

آزمون مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. الف) نشان دهید برای هر m و n طبیعی،

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$$

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید وقتی که n به سمت بینهایت میل کند،

$$\frac{\sum_{k=1}^n P(k)}{n^{m+1}}$$

دارای حد است.

۲. اگر در چهارضلعی محیطی $ABCD$ ، I وسط قطر AC ، J وسط قطر BD و O مرکز دایره محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I ، J و O بر یک استقامتند.

۳. ثابت کنید که تابع همانی، تنها تابع پوشا مانند f از \mathbb{N} (مجموعه اعداد طبیعی) به \mathbb{N} است که در شرط

$$f(f(n) + f(m)) = n + m \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

صدق می‌کند.

۴. دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{اگر } n = 1 \\ \left(\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n}}\right) a_{n-1} & \text{اگر } n \geq 2 \end{cases}$$

ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$ ، $\sum_{k=1}^n a_k < 1$.

۵. اگر در چهاروجهی $ABCD$ ارتفاعهای وارد از هر رأس بر وجه مقابل را با h_a ، h_b ، h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

آزمون مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی

۶. تعداد 1369^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروضند که با کنار گذاشتن هریک از این اعداد بقیه را می‌توان به 1368 دسته مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصلضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساویند.



حل مسائل مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. الف) داریم

$$\begin{aligned} & k(k+1)\cdots(k+m-1) \\ &= k(k+1)\cdots(k+m-1) \times \frac{k+m-k+1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} (k(k+1)\cdots(k+m) - (k-1)k\cdots(k+m-1)) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)\cdots(k+m-1) &= \frac{1}{m+1} (n(n+1)\cdots(n+m) - 0) \\ &= \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1} \end{aligned}$$

ب) ابتدا نشان می‌دهیم که بزرگترین توان n در $\sum_{k=1}^n P(k)$ برابر $m+1$ است. اثبات با استقرا نسبت به m است. واضح است که هر چندجمله‌ای از درجه m را می‌توان به صورت

$$ax(x+1)\cdots(x+m-1) + P_{m-1}(x)$$

نوشت که در آن a عددی است ثابت و P_{m-1} چندجمله‌ای از درجه حداکثر $m-1$ است. حال اگر $m=1$ ، آنگاه $P(x)$ به صورت $ax+b$ ($a \neq 0$) است و در نتیجه،

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + \cdots + P(n) &= a(1+2+\cdots+n) + nb \\ &= a \frac{n(n+1)}{2} + nb \end{aligned}$$

واضح است که درجه آن نسبت به n ، $m+1=2$ است و در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n P(k)}{n^2} = \frac{a}{2}$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد ریاضی

اگر حکم فوق در مورد چند جمله‌ای‌های با درجه کمتر از m برقرار باشد آنگاه

$$P_m(x) = ax(x+1)\cdots(x+m-1) + P_{m-1}(x)$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^n P(k) = a \sum_{k=1}^n k(k+1)\cdots(k+m-1) + \sum_{k=1}^n P_{m-1}(k)$$

جمله دوم بنا بر فرض استقرا از درجه حداکثر m است و جمله اول بنا بر (الف) برابر

$$\frac{a}{m+1} n(n+1)\cdots(n+m-1)$$

است که توان n در آن $m+1$ است و بنابراین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n P(k)}{n^{m+1}} = \frac{a}{m+1}$$

موجود است.

۲. مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به S و مساحت هر مثلث مانند IAB را به S_{IAB} نمایش می‌دهیم. واضح است که

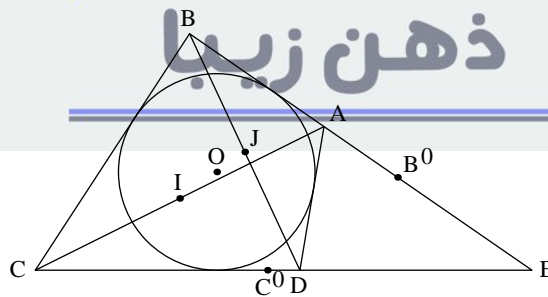
$$S_{IDC} + S_{IBA} = \frac{1}{4}S \quad (1)$$

$$S_{JDC} + S_{JBA} = \frac{1}{4}S \quad (2)$$

$$S_{ODC} + S_{OBA} = \frac{1}{4}S \quad (3)$$

می‌دانیم که در چهارضلعی محیطی $ABCD$ ،

$$AB + DC = AD + BC$$



AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در E یکدیگر را قطع کنند. آنگاه روی خط AB نقطه B' و روی خط CD نقطه C' را طوری انتخاب می‌کنیم که $EB' = AB$ و $EC' = DC$ باشد. داریم

$$S_{IEC'} + S_{IEB'} = \frac{1}{4}S$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد ریاضی

و

$$S_{IC'EB'} = S_{IC'B'} + S_{EC'B'}$$

در نتیجه،

$$S_{IC'B'} = \frac{1}{4}S - S_{EC'B'} \quad (۴)$$

اگر نظیر عملیات فوق را نسبت به J و O انجام دهیم تساویهای زیر به دست می‌آیند.

$$S_{JC'B'} = \frac{1}{4}S - S_{EC'B'} \quad (۵)$$

و

$$S_{OC'B'} = \frac{1}{4}S - S_{EC'B'} \quad (۶)$$

از (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

$$S_{IC'B'} = S_{JC'B'} = S_{OC'B'} \quad (۷)$$

از این رو سه نقطه J ، O و I بر یک استقامتند.

۳. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq 2$ باشد، آنگاه $f(n) \geq 2$. اگر $n \geq 2$ ، آنگاه $n = (n-1) + 1$ ، چون $1, n-1 \in \mathbb{N}$ و f پوشاست پس اعدادی طبیعی مانند α و β وجود دارند که $f(\alpha) = n-1$ و $f(\beta) = 1$ و بنابراین،

$$f(n) = f(n-1 + 1) = f(f(\alpha) + f(\beta)) = \alpha + \beta$$

واضح است که $\alpha + \beta \geq 2$. پس $f(1) = 1$. حال به استقرا، بدیهی است که $f(n) = n$.

۴. از رابطه

$$a_n = \left(\frac{2n-3}{2n} \right) a_{n-1}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$2ka_k = (2k-3)a_{k-1}, \quad (k \geq 2)$$

از این رو داریم

$$a_{k-1} = (2k-2)a_{k-1} - 2ka_k$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} ((2k-2)a_{k-1} - 2ka_k) \\ &= 2a_1 - 2(n+1)a_{n+1} \end{aligned}$$

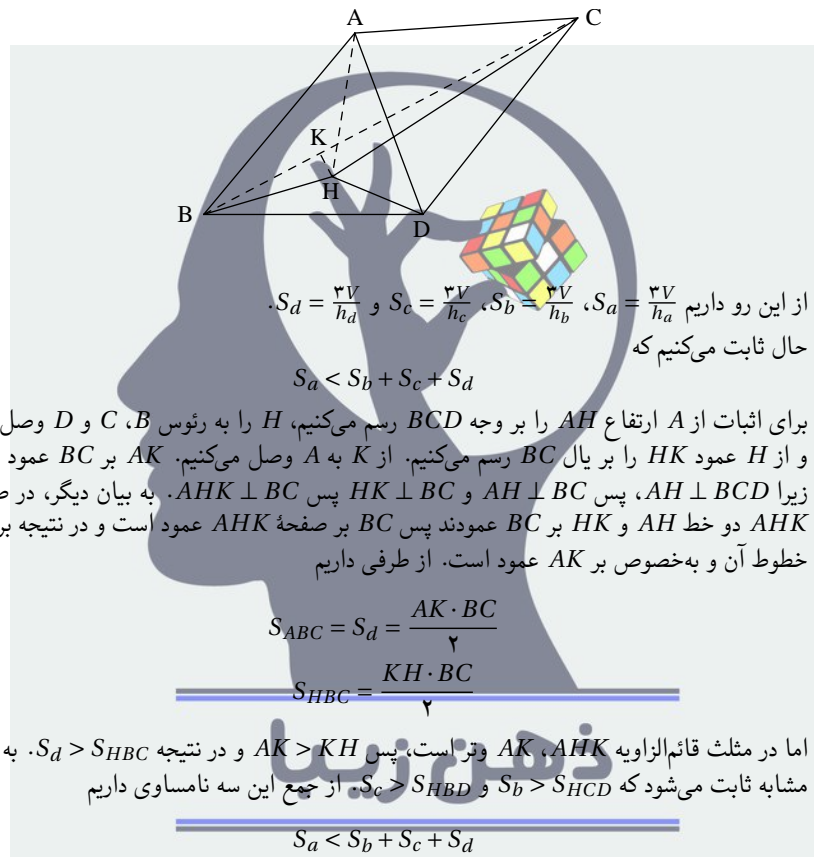
به استقرا روشن است که به ازای هر n ، $a_n > 0$. پس

$$\sum_{k=1}^n a_k < 2a_1 = 1$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد ریاضی

۵. در چهاروجهی $ABCD$ مساحت هریک از وجه‌ها را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم $S_{BCD} = S_a$ ، $S_{ABC} = S_d$ و $S_{ABD} = S_c$ ، $S_{ACD} = S_b$ حال اگر حجم هرم را با V نمایش خواهیم داشت

$$\frac{1}{3} S_a h_a = \frac{1}{3} S_b h_b = \frac{1}{3} S_c h_c = \frac{1}{3} S_d h_d = V$$



پس خواهیم داشت

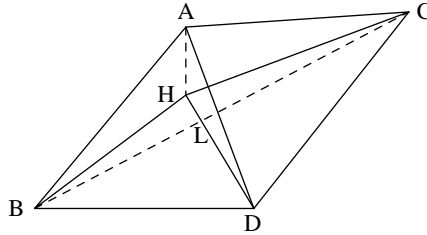
$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

این حالتی بود که H در داخل مثلث BCD باشد. در حالتی که H خارج مثلث BCD باشد، فرض می‌کنیم H در طرف BC باشد و L را محل تقاطع BC و HD می‌گیریم. خواهیم داشت

$$S_b > S_{HCD} > S_{LCD}$$

$$S_c > S_{HBD} > S_{LBD}$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد ریاضی



پس

$$S_b + S_d > S_{ICD} + S_{LBC}$$

و از این رو داریم

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

یعنی،

$$\frac{3V}{h_a} < \frac{3V}{h_b} + \frac{3V}{h_c} + \frac{3V}{h_d}$$

پس حکم برقرار است.

۶. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود تمام اعداد را می‌توان طبیعی در نظر گرفت (کافی است تمام اعداد را در کوچکترین مضرب مشترک مخرجها ضرب کنیم). آشکار است که هریک از اعداد را که برداریم، بقیه اعداد را می‌توان به دو دسته مساوی تقسیم کرد که حاصلضرب هر دو دسته یکسان گردد.

تمام اعداد اولی را که در تجزیه این اعداد به کار رفته است به p_1, p_2, \dots, p_k نشان می‌دهیم. با ضرب تمام اعداد در $p_1 p_2 \dots p_k$ می‌توان فرض کرد که در تجزیه تمام اعداد، اعداد اول یکسان به کار رفته است. حال کافی است نشان دهیم که توان هریک از این اعداد اول در هریک از این اعداد یکسان است. اگر توانهای عدد اول p_1 را به ترتیب با $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ نشان دهیم که $m = 1369^n$ است ادعا می‌کنیم که $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m$ و برای سایر p_i ها نیز چنین است. حال توجه می‌کنیم که α_i ها دارای این خاصیت هستند که هریک را کنار بگذاریم، بقیه را می‌توان به دو دسته مساوی تقسیم کرد که حاصلجمع اعداد هر دسته یکسان گردند و توجه می‌کنیم که اگر هر α_i را به یک عدد تقسیم، یا در یک عدد ضرب و یا با یک عدد جمع کنیم این خاصیت باقی می‌ماند.

آشکار است که همه α_i ها با هم یا زوج هستند یا فرد، زیرا اگر یکی را کنار می‌گذاشتیم مجموع بقیه به ۲ بخشپذیر می‌شد. حال فرض می‌کنیم که α_k کوچکترین این اعداد باشد پس اعداد $\alpha_1 - \alpha_k, \alpha_2 - \alpha_k, \dots$ و $\alpha_n - \alpha_k$ نیز دارای این خاصیت α_i ها هستند. حال فرض می‌کنیم که $\alpha_i - \alpha_k = 2^{m_i} \gamma_i$ که γ_i ها فرد هستند آنگاه همه $\alpha_i - \alpha_k$ ها را به 2^p تقسیم می‌کنیم (p کوچکترین m_i هاست). بنابراین در بین اعداد $\frac{\alpha_1 - \alpha_k}{2^p}, \dots, \frac{\alpha_n - \alpha_k}{2^p}$ یک عدد فرد و یک عدد زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد که غیر ممکن است مگر اینکه به ازای هر i ، $\alpha_i = \alpha_k$.