آزمون مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت کنید معادلهٔ $x+x^۲=y+y^۲+y^۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت جواب ندارد.

۲. چهاروجهی $ABCD$ داده شده است.
الف) اگر صفحه‌ای مانند (P) این چهاروجهی را قطع کند، شرط لازم و کافی برای اینکه مقطع حاصل متوازی‌الاضلاع گردد چیست؟ نشان دهید در این صورت مسأله دارای سه دسته جواب است.
ب) اکنون یکی از این سه دسته جواب را در نظر می‌گیریم. وضع صفحهٔ (P) را چگونه باید انتخاب کرد تا مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل ماکزیمم گردد.
ج) صفحهٔ (P) را به گونه‌ای اختیار کنید که مقطع حاصل لوزی گردد و در این صورت اندازهٔ ضلع لوزی را بر حسب اندازه‌های یالهای چهاروجهی به‌دست آورید.

۳. فرض می‌کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده است، $f(۱)=۱$،

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

و برای $x\in\mathbb{R}-\{۰\}$ داریم $f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{f(x)}$. همهٔ توابع $f(x)$ را به‌دست آورید.

۴. نشان دهید حداقل شش نقطه با مختصات گویا روی منحنی

$$y^۲=x^۳+x+۱۳۷۰^{۱۳۷۰}$$

وجود دارد.

۵. مثلث ABC در دایرهٔ (C) محاط است. نیمسازهای درونی زوایای مثلث مزبور دایرهٔ (C) را مجدداً در A'، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I نقطهٔ برخورد نیمسازها باشد ثابت کنید که

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geqslant ۳$$
$$IA'+IB'+IC'\geqslant IA+IB+IC$$

۶. سه گروه A، B و C از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف در (یک) کنفرانس گرد آمده‌اند. می‌خواهیم جلسات سه نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به طوری که از هر گروه فقط یک نفر شرکت داشته باشد و هر دو نفر دقیقاً در یک جلسه (با هم) شرکت کرده باشند.

الف) اگر این عمل امکانپذیر باشد نشان دهید تعداد افراد هر سه گروه مساویند.

ب) در حالتی که تعداد افراد هر گروه سه باشد نشان دهید این عمل امکانپذیر است.

ج) ثابت کنید در حالت کلیِ تساویِ تعداد اعضای سه گروه، این عمل امکانپذیر است.

حل مسائل مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. فرض می‌کنیم $(y, x-y) = a$؛ بنابراین،

$$y = ba,\ x - y = ca,\ (b,c) = 1$$

در نتیجه،

$$ab + ac + a^2b^2 + a^2c^2 + 2a^2bc = ab + a^2b^2 + a^3b^3$$

اگر $a = 0$، آنگاه $x = y = 0$ که خف فرض مثبت بودن x و y است. اگر $a \neq 0$، آنگاه $c + ac^2 + 2abc = a^2b^3$. پس $c \mid a^2b^3$، یعنی $c \mid a^2$. پس $a^2 = dc$ و بنابراین،

$$1 + ac + 2ab = db^3$$

در نتیجه $(d,a) = 1$. اما $a^2 = dc$ و اگر $d \neq 1$ باشد آنگاه $(d,a) \neq 1$. پس $d = 1$ و $a^2 = c$.

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 2ab = b^3 \\ c = a^2 \Longrightarrow (b, a^2) = 1 \end{cases}$$

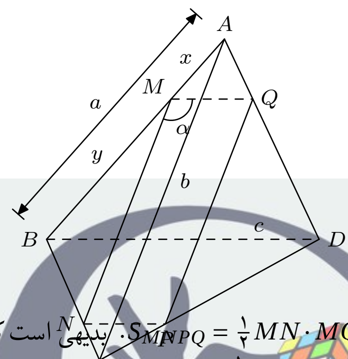
پس $(a,b) = 1$. از $b^3 = 1 + a^3 + 2ab$ نتیجه می‌شود $b > a$ و

$$(b-a)\big((b-a)^2 + 3ab\big) = 1 + 2ab$$

$$\left.\begin{aligned} b - a &= s \\ ab &= p \end{aligned}\right\} \Longrightarrow s(s^2 + 3p) = 1 + 2$$

اما $a, b \neq 1$ و در نتیجه $p > 1$ و بنابراین، $1 + 2p < 3p$؛ در نتیجه، تساوی فوق نمی‌تواند برقرار باشد.

۲. الف) فرض می‌کنیم $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع باشد در این صورت $MQ \parallel NP$ و چون $NP \subset BCD$ پس $MQ \parallel BD$ (چرا؟) و به دلیل مشابه $MN \parallel AC$ یعنی صفحهٔ (p) با دو یال AC و BD موازی است. به عکس اگر (p) با دو یال AC و BD موازی باشد به سهولت ثابت می‌شود که $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.



ب) اکنون می‌نویسیم $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MN \cdot MQ \sin\alpha$. بدیهی است که چون α ثابت است (زاویهٔ بین دو یال متنافر AC و BD) پس $\frac{1}{2}\sin\alpha$ مقداری است ثابت و در نتیجه باید $MN\cdot MQ$ ماکزیمم گردد. داریم

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BD} \qquad \frac{x}{a} = \frac{MQ}{c} \qquad MQ = \frac{cx}{a}$$
$$\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC} \qquad \frac{y}{a} = \frac{MN}{b} \qquad MN = \frac{by}{a}$$

در نتیجه،

$$MN \cdot MQ = \frac{cx}{a} \times \frac{by}{a} = \frac{bcxy}{a^2}$$

چون $x + y = a$، پس ماکزیمم xy در صورتی پیش می‌آید که $x = y$ باشد یعنی M باید وسط AB باشد. در نهایت رأسهای متوازی‌الاضلاع با مساحت ماکزیمم وسطهای AB، BC، CD و DA است.

ج) اگر $MNPQ$ لوزی باشد داریم

$$MN = MQ, \quad \frac{cx}{a} = \frac{by}{a}, \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

یعنی باید نقطهٔ M یال AB را به نسبت $\frac{b}{c}$ تقسیم کند. در این صورت

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}, \frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c}, \frac{a}{y} = \frac{b+c}{c}, y = \frac{ac}{b+c}$$

پس

$$MN = \frac{by}{a} = \frac{b \times \frac{ac}{b+c}}{a} = \frac{bc}{b+c}$$

۳. واضح است که $f(0) = 0$ و $f(n) = n$ (استقرا) و همچنین $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}$ و در نتیجه، به‌ازای هر $r \in \mathbb{Q}$، $f(r) = r$. از طرفی f یک‌به‌یک است زیرا اگر $f(x) = f(y)$ آنگاه،

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x)$$

و در نتیجه، $f(y-x)=0$. حال اگر $y-x=\alpha\neq 0$ آنگاه

$$f(\alpha)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=1$$

و در نتیجه، $1=0$ که تناقض است. بنابراین $y=x$. و همچنین واضح است که $f(-x)=-f(x)$.
حال نشان می‌دهیم که $f(x^2)=f(x)^2$. واضح است که اگر $f(x)=f(x^2)$ آنگاه این رابطه با توجه به یک‌به‌یک بودن f ($x=\{0$ یا $1\}$) برقرار است و اگر $f(x)\neq f(x^2)$، آنگاه داریم

$$\frac{1}{f(x)-f(x^2)}=\frac{1}{f(x-x^2)}=\frac{1}{f\big(x(1-x)\big)}$$

$$=f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)=f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{1-f(x)}$$

$$=\frac{1}{f(x)-f(x)^2}\Longrightarrow f(x^2)=f(x)^2$$

بنابراین، اگر $x>0$ آنگاه $f(x)>0$ و در نتیجه f صعودی است (چرا؟). حال با توجه به اینکه برای هر x دو دنباله از اعداد گویا مانند r_n و s_n وجود دارد که به‌ازای هر n، $r_n<x<s_n$؛ و x تنها عددی است که در آن نامساوی صدق می‌کند، داریم

$$r_n=f(r_n)<f(x)<f(s_n)=s_n$$

در نتیجه $f(x)=x$.

۴. می‌گیریم $a=1370^{685}$. اگر $x=0$ آنگاه

$$A(0,a),\quad B(0,-a)$$

ضریب زاویهٔ مماس در A برابر است با $y'=\frac{1}{2a}$ پس معادلهٔ مماس در A می‌شود $y=\frac{x}{2a}+a$. محلّ دیگر تقاطعِ مماس با منحنی را می‌یابیم.

$$\left(\frac{x}{2a}+a\right)^2=x^3+x+1370^{1370}$$

پس $x=\frac{1}{4a^2}$ و در نتیجه،

$$C\left(\frac{1}{4a^2},\frac{1+8a^4}{8a^3}\right),\quad D\left(\frac{1}{4a^2},-\frac{1+8a^4}{8a^3}\right)$$

حال خط BC را با منحنی قطع می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که این خط در C بر منحنی مماس نیست پس در یک نقطهٔ E $(E\neq B)$ با مختصات گویا منحنی را قطع می‌کنند. زیرا

$$BC\ \text{ضریب زاویهٔ}=\frac{\frac{1+8a^4}{8a^3}+a}{\frac{1}{4a^2}}=\frac{1+16a^4}{2a}$$

$$2yy'=3x^2+1\Longrightarrow y'=\frac{\frac{3}{16a^4}+1}{2\left(\frac{1+8a^4}{8a^3}\right)}=\frac{3+16a^4}{4a(1+8a^4)}$$

که شیب مماس در C است. حال واضح است که

$$\frac{1+16a^4}{2a} \neq \frac{3+16a^4}{4a(1+8a^4)}$$

$$2(1+16a^4)(1+8a^4) > 3+16a^4$$

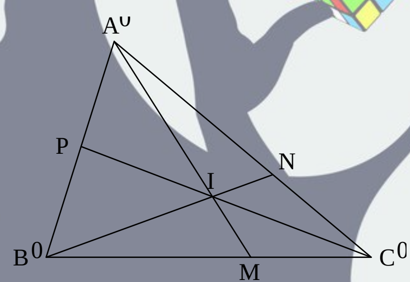
همچنین خط DA به همین دلیل منحنی را در نقطهٔ دیگری مانند F با مختصات گویا قطع می‌کند.

۵. برای هر سه خط همرس داریم

$$\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geqslant 6 \tag{1}$$

زیرا با در نظر گرفتن مساحتها داریم

$$\frac{IM}{MA'}+\frac{IN}{NB'}+\frac{IP}{PC'} = 1$$



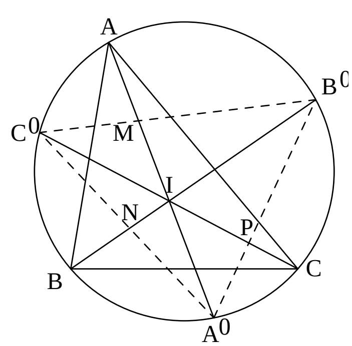
پس بنابر نامساوی کوشی،

$$\frac{A'M}{IM}+\frac{B'N}{IN}+\frac{C'P}{IP} \geqslant 9$$

و یا

$$\frac{A'I+IM}{IM}+\frac{B'I+IN}{IN}+\frac{C'I+IP}{IP} = 3+\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geqslant 9$$

و در نتیجه رابطهٔ (۱) برقرار است.



M، N و P را وسطهای پاره‌خطهای AI، BI و CI می‌گیریم. با توجه به شکل بدیهی است که $A'C'$ عمودمنصف IB و $A'B'$ عمودمنصف IC و $B'C'$ عمودمنصف IA است. پس

$$\frac{IA'}{IM}+\frac{IB'}{IN}+\frac{IC'}{IP}\geqslant ۶$$

و از آنجا

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geqslant ۳$$

اکنون طبق نامساوی «اردیش-مردل» داریم

$$IA'+IB'+IC'\geqslant ۲(IM+IN+IP)$$

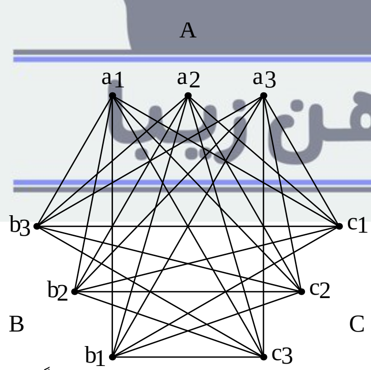
یا

$$IA'+IB'+IC'\geqslant IA+IB+IC$$

۶. فرض کنید دانشمندان مجموعه‌های

$$A=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_m\}, B=\{b_۱,b_۲,\ldots,b_n\}, C=\{c_۱,c_۲,\ldots,c_p\}$$

باشند. برای هریک از اعضای مجموعه‌ها نقطه‌ای روی صفحه متناظر می‌کنیم (شکل برای $m=n=p=۳$ نشان داده شده است). اگر یک دانشمند مثلاً a_i با یک دانشمند دیگر مثلاً b_j در یک جلسه شرکت داشته باشد یک خط بین a_i و b_j رسم می‌کنیم. تمام نقاط A را به هریک از نقاط B و C وصل می‌کنیم و همین‌طور هریک از نقاط B را به هریک از نقاط C متصل می‌نماییم. منظور مسأله، افراز خطوط حاصل به مثلثهایی مانند $a_ib_jc_k$ است.



الف) هر مثلث $a_ib_jc_k$ از هر قسمت $\{A,B\}$، $\{B,C\}$ و $\{A,C\}$ دقیقاً یک خط دربر دارد. پس باید تعداد خطوط بین این قسمتها با هم مساوی باشند. پس

$$mn=mp,\quad mn=np$$

یعنی

$$m=n=p$$

ب) مثلثها می‌توانند به صورت زیر باشند

$$a_1 b_1 c_1,\ a_1 b_2 c_2,\ a_1 b_3 c_3,\ \ldots,\ a_3 b_3 c_3$$

جدول زیر بیانگر حل این حالت از مسأله است (a_i و b_j با c_k که از جدول به‌دست می‌آید یک جلسه تشکیل خواهند داد، c_k در ستون a_i و سطر b_j قرار دارد.)

	a_1	a_2	a_3
b_1	c_1	c_2	c_3
b_2	c_2	c_3	c_1
b_3	c_3	c_1	c_2

ج) در حالت کلی نیز کافی است از جدول زیر استفاده کنیم.

	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
b_1	c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_{n-1}	c_n
b_2	c_2	c_3	c_4	$\ldots$	c_n	c_1
b_3	c_3	c_4	c_5	$\ldots$	c_1	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	c_n	c_1	c_2	$\ldots$	c_{n-2}	c_{n-1}

در داخل این جدول در هر سطر هیچ c_i تکرار نشده است و همین طور در هر ستون.

برای هر دو نفر a_i و b_j، c_k را از جدول پیدا کرده و جلسه $a_i b_j c_k$ را تشکیل می‌دهیم.