

به نام خدا

مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

پنجشنبه، ۳۰ فروردین ۱۳۹۷

روز اول

زمان: چهار ساعت و نیم

۱. در دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهایست و دایره محیطی مثلث APB ، BC را در X قطع می کند. خط گذرا از D و موازی با BC ، AX را در Y قطع می کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = 2 \times \angle YCA$$

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دویه دوی آنها را می نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به دست آمده را می توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیدا صعودی $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

ذهن زیبا

بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

به نام خدا

مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

جمعه، ۳۱ فروردین ۱۳۹۷

روز دوم

زمان: چهار ساعت و نیم

۴. همه توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$$

۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

۶. دو دایره ω_1 و ω_2 یک‌دیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و ω_1 و ω_2 را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا ω_1 را در D و F و ω_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X ، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

ذهن زیبا

بارم هر سوال ۱۵ نمره است.

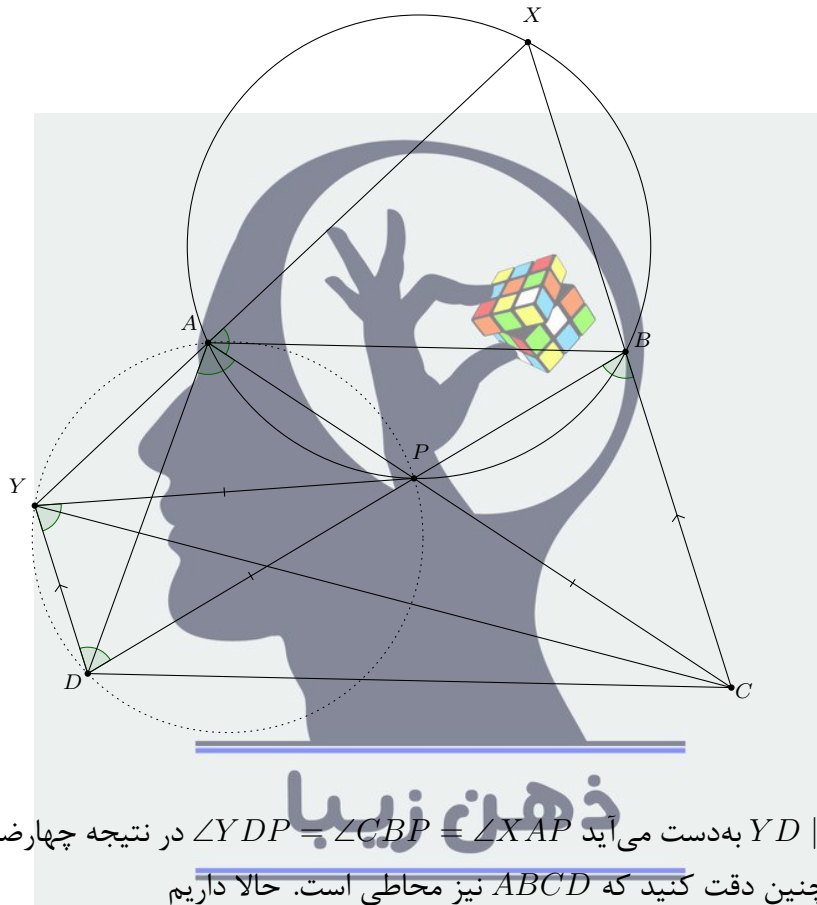
سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

۱. در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهایست و دایره محیطی مثلث APB ، BC را در X قطع می‌کند. خط گذرا از D و موازی با BC ، AX را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = 2 \times \angle YCA$$

راه‌حل اول.

سوال را با این فرض اضافه حل می‌کنیم: نقاط C و Y در دو طرف خط ناشی از امتداد پاره‌خط AD است.



از آن جا که $YD \parallel BC$ به دست می‌آید $\angle YDP = \angle CBP = \angle XAP$ در نتیجه چهارضلعی $YAPD$ محاطی است هم‌چنین دقت کنید که $ABCD$ نیز محاطی است. حالا داریم

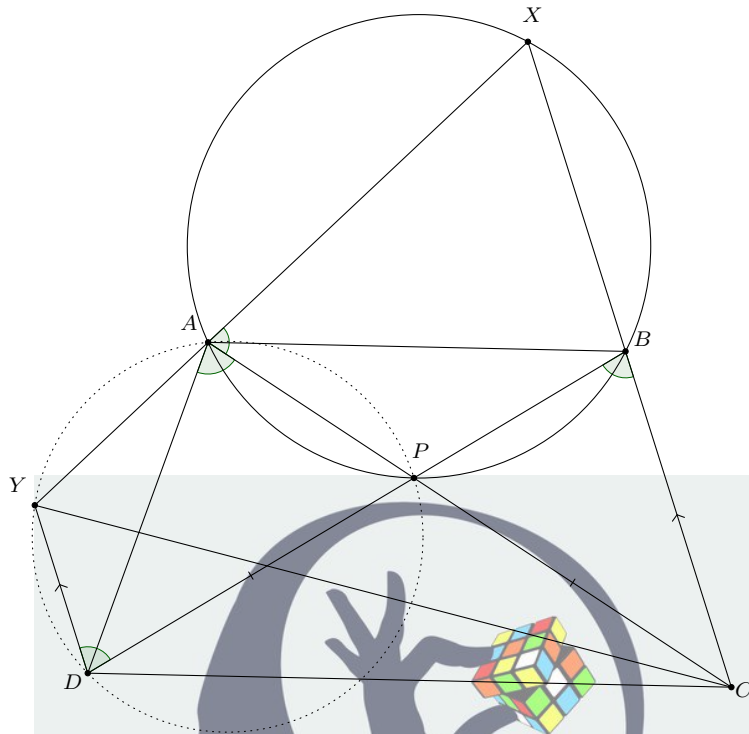
$$\angle DYP = \angle DAP = \angle DAC = \angle DBC = \angle PDY$$

پس $PY = PD$ از طرف دیگر نیز واضح است که $PD = PC$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $PY = PC$ و در نهایت به دست می‌آید

$$2\angle YCA = 2\angle YCP = \angle APY = \angle YDA$$

پس حکم ثابت شد.

راه‌حل دوم.



مشابه راه‌حل اول ثابت می‌شود $YAPD$ محاطی است. داریم

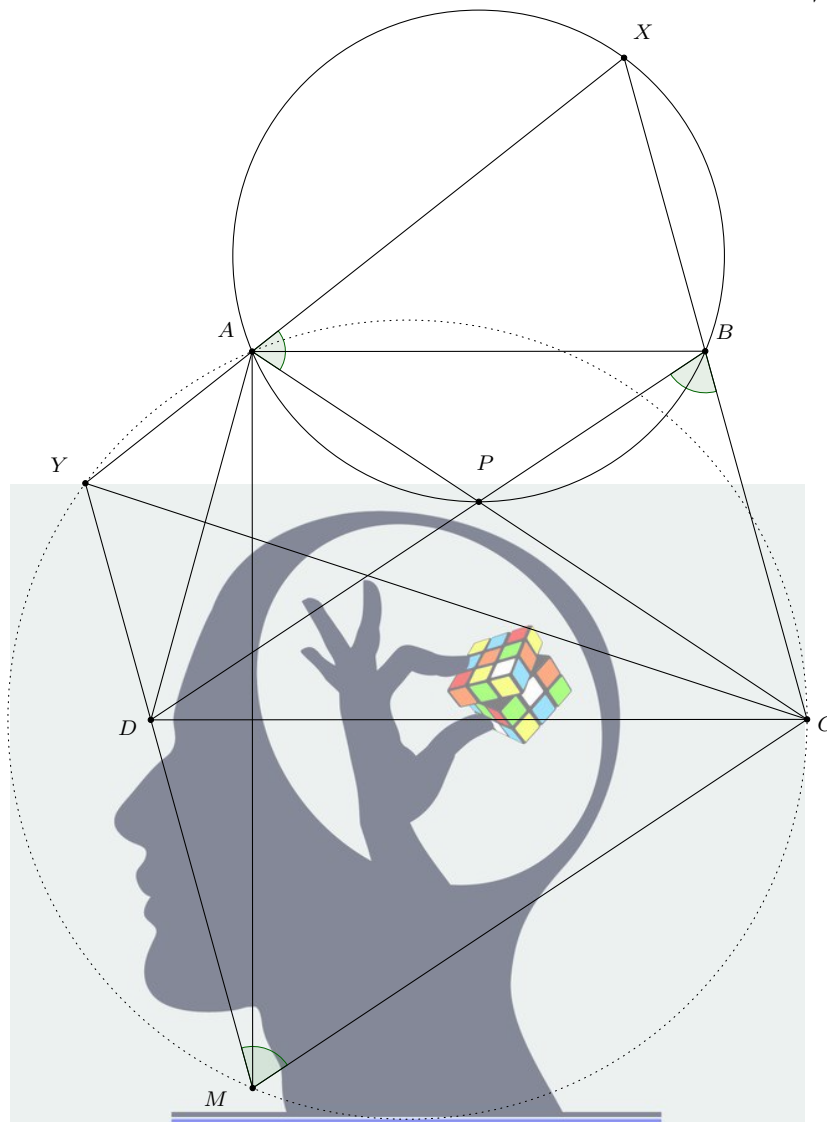
$$\angle DAC = \angle DBC = \angle YDP = \angle XAP = \angle XAC$$

پس C روی نیم‌ساز خارجی $\angle YAD$ قرار دارد. حالا از آن‌جا که $PC = PD$ به دست می‌آید

$$\angle ACD = \angle PCD = \frac{1}{2} \angle APD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AYD$$

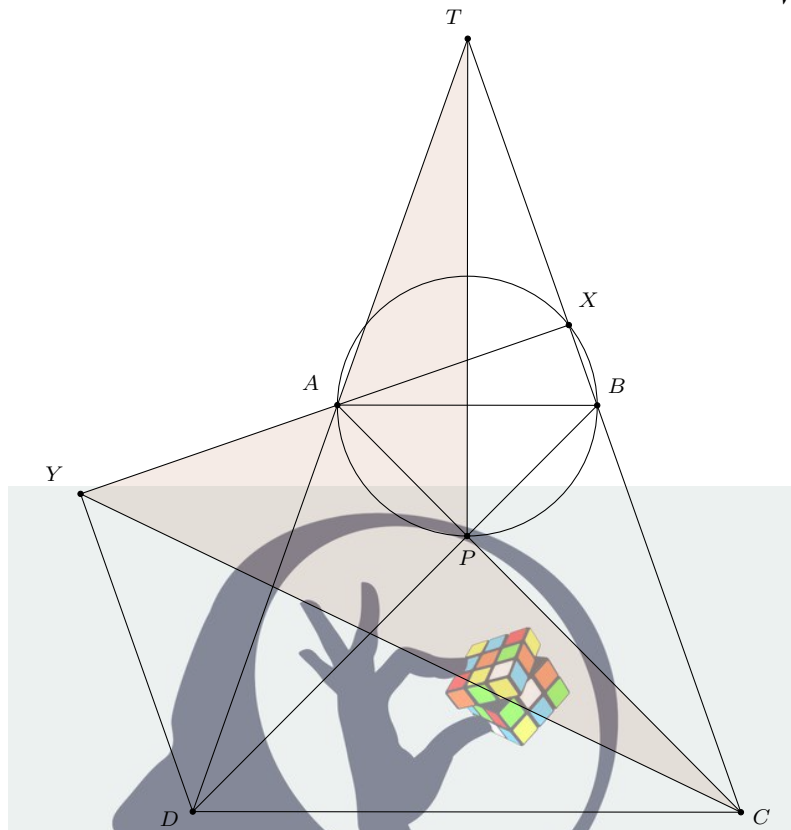
پس C دو تا از خواص مرکز دایره محاطی خارجی نظیر راس Y در مثلث DYA را دارد که نتیجه می‌دهد بر آن نقطه منطبق است. در نهایت بنابر خواص مرکز دایره محاطی خارجی داریم $2\angle YCA = \angle YDA$ که همان حکم سوال است.

راه‌حل سوم.



نقطه M را روی امتداد YD و از طرف D به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = MD$. واضح است که $\angle YDA = 2\angle DMA$ پس برای اثبات حکم کافیت نشان دهیم چهارضلعی $AYMC$ محاطی است. دقت کنید که $MD = AD = BC$ و $MD \parallel BC$ پس چهارضلعی $MCBD$ یک متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه $\angle DMC = \angle DBC = \angle XAP$ که محاطی بودن چهارضلعی $AYMC$ را نتیجه می‌دهد.

راه‌حل چهارم.



نقطه تقاطع AD و BC را T می‌نامیم. از تشابه دو مثلث CAX و CBP به‌دست می‌آید

$$\frac{BP}{AX} = \frac{CB}{CA} = \frac{AD}{CA} \implies AX \cdot AD = CA \cdot BP \quad (1)$$

از طرف دیگر طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{AY}{AX} = \frac{AD}{AT} \implies AX \cdot AD = AT \cdot AY \quad (2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$AT \cdot AY = CA \cdot BP = CA \cdot AP \implies \frac{AT}{CA} = \frac{AP}{AY} \quad (3)$$

در راه‌حل اول ثابت کردیم $\angle XAP = \angle DAC$ پس $\angle YAC = \angle TAP$ و بنابر رابطه (۳) نتیجه می‌شود $\triangle YAC \sim \triangle PAT$ در نهایت داریم

$$\angle YCA = \angle ATP = \frac{1}{2} \angle ATX = \frac{1}{2} \angle YDA$$

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوجه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

راه‌حل اول.

فرض کنید اعداد داده شده $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ باشند که n عددی فرد است. اختلاف $a_i - a_j$ که $i > j$ را اگر i و j زوجیت یکسانی داشته باشند در دسته اول و اگر i و j زوجیت متمایزی داشته باشند در دسته دوم قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول و مجموع اعداد دسته دوم با هم برابر است. فرض کنید i زوج باشد (حالت دیگر مشابه است). اختلاف‌های $a_{i+2} - a_i, \dots, a_{n-3} - a_i, a_{n-1} - a_i$ و $a_i - a_2, a_i - a_4, \dots, a_i - a_{i-2}, a_i - a_{i-4}, \dots, a_i - a_1$ در دسته اول شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول برابر است با

$$\frac{i-2}{2} - \frac{n-i-1}{2} = \frac{2i-n-1}{2}$$

به طور مشابه اختلاف‌های $a_{i+1} - a_i, \dots, a_{i+1} - a_1$ و $a_n - a_i, a_{n-2} - a_i, \dots, a_{i-1} - a_i$ در دسته دوم شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته دوم برابر است با

$$\frac{i}{2} - \frac{n-i+1}{2} = \frac{2i-n-1}{2}$$

پس ضریب a_i در مجموع اعداد هر دسته برابر است و حکم ثابت می‌شود.

ذهن زیبا

راه‌حل دوم.

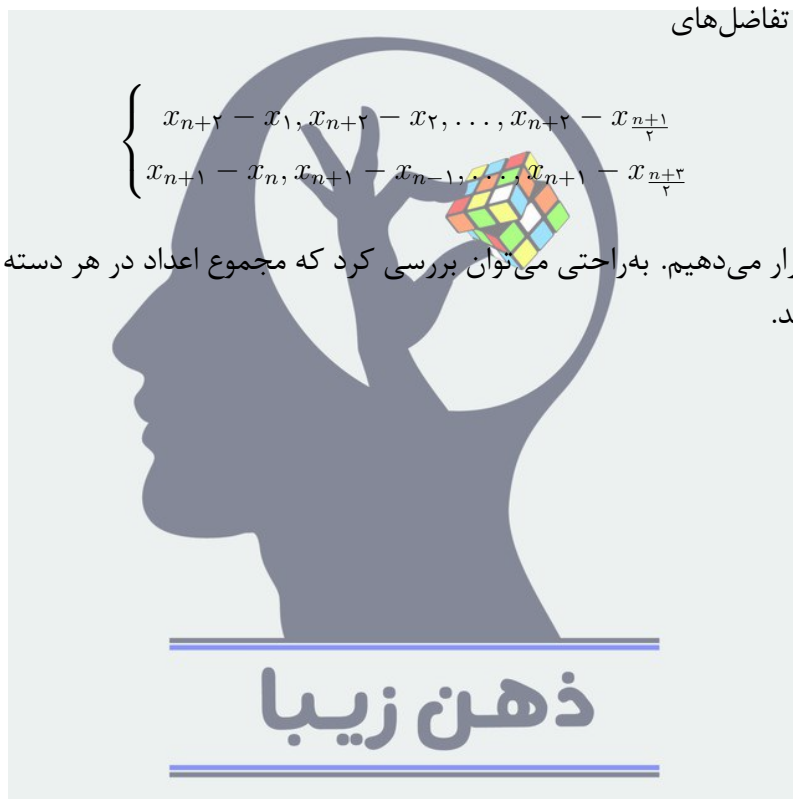
با استقرا روی n حکم را نشان می‌دهیم. برای پایه استقرا ($n = 3$) درستی حکم به راحتی قابل بررسی است پس فرض می‌کنیم حکم برای n درست باشد و درستی آن را برای $n+2$ نشان می‌دهیم. فرض کنید اعداد داده شده $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ باشند. طبق فرض استقرا تفاضل‌های دوبه‌دوی اعداد x_1, x_2, \dots, x_n را می‌توانیم به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کنیم پس فقط کفایت حکم را برای تفاضل‌های باقی‌مانده نشان دهیم. تفاضل‌های

$$\begin{cases} x_{n+2} - x_{n+1}, x_{n+2} - x_n, \dots, x_{n+2} - x_{\frac{n+2}{2}} \\ x_{n+1} - x_1, x_{n+1} - x_2, \dots, x_{n+1} - x_{\frac{n+1}{2}} \end{cases}$$

را در دسته اول و تفاضل‌های

$$\begin{cases} x_{n+2} - x_1, x_{n+2} - x_2, \dots, x_{n+2} - x_{\frac{n+1}{2}} \\ x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{n-1}, \dots, x_{n+1} - x_{\frac{n+2}{2}} \end{cases}$$

را در دسته دوم قرار می‌دهیم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که مجموع اعداد در هر دسته با هم برابر است پس حکم ثابت شد.

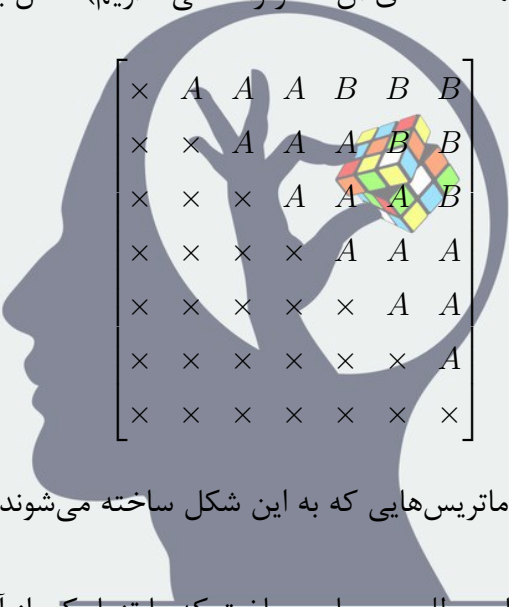


راه‌حل سوم.

فرض کنید اعداد داده شده $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ باشند که n عددی فرد است. هر مثال افراز کردن اعداد $|a_i - a_j|$ ها را با ماتریسی $n \times n$ مدل می‌کنیم. فرض کنید اعداد $|a_i - a_j|$ ها را به دو مجموعه A و B افراز کرده‌ایم. ماتریسی $n \times n$ در نظر بگیرید. اگر $a_i - a_j \in A$ که $i < j$ آن‌گاه در سطر i ام و ستون j ام A می‌نویسیم و در غیر این صورت B می‌نویسیم. حالا برای این که حکم مسئله برقرار باشد برای هر i باید داشته باشیم

$$(\text{تعداد } B \text{ ها در ستون } i) - (\text{تعداد } A \text{ ها در سطر } i) = (\text{تعداد } B \text{ ها در سطر } i) - (\text{تعداد } A \text{ ها در ستون } i)$$

یک ماتریس با این خاصیت می‌سازیم. در هر سطر $\frac{n-1}{2}$ خانه سمت چپ را A می‌گذاریم و بقیه را B (اگر کمتر از $\frac{n-1}{2}$ خانه وجود داشت همه خانه‌های آن سطر را A می‌گذاریم). مثال برای $n = 7$:



$$\begin{bmatrix} \times & A & A & A & B & B & B \\ \times & \times & A & A & A & B & B \\ \times & \times & \times & A & A & A & B \\ \times & \times & \times & \times & A & A & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & A & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که ماتریس‌هایی که به این شکل ساخته می‌شوند خاصیت بیان شده را دارا هستند.

نکته. با این روش می‌توان افرازهای مطلوب بسیاری ساخت که ما تنها یکی از آن‌ها را بیان کردیم.

ذهن زیبا

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیداً صعودی $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

راه‌حل اول.

با استقرا روی n حکم را نشان می‌دهیم. برای پایه استقرا ($n = 1$) که حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم برای $n - 1$ درست باشد و درستی آن را برای n نشان می‌دهیم. بزرگترین توان عدد اول p در عدد طبیعی x را با $v_p(x)$ نشان می‌دهیم. بنابر فرض $a > k$ عددی اول مانند p وجود دارد که $v_p(a) > v_p(k)$. دو تا از خواص تابع v_p که اثبات آن‌ها نیز واضح است به شرح زیر است:

• اگر x و y دو عدد طبیعی باشند $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$

• اگر x و y دو عدد طبیعی باشند که $v_p(x) < v_p(y)$ آن‌گاه $v_p(x + y) = v_p(x)$.

دو طرف تساوی فرض مسئله را باز می‌کنیم، یک k^n از دو طرف خط می‌زنیم و با استفاده از این دو خاصیت v_p دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم. طرف چپ تساوی برابر است با

$$a^{r_1 + \dots + r_n} + k(a^{r_1 + \dots + r_{n-1}} + \dots + a^{r_2 + \dots + r_n}) + \dots + k^{n-1}(a^{r_1} + \dots + a^{r_n})$$

دقت کنید که عبارت بالا به صورت مجموع n عبارت نوشته شده است پس طبق خاصیت دوم باید کم‌ترین توان p بین این n عبارت را پیدا کنیم. طبق خواص بیان شده و اکیداً صعودی بودن دنباله r_i ها داریم

$$\begin{aligned} v_p(k^{n-i}(a^{r_1 + \dots + r_i} + \dots + a^{r_{n-i+1} + \dots + r_n})) &= v_p(k^{n-i}) + v_p(a^{r_1 + \dots + r_i} + \dots + a^{r_{n-i+1} + \dots + r_n}) \\ &= (n-i)v_p(k) + v_p(a^{r_1 + \dots + r_i}) \\ &= (n-i)v_p(k) + (r_1 + \dots + r_i)v_p(a) \\ &> (n-i)v_p(k) + ir_1v_p(a) \\ &> (n-1)v_p(k) + r_1v_p(a) \end{aligned}$$

واضح است که رابطه آخر همان $v_p(k^{n-1}(a^{r_1} + \dots + a^{r_n}))$ است پس طبق خاصیت دوم بزرگ‌ترین توان p سمت چپ برابر است با $(n-1)v_p(k) + r_1v_p(a)$ و به طور مشابه بزرگ‌ترین توان p سمت راست برابر است با $(n-1)v_p(k) + s_1v_p(a)$. در نتیجه این دو عبارت باید با هم برابر باشند که به دست می‌آید $r_1 = s_1$. در نهایت با خط زدن عبارت‌های $a^{r_1} + k$ و $a^{s_1} + k$ از دو طرف تساوی حکم طبق فرض استقرا به دست می‌آید.

راه‌حل دوم.

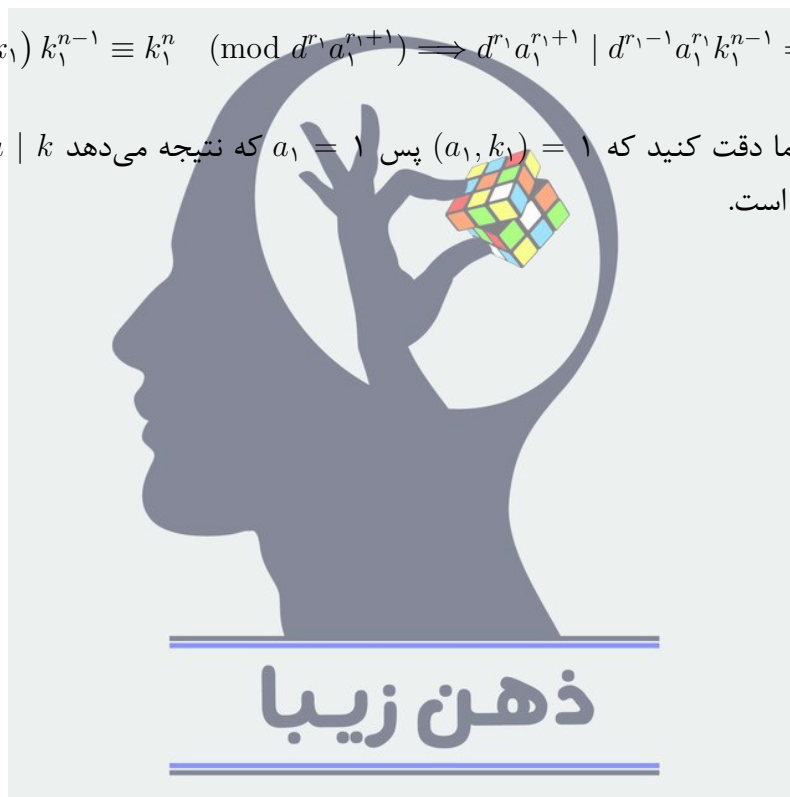
مشابه راه‌حل اول فقط کفایت نشان دهیم $r_1 = s_1$ پس بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $s_1 \geq r_1 + 1$. تعریف می‌کنیم $d = (a, k)$ و $a = da_1$ و $k = dk_1$. با استفاده از این روابط تساوی مسئله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\prod_{i=1}^n (d^{r_i} a_1^{r_i} + dk_1) = \prod_{i=1}^n (d^{s_i} a_1^{s_i} + dk_1) \implies \prod_{i=1}^n (d^{r_i-1} a_1^{r_i} + k_1) = \prod_{i=1}^n (d^{s_i-1} a_1^{s_i} + k_1)$$

حالا دو طرف تساوی آخر را به پیمانه $d^{r_1} a_1^{r_1+1}$ در نظر می‌گیریم که بنابر اکیداً صعودی بودن دو دنباله به‌دست می‌آید

$$(d^{r_1-1} a_1^{r_1} + k_1) k_1^{n-1} \equiv k_1^n \pmod{d^{r_1} a_1^{r_1+1}} \implies d^{r_1} a_1^{r_1+1} \mid d^{r_1-1} a_1^{r_1} k_1^{n-1} \implies da_1 \mid k_1^{n-1}$$

پس $a_1 \mid k_1^{n-1}$ اما دقت کنید که $(a_1, k_1) = 1$ پس $a_1 = 1$ که نتیجه می‌دهد $k \mid a$ و این با رابطه $a > k$ در تناقض است.



۴. همه توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3 \quad (1)$$

راه‌حل اول.

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم $x = y = 0$ و به دست می‌آید $f(0) = 0$. تعریف می‌کنیم $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ برای هر $x \neq 0$ پس رابطه (۱) تبدیل می‌شود به

$$g(x+y)g(x^2-xy+y^2) = 1 \quad (2)$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ که $x+y \neq 0$ (دقت کنید که x^2-xy+y^2 هیچ‌گاه صفر نمی‌شود). نشان می‌دهیم برای هر a, b ای که $b \geq \frac{a^2}{4}$ اعداد حقیقی x, y وجود دارند به طوری که $x+y = a$ و $x^2-xy+y^2 = b$ داریم

$$b = x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy = a^2 - 3xy \Rightarrow xy = \frac{a^2 - b}{3}$$

پس x, y ریشه‌های معادله $z^2 - az + \frac{a^2 - b}{3} = 0$ هستند که طبق فرض $b \geq \frac{a^2}{4}$ دلتای آن نامنفی است که وجود داشتن x, y را نتیجه می‌دهد. پس رابطه (۲) را می‌توان به شکل

$$g(a)g(b) = 1 \quad (3)$$

نوشت که $a \neq 0$ و $b \geq \frac{a^2}{4}$. فرض کنید $4 < a \leq 4$ و واضح است که $a \geq \frac{a^2}{4}$ پس در رابطه (۳) می‌توانیم قرار دهیم $b = a$ که نتیجه می‌دهد $g(a) = \pm 1$. باز هم در رابطه (۳) قرار می‌دهیم $a = 4$ پس برای هر $b \geq 4$ داریم $g(b) = \pm 1$ در نتیجه در کل برای هر $a > 0$ داریم $g(a) = \pm 1$. در رابطه (۳) را عددی دلخواه قرار می‌دهیم و از آن جا که b مثبت است نتیجه می‌شود $g(a) = \pm 1$ برای هر $a \neq 0$. حالا فرض کنید r, s حقیقی وجود داشته باشند که $g(r) = 1$ و $g(s) = -1$. طبق رابطه (۳) برای هر $b \geq \frac{r^2}{4}$ داریم $g(b) = 1$ و از طرف دیگر برای هر $b \geq \frac{s^2}{4}$ داریم $g(b) = -1$ که به وضوح این دو رابطه با هم در تناقض اند پس g ثابت ۱ یا ثابت -۱ است که نتیجه می‌دهد $f(x) = x$ یا $f(x) = -x$ که هر دوی این توابع در رابطه (۱) صدق می‌کنند.

راه‌حل دوم.

تساوی داده شده مسئله را با $P(x, y)$ نشان می‌دهیم. ابتدا دقت کنید که اگر عدد حقیقی a وجود داشته باشد که $f(a) = 0$ ، $P(a, 0)$ نتیجه می‌دهد $a = 0$. حالا داریم

$$P(x, x - y) \rightarrow f(2x - y)f(x^2 - xy + y^2) = (2x - y)(x^2 - xy + y^2)$$

با تقسیم کردن این رابطه بر $P(x, y)$ به دست می‌آید (فرض می‌کنیم $x + y \neq 0$)

$$\frac{f(2x - y)}{f(x + y)} = \frac{2x - y}{x + y} \quad (1)$$

در رابطه (1) قرار می‌دهیم $y = 1 - x$ که نتیجه می‌دهد $f(3x - 1) = (3x - 1)f(1)$ و از آن جا که $3x - 1$ همه مقادیر حقیقی را در بر می‌گیرد به دست می‌آید $f(x) = xf(1)$. با قرار دادن این رابطه در صورت مسئله نتیجه می‌شود $f(1) = \pm 1$ پس توابع $f(x) = x$ و $f(x) = -x$ جواب‌های مسئله‌اند.



راه‌حل سوم.

تساوی داده شده مسئله را با $P(x, y)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$\left. \begin{aligned} P(x, 0) &\rightarrow f(x)f(x^2) = x^3 \\ P(x, x) &\rightarrow f(2x)f(x^2) = 2x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2x) = 2f(x) \quad (1)$$

هم‌چنین دقت کنید که $P(1, 0)$ نتیجه می‌دهد $f(1) = \pm 1$. فرض می‌کنیم $f(1) = 1$. تعریف می‌کنیم $z = x + y$ و $a = xy$ و بنابر این تعریف به‌دست می‌آید $z^2 - 3a = x^2 - xy + y^2 = z^2 - 3a$ حالا می‌خواهیم همه z هایی را بیابیم که برای آن عدد حقیقی a وجود داشته باشد که $z^2 - 3a = 1$. پس باید داشته باشیم

$$1 = z^2 - 3a = z^2 - 3xy = z^2 - 3x(z-x) = 3x^2 - 3zx + z^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 3zx + (z^2 - 1) = 0$$

برای اینکه تساوی آخر در اعداد حقیقی برای x جواب داشته باشد باید دلتای آن نامنفی باشد یعنی

$$0 \leq \Delta = 9z^2 - 12(z^2 - 1) = 12 - 3z^2 \Leftrightarrow -2 \leq z \leq 2$$

از آن‌جا که روابط بالا برگشت پذیر هستند نتیجه می‌شود اگر $-2 \leq z \leq 2$ اعداد حقیقی a ، x و y وجود دارند که $z = x + y$ ، $a = xy$ و $z^2 - 3a = 1$ پس از $P(x, y)$ به‌دست می‌آید $f(z) = z$ برای هر $-2 \leq z \leq 2$. حالا از رابطه (1) و به‌طور استقرایی نتیجه می‌شود $f(2^n x) = 2^n f(x)$ برای هر n طبیعی. عدد حقیقی دلخواه x را در نظر می‌گیریم. واضح است که عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $|x| \leq 2^{n+1}$ پس $-2 \leq \frac{x}{2^n} \leq 2$ و در نهایت داریم

$$f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = x$$

حالت $f(1) = -1$ نیز به‌طور کامل مشابه جواب $f(x) = -x$ را می‌دهد پس همه جواب‌های سوال به‌دست آمدند.

راه‌حل چهارم.

تساوی داده شده مسئله را با $P(x, y)$ نشان می‌دهیم. مشابه راه‌حل اول داریم $f(0) = 0$ و مشابه راه‌حل سوم می‌توان ثابت کرد $f(2^n x) = 2^n f(x)$ برای هر n طبیعی و $f(1) = \pm 1$ که فرض می‌کنیم $f(1) = 1$ داریم.

$$P(x, 1-x) \rightarrow f(3x^2 - 3x + 1) = 3x^2 - 3x + 1$$

دقت کنید که عبارت $3x^2 - 3x + 1$ همه اعداد بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{4}$ را می‌پوشاند پس برای هر $x \geq \frac{1}{4}$ داریم $f(x) = x$ عدد مثبت و دل‌خواه x را در نظر می‌گیریم. واضح است که عدد طبیعی n وجود دارد که $2^n x \geq \frac{1}{4}$ و از این به‌دست می‌آید

$$f(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n} = x$$

پس برای هر عدد نامنفی داریم $f(x) = x$ از طرف دیگر با مقایسه دو تساوی $P(x, 0)$ و $P(-x, 0)$ نتیجه می‌شود f تابعی فرد است (دقت کنید که مانند راه‌حل دوم می‌دانیم $f(a) = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$) پس برای هر x حقیقی داریم $f(x) = x$. حالت $f(1) = -1$ نیز جواب $f(x) = -x$ را می‌دهد.

ذهن زیبا

راه‌حل پنجم.

تساوی داده شده مسئله را با $P(x, y)$ نشان می‌دهیم. مشابه راه‌حل اول داریم $f(0) = 0$. فرض می‌کنیم $x_0 \neq 0$ وجود داشته باشد که $|f(x_0)| > |x_0|$. دقت کنید که

$$P(x_0, 0) \rightarrow f(x_0)f(x_0^2) = x_0^3 \implies |f(x_0^2)| < x_0^2$$

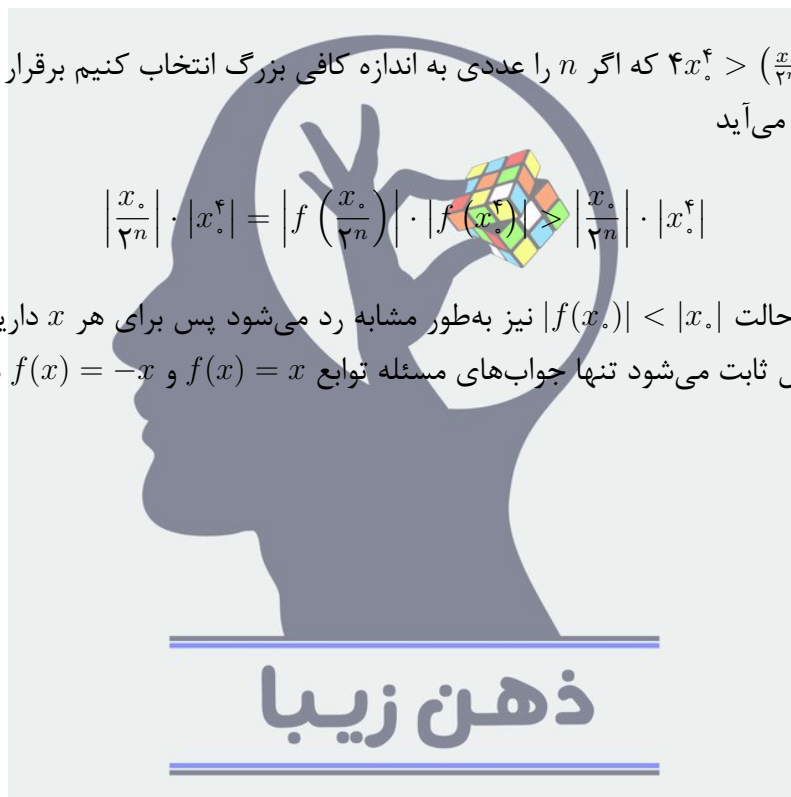
به همین ترتیب ثابت می‌شود $|f(x_0^4)| > |x_0^4|$. دقت کنید که مشابه راه‌حل سوم برای هر n طبیعی داریم $f(2^n x) = 2^n f(x)$ پس $|f(\frac{x_0}{2^n})| > |\frac{x_0}{2^n}|$. مشابه راه‌حل اول α و β حقیقی وجود دارند به طوری که

$$\alpha + \beta = \frac{x_0}{2^n}, \quad \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = x_0^4$$

اگر و تنها اگر $x_0^4 > (\frac{x_0}{2^n})^2$ که اگر n را عددی به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم برقرار می‌شود. حالا از $P(\alpha, \beta)$ به دست می‌آید

$$\left| \frac{x_0}{2^n} \right| \cdot |x_0^4| = \left| f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \right| \cdot |f(x_0^4)| > \left| \frac{x_0}{2^n} \right| \cdot |x_0^4|$$

که تناقض است. حالت $|f(x_0)| < |x_0|$ نیز به طور مشابه رد می‌شود پس برای هر x داریم $f(x) = \pm x$ و مشابه راه‌حل اول ثابت می‌شود تنها جواب‌های مسئله توابع $f(x) = x$ و $f(x) = -x$ هستند.



۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

راه‌حل اول.

کلیدها را با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نشان می‌دهیم. لامپی که بیش‌ترین تعداد کلید به آن متصل است را A می‌نامیم. مسئله را به پنج حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت اول. ۵ کلید به لامپ A متصل باشد.

یک لامپ دیگر مانند B را در نظر می‌گیریم. اگر حداقل سه کلید به B وصل باشند همین سه کلید را می‌زنیم. در غیر این صورت ۲ کلید از کلیدهایی که B وصل نیستند و ۱ کلید که B وصل است را می‌زنیم.

حالت دوم. ۴ کلید به لامپ A متصل باشد.

از آن‌جا که مجموعه لامپ‌های هیچ دو کلیدی یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که کلیدهایش با کلیدهای A اشتراک داشته باشد. اگر حداقل ۳ اشتراک داشته باشد همین ۳ کلید را می‌زنیم. در غیر این صورت ۱ کلید مشترک بین A و B و ۲ کلید از ۴ کلیدی که به A وصل‌اند ولی به B وصل نیستند را می‌زنیم.

حالت سوم. ۳ کلید به لامپ A متصل باشد.

فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ متصل نباشد. از آن‌جا که مجموعه لامپ‌های این دو کلید یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که فقط به یکی از این دو کلید متصل است. هم‌چنین این لامپ به حداکثر ۳ کلید متصل است پس به حداقل یکی از کلیدهای ۳ و ۴ و ۵ مانند ۳ وصل نیست در نتیجه کلیدهای ۱ و ۲ را می‌زنیم.

حالت چهارم. ۲ کلید به لامپ A متصل باشد.

کاملاً مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم. فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ و ۳ متصل نباشد پس لامپی مانند B وجود دارد که به کلید ۱ وصل باشد ولی به کلید ۲ وصل نباشد. هم‌چنین B حداقل به یکی از کلیدهای ۴ و ۵ مانند ۴ نیز وصل نیست پس کلیدهای ۱ و ۲ و ۴ را می‌زنیم.

حالت پنجم. ۱ کلید به لامپ A متصل باشد.

واضح است که همه لامپ‌ها به دقیقاً ۱ کلید متصل‌اند و لامپی مانند B وجود دارد که به کلیدی دیگر وصل باشد پس ۲ کلید متصل به A و B و ۱ کلید دل‌خواه دیگر را می‌زنیم.

پس در همه حالات ممکن حکم مسئله برقرار است.

راه‌حل دوم.

لامپ‌ها را a_1, a_2, \dots, a_n و کلیدها را b_1, b_2, \dots, b_5 می‌نامیم. دقت کنید که $n \geq 3$ زیرا در غیر این صورت حداکثر ۴ زیرمجموعه از لامپ‌ها داریم و شرط سوال نمی‌تواند برقرار باشد. جدولی $10 \times n$ تشکیل می‌دهیم که هر سطر آن متناظر با یک سه‌تایی از کلیدها و هر ستون آن متناظر با یکی از لامپ‌ها است.

	a_1	a_2	\cdot	\cdot	\cdot	a_n	
(b_1, b_2, b_3)				\cdot	\cdot	\cdot	$\rightarrow z_1$
(b_1, b_2, b_4)				\cdot	\cdot	\cdot	$\rightarrow z_2$
\cdot	\cdot	\cdot		\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot		\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot		\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
(b_3, b_4, b_5)				\cdot	\cdot	\cdot	$\rightarrow z_{10}$

در خانه تقاطع سطر i ام و ستون j ام عدد ۱ را می‌نویسیم اگر پس از تغییر وضعیت ۳ کلید متناظر با سطر i ام لامپ a_j روشن شود (فرض می‌کنیم همه لامپ‌ها خاموش بوده‌اند) و در غیر این صورت در این خانه عدد صفر را می‌نویسیم. مجموع اعداد سطر i ام را با z_i نشان می‌دهیم. فرض کنید لامپ a_j به X_j کلید متصل باشد. در این صورت مجموع اعداد ستون j ام برابر است با $\binom{X_j}{3} + \binom{5-X_j}{2}$ پس باید داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{10} z_i = \sum_{j=1}^n \left(\binom{X_j}{3} + \binom{5-X_j}{2} \right) \quad (1)$$

حالا دقت کنید که X_j عددی طبیعی از ۱ تا ۵ است و با بررسی این مقادیر می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که عبارت $\binom{X_j}{3} + \binom{5-X_j}{2}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است. پس طبق رابطه (۱) داریم

$$\sum_{i=1}^{10} z_i \geq 4n$$

در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری n ای وجود دارد که $z_i \geq \lceil \frac{4n}{10} \rceil \geq 2$ و این همان حکم سوال است.

راه‌حل سوم.

مجموعه لامپ‌های متصل به هر کلید را با A_1, A_2, \dots, A_5 نشان می‌دهیم. می‌توانیم فرض کنیم برای هر $1 \leq i < j < k \leq 5$ داریم

$$|A_i \cup A_j \cup A_k| - (|A_i \cap A_j| + |A_j \cap A_k| + |A_k \cap A_i|) + 3|A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 1 \quad (1)$$

زیرا دقت کنید که اگر لامپی در یک یا سه تا از مجموعه‌های A_i, A_j, A_k آمده باشد در سمت چپ رابطه (1) یک بار شمرده می‌شود و در غیر این صورت شمرده نمی‌شود پس اگر این عبارت بزرگ‌تر یا مساوی 2 باشد حکم به دست می‌آید. حالا همه $\binom{5}{3} = 10$ رابطه ممکن را با هم جمع می‌کنیم و به رابطه زیر می‌رسیم

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cup A_j \cup A_k| - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 10 \quad (2)$$

هم‌چنین طبق اصل شمول و عدم و شمول می‌دانیم

$$|A_i \cup A_j \cup A_k| = |A_i| + |A_j| + |A_k| - (|A_i \cap A_j| + |A_j \cap A_k| + |A_k \cap A_i|) + |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

و با قرار دادن این تساوی در رابطه (2) به دست می‌آید

$$6 \sum_{1 \leq i \leq 5} |A_i| - 6 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| + 4 \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 10 \quad (3)$$

برای هر $1 \leq n \leq 5$ ، تعداد لامپ‌هایی که به دقیقاً n کلید متصل‌اند را a_n می‌نامیم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$\sum_{1 \leq i \leq 5} |A_i| = \binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{1} a_2 + \binom{3}{1} a_3 + \binom{4}{1} a_4 + \binom{5}{1} a_5$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| = \binom{2}{2} a_2 + \binom{3}{2} a_3 + \binom{4}{2} a_4 + \binom{5}{2} a_5$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{3}{3} a_3 + \binom{4}{3} a_4 + \binom{5}{3} a_5$$

با قرار دادن این سه تساوی در رابطه (3) و ساده کردن آن به دست می‌آید

$$6a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 4a_4 + 10a_5 \leq 10 \implies a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq \frac{10}{4} \quad (4)$$

دقت کنید که مشابه راه‌حل دوم می‌دانیم اجتماع A_i ها حداقل 3 عضو دارد و از طرف دیگر تعداد اعضای اجتماع A_i ها برابر است با $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ که این با رابطه (4) در تناقض است پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود.

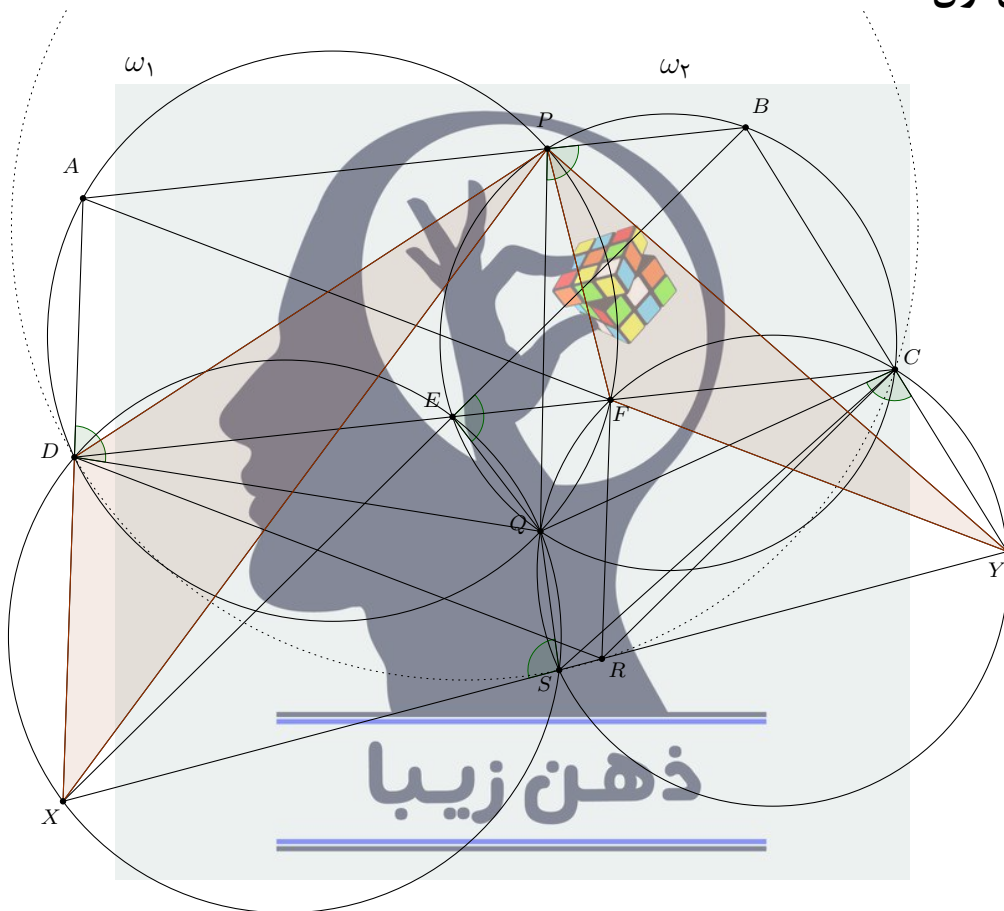
سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

۶. دو دایره ω_1 و ω_2 یکدیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و ω_1 و ω_2 را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا ω_1 را در D و F و ω_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین D و C باشند. محل تقاطع AD و BE را X ، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

راه‌حل اول.



الف) دقت کنید که

$$\angle QEB = \angle QPB = \angle QDA \implies \angle QEX = \angle QDX$$

پس چهارضلعی $XDEQ$ محاطی است و به طور مشابه چهارضلعی $YCFQ$ نیز محاطی است. محل برخورد دوم دایره محیطی این دو چهارضلعی را S می‌نامیم. واضح است که $\angle QSX = \angle QEB = \angle QCY$ پس X, S, Y هم‌خط‌اند. محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث DSC با XY را R' می‌نامیم. داریم

$$\angle R'DC = \angle R'SC = \angle YSC = \angle YFC = \angle FAP = \angle FDP = \angle CDP$$

و به طور مشابه به‌دست می‌آید $\angle R'CD = \angle DCP$ پس R' قرینه P نسبت به CD است و $R \equiv R'$

در نتیجه حکم این قسمت ثابت شد.

ب) واضح است که $FR = FP = AD$ و $RD = PD = AF$ پس $AFRD$ متوازی‌الاضلاع است و $RD \parallel AF$ و $RF \parallel AD$. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{RY}{RX} = \frac{AD}{DX} = \frac{PF}{DX}$$

هم‌چنین طبق قضیه نیم‌ساز حکم معادل است با $\frac{RY}{RX} = \frac{PY}{PX}$ پس کفایت نشان دهیم $\frac{PY}{PX} = \frac{PF}{DX}$. ثابت می‌کنیم $\triangle PDX \sim \triangle YFP$ و از این حکم به دست می‌آید. دقت کنید که $\angle ADP = \angle AFP$ پس $\angle PDX = \angle PFY$ در نتیجه کافی است نشان دهیم

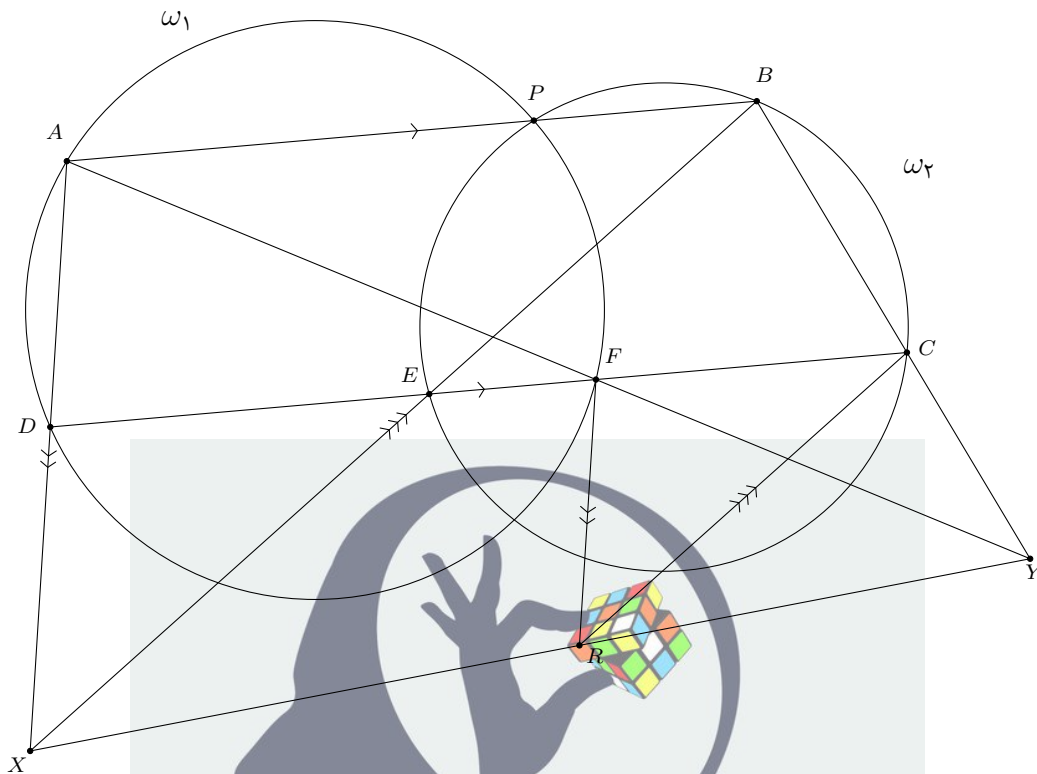
$$\frac{PD}{DX} = \frac{FY}{FP} \iff \frac{AF}{FY} = \frac{DX}{AD}$$

از آنجا که $RD \parallel AF$ و $RF \parallel AD$ دو طرف رابطه آخر با $\frac{RX}{RY}$ برابر است و حکم این قسمت نیز ثابت می‌شود.



راه‌حل دوم.

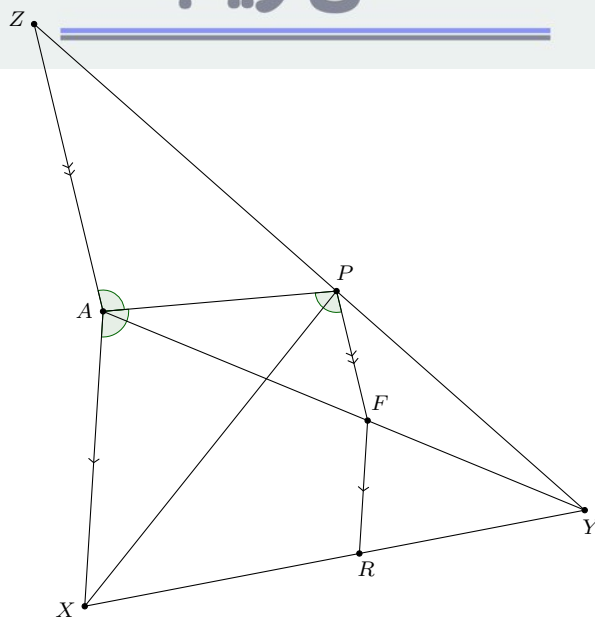
(الف)



دقت کنید که چهارضلعی‌های $ADFP$ و $PBCE$ دوزنقه متساوی‌الساقین هستند در نتیجه $\angle RFD = \angle RFD$ پس $\angle PFD = \angle ADF$ پس $RF \parallel AX$ و $\angle FCR = \angle PCF = \angle PBE$ پس $RC \parallel BX$. حالا دو مثلث XAB و RFC را در نظر بگیرید. اضلاع این دو مثلث دویه‌دو با هم موازی‌اند پس خطوطی که رئوس متناظر را به هم متصل می‌کنند در یک نقطه هم‌مرس‌اند (به این مثلث‌ها اصطلاحاً مثلث‌های متجانس می‌گوییم و این حکم نیز با قضیه تالس به راحتی اثبات می‌شود) یعنی خطوط BC و AF و XR هم‌مرس‌اند که همان حکم سوال است.

(ب)

ذهن زیبا



سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و ششمین دوره المپیاد ریاضی

از نقطه A خطی موازی با PF رسم می‌کنیم تا PY را در Z قطع کند. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{PF}{AZ} = \frac{YF}{YA} = \frac{FR}{AX}$$

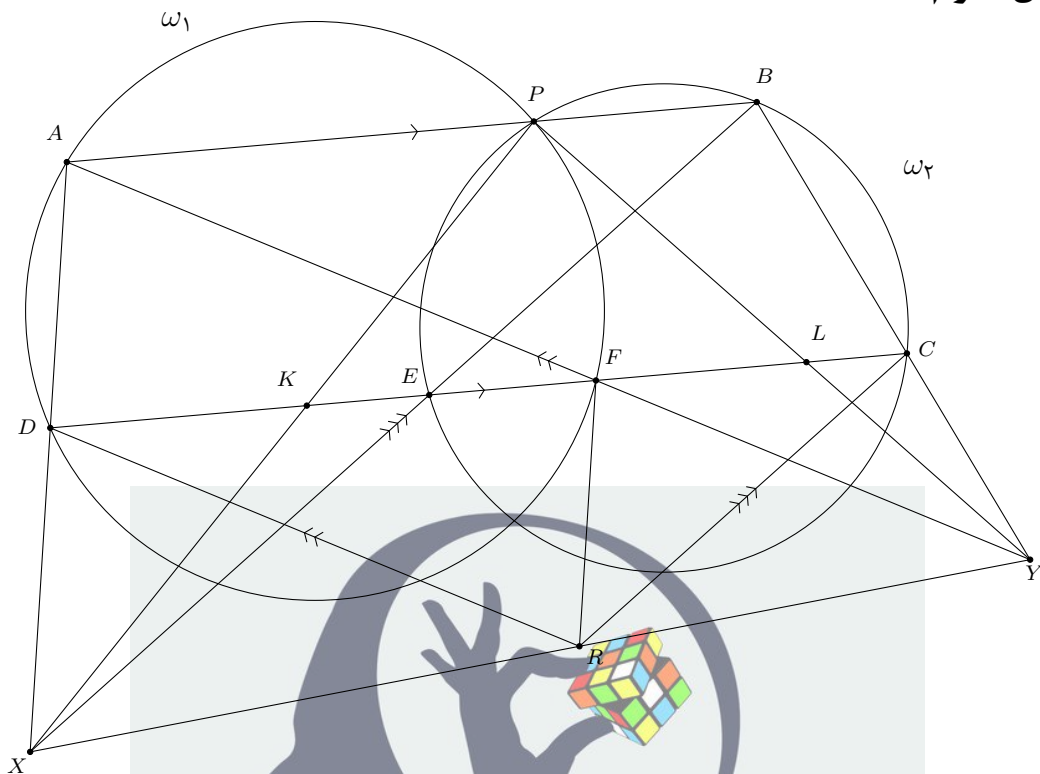
پس از آن‌جا که $PF = FR$ نتیجه می‌شود $AX = AZ$. از طرف دیگر دقت کنید که $\angle ZAP = \angle FPA = \angle XAP$ پس دو مثلث ZAP و XAP به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت می‌شوند که نتیجه می‌دهد $ZP = PX$. در نهایت طبق قضیه تالس به دست می‌آید

$$\frac{PY}{PX} = \frac{PY}{PZ} = \frac{FY}{FA} = \frac{RY}{RX}$$

و حکم طبق قضیه نیم‌ساز نتیجه می‌شود.



راه‌حل سوم.

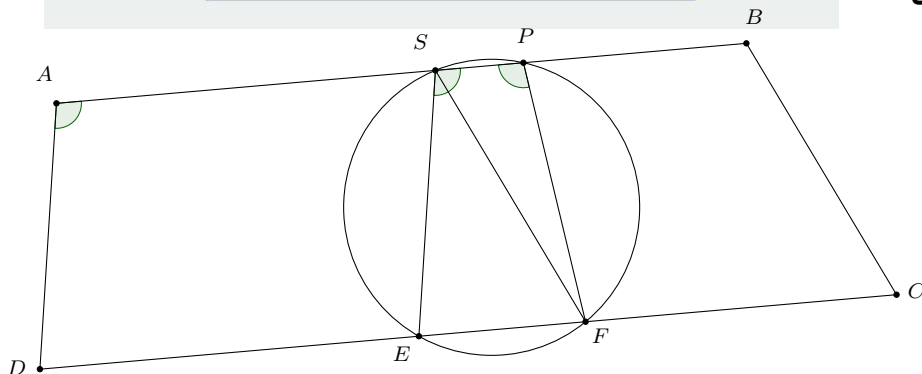


الف) مشابه راه‌حل دوم می‌توان ثابت کرد $RC \parallel BX$ و $RD \parallel AY$. حالا از C موازی با BX رسم می‌کنیم تا XY را در R' قطع کند. اگر نشان دهیم $R'D \parallel AY$ نتیجه می‌شود R' همان R است و حکم این قسمت ثابت می‌شود. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{R'Y}{YX} = \frac{YC}{YB} = \frac{CF}{AB} \quad (1)$$

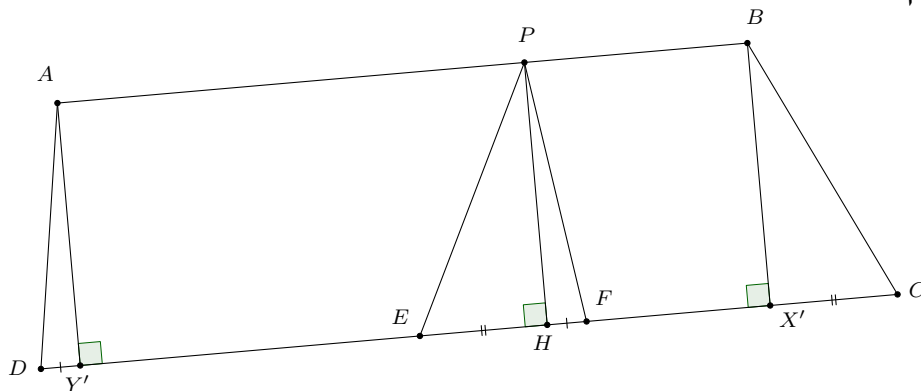
و طبق عکس قضیه تالس باید نشان دهیم $\frac{R'X}{XY} = \frac{XD}{AX}$ یا معادلاً $\frac{R'X}{XY} = \frac{DE}{AB}$ پس طبق رابطه (1) حکم معادل است با $DE + CF = AB$. این حکم معادل را به دو روش نشان می‌دهیم:

روش اول.



محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث PEF با AB را S می‌نامیم. واضح است که چهارضلعی $SPFE$ دوزنقه متساوی‌الساقین است پس داریم $\angle DAP = \angle FPA = \angle PSE$ در نتیجه $SE \parallel AD$ از این هم به دست می‌آید چهارضلعی $ASED$ متوازی‌الاضلاع است و $AS = DE$. مشابهاً ثابت می‌شود $BS = CF$ و حکم معادل ثابت می‌شود.

روش دوم.



از نقاط A, B و P بر CD عمود می‌کنیم و پای عمودها را به ترتیب Y', H و X' می‌نامیم. می‌دانیم که $PH = AY'$ و $PF = AD$ پس دو مثلث PHF و $AY'D$ هم‌نهشتند که نتیجه می‌دهد $DY' = HF$ و مشابهاً $CX' = HE$. حالا داریم

$$DE + CF = DY' + Y'E + CX' + X'F = HF + Y'E + HE + X'F = X'Y'$$

هم‌چنین $ABX'Y'$ مستطیل است پس $X'Y' = AB$ و حکم معادل به‌دست می‌آید.
 (ب) محل برخورد PX و PY با CD را به ترتیب K و L می‌نامیم. کفایت نشان دهیم مثلث KPL متساوی‌الساقین است. این حکم را به دو روش نشان می‌دهیم:
روش اول. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{YL}{LP} = \frac{YC}{CB} = \frac{YR}{RX}$$

پس از عکس قضیه تالس به‌دست می‌آید $LR \parallel PX$ و $KR \parallel PY$ به‌طور مشابه. در نتیجه چهارضلعی $PLRK$ یک متوازی‌الاضلاع است و $PK = LR = PL$.
روش دوم. نشان می‌دهیم $KH = LH$ و از این حکم سوال به‌دست می‌آید. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{KE}{ED} = \frac{PB}{AB} \implies KE = \frac{ED \cdot PB}{AB} \quad (2)$$

هم‌چنین

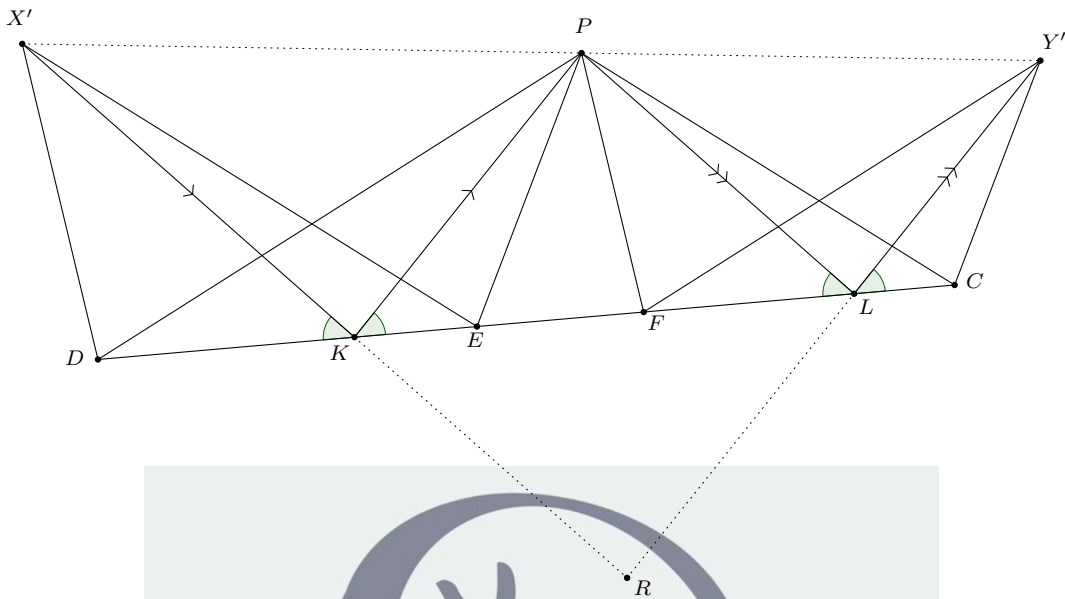
$$ED = DY' + Y'E = HF + Y'E = Y'F - EH = AP + HF - EH \quad (3)$$

حالا با استفاده از روابط (۲) و (۳) طول KH را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} KH &= KE + EH \stackrel{(2)}{=} \frac{ED \cdot PB}{AB} + EH \stackrel{(3)}{=} \frac{AP \cdot BP + HF \cdot BP - EH \cdot BP + EH \cdot AB}{AB} \\ &= \frac{AP \cdot BP + HF \cdot BP + HE \cdot AP}{AB} \end{aligned}$$

به‌طور مشابه می‌توانیم طول LH را محاسبه کنیم و به‌راحتی می‌توان دید $KH = LH$.

راه‌حل چهارم.



الف) قرینه X و Y نسبت به CD را به ترتیب X' و Y' می‌نامیم. حکم سوال معادل با هم‌خطی X', P, Y' می‌شود. دقت کنید از آنجا که $\angle XDF + \angle PFD = 180^\circ$ نتیجه می‌شود $X'D \parallel PF$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $X'E \parallel PC$, $Y'F \parallel PD$ و $Y'C \parallel PE$ هم‌چنین $DE \parallel CF$ در نتیجه دو چهارضلعی $X'DEP$ و $PFCY'$ با هم متجانس‌اند پس $X'P \parallel PY'$ که هم‌خطی X', P, Y' را نتیجه می‌دهد.

ب) از نقطه X' پرتویی به خط CD می‌تابانیم که بازتاب آن از P بگذرد هم‌چنین پرتوی دیگری از نقطه P و با همان زاویه به خط CD می‌تابانیم طبق تجانسی که بیان کردیم بازتاب این پرتو از Y' می‌گذرد. محل برخورد این دو پرتو با CD را به ترتیب K و L می‌نامیم. دقت کنید که $\angle RKL = \angle PKL = \angle X'KD$ پس $X'K$ از R می‌گذرد و به‌طور مشابه $Y'L$ نیز از R می‌گذرد. حالا واضح است که چهارضلعی $PKRL$ یک لوزی است پس نیم‌ساز زاویه $\angle KRL$ که همان نیم‌ساز زاویه $\angle X'RY'$ است از P می‌گذرد و این معادل حکم سوال است.

نکته. تمام قضایایی که با استفاده از تجانس در راه‌حل بیان شده با تشابه مثلث‌ها به راحتی قابل اثبات است.

ذهن زیبا