

مرحله دوم بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور

(۱) عدد طبیعی n را سه لایه‌ای می‌نامیم هر گاه بتوان مجموعهٔ مقسوم علیه‌های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف) عددی سه لایه‌ای مثال بزنید،

ب) ثابت کنید بی نهایت عدد سه لایه‌ای وجود دارد.

(۲) در یک روستا n خانه وجود دارد ($n \geq 3$) به طوری که همهٔ آن‌ها روی یک خط قرار ندارند. می‌خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطهٔ A مناسب تراز نقطهٔ B است اگر مجموع فواصل A تا خانه‌ها کم تر از مجموع فواصل B تا خانه‌ها باشد. نقطه‌ای را ایده آل می‌گوییم که هیچ نقطه‌ای مناسب تراز آن وجود نداشته باشد. ثابت کنید حداکثر یک نقطه ایده آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

(۳) n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده‌اند. برای هر دو تیم متمایز مانند A, B ، دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم A, B باخته‌اند. ثابت کنید $n = 4t + 3$.
(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد.)

مرحله دوم بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور

(۴) برای هر سه عدد حقیقی x, y, z با شرط $xyz = -1$ ، نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3(x + y + z) \geq x^2/y + x^2/z + y^2/z + y^2/x + z^2/x + z^2/y$$

(۵) زاویه \hat{A} کوچک ترین زاویه مثلث ABC می باشد. نقطه D روی کمان کوچک تر BC از دایره محیطی مثلث ABC واقع است.

عمود منصف های AB, AC با خط AD به ترتیب در نقاط M, N برخورد می نمایند. نقطه T محل برخورد CN, BM است. ثابت کنید

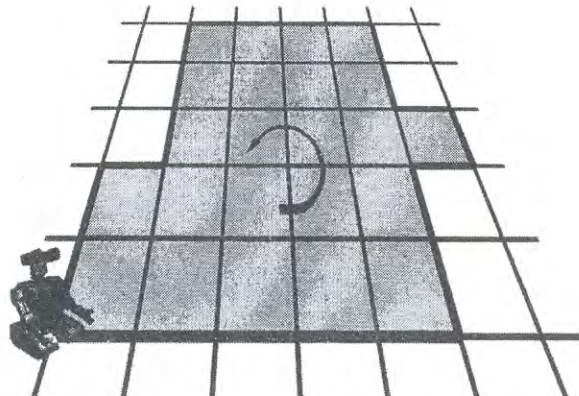
$$BT + CT \leq 2R$$

که شعاع دایره محیطی مثلث ABC است.

(۶) یک روبات از یک رأس دل خواه روی صفحه شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت های اصلی روی اضلاع صفحه شطرنجی حرکت می کند. این روبات دارای دو خانه حافظه A, B است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد.

در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال، جنوب، شرق یا غرب باشد، به ترتیب، به خانه A یکی اضافه می شود، از خانه A یکی کم می شود، به خانه B به اندازه عدد خانه A اضافه می شود یا از خانه B به اندازه عدد خانه A کم می شود. فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود بازگردد. ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانه حافظه B ، برابر با مساحت درون شکلی است که روبات پیموده.

ذهن زیبا



به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم بیست و یکمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۲

۱. الف. با اندکی محاسبه و در نظر گرفتن حالت‌های مختلف می‌توان مشاهده کرد که اگر عددی حداکثر دو عامل اول داشته باشد، نمی‌تواند سه لایه‌ای باشد. به علاوه با تلاش بیش‌تر می‌توان دید که ۱۲۰ عددی سه لایه‌ای است، زیرا $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ است و $120 = 60 + 40 + 20 = 30 + 24 + 15 + 12 + 10 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$.

ب. فرض کنید p عددی اول بزرگ‌تر از ۵ باشد. در این صورت هر مقسوم‌علیه $120p$ یا مقسوم‌علیه‌ی از ۱۲۰ است و یا p برابر یک مقسوم‌علیه ۱۲۰. پس می‌توان با استفاده از استدلال بالا و اضافه کردن p برابر اعضای هر دسته (که در سه لایه‌ای بودن ۱۲۰، مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ را به آن‌ها افزا کردیم) به آن دسته، نشان داد که $120p$ هم سه لایه‌ای است. حال چون تعداد چنین اعداد اولی نامتناهی است، نامتناهی عدد سه لایه‌ای داریم.

۲. ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید A ، B و C سه نقطه در صفحه باشند و M نقطه وسط BC باشد. در این صورت $AM \leq \frac{AB+AC}{2}$.

اثبات. اگر سه نقطه هم‌خط باشند که به سادگی می‌توان دید که تساوی برقرار است. حال اگر این سه نقطه تشکیل یک مثلث بدهند، فرض کنید نقطه‌ی A_1 قرینه‌ی A نسبت به M باشد. در این صورت در چهارضلعی ABA_1C قطرهای یک‌دیگر را نصف می‌کنند و بنابراین یک متوازی‌الاضلاع است. به علاوه دقت کنید که $AA_1 = 2AM$ و $AB = CA_1$. حال با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AA_1C ، $AA_1 < AC + CA_1$ و در نتیجه $2AM < AB + AC$ که همان چیزی است که می‌خواستیم. \square

حال فرض کنید خانه‌های روستا را با A_1, A_2, \dots, A_n نمایش دهیم. به برهان خلف فرض کنید X و Y دو نقطه‌ی ایده‌آل باشند و M وسط XY . حال با استفاده از لم بالا در مثلث‌های $A_1XY, A_2XY, \dots, A_nXY$ (البته ممکن است در بعضی حالت‌ها سه نقطه هم‌خط باشند که باز هم لم درست است) داریم:

$$A_1M \leq \frac{A_1X+A_1Y}{2}, A_2M \leq \frac{A_2X+A_2Y}{2}, \dots, A_nM \leq \frac{A_nX+A_nY}{2}$$
$$\Rightarrow A_1M + A_2M + \dots + A_nM \leq \frac{1}{2}(A_1X + \dots + A_nX + A_1Y + \dots + A_nY)$$

اما دقت کنید که از آن جایی که همه‌ی خانه‌های روستا نمی‌توانند روی یک خط و در نتیجه روی خط واصل بین X و Y واقع باشند. پس حداقل یکی از نامساوی‌ها اکید است و لذا مجموعه‌ی فاصله‌ی خانه‌های روستا تا M کم‌تر از مجموع فاصله‌ی آن‌ها تا X و یا Y است که این با ایده‌آل بودن آن‌ها تناقض دارد.

۳. برای این مسابقه‌ها به این صورت یک گراف جهت‌دار درست می‌کنیم که به ازای هر تیم یک رأس قرار می‌دهیم و اگر تیم A از B برده باشد، یالی جهت‌دار از A به B رسم می‌کنیم. حال فرض کنید مجموعه‌ی تیم‌هایی که از تیم خاصی مثل A باخته‌اند (متناظراً به زبان گراف یعنی رأس‌هایی که یال

بین آن‌ها و رأس A ، از یال A خارج شده باشد) را با نماد S_A نمایش می‌دهیم. حال برای هر تیم B در S_A باید دقیقاً t تیم موجود باشند که از هر دوی A و B باخته‌اند. بنابراین رأس متناظر با این تیم‌ها باید در S_A باشد. در نتیجه از بین یال‌هایی که یک سر آن‌ها به B متصل است و یک سر دیگرشان در S_A قرار دارد دقیقاً t یال از B خارج می‌شوند. از آن‌جا که B رأس دل‌خواهی از S_A بود، برای هر تیم دیگری در این مجموعه وضعیت مشابه است. بنابراین تعداد یال‌هایی که هر دو سر آن‌ها در S_A است، برابر $|S_A|t$ است که منظور از $|S_A|$ تعداد تیم‌های موجود در S_A است. از طرف دیگر تعداد کل این یال‌ها برابر $|S_A| = \frac{|S_A|(|S_A|-1)}{2}$ است. (بین هر دو یالی در S_A یک یال وجود دارد). پس $t|S_A| = \frac{|S_A|(|S_A|-1)}{2}$ و در نتیجه $|S_A| = 2t + 1$. این استدلال نشان می‌دهد که تعداد تیم‌هایی که به هر تیم باخته‌اند مساوی $2t + 1$ است. بنابراین از هر رأس در گراف دقیقاً $2t + 1$ یال خارج می‌شود. پس تعداد کل یال‌ها برابر $n(2t + 1)$ است. از طرف دیگر با توجه به این که هر دو تیمی با هم بازی کرده‌اند، بین هر دو رأسی یک یال قرار دارد. بنابراین از طرف دیگر تعداد کل یال‌ها برابر $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ است. پس $n(2t + 1) = \frac{n(n-1)}{2}$ و در نتیجه $n = 2(2t + 1) + 1 = 4t + 3$ است.

۴.

$$\begin{aligned}
 & x^6 + y^6 + z^6 + 3(x + y + z) - \left(\frac{x^5}{y} + \frac{x^5}{z} + \frac{y^5}{x} + \frac{y^5}{z} + \frac{z^5}{x} + \frac{z^5}{y} \right) \\
 &= x^6 + y^6 + z^6 + 3(x + y + z) + (xyz) \left(\frac{x^5}{y} + \frac{x^5}{z} + \frac{y^5}{z} + \frac{y^5}{x} + \frac{z^5}{x} + \frac{z^5}{y} \right) \\
 &= x^6 + y^6 + z^6 + 3(x + y + z) + x^3z + x^3y + y^3x + y^3z + z^3y + z^3x \\
 &= x^3(x + y + z) + y^3(x + y + z) + z^3(x + y + z) + 3(x + y + z) \\
 &= (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 + 3) \\
 &= (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \\
 &= (x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
 &= \frac{1}{2}(x + y + z)^2((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) \geq 0.
 \end{aligned}$$

دقت کنید که در خط اول به دوم و خط پنجم به ششم از فرض مسئله $(xyz = -1)$ و در خط ششم به هفتم از اتحاد اویلر استفاده کرده‌ایم. ضمناً نامساوی آخر نشان می‌دهد که حالت تساوی زمانی است که یا مجموع متغیرها صفر باشد و یا هر سه برابر باشند که با توجه به $xyz = -1$ نتیجه می‌شود هر سه باید برابر -1 باشند.

۵. CT را امتداد می‌دهیم تا دایره را برای بار دوم در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت:

$$\angle XBT = \angle XBA + \angle ABM = \angle XBA + \angle ABM = \angle NCA + \angle ABM$$

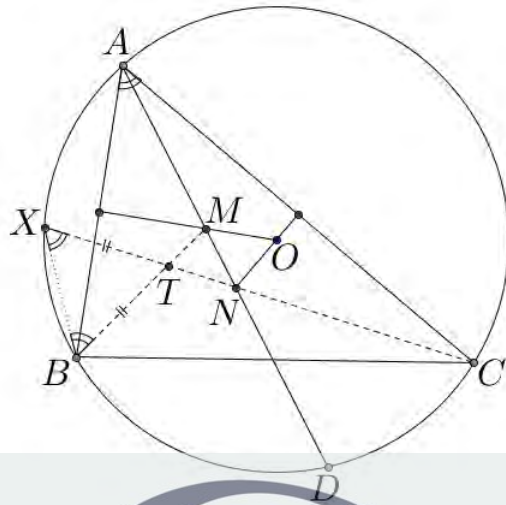
با توجه به این که M روی عمود منصف AB و N روی عمود منصف AC قرار دارد، $\angle MBA = \angle MAB$ و $\angle ACN = \angle CAN$. بنابراین

$$\angle XBT = \angle CAN + \angle MAB = \angle BAC = \angle CXB$$

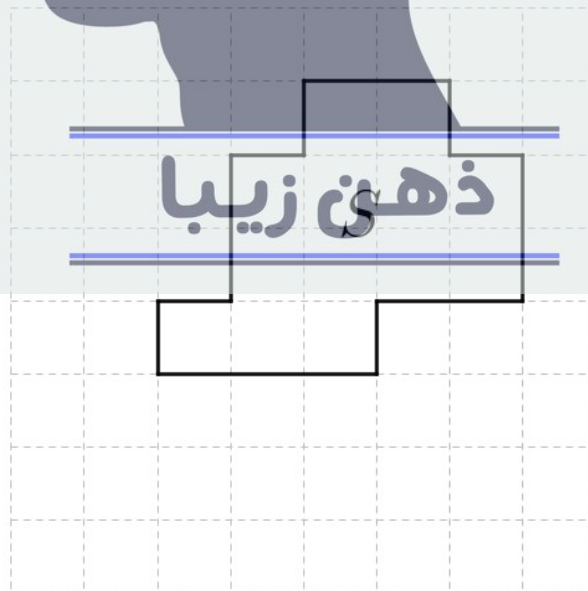
پس مثلث TXB متساوی‌الساقین است و لذا $XT = TB$. در نهایت

$$BT + CT = XT + TC = CX = 2R \cdot \sin(\angle XBC) \leq 2R$$

بنابراین اثبات حکم به پایان رسید.



۶. نقطه شروع حرکت روبات را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و شکلی که محیط آن را پیموده S می‌نامیم. عدد خانه‌ی A هم‌واره مؤلفه‌ی دوم مختصات روبات را نشان می‌دهد زیرا در ابتدا صفر است و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی اضافه می‌شود، A نیز یکی اضافه می‌شود و هرگاه مؤلفه‌ی دوم ربات یکی کم می‌شود، A نیز یکی کم می‌شود. بنابر این می‌توان تغییرات عدد خانه‌ی B را این طور بیان کرد که هرگاه روبات به سمت شرق حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه به B اضافه می‌شود و هرگاه روبات به سمت غرب حرکت می‌کند به اندازه‌ی مؤلفه‌ی y در آن نقطه از B کم می‌شود.



ابتدا فرض می‌کنیم ربات مسیر طی شده را در جهت ساعت‌گرد طی کرده باشد. همه‌ی مربع‌های شبکه‌ای که درون S قرار دارند را در نظر بگیرید و آن‌ها را M_1, M_2, \dots, M_k بنامید. فرض کنید مختصات

رأس پایین سمت چپ M_i ، (x_i, y_i) باشد. به ازای هر مربع M_i به هر یک از دو ضلع آن یک عدد نسبت می‌دهیم. به ضلع پایینی مربع M_i عدد $-y_i$ را نسبت دهید و به ضلع بالایی M_i عدد $y_i + 1$ را نسبت دهید. دقت کنید که چون بعضی از ضلع‌های افقی در دو مربع حضور دارند به آن‌ها دو بار عدد نسبت داده می‌شود.

اکنون اعداد نسبت داده شده به همه‌ی ضلع‌های مذکور را با هم جمع می‌کنیم و مجموع آن‌ها را D می‌نامیم. اکنون D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم.

اولاً دقت کنید که مجموع دو عددی که به ضلع‌های هر مربع نسبت داده‌ایم برابر یک است. پس D برابر می‌شود با تعداد مربع‌ها که همان مساحت S است.

از طرف دیگر ضلع‌های افقی‌ای که روی مرز S قرار ندارند، در دو مربع حضور دارند، در یکی با علامت مثبت و در دیگری با علامت منفی و مجموع این دو عدد صفر می‌شود. در نتیجه تنها جملاتی باقی

می‌مانند که مربوط به یال‌های افقی روی مسیر روبات هستند. که این مقادیر دقیقاً همان مقادیری هستند که هنگام حرکت روبات روی مسیر به عدد خانه B اضافه می‌شوند. بنابراین مجموع این مقادیر

دقیقاً همان عدد نهایی خانه B است. پس حکم ثابت شد. در حالی که ربات در جهت پادساعت‌گرد حرکت کند، مقادیر نسبت داده شده به اضلاع مرزی، منفی مقادیری هستند که با B جمع می‌شوند، پس در این حالت B برابر است با منفی $-D$ و در نتیجه قدر مطلق آن همان D می‌شود که برابر با مساحت S است.

