این توپ عدد j نوشته شده است ($۰ \leq j \leq ۷$). می‌خواهیم این توپ را از طریق کانال‌های موجود به اتاق شماره‌ی j از طبقه‌ی همکف بفرستیم. این کار توسط افرادی که در اتاق‌ها هستند بدین صورت انجام می‌شود که هر فرد با دریافت توپ و تنها بر اساس شماره‌ی اتاق و شماره‌ی طبقه‌ای که در آن قرار دارد و نیز عدد j که بر روی توپ نوشته شده است تصمیم می‌گیرد که توپ را از طریق یکی از کانال‌های مستقیم یا کج به اتاق طبقه‌ی پایین ارسال کند (توپ هیچ گاه به طبقه‌ی بالا نمی‌رود). مشخص کنید که این افراد بر اساس چه الگوریتمی می‌توانند این کار را انجام دهند. توجه کنید که لازم است کلیه‌ی افراد بر اساس یک الگوریتم واحد تصمیم بگیرند. احتیاج به نوشتن برنامه نیست ولی لازم است که اثبات کنید که الگوریتم شما درست عمل می‌کند.

۲) ثابت کنید که مسیر توپ در بند فوق برای هر i و j یکتاست.

۳) فرض کنید که n ($۱ < n \leq ۸$) عدد توپ در n اتاق از طبقه‌ی سوم قرار دارند و از سمت چپ به راست بر روی این توپ‌ها شماره‌های صفر تا $n - ۱$ نوشته شده است. اثبات کنید که اگر افراد موجود در اتاق‌ها همگی بر اساس الگوریتم بند فوق عمل کنند، توپی که بر روی آن شماره‌ی i نوشته شده است در انتها به

اتاق شماره‌ی i در طبقه‌ی همکف می‌رسد و در این مدت هیچ گاه بیش از یک توپ وارد یک اتاق نمی‌شود.

سوال ۴ .... ۲۰ امتیاز

یک ماشین حساب در اختیار داریم که دارای ۴ حافظه است که با شماره‌های ۱ تا ۴ مشخص می‌شوند. هر یک از این حافظه‌ها می‌تواند یک عدد صحیح مثبت را در خود نگهداری کند (محدودیتی در مقدار این عدد وجود ندارد). این ماشین حساب می‌تواند یک برنامه را اجرا کند. هر برنامه شامل تعدادی دستور است که به ترتیب مشخصی قرار گرفته‌اند. این ماشین حساب تنها سه نوع دستور را قبول می‌کند. این سه نوع دستور عبارتند از:

- `I` n (n یک عدد صحیح بین ۱ تا ۴ است.): این دستور به مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n یکی اضافه می‌کند. پس از اجرای این دستور، ماشین حساب دستور بعدی را اجرا می‌کند.
- `D` n (n یک عدد صحیح بین ۱ تا ۴ است.): اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n مساوی صفر باشد، این دستور هیچ کاری انجام نمی‌دهد و پس از آن دستور بعدی اجرا می‌شود. ولی اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n مثبت باشد، این دستور یکی از مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n کم می‌کند و سپس از دستور بعدی صرف نظر کرده و دستور بعد از آن را اجرا می‌کند.
- `T` d (d یک عدد صحیح مثبت یا منفی است.): این دستور به تنهایی کاری انجام نمی‌دهد ولی مقدار d مشخص می‌کند که چه دستوری پس از این دستور اجرا شود. اگر d یک عدد منفی باشد، دستوری که $|d|$ تا قبل از این دستور قرار گرفته است پس از این دستور اجرا می‌شود. به همین صورت اگر d یک عدد مثبت باشد، دستوری که d تا بعد از این دستور قرار گرفته است پس از این دستور اجرا می‌شود.

اجرای یک برنامه از دستور اول آن شروع می‌شود و با توجه به شرایط فوق تا وقتی که دستوری که باید اجرا شود وجود داشته باشد، ادامه می‌یابد. برای مثال این برنامه را در نظر بگیرید:

```
D 2
T 2
T -2
D 1
T 3
I 2
T -3
```

این برنامه ابتدا حافظه‌ی شماره‌ی ۲ را پاک می‌کند و سپس مقدار حافظه‌ی شماره‌ی ۱ را در حافظه‌ی شماره‌ی ۲ ذخیره می‌کند و مقدار حافظه‌ی شماره‌ی ۱ را مساوی با صفر می‌کند. اجرای برنامه پس از اجرای دستور `T 3` تمام می‌شود؛ چون دستوری که باید اجرا شود وجود ندارد.

۱) برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

```
D 1
T 6
D 1
T 3
I 2
T -5
I 3
D 2
T 5
I 1
D 2
T -11
T -3
```

اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی ۱ برابر با ۱۳۷۴ و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها برابر با صفر باشد، پس از اجرای این برنامه این مقادیر به چه صورت خواهند بود؟

۲) فرض کنید a_n تعداد اعدادی باشد که از ارقام ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند و مجموع ارقام آنها برابر با n است. برنامه‌ای برای این ماشین حساب بنویسید که مقدار a_n را محاسبه کند. مقدار n قبل از اجرای برنامه در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ قرار داده می‌شود و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها در ابتدا برابر با صفر است. در انتهای اجرای برنامه مقدار a_n باید در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ ذخیره شده باشد. تعداد دستورهای برنامه‌ی شما نباید از ۳۰ بیشتر باشد.

۳) فرض کنید b_n تعداد اعدادی باشد که از ارقام ۱ و ۲ و ۳ تشکیل شده‌اند و مجموع ارقام آنها برابر با n است و همچنین ارقام یکان و دهگان آنها هر دو همزمان یک نیستند. (برای مثال $b_۴ = ۵$ است چون تنها عددهای ۳۱ و ۲۲ و ۱۲۱ و ۱۱۲ و ۱۳ وجود دارند که دارای این شرایط هستند.) برنامه‌ای برای این ماشین حساب بنویسید که مقدار b_n را محاسبه کند. مقدار n قبل از اجرای برنامه در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ قرار داده می‌شود و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها در ابتدا برابر با صفر است. در انتهای اجرای برنامه مقدار b_n باید در حافظه‌ی شماره‌ی ۱ ذخیره شده باشد.

توجه کنید که در قسمت‌های ۲ و ۳ باید در مورد ایده‌ی برنامه‌ای که می‌نویسید توضیح دهید.

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مدت آزمون: ۴/۵ ساعت

سوال ۵ .... ۱۰ امتیاز

در یک مهمانی n نفر حضور دارند. به ازای یک عدد ثابت k، $(۱ \leq k \leq n - ۱)$، هر یک از این افراد با k نفر از بقیه‌ی مهمانان دست می‌دهد. می‌دانیم که لااقل $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$ نفر وجود دارند که دوبه‌دو با هم دست داده‌اند. ثابت کنید که در این مهمانی هر دو نفر با هم دست داده‌اند. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است.)

سوال ۶ .... ۱۵ امتیاز

یک سفینه‌ی فضایی می‌خواهد پیامهایی را به زمین ارسال کند. دستگاه فرستنده‌ی این سفینه قادر است در هر مرحله یک «کلمه» به زمین بفرستد. هر کلمه یک دنباله به طول n از صفر و یک است. بنابراین با استفاده از این فرستنده می‌توان هر پیغام را به صورت دنباله‌ای از کلمه‌ها به زمین ارسال کرد. به دلیل طولانی بودن مسیری که پیام باید طی کند تا به زمین برسد، در بین راه ممکن است در هر کلمه حداکثر یکی از صفرها تبدیل به یک و یا حداکثر یکی از یک‌ها تبدیل به صفر شود. هدف ما در این مسأله این است که برای فرستادن پیام‌ها تنها از بعضی کلمات خاص استفاده کنیم، به طوری که پس از رسیدن پیام به زمین خطاها قابل تشخیص و رفع کردن باشند. برای مثال اگر $n = ۶$ باشد، می‌توانیم از ۴ کلمه‌ی 000000، 111000، 000111، و 111111

استفاده کنیم. در این صورت اگر برای مثال کلمه‌ی 110111 به زمین برسد، می‌توانیم تشخیص دهیم که کلمه‌ی درست 111111، و نه کلمه‌ای دیگر از کلمات فوق، بوده است که در اثر خطا به 110111 تبدیل شده است.

۱) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای این که عمل تشخیص و رفع کردن خطا ممکن باشد این است که هر دو کلمه‌ای که از آنها استفاده می‌کنیم لااقل در سه محل با هم اختلاف داشته باشند.

۲) ثابت کنید که اگر $n = ۲۰$ باشد، برای این که خطاها قابل تشخیص و رفع باشند، نمی‌توانیم بیشتر از ۵۰۰۰۰ کلمه در دستگاه داشته باشیم.

سوال ۷ .... ۱۵ امتیاز

یک اداره از n بخش تشکیل شده است که هر بخش دارای یک نفر با عنوان مدیر بخش است. مدیر هر یک از این بخش‌ها n نفر کارمند را تحت نظر دارد. هر یک از این افراد تنها در یکی از این بخش‌ها کار می‌کنند. (بنابراین هر یک از کارمندان تنها تحت نظر یک مدیر است.)

می‌خواهیم برای هر یک از افرادی که در این اداره کار می‌کنند (یعنی مدیران بخش‌ها و کارمندان) یک دفتر کار اختصاص دهیم به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

- هر یک از این افراد یک دفتر داشته باشد. البته هر یک از دفترها می‌تواند هر تعداد از این افراد را در خود جای دهد.
- هیچ دو مدیری نباید با هم در یک دفتر قرار بگیرند.
- دفتر مدیر هیچ یک از بخش‌ها نباید با دفتر هیچ یک از کارمندان همان بخش یکی باشد.

- هر یک از مدیران باید با یک خط تلفن اختصاصی با هر یک از کارمندان زیر نظرش در ارتباط باشد. منظور از یک خط تلفن اختصاصی بین مدیر a و کارمند b، خط تلفنی است که بین دفتر کار این دو کشیده شده است و از طریق آن تنها این دو نفر می‌توانند با هم صحبت کنند و هیچ کدام از سایر کارمندان و مدیران نباید از این خط استفاده کنند.
- بین هر دو دفتر کار حداکثر یک خط تلفن می‌توان کشید.

ثابت کنید که حداقل تعداد دفترهای لازم برای جا دادن این افراد به طوری که شرایط فوق برقرار شوند برابر است با $[\frac{۳n}{۲}] + ۱$. (منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کچکتر یا مساوی با x است.)

سوال ۸ .... ۱۵ امتیاز

در جمعی n نفر حضور دارند. بعضی از این افراد همدیگر را می‌شناسند. فرض کنید که آشنایی یک رابطه‌ی دو طرفه است؛ یعنی اگر a، b را بشناسد، b نیز a را می‌شناسد. فرض کنید که هر نفر در این جمع حداکثر با d نفر دیگر آشناست.

اگر $d = k + l + ۱$ باشد، می‌خواهیم این افراد را به دو گروه A و B تقسیم کنیم به طوری که هر یک از اعضای گروه A حداکثر k نفر از دیگر اعضای این گروه را بشناسد و هر یک از اعضای گروه B هم با حداکثر l نفر از دیگر اعضای این گروه آشنا باشد.

برای این منظور الگوریتم زیر پیشنهاد شده است:

ابتدا یک گروه‌بندی دلخواه (A, B) را در نظر می‌گیریم. سپس در هر مرحله این کار را انجام می‌دهیم: اگر گروه‌بندی (A, B) دارای شرایط مسأله بود، کار تمام شده است. در غیر این صورت یا یک نفر در A وجود دارد که با بیش از k نفر از اعضای گروهش آشنا باشد و یا یک نفر در گروه B وجود دارد که با بیش از l نفر از اعضای گروهش آشنا باشد. در هر یک از این دو حالت فرد مزبور را به گروه دیگر منتقل می‌کنیم.

ثابت کنید که این الگوریتم همواره به جواب می‌رسد.

چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران (مرحله‌ی دوم)

مسأله‌ی ۱ .... ۱۰ نمره

n گلوله با وزن‌های متفاوت و یک ترازوی دوکفه‌ای بدون وزنه داده شده است. نشان دهید که با حداکثر $\left\lceil \frac{۳n}{۲} - ۲ \right\rceil$ بار وزن کردن می‌توان سبک‌ترین و سنگین‌ترین گلوله‌ها را مشخص کرد. روش وزن کردن خود را به دقت توضیح دهید و فرمول فوق را برای کلیه‌ی مقادیر n اثبات کنید.

(منظور از $\lceil x \rceil$ ــبخوانید سقف x ــکوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x است.)

مسأله‌ی ۲ .... ۱۰ نمره

مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, \ldots, k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی $T_۱, T_۲, \ldots, T_n$ یک زنجیره به طول n خوانده می‌شود، اگر هر یک از T_i ها یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی A باشد و برای هر $۱ \le i \le n - ۱$ داشته باشیم: $T_i \subseteq T_{i+۱}$.

تعداد زنجیره‌های به طول n را محاسبه کنید و ادعای خود را اثبات نمایید.

مسأله‌ی ۳ .... ۱۵ نمره

در یک جزیره k انسان‌نما زندگی می‌کنند. این انسان‌نماها دو گونه‌اند: عده‌ای راستگو هستند و به هر پرسش جواب درست می‌دهند. عده‌ای دیگر دروغگو هستند و به هر پرسش جواب نادرست می‌دهند.

اگر انسانی به این جزیره برود، می‌تواند با مطرح کردن پرسشهایی مانند پرسشهای زیر که جواب آنها بله یا خیر است، این دو دسته را از هم تشخیص دهد.

به عنوان مثال، فرض کنید A راستگو و B دروغگو است. در این صورت، پرسشها و پاسخها می‌تواند به صورت زیر باشد:

پرسش از A:	آیا B دروغگو است؟	جواب: بله
پرسش از A:	آیا A و B دروغگو هستند؟	جواب: خیر
پرسش از B:	آیا $۴ = ۲ + ۲$؟	جواب: خیر
پرسش از B:	آیا تو دروغگو هستی؟	جواب: خیر

n تبهکار به این جزیره فرار کرده‌اند. این افراد تبهکار، در پاسخ به هر پرسش هر طور که بخواهند جواب می‌دهند، یعنی گاهی جواب درست و گاهی جواب نادرست می‌دهند.

کارآگاهی وظیفه دارد به این جزیره رفته و با مطرح کردن پرسشهایی نظیر پرسشهای فوق (فقط با جواب بله یا خیر) این تبهکاران را شناسایی و بازداشت کند.

فرض کنید که تبهکاران و انسان‌نماها از نظر شکل ظاهری تفاوتی ندارند ولی یکدیگر را خوب می‌شناسند و می‌دانند که هر کدام از چه گروهی (راستگو، دروغگو یا تبهکار) هستند. همچنین می‌دانیم کارآگاه از قبل اطلاعی در مورد این که هر یک از ساکنین این جزیره از کدام گروه است، ندارد.

الف) ثابت کنید که اگر $n = ۱$ و $k \geq ۲$ ، کارآگاه می‌تواند فرد تبهکار را شناسایی کند.

ب) ثابت کنید که در حالت کلی اگر $k > n$، کارآگاه می‌تواند افراد تبهکار را شناسایی کند.

ج) ثابت کنید که اگر $k \leq n$، کارآگاه نمی‌تواند افراد تبهکار را شناسایی کند. یعنی افراد تبهکار می‌توانند طوری به پرسشهای کارآگاه جواب دهند که کارآگاه هیچگاه نتواند مطمئن شود که یک فرد، تبهکار است.

مسأله‌ی ۴ .... ۱۵ نمره

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم عناصر آرایه‌ی a را محاسبه می‌کند. عنصر i ام آرایه‌ی a را در این الگوریتم با نماد `a[i]` نشان داده‌ایم.

۱) `a[0]` را مساوی 0 و `a[1]` را مساوی 1 قرار بده.
۲) k را مساوی 2 قرار بده.
۳) `a[k]` را مساوی با `a[k - 1]` قرار بده.
۴) به مقدار `a[k]` یکی اضافه کن.
۵) F را مساوی 1 قرار بده.
٦) برای هر i که $1 \leq$ `i` $\leq$ `k - 1` این مرحله را تکرار کن:
   - برای هر j که $0 \leq$ `j` $\leq$ `i - 1` این مرحله را تکرار کن:
      - ○ اگر `a[k] - a[i] = a[i] - a[j]` است، F را مساوی 0 قرار بده.

۷) اگر `F = 0` است، به مرحله‌ی (۴) برو.
۸) به مقدار k یکی اضافه کن و اگر $1373 \leq$ `k` است، به مرحله‌ی (۳) برو.
۹) پایان

الگوریتم فوق به زبان پاسکال در صفحه‌ی بعد نوشته شده است.

مسأله به این صورت است:

الف) مقدار `a[0]`، `a[1]`، ... و `a[10]` در انتهای الگوریتم چقدر است؟

ب) تمام i هایی را پیدا کنید که مقدار `a[i]` در انتهای الگوریتم بر 3 قابل قسمت باشد. برای ادعای خود دلیل بیاورید.

ج) مقدار `a[1373]` در انتهای الگوریتم چقدر است؟ چرا؟

```
program Problem4;
  var
    a: array[0..1373] of LongInt;
    k, i, j, F: Integer;
begin
  a[0] := 0;  a[1] := 1;
  for k := 2 to 1373 do
  begin
    a[k] := a[k - 1];
    repeat
      a[k] := a[k] + 1;
      F := 1;
      for i := 1 to k - 1 do
        for j := 0 to i - 1 do
          if (a[k] - a[i] = a[i] - a[j]) then
            F := 0;
    until (F = 1);
  end;
end.
```

۱۰ نمره ....

رستورانی را در نظر بگیرید که دارای ۲۳ صندلی با شماره‌های ۱ تا ۲۳ است. این صندلی‌ها در یک خط مستقیم قرار دارند. فرض کنید که مشتریان این رستوران، به صورت یک‌نفره و یا در دسته‌های دونفره وارد رستوران می‌شوند و اعضای هر دسته‌ی دونفره با هم از رستوران خارج می‌شوند. همچنین فرض کنید که هیچ‌گاه در یک زمان بیشتر از ۱۶ نفر مشتری در این رستوران وجود ندارد.

ثابت کنید که اگر هیچ مشتری یک‌نفره در صندلی‌های با شماره‌ی ۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷ و ۲۰ ننشیند، آنگاه همواره می‌توان مشتری‌های دونفره را بدون جدا کردن از یکدیگر در صندلی‌های کنار هم در رستوران نشاند. (توجه داشته باشید که هیچ مشتری نشسته را نمی‌توان تغییر مکان داد.)

۱۰ نمره . . . .

در کارخانه‌ای یک دستگاه وجود دارد که باید n کار را انجام دهد. می‌دانیم که انجام کار i ام به اندازه‌ی t_i از این دستگاه وقت می‌گیرد و باید حداکثر تا زمان d_i تحویل داده شود. فرض کنید که دستگاه در زمان صفر شروع به کار می‌کند. علاوه بر این، می‌دانیم که این دستگاه نمی‌تواند در هر لحظه بیش از یک کار را انجام دهد.

اگر دستگاه در زمان s_i شروع به انجام کار i ام کند، انجام آن در زمان $s_i + t_i$ به پایان خواهد رسید. اگر $s_i + t_i > d_i$، یعنی کار i ام در زمانی که باید تحویل داده شود هنوز به طور کامل انجام نشده باشد، مقدار $L_i = s_i + t_i - d_i$ را دیرکرد کار i ام می‌نامیم. در غیر این صورت دیرکرد کار i ام برابر با صفر تعریف می‌شود. دیرکرد کل دستگاه برابر با بیشترین دیرکرد کارها، یعنی $L = \max\{L_۱, L_۲, \ldots, L_n\}$ تعریف می‌شود.

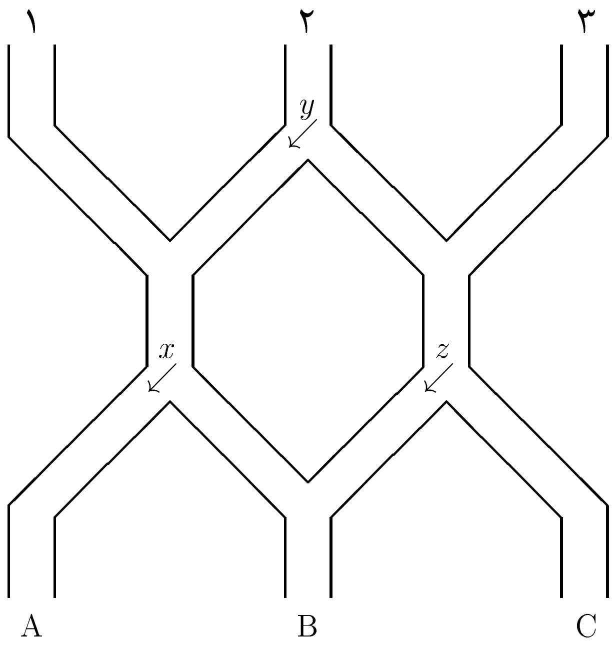
می‌خواهیم ترتیب انجام کارها را به گونه‌ای پیدا کنیم که مقدار دیرکرد کل دستگاه حداقل شود. برای این منظور الگوریتمی به این صورت پیشنهاد داده شده است:

ابتدا کارها را برحسب مقدار d_i آنها به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم و دستگاه کارها را به این ترتیب انجام می‌دهد.

ثابت کنید که این الگوریتم درست عمل می‌کند، یعنی اگر کارها را به این ترتیب انجام دهیم، مقدار دیرکرد کل دستگاه حداقل می‌شود.

.... **۱۵ نمره**

دستگاهی مانند شکل زیر را در نظر بگیرید:



در هر یک از ورودی‌های ۱، ۲ و ۳ می‌توانیم یک گلوله بیندازیم. این گلوله به سوی پایین حرکت می‌کند و با توجه به وضعیت کلیدهای x، y و z از یکی از خروجی‌های A، B یا C خارج می‌شود. کلیدهای x، y و z به این صورت عمل می‌کنند: هر کلید می‌تواند در یکی از دو وضعیت ↘ یا ↙ باشد. اگر کلید در وضعیت ↘ باشد، گلوله را به سمت راست و اگر در وضعیت ↙ باشد، گلوله را به سمت چپ می‌فرستد. علاوه بر این با عبور هر گلوله از یک کلید، وضعیت آن کلید تغییر می‌کند.

در ابتدای شروع کار دستگاه، هر سه کلید در وضعیت ↙ هستند. یک دنباله مانند $a_۱a_۲\cdots a_n$، ($a_i \in \{۱, ۲, ۳\}$ برای هر i) به عنوان دنباله‌ی ورودی دستگاه داده می‌شود. پس از این ابتدا یک گلوله از ورودی شماره‌ی $a_۱$، سپس یک گلوله از ورودی شماره‌ی $a_۲$، … و در انتها یک گلوله از ورودی شماره‌ی a_n به درون دستگاه می‌اندازیم. فرض می‌کنیم که گلوله‌ها به ترتیب از خروجی‌های $b_۱$، $b_۲$، … و b_n خارج شوند ($b_i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ برای هر i). دنباله‌ی $b_۱b_۲\cdots b_n$ را دنباله‌ی خروجی دستگاه برای ورودی $a_۱a_۲\cdots a_n$ می‌نامیم.

به عنوان مثال دنباله‌ی خروجی دستگاه برای ورودی ۱۲۳۲۱، دنباله‌ی ABBCA است.

الف) الگوریتمی بنویسید که با دریافت یک دنباله‌ی ورودی، دنباله‌ی خروجی آن را پیدا

کند.

ب) الگوریتمی بنویسید که با دریافت یک دنباله‌ی $s_{۱}s_{۲}\cdots s_n$ ($s_i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ برای هر i) مشخص کند که آیا این دنباله می‌تواند خروجی دستگاه باشد یا خیر؟ الگوریتم شما باید سریع باشد، یعنی امتحان کردن تمام حالتها مورد نظر نیست.

۱۵ نمره ....

یک دسته کارت شامل ۲n کارت که روی آنها عددهای ۰, ۱, ..., ۲n − ۱ نوشته شده است، داده شده است. می‌توانیم با انجام عمل زیر روی این دسته کارت، یک دسته کارت دیگر که در آن ترتیب قرار گرفتن کارتها تغییر کرده‌است، بسازیم:

ابتدا دسته کارت را به دو دسته که اولی شامل n کارت اول و دومی شامل n کارت باقیمانده است، تقسیم می‌کنیم. سپس به ترتیب یک کارت از دسته‌ی اول و یک کارت از دسته‌ی دوم برمی‌داریم و این کار را آن قدر تکرار می‌کنیم تا تمام کارتها برداشته شوند.

به عنوان مثال اگر شماره‌ی کارتهای قرار گرفته در دسته‌ی اول به ترتیب برابر با ۷, ۱, ۶, ۲, ۵, ۴, ۳, ۸ باشد، پس از انجام عمل فوق، ترتیب قرار گرفتن کارتها به صورت ۷, ۵, ۱, ۴, ۶, ۳, ۲, ۸ خواهد بود.

عمل فوق را «» دسته کارت می‌نامیم.

الف) ثابت کنید که برای هر n، اگر دسته کارت را بُر بزنیم، سپس دسته کارت حاصل را دوباره بُر بزنیم و همین کار را تکرار کنیم، بالاخره پس از مدتی به همان دسته کارت اولیه می‌رسیم.

ب) برای $n = ۱۰$ چند بار باید عمل بُر زدن را تکرار کنیم تا به دسته کارت اولیه برسیم؟ (برای جواب خود دلیل بیاورید.)

ج) ثابت کنید که برای $n = ۲^k$ پس از $k+۱$ بار بُر زدن به دسته کارت اولیه می‌رسیم.

د) ثابت کنید که برای $n = ۲^k+۱$ پس از $۲k+۲$ بار بُر زدن به دسته کارت اولیه می‌رسیم.