

به نام او

مرحله دوم سی‌امین المپیاد ریاضی کشور

دوشنبه، ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۱

روز اول

زمان: چهار ساعت و نیم

(۱) دایره C_1 و نقطه O روی آن مفروض است. دایره C_2 به مرکز O ، C_1 را در دو نقطه P و Q قطع می‌کند. دایره‌ای است که در نقطه R بر C_2 مماس خارج و در نقطه S بر C_1 مماس داخل است و فرض کنید خط RS از نقطه Q می‌گذرد. محل برخورد دوم PR و OR با C_1 را به ترتیب X و Y می‌نامیم. ثابت کنید QX با SY موازی است.

(۲) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. به چند طریق می‌توان اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ را دور یک دایره قرار داد به شکلی که هر عدد مقسوم‌علیه‌ی از مجموع دو عدد مجاورش باشد؟

(۳) ثابت کنید اگر t عددی طبیعی باشد عدد طبیعی $n > 1$ وجود دارد که نسبت به t اول است و هیچ‌کدام از اعداد $n+t, n^2+t, n^3+t, \dots$ توان کامل نیستند. (دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آن دو، یک باشد و به عدد طبیعی a توان کامل گفته می‌شود اگر اعداد طبیعی b و m موجود باشند که $a = b^m$ و $m \geq 2$.)

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

(۴) الف) آیا زیرمجموعه‌های دو عضو A_1 ، A_2 ، A_3 ، ... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعی n ، مجموع اعضای A_n برابر $1391 + n$ باشد؟

ب) آیا زیرمجموعه‌های دو عضو A_1 ، A_2 ، A_3 ، ... از اعداد طبیعی یافت می‌شوند که هر عدد طبیعی در دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود و برای هر عدد طبیعی n ، مجموع اعضای A_n برابر $1391 + n^2$ باشد؟

(۵) چندجمله‌ای درجه دوی $x^2 + ax + b$ با ضرایب حقیقی، را در نظر بگیرید. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این که بتوان آن را در اعداد حقیقی تجزیه کرد این است که دلتای آن، یعنی $a^2 - 4b$ ، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. توجه کنید که دلتا نیز یک چندجمله‌ای با متغیره‌های a و b است. نشان دهید چیزی مشابه دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجه چهار وجود ندارد: ثابت کنید چندجمله‌ای چهار متغیره $P(a, b, c, d)$ با خاصیت زیر وجود ندارد:

چندجمله‌ای درجه چهار $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ قابل تجزیه به حاصل ضرب چهار چندجمله‌ای درجه یک باشد اگر و تنها اگر $P(a, b, c, d) \geq 0$.

ذهن زیبا

(۶) دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D ، E و F به ترتیب بر اضلاع BC ، CA و AB مماس است. قرینه نقاط F و E را به ترتیب نسبت به B و C ، نقاط T و S می‌نامیم. ثابت کنید مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ATS درون یا روی دایره محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.