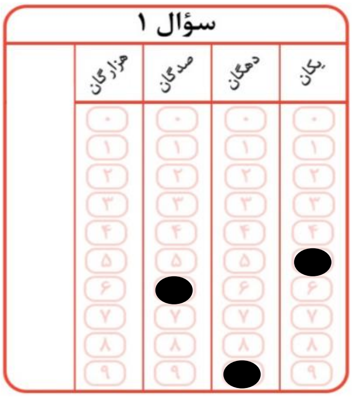
آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

ضمنا امسال در انتهای برخی از سوالاتِ کوتاه‌پاسخ بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده‌شده‌است، که‌با علامت نمایش داده‌خواهدشد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی بوده و به‌روند حل هیچ کمکی نخواهد کرد.

۰. (سؤال شمارهٔ صفر!) کد دفترچهٔ شما چند است؟ آن را در صفحهٔ اول پاسخ‌نامهٔ خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ‌نامه توضیح داده‌شده‌است.

۱. دامنه تابع زیر، شامل چند عدد صحیح است؟

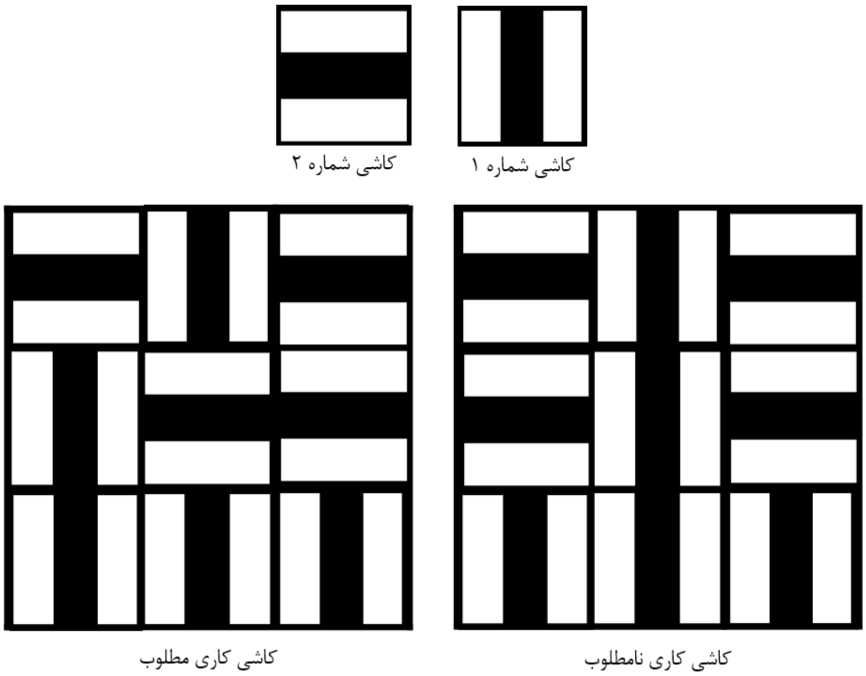
$$f(x) = \sqrt[4]{-1+\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{12}{x^2-2x}}}}$$

محل انجام محاسبات:

۲. ۱۳۹۷ عدد حقیقی داریم‌که تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند. اگر تعداد اعداد گویا بین این ۱۳۹۷ عدد را n بنامیم، تعداد مقادیر ممکن برای n چند حالت مختلف دارد؟

۳. مجموع ارقام عدد $\overbrace{66\ldots6}^{97} \times \overbrace{99\ldots9}^{97}$ چند است؟ (رقم دهگان جواب برابر با ۷ است.)

۴. می‌خواهیم یک جدول ۳ × ۳ را به کمک دو نوع کاشی زیر، کاشی‌کاری کنیم. به طوری‌که یک مسیر سیاه از یک ضلع جدول به ضلع مقابل آن پدید نیاید. چند حالت کاشی‌کاری مطلوب داریم؟

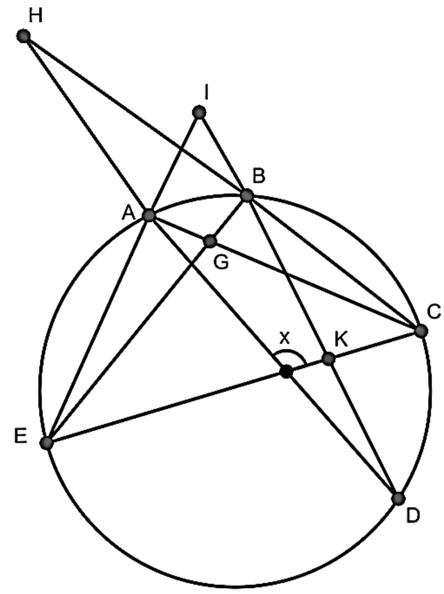


۱) ۳۳۸ ۲) ۱۷۴ ۳) ۱۶۹ ۴) ۳۴۳ ۵) ۵۱۲

محل انجام محاسبات:

۵. چند عدد طبیعی دورقمی داریم‌که رقم صفر نداشته باشد و بر هر دو رقم خود بخش‌پذیر باشد؟

۶. در شکل زیر محل تلاقی EB با AC را G می‌نامیم. زاویه بین تلاقی امتداد پاره‌خط‌های AE و BD برابر ۷۰ درجه و زاویه بین تلاقی امتداد پاره‌خط‌های DA و CB برابر با ۱۰ درجه است. اگر زوایای $\widehat{AGB}$ و $\widehat{BKE}$ به ترتیب برابر ۹۵ و ۷۰ درجه باشند، مقدار x را بیابید.(شکل دقیق نمی‌باشد.)



۷. در چند جایگشت $a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_{۱۳}$ از اعداد ۱ تا ۱۳، شرایط زیر برقرار است؟ (جواب مربع کامل است.)

$$
\begin{gathered}
a_{۱}, a_{۲} < a_{۳} \\
a_{۴}, a_{۵} < a_{۶} \\
a_{۳}, a_{۶} < a_{۷} \\
a_{۷} < a_{۸}, a_{۹} \\
a_{۸} < a_{۱۰}, a_{۱۱} \\
a_{۹} < a_{۱۲}, a_{۱۳}
\end{gathered}
$$

محل انجام محاسبات:

۸. در مثلث ABC، نقطه M را روی ضلع AC طوری در نظر بگیرید که $CM = ۲AM$. نیمساز زاویه داخلی $\widehat{A}$ ، پاره‌خط BC را در نقطه D قطع می‌کند. فرض کنید AD بر خط BM عمود است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث BMD است؟

۹. معادله زیر در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ (جزء صحیح عدد x را با $[x]$ نمایش می‌دهند.)

$$[x](x - ۱) = ۲|x|$$

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵   ۵) بی نهایت

۱۰. n عدد طبیعی داریم‌که اختلاف هردوتایی از آن‌ها یک عدد اول است. حداکثر مقدار n چند می‌تواند باشد؟

۱۱. رئوس یک پنج‌ضلعی (محدب یا مقعر) با مساحت ۷، روی نقاطی با مختصاتِ صحیح در صفحه مختصات قرار دارد. حداکثر چند نقطه با مختصات صحیح می‌تواند درون این چندضلعی باشد؟ (نقاط روی مرز جزء نقاط درونی حساب نمی‌شود.)

۱) ۶   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   ۵) ۵

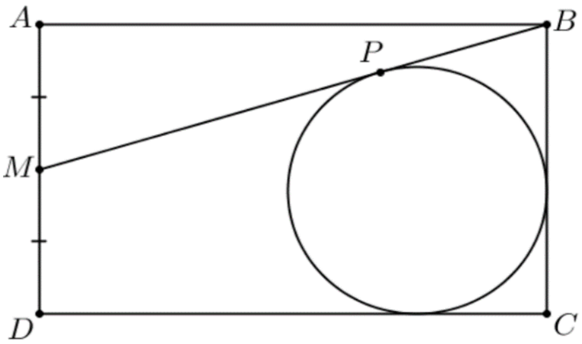
۱۲. از مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۷۶۵\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ‌کدام مربع کامل نبوده و جمع هیچ دوتایی از آن‌ها برابر ۷۶۵ نباشد؟ (حاصل جمع ارقام جواب، ۱۲ است.)

۱۳. برای چند مقدار a از مجموعه $\{-\frac{۵}{۵}, -\frac{۴}{۵}, \ldots, \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۵}\}$، تابع $f(x) = ax - [x]$ یک‌به‌یک است؟

محل انجام محاسبات:

۱۴. اگر $S(n)$ مجموع ارقام عدد n، و $P(n)$ حاصل‌ضرب ارقام n باشد، چند عدد طبیعی مختلف n می‌توان یافت به‌طوری‌که:

$$S(n) + P(n) = n$$



۱۵. در مستطیل شکل روبه‌رو، M وسط ضلع AD است. دایره‌ای داخل مستطیل درنظر بگیرید به طوری که بر پاره‌خط‌های BC، DC و MB مماس باشد و محل تماس آن با پاره‌خط MB را P بنامید. اگر $MP = AD$ باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟ (شکل دقیق نمی‌باشد.)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$ ۵) ۳

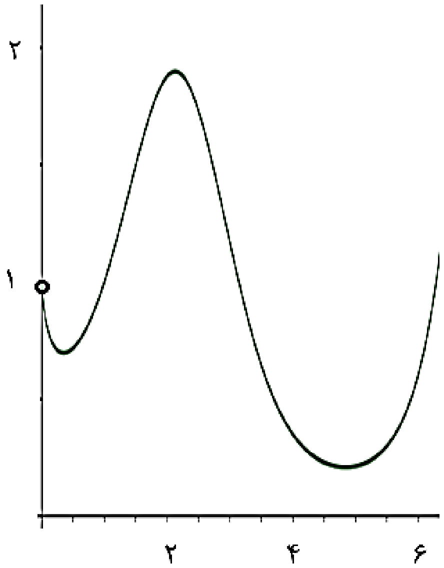
۱۶. در یک عملیات امنیتی، ۵ نفر دستگیر شده‌اند. تعدادی از آن ها مجرم و تعدادی بی‌گناه‌اند. می‌دانیم افراد مجرم همواره دروغ گفته و افراد بی‌گناه همواره راست می‌گویند. اگر این ۵ نفر جملات زیر را گفته باشند دقیقا چند مجرم داریم؟

- نفر اول: حداقل دو نفر از ما بی‌گناه است.
- نفر دوم: حداقل دو نفر از ما مجرم است.
- نفر سوم: همه بی‌گناه هستند.
- نفر چهارم: دقیقا یک نفر از ما مجرم است.
- نفر پنجم: دقیقا یک نفر از ما بی‌گناه است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

محل انجام محاسبات:

۱۷. شکل روبه‌رو مربوط به بخشی از نمودار کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟



۱) x^x
۲) $(\cos(x))^x$
۳) $(\sin(x))^x$
۴) $(\sin(x))^{\sin x}$
۵) $x^{\sin(x)}$

۱۸. در مثلث قائم الزاویه ABC، زاویه B قائمه بوده و نقاط M و N به ترتیب بر روی پاره‌خط‌های AC و AB به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که MN بر AC عمود باشد. محل تلاقی امتداد MN با امتداد ضلع BC را P می‌نامیم. می‌دانیم که PN برابر MN است. فرض کنید O وسط ضلع AC باشد. اگر طول MN و ON به ترتیب برابر ۲۰ و ۲۱ سانتی‌متر باشد، طول وتر مثلث قائم الزاویه ABC را بیابید.
(جواب سوال عدد طبیعی است.)

۱۹. چند دنباله از اعداد طبیعی مانند $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وجود دارد به طوری‌که دارای هردو ویژگی زیر باشد؟

- $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_{n-1}} \quad (n\geq 2)$
- $a_3=54000$

محل انجام محاسبات:

۲۰. در کلاس ترکیبیات، آوا همه زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۱۳۹۷\}$ را بر روی تخته نوشت. وی در ادامه به جای هر زیرمجموعه میانگین اعضای آن را قرار می دهد. میانگین اعداد نوشته شده بر روی تخته چند است؟

۲۱. چند زوج مرتب حقیقی (a,b) وجود دارد به طوری‌که:

$$\begin{cases}(a+b)^{۳} = ۲(a-b)\\ ۳(a-b)^{۲} = ۴ab\end{cases}$$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌نهایت

۲۲. درون مثلث متساوی الساقین ABC، $(AB = AC)$ نقطه P مفروض است. پای عمودهای P بر اضلاع AB، AC و BC را به ترتیب X، Y و Z می‌نامیم. می‌دانیم مقدار زاویه $\widehat{BAC}$ و $\widehat{XZY}$ به ترتیب ۴۰ و ۷۰ درجه می‌باشند. اگر $PX = ۲PY = ۴$ باشد، طول PZ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $۲\sqrt{۲}$

۲۳. دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شکرستان تعدادی استاد داردکه به‌ترتیب حروف الفبا به آن‌ها شماره‌-های ۱، ۲، ۳ و ... داده‌شده‌است. رئیس دانشکده از اساتید خواسته که برای خود کدی شامل چهار عدد اول درست کنند. استاد شماره n باید اعداد $n+۱$، $n+۲$، $n+۳$ و $n+۴$ را درنظرگرفته و سپس به‌جای هریک از این چهار عدد، یکی از عوامل اول آن را به دلخواه بنویسد. برای مثال اگر شماره استادی ۵۳ باشد، باید اعداد ۵۴، ۵۵، ۵۶ و ۵۷ را درنظرگرفته و می‌تواند این کد را انتخاب کند: ۳، ۵، ۷ و ۳ (او انتخاب‌های دیگری نیز دارد). می‌دانیم که اساتید به هرشکلی که کد خود را انتخاب کنند، کد هیچ دو استادی برابر نخواهدشد. این دانشکده حداکثر چند استاد دارد؟

محل انجام محاسبات:

۲۴.برای اعداد حقیقی aو b می‌دانیم $a \in [۰,۳]$ و $b \in [۱,۲]$. حداقل‌و حداکثر مقدار عبارت $a^۲ - ab + b^۲$ را به ترتیب، m و M می‌نامیم. مقدار جزءصحیح $[۴(M-m)]$ چند خواهد بود؟

۲۵.چند تابع صعودی $f:\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \to \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ داریم، به طوری که برای هر $۱ \le i \le ۶$ داشته باشیم:

$$|f(i) - i| \le ۱$$

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۶۴ ۳) ۸۹ ۴) ۳۲۴ ۵) ۱۲۸

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول

سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

۱. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ... و ۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸   ۵) ۱۰

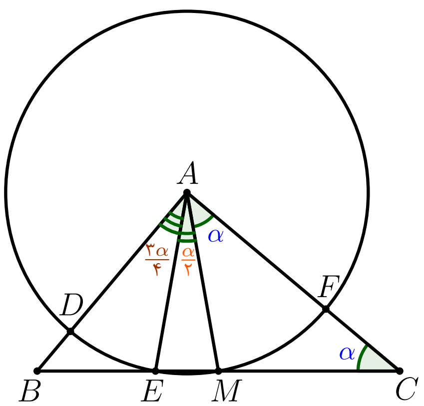
پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

تنها عددی که می‌تواند مجاور ۵ باشد ۱ است پس ۵ باید راست‌ترین یا چپ‌ترین عدد ردیف باشد. بنابر تقارن فرض می‌کنیم ۵ راست‌ترین باشد و در انتها تعداد حالات را دو برابر می‌کنیم، پس دو عدد راست ردیف ۱, ۵ هستند. از آن‌جا که عدد ۳ تنها می‌تواند مجاور ۱ و ۶ باشد برای مکان آن دو حالت وجود دارد. حالت اول این است که مجاور یک باشد در این‌صورت به راحتی بدست می‌آید که اعداد ردیف باید به شکل ۴, ۲, ۶, ۳, ۱, ۵ باشند. حالت دوم این است که چپ‌ترین عدد ردیف باشد و در این حالت نیز به سادگی نتیجه می‌شود اعداد ردیف باید به شکل ۳, ۶, ۲, ۴, ۱, ۵ باشند. پس جواب نهایی برابر می‌شود با $۲ \times ۲ = ۴$. ■

۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با فرض $\angle BAC = ۹۰^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطهٔ E و M قطع کند که نقطهٔ E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و هم‌چنین نسبت طول کمان‌های $\widehat{DE}$ به $\widehat{EM}$ به $\widehat{MF}$ برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدر مطلق تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث ABC چقدر است؟

۱) ۷۰° ۲) ۵۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰° ۵) ۱۰°

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.



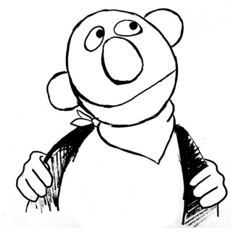
از آن‌جا که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است بدست می‌آید $AM = MC$ پس $\angle MAC = \alpha$. هم‌چنین طبق شرط سوال می‌توان نوشت

$$\angle EAM = \frac{۱}{۲}\angle MAF = \frac{۱}{۲}\alpha, \quad \angle DAE = \frac{۳}{۴}\angle MAF = \frac{۳}{۴}\alpha$$

در نتیجه

$$۹۰^\circ = \angle MAF + \angle MAE + \angle EAD = \frac{۳}{۴}\alpha + \frac{۱}{۲}\alpha + \alpha = \frac{۹}{۴}\alpha \Longrightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

پس $\angle B = ۵۰^\circ$ و جواب مسئله ۱۰° می‌شود. ■



۳. جناب‌خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌رقمی است و جناب‌خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به‌علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کمتر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفتهٔ اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود.)

۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

از آن‌جا که رقم‌های رمز باید متفاوت باشند بزرگ‌ترین عددی که برای رمز می‌تواند استفاده شود از ارقام ۷، ۸ و ۹ تشکیل شده است. دقت کنید که پس از هر هفته مجموع ارقام رمز حداقل یک واحد اضافه می‌شود پس جناب‌خان حداکثر

$$۹ + ۸ + ۷ - (۱ + ۴ + ۰) = ۱۹$$

هفتهٔ دیگر می‌تواند رمز انتخاب کند که با احتساب هفتهٔ اول می‌شود ۲۰ هفته. حالا مثالی برای ۲۰ هفته ارائه می‌دهیم:

$$۱۴۰,\ ۱۵۰, \ldots,\ ۱۹۰,\ ۲۹۰, \ldots,\ ۸۹۰,\ ۸۹۱, \ldots,\ ۸۹۷.$$

■

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m,n) = ۱$:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n+۱}$$

که منظور از (m,n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ تابع f درست است؟

۱) تابع f یک‌به‌یک است.
۲) تابع f یک‌نوا (صعودی یا نزولی) است.
۳) برد تابع f همه اعداد گویا است.
۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$
۵) همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

واضح است که برای هر n طبیعی، $(n, n+1) = 1$. در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $m = n + 1$ که نتیجه می‌دهد $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$ پس تابع یک‌به‌یک نیست و گزینهٔ اول رد می‌شود. اگر جفت‌های $(2, 1)$، $(5, 3)$ و $(1, 1)$ را به جای (m, n) قرار دهیم، می‌توان نوشت $1 < \frac{5}{3} < 2$ اما $f(1) > f\left(\frac{5}{3}\right) < f(2)$ در نتیجه تابع یک‌نوا هم نیست و گزینهٔ دوم نیز رد می‌شود. برای رد کردن گزینهٔ چهارم کافی‌ست به این توجه کنیم که $f(-1) = \frac{-1}{2} < -1$. حالا درستی گزینهٔ سوم را اثبات می‌کنیم. عدد گویای دلخواه $\frac{a}{b}$ را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $b \in \mathbb{N}$. واضح است که ۱ و ۱− در برد f هستند پس فرض می‌کنیم حداقل یکی از دو عدد $|a|$ و b از یک بیشتر هستند. نشان می‌دهیم $(a^3, a^2b - 1) = 1$. فرض کنید p عامل اول مشترکی از دو عدد باشد. می‌توان نوشت

$$p \mid a^3 \Longrightarrow p \mid a \Longrightarrow p \mid a^2b \Longrightarrow p \mid 1$$

که تناقض است. پس می‌توانیم قرار دهیم $m = a^3$ و $n = a^2b - 1$ (دقت کنید طبق فرض‌هایی که برای a و b وضع کرده‌ایم n عددی طبیعی است) و نتیجه می‌شود $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b}$ پس f پوشا است. ■

۵. چند عدد سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

قرار می‌دهیم $\overline{abc} = x^2$ هم‌چنین عدد حاصل را نیز y^2 تعریف می‌کنیم که x, y اعدادی طبیعی هستند. می‌توان نوشت

$$x^2 + 123 = y^2 \Longrightarrow 123 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$$

می‌دانیم $123 = 3 \times 41$ پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $y + x = 123$ و $y - x = 1$ که واضح است در این حالت y^2 سه رقمی نمی‌شود. حالت دوم $y + x = 41$ و $y - x = 3$ که جواب $\overline{abc} = 361$ را به‌دست می‌دهد پس مسئله تنها یک جواب دارد. ■

۶. با استفاده از همهٔ ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۳۴۵ ۲) ۱۹۸ ۳) ۹۱۲ ۴) ۳۹۸ ۵) ۳۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

کم‌ترین مقدار ممکن برای صدگان A، ۳ است زیرا ارقام متمایزند و صدگان دو عدد دیگر حداقل ۱ و ۲ است. هم‌چنین اگر صدگان A برابر با ۳ باشد ارقام ۱ و ۲ برای صدگان دو عدد دیگر استفاده شده‌اند در نتیجه حداقل A می‌تواند ۳۴۵ باشد، که اگر سه عدد ۱۶۷، ۲۸۹ و ۳۴۵ باشند این اتفاق رخ می‌دهد. ■

۷. برای $A, B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, B \in B\}$. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ ($\mathbb{Q}'$ نماد مجموعهٔ اعداد گنگ است.)

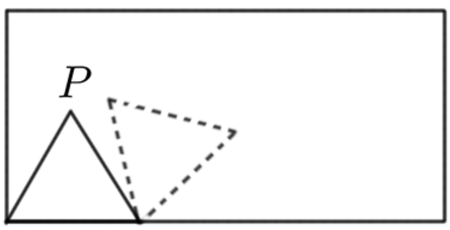
- $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\{\sqrt{۲}, ۵\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$
- $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک ۵) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

واضح است که گزارهٔ ۳ صحیح نیست زیرا صفر در مجموعهٔ سمت چپ وجود دارد اما عددی گنگ نیست. حالا درستی سه گزارهٔ دیگر را نشان می‌دهیم. ابتدا درستی گزارهٔ ۴ را نشان می‌دهیم و به راحتی از آن درستی گزارهٔ ۱ نیز نتیجه می‌شود (زیرا $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \subset \mathbb{Q}'$) فرض کنید q عددی گویا و ناصفر باشد. می‌توان به سادگی نشان داد که $\frac{q}{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است پس همهٔ اعداد گویای ناصفر تولید می‌شوند. حالا فرض کنید q' عددی گنگ باشد. اگر هر دو عدد $\frac{q'}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{q'}{\sqrt{۳}}$ گویا باشند نسبت آن‌ها نیز گویا است اما به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ گویا نیست پس حداقل یکی از آن‌ها گنگ است و در نتیجه همهٔ اعداد گنگ نیز تولید می‌شوند. به طور مشابه می‌توان درستی گزارهٔ ۲ را نیز نشان داد. ■

۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل ۴×۲، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟



۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۵) ۲π

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

اگر P راس چرخش نباشد، در طول اضلاع به اندازهٔ کمان ۱۲۰° و در گوشهٔ مستطیل به اندازهٔ کمان ۳۰° از یک دایره به شعاع ۱ حرکت می‌کند. پس مجموع کمان‌هایی که P حرکت می‌کند برابر می‌شود با

$$۱۲۰^\circ + ۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۳۰^\circ + ۰^\circ + ۳۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۳۰^\circ + ۰^\circ + ۳۰^\circ = ۶۰۰^\circ$$

پس مجموع حرکت P برابر می‌شود با

$$\frac{۶۰۰}{۳۶۰} \times ۲\pi = \frac{۱۰\pi}{۳}$$

■

۹. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) وجود دارد که x, y, z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۲ ۵) ۱۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

روی مقادیر مختلف z حالت‌بندی می‌کنیم. واضح است که برای $z = ۵, ۷$ هیچ جفتی نمی‌توانیم انتخاب کنیم. اگر $z = ۱$ باشد طبق اصل ضرب برای دو عدد دیگر $۵۶ = ۷ \times ۸$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۲$، از آن‌جا که ۵ رقم فرد داریم $۲۰ = ۴ \times ۵$ حالت وجود دارد که $x \times y$ فرد شود پس طبق اصل متمم $۳۶ = ۲۰ - ۵۶$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۳$، مشابه حالت قبل نتیجه می‌شود که $۲۶ = ۳۰ - ۵۶$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۴$، در صورتی که هیچ‌کدام از x, y برابر با ۸ نباشند تنها دو حالت $(۲, ۶), (۶, ۲)$ وجود دارد و اگر یکی از آن‌ها ۸ باشد ۷×۲ حالت وجود دارد و در مجموع تعداد حالات $۱۶ = ۲ + ۱۴$ می‌شود. اگر $z = ۶$، یکی از x, y باید مضربی از ۲ باشد و دیگری مضربی از ۳ پس $۱۲ = ۲ \times ۳ \times ۲$ حالت وجود دارد. برای $z = ۸$ و $z = ۹$ نیز واضح است که به ترتیب ۴ و ۲ حالت وجود دارد. نهایتا تعداد حالات کل برابر است با

$$۵۶ + ۳۶ + ۲۶ + ۱۶ + ۱۲ + ۴ + ۲ = ۱۵۲.$$

■

۱۰. اعداد ۱، ۲، … و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همهٔ مقسوم علیه‌های آن را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همهٔ اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۱ ۳) ۶۹۸ ۴) ۷۰۱ ۵) ۷۰۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

دقت کنید که هر عدد کوچک‌تر از ۶۹۸ مضربی از ۶۹۸ تا ۱۳۹۵ دارد زیرا اگر $x < ۶۹۸$ آن‌گاه عدد طبیعی n وجود دارد که $۶۹۸ \leq ۲^n x \leq ۱۳۹۵$ (زیرا $۱۳۹۶ = ۶۹۸ \times ۲$) پس زمانی که همهٔ اعداد بزرگ‌تر از ۶۹۸ خط بخورند تنها امکان دارد ۶۹۸ و مقسوم علیه‌های آن باقی‌مانده باشند. واضح است که ۶۹۸ خط

نخورده است هم‌چنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که سه مقسوم علیه دیگر آن مضرب دیگری بزرگتر از ۶۹۸ دارند و قبلا خط خورده‌اند پس آخرین عددی که خط می‌خورد ۶۹۸ است. ■

۱۱. عمل $*$ را در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x+y}{۱ - xy}$$

اگر a, b, c ریشه‌های $x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵$ باشند، مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) -۸ ۴) $\frac{۸}{۳}$ ۵) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

می‌توان نوشت

$$a * (b * c) = a * \frac{b+c}{۱ - bc} = \frac{a + \frac{b+c}{۱-bc}}{۱ - \frac{a(b+c)}{۱-bc}} = \frac{a+b+c-abc}{۱ - (ab+bc+ca)}$$

از طرف دیگر نیز داریم

$$x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵ = (x-a)(x-b)(x-c) = x^۳ - (a+b+c)x^۲ + (ab+bc+ca)x - abc$$

پس $a+b+c = ۳$، $ab+bc+ca = -۲$ و $abc = -۵$ و با قرار دادن این روابط در تساوی اول پاسخ بدست می‌آید که برابر با $\frac{۸}{۳}$ است. ■

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b,c) = b(c,a) = c(a,b) = ۲^۶ \times ۳^۸ \times ۵^{۱۰}$$

(منظور از (a, b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

۱) ۳۲۴۰ ۲) ۲۰۸۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۱۶۲۰ ۵) ۷۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

دقت کنید که عوامل اول a, b, c تنها می‌توانند ۲, ۳, ۵ باشند. فرض کنید توان ۲ در a, b, c به ترتیب α, β, γ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $\alpha \le \beta \le \gamma$. می‌توان نوشت

$$\beta + \min\{\alpha, \gamma\} = \gamma + \min\{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \beta + \alpha = \gamma + \alpha \Longrightarrow \beta = \gamma$$

از طرف دیگر نیز داریم $\alpha + \beta = ۶$. این معادله جواب‌های

$$(\alpha, \beta) = (۰, ۶), (۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳)$$

را دارد (از آن‌جا که $\alpha \leq \beta$). برای هر کدام از سه جواب اول ۳ حالت برای توان‌های ۲ در a, b, c وجود دارد زیرا α می‌تواند توان دوی هر یک از سه عدد باشد و توان دوی ۲ عدد دیگر به طور یکتا مشخص می‌شود اما در جواب چهارم تنها ۱ حالت وجود دارد. پس مجموعا ۱۰ حالت متفاوت برای توان‌های ۲ وجود دارد. به طور مشابه می‌توانیم ببینیم که برای توان‌های ۳ و ۵ به ترتیب ۱۳ و ۱۶ حالت وجود دارد و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر با $۲۰۸۰ = ۱۶ \times ۱۳ \times ۱۰$ می‌شود. ■

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳ عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۷۴۸۴۴۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

جایگاه‌های ردیف پایین را با ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم و برای $۱ \leq i \leq ۶$ جایگاه بالای شماره i را با $i + ۶$. مسئله به این تبدیل می‌شود که چند حالت برای قرار دادن اعداد ۱ تا ۱۲ پشت سر هم وجود دارد به‌طوری که برای هر $۱ \leq i \leq ۶$، i قبل از $i + ۶$ آمده باشد. طبق تقارن به ازای هر شرط نصف حالات کل حذف می‌شود پس تعداد حالات برابر است با

$$\frac{۱۲!}{۲^۶} = ۷۴۸۴۴۰۰.$$

■

۱۴. a, b, c اعدادی دوبه‌دو متمایزند. می‌دانیم سه معادلهٔ درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^۲ + bx + c = ۰, \quad bx^۲ + cx + a = ۰, \quad cx^۲ + ax + b = ۰$$

مقدار آن ریشهٔ مشترک چند است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱ ۵) به‌طور یک‌تا تعیین نمی‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

با جمع کردن سه معادله با هم بدست می‌آید

$$(a + b + c)(x^۲ + x + ۱) = ۰$$

از آن‌جا که پرانتز دوم ریشه حقیقی ندارد نتیجه می‌شود $a + b + c = ۰$. حالا می‌توان نوشت

$$۰ = ax^۲ + bx - a - b = a(x - ۱)(x + ۱) + b(x - ۱) = (x - ۱)(ax + a + b)$$

پس $x=۱$ یا $x=-\frac{a+b}{a}$. به طور مشابه از معادله دوم نیز بدست می‌آید $x=۱$ یا $x=-\frac{a+b}{b}$ و از آن‌جا که a,b متمایزند تنها حالت ممکن $x=۱$ است. ■

۱۵. ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبهٔ دیگر برابر باشد. در حداقل و حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

۱) ۵۰ و ۹۰   ۲) ۵۰ و ۱۰۰   ۳) ۸۰ و ۹۰   ۴) ۸۰ و ۱۰۰   ۵) ۹۰ و ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

اگر فقط ۱ جعبه داشته باشیم واضح است که در ۱۰۰ درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است. هر جعبه‌ای که حداقل نصف سیب‌هایش لکه‌دار هستند را خراب می‌نامیم. فرض می‌کنیم هر جعبه دارای n سیب باشد، آن‌گاه برای خراب کردن هر جعبه حداقل $\frac{n}{۲}$ سیب لکه‌دار نیاز است در نتیجه حداکثر $\frac{۱۰۰}{\frac{n}{۲}}$ جعبه خراب داریم. از طرف دیگر تعداد جعبه‌ها $\frac{۱۰۰۰}{n}$ است پس حداکثر

$$\frac{\frac{۱۰۰}{\frac{n}{۲}}}{\frac{۱۰۰۰}{n}}=۲۰\%.$$

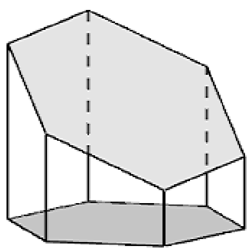
جعبه‌ها خراب است و حداقل در ٪۸۰ جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است. ■

۱۶. چند زوج مرتب (m,n) از اعداد طبیعی داریم که $[۱,۲,\dots,m]=۱۳۹۵\times[۱,۲,\dots,n]$.
(منظور از نماد $[۱,۲,\dots,m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $۱,۲,\dots,m$ است.)

۱) صفر   ۲) یک   ۳) دو   ۴) سه   ۵) چهار

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

تعریف می‌کنیم $M=[۱,۲,\dots,m],\ N=[۱,۲,\dots,n]$. دقت کنید که N برابر با حاصل ضرب بزرگ‌ترین توان‌ها از عوامل اول اعداد کوچک‌تر یا مساوی n است. از آن‌جا که $۹\mid۱۳۹۵$ باید داشته باشیم $m>۳n$. پس بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در M بیش‌تر از بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در N است که تناقض است. پس مسئله جوابی ندارد. ■



۱۷. یک منشور قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصلهٔ رئوس این سطح مقطع تا قاعدهٔ پایین به ترتیب برابر ۲، ۳، x، y، ۱۱ و z باشد، $x+y+z$ چقدر است؟

۱) ۱۶   ۲) ۱۸   ۳) ۲۰   ۴) ۲۴   ۵) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

لم. در ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ که $\angle DAB = \angle ABC = ۹۰^\circ$ می‌توان نوشت

$$CD^۲ = (AD - BC)^۲ + AB^۲.$$

اثبات. به عهدهٔ خواننده!

دقت کنید که در ۶ ضلعی که توسط صفحه ایجاد می‌شود هر دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی هستند. پس اگر ذوزنقه‌های قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو به هم را در نظر بگیریم طبق لم اختلاف قاعده‌های آن‌ها برابر است. از همین نکته می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$y - ۱۱ = ۳ - ۲ \Longrightarrow y = ۱۲$$

و از طرف دیگر

$$z - ۱۱ = ۳ - x \Longrightarrow x + z = ۱۴ \Longrightarrow x + y + z = ۲۶.$$

■

۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به‌سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آنکه تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

۱) ۲۰   ۲) ۲۱۰   ۳) ۱۰۲۴   ۴) ۵۰۰۰۰۰   ۵) ۵۲۴۲۸۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

واضح است که بعد از هر روز تعداد افرادی که شایعه را می‌دانند دو برابر می‌شود پس بعد از ۲۰ روز این تعداد از مرز یک میلیون نفر می‌گذرد. حالا نفر i–امی که آقای خالی‌بند شایعه را به او گفته است در طی این ۲۰ روز به $i - ۱$ نفر دیگر گفته است در نتیجه جواب برابر است با

$$۲۰ + ۱۹ + \cdots + ۱ = ۲۱۰.$$

■

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x, y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} x^۲ - ۳xy + ۲y^۲ + x - y = ۰ \\ ۲x^۲ - ۲xy - ۳y^۲ - ۲x + ۵y = ۰ \end{cases}$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

تساوی اول را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$0 = (x-y)^2 + (x-y) - y(x-y) = (x-2y+1))(x-y)$$

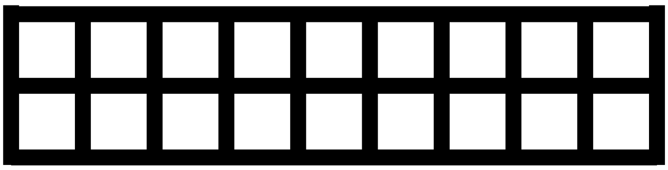
پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $x = y$ که با گذاردن آن در تساوی دوم به‌دست می‌آید

$$0 = 2x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x + 5x = -3x^2 + 3x \Longrightarrow x = 0, 1$$

پس به دو جواب $x = y = 1$ و $x = y = 0$ می‌رسیم. حالت دوم $x = 2y - 1$ که باز هم با گذاردن آن در تساوی دوم به‌دست می‌آید

$$0 = 2(2y-1)^2 - 2(2y-1)y - 3y^2 - 2(2y-1) + 5y = y^2 - 5y + 4 \Longrightarrow y = 1,\ y = 4$$

پس به دو جواب $x = y = 1$ و $x = 7, y = 4$ می‌رسیم. در نتیجه در مجموع دو حالت سه جواب وجود دارد. ■

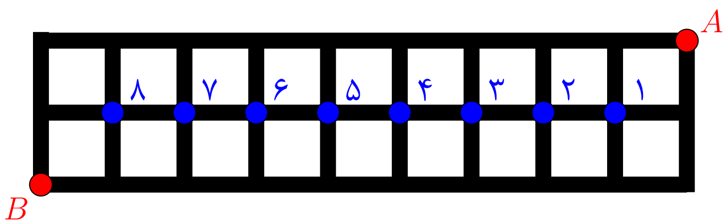


۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همهٔ تقاطع‌ها سرکشی کند به‌طوری که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟

۱) 2^5 ۲) 3^5 ۳) 2×3^4 ۴) 2^4 ۵) $3^6 - 3^5$

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

چند تقاطع را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

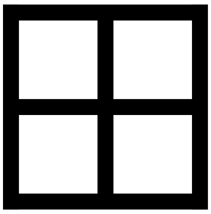


یک مسیر رفت از نقطه A به B داریم و یک مسیر برگشت از نقطه B به A. برای شروع حرکت دو انتخاب داریم و پس از آن با کمی بررسی متوجه می‌شویم هیچ سه تقاطع میانی نمی‌توانند به‌طور متوالی طی شوند

هم‌چنین جفت تقاطع‌های $(۱, ۲)$، $(۳, ۴)$، $(۵, ۶)$ و $(۷, ۸)$ باید به‌طور متوالی طی شوند و اگر مشخص کنیم هر کدام از این جفت تقاطع‌ها در مسیر رفت یا برگشت طی می‌شوند مسیر به‌طور یکتا مشخص می‌شود. در نتیجه تعداد کل حالات برابر می‌شود با

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۵}.$$

■



۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است.) هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیشتر از تقاطع‌های دیگر است.
۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دستکم ۹ خودرو پارک شده است.
۵) گزینه‌های ۱ و ۴.

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

مجموع خودروهای مرکزی محله را x و مجموع خودروهای حاشیه‌ای را y می‌نامیم. اگر مجموع ظرفیت همه تقاطع‌ها را حساب کنیم، طبق تقارن در این مجموع ضریب تعداد خودروهای هر خیابان مرکزی مرحله برابر با $\frac{۷}{۱۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳}$ و ضریب تعداد خودروهای هر خیابان حاشیه‌ای برابر با $\frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}$ می‌شود در نتیجه $\frac{۷}{۱۲}x + \frac{۵}{۶}y = ۶۶$ و از طرف دیگر $x + y = ۹۰$. با حل معادله به‌دست می‌آید $x = ۳۶,\ y = ۵۴$ و این همهٔ چیزی است که ما راجع به تعداد خودروهای پارک شده می‌دانیم. در مرکز محله ۴ خیابان وجود دارد پس طبق اصل لانه کبوتری خیابانی وجود دارد که حداقل $۹ = \lceil \frac{۳۶}{۴} \rceil$ خودرو در آن پارک شده باشد پس گزینه ۴ صحیح است. اما ممکن است در هر کدام از این ۴ خیابان دقیقا ۹ خودرو پارک شده باشد پس گزینه ۳ صحیح نیست. گزینه ۲ نیز صحیح نیست زیرا ما فقط می‌دانیم مجموع خودروهای پارک شده در حاشیه محله ۵۴ است و ممکن است در یکی از خیابان‌های آن هیچ خودرویی وجود نداشته باشد. در نهایت گزینه ۱ نیز رد می‌شود زیرا ممکن است در هر یک از دو خیابان متصل به تقاطع بالا چپ ۲۷ خودرو پارک شده باشند پس ظرفیت آن تقاطع ۲۷ می‌شود اما ظرفیت تقاطع مرکزی محله هم‌واره ۹ است. ■

۲۲. در مسابقهٔ قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همهٔ وزنه‌های ۱، ۲، ... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنهٔ ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آنجا قرار داده و از آن خانه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آنجا وزنهٔ ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آنکه وزنهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آنجا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

۱) ۲۰۲۸۰   ۲) ۲۰۲۰۰   ۳) ۲۰۱۸۰   ۴) ۲۰۱۰۰   ۵) ۲۰۰۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

خانه ابتدایی را با صفر نشان می‌دهیم و خانه‌های دیگر را در جهت عقربه‌های ساعت به‌ترتیب با ۱ تا ۹ شماره‌گذاری می‌کنیم. با استفاده از استقرا می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت برای هر $1 \leq i \leq 100$ وزنه $2i$ از خانه i به خانه $-i$ می‌رود و وزنه $2i-1$ از خانه $i-1$ به خانه i می‌رود (شماره خانه‌ها را به پیمانه ۱۰ در نظر می‌گیریم). پس وزنه $2i$ در خانه صفر بوده است اگر و تنها اگر $10 \mid i$ و از آن‌جا که $10 \mid -i$ به خانه صفر نیز برمی‌گردد. برای وزنه‌های فرد نیز می‌توان استدلال مشابهی را انجام داد و نتیجه گرفت اگر $10 \mid i-1$ وزنه $2i-1$ از خانه صفر خارج شده است و اگر $10 \mid i$ به خانه صفر وارد شده است. مجموع وزنه‌هایی که در ابتدای کار در هر خانه وجود دارد برابر است با

$$1+2+\cdots+200=20100.$$

حالا اختلاف وزنه‌هایی که از خانه صفر خارج یا وارد شده‌اند را محاسبه می‌کنیم:

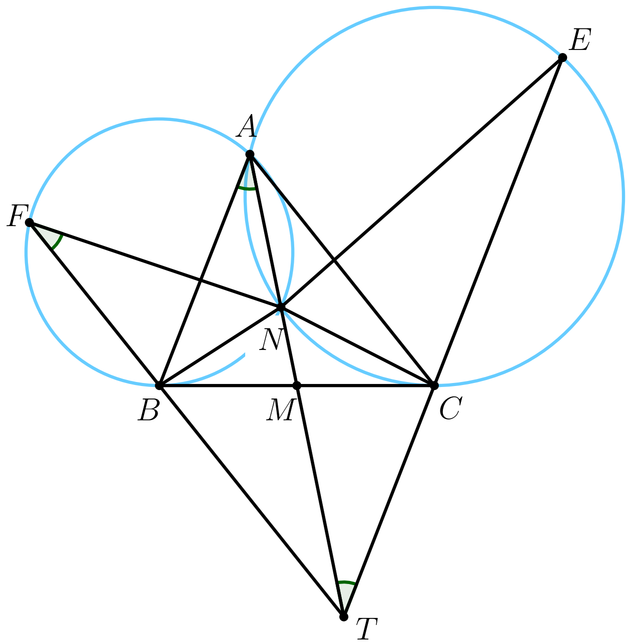
$$\sum_{i=1}^{10}\left(2\times(10i)-1\right)-\sum_{i=0}^{9}\left(2\times(10i+1)-1\right)=199-1+\sum_{i=1}^{9}-2=180$$

پس پاسخ برابر است با ۲۰۲۸۰. ■

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید ω_b و ω_c به‌ترتیب دو دایرهٔ گذرنده از A باشند به‌طوری که به‌ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و A و N محل برخورد دو دایرهٔ مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TB و TC به‌ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC=8$ و $AN=6$، حاصل $NF\times NE$ کدام است؟

۱) ۶۴   ۲) ۸۱   ۳) ۱۰۰   ۴) ۱۵۰   ۵) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.



محل برخورد AN و BC را M می‌نامیم. طبق قوت M نسبت به دو دایره می‌توان نوشت

$$MB^{۲} = MN \cdot MA = MC^{۲} \Longrightarrow MB = MC$$

پس M وسط BC است هم‌چنین $ACTB$ متوازی‌الاضلاع است پس AT هم از M می‌گذرد و چهار نقطه A, N, M, T روی یک خط قرار دارند. حالا می‌توان نوشت

$$\angle BFN = \angle BAN = \angle BAT = \angle CTN$$

به طور مشابه می‌توان به‌دست آورد $\angle NET = \angle NTF$ در نتیجه

$$T\overset{\triangle}{N}F \sim T\overset{\triangle}{E}N \Longrightarrow \frac{NE}{NT} = \frac{NT}{NF} \Longrightarrow NE \times NF = NT^{۲}$$

پس کافی‌ست طول NT را محاسبه کنیم. باز هم طبق قوت M داریم

$$۱۶ = MB^{۲} = MN \cdot MA = MN(MN + ۶) \Longrightarrow (MN - ۲)(MN + ۸) = ۰ \Longrightarrow MN = ۲$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$TN = TM + ۲ = AM + ۲ = AN + ۴ = ۱۰ \Longrightarrow NE \times NF = NT^{۲} = ۱۰۰.$$

■

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = ۲AE$، به‌علاوه F را هم قرینهٔ E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵ ۵) ۰/۶

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

لم. در مثلث ABC اگر وسط BC را M بنامیم داریم

$$AM^{۲} = \frac{۱}{۴}\left(۲AB^{۲} + ۲AC^{۲} - BC^{۲}\right).$$

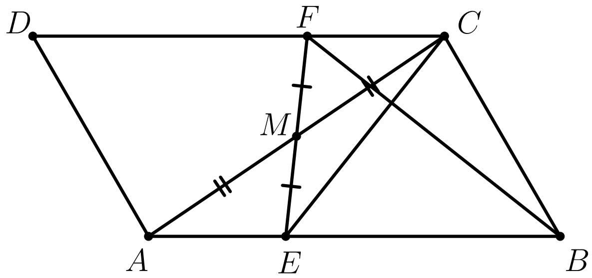
اثبات. قرینه A نسبت به M را A' می‌نامیم. واضح است که $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB\cdot AC\cos\angle A \Longrightarrow ۲AB\cdot AC\cos\angle A = AB^{۲} + AC^{۲} - BC^{۲} \quad (۱)$$

باز هم از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABA' به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} A'A^{۲} &= AB^{۲} + A'B^{۲} - ۲AB\cdot A'B\cos\left(۱۸۰^\circ - \angle A\right) \\ &\overset{(۱)}{=} AB^{۲} + AC^{۲} + \left(AB^{۲} + AC^{۲} - BC^{۲}\right) = ۲AB^{۲} + ۲AC^{۲} - BC^{۲} \end{aligned}$$

و نهایتا از آن‌جا که $A'A = ۲AM$ حکم لم نتیجه می‌شود. □



حالا به مسئله اصلی باز می‌گردیم. قرار می‌دهیم $a = AB, b = BC$ و مرکز متوازی‌الاضلاع را M می‌نامیم. طبق فرض سوال $BF \perp CE$ و با استفاده از قضیه فیثاغورس به‌سادگی نتیجه می‌شود

$$EF^{۲} - FC^{۲} = BE^{۲} - BC^{۲} \Longrightarrow ۴EM^{۲} - \frac{۱}{۹}a^{۲} = \frac{۴}{۹}a^{۲} - b^{۲} \quad (۲)$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث‌هاس EBC و ABC و لم در مثلث AEC می‌توان نوشت

$$EC^{۲} = BE^{۲} + BC^{۲} - ۲BC\cdot BE\cos ۶۰^\circ = \frac{۴}{۹}a^{۲} + b^{۲} - \frac{۲}{۳}ab \quad (۳)$$

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} - ۲BC\cdot AB\cos ۶۰^\circ = a^{۲} + b^{۲} - ab \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} \overset{(۳),(۴)}{\Longrightarrow} ۴EM^{۲} = ۲AE^{۲} + ۲EC^{۲} - AC^{۲} &= \frac{۲}{۹}a^{۲} + \frac{۸}{۹}a^{۲} + ۲b^{۲} - \frac{۴}{۳}ab - a^{۲} - b^{۲} + ab \\ &= \frac{۱}{۹}a^{۲} + b^{۲} - \frac{۱}{۳}ab \end{aligned}$$

$$\overset{(۲)}{\Longrightarrow} b^{۲} - \frac{۱}{۳}ab = \frac{۴}{۹}a^{۲} - b^{۲} \Longrightarrow ۱۸\left(\frac{b}{a}\right)^{۲} - ۳\left(\frac{b}{a}\right) - ۴ = ۰$$

با حل معادله آخر نتیجه می‌شود که $\frac{b}{a} = ۰/۵۶۲۰۵\ldots$. ■

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به‌طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e:

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-a)^۲ \geq k(b-d)^۲$$

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۲ ۵) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

در تمام راه‌حل از این نکته استفاده می‌کنیم که یک چندجمله‌ای درجه دو همواره نامنفی است اگر و تنها اگر دلتای آن نامثبت باشد. در هر مرحله عبارت را به صورت یک عبارت درجه دو بر حسب یکی از متغیرها می‌نویسیم و از نکته گفته شده استفاده می‌کنیم. همه عبارات را به طرف بزرگتر تساوی می‌بریم و بر حسب c می‌نویسیم:

$$۲c^۲ - ۲c(b+d) + \big(۲a^۲ + (۲-k)b^۲ + (۲-k)d^۲ + ۲e^۲ - ۲ab - ۲de = ۲ea + ۲kbd\big) \geq ۰$$

حالا بر حسب c به عبارت بالا نگاه می‌کنیم و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\iff ۰ \geq \frac{\Delta_c}{۴} = -۴a^۲ - (۳-۲k)b^۲ - (۳-۲k)d^۲ - ۴e^۲ + ۴ab + ۴de + ۴ea - (۴k-۲)bd$$
$$\iff ۴a^۲ - ۴a(b+e) + \big((۳-۲k)b^۲ + (۳-۲k)d^۲ + ۴e^۲ - ۴de + (۴k-۲)bd\big) \geq ۰$$
$$\iff ۰ \geq \frac{\Delta_a}{۱۶} = -۳e^۲ - (۲-۲k)b^۲ - (۳-۲k)d^۲ + ۴de - (۴k-۲)bd + ۲be$$
$$\iff ۳e^۲ - ۲e(b+۲d) + \big((۲-۲k)b^۲ + (۳-۲k)d^۲ - (۴k-۲)bd\big) \geq ۰$$
$$\iff ۰ \geq \frac{\Delta_e}{۴} = -(۵-۶k)b^۲ - (۵-۶k)d^۲ + (۱۰-۱۲k)bd = -(۵-۶k)(b-d)^۲$$
$$\iff k \leq \frac{۵}{۶}$$

■

۲۶. برای زیرمجموعهٔ ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > ۰$، مجموعهٔ نقاطی که از دست‌کم یک نقطهٔ A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی r دارند را با A_r نشان می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همهٔ موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

- $(A_r)_s = (A_s)_r$.
- $A \subset B_r$ اگر و تنها اگر $B \subset A_r$.
- اگر برای هر $t > ۰$، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$.
- $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$.

• اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار ۵) پنج

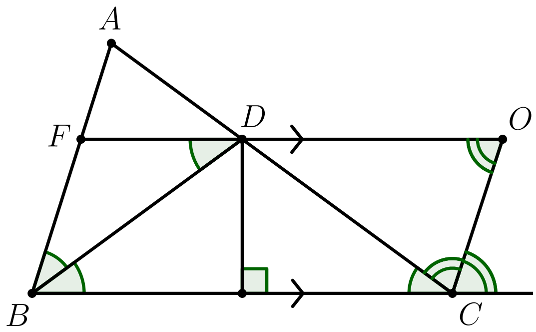
پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

ابتدا برای گزاره‌های ۲، ۳ و ۵ مثال نقض ارائه می‌دهیم سپس گزاره‌های ۱ و ۴ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از دو نقطه b, c تشکیل شده باشد که فاصله a, b برابر با r و فاصله a, c بیش‌تر از r باشد. واضح است که $A \subset B_r$ اما $c \notin A_r$ پس گزاره ۲ درست نیست. برای رد کردن گزاره ۳ فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از تمام نقاط صفحه به جز a تشکیل شده باشد. واضح است که شرط برقرار است اما $A \not\subset B$. در نهایت برای رد کردن گزاره ۵، فرض کنید مجموعه A از دو نقطه a, b و مجموعه B از دو نقطه a, c تشکیل شده باشد که فاصله a تا دو نقطه b, c بیش‌تر از r باشد و فاصله b, c برابر با r باشد. واضح است که $A \cap B = \{a\}$ پس $b \notin (A \cap B)_r$ اما $b \in A_r \cap B_r$.
حالا به سراغ اثبات گزاره ۴ می‌رویم. فرض کنید x عضوی از طرف چپ تساوی باشد. پس فاصله آن با یکی از اعضای $A \cup B$ مانند y کوچک‌تر یا مساوی r است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $y \in A$. در نتیجه $x \in A_r$ پس $(A \cup B)_r \subseteq A_r \cup B_r$. به‌طور کاملا مشابه می‌توان اثبات کرد $A_r \cup B_r \subseteq (A \cup B)_r$ پس دو مجموعه با هم برابرند. برای اثبات گزاره ۱، با استفاده از گزاره ۴ فقط کافی‌ست تساوی را برای مجموعه A با یک عضو مانند a اثبات کنیم. نشان می‌دهیم $(A_r)_s$ دایره‌ای توپر به مرکز a و شعاع $r + s$ است. طبق نامساوی مثلث همه نقاط مجموعه فاصله کوچک‌تر یا مساوی $r + s$ از a دارند. هم‌چنین فرض کنید نقطه‌ای مانند b داشته باشیم که فاصله‌اش از a کوچک‌تر یا مساوی $r + s$ باشد. اگر این فاصله کوچک‌تر یا مساوی r باشد واضح است که $b \in A_r$ و حکم نتیجه می‌شود. در غیر این‌صورت یک نقطه مانند c روی ab وجود دارد که فاصله a و c برابر با r باشد در نتیجه فاصله b و c کوچک‌تر یا مساوی s است پس $b \in (A_r)_s$ و نهایتا حکم طبق تقارن نتیجه می‌شود. ■

۲۷. در مثلث ABC داریم $\angle B = ۲\angle C$. عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطهٔ F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = ۴$، شعاع دایره چه‌قدر می‌شود؟

۱) $۳ - \sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۳ - \sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$ ۵) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.



قرار می‌دهیم $a = BC, b = AC$. طبق فرض سوال $\angle DBC = \angle C$. می‌توان نوشت

$$\angle FDB = \angle FBD = \angle B - \angle DBC = ۲\angle C - \angle DBC = \angle DBC$$

پس $FD \parallel BC$. از قضیه تالس به‌دست می‌آید

$$\frac{FD}{a} = \frac{AD}{b} = \sqrt{\frac{S_{ADF}}{S_{ACB}}} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow CD = \frac{۲}{۳}b,\ FD = \frac{۱}{۳}a \qquad (۱)$$

واضح است که

$$F\overset{\triangle}{D}B \sim D\overset{\triangle}{C}B \Longrightarrow \frac{BD}{a} = \frac{FD}{CD} \overset{(۱)}{\Longrightarrow} \frac{۴}{۹}b^۲ = \frac{۱}{۳}a^۲$$

در نتیجه $b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$. از طرف دیگر دقت کنید که O روی نیم‌ساز خارجی راس C است پس

$$\angle DCO = ۱۸۰^\circ - \angle OCB = \angle DOC \Longrightarrow DO = DC$$
$$\Longrightarrow ۴ = FO = FD + DO = \frac{۱}{۳}a + DC = \frac{۱}{۳}a + \frac{۲}{۳}b = \frac{\sqrt{۳}+۱}{۳}a$$
$$\Longrightarrow a = ۶\left(\sqrt{۳}-۱\right),\ b = ۳\left(۳-\sqrt{۳}\right)$$

در نهایت واضح است که شعاع دایره همان فاصله O از BC است و از آن‌جا که $FO \parallel BC$ این فاصله همان فاصله D از BC است. طبق قضیه فیثاغورس این فاصله برابر است با

$$\sqrt{CD^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}b^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲} = \sqrt{۳\left(\sqrt{۳}-۱\right)^۲} = ۳ - \sqrt{۳}.$$

■

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x+y+z = ۲۲۲$ و $xy+yz+zx = ۱۲۳۲۱$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۵۴۷۶ ۲) ۴۱۰۷ ۳) ۲۴۱۲ ۴) ۱۶۰۲ ۵) ۱۳۶۹

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

فرض می‌کنیم $z=\max\{x,y,z\}$ پس $A=xy$. طبق مقادیر داده شده می‌توانیم به‌دست آوریم

$$(x+y+z)^۲=۴(xy+yz+zx)\Longrightarrow z^۲-۲z(x+y)+(x-y)^۲=۰$$
$$\Longrightarrow z=x+y\pm\sqrt{(x+y)^۲-(x-y)^۲}=x+y\pm ۲\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^۲$$

از آن‌جا که z از x,y بیشتر است باید داشته باشیم

$$z=x+y+۲\sqrt{xy}\Longrightarrow ۲۲۲=x+y+z=۲(x+y+\sqrt{xy})\Longrightarrow x+y+\sqrt{xy}=۱۱۱$$

طبق نامساوی حسابی-هندسی می‌توانیم بنویسیم

$$۱۱۱=x+y+\sqrt{xy}\geq ۲\sqrt{xy}+\sqrt{xy}=۳\sqrt{xy}\Longrightarrow xy\leq ۱۳۶۹.$$

حالت تساوی نیز زمانی رخ می‌دهد که $x=y=۳۷$ و $z=۱۴۸$. ■

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{۰,۱,۲,\dots,۹۹\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هر گاه بیش از یک عضو داشته باشد و به‌علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+b+۱$ بر ۱۰۰ نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعهٔ تقریباً جمعی وجود دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۵ ۵) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۱۰۰ را با $x \pmod{۱۰۰}$ نشان می‌دهیم. ابتدا ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی شامل ۹۹ است. فرض کنید $a_{\max}$ و $a_{\min}$ به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو یک زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی باشند. اگر $a_{\max}\neq ۹۹$ آن‌گاه

$$a_{\max}+a_{\min}+۱\pmod{۱۰۰}$$

یا بیش‌تر از $a_{\max}$ است یا کم‌تر از $a_{\min}$ که تناقض است پس $a_{\max}=۹۹$. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که تنها زیرمجموعهٔ‌های تقریبا جمعی دو عضوی یا سه عضوی مجموعه‌های زیر هستند:

$$\{x,۹۹\}\ \forall ۰\leq x\leq ۹۸,\quad \{x,۹۸-x,۹۹\}\ \forall ۰\leq x\leq ۴۸$$

حالا فرض می‌کنیم زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی $\{a_۱,a_۲,\dots,a_k,۹۹\}$ را داشته باشیم که $a_۱<a_۲<\cdots<a_k<۹۹$ و $k\geq ۳$. به‌سادگی به‌دست می‌آید برای هر $۲\leq i\leq k-۱$

$$a_i+a_۱+۱=a_{i+۱},\quad a_k+a_۱+۱=۹۹.$$

با جمع زدن دو طرف همهٔ این روابط به‌دست می‌آید

$$a_۲+(k-۱)a_۱+(k-۱)=۹۹. \qquad (۱)$$

از طرف دیگر واضح است که $۹۹ < a_۲ + a_k + ۱ < ۱۰۰ + a_۲$ پس تنها حالت ممکن این است که

$$a_۲ + a_k + ۱ = ۱۰۰ + a_۱$$

و با کم کردن دو طرف این تساوی از تساوی $a_k + a_۱ + ۱ = ۹۹$ به‌دست می‌آید

$$a_۱ - a_۲ = -a_۱ - ۱ \overset{(۱)}{\Longrightarrow} (k+۱)a_۱ = ۹۹ - k \Longrightarrow k+۱ \mid ۱۰۰\ ,\ a_۱ = \frac{۱۰۰}{k+۱} - ۱$$

پس تعداد اعضای مجموعه باید عاملی از ۱۰۰ باشد و در این‌صورت نیز مجموعه به‌طور یکتا مشخص می‌شود.
می‌توان بررسی کرد که همهٔ مجموعه‌های به‌دست آمده تقریبا جمعی هستند و از آن‌جا که ۱۰۰، هفت عامل بزرگ‌تر از ۳ دارد، پاسخ برابر است با

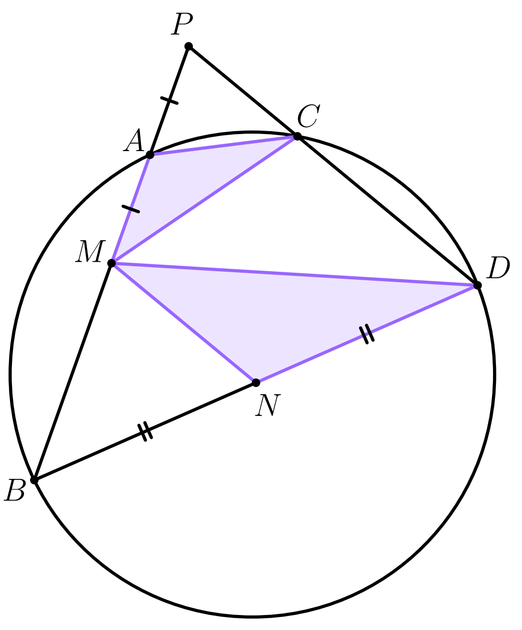
$$۹۹ + ۴۹ + ۷ = ۱۵۵.$$

■

۳۰. وترهای AB و CD از دایرهٔ ω در نقطهٔ P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = ۳AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به‌ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{۳}$ باشد، مقدار $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$　　۲) $۳\sqrt{۳}$　　۳) $\sqrt{۳}$　　۴) $\sqrt{۶}$　　۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.



نشان می‌دهیم $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \frac{DM}{\sqrt{DH'}}$. دقت کنید که

$$\frac{CH}{DH'} = \frac{S_{ACB}}{S_{ADB}} = \frac{AC \cdot CB \sin \angle ACB}{AD \cdot DB \sin \angle ADB} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}$$

پس کافی‌ست ثابت کنیم

$$\frac{CM^۲}{DM^۲} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}. \tag{۱}$$

می‌توان نشان داد (برای اثبات از A و B بر CD عمود کنید)

$$\frac{۱}{۴} = \frac{PA}{PB} = \frac{S_{CAD}}{S_{CBD}} = \frac{AC \cdot AD \sin \angle CAD}{BC \cdot BD \sin \angle CBD} = \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} \tag{۲}$$

با ضرب دو طرف روابط (۱) و (۲) باید ثابت کنیم

$$\frac{AC^۲}{BD^۲} = \frac{CM^۲}{۴DM^۲} \Longrightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CM}{۲DM}$$

وسط BD را N می‌نامیم پس حکم معادل می‌شود با $\frac{AC}{DN} = \frac{CM}{DM}$. برای اثبات حکم معادل تشابه دو مثلث CAM و DNA را نشان می‌دهیم. واضح است که

$$\angle MND = ۱۸۰^\circ - \angle CDB = \angle CAM$$

پس کافی‌ست نشان دهیم

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{ND} \Longleftrightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{PD}{BD}$$

رابطه آخر بنابر تشابه دو مثلث PAC و PDB بدست می‌آید پس حکم ثابت شد. ■

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد ریاضی

سوال ۱

دامنه توابع رادیکال با فرجه فرد، کل اعداد حقیقی و با فرجه زوج، اعداد حقیقی نامنفی است. در نتیجه کافی است داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{۱۲}{x^۲-۲x} \geq ۰ \\ -۱+\sqrt[۳]{-۱+\sqrt{\dfrac{۱۲}{x^۲-۲x}}} \geq ۰ \end{cases}$$

که با توجه به هر دو نامساوی داریم:

$$\frac{۱۲}{x^۲-۲x} \geq ۴ \Leftrightarrow \frac{۳-x^۲+۲x}{x^۲-۲x} \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{(۳-x)(x+۱)}{x(x-۲)} \geq ۰$$

پس در نتیجه دامنه تابع، مجموعه $[-۱,۰) \cup (۲,۳]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

سوال ۲

فرض می‌کنیم جمله اول دنباله a و قدر نسبت دنباله d باشد در این‌صورت جمله k ام برابر است با $a+(k-۱)d$ عدد a را یک عدد گنگ و d را گویا در نظر می‌گیریم. واضح است که همه جملات دنباله گنگ می‌شوند پس در این حالت $n=۰$ است. سپس a را یک عدد گویا و d را عددی گنگ فرض می‌کنیم. برای هر $k>۱$ مقدار $(k-۱)d$ عددی گنگ است پس $a+(k-۱)d$ نیز گنگ است که نتیجه می‌دهد تنها جمله اول دنباله گویا است پس در این حالت $n=۱$ است. حالا فرض می‌کنیم حداقل دو عدد گویا مانند $a+(k-۱)d$ و $a+(l-۱)d$ در دنباله وجود داشته باشد. داریم

$$(k-l)d=(a+(k-۱)d)-(a+(l-۱)d) \in \mathbb{Q} \xrightarrow{k-l\in\mathbb{Q}} d \in \mathbb{Q}$$
$$\xrightarrow{k-۱\in\mathbb{Q}} (k-۱)d \in \mathbb{Q} \Rightarrow a=(a+(k-۱)d)-(k-۱)d \in \mathbb{Q}$$

از آن‌جا که ثابت کردیم a,d هر دو گویا می‌شوند نتیجه می‌شود همه اعضای دنباله گویا هستند پس n فقط سه حالت ۰، ۱ و ۱۳۹۷ را می‌تواند داشته باشد.

سوال ۳

می‌دانیم

$$\overbrace{۹۹\ldots۹}^{۹۷} \times \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷} = \left(۱\overbrace{۰۰\ldots۰}^{۹۷}-۱\right) \times \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷} = \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷}\overbrace{۰۰\ldots۰}^{۹۷} - \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷}$$

$$= \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۶}۵\overbrace{۳۳\ldots۳}^{۹۶}۴$$

که مجموع ارقام عدد حاصل، برابر ۸۷۳ است.

سوال ۴

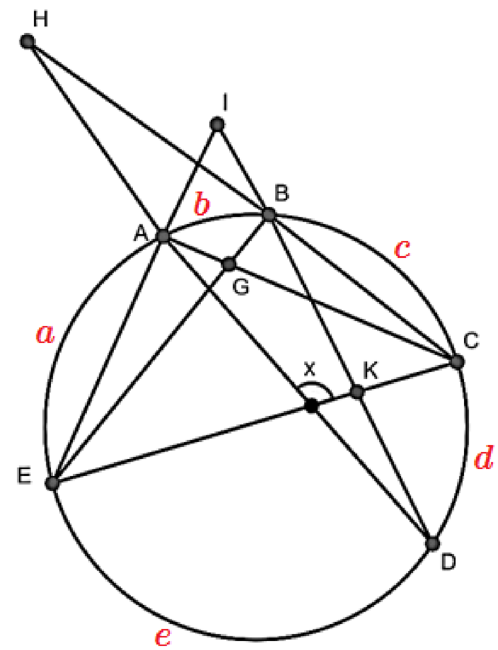
کافیست تعداد کاشی‌کاری‌های کل را از کاشی‌کاری‌های نامطلوب کم کنیم. با توجه به این که امکان ندارد که هم‌زمان هم مسیری از سمت چپ جدول به سمت راست و هم مسیری از ضلع بالای جدول به ضلع پایین آن پدید آید، تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوب دو برابر تعداد کاشی‌کاری‌هایی است که از بالا به پایین مسیری ایجاد شده‌است. برای محاسبه تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوب نیز کافیست تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوبی که به ترتیب یک مسیر، دو مسیر و سه مسیر از بالا به پایین ایجاد می‌شود را محاسبه نماییم.

$$۲^{۹} - ۲(۳ \times (۷ \times ۷) + ۳ \times ۷ + ۱) = ۱۷۴$$

سوال ۵

عدد دو رقمی $\overline{ab} = ۱۰a + b$ را در نظر می‌گیریم که در شرط سوال صدق می‌کند. طبق فرض سوال باید داشته باشیم $a|۱۰a + b$ و $b|۱۰a + b$. از آن‌جا که $a|۱۰a$ طبق قضایای بخش‌پذیری نتیجه می‌شود $a|b$ و به طور مشابه از آن‌جا که $b|b$ نتیجه می‌شود $b|۱۰a$ از رابطه $a|b$ بدست می‌آید عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری‌که $b = ka$ و با قرار دادن این تساوی در رابطه بخش‌پذیری دیگر بدست می‌آید $ka|۱۰a$ در نتیجه $k|۱۰$ می‌دانیم $b < ۱۰$ پس $ka < ۱۰$. اگر $k = ۱$ برای a، ۹ حالت وجود دارد و b نیز به طور یکتا از روی است می‌آید. اگر $k = ۲$ باید داشته باشیم $۲a < ۱۰$ پس a دو حالت دارد و در نهایت اگر $k = ۵$ باید داشته باشیم $۵a < ۱۰$ پس a تنها یک حالت دارد و پاسخ مسئله برابر است با $۹ + ۴ + ۱ = ۱۴$.

سوال ۶



مطابق شکل، کمان‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم. با توجه به فرض‌های سوال، روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} d-b=۲۰^\circ & (۱)\\ e-b=۱۴۰^\circ & (۲)\\ b+d+e=۱۹۰^\circ & (۳)\\ a+b+d=۱۴۰^\circ & (۴)\end{cases}$$

همچنین واضح است که داریم:

$$a+b+c+d+e=۳۶۰^\circ \quad (۵)$$

برای یافتن مقدار زاویه x، باید مقدار عبارت $b+c+e$ را بدست آوریم.

از تفاضل روابط (۵) و (۴) داریم:

$$(۵)-(۴) \quad \Rightarrow \quad c+e=۲۲۰^\circ$$

همچنین روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$(۳)+(۱) \quad \Rightarrow \quad ۲d+e=۲۱۰^\circ$$
$$(۳)+(۲) \quad \Rightarrow \quad d+۲e=۳۳۰^\circ$$

سپس از مجموع این دو رابطه داریم: $d+e=۱۸۰^\circ$.

اکنون از رابطه (۳) مقدار b بدست می‌آید: $b=۱۰^\circ$. پس داریم:

$$x=\frac{b+c+e}{۲}=\frac{۲۳۰^\circ}{۲}=۱۱۵^\circ$$

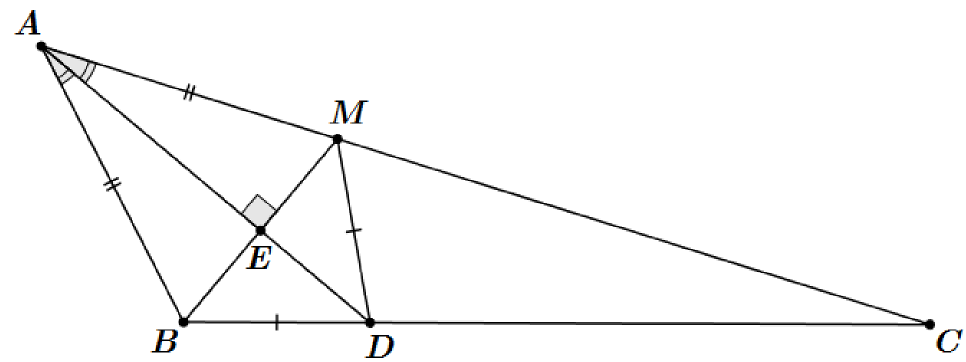
سوال ۷

به سادگی می‌توان دید که $a_۷=۷$. بنابراین ما $\binom{۶}{۳}$ حالت برای انتخاب ۳ عدد $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ داریم که این‌ها را می‌توان به دو طریق طبق شرایط سوال در جایگشت قرار داد. همچنین ۳ عدد $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$ نیز به طور یکتا مشخص شده که به دو طریق می‌توان آن‌ها را در جایگشت قرار داد. به طریق مشابه بقیه جایگاه‌های جایگشت نیز پر می‌شوند که جواب برابر است با

$$\left(\binom{۶}{۳}\times ۲\times ۲\right)^۲=۶۴۰۰$$

سوال ۸

از آنجا که نیمساز AD بر BM عمود است، در مثلث ABM، ارتفاع و نیمساز بر هم منطبق شده‌اند و در نتیجه مثلث ABM متساوی‌الساقین است و همچنین بدست می‌آید که خط AD عمودمنصف پاره‌خط BM می‌باشد.



با توجه به هم‌نهشتی مثلث‌های ABE و AME و همچنین مثلث‌های BDE و MDE، مساحت این مثلث‌ها را به ترتیب $S_۱$ و $S_۲$ می‌نامیم. چون $\frac{AM}{CM}=\frac{۱}{۲}$ است، می‌توانیم نسبت مساحت‌های زیر را بدست آوریم:

$$\frac{AM}{CM}=\frac{S_{ADM}}{S_{CDM}}=\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{۱}{۲}$$

اکنون مساحت این مثلث‌ها را بر حسب $S_۱$ و $S_۲$ بازنویسی می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$S_{CDM}=۲S_{ADM}=۲(S_۱+S_۲) \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{۲S_۱}{۲S_۱+۴S_۲}=\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad S_۱=۲S_۲$$

پس داریم:

$$\left.\begin{aligned} S_{BMD}&=۲S_۲ \\ S_{ABC}&=۴S_۱+۴S_۲=۱۲S_۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BMD}}=۶$$

سوال ۹

با توجه به رشد سمت چپ معادله، x نمی‌تواند از ۲− کمتر و یا بیشتر مساوی ۴ شود. پس در نتیجه مجموعه اعداد $[-۲,۴)$ را بازه‌بندی می‌کنیم:

$$۱)\ x\in[-۲,-۱) \ \Rightarrow (-۲)(x-۱)=-۲x$$

معادله جواب ندارد.

$۲)\ x \in [-۱,۰) \Rightarrow (-۱)(x-۱) = -۲x \Rightarrow x = -۱$

با توجه به بازه x قبول است.

$۳)\ x \in [۰,۱) \Rightarrow (۰)(x-۱) = ۲x \Rightarrow x = ۰$

با توجه به بازه x قبول است.

$۴)\ x \in [۱,۲) \Rightarrow (۱)(x-۱) = ۲x \Rightarrow x = -۱$

با توجه به بازه x قبول نیست.

$۵)\ x \in [۲,۳) \Rightarrow (۲)(x-۱) = ۲x$

معادله جواب ندارد.

$۶)\ x \in [۳,۴) \Rightarrow (۳)(x-۱) = ۲x \Rightarrow x = ۳$

با توجه به بازه x قبول است.

پس معادله اصلی دارای سه جواب حقیقی است.

سوال ۱۰

برای $n = ۴$ می‌توانیم اعداد ۲،۴،۷ و ۹ را در نظر بگیریم که در شرایط سوال صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم ۵ عدد $a_۱ < a_۲ < a_۳ < a_۴ < a_۵$ وجود داشته باشد که اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها عددی اول باشد. می‌توانیم فرض کنیم $a_۵$ زوج است زیرا اگر همه اعداد را با ۱ جمع کنیم اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها تغییری نمی‌کند اما زوجیت $a_۵$ تغییر می‌کند. اختلاف $a_۵$ و $a_۲$ حداقل ۳ است پس $a_۲$ فرد است زیرا در غیر این‌صورت اختلاف آن‌ها باید برابر با ۲ می‌شد. به طور مشابه $a_۱$ نیز فرد است. اگر $a_۳$ زوج باشد نتیجه می‌شود $a_۵ - a_۳ = ۲$ پس بین $a_۵$ و $a_۳$ فقط یک عدد طبیعی وجود دارد و آن باید $a_۴$ باشد اما این امکان ندارد زیرا اختلاف $a_۵$ و $a_۴$ برابر با ۱ می‌شود. پس $a_۳$ نیز فرد است. حالا دقت کنید که زوجیت $a_۱$ و $a_۳$ یکسان است و مشابه قبل می‌توانیم به تناقض برسیم پس $n < ۵$ و پاسخ مسئله $n = ۴$ است.

سوال ۱۱

چندضلعی که رئوس آن با مختصات صحیح باشند را « *چندضلعی شبکه‌ای*» می‌نامیم.

تعداد نقاط با مختصات صحیح روی مرز (محیط) یک چندضلعی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی آن را با i نشان می‌دهیم.

طبق **قضیه پیک**، مساحت چندضلعی شبکه‌ای (محدب یا مقعر) از رابطه $S = i + \frac{b}{۲} - ۱$ بدست می‌آید.

در نتیجه با توجه به اینکه حداقل ۵ نقطه روی مرز این چندضلعی شبکه‌ای قرار دارد و مساحت آن نیز برابر ۷ است، داریم:

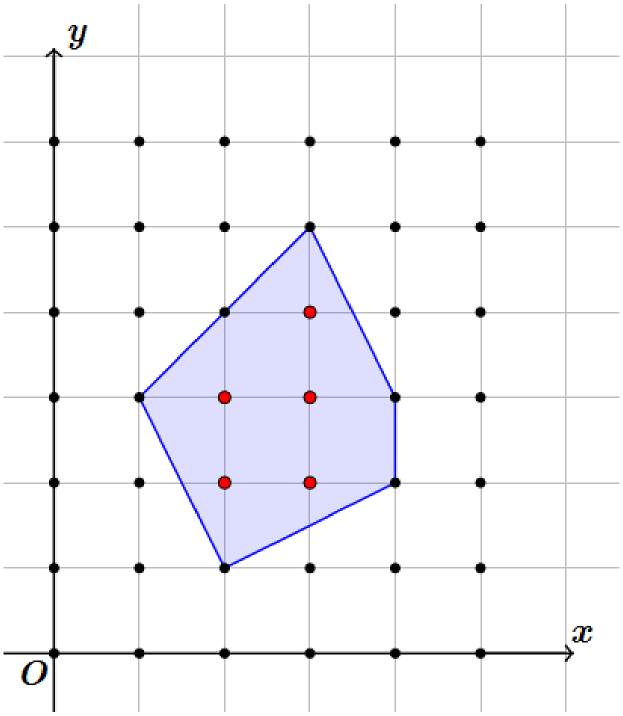
$$b \geq ۵ \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{۲} - ۱ \geq \frac{۳}{۲}$$

پس بدست می‌آید که

$$i = S - (\frac{b}{۲} - ۱) \leq ۷ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱۱}{۲}$$

با توجه به فرض‌های مساله، حداکثر ۵ نقطه درون این شکل قرار دارد.

برای اطمینان از این پاسخ، باید مثالی ارائه کنیم که در شکل مقابل، دیده می‌شود.



سوال ۱۲

می‌توانیم این اعداد رابه ۳۸۳ دسته مانند زیر تقسیم کنیم.

$$\{۷۶۵\}, \{۱,۷۶۴\}, \{۲,۷۶۳\}, \dots, \{۳۸۲,۳۸۳\}$$

بدیهی است که از یک دسته بیش از یک عضو نمی‌توان انتخاب کرد. چرا که مجموع آن‌ها برابر ۷۶۵ خواهد شد. همچنین تعدادی دسته هستند که از آن‌ها هیچ عضوی نمی‌توان برداشت چرا که هر دو عضو آن‌ها مربع کامل هستند. دسته ای مانند $\{a^۲, b^۲\}$ را در نظر بگیرید که هر دو عضو آن مربع کامل باشد. داریم:

$$\begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۷۶۵ \\ ۳ | a^۲ + b^۲ \end{cases} \rightarrow ۳|a\,, ۳|b$$

فرض کنید که $a'^۲ = \frac{a^۲}{۹}$ و $b'^۲ = \frac{b^۲}{۹}$. آنگاه خواهیم داشت که $a'^۲ + b'^۲ = ۸۵$. پس مقدار $(a'^۲, b'^۲)$ تنها دو حالت مختلف خواهد داشت. پس تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$۳۸۳ - ۲ = ۳۸۱$$

سوال ۱۳

ثابت می‌کنیم برای هر $a \leq \frac{۱}{۲}$ که $a \neq 0$، تابع f یک‌به‌یک است و برای سایر مقادیر a یک‌به‌یک نیست.

فرض کنید تابع f یک‌به‌یک نباشد. بنابراین x و y وجود دارند که $f(x)=f(y)$ و $x \neq y$. اکنون دو حالت می‌تواند رخ دهد:

حالت اول: $[x]=[y]$. در این حالت نتیجه می‌شود $ax=ay$ و چون $x \neq y$ پس $a = ۰$.

حالت دوم: $[x]>[y]$. در این حالت $ax-ay=[x]-[y]$. از طرفی از آنجا که $x < [x] + ۱$ و $y \geq [y]$ داریم $x - y < [x] - [y] + ۱$ پس

$$a = \frac{[x]-[y]}{x-y} > \frac{[x]-[y]}{[x]-[y]+۱} = ۱ - \frac{۱}{[x]-[y]+۱}$$

حال چون $[x]$ و $[y]$ اعداد صحیح هستند پس $[x]-[y] \geq 1$ که از آن نتیجه می‌شود $a > \frac{۱}{۲}$.

پس اگر $a \leq \frac{۱}{۲}$ و $a \neq ۰$ هیچ یک از دو حالت فوق نمی‌تواند رخ دهد و در نتیجه تابع f یک‌به‌یک است.

حالت سوم: $[x]<[y]$. این حالت کاملاً مشابه حالت دوم است.

حال ثابت می‌کنیم برای سایر مقادیر a تابع f یک‌به‌یک نیست. در این قسمت نیز سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $a = ۰$. در این حالت $f(x)=-[x]$ که به وضوح یک‌به‌یک نیست.

حالت دوم: $۱ \geq a > \frac{۱}{۲}$. در این حالت داریم $f(\frac{۱}{a}) = ۱ - [\frac{۱}{a}] = ۱ - ۱ = ۰$. پس $f(\frac{۱}{a}) = f(۰)$ و در نتیجه تابع یک‌به‌یک نیست.

حالت سوم: $a > ۱$. در این حالت داریم $f(-\frac{۱}{a}) = -۱ + ۱ = ۰ = f(۰)$ و در نتیجه تابع یک‌به‌یک نیست.

بنابراین مقادیر مطلوب سؤال عبارتند از $\{-\frac{۵}{۵}, -\frac{۴}{۵}, -\frac{۳}{۵}, -\frac{۲}{۵}, -\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵}\}$ و در نتیجه جواب سؤال برابر است با ۷.

سوال ۱۴

مسئله به خاطر حالت های فراوان، مسئله ای پیچیده به نظر می آید! زیرا n می تواند تعداد ارقام فراوانی داشته باشد، هر میزان کوچک یا بزرگ باشد و ما باید همه حالت ها را تحلیل کنیم. در چنین مسائلی که حالت ها زیاد است و نمی دانیم از کجا شروع کنیم، چگونه می توانیم به فرآیند کشف و حل نزدیک شویم و مانند یک کارآگاه مسئله را مجبور سازیم تا خود، رازهایش را برایمان تدریجاً فاش کند؟!

پیشنهاد بنده همیشه یک چیز است: مثال زدن و بررسی حالات کوچک تر و ساده تر مسئله! استراتژی ای که به زعم بنده در درصد بزرگی از مسائل جواب می دهد: چه مسئله مرحله اول باشد، چه مسئله مرحله دوم و چه سؤال المپیاد جهانی!

پس بیایید مثال های ساده تر را ابتدا بررسی کنیم:

ساده ترین حالت، زمانی است که n، تک رقمی باشد. در این صورت، $S(n)=P(n)=n$ پس $S(n)+P(n)=2n\neq n$ و در این حالت جوابی وجود ندارد.

حالت کمی پیچیده تر، زمانی است که n، دورقمی باشد. در این صورت، اگر $n=\overline{xy}$، پس:

$$n=10x+y \text{ و } S(n)+P(n)=x+y+xy$$

در نتیجه رابطه $S(n)+P(n)=n$ معادل است با این رابطه:

$$xy+x+y=10x+y \Leftrightarrow xy=9x \Leftrightarrow y=9$$

پس دقیقا اعداد به فرم $\overline{x9}$ در بین اعداد دو رقمی جواب مسئله هستند که تعدادشان دقیقاً ۹ تا عدد است.

حال می رویم سراغ اعداد سه رقمی مثل $n=\overline{xyz}$:

$$n=100x+10y+z \text{ و } S(n)=x+y+z \text{ و } P(n)=xyz$$

پس رابطه $S(n)+P(n)=n$ به صورت زیر در می آید:

$$xyz+x+y+z=100x+10y+z \Leftrightarrow$$

$$xyz=99x+9y$$

با دقت در نتیجه به دست آمده می توان فهمید که تساوی ذکر شده ایراد دارد، چون طرف راست بیشتر از طرف چپ است! جمله مؤثر در این ادعا جمله بزرگتر است یعنی $99x$. دقت کنید که خود این جمله به تنهایی از کل عبارت طرف چپ بزرگتر است؛ زیرا:

$$99x>xyz \Leftrightarrow 99>yz$$

و می دانیم y و z هر کدام حداکثر ۹ هستند، پس:

$$yz\leq 9\times 9=81<99$$

پس تساوی ذکر شده و در نتیجه خاصیت $S(n)+P(n)=n$ برای یک عدد سه رقمی n یک خاصیت تناقض آمیز است و جوابی ندارد، چون n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است.

آیا استدلالی مشابه برای اعداد با تعداد ارقام بیشتر کار می کند و می توان گفت رابطه مسئله برای اعداد حداقل سه رقمی، یک رابطه تناقض آمیز است، چون n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است؟! سعی می کنیم مشابه روند استدلال اعداد سه رقمی را امتحان کنیم تا ببینیم تناقض را می توان حاصل کرد یا نه! برای این کار فرض کنید $n=\overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0}$ یک عدد k رقمی طبیعی است که $k\geq 3$. داریم:

$$n = ۱۰^{k-۱}a_{k-۱} + \cdots + ۱۰a_۱ + a_۰$$

$$S(n) = a_{k-۱} + a_{k-۲} + \cdots + a_۰ \quad \text{و} \quad P(n) = a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۱a_۰$$

پس رابطه $S(n)+P(n)=n$ به صورت زیر در می آید:

$$a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۱a_۰ + a_{k-۱} + a_{k-۲} + \cdots + a_۰ = ۱۰^{k-۱}a_{k-۱} + \cdots + ۱۰a_۱ + a_۰$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۰ = (۱۰^{k-۱} - ۱)a_{k-۱} + (۱۰^{k-۲} - ۱)a_{k-۲} + \cdots + (۱۰ - ۱)a_۱$$

مشابهاً به نظر می رسد که طرف راست از طرف چپ بیشتر است! حتی مانند قبل می توان گفت جمله $(۱۰^{k-۱} - ۱)a_{k-۱}$ از طرف راست بیشتر است، زیرا:

$$a_{k-۲}\cdots a_۰ \leq ۹ \times ۹ \times \cdots \times ۹ = ۹^{k-۱} < ۱۰^{k-۱} - ۱$$

(چون $k \geq ۳$ نامساوی بالا به راحتی ثابت می شود)

پس داریم:

$$a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۰ < (۱۰^{k-۱} - ۱)a_{k-۱}$$

(دقت کنید که چون عدد kرقمی است پس $a_{k-۱} \neq ۰$)

پس کاملاً مشابه حالت سه رقمی ثابت می شود که طرف راست از چپ بیشتر است و در نتیجه برای n حداقل سه رقمی، n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است و در تساوی مورد نظر مسئله صدق نمی کند. مشاهده نمودید که در روند طی شده راز مسئله تدریجاً افشا شد و حالا همه چیز به طور کامل ثابت شده است!

پس مسئله کلاً ۹ تا جواب دورقمی دارد و هیچ جواب متفاوتی با تعداد ارقام دیگر ندارد. در نتیجه پاسخ مسئله ۹ است.

سوال ۱۵

خط BM را امتداد دهید تا CD را در نقطهٔ E قطع کند. با توجه به این که $MD = \frac{۱}{۲}BC$، از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که $ED = \frac{۱}{۲}EC$ و $EM = \frac{۱}{۲}EB$. چون دایرهٔ مذکور دایرهٔ محاطی داخلی مثلث BCE است، داریم $BP = \frac{۱}{۲}(BC + BE - CE)$. از طرف دیگر، از فرض $MP = BC$ نتیجه می‌شود که $BP = \frac{۱}{۲}BE - BC$. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}(BC + BE - CE) = \frac{۱}{۲}BE - BC$$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم $CE = ۳BC$ و در نتیجه $CD = \frac{۳}{۲}BC$.

سوال ۱۶

از بین ۲ و۳ حداقل یک نفر دروغ‌گوست پس ۳ دروغ‌گوست. اگر ۴ راست‌گو باشد همه جز ۳ راست می‌گویند که اما ۲و۴ سازگار نیستند. پس ۴ نیز دروغ‌گوست. پس ۲ راست‌گوست. پس ۵ هم دروغ‌گوست چون اگر راستگو باشد دو راستگو حداقل داریم پس دروغ گفته است. اگر نفر اول دروغ‌گو باشد دقیقا ۱ راست‌گو داریم پس ۵ راست گفته که تناقض است. پس ۱ هم راست‌گوست. پس دقیقا ۳ دروغ‌گو و مجرم داریم.

سوال ۱۷

با توجه به اینکه $x=۰$ جزو دامنه‌ی نمودار نیست پس گزینه ۲ صحیح نیست. از طرفی از آنجا که $x=\pi\approx ۳.۱۴$ جزو دامنه است و مقدار تابع در آن مثبت است پس گزینه‌های ۳ و ۴ نیز صحیح نیستند. از طرفی تابع X^x برای $x>۱$ تابعی صعودی است ولی نمودار سؤال این طور نیست. پس گزینه‌ی ۱ نیز صحیح نیست و در نتیجه گزینه ۵ صحیح است.

سوال ۱۸

داریم $A\widehat{N}M=\hat{A}-۹۰=\hat{C}$. بنابراین دو مثلث قائم الزاویهٔ CMP و NMA متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{CM}{MP}=\frac{MN}{AM}\ \Rightarrow\ CM.AM=MN.MP=۲MN^۲$$

با فرض $AO=CO=x$ و $OM=y$، خواهیم داشت $CM=x-y$ و $AM=x+y$ بنابراین

$$(x+y)(x-y)=۲\times MN^۲\ \Rightarrow\ x^۲-y^۲=۲MN^۲$$

از طرف دیگر طبق قضیهٔ فیثاغورث در مثلث OMN داریم $y^۲=OM^۲-MN^۲$. پس طبق تساوی فوق داریم

$$x^۲=y^۲+۲MN^۲=OM^۲+MN^۲=۲۰^۲+۲۱^۲=۸۴۱$$

بنابراین $x=\sqrt{۸۴۱}=۲۹$ و در نتیجه $AC=۲x=۵۸$.

سوال ۱۹

رابطه $a_{n+۱}=\frac{{a_n}^۲}{a_{n-۱}}$ معادل است با رابطه $a_n^۲=a_{n-۱}a_{n+۱}$ ؛ یعنی هر جمله از دنباله، میانگین هندسی جمله قبل و بعد از خود است. این امر خود گزاره معروفی معادل با این است که دنباله، تصاعد هندسی باشد؛ زیرا رابطه را می توان تبدیل کرد به:

$$\frac{a_n}{a_{n-۱}}=\frac{a_{n+۱}}{a_n}\,(n\geq ۲)$$

پس کل روابط معادل است با:

$$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\frac{a_۴}{a_۳}=\dots$$

به این معنی که اگر نسبت ثابت را q بنامیم، هر جمله از حاصلضرب q در جمله قبلی دنباله به دست آید که معادل با تصاعد هندسی بودن دنباله است.

پس سوال در واقع این است که چند تصاعد هندسی نامتناهی در اعداد طبیعی وجود دارد که $a_۳=۵۴۰۰۰$ ؟

دنباله ما به فرم زیر است:

$$a_۱,a_۱q,a_۱q^۲,\dots$$

دقت کنید که $a_1\in\mathbb{N}$، اما نمی توانیم در ابتدا مطمئن باشیم که $q\in\mathbb{N}$! در واقع q نسبت دو عدد طبیعی است پس می توان گفت برابر با کسری ساده شده مثل $\frac{r}{s}$ است $(r,s\in\mathbb{N},(r,s)=۱)$ حال توجه کنید که برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $a_۱q^n=a_۱\left(\frac{r}{s}\right)^n$ عددی طبیعی است؛ پس:

$$\left.\begin{matrix} s^n|ar^n \\ (s^n,r^n)=۱ \end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{اقلیدس}]{} s^n|a$$

اگر $s>۱$ آن گاه به ازای n به اندازه کافی بزرگ $s^n>a$ ، پس s^n نمی تواند a را عاد کند که تناقض است. پس $s=۱$ و در نتیجه $q\in\mathbb{N}$. حال توجه کنید که $a_۱q^۲=a_۳=۵۴۰۰۰$ پس q یک عدد طبیعی است که $q^۲|۵۴۰۰۰$ و $a_۱$ هم به صورت یکتا از روی q به دست می آید $(a_۱=\frac{۵۴۰۰۰}{q^۲})$ و همه اعضای دنباله به طور یکتا از روی $a_۱$ و q تعیین می شوند. هم چنین توجه کنید که اگر q عدد طبیعی دلخواهی با شرط $q^۲|۵۴۰۰۰$ باشد و با توجه به رابطه ذکر شده $a_۱$ را از روی آن تعیین کنیم، آنگاه چون a_1 و q طبیعی هستند، همه اعضای دنباله ای که از روی آن ها به صورت $a_n=a_۱q^{n-۱}(n\in\mathbb{N})$ ساخته می شود، طبیعی می شود. هر دنباله به صورت یکتا از روی q تعیین می شود و هر دو دنباله ای که مقدار q برای آن ها متفاوت باشد، چون مقدار $a_۱$ هم متفاوت می شود، با هم متمایز می شوند. پس تعداد دنباله های موردنظر مسئله برابر است با تعداد اعداد طبیعی q با شرط $q^۲|۵۴۰۰۰$.

حال توجه کنید که $۵۴۰۰۰=۲^۴\times۳^۳\times۵^۳$؛ پس $q=۲^\alpha\times۳^\beta\times۵^\gamma$ طوری که: $۲^{۲\alpha}\times۳^{۲\beta}\times۵^{۲\gamma}|۲^۴\times۳^۳\times۵^۳$

در نتیجه: $۰\le\alpha\le۲$ ، $۰\le\beta\le۱$ و $۰\le\gamma\le۱$. در نتیجه تعداد مقادیر ممکن برای q،

$$۳\times۲\times۲=۱۲$$

است.

سوال ۲۰

به هر زیر مجموعه ناتهی $S \subseteq \{۱, \dots ,۱۳۹۷\}$ زیر مجموعه $۱۳۹۸ - S = \{۱۳۹۸ - x | x \in S\}$ را جفت می‌کنیم. (زیرمجموعه های قرینه دسته های تکی تشکیل می‌دهند و بقیه دسته های دو تایی تشکیل می‌دهند) میانگین میانگین های مجموعه‌های هر دسته برابر ۶۹۹ می‌شود. پس میانگین کل ۶۹۹ می‌شود.

سوال ۲۱

متغیرهای جدید x و y را به این صورت تعریف می‌کنیم.

$$x = a + b$$
$$y = a - b$$

اکنون می‌توانیم معادلات مسأله را به این صورت بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} x^۳ = ۲y \\ ۳y^۲ = x^۲ - y^۲ \end{cases}$$

معادله‌ی دوم نتیجه می‌دهد $x^۲ = ۴y^۲$ که از معادله‌ی اول نتیجه می‌دهد $x^۲ = x^۶$. بنابر این x سه مقدار ممکن ۰ و ۱ و ۱− را دارد و مقادیر متناظر y به ترتیب برابر است با ۰ و $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$.

بنابراین سه زوج مرتب (a, b) به دست می‌آیند: $(۰,۰)$ و $(\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴})$ و $(-\frac{۳}{۴}, -\frac{۱}{۴})$.

بنابراین جواب صحیح ۳ است و گزینه‌ی ۴ صحیح است.

سوال ۲۲

در چهارضلعی $PYCZ$ دو زاویه روبرو قائمه هستند. پس این چهارضلعی محاطی است. دایرهٔ محیطی آن را $W_۱$ بنامید. به طور مشابه چهارضلعی $PXBZ$ نیز محاطی است و دایرهٔ محیطی آن را $W_۲$ بنامید. از متساوی الساقین بودن مثلث نتیجه می‌گیریم که $\hat{B} = \hat{C} = ۷۰$. بنابراین $Y\hat{Z}X = Y\hat{C}Z$. در نتیجه زاویهٔ $Y\hat{Z}X$ یک زاویهٔ ظلی برای دایرهٔ $W_۱$ است و بنابراین XZ در نقطهٔ Z بر $W_۱$ مماس است. به طور مشابه YZ در نقطهٔ Z بر $W_۲$ مماس است. حال با در نظر گرفتن کمان PZ در دو دایره نتیجه می‌گیریم $P\hat{Z}X = P\hat{Y}Z$ و $P\hat{X}Z = P\hat{Z}Y$. بنابراین دو مثلث PXZ و PZY متشابه هستند. پس خواهیم داشت

$$\frac{PX}{PZ} = \frac{PZ}{PY} \Rightarrow PZ^۲ = PX.PY = ۲ \times ۴ = ۸$$

بنابراین $PZ = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$.

سوال ۲۳

برای بررسی این مسئله، ابتدا باید شرایط مساوی شدن کد دو استاد را تحلیل کنیم.

فرض کنید دو استاد با شماره های متفاوت m و n ، کد یکسانی پیدا کنند. در این صورت $m+i$ و $n+i$ $(۱ \leq i \leq ۴)$ عامل اول مشترکی دارند مثل p_i (توجه کنید بعضی از این اعداد p_i می توانند برابر باشند.)

$$\left.\begin{matrix} p_i | m+i \\ p_i | n+i \end{matrix}\right\} \rightarrow p_i | m-n$$

پس $m-n$ مضرب $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ است. حال سؤال این جاست که حداقل چند تا از اعداد $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ متمایزند؟ برای پاسخ این سؤال ابتدا دقت کنید که امکان ندارد که همه این اعداد برابر باشند چون $m+۱$ و $m+۲$ نسبت به هم اولند و عامل اول مشترک ندارند. هم چنین اگر اعداد $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ ، فقط از دو مقدار تشکیل شده باشند، در این صورت چون هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند پس $p_۱ \neq p_۲$ و $p_۲ \neq p_۳$ پس $p_۱ = p_۳$ و به طریق مشابه $p_۲ = p_۴$؛ در نتیجه :

$$\left.\begin{matrix} p_۱ | m+۱ \\ p_۱ | n+۳ \end{matrix}\right\} \rightarrow p_۱ | ۲ \rightarrow p_۱ = ۲$$

$$\left.\begin{matrix} p_۲ | m+۲ \\ p_۲ | n+۴ \end{matrix}\right\} \rightarrow p_۲ | ۲ \rightarrow p_۲ = ۲$$

که با $p_۱ \neq p_۲$ در تضاد است. پس $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ حداقل شامل سه مقدار هستند و در نتیجه $m-n$ مضرب حداقل سه عدد اول متمایز مثل p و q و r است. پس $pqr \mid m-n$ و در نتیجه $|m-n| \geq pqr$ و چون pqr برابر با حاصلضرب سه عدد اول متمایز است، داریم:

$$pqr \geq ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$$

و در نتیجه $|m-n| \geq ۳۰$.

پس اگر فاصله هر دو شماره از اساتید کمتر از ۳۰ باشد، کد هیچ دو استادی برابر نمی شود و در نتیجه اگر دانشکده حداکثر ۳۰ استاد داشته باشد، این اتفاق می افتد.

بنابراین، ۳۰ تعداد مناسبی برای اساتید دانشکده است که خواسته مسأله را برآورده می کند؛ اما مسئله تمام نشده است! آیا ۳۰ دقیقا حداکثر مقدار ممکن است؟ اگر نشان دهیم، در صورتی که دانشکده حداقل ۳۱ استاد داشته باشد، آن گاه حتما دو استاد دانشکده وجود دارند که می توانند کد برابر انتخاب کنند، کار تمام است! دقت کنید که طبق استدلال هی قبل می دانیم فاصله شماره آن دو استاد باید حداقل ۳۰ باشد. پس تنها انتخاب ما اگر بخواهیم برای حداقل ۳۱ استاد دو کد برابر پیدا کنیم استاد شماره ۱ و ۳۱ است. اگر نشان دهیم این دو استاد می توانند کد برابر انتخاب کنند، کار تمام است. توجه کنید که استاد شماره ۱ می تواند کد ۲،۳،۴ و ۵ را انتخاب کند و اتفاقا استاد شماره ۳۱ هم می تواند چنین کدی را انتخاب کند! پس واقعاً کار تمام است و پاسخ مسئله برابر با ۳۰ است.

سوال ۲۴

برای هر b ماکزیمم و مینیمم $a^۲ - ab + b^۲$ را به ازای $۰ \le a \le ۳$ به ترتیب M_b و m_b می‌نامیم.

تابع فوق نسبت به a یک تابع درجه دوم است که ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم آن مثبت است. پس مقدار ماکزیمم آن روی هر بازه در یکی از دو انتهای بازه رخ می‌دهد و مقدار مینیمم آن به ازای همه‌ی مقادیر a در نقطه‌ی $a = \frac{b}{۲}$ رخ می‌دهد و چون $۱ \le b \le ۲$ پس این نقطه در بازه‌ی $[۰,۳]$ نیز هست. بنابراین $m_b = \frac{۳b^۲}{۴}$ و $M_b = \max\{b^۲, ۹ - ۳b + b^۲\}$ که مجدداً از آنجا که $۱ \le b \le ۲$، پس $M_b = ۹ - ۳b + b^۲$.

اکنون داریم

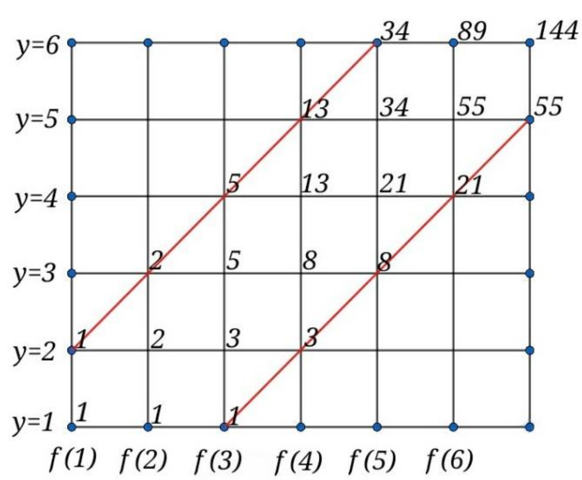
$$M = \max_{۱\le b\le ۲} M_b = \max_{۱\le b\le ۲}(۹ - ۳b + b^۲) = ۷$$

$$m = \min_{۱\le b\le ۲} m_b = \min_{۱\le b\le ۲} \frac{۳b^۲}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

پس $۴(M - m) = ۲۵$ و در نتیجه جواب صحیح ۲۵ است.

سوال ۲۵

هر تابع مطلوب در تناظر با یکی از کوتاهترین مسیرها از نقطه پایین چپ به بالا راست از جدول زیر است که همواره بین دو خط مورب مشخص شده بماند. (ارتفاعی که از ستون i ام به ستون $i + ۱$ ام می‌رود $f(i)$ است). روی هر نقطه مجاز تعداد مسیر های ممکن رسیدن به آن نوشته شده است که به صورت بازگشتی جمع نقاط مجازی است که گام قبل می‌توانسته باشد.



پاسخ‌نامه تشریحی آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد ریاضی

سوال ۱

دامنه توابع رادیکال با فرجه فرد، کل اعداد حقیقی و با فرجه زوج، اعداد حقیقی نامنفی است. در نتیجه کافی است داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{۱۲}{x^{۲}-۲x} \geq ۰ \\ -۱+\sqrt[۳]{-۱+\sqrt{\dfrac{۱۲}{x^{۲}-۲x}}} \geq ۰ \end{cases}$$

که با توجه به هر دو نامساوی داریم:

$$\frac{۱۲}{x^{۲}-۲x} \geq ۴ \Leftrightarrow \frac{۳-x^{۲}+۲x}{x^{۲}-۲x} \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{(۳-x)(x+۱)}{x(x-۲)} \geq ۰$$

پس در نتیجه دامنه تابع، مجموعه $[-۱,۰) \cup (۲,۳]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

سوال ۲

فرض می‌کنیم جمله اول دنباله a و قدر نسبت دنباله d باشد در این‌صورت جمله k ام برابر است با $a+(k-۱)d$ عدد a را یک عدد گنگ و d را گویا در نظر می‌گیریم. واضح است که همه جملات دنباله گنگ می‌شوند پس در این حالت $n=۰$ است. سپس a را یک عدد گویا و d را عددی گنگ فرض می‌کنیم. برای هر $k>۱$ مقدار $(k-۱)d$ عددی گنگ است پس $a+(k-۱)d$ نیز گنگ است که نتیجه می‌دهد تنها جمله اول دنباله گویا است پس در این حالت $n=۱$ است. حالا فرض می‌کنیم حداقل دو عدد گویا مانند $a+(k-۱)d$ و $a+(l-۱)d$ در دنباله وجود داشته باشد. داریم

$$(k-l)d = (a+(k-۱)d)-(a+(l-۱)d) \in \mathbb{Q} \xrightarrow{k-l\in\mathbb{Q}} d \in \mathbb{Q}$$
$$\xrightarrow{k-۱\in\mathbb{Q}} (k-۱)d \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = (a+(k-۱)d)-(k-۱)d \in \mathbb{Q}$$

از آن‌جا که ثابت کردیم a,d هر دو گویا می‌شوند نتیجه می‌شود همه اعضای دنباله گویا هستند پس n فقط سه حالت ۰، ۱ و ۱۳۹۷ را می‌تواند داشته باشد .

سوال ۳

می‌دانیم

$$\overbrace{۹۹\ldots۹}^{۹۷} \times \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷} = \left(۱\overbrace{۰۰\ldots۰}^{۹۷}-۱\right) \times \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷} = \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷}\overbrace{۰۰\ldots۰}^{۹۷} - \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷}$$

$$= \overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۶}۵\overbrace{۳۳\ldots۳}^{۹۶}۴$$

که مجموع ارقام عدد حاصل، برابر ۸۷۳ است.

سوال ۴

کافیست تعداد کاشی‌کاری‌های کل را از کاشی‌کاری‌های نامطلوب کم کنیم. با توجه به این که امکان ندارد که هم‌زمان هم مسیری از سمت چپ جدول به سمت راست و هم مسیری از ضلع بالای جدول به ضلع پایین آن پدید آید، تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوب دو برابر تعداد کاشی‌کاری‌هایی است که از بالا به پایین مسیری ایجاد شده‌است. برای محاسبه تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوب نیز کافیست تعداد کاشی‌کاری‌های نامطلوبی که به ترتیب یک مسیر، دو مسیر و سه مسیر از بالا به پایین ایجاد می‌شود را محاسبه نماییم.

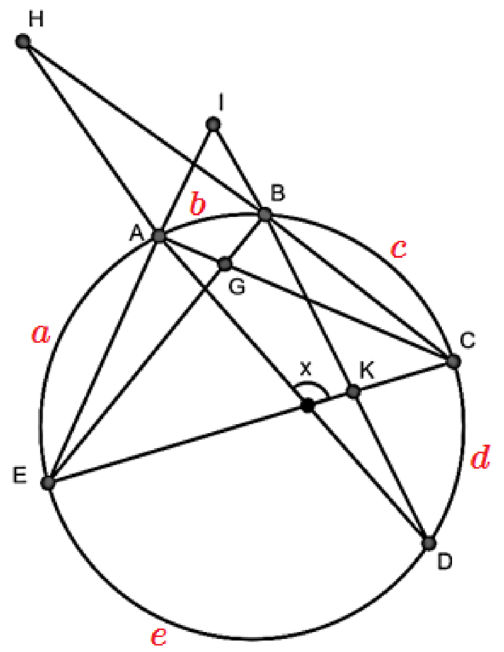
$$۲^{۹} - ۲(۳ \times (۷ \times ۷) + ۳ \times ۷ + ۱) = ۱۷۴$$

سوال ۵

عدد دو رقمی $\overline{ab} = ۱۰a + b$ را در نظر می‌گیریم که در شرط سوال صدق می‌کند. طبق فرض سوال باید داشته باشیم $a|۱۰a + b$ و $b|۱۰a + b$. از آن‌جا که $a|۱۰a$ طبق قضایای بخش‌پذیری نتیجه می‌شود $a|b$ و به طور مشابه از آن‌جا که $b|b$ نتیجه می‌شود $b|۱۰a$ از رابطه $a|b$ بدست می‌آید عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری‌که $b = ka$ و با قرار دادن این تساوی در رابطه بخش‌پذیری دیگر بدست می‌آید $ka|۱۰a$ در نتیجه $k|۱۰$ می‌دانیم $b < ۱۰$ پس $ka < ۱۰$. اگر $k = ۱$ برای a، ۹ حالت وجود دارد و b نیز به طور یکتا از روی است می‌آید. اگر $k = ۲$ باید داشته باشیم $۲a < ۱۰$ پس a دو حالت دارد و در نهایت اگر $k = ۵$ باید داشته باشیم $۵a < ۱۰$ پس a تنها یک حالت دارد و پاسخ مسئله برابر است با $۹ + ۴ + ۱ = ۱۴$.

سوال ۶

مطابق شکل، کمان‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم. با توجه به فرض‌های سوال، روابط زیر را داریم:



$$\begin{cases} d-b=۲۰^\circ & (۱)\\ e-b=۱۴۰^\circ & (۲)\\ b+d+e=۱۹۰^\circ & (۳)\\ a+b+d=۱۴۰^\circ & (۴)\end{cases}$$

همچنین واضح است که داریم:

$$a+b+c+d+e=۳۶۰^\circ \quad (۵)$$

برای یافتن مقدار زاویه x، باید مقدار عبارت $b+c+e$ را بدست آوریم.

از تفاضل روابط (۵) و (۴) داریم:

$$(۵)-(۴) \quad \Rightarrow \quad c+e=۲۲۰^\circ$$

همچنین روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$(۳)+(۱) \quad \Rightarrow \quad ۲d+e=۲۱۰^\circ$$
$$(۳)+(۲) \quad \Rightarrow \quad d+۲e=۳۳۰^\circ$$

سپس از مجموع این دو رابطه داریم: $d+e=۱۸۰^\circ$.

اکنون از رابطه (۳) مقدار b بدست می‌آید: $b=۱۰^\circ$. پس داریم:

$$x=\frac{b+c+e}{۲}=\frac{۲۳۰^\circ}{۲}=۱۱۵^\circ$$

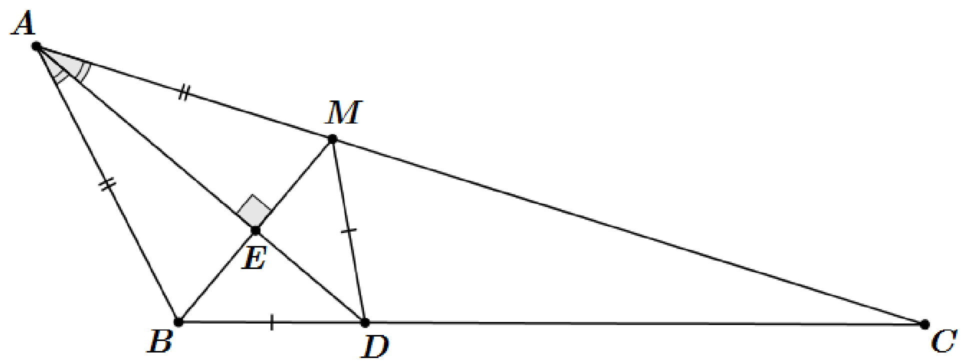
سوال ۷

به سادگی می‌توان دید که $a_۷=۷$. بنابراین ما $\binom{۶}{۳}$ حالت برای انتخاب ۳ عدد $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ داریم که این‌ها را می‌توان به دو طریق طبق شرایط سوال در جایگشت قرار داد. همچنین ۳ عدد $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$ نیز به طور یکتا مشخص شده که به دو طریق می‌توان آن‌ها را در جایگشت قرار داد. به طریق مشابه بقیه جایگاه‌های جایگشت نیز پر می‌شوند که جواب برابر است با

$$\left(\binom{۶}{۳}\times ۲\times ۲\right)^۲=۶۴۰۰$$

سوال ۸

از آنجا که نیمساز AD بر BM عمود است، در مثلث ABM، ارتفاع و نیمساز بر هم منطبق شده‌اند و در نتیجه مثلث ABM متساوی‌الساقین است و همچنین بدست می‌آید که خط AD عمودمنصف پاره‌خط BM می‌باشد.



با توجه به هم‌نهشتی مثلث‌های ABE و AME و همچنین مثلث‌های BDE و MDE، مساحت این مثلث‌ها را به ترتیب $S_۱$ و $S_۲$ می‌نامیم. چون $\frac{AM}{CM} = \frac{۱}{۲}$ است، می‌توانیم نسبت مساحت‌های زیر را بدست آوریم:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{S_{ADM}}{S_{CDM}} = \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{۱}{۲}$$

اکنون مساحت این مثلث‌ها را بر حسب $S_۱$ و $S_۲$ بازنویسی می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$S_{CDM} = ۲S_{ADM} = ۲(S_۱ + S_۲) \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{۲S_۱}{۲S_۱ + ۴S_۲} = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad S_۱ = ۲S_۲$$

پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{BMD} = ۲S_۲ \\ S_{ABC} = ۴S_۱ + ۴S_۲ = ۱۲S_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BMD}} = ۶$$

سوال ۹

با توجه به رشد سمت چپ معادله، x نمی‌تواند از ۲− کمتر و یا بیشتر مساوی ۴ شود. پس در نتیجه مجموعه اعداد $[-۲,۴)$ را بازه‌بندی می‌کنیم:

۱) $x \in [-۲,-۱) \Rightarrow (-۲)(x-۱) = -۲x$

معادله جواب ندارد.

$۲)\ x \in [-۱,۰) \ \Rightarrow (-۱)(x-۱) = -۲x \ \Rightarrow x = -۱$

با توجه به بازه x قبول است.

$۳)\ x \in [۰,۱) \ \Rightarrow (۰)(x-۱) = ۲x \ \Rightarrow x = ۰$

با توجه به بازه x قبول است.

$۴)\ x \in [۱,۲) \ \Rightarrow (۱)(x-۱) = ۲x \ \Rightarrow x = -۱$

با توجه به بازه x قبول نیست.

$۵)\ x \in [۲,۳) \ \Rightarrow (۲)(x-۱) = ۲x$

معادله جواب ندارد.

$۶)\ x \in [۳,۴) \ \Rightarrow (۳)(x-۱) = ۲x \ \Rightarrow x = ۳$

با توجه به بازه x قبول است.

پس معادله اصلی دارای سه جواب حقیقی است.

سوال ۱۰

برای $\mathrm{n} = ۴$ می‌توانیم اعداد ۲،۴،۷ و ۹ را در نظر بگیریم که در شرایط سوال صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم ۵ عدد $a_۱ < a_۲ < a_۳ < a_۴ < a_۵$ وجود داشته باشد که اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها عددی اول باشد. می‌توانیم فرض کنیم $a_۵$ زوج است زیرا اگر همه اعداد را با ۱ جمع کنیم اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها تغییری نمی‌کند اما زوجیت $a_۵$ تغییر می‌کند. اختلاف $a_۵$ و $a_۲$ حداقل ۳ است پس $a_۲$ فرد است زیرا در غیر این‌صورت اختلاف آن‌ها باید برابر با ۲ می‌شد. به طور مشابه $a_۱$ نیز فرد است. اگر $a_۳$ زوج باشد نتیجه می‌شود $a_۵ - a_۳ = ۲$ پس بین $a_۵$ و $a_۳$ فقط یک عدد طبیعی وجود دارد و آن باید $a_۴$ باشد اما این امکان ندارد زیرا اختلاف $a_۵$ و $a_۴$ برابر با ۱ می‌شود. پس $a_۳$ نیز فرد است. حالا دقت کنید که زوجیت $a_۱$ و $a_۳$ یکسان است و مشابه قبل می‌توانیم به تناقض برسیم پس $n < ۵$ و پاسخ مسئله $n = ۴$ است .

سوال ۱۱

چندضلعی که رئوس آن با مختصات صحیح باشند را « *چندضلعی شبکه‌ای*» می‌نامیم.

تعداد نقاط با مختصات صحیح روی مرز (محیط) یک چندضلعی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی آن را با i نشان می‌دهیم.

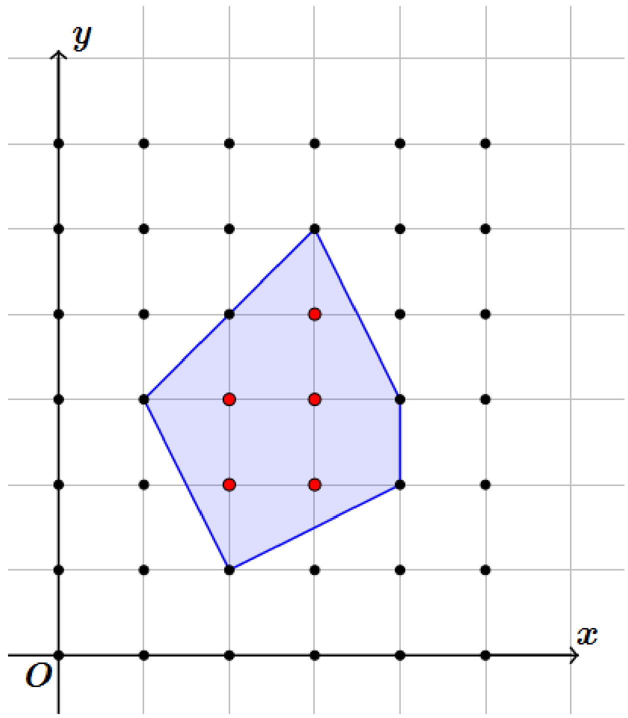
طبق **قضیه پیک**، مساحت چندضلعی شبکه‌ای (محدب یا مقعر) از رابطه $S = i + \frac{b}{۲} - ۱$ بدست می‌آید.

در نتیجه با توجه به اینکه حداقل ۵ نقطه روی مرز این چندضلعی شبکه‌ای قرار دارد و مساحت آن نیز برابر ۷ است، داریم:

$$b \geq ۵ \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{۲} - ۱ \geq \frac{۳}{۲}$$

پس بدست می‌آید که

$$i = S - (\frac{b}{۲} - ۱) \leq ۷ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱۱}{۲}$$



با توجه به فرض‌های مساله، حداکثر ۵ نقطه درون این شکل قرار دارد.

برای اطمینان از این پاسخ، باید مثالی ارائه کنیم که در شکل مقابل، دیده می‌شود.

سوال ۱۲

می‌توانیم این اعداد رابه ۳۸۳ دسته مانند زیر تقسیم کنیم.

$$\{۷۶۵\}, \{۱,۷۶۴\}, \{۲,۷۶۳\}, \dots , \{۳۸۲,۳۸۳\}$$

بدیهی است که از یک دسته بیش از یک عضو نمی‌توان انتخاب کرد. چرا که مجموع آن‌ها برابر ۷۶۵ خواهد شد. همچنین تعدادی دسته هستند که از آن‌ها هیچ عضوی نمی‌توان برداشت چرا که هر دو عضو آن‌ها مربع کامل هستند. دسته ای مانند $\{a^۲, b^۲\}$ را در نظر بگیرید که هر دو عضو آن مربع کامل باشد. داریم:

$$\begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۷۶۵ \\ ۳ | a^۲ + b^۲ \end{cases} \rightarrow ۳|a \, , ۳|b$$

فرض کنید که $a'^۲ = \frac{a^۲}{۹}$ و $b'^۲ = \frac{b^۲}{۹}$. آنگاه خواهیم داشت که $a'^۲ + b'^۲ = ۸۵$. پس مقدار $(a'^۲, b'^۲)$ تنها دو حالت مختلف خواهد داشت. پس تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$۳۸۳ - ۲ = ۳۸۱$$

سوال ۱۳

ثابت می‌کنیم برای هر $a \leq \frac{۱}{۲}$ که $a \neq 0$، تابع f یک‌به‌یک است و برای سایر مقادیر a یک‌به‌یک نیست.

فرض کنید تابع f یک‌به‌یک نباشد. بنابراین x و y وجود دارند که $f(x)=f(y)$ و $x \neq y$. اکنون دو حالت می‌تواند رخ دهد:

حالت اول: $[x]=[y]$. در این حالت نتیجه می‌شود $ax=ay$ و چون $x \neq y$ پس $a = ۰$.

حالت دوم: $[x]>[y]$. در این حالت $ax-ay=[x]-[y]$. از طرفی از آنجا که $x < [x] + ۱$ و $y \geq [y]$ داریم $x - y < [x] - [y] + ۱$ پس

$$a = \frac{[x]-[y]}{x-y} > \frac{[x]-[y]}{[x]-[y]+۱} = ۱ - \frac{۱}{[x]-[y]+۱}$$

حال چون $[x]$ و $[y]$ اعداد صحیح هستند پس $[x]-[y] \geq 1$ که از آن نتیجه می‌شود $a > \frac{۱}{۲}$.

پس اگر $a \leq \frac{۱}{۲}$ و $a \neq ۰$ هیچ یک از دو حالت فوق نمی‌تواند رخ دهد و در نتیجه تابع f یک‌به‌یک است.

حالت سوم: $[x]<[y]$. این حالت کاملاً مشابه حالت دوم است.

حال ثابت می‌کنیم برای سایر مقادیر a تابع f یک‌به‌یک نیست. در این قسمت نیز سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $a = ۰$. در این حالت $f(x)=-[x]$ که به وضوح یک‌به‌یک نیست.

حالت دوم: $\frac{۱}{۲} < a \leq ۱$. در این حالت داریم $f(\frac{۱}{a}) = ۱ - [\frac{۱}{a}] = ۱ - ۱ = ۰$. پس $f(\frac{۱}{a}) = f(۰)$ و در نتیجه تابع یک‌به‌یک نیست.

حالت سوم: $a > ۱$. در این حالت داریم $f(-\frac{۱}{a}) = -۱ + ۱ = ۰ = f(۰)$ و در نتیجه تابع یک‌به‌یک نیست.

بنابراین مقادیر مطلوب سؤال عبارتند از $\{-\frac{۵}{۵}, -\frac{۴}{۵}, -\frac{۳}{۵}, -\frac{۲}{۵}, -\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵}\}$ و در نتیجه جواب سؤال برابر است با ۷.

سوال ۱۴

مسئله به خاطر حالت های فراوان، مسئله ای پیچیده به نظر می آید! زیرا n می تواند تعداد ارقام فراوانی داشته باشد، هر میزان کوچک یا بزرگ باشد و ما باید همه حالت ها را تحلیل کنیم. در چنین مسائلی که حالت ها زیاد است و نمی دانیم از کجا شروع کنیم، چگونه می توانیم به فرآیند کشف و حل نزدیک شویم و مانند یک کارآگاه مسئله را مجبور سازیم تا خود، رازهایش را برایمان تدریجاً فاش کند؟!

پیشنهاد بنده همیشه یک چیز است: مثال زدن و بررسی حالات کوچک تر و ساده تر مسئله! استراتژی ای که به زعم بنده در درصد بزرگی از مسائل جواب می دهد: چه مسئله مرحله اول باشد، چه مسئله مرحله دوم و چه سؤال المپیاد جهانی!

پس بیایید مثال های ساده تر را ابتدا بررسی کنیم:

ساده ترین حالت، زمانی است که n، تک رقمی باشد. در این صورت، $S(n)=P(n)=n$ پس $S(n)+P(n)=۲n\neq n$ و در این حالت جوابی وجود ندارد.

حالت کمی پیچیده تر، زمانی است که n، دورقمی باشد. در این صورت، اگر $n=\overline{xy}$، پس:

$$S(n)+P(n)=x+y+xy \text{ و } n=۱۰x+y$$

در نتیجه رابطه $S(n)+P(n)=n$ معادل است با این رابطه:

$$xy+x+y=۱۰x+y \Leftrightarrow xy=۹x \Leftrightarrow y=۹$$

پس دقیقا اعداد به فرم $\overline{x۹}$ در بین اعداد دو رقمی جواب مسئله هستند که تعدادشان دقیقاً ۹ تا عدد است.

حال می رویم سراغ اعداد سه رقمی مثل $n=\overline{xyz}$:

$$P(n)=xyz \text{ و } S(n)=x+y+z \text{ و } n=۱۰۰x+۱۰y+z$$

پس رابطه $S(n)+P(n)=n$ به صورت زیر در می آید:

$$xyz+x+y+z=۱۰۰x+۱۰y+z \Leftrightarrow$$

$$xyz=۹۹x+۹y$$

با دقت در نتیجه به دست آمده می توان فهمید که تساوی ذکر شده ایراد دارد، چون طرف راست بیشتر از طرف چپ است! جمله مؤثر در این ادعا جمله بزرگتر است یعنی $۹۹x$. دقت کنید که خود این جمله به تنهایی از کل عبارت طرف چپ بزرگتر است؛ زیرا:

$$۹۹x>xyz \Leftrightarrow ۹۹>yz$$

و می دانیم y و z هر کدام حداکثر ۹ هستند، پس:

$$yz\leq ۹\times ۹=۸۱<۹۹$$

پس تساوی ذکر شده و در نتیجه خاصیت $S(n)+P(n)=n$ برای یک عدد سه رقمی n یک خاصیت تناقض آمیز است و جوابی ندارد، چون n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است.

آیا استدلالی مشابه برای اعداد با تعداد ارقام بیشتر کار می کند و می توان گفت رابطه مسئله برای اعداد حداقل سه رقمی، یک رابطه تناقض آمیز است، چون n خیلی بیشتر از $S(n)+P(n)$ است؟! سعی می کنیم مشابه روند استدلال اعداد سه رقمی را امتحان کنیم تا ببینیم تناقض را می توان حاصل کرد یا نه! برای این کار فرض کنید $n=\overline{a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۰}$ یک عدد kرقمی طبیعی است که$k\geq ۳$. داریم:

$$n = ۱۰^{k-۱}a_{k-۱} + \cdots + ۱۰a_۱ + a_۰$$

$S(n) = a_{k-۱} + a_{k-۲} + \cdots + a_۰$ و $P(n) = a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۱a_۰$

پس رابطه $S(n) + P(n) = n$ به صورت زیر در می آید:

$$a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۱a_۰ + a_{k-۱} + a_{k-۲} + \cdots + a_۰ = ۱۰^{k-۱}a_{k-۱} + \cdots + ۱۰a_۱ + a_۰$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۰ = (۱۰^{k-۱} - ۱)a_{k-۱} + (۱۰^{k-۲} - ۱)a_{k-۲} + \cdots + (۱۰ - ۱)a_۱$$

مشابهاً به نظر می رسد که طرف راست از طرف چپ بیشتر است! حتی مانند قبل می توان گفت جمله $(۱۰^{k-۱} - ۱)a_{k-۱}$ از طرف راست بیشتر است، زیرا:

$$a_{k-۲}\cdots a_۰ \leq ۹ \times ۹ \times \cdots \times ۹ = ۹^{k-۱} < ۱۰^{k-۱} - ۱$$

(چون $k \geq ۳$ نامساوی بالا به راحتی ثابت می شود)

پس داریم:

$$a_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۰ < (۱۰^{k-۱} - ۱)a_{k-۱}$$

(دقت کنید که چون عدد kرقمی است پس $a_{k-۱} \neq ۰$)

پس کاملاً مشابه حالت سه رقمی ثابت می شود که طرف راست از چپ بیشتر است و در نتیجه برای n حداقل سه رقمی، n خیلی بیشتر از $S(n) + P(n)$ است و در تساوی مورد نظر مسئله صدق نمی کند. مشاهده نمودید که در روند طی شده راز مسئله تدریجاً افشا شد و حالا همه چیز به طور کامل ثابت شده است!

پس مسئله کلاً ۹ تا جواب دورقمی دارد و هیچ جواب متفاوتی با تعداد ارقام دیگر ندارد. در نتیجه پاسخ مسئله ۹ است.

سوال ۱۵

خط BM را امتداد دهید تا CD را در نقطهٔ E قطع کند. با توجه به این که $MD = \frac{۱}{۲}BC$، از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که $ED = \frac{۱}{۲}EC$ و $EM = \frac{۱}{۲}EB$. چون دایرهٔ مذکور دایرهٔ محاطی داخلی مثلث BCE است، داریم $BP = \frac{۱}{۲}(BC + BE - CE)$. از طرف دیگر، از فرض $MP = BC$ نتیجه می‌شود که $BP = \frac{۱}{۲}BE - BC$. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}(BC + BE - CE) = \frac{۱}{۲}BE - BC$$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم $CE = ۳BC$ و در نتیجه $CD = \frac{۳}{۲}BC$.

سوال ۱۶

از بین ۲ و۳ حداقل یک نفر دروغ‌گوست پس ۳ دروغ‌گوست. اگر ۴ راست‌گو باشد همه جز ۳ راست می‌گویند که اما ۲و۴ سازگار نیستند. پس ۴ نیز دروغ‌گوست. پس ۲ راست‌گوست. پس ۵ هم دروغ‌گوست چون اگر راستگو باشد دو راستگو حداقل داریم پس دروغ گفته است. اگر نفر اول دروغ‌گو باشد دقیقا ۱ راست‌گو داریم پس ۵ راست گفته که تناقض است. پس ۱ هم راست‌گوست. پس دقیقا ۳ دروغ‌گو و مجرم داریم.

سوال ۱۷

با توجه به اینکه $x = ۰$ جزو دامنه‌ی نمودار نیست پس گزینه ۲ صحیح نیست. از طرفی از آنجا که $x = \pi \approx ۳.۱۴$ جزو دامنه است و مقدار تابع در آن مثبت است پس گزینه‌های ۳ و ۴ نیز صحیح نیستند. از طرفی تابع X^x برای $x > ۱$ تابعی صعودی است ولی نمودار سؤال این طور نیست. پس گزینه‌ی ۱ نیز صحیح نیست و در نتیجه گزینه ۵ صحیح است.

سوال ۱۸

داریم $A\widehat{N}M = \hat{A} - ۹۰ = \hat{C}$. بنابراین دو مثلث قائم الزاویهٔ CMP و NMA متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{CM}{MP} = \frac{MN}{AM} \quad \Rightarrow \quad CM.AM = MN.MP = ۲MN^۲$$

با فرض $AO = CO = x$ و $OM = y$، خواهیم داشت $CM = x - y$ و $AM = x + y$ بنابراین

$$(x+y)(x-y) = ۲ \times MN^۲ \;\Rightarrow\; x^۲ - y^۲ = ۲MN^۲$$

از طرف دیگر طبق قضیهٔ فیثاغورث در مثلث OMN داریم $y^۲ = OM^۲ - MN^۲$. پس طبق تساوی فوق داریم

$$x^۲ = y^۲ + ۲MN^۲ = OM^۲ + MN^۲ = ۲۰^۲ + ۲۱^۲ = ۸۴۱$$

بنابراین $x = \sqrt{۸۴۱} = ۲۹$ و در نتیجه $AC = ۲x = ۵۸$.

سوال ۱۹

رابطه $a_{n+۱} = \frac{{a_n}^۲}{a_{n-۱}}$ معادل است با رابطه $a_n^۲ = a_{n-۱}a_{n+۱}$ ؛ یعنی هر جمله از دنباله، میانگین هندسی جمله قبل و بعد از خود است. این امر خود گزاره معروفی معادل با این است که دنباله، تصاعد هندسی باشد؛ زیرا رابطه را می توان تبدیل کرد به:

$$\frac{a_n}{a_{n-۱}} = \frac{a_{n+۱}}{a_n} (n \geq ۲)$$

پس کل روابط معادل است با:

$$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\frac{a_۴}{a_۳}=\dots$$

به این معنی که اگر نسبت ثابت را q بنامیم، هر جمله از حاصلضرب q در جمله قبلی دنباله به دست آید که معادل با تصاعد هندسی بودن دنباله است.

پس سوال در واقع این است که چند تصاعد هندسی نامتناهی در اعداد طبیعی وجود دارد که $a_۳ = ۵۴۰۰۰$ ؟

دنباله ما به فرم زیر است:

$$a_۱, a_۱q, a_۱q^۲, \dots$$

دقت کنید که $a_1 \in \mathbb{N}$، اما نمی توانیم در ابتدا مطمئن باشیم که $q \in \mathbb{N}$! در واقع q نسبت دو عدد طبیعی است پس می توان گفت برابر با کسری ساده شده مثل $\frac{r}{s}$ است ($r, s \in \mathbb{N}, (r,s)=۱$) حال توجه کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_۱q^n = a_۱\left(\frac{r}{s}\right)^n$ عددی طبیعی است؛ پس:

$$\left.\begin{array}{c} s^n|ar^n \\ (s^n, r^n)=۱ \end{array}\right\} \underset{\text{اقلیدس}}{\Longrightarrow} s^n|a$$

اگر $s>۱$ آن گاه به ازای n به اندازه کافی بزرگ $s^n > a$ ، پس s^n نمی تواند a را عاد کند که تناقض است. پس $s=۱$ و در نتیجه $q \in \mathbb{N}$. حال توجه کنید که $a_۱q^۲ = a_۳ = ۵۴۰۰۰$ پس q یک عدد طبیعی است که $q^۲|۵۴۰۰۰$ و $a_۱$ هم به صورت یکتا از روی q به دست می آید ($a_۱ = \frac{۵۴۰۰۰}{q^۲}$) و همه اعضای دنباله به طور یکتا از روی $a_۱$ و q تعیین می شوند. هم چنین توجه کنید که اگر q عدد طبیعی دلخواهی با شرط $q^۲|۵۴۰۰۰$ باشد و با توجه به رابطه ذکر شده $a_۱$ را از روی آن تعیین کنیم، آنگاه چون a_1 و q طبیعی هستند، همه اعضای دنباله ای که از روی آن ها به صورت $a_n = a_۱q^{n-۱} (n \in \mathbb{N})$ ساخته می شود، طبیعی می شود. هر دنباله به صورت یکتا از روی q تعیین می شود و هر دو دنباله ای که مقدار q برای آن ها متفاوت باشد، چون مقدار $a_۱$ هم متفاوت می شود، با هم متمایز می شوند. پس تعداد دنباله های موردنظر مسئله برابر است با تعداد اعداد طبیعی q با شرط $q^۲|۵۴۰۰۰$.

حال توجه کنید که $۵۴۰۰۰ = ۲^۴ \times ۳^۳ \times ۵^۳$؛ پس $q = ۲^\alpha \times ۳^\beta \times ۵^\gamma$ طوری که: $۲^{۲\alpha} \times ۳^{۲\beta} \times ۵^{۲\gamma}|۲^۴ \times ۳^۳ \times ۵^۳$

در نتیجه: $۰ \le \alpha \le ۲$ ، $۰ \le \beta \le ۱$ و $۰ \le \gamma \le ۱$. در نتیجه تعداد مقادیر ممکن برای q،

$$۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$$

است.

سوال ۲۰

به هر زیر مجموعه ناتهی $S \subseteq \{۱,\ldots,۱۳۹۷\}$ زیر مجموعه $۱۳۹۸ - S = \{۱۳۹۸ - x | x \in S\}$ را جفت می‌کنیم. (زیرمجموعه های قرینه دسته های تکی تشکیل می‌دهند و بقیه دسته های دو تایی تشکیل می‌دهند) میانگین میانگین های مجموعه‌های هر دسته برابر ۶۹۹ می‌شود. پس میانگین کل ۶۹۹ می‌شود.

سوال ۲۱

متغیرهای جدید x و y را به این صورت تعریف می‌کنیم.

$$x = a + b$$
$$y = a - b$$

اکنون می‌توانیم معادلات مسأله را به این صورت بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} x^۳ = ۲y \\ ۳y^۲ = x^۲ - y^۲ \end{cases}$$

معادله‌ی دوم نتیجه می‌دهد $x^۲ = ۴y^۲$ که از معادله‌ی اول نتیجه می‌دهد $x^۲ = x^۶$. بنابر این x سه مقدار ممکن ۰ و ۱ و ۱− را دارد و مقادیر متناظر y به ترتیب برابر است با ۰ و $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$.

بنابراین سه زوج مرتب (a, b) به دست می‌آیند: $(۰,۰)$ و $(\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴})$ و $(-\frac{۳}{۴}, -\frac{۱}{۴})$.

بنابراین جواب صحیح ۳ است و گزینه‌ی ۴ صحیح است.

سوال ۲۲

در چهارضلعی $PYCZ$ دو زاویه روبرو قائمه هستند. پس این چهارضلعی محاطی است. دایرۀ محیطی آن را $W_۱$ بنامید. به طور مشابه چهارضلعی $PXBZ$ نیز محاطی است و دایرۀ محیطی آن را $W_۲$ بنامید. از متساوی الساقین بودن مثلث نتیجه می‌گیریم که $\hat{B} = \hat{C} = ۷۰$. بنابراین $Y\hat{Z}X = Y\hat{C}Z$. در نتیجه زاویۀ $Y\hat{Z}X$ یک زاویۀ ظلی برای دایرۀ $W_۱$ است و بنابراین XZ در نقطۀ Z بر $W_۱$ مماس است. به طور مشابه YZ در نقطۀ Z بر $W_۲$ مماس است. حال با در نظر گرفتن کمان PZ در دو دایره نتیجه می‌گیریم $P\hat{Z}X = P\hat{Y}Z$ و $P\hat{X}Z = P\hat{Z}Y$. بنابراین دو مثلث PXZ و PZY متشابه هستند. پس خواهیم داشت

$$\frac{PX}{PZ} = \frac{PZ}{PY} \Rightarrow PZ^۲ = PX.PY = ۲ \times ۴ = ۸$$

بنابراین $PZ = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$.

سوال ۲۳

برای بررسی این مسئله، ابتدا باید شرایط مساوی شدن کد دو استاد را تحلیل کنیم.

فرض کنید دو استاد با شماره های متفاوت m و n ، کد یکسانی پیدا کنند. در این صورت $m+i$ و $n+i$ $(۱ \leq i \leq ۴)$ عامل اول مشترکی دارند مثل p_i (توجه کنید بعضی از این اعداد p_i می توانند برابر باشند.)

$$\left.\begin{matrix} p_i|m+i \\ p_i|n+i \end{matrix}\right\} \rightarrow p_i|m-n$$

پس $m-n$ مضرب $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ است. حال سؤال این جاست که حداقل چند تا از اعداد $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ متمایزند؟ برای پاسخ این سؤال ابتدا دقت کنید که امکان ندارد که همه این اعداد برابر باشند چون $m+۱$ و $m+۲$ نسبت به هم اولند و عامل اول مشترک ندارند. هم چنین اگر اعداد $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ ، فقط از دو مقدار تشکیل شده باشند، در این صورت چون هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند پس $p_۱ \neq p_۲$ و $p_۲ \neq p_۳$ پس $p_۱ = p_۳$ و به طریق مشابه $p_۲ = p_۴$؛ در نتیجه :

$$\left.\begin{matrix} p_۱|m+۱ \\ p_۱|n+۳ \end{matrix}\right\} \rightarrow p_۱|۲ \rightarrow p_۱ = ۲$$

$$\left.\begin{matrix} p_۲|m+۲ \\ p_۲|n+۴ \end{matrix}\right\} \rightarrow p_۲|۲ \rightarrow p_۲ = ۲$$

که با $p_۱ \neq p_۲$ در تضاد است. پس $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ حداقل شامل سه مقدار هستند و در نتیجه $m-n$ مضرب حداقل سه عدد اول متمایز مثل p و q و r است. پس $pqr \mid m-n$ و در نتیجه $|m-n| \geq pqr$ و چون pqr برابر با حاصلضرب سه عدد اول متمایز است، داریم:

$$pqr \geq ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$$

و در نتیجه $|m-n| \geq ۳۰$.

پس اگر فاصله هر دو شماره از اساتید کمتر از ۳۰ باشد، کد هیچ دو استادی برابر نمی شود و در نتیجه اگر دانشکده حداکثر ۳۰ استاد داشته باشد، این اتفاق می افتد.

بنابراین، ۳۰ تعداد مناسبی برای اساتید دانشکده است که خواسته مسأله را برآورده می کند؛ اما مسئله تمام نشده است! آیا ۳۰ دقیقا حداکثر مقدار ممکن است؟ اگر نشان دهیم، در صورتی که دانشکده حداقل ۳۱ استاد داشته باشد، آن گاه حتما دو استاد دانشکده وجود دارند که می توانند کد برابر انتخاب کنند، کار تمام است! دقت کنید که طبق استدلال هی قبل می دانیم فاصله شماره آن دو استاد باید حداقل ۳۰ باشد. پس تنها انتخاب ما اگر بخواهیم برای حداقل ۳۱ استاد دو کد برابر پیدا کنیم استاد شماره ۱ و ۳۱ است. اگر نشان دهیم این دو استاد می توانند کد برابر انتخاب کنند، کار تمام است. توجه کنید که استاد شماره ۱ می تواند کد ۴،۳،۲ و ۵ را انتخاب کند و اتفاقا استاد شماره ۳۱ هم می تواند چنین کدی را انتخاب کند! پس واقعاً کار تمام است و پاسخ مسئله برابر با ۳۰ است.

سوال ۲۴

برای هر b ماکزیمم و مینیمم $a^۲ - ab + b^۲$ را به ازای $۰ \leq a \leq ۳$ به ترتیب M_b و m_b می‌نامیم.

تابع فوق نسبت به a یک تابع درجه دوم است که ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم آن مثبت است. پس مقدار ماکزیمم آن روی هر بازه در یکی از دو انتهای بازه رخ می‌دهد و مقدار مینیمم آن به ازای همه‌ی مقادیر a در نقطه‌ی $a = \frac{b}{۲}$ رخ می‌دهد و چون $۱ \leq b \leq ۲$ پس این نقطه در بازه‌ی $[۰,۳]$ نیز هست. بنابراین $m_b = \frac{۳b^۲}{۴}$ و $M_b = \max\{b^۲, ۹ - ۳b + b^۲\}$ که مجدداً از آنجا که $۱ \leq b \leq ۲$، پس $M_b = ۹ - ۳b + b^۲$.

اکنون داریم

$$M = \max_{۱\leq b\leq ۲} M_b = \max_{۱\leq b\leq ۲}(۹ - ۳b + b^۲) = ۷$$

$$m = \min_{۱\leq b\leq ۲} m_b = \min_{۱\leq b\leq ۲} \frac{۳b^۲}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

پس $۴(M - m) = ۲۵$ و در نتیجه جواب صحیح ۲۵ است.

سوال ۲۵

هر تابع مطلوب در تناظر با یکی از کوتاهترین مسیرها از نقطه پایین چپ به بالا راست از جدول زیر است که همواره بین دو خط مورب مشخص شده بماند. (ارتفاعی که از ستون i ام به ستون $i+۱$ ام می‌رود $f(i)$ است). روی هر نقطه مجاز تعداد مسیر های ممکن رسیدن به آن نوشته شده است که به صورت بازگشتی جمع نقاط مجازی است که گام قبل می‌توانسته باشد.