

آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. اعداد صحیح و مثبت a ، b و c را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

۲. فرض کنید تابع حقیقی f در فاصله $[0, \infty)$ تعریف شده و f' و f'' در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم

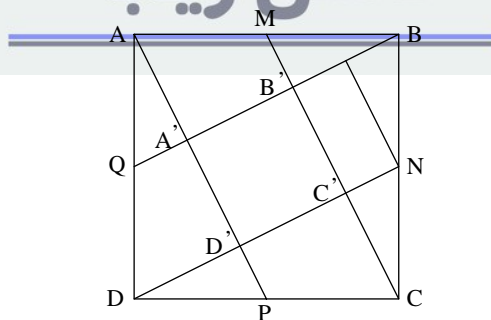
$$f''(x) = \frac{1}{x^2 + f'(x)^2 + 1}; \quad f(0) = f'(0) = 0$$

ثابت کنید تابع g با ضابطه

$$g(0) = 0, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$

کراندار است.

۳. در شکل زیر نقاط M ، N ، P و Q به ترتیب در وسط اضلاع مربع $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{1}{5}$ مساحت مربع $ABCD$ است.



آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی

۴. مطلوب است محاسبه عبارت

$$A = \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \dots \times \sin 89^\circ$$

۵. تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را چنان تعیین کنید که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x^2 - y^2) = f(x)^2 - f(y)^2$$

۶. چهار خط متمایز L_1, L_2, L_3 و L_4 را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه‌تای آنها در یک صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط L_1 و L_2 نقطه A ، محل تقاطع خطوط L_2 و L_3 نقطه B و محل تقاطع خطوط L_3 و L_4 نقطه C باشد. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهار خط فوق را قطع می‌نمایند تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.



حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبداللہ محمودیان

۱. از رابطه اول داریم

$$\begin{aligned} 0 &= a^3 - b^3 - c^3 - 3abc \\ &= (a-b-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca) \end{aligned}$$

ولی

$$(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca) = \frac{1}{2}((a+b)^2 + (b-c)^2 + (c+a)^2)$$

پس عبارت بالا وقتی و فقط وقتی صفر است که

$$c = -a \text{ و } b = c \text{ و } a = -b$$

که با توجه به مثبت بودن a و b و c غیر ممکن است. پس داریم

$$\begin{cases} a = b + c \\ a^2 = 2(b + c) \end{cases}$$

و بنابراین، $a^2 = 2a$ ، یعنی $a = 2$ ، پس $b + c = 2$ و بنابراین $b = c = 1$.

۲. چون f' و f'' پیوسته‌اند پس انتگرال‌پذیرند، و داریم

$$\begin{aligned} \int_0^x f''(t) dt &= \int_0^x \frac{dt}{t^2 + f'(t)^2 + 1} \\ &\leq \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \text{Arctg } t \Big|_0^x = \text{Arctg } x \end{aligned}$$

پس

$$f'(x) - f'(0) \leq \text{Arctg } x$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین المپیاد ریاضی

در نتیجه،

$$\int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^x \operatorname{Arctg} t dt$$

$$= x \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$$

یعنی

$$f(x) \leq x \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$$

و در نتیجه،

$$\frac{f(x)}{x} \leq \arctan x - \frac{1}{2x} \ln(1+x^2)$$

حد طرف دوم در بینهایت برابر $\frac{\pi}{4}$ است؛ پس عددی مانند A هست که در بازه $[A, \infty)$ ، تابع g از بالا کراندار است. از پیوستگی g در $[0, A]$ نتیجه می‌شود که g در این بازه هم از بالا کراندار است. چون g نامنفی است پس در $[0, \infty)$ کراندار است.

۳. به سهولت دیده می‌شود که چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است، $A'B' = B'B$ و $MB' = \frac{1}{4}AA'$ واضح است که مثلثهای MBC ، AQB ، ADP و DCN برابرند. بنابراین،

$$S_{ABCD} = 4 \times S_{MBC} - 4S_{MBB'} + S_{A'B'C'D'}$$

واضح است که مساحت مثلث MBB' برابر $\frac{1}{4}$ مساحت مربع $A'B'C'D'$ است پس

$$S_{ABCD} = 4 \times S_{MBC}$$

همچنین بدیهی است که

$$S_{MBC} = 5S_{MBB'}$$

پس

$$S_{ABCD} = 4 \times 5S_{MBB'} = 5S_{A'B'C'D'}$$

۴. داریم

$$\sin x \sin(90^\circ - x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

بنابراین،

$$A = (\sin 1^\circ \sin 89^\circ)(\sin 2^\circ \sin 88^\circ) \dots (\sin 44^\circ \sin 46^\circ) \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{45}} (\sin 2^\circ \sin 4^\circ \dots \sin 88^\circ)$$

به روش مشابه خواهیم داشت

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} (\sin 4^\circ \sin 8^\circ \sin 12^\circ \dots \sin 88^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} (\sin 4^\circ \sin 56^\circ \sin 64^\circ$$

$$\times (\sin 8^\circ \sin 52^\circ \sin 68^\circ) \dots (\sin 28^\circ \sin 32^\circ \sin 88^\circ) \sin 6^\circ$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین المپیاد ریاضی

با استفاده از رابطه

$$\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \sin 3x$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{267} \cdot \frac{1}{47} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin 12^\circ \sin 24^\circ \dots \sin 84^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{282} (\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 72^\circ) (\sin 24^\circ \sin 36^\circ \sin 48^\circ) \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}}{282} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{42} (\sin 36^\circ \sin 72^\circ) \end{aligned}$$

یا به عبارتی

$$A = \frac{\sqrt{18}}{287} \sin 36^\circ \sin 72^\circ \quad (1)$$

البته می‌توان $\sin 36^\circ$ و $\sin 72^\circ$ را نیز محاسبه کرد و مقدار عددی آنها را در رابطه (1) قرار داد.
۵. با فرض $x = y = 0$ و به ترتیب داریم

$$f(0) = 0$$

$$f(x^2) = f(x)^2$$

$$f(-y^2) = -f(y)^2$$

فرض کنید u و v دو عدد حقیقی باشند که $u > 0$ و $v < 0$. با فرض $x^2 = u$ و $-y^2 = v$ ، داریم

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

حال اگر $u \geq 0$ داریم

$$u = 2u - u$$

و از طرفی،

$$f(-u) = -f(\sqrt{u})^2 = -f(u)$$

پس

$$f(u) = f(2u) - f(u)$$

یعنی

$$f(2u) = 2f(u)$$

به استقرا می‌توان ثابت کرد که

$$f(nu) = nf(u)$$

و واضح است که رابطه اخیر به‌ازای $u < 0$ نیز برقرار است.

از این نتیجه می‌توان ثابت کرد که اولاً به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $f(n) = nf(1)$ و اگر به جای u در رابطه $f(nu) = nf(u)$ ، $\frac{1}{n}$ بگذاریم،

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n}$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین المپیاد ریاضی

پس برای هر r گویا، $f(r) = rf(1)$. اگر بگیریم $a = f(1)$ ، تابع f در تمام نقاط گویا بر تابع $g(x) = ax$ منطبق است و به خاطر پیوسته بودن f ، $f = g$. از اینجا به سهولت نتیجه می‌شود که

$$f(x) = ax$$

که $a = 0$ یا $a = 1$ است (با استفاده از $f(x^2) = (f(x))^2$).

۶. اگر سه نقطه بر هم منطبق باشند همواره بینهایت خط با خاصیت مورد نظر قابل رسم است (هر خطی که از این نقطه بگذرد جواب است). به همین ترتیب در حالتی که دو نقطه بر هم منطبق باشند همواره بینهایت خط جواب مسأله است. اگر A ، B و C متمایز باشند، خطی که از A به C وصل می‌شود به وضوح دارای این خاصیت است.

حال برای تعیین تعداد حداکثر خطوط، صفحه‌گذرنده از L_1 و L_2 را با P_1 و صفحه‌گذرنده از L_3 و L_4 را با P_2 نمایش می‌دهیم. چون B به هر دو صفحه تعلق دارد، پس P_1 و P_2 یا بر هم منطبقند یا فصل مشترکی چون L دارند. شرط اول امکان ندارد، چون در آن صورت چهار خط در یک صفحه قرار می‌گیرند که خلاف فرض است. اگر L با خطوط L_1 و L_4 موازی نباشد، آنگاه L نیز یک جواب مسأله است. اگر L با یکی از این دو خط موازی باشد، آنگاه L نمی‌تواند جواب مسأله باشد. از طرف دیگر هیچ خط دیگری جز خط L و خطی که A و C را به هم وصل می‌کند نمی‌تواند هر چهار خط را قطع نماید. زیرا اگر چنین خطی از A نگذرد در صفحه P_1 واقع است. در این صورت اگر محل تقاطع این خط با خط L_3 نقطه B' باشد، چون B متعلق به P_1 است و B' نیز به P_1 تعلق دارد پس دو نقطه خط L_3 روی P_1 هستند و در نتیجه L_1 ، L_2 و L_3 در یک صفحه‌اند که خلاف فرض است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که این خط از C نیز باید بگذرد، پس خط مفروض همان AC است.



ذهن زیبا