

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز اول

۱.  $n$  عددی طبیعی بزرگ‌تر از یک و  $p$  عددی اول است که  $n \mid p - 1$  و  $p \mid n^3 - 1$ . نشان دهید  $4p - 3$  مربع کامل است.

۲. در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A = 6^\circ$ . نقطه‌ی متغیر  $D$  روی پاره‌خط  $BC$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $O_1$  مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $ABD$  و  $O_2$  مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $ACD$  باشد. محل تقاطع  $BO_1$  و  $CO_2$  را  $M$  و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث  $DO_1O_2$  را  $N$  می‌نامیم. ثابت کنید خط  $MN$  از نقطه‌ی ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۳. کهکشان راه دوغی (!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله‌های دویزه‌دوی این ستاره‌ها شامل دست‌کم ۷۹ عدد متمایز است. (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید.)



ذهن زیبا

به نام او

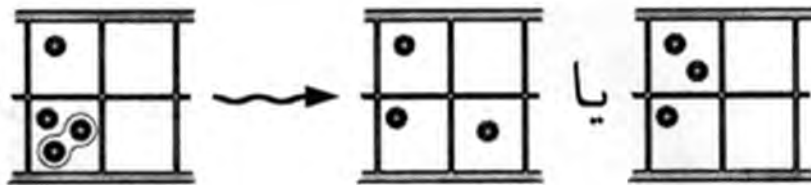
مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۴

روز دوم

۴. در برخی از خانه‌های یک جدول  $2 \times n$  تعدادی مهره قرار دارد.



اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره باشد، می‌توانیم دو مهره از آن خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه‌ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه‌ی بالایی‌اش قرار دهیم.



فرض کنید که در ابتدا دست‌کم  $2^n$  مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را طوری جابه‌جا کرد که یک مهره به خانه‌ی انتهایی که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

۵.  $BC$  قطر یک دایره و  $XY$  وتری عمود بر  $BC$  است. نقاط  $M$  و  $P$  به ترتیب روی  $XY$  و  $CY$  یا امتداد آن‌ها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که  $CX \parallel MP$  و  $CY \parallel PB$ . محل تقاطع  $PB$  و  $CX$  را  $K$  می‌نامیم. ثابت کنید  $PB \perp MK$ .

۶. تمام توابع  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  را بیابید که برای هر  $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$(x + y)f(f(x)y) = x^y f(f(x) + f(y))$$

منظور از  $\mathbb{R}^+$  مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. (توجه کنید که صفر عددی مثبت نیست!)

به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم بیست و سومین دوره ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۴

۱. راه حل اول. ابتدا دقت کنید که از آن جا که  $p$  عددی اول است و  $p|(n-1)(n^2+n+1)$  پس  $p|n-1$  و یا  $p|n^2+n+1$ . اگر  $p|n-1$  باید  $p \leq n-1$  و از طرف دیگر طبق فرض مسئله  $n|p-1$  و بنابراین  $n \leq p-1$ . پس این حالت امکان ندارد و در نتیجه  $p|n^2+n+1$ . پس عدد طبیعی  $t$  وجود دارد که  $p = tn+1$ . ادعا می کنیم  $t = n+1$  می دانیم:

$$\begin{aligned} p|n^2+n+1 &\Rightarrow tn+1|n^2+n+1 \Rightarrow tn+1|n^2+n+1 - tn - 1 \\ &\Rightarrow tn+1|(n+1-t)n \Rightarrow tn+1|n+1-t \end{aligned}$$

که آخرین نتیجه گیری با استفاده از لم اقلیدس و به این دلیل است که  $(tn+1, n) = (n, 1) = 1$ . حال اگر  $t \neq n+1$   $n+1-t$  صفر نیست و لذا  $tn+1 \leq |n+1-t|$  برای  $|n+1-t|$  دو حالت داریم:

$$\begin{aligned} n+1-t > 0 &\Rightarrow n+1 \leq tn+1 \leq n+1-t < n+1 \\ n+1-t < 0 &\Rightarrow t < tn+1 \leq t - (n+1) < t \end{aligned}$$

که هر دو تناقض است. پس  $t = n+1$ . حال داریم:

$$t = n+1 \Rightarrow p = tn+1 = n^2+n+1 \Rightarrow 4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

پس  $4p-3$  مربع کامل است.

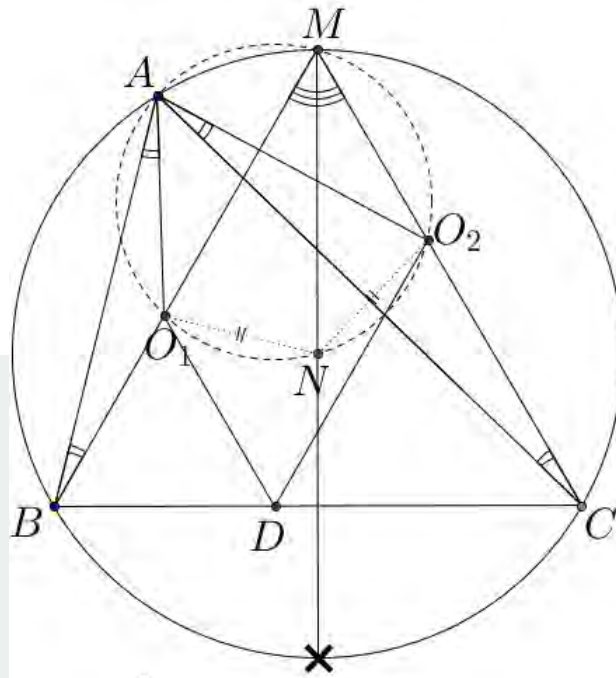
راه حل دوم. ابتدای راه حل مشابه راه حل اول است. حال فرض کنید که  $p|n^2+n+1$  از آن جا که  $n|p-1$  عدد طبیعی  $k$  یافت می شود که  $p = kn+1$ . پس باید عدد طبیعی  $t$  موجود باشد که  $n^2+n+1 = (kn+1)t$ . با در نظر گرفتن دو طرف عبارت اخیر به پیمانه ی  $n$  نتیجه می گیریم (به پیمانه ی  $n$ )  $t \equiv 1$ ، پس عدد صحیح نامنفی  $s$  یافت می شود که  $t = sn+1$ . اگر  $s > 0$  باشد، آن گاه  $(sn+1)(tn+1) > n^2+n+1$  که تناقض است، پس  $s = 0$  و لذا  $t = 1$ . بنابراین  $p = n^2+n+1$  قسمت آخر راه حل هم مشابه است.

۲. دقت کنید که در بین زاویه های  $\angle ADB$  و  $\angle ADC$  یکی کم تر یا مساوی  $90^\circ$  و دیگری بیش تر یا مساوی  $90^\circ$  است که بدون کاسته شدن از کلیت مسئله و به دلیل تقارن می توان فرض کرد  $90^\circ \leq \angle ADC$ . در این صورت با توجه به خواص مرکز دایره ی محیطی داریم:

$$\angle ABO_1 = 90^\circ - \angle ADB = \angle ADC - 90^\circ = \angle ACO_2$$

پس  $BO_1$  و  $CO_2$  یکدیگر را روی دایره ی محیطی مثلث  $ABC$  قطع می کنند. با استدلال مشابه بالا می توان نشان داد که  $\angle BAO_1 = \angle CAO_2$  و بنابراین  $\angle O_1AO_2 = \angle BAC = 60^\circ$ . لذا نقطه ی  $D$  قرینه ی نقطه ی  $A$  نسبت به  $O_1O_2$  (عمود منصف  $AD$ ) است. پس  $\angle O_1DO_2 = 60^\circ$  لذا  $\angle O_1NO_2 = 120^\circ$  و با توجه به این که  $M$  روی دایره ی محیطی  $ABC$  قرار دارد  $\angle O_1MO_2 = 60^\circ$  است و

این نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی  $M, N, O_1$  و  $O_2$  روی یک دایره قرار دارند. از طرفی  $O_1N = O_2N$  پس  $MN$  نیم‌ساز زاویه‌ی  $\angle O_1MO_2 = \angle BMC$  است. می‌دانیم که نیم‌ساز زاویه‌ی  $\angle BMC$  از وسط کمان  $BC$  در دایره‌ی محیطی مثلث  $ABC$  می‌گذرد که یک نقطه‌ی ثابت است.



۳. فرض کنید  $d_1 < d_2 < \dots < d_r$  همگی فاصله‌های ظاهر شده در بین این سیارات باشند. به برهان خلف فرض کنید که  $r \leq 78$ . یکی از ستاره‌های فضا را به دل‌خواه انتخاب کنید و کره‌های به مرکز این ستاره و شعاع‌های  $d_1 < d_2 < \dots < d_r$  را در نظر بگیرید. طبق فرض ما هر کدام از ستاره‌های دیگر باید روی یکی از این  $r$  کره باشند. پس طبق اصل لانه کبوتری روی یکی از این کره‌ها باید حداقل  $\left\lceil \frac{10^6 - 1}{78} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{10^6 - 1}{78} \right\rceil = 12821$  ستاره باشد. حال تنها این کره را در نظر بگیرید و یکی از ستاره‌های روی آن را به دل‌خواه انتخاب کنید. مجدداً به مرکز این ستاره‌ی جدید  $r$  کره با شعاع‌های  $d_1 < d_2 < \dots < d_r$  در نظر بگیرید. تمام ستاره‌های آسمان غیر از ستاره‌ای که مرکز این کره‌هاست روی این  $r$  کره قرار دارند، پس باید طبق اصل لانه کبوتری یکی از این کره‌ها باشد که از بین ۱۲۸۲۱ ستاره‌ای که روی کره‌ی اول قرار داشتند شامل حداقل  $\left\lceil \frac{12820}{78} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{12820}{78} \right\rceil = 165$  تا از ستاره‌ها باشد. حال دقت کنید که این ۱۶۵ ستاره روی دو کره‌ی غیرهم‌مرکز قرار گرفته‌اند، پس باید روی اشتراک آن‌ها که یک دایره است باشند. در نهایت تنها این ۱۶۵ ستاره را در نظر بگیرید. اگر یکی از این ۱۶۵ تا را به دل‌خواه انتخاب کنیم برای هر  $1 \leq i \leq r$  حداکثر دو ستاره از بین ۱۶۴ ستاره‌ی باقی‌مانده دارای فاصله‌ی  $d_i$  با این ستاره هستند. پس تعداد این ستاره‌ها روی این دایره باید حداکثر  $2 \times 78 + 1 = 157$  باشد که این طور نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض اولیه‌ی ما اشتباه است و حداقل ۷۹ عدد متمایز در بین فواصل دوه‌دوی این یک میلیون سیاره وجود دارد.

۴. ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر حداقل  $2^{n-1}$  مهره در یک جدول  $1 \times n$  داشته باشیم و حرکات

مجاز ما این باشد که اگر در خانه‌ای بیش از یک مهره قرار داشت بتوانیم دو مهره از آن خارج کنیم و یک مهره در خانه‌ی سمت راستش قرار دهیم، می‌توانیم با جابه‌جایی مهره‌ها در نهایت مهره‌ای را به آخرین خانه‌ی سمت راست برسانیم. این حکم برای  $n = 1$  بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای  $k$  درست باشد و ما  $2^k$  مهره در یک جدول  $(k+1) \times 1$  داریم. اگر از ابتدا مهره‌ای در آخرین خانه‌ی سمت راست باشد، چیزی برای ثابت کردن باقی نمی‌ماند. پس فرض می‌کنیم که این خانه خالی باشد. حال  $2^k$  مهره را که همگی در یک جدول  $k \times 1$  قرار دارند به دو دسته‌ی  $2^{k-1}$  تایی تقسیم می‌کنیم. حال طبق فرض استقرا می‌توان با جابه‌جایی مهره‌ها در هر دسته یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست رساند. پس در نهایت حداقل دو مهره به این خانه می‌رسد و با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی سمت راست برد.

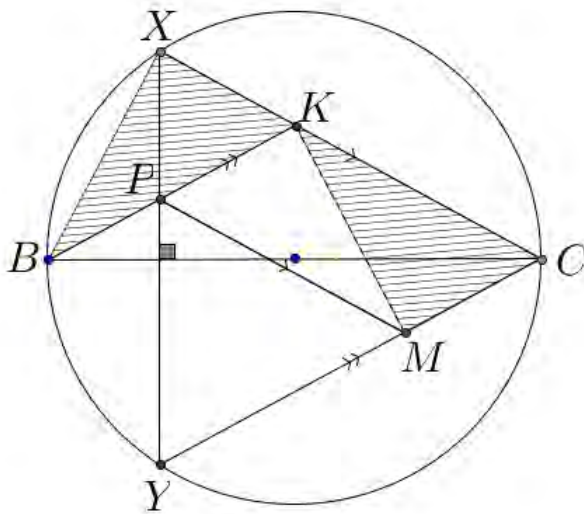
حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم.

حکم مسئله‌ی اصلی را هم شبیه به بالا به کمک استقرا ثابت می‌کنیم. باز هم حالت  $n = 1$  به سادگی قابل بررسی است. حال فرض کنید که حکم برای  $k$  برقرار باشد و ما  $2^{k+1}$  مهره در یک جدول  $(k+1) \times 2$  داشته باشیم. مشابه بالا اگر در ابتدا مهره‌ای در خانه‌ی بالا سمت راست (خانه‌ی ستاره‌ای) باشد چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. این بار اگر حداقل دو مهره در خانه‌ی پایین سمت راست باشد می‌توان دو مهره از این خانه برداشت و یک مهره به خانه‌ی بالا راست منتقل کرد که باز مسئله حل است. پس باید فرض کنیم که در خانه‌ی پایین سمت راست حداکثر یک مهره قرار دارد. حال بر حسب تعداد مهره‌های این خانه مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم.

اگر در خانه‌ی پایین سمت راست مهره‌ای نباشد، همه‌ی  $2^{k+1}$  مهره در یک جدول  $k \times 2$  قرار دارند. حال اگر مشابه بالا  $2^{k+1}$  مهره را به دو دسته‌ی  $2^k$  تایی به دل خواه تقسیم کنیم، طبق فرض استقرا می‌توان با هر کدام از این دسته‌ها یک مهره را به خانه‌ی دوم از سمت راست از ردیف بالایی رساند. حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند.

اگر در خانه‌ی پایین سمت راست یک مهره قرار داشته باشد.  $2^{k+1} - 1$  مهره در بقیه‌ی جدول قرار دارند. پس طبق اصل لانه‌کبوتری یا  $2^k$  در ردیف بالایی قرار دارد که طبق استدلال قسمت اول راه‌حل می‌توان یک مهره را به خانه‌ی مورد نظر رساند و یا  $2^k$  مهره در ردیف پایینی غیر از خانه‌ی سمت راست آن قرار دارد. در این جا باز با استفاده حکمی که در ابتدای راه‌حل ثابت شد می‌توان یک مهره‌ی دیگر به خانه‌ی پایین سمت راست اضافه کرد که در این صورت ۲ مهره در این خانه قرار می‌گیرد و حال با استفاده از این دو مهره می‌توان یک مهره را به خانه‌ی بالا راست رساند.

۵. راه‌حل اول. دقت کنید که  $BC$  قطر دایره و لذا عمود منصف  $XY$  است، پس  $\angle BCY = \angle BCX$ ، و  $\angle YBC = \angle XBC$ . از آن جا که  $BK \parallel CY$ ،  $\angle KBC = \angle BCY = \angle BCK$ ،  $BK = KC$  و بنابراین  $BK = KC$ . هم‌چنین  $\angle XPK = \angle XYC = \angle YXC$  و لذا  $KX = KP$ . از آن جا که  $KCPM$  متوازی‌الاضلاع است،  $KP = CM$ . از طرف دیگر  $\angle BKK = \angle MCK$  و لذا دو مثلث  $XKB$  و  $CMK$  هم‌نهشت هستند. از آن جا که  $BC$  قطر دایره است،  $\angle BXC = 90^\circ$  و با توجه به هم‌نهشتی این دو مثلث  $\angle KMC$  قائمه است و  $KM \perp YC$ . در نهایت باز با توجه به موازی بودن  $PB$  و  $CY$  حکم مورد نظر ثابت می‌شود.



راه حل دوم. برای اثبات حکم از قضیه‌ی کارنو استفاده می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم تحت شرایط مسئله  $BM^x - PM^x = BK^x - PK^x$ . طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $BYM$ ،  $BM^x = BY^x + YM^x$ . دقت کنید که  $PM \parallel XC$  و لذا  $\angle YPM = \angle YXM = \angle CYP$ . پس مثلث  $PMY$  متساوی‌الساقین است و  $PM = MY$ . در راه حل اول هم نشان دادیم که  $KP = XK$  و  $BK = KC$ . در نهایت با ترکیب این روابط و استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث  $BXK$  داریم:

$$BM^x - PM^x = (BY^x + YM^x) - YM^x = BY^x = BX^x = BK^x - KX^x = BK^x - KP^x$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶. ابتدا نشان می‌دهیم  $f$  تابعی یک به یک است. اگر  $f(a) = f(b)$  باشد، با قرار دادن  $y = 1$  در معادله و یک بار جای‌گذاری  $a$  و بار دیگر  $b$  به جای  $x$  داریم:

$$\left. \begin{aligned} (a+1)f(f(a)) &= a^x f(f(a) + f(1)) \\ (b+1)f(f(b)) &= b^x f(f(b) + f(1)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^x}{a+1} = \frac{b^x}{b+1} \Rightarrow \dots \Rightarrow (a-b)(ab+a+b) = 0$$

حال با توجه به این که  $a$  و  $b$  در نتیجه  $ab+a+b$  مثبت است، نتیجه می‌گیریم  $a = b$  و بنابراین تابع یک به یک است. اگر برای یک  $x > 1$  در رابطه‌ی اصلی به جای  $y$ ،  $x^x - x$  قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (x + (x^x - x))f(f(x)(x^x - x)) &= x^x f(f(x) + f(x^x - x)) \\ \Rightarrow f(f(x)(x^x - x)) &= f(f(x) + f(x^x - x)) \\ \Rightarrow f(x)(x^x - x) &= f(x) + f(x^x - x) \\ \Rightarrow f(x)(x^x - x - 1) &= f(x^x - x) \end{aligned}$$

در خط دوم به سوم از یک به یکی تابع  $f$  استفاده شده است. در نهایت دقت کنید که معادله‌ی درجه دوم  $x^x - x - 1$  دو ریشه‌ی حقیقی دارد که یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. حال اگر این ریشه را  $\alpha$  بنامیم، با قرار دادن  $x = \alpha$  در معادله‌ی آخر به  $f(1) = 0$  می‌رسیم که با فرض این که مقادیر  $F$  مثبت هستند تناقض دارد. پس چنین تابعی اصلاً وجود ندارد.