

مرحله‌ی دوم سی‌امین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۰ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

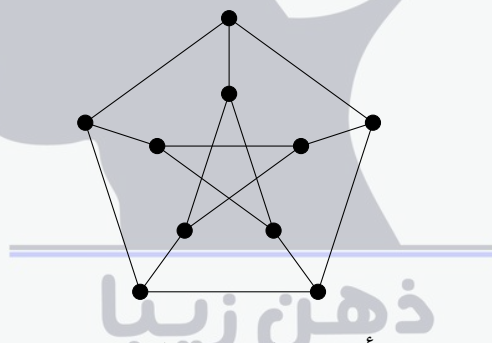
۱ فرض کنید a و b دو دنباله به طول n و از اعداد صحیح نامنفی باشند. منظور از $a + b$ دنباله‌ای به طول n است که عنصر i ام آن حاصل جمع عنصرهای i ام در a و b است ($1 \leq i \leq n$). به زوج مرتب (a, b) جایگشت ساز می‌گوییم اگر و تنها اگر دنباله‌ی $a + b$ جایگشتی از اعداد ۱ تا n باشد. تعداد زوج مرتب‌های (a, b) جایگشت ساز به طول ۱۰ را بیابید که هر دو دنباله‌شان ناصعودی باشند. یک دنباله ناصعودی است اگر هر عضو از دنباله کوچک‌تر مساوی عضو پیشین باشد.

۵۶۳۲ (۵) ۱۱ (۴) ۱۰۲۴ (۳) ۵۱۲ (۲) ۵۸۷۸۶ (۱)

۲ ناخدا و ۵ نفر از ملوانانش سر یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. هر کدام از افراد دور میز به احتمال $\frac{1}{4}$ کرونا دارند. پس از هر یک ساعت اگر فردی مریض باشد هر دو نفر کناریش را مریض می‌کند. چه قدر احتمال دارد پس از ۲ ساعت همه‌ی افرادی که دور میز نشسته‌اند مبتلا شده باشند؟

$\frac{21}{33}$ (۵) $\frac{3}{16}$ (۴) $\frac{63}{64}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{57}{64}$ (۱)

۳ پترسن می‌خواهد روی هر رأس از گراف زیر عددی صحیح و بزرگ‌تر از ۱ قرار دهد.



یک عددگذاری پایدار است اگر هر جفت رأس همسایه اعدادشان نسبت به هم اول باشند. پترسن می‌خواهد طوری عددگذاری کند که هم پایدار باشد و هم مجموع اعداد گذاشته شده کمینه باشد. مجموع اعدادی که روی گراف می‌نویسد چه قدر است؟

۳۵ (۵) ۳۴ (۴) ۳۲ (۳) ۳۰ (۲) ۳۹ (۱)

۴ جدولی $n \times n$ داریم که سطرهاى آن از بالا به پایین و ستون‌های آن از چپ به راست با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. خانه‌ی واقع در سطر i و ستون j را با (i, j) نشان می‌دهیم. می‌خواهیم از خانه‌ی $(1, 1)$ به خانه‌ی (n, n) برویم. حرکت‌های مجاز به صورت زیر هستند:

- حرکت از (i, j) به $(i + 1, j)$ با هزینه‌ی j .
- حرکت از (i, j) به $(i, j + 1)$ با هزینه‌ی i .

چند مسیر مجاز دارای کم‌ترین هزینه هستند؟

$\frac{1}{4} \binom{2n}{n}$ (۵) $\binom{2n-2}{n-1}$ (۴) n (۳) ۲ (۲) $\binom{2n}{n}$ (۱)

۵

شنگدباو یک کوالای خوشحال دارد. او سه سکو دور یک دایره با فاصله‌های برابر قرار داده است که با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ در جهت ساعت‌گرد شماره‌گذاری شده‌اند. در ابتدا کوالا روی سکوی ۱ قرار دارد. این کوالای خوشحال در هر دقیقه به احتمال $\frac{1}{3}$ به سکوی بعدی در جهت ساعت‌گرد می‌پرد، به احتمال $\frac{1}{3}$ به سکوی بعدی در جهت پادساعت‌گرد می‌پرد و به احتمال $\frac{1}{3}$ سر جای خود می‌ماند. حالا شنگدباو با خود می‌اندیشد پس از ۱۳۹۹ دقیقه کوالا در کدام سکو به احتمال بیشتری می‌نشیند.

- (۱) احتمال نشستن در سکوهایی ۱ و ۲ برابر است و از سکوی ۳ بیشتر است.
- (۲) احتمال نشستن روی سکوی ۱ از دو سکوی دیگر بیشتر است.
- (۳) احتمال نشستن در سکوهایی ۱ و ۳ برابر است و از سکوی ۲ بیشتر است.
- (۴) احتمال نشستن روی سکوی ۳ از دو سکوی دیگر بیشتر است.
- (۵) احتمال نشستن روی سکوی ۲ از دو سکوی دیگر بیشتر است.

۶

علی از طرف عمومی برنامه‌نویسش یک دستورالعمل «آرایه‌ساز» و یک آرایه‌ی ۸ خانه‌ای هدیه گرفته است. این دستورالعمل به صورت زیر کار می‌کند:

○	○	○	○	○	○	○	○
---	---	---	---	---	---	---	---

۱. درون تمامی خانه‌های آرایه عدد ○ را بنویس.
۲. مقدار i را برابر با ○ قرار بده.
۳. مقدار i را $i + 1$ قرار بده.
۴. i خانه‌ی متوالی در آرایه را به صورت تصادفی انتخاب کن. به اعداد درون تمامی این i خانه یک واحد اضافه کن.
۵. اگر i کوچکتر از ۸ است به مرحله‌ی ۳ بازگرد.
۶. پایان.

این دستورالعمل یک آرایه‌ی ۸ عضوی را به صورت تصادفی می‌سازد. از آن‌جا که علی این روزها به «جایگشت» علاقه‌مند شده است، فقط وقتی خوشحال می‌شود که دستورالعمل جایگشتی از اعداد ۱ تا ۸ خروجی بدهد. علی به چه احتمالی خوشحال می‌شود؟

$$\frac{1}{8} \quad (۵) \quad \frac{28}{8!} \quad (۴) \quad \frac{27}{7!} \quad (۳) \quad \frac{27}{8!} \quad (۲) \quad \frac{1}{7} \quad (۱)$$

۷

هفته‌ی گذشته در سیسیل ایتالیا، جزیره‌ی خانواده‌های مافیایی، پسر دون کورلثونه به قتل رسید. دون کورلثونه همگی پدرخوانده‌های خانواده‌های مافیایی را به یک جلسه‌ی اضطراری دعوت کرده است. از آن‌جایی که همگی آن‌ها مشارکت در قتل را تکذیب کرده‌اند؛ دون کورلثونه یک آزمون برای شناسایی دروغ‌گوها از راست‌گوها طراحی کرده است. پس از آن که تمامی پدرخوانده‌ها دور میز n نفره نشستند، دون کورلثونه از هر فرد می‌خواهد روی کاغذی بنویسد که نفر سمت راست او دروغ‌گو است یا راست‌گو. از کنار هم قرار دادن نوشته‌های پدرخوانده‌ها (به ترتیب نشستن دور میز) یک دنباله‌ی n تایی ساخته می‌شود. به این دنباله معتبر می‌گوییم، اگر حداقل به یک روش بتوان راست‌گو یا دروغ‌گو بودن را به n نفر نسبت داد به طوری که:

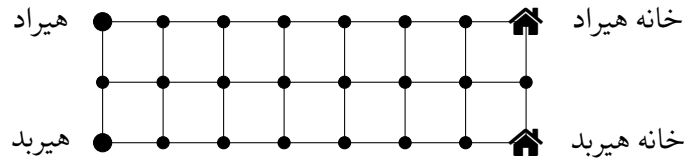
- اگر فرد x راست‌گو است، دروغ‌گویی یا راست‌گویی نفر سمت راست او همانند اظهار نظر فرد x باشد.
- اگر فرد x دروغ‌گو است، دروغ‌گویی یا راست‌گویی نفر سمت راست او مخالف اظهار نظر فرد x باشد.

اگر دنباله معتبر نباشد دون کورلثونه از مافیای سیسیل ناامید شده و به زندگی همه پایان می‌دهد. چه تعدادی از دنباله‌ها معتبر هستند؟

$$2^{n-1} \quad (۵) \quad 1 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad n \quad (۲) \quad 2^n \quad (۱)$$

مرحله‌ی دوم سی‌امین المپیاد کامپیوتر کشور

۸ هیربد و هیراد روی نقاط سمت چپ یک شبکه‌ی 8×3 ایستاده‌اند و خانه‌های آن‌ها در نقاط سمت راست جدول قرار دارد.



هر یک از آنها در هر گام می‌تواند به یکی از نقاط مجاور راستی، بالایی و یا پایینی‌اش (در صورت وجود) که قبلاً از آن عبور نکرده، وارد شود.

این دو نفر قصد دارند به خانه‌هایشان بروند و متأسفانه امروز با هم قهر کرده‌اند؛ برای همین می‌خواهند طوری به خانه‌هایشان بروند که مسیرهای حرکتشان هیچ نقطه و یال مشترکی نداشته باشند. هیربد و هیراد به چند طریق می‌توانند مسیرهایشان را انتخاب کنند؟

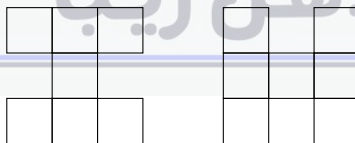
۷۲۹ (۱) ۱۳۹۳ (۲) ۱۷۱ (۳) ۵۷۷ (۴) ۲۳۹ (۵)

۹ جزیره‌ی فلون که اکنون مسکونی شده است، 10×10 شهر دارد که به شکل یک جدول 10×10 ساخته شده‌اند. در ابتدا شهر گوشه بالا راست جزیره به کرونا آلوده شده است. ابتدای هر روز، تنها یکی از شهرهای سالم که در مجاورت ضلعی حداقل یک شهر آلوده قرار گرفته است، به کرونا آلوده می‌شود. سپس دکتر ارنست یکی از شهرهای سالم را قرنطینه می‌کند و دیگر امکان ندارد آن شهر آلوده شود.

می‌دانیم شهرهای آلوده هیچ وقت به وضعیت سالم بر نمی‌گردند. دکتر ارنست با استفاده از دستگاه تشخیص کرونا از راه دور همواره می‌داند کدام شهرها آلوده هستند. هدف او کمینه کردن تعداد شهرهای آلوده است. اگر دکتر ارنست بهینه عمل کند، بیشینه‌ی تعداد شهرهای آلوده پس از گذشت 100 روز از آغاز شیوع چه قدر است؟

۶ (۱) ۱۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۱۱ (۵)

یک جدول $n \times n$ که رنگ هر خانه‌ی آن سفید یا سیاه است را قوی می‌نامیم، اگر و تنها اگر هیچ یک از اشکال زیر در خانه‌های سفید جدول دیده نشود:



_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

۱۰ کمینه‌ی تعداد خانه‌های سیاه را میان تمامی جدول‌های 5×5 قوی بیابید.

۳ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۱ (۵)

۱۱ کمینه‌ی تعداد خانه‌های سیاه را میان تمامی جدول‌های 7×7 قوی بیابید.

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۸ (۵)

در فرودگاه شهری که شنگدباو در آن زندگی می‌کند یک هواپیمای مرموز وجود دارد. در بخش مسافران هواپیما، تنها یک ردیف ۱۰ تایی صندلی با شماره‌های ۱ تا ۱۰ وجود دارد و هیچ صندلی دیگری نداریم!

این صندلی‌ها مانند صندلی‌های همه‌ی هواپیماهای دیگر هستند و ۱۱ دسته‌ی صندلی دارند که بین هر دو صندلی و هم‌چنین در دو انتهای ردیف قرار دارند. روی هر یک از ۱۱ دسته، شامل دو دسته‌ی انتهای ردیف، دو کمر بند قرار دارد که یکی قفلی کمر بند و دیگری قلاب آن است. هر فردی که روی یک صندلی نشسته، برای بستن کمر بند خود باید قلاب یکی از دو دسته‌ی مجاورش را بردارد و به قفلی دسته‌ی دیگر ببندد.

همه‌ی اعضای شهر درگیر مسئله‌ی این ده صندلی شده‌اند و شنگدباو به‌عنوان یک دانشمند می‌خواهد به سوالات مردم شهر جواب دهد تا آن‌ها را آرام کند! اما ما می‌دانیم شنگدباو برای حل این معماها به کمک شما احتیاج دارد. در تمامی سوالات، دو حالت بستن کمر بندها را متمایز می‌دانیم اگر حداقل یک قفلی یا قلاب وجود داشته باشد که در یکی از حالات استفاده شده و در حالت دیگر استفاده نشده باشد. هم‌چنین، به حالتی که تمامی صندلی‌ها سر نشین دارند و تعدادی از افراد، طوری کمر بندهای خود را بسته‌اند که هیچ یک از افراد باقی‌مانده نتوانند کمر بند خود را ببندند، حالت مزاحم می‌گوییم. حالتی که تمامی افراد کمر بندشان را بسته باشند، حالت مزاحم نیست.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۲	در چند حالت تمامی ۱۰ سر نشین کمر بندشان را بسته‌اند؟	۱ (۲)	۱۰ (۳)	۱۱ (۴)	۲ (۵)
۱۳	کمینه‌ی تعداد سر نشین‌ها با کمر بند بسته میان تمامی حالات مزاحم چند است؟	۵ (۲)	۱۰ (۳)	۶ (۴)	۹ (۵)
۱۴	چند حالت مزاحم وجود دارد؟	۵۴ (۲)	۱۱۰ (۳)	۱۰ (۴)	۱۰۸ (۵)

لوک در یک جدول $n \times m$ به دنبال اسبش جالی می‌گردد. لوک تلاش می‌کند که اسبش را پیدا کند در حالی که جالی از دست او فرار می‌کند.

در هر مرحله، لوک k خانه از جدول را مشاهده می‌کند و اگر جالی داخل یکی از این خانه‌ها باشد جالی را پیدا می‌کند. در غیر این صورت، جالی یا سر جایش می‌ایستد یا یک حرکت انجام می‌دهد. از آنجایی که جالی یک اسب است، فقط می‌تواند مشابه اسب شطرنج حرکت کند. اسب شطرنج دو خانه در جهت افقی یا عمودی حرکت می‌کند و سپس ۹۰ درجه به چپ یا راست می‌پیچد و یک خانه‌ی دیگر حرکت می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵	در یک جدول 3×3 کمینه‌ی k را بیابید به طوری که لوک حتما بتواند جالی را در متناهی مرحله پیدا کند.	۲ (۲)	۴ (۳)	۸ (۴)	۱ (۵)
۱۶	در یک جدول 3×4 کمینه‌ی k را بیابید به طوری که لوک حتما بتواند جالی را در متناهی مرحله پیدا کند.	۳ (۲)	۶ (۳)	۲ (۴)	۸ (۵)

در شهر یاخچی‌آباد، هر خانه به صورت یک نقطه است که یک خانواده در آن زندگی می‌کند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین خانه به هر خانه را شعاع همسایگی آن خانه می‌نامند. فاصله‌ی دو خانه برابر است با طول پاره‌خط واصل نقاط متناظرشان.

هر خانواده تمامی خانواده‌هایی را که در شعاع همسایگی‌اش باشند، همسایه‌ی خود می‌داند. دو خانواده صمیمی هستند اگر هر یک دیگری را همسایه‌ی خود بدانند. تعداد جفت خانواده‌های صمیمی در یک محله صمیمیت آن محله محسوب می‌شود. شهردار یاخچی‌آباد قصد دارد یک محله‌ی جدید با ۹۱ خانه تاسیس کند.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

شهردار که می‌داند صمیمیت زیاد افراد می‌تواند برای قدرت او تهدید به حساب آید، می‌خواهد صمیمیت این محله کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. این مقدار چه قدر است؟

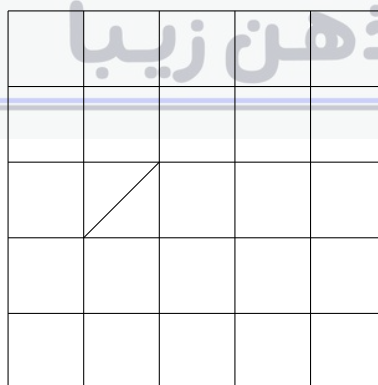
- ۰ (۱) ۱ (۲) ۴۵ (۳) ۲ (۴) ۹۰ (۵)

معاون شهردار در راستای راهبرد و برنامه‌ی سیاسی خویش، می‌خواهد نقشه‌ای پیشنهاد بدهد که صمیمیت این محله بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. اگر این مقدار x باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- $x \geq 80$
- $x \geq 160$
- $x \geq 240$
- $x \geq 320$

- ۱ (۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

یک جدول 5×5 داریم. به یک قطر از یک مربع واحد این جدول، قطرک می‌گوییم. برای مثال، یک قطرک در شکل زیر نشان داده شده است:



دو نقطه‌ی انتهایی هر قطرک، مرزهای آن قطرک نامیده می‌شوند. اگر یک نقطه مرز چهار قطرک رسم شده باشد، اشباع نامیده می‌شود (نقاط محیطی جدول هیچ‌گاه اشباع نمی‌شوند). در هر یک از سوال‌های این دسته قرار است تعدادی قطرک رسم شود (ممکن است قطرک‌ها هم‌دیگر را قطع کنند).

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

حداکثر چند قطرک می‌توان در جدول رسم کرد، طوری که هیچ نقطه‌ای اشباع نباشد؟

۱۹

۳۴ (۵)

۴۲ (۴)

۴۶ (۳)

۴۰ (۲)

۳۰ (۱)

سلطان و ایلچ یک جدول 5×5 خالی دارند و می‌خواهند بازی کنند. سلطان بازی را آغاز می‌کند. هر فرد در نوبتش یک قطرک (که تا به حال کشیده نشده) رسم می‌کند. نخستین کسی که پس از حرکتش نقطه‌ی اشباع به وجود بیاید، می‌بازد. **فان‌دی‌پلتر** (دوست ایلچ) سه الگوریتم برای بازی کردن به ایلچ پیشنهاد داده است.

۲۰

- الگوریتم (آ): فرض کنید سلطان در نوبتش در خانه‌ای مانند A یک قطرک رسم کند. بلافاصله پس از آن، قطرک دیگر خانه‌ی A را رسم کن.
 - الگوریتم (ب): هر قطرکی که سلطان کشید، آن را نسبت به «خط عمودی گذرنده از نقطه‌ی وسط جدول» قرینه کرده و قطرک متناظر را رسم کن.
 - الگوریتم (پ): اگر سلطان قطرکی در خانه‌ی وسط جدول رسم کرد، قطرک باقی‌مانده در خانه‌ی وسط جدول را رسم کن؛ در غیر این صورت قطرک سلطان را نسبت به «نقطه‌ی وسط جدول» قرینه کرده و قطرک متناظر را رسم کن.
- کدام الگوریتم‌ها (مستقل از نحوه‌ی بازی سلطان) باعث برد ایلچ می‌شوند؟

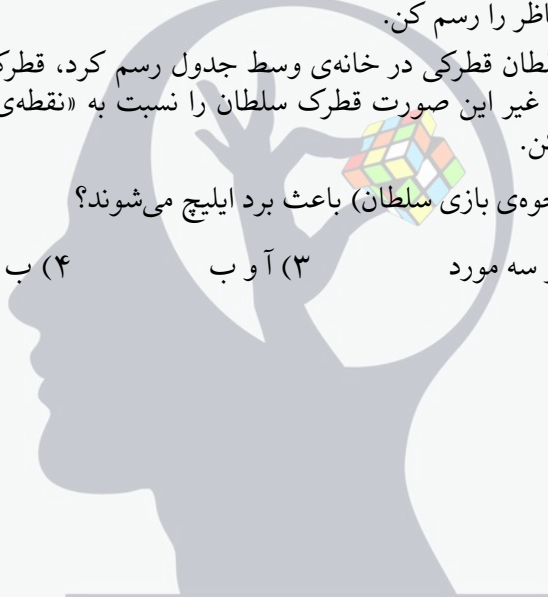
(۵) هیچ‌کدام

(۴) ب

(۳) آ و ب

(۲) هر سه مورد

(۱) ب و پ



ذهن زیبا