

به نام او

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز اول

۱. فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد، به طوری که $np + 1$ یک مربع کامل است. ثابت کنید می‌توان $n + 1$ را به صورت مجموع p تا مربع کامل نوشت.

۲. مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC مفروض است. روی اضلاع آن سه مثلث $B'AC$ ، $C'AB$ و $A'BC$ را به سمت خارج می‌سازیم، به طوری که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = 3^\circ$$

$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = 6^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC باشد، نشان دهید $B'M$ بر $A'C'$ عمود است.

۳. تمام n هایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آنها افقی و عمودی باشند و شکل حاصل حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

ذهن زیبا

به نام او

مرحله‌ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۰

روز دوم

۴. تمام چندجمله‌ای‌های P با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی x ، داشته باشیم:

$$P(\neg P(x)) = \neg P(P(x)) + \neg P(x)^2$$

۵. در مثلث ABC ($AB > AC$) نیم‌سازهای رأس‌های B و C اضلاع مقابل را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. همچنین نقطه‌ی تقاطع دو نیم‌ساز را نقطه‌ی I می‌گیریم. اگر $IP = IQ$ باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

۶. جدولی با یک سطر و تعدادی نامتناهی خانه در نظر بگیرید، که از سمت چپ متناهی باشد (نظیر شکل زیر)

						
--	--	--	--	--	--	--	-------

در این جدول تعدادی متناهی مهره قرار داده‌ایم به گونه‌ای که در بعضی خانه‌ها تعدادی مهره قرار گرفته است. (در یک خانه می‌تواند بیش‌تر از یک مهره باشد.) دو عمل زیر را می‌توان روی مهره‌ها انجام داد:

(۱) اگر در دو خانه‌ی مجاور، در هر یک تعدادی مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌های خانه‌ی سمت چپ را دو خانه به راست برد و یک مهره از خانه‌ی سمت راست را حذف کرد.

(۲) در حالتی که در یکی از خانه‌های سوم به بعد بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می‌توان یکی از مهره‌ها را یک خانه به راست و یک مهره‌ی دیگر را دو خانه به سمت چپ برد.

الف) ثابت کنید که با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.

ب) فرض کنید در هر یک از خانه‌های اول تا n مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکر شده هیچ‌گاه مهره‌ای از خانه‌ی $n + 1$ جلوتر نخواهد رفت.

به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم نوزدهمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۰

۱. فرض کنید x عدد صحیحی باشد که $x^2 = np + 1$. پس $p \mid x^2 - 1$ و در نتیجه $p \mid (x-1)(x+1)$. با توجه به این که p یک عدد اول است، $p \mid x-1$ یا $p \mid x+1$. بنابراین عدد طبیعی k یافت می شود که $x = kp + 1$ یا $x = kp - 1$. از این جا مسئله را به دو حالت تقسیم می کنیم:

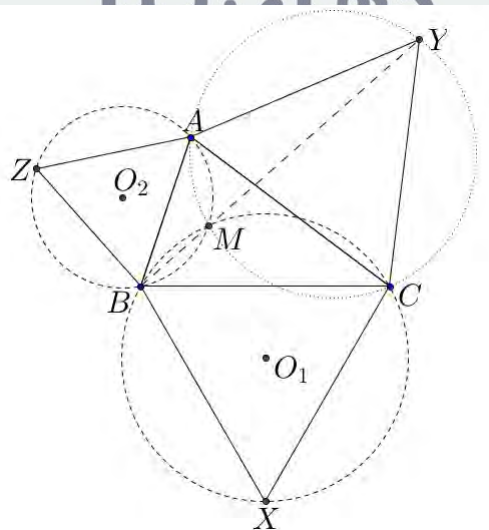
$$\begin{aligned} x = kp + 1 &\Rightarrow 1 + np = (kp + 1)^2 = k^2 p^2 + 2kp + 1 \\ &\Rightarrow n = k^2 p + 2k \\ &\Rightarrow n + 1 = pk^2 + 2k + 1 = (p-1)k^2 + (k+1)^2 \\ &\Rightarrow n + 1 = \underbrace{k^2 + \dots + k^2}_{p-1} + (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = kp - 1 &\Rightarrow 1 + np = (kp - 1)^2 = k^2 p^2 - 2kp + 1 \\ &\Rightarrow n = k^2 p - 2k \\ &\Rightarrow n + 1 = pk^2 - 2k + 1 = (p-1)k^2 + (k-1)^2 \\ &\Rightarrow n + 1 = \underbrace{k^2 + \dots + k^2}_{p-1} + (k-1)^2 \end{aligned}$$

پس در هر صورت $np + 1$ مجموع p مربع کامل است.

۲. ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می کنیم.

لم. اگر بر روی اضلاع مثلث حاده الزاویه ABC و در خارج از آن، مثلث های متساوی الاضلاع BCX ، CAY و ABZ را بنا کنیم و O_1 و O_2 به ترتیب مرکز دایره های محیطی مثلث های BCX و ABZ باشند، در این صورت $BY \perp O_1 O_2$.



اثبات. فرض کنید M نقطه‌ی برخورد این دو دایره غیر از B باشد. در این صورت روشن است که $\angle BMC = \angle AMB = 120^\circ$ و در نتیجه $\angle CMA = 120^\circ$. حال با توجه به این که $\angle AYC = 60^\circ$ ، چهارضلعی $AMCY$ محاطی است. پس:

$$\angle AMY = \angle ACY = 60^\circ \Rightarrow \angle AMB + \angle AMY = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

بنابراین نقطه‌های B, M و Y هم‌خط هستند. از طرفی BM وتر مشترک دو دایره به مرکز O_1 و O_2 است و بنابراین بر خط‌المركزین دو دایره یعنی O_1O_2 عمود است. در نتیجه $BY \perp O_1O_2$. \square

حال با در نظر داشتن لم فوق به حل مسئله می‌پردازیم.

مثلث‌های ساخته‌شده روی اضلاع مثلث ABC را طبق شکل زیر کامل می‌کنیم تا به مثلث‌هایی متساوی-الاضلاع تبدیل شوند. در این صورت به وضوح نقطه‌های A', B', C' و وسط‌های سه ضلع از ضلع‌های این مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند.



حال دقت کنید که اگر O_1 مرکز دایره‌ی محیطی BCX و O_2 مرکز دایره‌ی محیطی ABZ باشد، O_1 روی BA' و O_2 روی BC' واقع است و به علاوه:

$$\frac{BO_1}{O_1A'} = \frac{BO_2}{O_2C'} = 2$$

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس $O_1O_2 \parallel A'C'$.

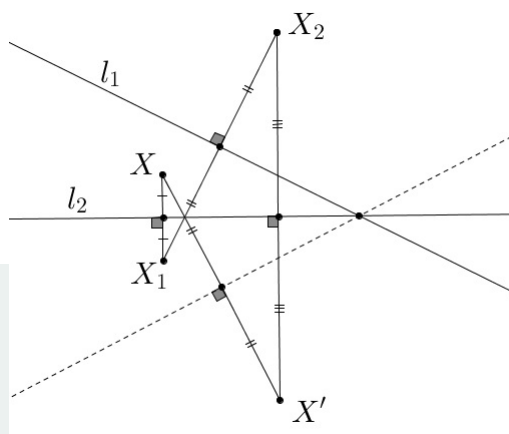
هم‌چنین از آن جایی که M وسط ضلع BC است و B' وسط YC ، $MB' \parallel BY$. اما طبق لم می‌دانیم که $O_1O_2 \perp BY$ ، بنابراین $A'C' \perp MB'$.

۳. ابتدا به بیان و اثبات چند لم می‌پردازیم:

لم. اگر l_1 و l_2 دو محور تقارن از شکلی باشند، آن‌گاه قرینه‌ی l_1 نسبت به l_2 نیز محور تقارنی از شکل خواهد بود.

اثبات. چون l_2 محور تقارن است، قرینه‌ی X نسبت به l_2 که آن را با X_1 نمایش می‌دهیم هم متعلق به شکل است و چون l_1 محور تقارن است، قرینه‌ی X_1 نسبت به l_1 که آن را با X_2 نمایش می‌دهیم

هم متعلق به شکل است. در نهایت چون l_2 محور تقارن است، قرینه‌ی X_2 نسبت به l_2 که از X' برای نمایشش استفاده می‌کنیم هم نیز متعلق به شکل است. اما به سادگی می‌توان دید که X' قرینه‌ی X نسبت به خطی است که از قرینه کردن l_1 نسبت به l_2 به دست آمده است. پس در کل برای هر نقطه‌ی X در شکل، قرینه‌ی X نسبت به این خط هم در شکل قرار دارد و بنابراین این خط هم محور تقارنی از شکل است.



□

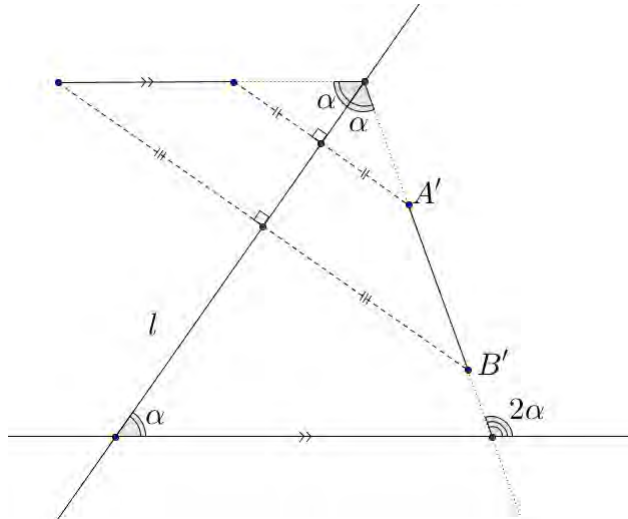
لم. هر مجموعه از اشکال که در ناحیه‌ای کران‌دار از صفحه (یعنی ناحیه‌ای که بتوان برای آن دایره‌ای با شعاع هر چند بزرگ یافت که به تمامی درون آن دایره قرار بگیرد) باشد، نمی‌تواند دو محور تقارن موازی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید l_1 و l_2 دو محور تقارن موازی برای مجموعه باشند. طبق لم ۱ قرینه‌ی l_1 نسبت به l_2 که آن را l_3 می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب قرینه‌ی l_2 نسبت به l_3 که آن را l_4 می‌نامیم هم محور تقارن شکل است. به همین ترتیب نامتناهی خط موازی باید محور تقارن شکل باشند. اما به وضوح از جایی به بعد مجموعه‌ی ما در یک طرف این خطوط واقع خواهد شد و لذا این خط‌ها از جایی به بعد امکان ندارد که محور تقارن ما باشند. بنابراین چنین مجموعه‌ای دو محور تقارن موازی نمی‌تواند داشته باشد.

□

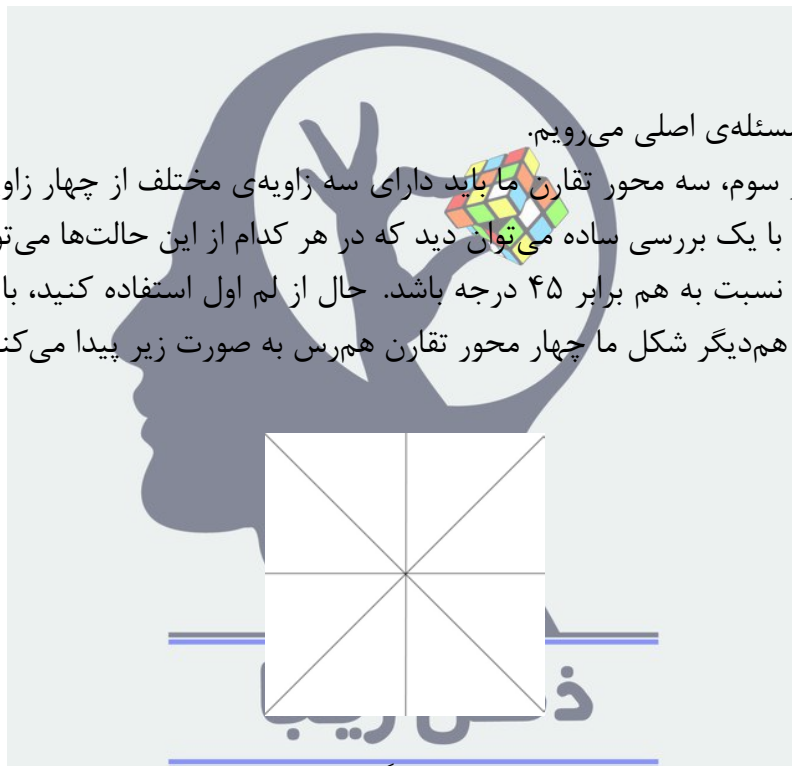
لم. محور تقارن تعدادی مربع با اضلاع عمودی و افقی، خطی است افقی، عمودی و یا با زاویه‌ی 45° درجه یا 135° درجه نسبت به محور افقی.

اثبات. فرض کنید خط l محور تقارنی از این شکل باشد و با قسمت مثبت محور x زاویه‌ی α بسازد. در این صورت اگر $A'B'$ قرینه‌ی یکی از اضلاع افقی یکی از مربع‌ها نسبت به l باشد، می‌توان به سادگی دید که باید با محور x زاویه‌ی 2α بسازد. اما چون ضلع مربع‌ها عمودی و یا افقی است، $A'B'$ هم باید عمودی و یا افقی باشد. پس $2\alpha \in \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$ و در نتیجه $\alpha \in \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$.



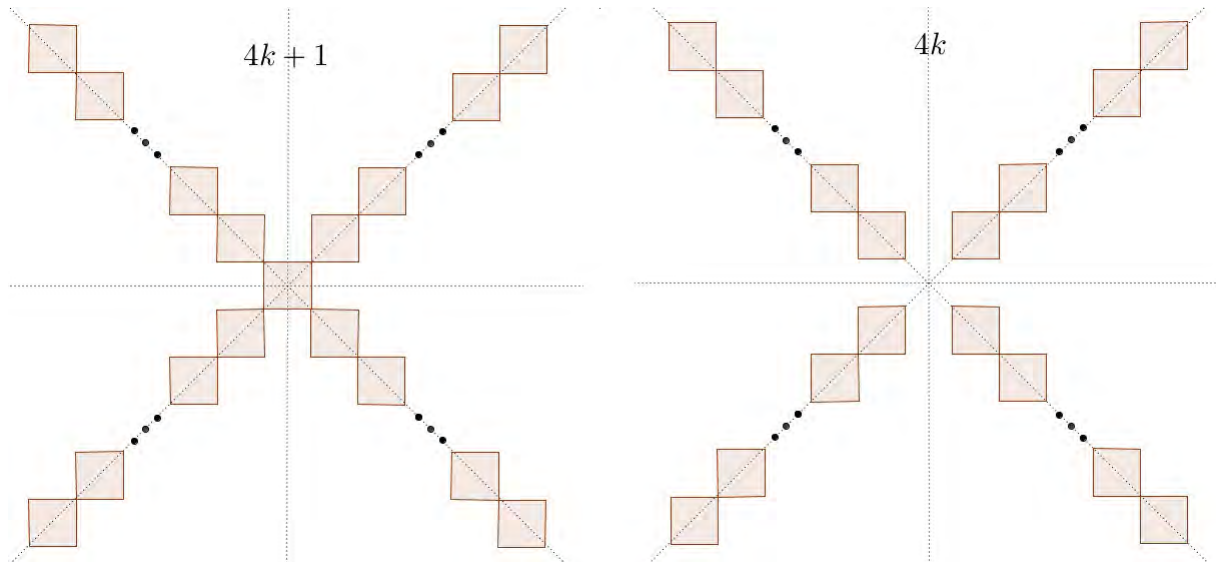
□

حال به سراغ مسئله‌ی اصلی می‌رویم. طبق لم‌های دوم و سوم، سه محور تقارن ما باید دارای سه زاویه‌ی مختلف از چهار زاویه‌ی معرفی شده در بالا باشند. حال با یک بررسی ساده می‌توان دید که در هر کدام از این حالت‌ها می‌توان دو خط یافت که زاویه‌ی آن‌ها نسبت به هم برابر ۴۵ درجه باشد. حال از لم اول استفاده کنید، با قرینه کردن این دو محور نسبت به هم‌دیگر شکل ما چهار محور تقارن هم‌رس به صورت زیر پیدا می‌کند.



بنابراین مجموعه‌ی مطرح‌شده در صورت سؤال حتماً ۴ محور تقارن به این صورت دارد. حال وضعیت مربع‌ها را نسبت به این چهار محور بررسی می‌کنیم. مرکز هر مربع یا در ناحیه‌های بین محورها است یا روی محورها و نه در نقطه‌ی تقاطع آن‌ها و یا در نقطه‌ی تقاطع است. اگر مرکز مربع در ناحیه‌های بین محورها باشد، قرینه کردن این مربع نسبت به محورها، ۸ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند. اگر روی محورها (و نه نقطه‌ی تقاطع آن‌ها) باشد، قرینه کردن این مربع نسبت به محورها، ۴ مربع از همین نوع ایجاد می‌کند. اگر به این ترتیب با کنار گذاشتن مربع‌های به مرکز نقطه‌ی تقاطع، بقیه‌ی مربع‌ها را می‌توان به دسته‌هایی

با تعداد اعضای ۴ یا ۸ تقسیم کرد. به مرکز نقطه‌ی تقاطع هم صفر یا یک مربع وجود دارد. لذا اگر بتوان n مربع یکسان با اضلاع افقی و عمودی در صفحه قرار داد که حداقل سه محور تقارن داشته باشد، n باید به یکی از دو صورت $4k$ و یا $4k + 1$ باشد. مثال‌های زیر نشان می‌دهد که برای همه‌ی مقدارهای k می‌توان $4k$ و یا $4k + 1$ مربع با این خاصیت یافت.



۴. فرض کنید n درجه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ باشد. در این صورت P به فرم زیر است.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

حال ضریب بزرگ‌ترین توان x را در دو طرف عبارت داده‌شده در صورت مسئله محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P(\sqrt{2}P(x)) &= P(\sqrt{2}(a_n x^n + \dots + a_0)) \\ &= a_n (\sqrt{2}(a_n x^n + \dots + a_0))^n + \dots + a_0 \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن x^{n^2} است و ضریب این جمله برابر $\sqrt{2} a_n^{n+1}$ است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \sqrt{2}P(P(x)) &= \sqrt{2}P(a_n x^n + \dots + a_0) \\ &= \sqrt{2} a_n (a_n x^n + \dots + a_0)^n + \dots + a_0 \end{aligned}$$

که بزرگ‌ترین توان x در این جا هم همان x^{n^2} است که ضریب آن برابر $\sqrt{2} a_n^{n+1}$ است. در نهایت

$$\sqrt{2}P(x)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(a_n x^n + \dots + a_0)^{\sqrt{2}}$$

که بزرگ‌ترین توان x در آن برابر x^{2n} بوده و ضریب این جمله $\sqrt{2} a_n^{\sqrt{2}}$ است.

حال اگر $n > 2$ باشد، $n^2 > \sqrt{2}n$ و لذا بزرگ‌ترین توان x در دو سمت عبارت x^{n^2} خواهد بود. از برابر قرار دادن ضریب این جمله در دو طرف تساوی به دست می‌آوریم $\sqrt{2} a_n^{n+1} = \sqrt{2} a_n^{n+1}$ که با فرض $a_n \neq 0$ و $n > 2$ هیچ‌گاه نمی‌تواند برقرار باشد. به این ترتیب سه حالت برای درجه‌ی $P(x)$ محتمل است.

حالت اول. $n = 0$. در این صورت $P(x) = a_0$ است و باید داشته باشیم:

$$a_0 = \sqrt{2} a_0 + \sqrt{2} a_0^{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} a_0^{\sqrt{2}} + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 (\sqrt{2} a_0^{\sqrt{2}-1} + 1) = 0$$

پس $a_0 = 0$ یا $a_0 = -\frac{1}{4}$ و بنابراین تنها جواب‌های آن $P(x) \equiv 0$ و $P(x) \equiv -\frac{1}{4}$ هستند.

حالت دوم. $n = 1$. در این صورت $P(x) = ax + b$ که $a \neq 0$ و باید داشته باشیم:

$$a(2(ax + b)) + b = 2a(ax + b) + 2b + 2(ax + b)^2$$

ضریب x^2 در طرف چپ صفر است، در حالی که در سمت راست ضریب x^2 برابر $2a^2$ است. پس باید a برابر صفر باشد که در این حالت فرض کرده‌ایم این طور نیست.

حالت سوم. $n = 2$. در این صورت $P(x) = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$ و باید داشته باشیم:

$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2P(x)^2$$

$$\Rightarrow 4aP(x)^2 + 2bP(x) + c = 2aP(x)^2 + 2bP(x) + c + 2P(x)^2$$

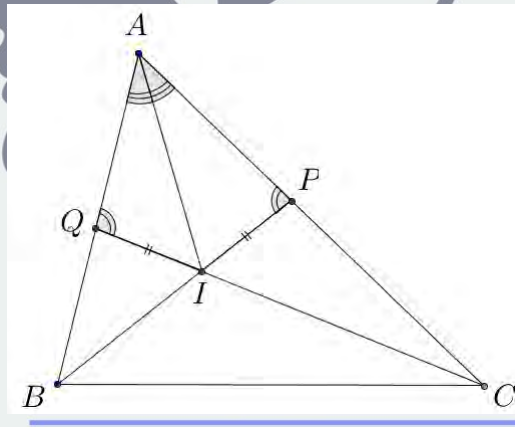
$$\Rightarrow 2aP(x)^2 = c + 2P(x)^2$$

از برابر قرار دادن ضریب x^4 در دو طرف نتیجه می‌شود که $2a^3 = 2a^4$ و که چون $a \neq 0$ باید $a = 1$ باشد. حال تساوی بالا نشان می‌دهد که $c = 0$. بنابراین جواب این قسمت به صورت $x^2 + bx$ است که می‌توان دید در شرط مسئله صدق می‌کند.

بنابراین تمامی جواب‌های مسئله به دست آمد.

۵. در دو مثلث AIP و AIQ از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\frac{IP}{\sin(\frac{\angle A}{4})} = \frac{AI}{\sin(\angle P)}, \quad \frac{IQ}{\sin(\frac{\angle A}{4})} = \frac{AI}{\sin(\angle Q)}$$



بنابراین اگر $IP = IQ$ ، آن‌گاه $\sin(\angle P) = \sin(\angle Q)$. پس یا این دو زاویه با هم برابر هستند و یا مکمل یکدیگرند. اما $\angle P = \angle C + \frac{1}{4}\angle B$ و $\angle Q = \angle B + \frac{1}{4}\angle C$. بنابراین اگر $\angle P = \angle Q$ آن‌گاه $\angle B = \angle C$ که خلاف فرض $AB > AC$ است. پس $\angle P + \angle Q = 180^\circ$. در نتیجه

$$\angle C + \frac{1}{4}\angle B + \angle B + \frac{1}{4}\angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = \frac{3}{4}180^\circ = 135^\circ \Rightarrow \angle A = 45^\circ$$

۶. الف) خانه‌های این جدول را از چپ به راست با عددهای ۱، ۲، ۳، ... شماره‌گذاری می‌کنیم. در هر حالت تعداد مهره‌های موجود در خانه‌ی k ام را با a_k نمایش می‌دهیم. در هر گام از فرآیند مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k + \text{تفاضل تعداد مهره‌ها}$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هر عمل (چه از نوع یک و چه از نوع دو) حداقل یک واحد کاهش می‌یابد. زیرا:

اگر عمل از نوع یک باشد، و این دو خانه، خانه‌های i ام و $i+1$ ام باشند، از S به اندازه‌ی $1 + (i+1) + i$ واحد کم‌شده و $i+2$ تا به S اضافه می‌شود. بنابراین S به $S-i$ تبدیل می‌شود و در نتیجه حداقل یک واحد کاهش می‌یابد.

اگر عمل از نوع دو باشد، و این خانه، خانه‌ی i ام باشد، از S به اندازه‌ی $2i$ کم‌شده و $(i+1) + (i-2)$ جای‌گزین آن می‌شود. پس S به $S-1$ تبدیل شده و یک واحد کاهش می‌یابد.

اما دقت کنید که همواره باید $S \geq 0$. بنابراین اگر مقدار S را در ابتدای کار S بنامیم. (دقت کنید که چون تعداد مهره‌ها در آغاز کار متناهی است، لذا مقدار S نیز متناهی است) ما قادر به انجام بیش‌تر از S عملیات نیستیم و بنابراین حداکثر بعد از انجام S عمل، عملیات به پایان می‌رسد.

(ب) دنباله‌ی اعداد فیبوناتچی را که به شکل زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید.

$$f_1 = f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad n \geq 0$$

ابتدا دقت کنید که به راحتی می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی n

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$$

حال برای حل مسئله، مجموع S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k$$

ادعا می‌کنیم که مقدار S با انجام هیچ‌یک از دو عمل ذکرشده در صورت مسئله تغییر نمی‌کند. زیرا اگر عمل نوع ۱ باشد و روی خانه‌های n و $n+1$ ام انجام شود، تغییرات S برابر است با $f_{n+2} - f_n - f_{n+1} = 0$.

و اگر عمل از نوع ۲ باشد و روی خانه‌ی n ام انجام شود، تغییرات S برابر است با

$$\begin{aligned} f_{n+1} + f_{n-2} - 2f_n &= f_n + f_{n-1} + f_{n-2} - 2f_n \\ &= f_{n-1} + f_{n-2} - f_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

ذهن زیبا

مقدار S در ابتدای کار برابر با $S = f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ است و طبق آن چه گفته شد، مقدار S در همه‌ی مرحله‌ها همین مقدار $f_{n+2} - 1$ باقی خواهد ماند. بنابراین اگر در مرحله‌ای، مهره‌ای از خانه‌ی $n+1$ ام جلوتر برود، مقدار S باید حداقل f_{n+2} بشود که این‌گونه نخواهد بود.