آزمون مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

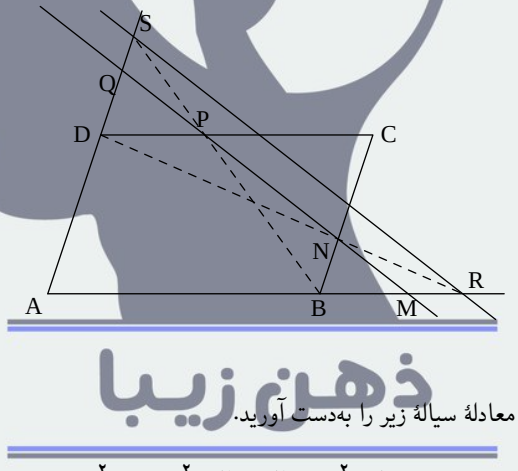
زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است، خط Δ خطوط AB، BC، CD و DA را به ترتیب در نقاط M، N، P و Q قطع می‌کند. اگر محل برخورد AB و DN را R و محل برخورد AD و BP را S بنامیم، ثابت کنید که

$$RS \parallel \Delta$$



۲. جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$(x^۲ - x)(x^۲ - ۲x + ۲) = y^۲ - ۱$$

۳. الف) ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant ۱$ داریم

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} < ۲$$

ب) برای مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ که در آن $n \geqslant ۱$، زیرمجموعه‌های ناتهی X را A_k، $(k = ۱, ۲, ۳, \ldots, m)$ می‌نامیم. (بدیهی است که $m = ۲^n - ۱$). اگر حاصلضرب تمام عضوهای مجموعهٔ

ذهن زیبا

آزمون مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی

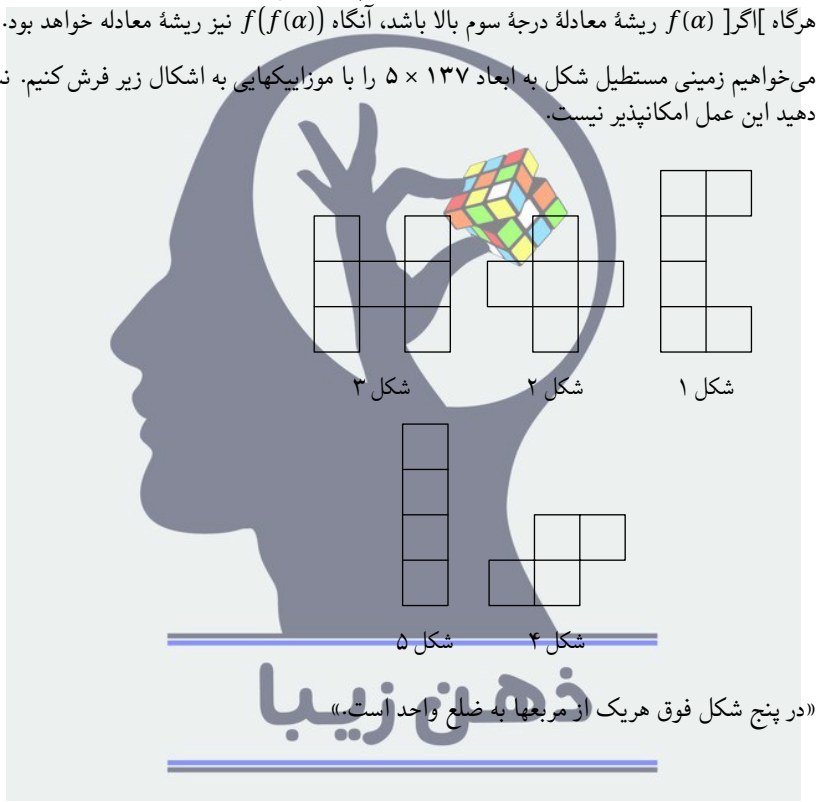
A_k را با a_k نشان دهیم، ثابت کنید که

$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{a_i \times j^۲} < ۲n+۱$$

۴. مجموعهٔ مثلثهای ABC را در نظر می‌گیریم که در دایره‌ای به شعاع R محاطند، در چه صورت $AB^۲ + AC^۲ + BC^۲$ ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را حساب کنید. همچنین مجموعهٔ چهاروجهیهای $ABCD$ را که در کره‌ای به شعاع R محاط باشند در نظر می‌گیریم؛ در چه صورت مجموع مربعات ۶ یال آنها ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را نیز محاسبه کنید و ثابت کنید در این حالت وجوه با هم برابرند.

۵. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ - ۵x + ۳ = ۰$ و $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد، نشان دهید که هرگاه]اگر[$f(\alpha)$ ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم بالا باشد، آنگاه $f(f(\alpha))$ نیز ریشهٔ معادله خواهد بود.

۶. می‌خواهیم زمینی مستطیل شکل به ابعاد ۱۳۷ × ۵ را با موزاییکهایی به اشکال زیر فرش کنیم. نشان دهید این عمل امکانپذیر نیست.



«در پنج شکل فوق هریک از مربعها به ضلع واحد است.»

ذهن زیبا

حل مسائل مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. مثلث AMQ را با موربهای DNR و BPS قطع می‌دهیم؛ خواهیم داشت

$$\frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=۱,\qquad \frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA}=۱$$

و از مساوی قرار دادن آنها نتیجه می‌شود

$$\frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=\frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA} \qquad (۱)$$

چون $BN\parallel AQ$ و $DP\parallel AB$، پس

$$\begin{cases}\dfrac{NM}{NQ}=\dfrac{BM}{BA}\\ \dfrac{DQ}{DA}=\dfrac{PQ}{PM}\end{cases} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت $\frac{RA}{RM}=\frac{SA}{SQ}$ یعنی $RS\parallel\Delta$.

۲. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود $y\geqslant ۰$ می‌گیریم.

حال اگر قرار دهیم $x=X+۱$ خواهیم داشت

$$(X^۲+X)(X^۲+۱)=y^۲-۱$$

$$\Longrightarrow\left(X^۲+\frac{X}{۲}+\frac{X}{۲}\right)\left(X^۲+\frac{X}{۲}+۱-\frac{X}{۲}\right)=y^۲-۱$$

$$\Longrightarrow\left(X^۲+\frac{X}{۲}\right)^۲=y^۲-\left(\frac{۳}{۴}X^۲+X+۱\right)$$

با توجه به اینکه $\frac{۳}{۴}X^۲ + X + ۱ > ۰$ پس $y > X^۲ + \frac{X}{۲}$ و نتیجه می‌گیریم که $y \geqslant X^۲ + \frac{X}{۲} + \frac{۱}{۲} > ۰$ (y عدد صحیح است). بنابراین،

$$\begin{aligned} y^۲ &\geqslant X^۴ + \frac{X^۲}{۴} + \frac{۱}{۴} + X^۳ + X^۲ + \frac{X}{۲} \\ &= y^۲ + \frac{۱}{۴}(X^۲ - ۲X - ۳) \end{aligned}$$

در نتیجه، $X^۲ - ۲X - ۳ \leqslant ۰$ پس $-۱ \leqslant X \leqslant ۳$ و بنابراین فقط $X = ۰, -۱, ۳$ در معادلهٔ سیالهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$x = ۰, ۱, ۴$$

$$y = \pm ۱, \pm ۱, \pm ۱۱$$

۳. الف) داریم

$$\frac{۱}{k^۲} < \frac{۱}{k(k-۱)} \quad (k > ۱)$$

$$\sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k^۲} < \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k(k-۱)}$$

$$۱ + \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k^۲} < ۱ + \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k(k-۱)}$$

پس

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^۲} < ۱ + \sum_{k=۲}^{n} \left(\frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k} \right)$$

پس

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^۲} < ۲ - \frac{۱}{n}$$

بنابراین

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^۲} < ۲$$

ذهن زیبا

ب) از آنجا که $\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i}$ مجموع همهٔ $۱ \Big/ \left(\prod_{x \in A_i} x\right)$هاست، پس همهٔ کسرهایی به شکل $۱/(b_i \times b_۲ \times \cdots \times b_k)$ که در آنها b_iها اعضای مختلف مجموعهٔ X هستند، در آن ظاهر می‌شوند. می‌توان این اعداد را اینگونه شمرد که بگوییم هر $۱ \leqslant i \leqslant n$ یا ظاهر می‌شود که باعث ضرب‌شدن عدد قبلی در $\frac{۱}{i}$ می‌گردد ویا ظاهر نمی‌شود که دارای همان مجموع قبلی است. پس اضافه‌شدن هر i، مجموع قبلی را $\frac{۱}{i} + ۱$ برابر می‌کند؛ البته با این روش ما حالتی را که هیچ iای در مخرج نباشد یعنی ۱ را نیز

می‌شماریم که باید از مجموع کل کم شود. پس داریم

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$
$$=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}-1$$
$$=\frac{n+1}{1}-1=n$$

چون $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j^2}<2$ و $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}=n$ پس

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i\times j^2}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}<2n$$

بنابراین

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i\times j^2}<2n+1$$

۴. اگر P نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ مثلث باشد، آنگاه

$$PA^2+PB^2+PC^2=\frac{AB^2+AC^2+BC^2}{3}+3PG^2$$

که G محل تلاقی میانه‌هاست. حال اگر مرکز دایره را O بگیریم،

$$OA^2+OB^2+OC^2-3OG^2=\frac{1}{3}(AB^2+AC^2+BC^2)$$

بدیهی است که $AB^2+BC^2+AC^2$ وقتی ماکزیمم است که $OG=0$ یعنی مرکز دایره بر محل تلاقی میانه‌ها منطبق باشد. پس

$$OA^2+OB^2+OC^2=3R^2\Longrightarrow AB^2+AC^2+BC^2=9R^2$$

همچنین اگر P نقطه‌ای دلخواه در فضا و $ABCD$ یک چهاروجهی دلخواه باشد، آنگاه

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=$$
$$4PG^2+\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+AD^2+BD^2+BC^2+CD^2)$$

در نتیجه اگر P مرکز کره اختیار شود،

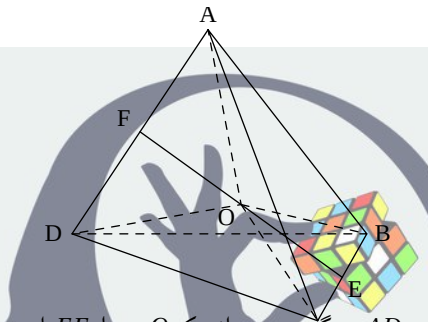
$$\sum_{X\in\{A,B,C,D\}}OX^2=4OG^2+\frac{1}{4}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}}XY^2$$

یا

$$4R^2-4OG^2=\frac{1}{4}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}}XY^2$$

ذهن زیبا

وقتی مقدار $\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^2$ ماکزیمم است که OG^2 مینیمم باشد یعنی G بر O منطبق باشد. پس باید مرکز ثقل چهاروجهی بر مرکز کره منطبق گردد. در این صورت ماکزیمم $\sum XY^2$ برابر $16R^2$ خواهد بود.



E و F را وسطهای BC و AD می‌گیریم. می‌دانیم که O وسط EF است. چون مثلثهای BOC و AOD متساوی‌الساقینند پس OE و OF که ارتفاعهای نظیر قاعده‌های آنها هستند نیز برابرند؛ در نتیجه، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OEC و OFD برابرند. پس $CE = DF$ یعنی $BC = DA$. پس یالهای روبه‌رو برابرند و به عبارت دیگر وجوه با هم برابرند.

۵. معادلهٔ $x^3 - 5x + 3 = 0$ ریشهٔ گویا ندارد پس قابل تجزیه نیست. در نتیجه، α در هیچ معادله‌ای با ضرایب گویا و از درجهٔ کمتر از ۳ صادق نخواهد بود. حال اگر معادلهٔ

$$f(x)^3 - 5f(x) + 3 = 0$$

را در نظر بگیریم، طبق فرض α ریشه این معادله نیز هست. در نتیجه،

$$f(x)^3 - 5f(x) + 3$$

بر $x^3 - 5x + 3$ بخشپذیر است. یعنی تمام ریشه‌های معادلهٔ $x^3 - 5x + 3 = 0$ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)^3 - 5f(x) + 3 = 0$ نیز خواهند بود. پس $f(\alpha)$ نیز ریشهٔ معادلهٔ اخیر است یعنی $f(f(\alpha))^3 - 5f(f(\alpha)) + 3 = 0$. در نتیجه $f(f(\alpha))$ ریشهٔ معادلهٔ $x^3 - 5x + 3 = 0$ خواهد بود.

۶. فرض می‌کنیم که مستطیل مورد نظر با شکلهای ۱ تا ۵ پوشانده شده باشد. خانه‌های مستطیل را یک در میان سیاه و سفید می‌کنیم.

از آنجا که تعداد مربعها فرد است پس تفاضل سیاه‌ها با سفیدها برابر ۱ خواهد بود. شکلهای ۱، ۴ و ۵ دارای رنگهای سیاه و سفید مساوی هستند. در مورد شکل ۲، یا چهار سفید و یک سیاه داریم یا برعکس، در مورد شکل ۳، یا پنج سیاه و دو سفید داریم یا برعکس. حال فرض کنیم که

$x_۱ =$ تعداد شکل ۲ با چهار خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه

$x_۲ =$ تعداد شکل ۲ با چهار خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید

$x_۳ =$ تعداد شکل ۳ با پنج خانهٔ سفید و دو خانهٔ سیاه

$x_۴ =$ تعداد شکل ۳ با پنج خانهٔ سیاه و دو خانهٔ سفید

با توجه به اینکه

۱ = تعداد مربعهای سفید − تعداد مربعهای سیاه

و اینکه شکلهای ۱، ۴ و ۵ در طرف دوم حذف می‌شوند، باید داشته باشیم

$$۱ = (۴x_۲ + x_۱) + (۲x_۳ + ۵x_۴) - (۴x_۱ + x_۲) - (۵x_۳ + ۲x_۴)$$
$$= -۳x_۱ + ۳x_۲ - ۳x_۳ + ۳x_۴$$

با توجه به اینکه طرف دوم بر ۳ بخشپذیر است، به‌تناقض رسیده‌ایم.

ذهن زیبا