آزمون مرحله‌ی دوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A = ۹۰^\circ$) نیمسازهای درونی زاویه‌های B و C یکدیگر را در نقطهٔ I و ضلعهای روبرو را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی $BCDE$ دو برابر مساحت مثلث BIC است.

۲. دنبالهٔ

$$a_{n+۱} = a_n + a_{n-۱}\,(۱ + a_{n-۱}) \quad (n \geq ۱)$$

به طوری که $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$، داده شده است. ثابت کنید که

$$۵۲ < a_{۱۳۷۱} < ۶۵$$

۳. در طرفین رودخانه‌ای چند شهر وجود دارد. چند خط قایقرانی بین این شهرها دایر است. هر خط قایقرانی دقیقاً بین یک شهر از یک سمت رودخانه به یک شهر در سمت دیگر دایر است. از هر شهر دقیقاً به k شهر در طرف دیگر خط قایقرانی دایر است. اگر بین هر دو شهر بتوان به‌وسیلهٔ این قایقها رفت و آمد کرد، آنگاه ثابت کنید که با حذف هریک از این خطهای قایقرانی باز هم می‌توان بین هر دو شهر با استفاده از این خطوط قایقرانی، رفت و آمد کرد ($k > ۱$).

۴. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی t، عدد

$$A = ۱^t + ۲^t + \cdots + ۹^t - ۳(۱ + ۶^t + ۸^t)$$

بر ۱۸ بخشپذیر است.

۵. در مثلث ABC داریم $\angle A \leqslant ۹۰^\circ$ و $\angle B = ۲\angle C$. اگر نیمساز درونی زاویهٔ C میانهٔ AM را در نقطهٔ D قطع کند (M وسط BC است)، ثابت کنید که $\angle MDC \leqslant ۴۵^\circ$. با چه شرطی $\angle MDC = ۴۵^\circ$؟

۶. فرض می‌کنیم $X \neq \varnothing$ یک مجموعهٔ متناهی و $f : X \to X$ تابعی باشد که برای هر x در X، $f^p(x) = x$، که در آن p عددی است اول و ثابت و

$$f^p(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ مرتبه}}(x)$$

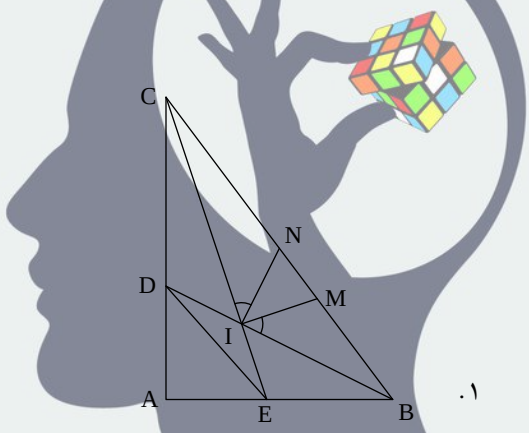
اگر $Y = \{x \in X \mid f(x) \neq x\}$، آنگاه ثابت کنید که تعداد عناصر مجموعهٔ Y بر p بخشپذیر است.

ذهن زیبا

حل مسائل مرحله‌ی دوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان



۱.

چون BD و CE نیمسازهای $\angle B$ و $\angle C$ هستند پس $\angle BIC = ۱۳۵^\circ$. خطوط IN و IM را چنان می‌سازیم که $\angle CIN = ۴۵^\circ$ و $\angle BIM = ۴۵^\circ$. پس $\angle MIN = ۴۵^\circ$.

به‌سادگی معلوم می‌شود که $\triangle BMI = \triangle BEI$ و $\triangle INC = \triangle IDC$ (زض‌ز) پس

$$S(\triangle IMB) = S(\triangle IEB) \quad (۱)$$

$$S(\triangle INC) = S(\triangle IDC) \quad (۲)$$

و نیز

$$S(\triangle IMN) = \frac{IM \cdot IN \cdot \sin(۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ)}{۲}$$

$$= \frac{IE \cdot ID \cdot \sin(۱۳۵^\circ)}{۲} = S(\triangle IED) \quad (۳)$$

با جمع طرفین (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$S(\triangle BIC) = S(\triangle IEB) + S(\triangle IDC) + S(\triangle IED)$$

پس

$$۲S(\triangle BIC) = S(\triangle BEDC)$$

۲. قرار می‌دهیم $b_n = a_{n-۱} + \frac{۱}{a_{n-۱}}$. با استقرا ثابت می‌کنیم

$$a_n = b_n \quad \text{و} \quad a_۱ = b_۱ = ۲$$

اگر $a_n = b_n$، پس

$$a_{n+۱} = a_n + \frac{۱}{a_{n-۱} + \frac{۱}{a_{n-۱}}} = a_n + \frac{۱}{a_n}$$

$$b_{n+۱} = \frac{۱}{a_n} + a_n$$

پس $a_{n+۱} = b_{n+۱}$. پس $a_n = a_{n-۱} + \frac{۱}{a_{n-۱}}$. بنابراین از

$$a_{n-۱}^۲ + ۳ > a_{n-۱}^۲ + \frac{۱}{a_{n-۱}^۲} + ۲ > a_{n-۱}^۲ + ۲$$

نتیجه می‌شود

$$a_{i-۱}^۲ + ۳ \geqslant a_i^۲ > a_{i-۱}^۲ + ۲ \quad (۱)$$

با جمع طرفین نامساوی (۱) برای iهای از ۱ تا n خواهیم داشت

$$۲n + ۱ < a_n^۲ < ۳n + ۲$$

بنابراین،

$$\sqrt{۲n+۱} < a_n < \sqrt{۳n+۲}$$

با قرار دادن $n = ۱۳۷۱$ خواهیم داشت

$$۵۲ < a_n < ۶۵$$

۳. فرض کنید با حذف خط قایقرانی بین شهرهای A و B (که در دو طرف رودخانه واقعند) ارتباط بین این شهرها قطع شود. تمام شهرهایی را که بتوان به آنها از A با قایق رفت و آمد کرد، با S نشان می‌دهیم. فرض کنید $n_۱$ عضو از S در آن سمت از رودخانه که A قرار دارد (مثلاً سمت چپ) باشند و $n_۲$ عضو در طرف دیگر؛ پس $B \notin S$. تعداد کل خطوط قایقرانی که از شهرهای سمت چپ از S دایر هستند، مساوی $(n_۱ - ۱)k + (k-۱)$ و تعداد کل خطوط قایقرانی که از شهرهای سمت راست از S دایر هستند برابر $n_۲k$ است. پس

$$(n_۱ - ۱)k + (k-۱) = n_۲k$$

که امکان ندارد، زیرا طرف راست بر k بخشپذیر است و طرف چپ بر k بخشپذیر نیست.

۴. حکم به‌ازای $t = ۱$ برقرار است. به‌ازای $t > ۱$ داریم

$$\begin{aligned} A &= ۱^t + ۲^t + \cdots + ۹^t - ۳(۱ + ۶^t + ۸^t) \\ &= ۲^t + ۳^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t + ۹^t \\ &\quad - ۲ - ۲ \times ۶^t - ۲ \times ۸^t \end{aligned}$$

که به‌وضوح بر ۲ بخشپذیر است. پس باید نشان بدهیم A بر ۹ بخشپذیر است.
چون $t > ۱$، پس باید نشان دهیم

$$\begin{aligned} A &\equiv ۲^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t - ۲ - ۲ \times ۸^t \\ &\equiv (۷^t + ۲^t) + (۵^t + ۴^t) - ۲(۱ + ۸^t) \pmod{۹} \end{aligned}$$

بر ۹ بخشپذیر است. در حالت t فرد حکم برقرار است. (زیرا $a^t + b^t$ بر $a + b$ بخشپذیر خواهد بود.) اگر t زوج باشد،

$$\begin{aligned} A &\equiv ۷(۷^{t-۱} + ۲^{t-۱}) - ۵ \times ۲^{t-۱} + ۵(۵^{t-۱} + ۴^{t-۱}) \\ &\quad - ۴^{t-۱} - ۱۶(۸^{t-۱} + ۱) + ۱۴ \pmod{۹} \end{aligned}$$

چون $t - ۱$ فرد است پس عبارات داخل پرانتز بر ۹ بخشپذیر است. بنابراین،

$$\begin{aligned} -A &\equiv ۵ \times ۲^{t-۱} + ۴^{t-۱} - ۱۴ \overset{۹}{\equiv} (۲^{t-۱} + ۷)(۲^{t-۱} - ۲) \\ &\equiv (۲^{t+۱} + ۱ + ۶)(۲^{t-۱} - ۲) \pmod{۹} \end{aligned}$$

که بنابر فرد بودن $t - ۱$ خواهیم داشت

$$۲^{t-۱} - ۲ \equiv ۰, ۲^{t-۱} + ۱ + ۶ \equiv ۰ \pmod{۳}$$

پس $A \equiv ۰$ یا $-A \equiv ۰$ پس عدد A هم بر ۹ و هم بر ۲ بخشپذیر است پس بر ۱۸ بخشپذیر است.

۵. در مثلث ADC داریم $\angle MDC = \angle MAC + \frac{۱}{۲}\angle C$. پس

$$۲\angle MDC = ۲\angle MAC + \angle C$$

و چون $\angle AMB = \angle MAC + \angle C$ پس

$$۲\angle MDC = \angle MAC + \angle AMB \qquad (۱)$$

حال نقطهٔ برخورد نیمساز درونی $\angle B$ با AC را E می‌نامیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین خواهد بود. پس EM ارتفاع وارد بر BC خواهد شد. از E عمود EH را بر AB رسم می‌کنیم پس $EH = EM$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ EHA داریم $EA \geqslant EH$. در مثلث AEM خواهیم داشت

$$EA \geqslant EM \Longrightarrow \angle EMA \geqslant \angle MAC$$

پس $۹۰^\circ - AMB \geqslant MAC$؛ یعنی $۹۰^\circ \geqslant \angle MAC + \angle AMB$ و بنابراین $۲\angle MDC \leqslant ۹۰^\circ$ و $\angle MDC \leqslant ۴۵^\circ$.
حالت تساوی $\angle MDC = ۴۵^\circ$ هنگامی برقرار است که $EH = EA$، یعنی $\angle A = ۹۰^\circ$. آنگاه $\angle B = ۶۰^\circ$ و $\angle C = ۳۰^\circ$ خواهد شد.

۶. رابطهٔ $\sim$ را روی X چنین تعریف می‌کنیم $a \sim b \Longleftrightarrow \exists i,\ f^i(a) = b$. این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است زیرا
الف) $a \sim a$ زیرا $f^p(a) = a$.

ذهن زیبا

ب) اگر $a \sim b$ پس i هست که $f^i(a) = b$. پس

$$f^{p-i}(b) = f^{p-i}\left(f^i(a)\right) = f^p(a) = a$$

و خاصیت تقارنی هم برقرار است.

ج) اگر $a \sim b$ و $b \sim c$ آنگاه i_1 و i_2 هستند که

$$\left.\begin{matrix} b = f^{i_1}(a) \\ c = f^{i_2}(b) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow c = f^{i_2}\left(f^{i_1}(a)\right) = f^{i_1+i_2}(a) \Longrightarrow a \sim c$$

پس رابطهٔ فوق ترایایی است.

پس مجموعهٔ X به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌شود. حال می‌گوییم اگر یک دستهٔ هم‌ارزی بیش از یک عضو داشته باشد حتماً p عضو دارد. یعنی باید ثابت کنیم اعضای مجموعهٔ $\{f(a)\ldots, f^p(a)\}$ متمایزند. بنابر برهان خلف اگر چنین نباشد i و j هستند که (می‌توان فرض کرد که $1 \leqslant i \leqslant p$ و $1 \leqslant j \leqslant p$) $(a \neq f(a))$

$$f^i(a) = f^j(a) \Longrightarrow f^{i-j}(a) = a$$

از طرفی چون $p > j - i \geqslant 1$، پس r و s هستند که $rp + s(j-i) = 1$. در نتیجه $f(a) = a$ $f^{rp+s(j-i)}(a) = a$ (که $f(a) \neq a$.) پس تعداد اعضای هر دستهٔ هم‌ارزی بر p بخشپذیر است. Z را زیر مجموعه‌ای از Y شامل سردسته‌های این مجموعه‌های p عضوی می‌گیریم. بنابراین

$$Y = \bigcup_{a \in Z} X_a \Longrightarrow |Y| = \sum_{a \in Z} |X_a| \Longrightarrow p \mid |y|$$

ذهن زیبا