

به نام او

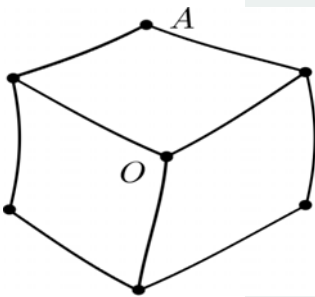
مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

سه‌شنبه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۶

روز اول

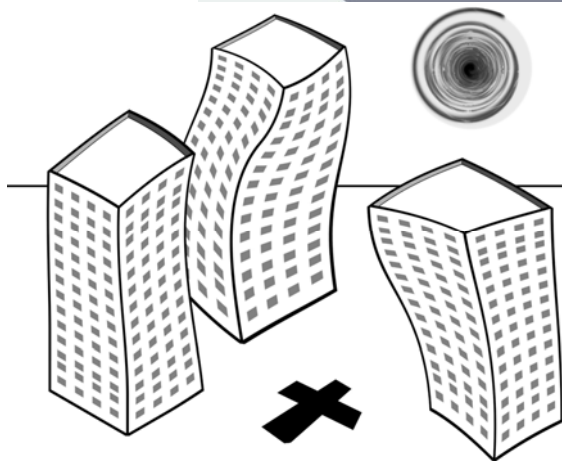
زمان: چهار ساعت و نیم

(۱) در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD=AM$. محل برخورد دو دایره‌های محیطی مثلث‌های AMC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیم‌ساز زاویه‌ی ACB است.



(۲) دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از O به A ؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n + 1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند).

(۳) در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از 45° درجه بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده



ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان‌های قبلی به هم مشرف نباشند می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ای افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمودی بر روی صفحه در نظر بگیرید.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز دوم

چهارشنبه، ۵ اردیبهشت ۱۳۸۶

(۴) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n ، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

(۵) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی C_1 را، به ترتیب، N و N' می‌نامیم. نشان دهید

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

(۶) فرهاد برای جشنواره خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n دقیقاً یکی از سه عدد n ، $2n$ و $3n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید عدد ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.



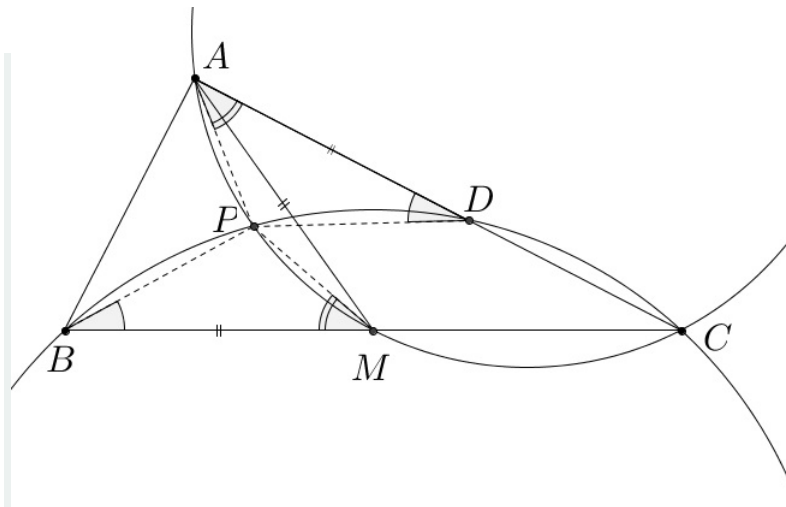
ذهن زیبا

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم بیست و پنجمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۶

۱. از آن جا که نقطه های B, P, D, C روی یک دایره قرار دارند نتیجه می گیریم $\angle PBC = \angle ADP$.
هم چنین نقطه های A, P, M, C هم دایره هستند، در نتیجه $\angle CAP = \angle PMB$. از آن جایی که مثلث ABC قائم الزاویه است، میانه ی وارد بر وتر (AM) نصف وتر است. پس $AM = MB$ و لذا $BM = AD$.
از نتایج بالا به دست می آید که دو مثلث PMB و PAD با یکدیگر هم نهشت هستند. پس طول ارتفاع رسم شده از P در این دو مثلث برابر است که نتیجه می دهد نقطه ی P از دو ضلع زاویه ی $\angle ACB$ به یک فاصله است و در نتیجه روی نیم سازه این زاویه قرار دارد.



۲. راه حل اول. فرض کنید a_n تعداد مسیره های به طول n از O به خودش (یا به دلیل تقارن تعداد مسیره های به طول n از یک رأس به خودش)، و b_n تعداد مسیره های به طول n از O به A باشد (یا به دلیل تقارن تعداد مسیره های به طول n از یک رأس به رأس غیر مجاور در یک وجه).
یک مسیر از O به خودش را در نظر بگیرید. به $n-1$ امین رأس این مسیر توجه کنید. طبق شرط مسئله این رأس باید خود O و یا رأسی باشد که فاصله اش از O برابر ۲ است. می دانیم که فاصله ی سه رأس از O برابر با ۲ است و هم چنین تعداد مسیره های به طول دو بین دو رأس که در یک وجه روبه رو به یک قطر هستند برابر ۲ و تعداد مسیره های به طول ۲ از یک رأس به خودش برابر ۳ است. در نتیجه رابطه ی زیر برقرار است:

$$a_n = 2(b_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2}) + 3a_{n-2}$$

به همین ترتیب به سادگی به دست می آید که:

$$b_n = 2(a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2}) + 3b_{n-2}$$

با کم کردن این دو رابطه از یکدیگر داریم:

$$a_n - b_n = a_{n-2} - b_{n-2}$$

در نتیجه:

$$a_{1386} - b_{1386} = a_{1384} - b_{1384} = \dots = a_0 - b_0 = 1$$

بنابراین $a_{1386} > b_{1386}$.

راه حل دوم. چهار رأس از رئوس مکعب روی عمود منصف OA واقع هستند. این چهار رأس را رئوس میانی می‌گوییم. هر مسیر به طول ۱۳۸۶ از O به A از یکی از این رئوس میانی می‌گذرد. حال با فرآیند زیر از هر مسیر O به A مسیری از O به O می‌سازیم.

بعد از اولین باری که مسیر از یک رأس میانی عبور کرد، قرینه‌ی حرکت‌هایی که انجام داده‌ایم را نسبت به صفحه‌ی عمود منصف OA انجام می‌دهیم تا این بار به نقطه‌ی O برسیم.

پس هر مسیر از O به A به مسیری یکتا از O به O تبدیل می‌شود. دقت کنید که از آنجا که می‌توان عکس این کار را انجام داد هیچ دو مسیری به یک مسیر تبدیل نمی‌شود. پس تعداد مسیرهای از O به O بیشتر یا مساوی مسیرهای O به A است. اما دقت کنید که مسیری که از تعدادی پایین و سپس بالا رفتن از رأس O تشکیل شده است هیچ‌گاه از رئوس میانی نمی‌گذرد و بنابراین تبدیل یافته‌ی هیچ مسیری از O به A نیست. بنابراین در کل تعداد مسیرهای از O به O بیشتر است.

۳. فرض کنید ارتفاع ساختمان در نقطه‌ی X از صفحه را با h_X نمایش دهیم. اگر ساختمان‌های بنا شده در دو نقطه‌ی A و B بر یکدیگر مشرف نباشند، با توجه به تعریف مشرف بودن این معادل آن است که زاویه‌ای که خط واصل بین دو سر ساختمان‌ها می‌سازند با زمین کم‌تر یا مساوی 45° باشد. اگر این زاویه را θ بنامیم، داریم:

$$1 = |\tan(45^\circ)| \geq |\tan \theta| = \frac{|h_A - h_B|}{|A - B|} \Leftrightarrow |h_B - h_A| \leq |B - A|$$

که منظور از $|B - A|$ فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B در صفحه‌ی شهر است. فرض کنید که نقطه‌ای که می‌خواهیم در آن ساختمان جدید را بنا کنیم، نقطه‌ی P باشد و ارتفاع ساختمان مورد نظر را با h نمایش دهیم. شرط مشرف نبودن هیچ دو ساختمانی بعد از بنای این ساختمان ایجاب می‌کند که بعد از بنای این ساختمان برای هر ساختمان دیگر مثل ساختمان نقطه‌ی A داشته باشیم $|h - h_A| \leq |P - A|$ و معادلاً $h \in [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$.

کافی است نشان دهیم که اشتراک این بازه‌ها برای ساختمان‌های مختلف شامل نقطه‌ای مثبت است، زیرا در این صورت h را برابر این نقطه می‌گیریم و بنابراین همه‌ی شرط‌های مورد نیاز برای مشرف نبودن‌ها برآورده می‌شود.

h را برابر کوچک‌ترین عدد در بین کران بالایی بازه‌های بالا برای ساختمان‌های مختلف بگیریم (دقت کنید که از آنجا که تعداد ساختمان‌های شهر متناهی است، حتماً کوچک‌ترین عددی وجود دارد). فرض کنید این عدد مربوط به ساختمانی باشد که در نقطه‌ی B بنا شده است. پس $h = h_B + |P - B|$ مثبت بودن این عدد واضح است. حال باید نشان دهیم که این عدد در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که این عدد در بازه‌ی مربوط به ساختمان A نباشد.

$$h \notin [-|P - A| + h_A, |P - A| + h_A]$$

با توجه به این که h کوچک‌ترین کران بالایی در بین کران بالای بازه‌ها بود، تنها حالت ممکن برای این که h در این بازه نباشد، این است که h از کران پایین آن کم‌تر باشد. $(h < -|p - A| + h_A)$ اما این با توجه به نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که:

$$h_B + |P - B| < -|P - A| + h_A \Rightarrow h_A - h_B > |P - A| + |P - B| \geq |A - B|$$

پس $|h_A - h_B| > |A - B|$ و بنابراین این دو ساختمان قبلاً به هم مشرف بوده‌اند که خلاف فرض مسئله است. این تناقض نشان می‌دهد که h معرفی شده در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۴. برای اثبات حکم کافی است که به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد طبیعی با شرایط مسئله بیابیم. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$1^3, 2^3, \dots, n^3$$

می‌دانیم که هر کدام از این اعداد مکعب کامل هستند. در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها نیز مکعب کامل است. همچنین به کمک استقرا اثبات می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ است و در نتیجه مربع کامل است. این حکم برای $n = 1$ به وضوح درست است. حال فرض کنید که حکم برای $n - 1$ برقرار باشد، یعنی:

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

برای نتیجه گرفتن حکم در حالت n باید نشان دهیم که:

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

که این هم به سادگی قابل بررسی است:

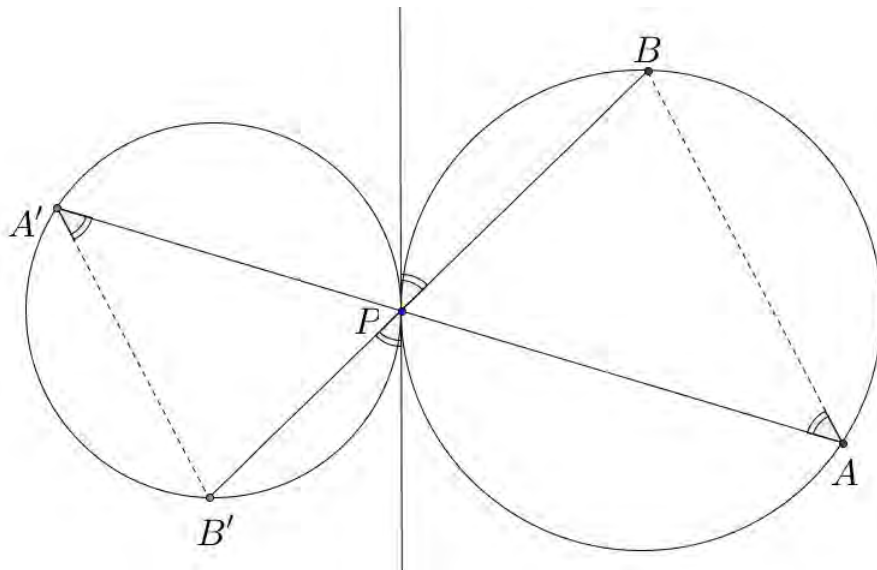
$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + n^3 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} + n^3 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2 + 4n^3}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

ذهن زیبا

۵. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید دو دایره‌ی C_1 و C_2 در P مماس خارجی باشند. دو قاطع گذرا از P ، به ترتیب C_1 را در A و B ، و C_2 را در A' و B' قطع می‌کند (برای بار دوم). در این صورت دو مثلث ABP و $A'B'P$ متشابه هستند.



اثبات.

مماس مشترک دو دایره در P را رسم می‌کنیم. در این صورت زاویه $\angle PAB$ با زاویه ظلّی به رأس P که مربوط به کمان BP است برابر است. (کمانی که شامل A نیست.) این زاویه ظلّی با زاویه ظلّی مربوط به کمان $B'P$ در C_2 با رأس P متقابل به رأس است و لذا با هم برابر هستند. در نهایت این زاویه ظلّی جدید هم با زاویه $\angle PA'B'$ که روبرو به همین کمان است برابر است. پس در کل $\angle PA'B' = \angle PAB$. با استدلال کاملاً مشابه $\angle PBA = \angle P'B'A'$ و بنابراین حکم اثبات می‌شود. \square

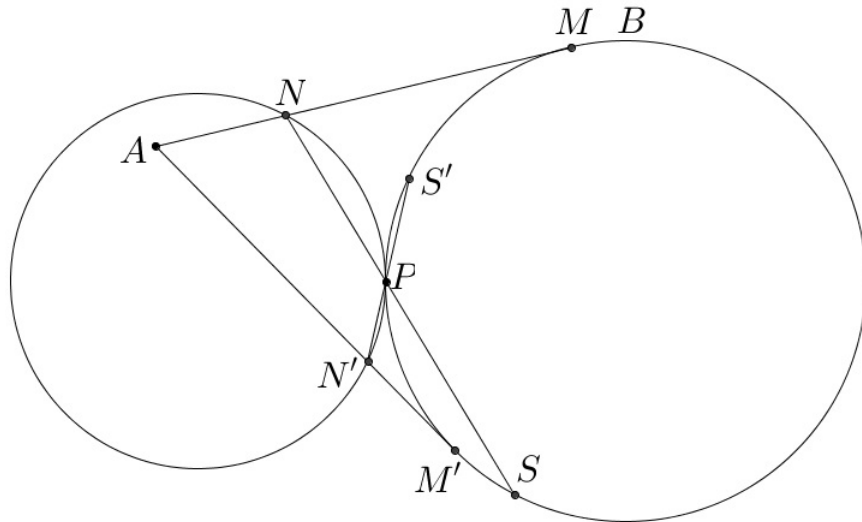
فرض کنید S و S' به ترتیب، محل تقاطع دو مماس NP و $N'P$ با دایره C_2 باشند. در این صورت با توجه به این که NM و $N'M'$ بر C_2 مماس هستند، برای قوت N و N' نسبت به C_2 می‌توان نوشت:

$$NM^2 = NP \cdot NS, \quad N'M'^2 = N'P \cdot N'S'$$

حال دقت کنید که طبق لم بالا دو مثلث PSS' و PNN' متشابه هستند و لذا $\frac{N'P}{PS'} = \frac{NP}{PS}$ که این نتیجه می‌دهد $\frac{N'P}{N'S'} = \frac{NP}{NS}$. حال با ترکیب این نتایج داریم:

$$\left(\frac{NM}{N'M'}\right)^2 = \frac{NM^2}{N'M'^2} = \frac{NP \cdot NS}{N'P \cdot N'S'} = \frac{NP \cdot NP}{N'P \cdot N'P} = \left(\frac{NP}{N'P}\right)^2$$

در نهایت گرفتن جذر از دو طرف حکم را نتیجه می‌دهد.



۶. برای حل سؤال ابتدا دو لم را ثابت می‌کنیم:

لم ۱. اگر n عددی طبیعی باشد و $۶n$ چاپ شود، n نیز چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات کاملاً سراسر است.

بین سه عدد $۲n$ ، $۴n$ و $۶n$ ، عدد $۶n$ چاپ شده است، پس $۲n$ و $۴n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۳n$ ، $۶n$ و $۹n$ ، عدد $۶n$ چاپ شده است، پس $۳n$ و $۹n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد n ، $۲n$ و $۳n$ ، عددهای $۲n$ و $۳n$ چاپ نمی‌شوند، پس n باید چاپ شود.

□

لم ۲. اگر n عددی طبیعی باشد و $۲n$ چاپ شود، $۸n$ چاپ نمی‌شود ولی $۱۶n$ چاپ می‌شود.

ذهن زیبا

اثبات. اثبات این لم هم مشابه لم قبلی است.

بین سه عدد n ، $۲n$ و $۳n$ ، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس n و $۳n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۲n$ ، $۴n$ و $۶n$ ، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۳n$ ، $۶n$ و $۹n$ ، عددهای $۳n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۹n$ باید چاپ شود.

بین سه عدد $۹n$ ، $۱۸n$ و $۲۷n$ ، عدد $۹n$ چاپ شده است، پس $۱۸n$ و $۲۷n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۶n$ ، $۱۲n$ و $۱۸n$ ، عددهای $۶n$ و $۱۸n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۲n$ باید چاپ شود.

بین سه عدد $۴n$ ، $۸n$ و $۱۲n$ ، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۸n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۱۲n$ ، $۲۴n$ و $۳۶n$ ، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۲۴n$ و $۳۶n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۸n$ ، $۱۶n$ و $۲۴n$ ، عددهای $۸n$ و $۲۴n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۶n$ باید چاپ شود.

□

حال در مورد مسئله‌ی اصلی به برهان خلف فرض کنید $3^3 \times 2^9 = 13824$ چاپ شود. با سه بار استفاده از لم ۱ این نتیجه می‌دهد که باید عدد ۶۴ هم چاپ بشود. از طرف دیگر با توجه به این که ۲ چاپ شده است، طبق لم ۲ عدد ۱۶ هم باید چاپ شود. استفاده‌ی دوباره از لم ۲ نتیجه می‌دهد که $16 \times 4 = 64$ چاپ نمی‌شود که با صحبت‌های بالا متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که ۱۳۸۲۴ نباید چاپ بشود.

