



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱. در آزادراه زنجان-تبریز از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ صبح ۲۳۷۰ خودرو از عوارضی عبور کرده‌اند که همه آنها تک‌سرنشین یا دو سرنشین بوده‌اند. این خودروها در مجموع ۱۸۳۲۰ لیتر بنزین در مسیر مصرف کرده‌اند. می‌دانیم هر خودروی تک‌سرنشین، ۷ لیتر و هر خودروی دوسرنشین، ۸ لیتر بنزین در این مسیر مصرف کرده است. تعداد کل خودروهای تک‌سرنشین چند تاست؟

- (۱) ۳۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۱۰۵۰ (۵) ۱۱۸۵

۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$ ، نقاط X و Y روی پاره‌خط AC طوری قرار گرفته‌اند که X بین A و Y قرار دارد و به علاوه $BY = AX = BX$. اگر $\angle YBC = 10^\circ$ ، زاویه $\angle BAC$ چند درجه است؟

- (۱) $\frac{95}{3}$ (۲) ۳۸ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱ (۵) $\frac{185}{4}$

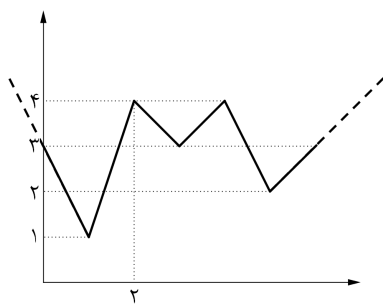
۳. x و y دو عدد حقیقی هستند که $2^{x+1} = 18$ و $3^{-y} = 2$. مقدار xy چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) $-\frac{1}{3}$ (۵) $\frac{1}{3}$

۴. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۳۹۳ مثل a وجود دارد که $\underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_{a \text{ بار}}$ مربع کامل باشد؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۶۹۶ (۳) ۷۱۵ (۴) ۷۳۳ (۵) ۷۳۴

۵. نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در پایین می‌بینید. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی است که برای هر عدد حقیقی x ، $g(x) \leq f(x)$. حداکثر مقدار $g(2)$ کدام است؟



- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳
(۵) ۴



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۶. در شهر نیستان قیمت نی‌ها با افزایش طول نی زیاد می‌شود. تاجری در شکرستان قصد وارد کردن نی از نیستان را دارد. در شکرستان لیوان‌ها به شکل مخروط ناقص با ارتفاع ۱۶ سانتی‌متر، قطر دهانه ۱۰ سانتی‌متر و قطر انتهای ۶ سانتی‌متر هستند. تاجر قصد دارد کم‌ترین پول را خرج کند ولی با توجه به قوانین شکرستان به هیچ وجه نی نباید کاملاً داخل لیوان قرار گیرد. اندازه نی‌هایی که او می‌خرد چقدر است؟ (از قطر نی صرف نظر می‌کنیم، یعنی نی را یک پاره خط فرض می‌کنیم.)

- (۱) $2\sqrt{73}$ (۲) $2\sqrt{89}$ (۳) $8\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{87}$ (۵) $10\sqrt{3}$

۷. مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه ناتهی دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ باشد؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶ (۵) ۱۰۲۴

۸. کشور شکرستان از سه استان نمکستان، فلفلستان و سماقستان تشکیل شده است که به ترتیب ۱۰، n و $2n$ شهر دارند. می‌دانیم تعداد شهروندان در شهرهای مختلف این کشور یک‌سان است و جمعیت کل کشور $n^2 + n + 1$ نفر است. عدد n در کدام یک از محدوده‌های زیر قرار دارد؟

- (۱) ۱ تا ۱۰ (۲) ۱۱ تا ۲۰ (۳) ۲۱ تا ۳۰ (۴) ۳۱ تا ۴۰ (۵) ۴۱ تا ۵۰

۹. $ABCD$ دوزنقه‌ای است که در آن $AB \parallel CD$ و $CD = 3AB$. نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع BC و CD هستند و مساحت دوزنقه ۳۲ است. مساحت مثلث AMN چه قدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵ (۵) ۱۶

۱۰. برای چند مقدار صحیح n دو چند جمله‌ای $x^3 + nx - 1$ و $x^3 + x - n^2$ ریشه حقیقی مشترک دارند؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱۱. حداکثر چند مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد که طول اضلاع آن‌ها از بین اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ و ...، 2^{10} باشند؟ (طول اضلاع می‌توانند با هم برابر باشند).

- (۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰ (۵) ۱۶۵

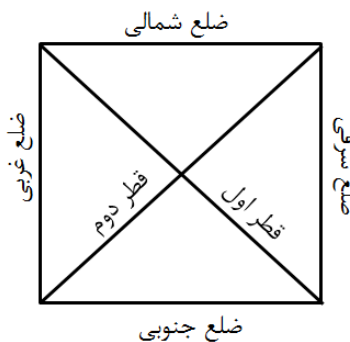
۱۲. برای عدد طبیعی n چندجمله‌ای $P_n(x)$ را برابر $(x+n)^2$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم $(P_1(x), \dots, P_{1392}(x), \dots, P_{1393}(x))$ یک چندجمله‌ای از درجه 2^{1393} است. ضریب $x^{2^{1393}-1}$ در این چندجمله‌ای برابر کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) 2^{1392} (۳) $2^{1392} + 1$ (۴) $2^{1393} - 1$ (۵) 2^{1393}

۱۳. فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $B = \{1, 2, \dots, 100\}$. تعداد توابع $f: A \rightarrow B$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی m و n که $2 \leq m, n \leq 10$ و $mn \leq 100$ رابطه $f(mn) = mf(n)$ برقرار باشد.

- (۱) 10^2 (۲) 10^3 (۳) 10^4 (۴) 10^5 (۵) 2×10^5

۱۴. پادشاه شکرستان که قصری به شکل مربع دارد، به تازگی کتیبه‌ای به خط نمکی مربوط به یکی از اجدادش پیدا کرده که ریاضی‌دان بوده است. پس از ترجمه کتیبه توسط زبان‌شناسان مشخص شد که در نقطه‌های مختلفی از شهر، گنج‌هایی وجود دارد. ترجمه کتیبه را در زیر می‌بینید.



گنج‌ها در نقطه‌هایی از شهر پنهان گشته‌اند که اگر هر کدام از آن‌ها را به ترتیب نسبت به ضلع شمالی، ضلع جنوبی، ضلع شرقی، ضلع غربی، قطر اول و در نهایت قطر دوم قصر قرینه کنیم به جای اول بازگردد.

چند گنج در شهر پنهان شده است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵) ۸



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. مهندس شش دیواری قصد دارد نقشه‌ی خانه‌ای با شش دیوار را طراحی کند. او می‌خواهد سه تا از دیوارها در امتداد شمالی-جنوبی و با طول‌های ۲، ۴ و ۶ متر باشند و سه تا از دیوارها نیز در امتداد شرقی-غربی و با طول‌های ۴، ۶ و ۱۰ متر باشند. او چند نقشه‌ی مختلف با این ویژگی‌ها می‌تواند بکشد؟

۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵)

۱۶. می‌دانیم عددی طبیعی در مبنای دو، ۳۰ رقمی است. در مورد تعداد ارقام این عدد در مبنای سه چه می‌توان گفت؟

(۱) حتماً ۱۸ رقمی است.

(۲) حتماً ۱۹ رقمی است.

(۳) حتماً ۲۰ رقمی است.

(۴) برای بعضی اعداد ۱۸ رقمی و برای بعضی ۱۹ رقمی است.

(۵) برای بعضی اعداد ۱۹ رقمی و برای بعضی ۲۰ رقمی است.

۱۷. عدد صحیح n را «نه چندان بزرگ» می‌گوییم هرگاه برای هر دو عدد مثبت x و y که $(x+1)(y+1) = 2$ داشته باشیم $xy + \frac{1}{xy} \geq n$. بزرگ‌ترین عدد نه چندان بزرگ کدام است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵)

۱۸. رئوس یک پنج‌ضلعی محدب را به ترتیب ساعت‌گرد A, B, C, D, E می‌نامیم. می‌دانیم

$\angle BAE = 2\angle DAC = 93^\circ$ و $\angle BCA = \angle CDA$ و $\angle EDA = \angle DCA$. اگر $AD = 2\sqrt{3}$ و

$AC = 2$ آن‌گاه مقدار $\frac{AE}{AB}$ برابر کدام گزینه است؟

$\frac{1}{3} \sin 93^\circ$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳) $3 \sin 93^\circ$ (۴) ۳ (۵)

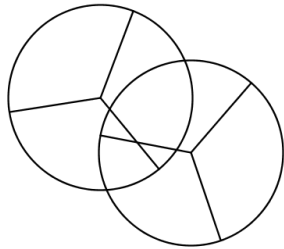
۱۹. x و y دو عدد حقیقی هستند که $\sin(x) + \cos(y) = 1$. بیش‌ترین مقدار $\sin(y) + \cos(x)$

کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) ۲ (۵)



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. دو صفحه پلاستیکی شفاف و رنگی به شکل دو دایره برابر داریم که هر کدام از آن‌ها توسط سه شعاع با زاویه‌های 120° ، به سه قسمت برابر تقسیم شده‌اند. قسمت‌ها دارای رنگ‌های متفاوت هستند. هرگاه دو رنگ روی هم قرار گیرند، رنگی جدید ایجاد می‌شود و رنگ‌های ترکیبی ایجاد شده نیز با یک‌دیگر متفاوت‌اند. مثلاً در شکل رو به رو 10° رنگ مختلف به وجود آمده است.

حداکثر تعداد رنگ‌های مختلفی که در یک وضعیت قرار گرفتن صفحه‌ها می‌تواند به وجود بیاید چند تاست؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵ (۵)

۲۱. یک زیرمجموعه ناتهی از اعداد طبیعی را «منظم» گوئیم اگر میانگین اعضای آن عددی طبیعی باشد و آن را «فوق منظم» گوئیم اگر همه زیرمجموعه‌های ناتهی آن منظم باشند. تعداد زیرمجموعه‌های فوق منظم پنج عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 67\}$ چند است؟

- ۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۹ (۴) ۴۷ (۵)

۲۲. شش نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها هم خط نیستند. در بین زوایایی که این نقاط تشکیل می‌دهند، حداکثر چند زاویه در بازه $(90^\circ, 180^\circ)$ وجود دارد؟

- ۶ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵)

۲۳. نقطه P روی کمان BC از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل A نیست) قرار دارد. می‌دانیم $AB = 2$ ، $AC = 3$ و $BC = 4$. نقاط M و N روی خط BC قرار دارند به طوری که B بین C و M است و C بین N و B است. می‌دانیم MA و PN بر دایره محیطی مثلث ABC مماس هستند و $MA = PN$. خط AP خط BC را در نقطه T قطع می‌کند. اندازه PT چقدر است؟

- $\frac{5}{3}$ (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{5\sqrt{13}}{7}$ (۳) $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ (۴) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ (۵)



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. عدد طبیعی M را خوب می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی نه لزوماً متمایز a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) یافت شوند به طوری که $M = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ و خواص زیر برقرار باشد.

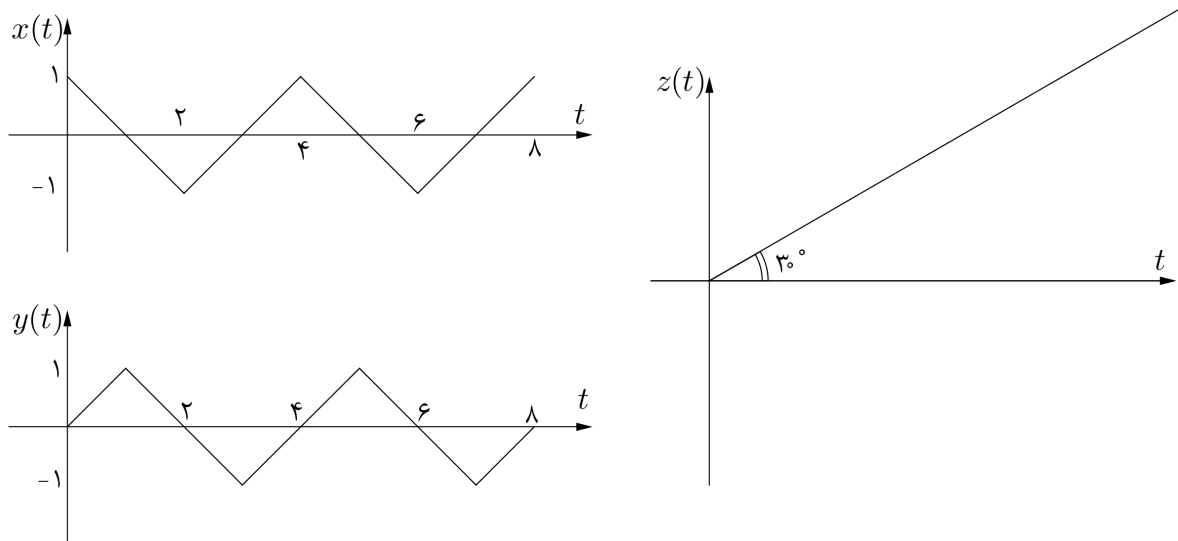
(آ) M بر توان سوم هیچ عدد طبیعی بزرگ‌تر از یکی بخش پذیر نیست.

(ب) اگر $1 \leq i \leq n$ آن گاه $a_{i-1} a_{i+1}$ بر a_i بخش پذیر است. ($a_{n+1} = a_1$ و $a_0 = a_n$)

چند عدد خوب کوچک‌تر از ۲۰۱۵ داریم؟

- ۷۲ (۵) ۴۴ (۴) ۲۹ (۳) ۲۶ (۲) ۲۲ (۱)

۲۵. متحرکی در فضا به گونه‌ای حرکت می‌کند که در لحظه t در نقطه $(x(t), y(t), z(t))$ قرار دارد. اگر نمودارهای $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر حسب t به شکل‌های زیر باشند، مسافتی که این متحرک از $t=0$ تا $t=8$ طی می‌کند برابر کدام گزینه است؟



- $16\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۵) $8\sqrt{\frac{7}{3}}$ (۴) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۳) $4\sqrt{\frac{7}{3}}$ (۲) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (۱)



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۶. «پشیزها» موجوداتی میکروسکوپی هستند که اندازه‌های مختلفی دارند. هرگاه دو پشیز با اندازه‌های x و y در مجاورت هم قرار بگیرند، می‌توانند با صرف انرژی‌ای برابر $|x - y|$ به هم بچسبند و یک پشیز با اندازه‌ی $x + y$ ایجاد کنند.

اگر ۱۰۲۵ پشیز با اندازه‌ی ۱ روی یک خط ردیف شده باشند، کم‌ترین انرژی‌ای که باید در مجموع صرف کنند تا تبدیل به یک پشیز با اندازه‌ی ۱۰۲۵ شوند، چه قدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۳۱ (۵) ۳۲

۲۷. $A_1 A_2 \dots A_9$ یک ضلعی منتظم است و نقطه‌های K ، M و N درون آن به گونه‌ای هستند که $A_1 A_2 A_4 K$ متوازی‌الاضلاع و $A_6 A_7 M$ و $A_8 A_9 N$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه $\angle MKN$ چه قدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵ (۵) ۶۰

۲۸. فرض کنید A مجموعه‌ی نقاط با مختصات صحیح در صفحه باشد و تابع $f: A \rightarrow \{0, 1, 2\}$ دارای این خاصیت است که برای هر x و y صحیح،

$$f(x, y) - f(x + 1, y) - f(x - 1, y) - f(x, y + 1) - f(x, y - 1)$$

بر ۳ بخش پذیر است. کدام گزاره صحیح است؟

(۱) f باید تابعی ثابت باشد.

(۲) مجموعه‌ای متناهی وجود ندارد که با دانستن f در آن مجموعه، تابع f به صورت یک‌تا تعیین شود.

(۳) اگر مجموعه‌ی نقاطی که f در آن‌ها مقدار ۱ را اتخاذ می‌کند، مشخص باشد (فرض کنید این مجموعه ناتهی است) تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.

(۴) اگر مقدار f را روی نقاطی که هر دو مؤلفه آن‌ها زوج است بدانیم، تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.

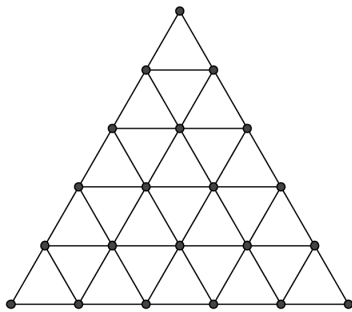
(۵) گزینه‌های ۲ و ۳



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۹. مثلثی که طول هر سه ضلعش عددی در بازه $[1, 2]$ ، و اندازه همه زاویه‌هایش در بازه $[45, 90]$ درجه است، را «معتدل» می‌گوییم. اختلاف مساحت دو مثلث معتدل حداکثر چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{12-3\sqrt{2}}{8}$ (۵) هیچ کدام



۳۰. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۵ را به شکل روبه‌رو به مثلث‌هایی به ضلع یک تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از رئوس این شبکه‌بندی، برداری دل‌خواه به طول یک و موازی با یکی از اضلاع مثلث نسبت می‌دهیم. مجموع همه‌ی این بردارها چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۷۲۶ (۳) ۲۷۷۴ (۴) ۱۳۸۷ (۵) ۳۶۳

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۳۰ بهمن ۱۳۹۳ و با شرکت ۱۷۶۲۷ نفر از دانش‌آموزان پایه‌های اول، دوم و سوم دبیرستان در سراسر کشور برگزار گردید. دفترچه‌ی پیش رو مجموعه‌ی سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که توسط وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

زمان: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤالات: ۳۰

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱. در آزادراه زنجان-تبریز از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ صبح ۲۳۷۰ خودرو از عوارضی عبور کرده اند که همه آنها تک سرنشین یا دو سرنشین بوده اند. این خودروها در مجموع ۱۸۳۲۰ لیتر بنزین در مسیر مصرف کرده اند. می دانیم هر خودروی تک سرنشین، ۷ لیتر و هر خودروی دوسرنشین، ۸ لیتر بنزین در این مسیر مصرف کرده است. تعداد کل خودروهای تک سرنشین چند تاست؟

(۱) ۳۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۱۰۵۰ (۵) ۱۱۸۵

راه حل:

گزینه ی (۳) صحیح است.

فرض کنید تعداد خودروهای تک سرنشین و دو سرنشین را به ترتیب با x و y نشان دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + y = 2370 \\ 7x + 8y = 18320 \end{cases} \Rightarrow 7x + 8(2370 - x) = 18320 \Rightarrow 18960 - x = 18320 \Rightarrow x = 640$$

۲. در مثلث متساوی الساقین ABC که در آن $AB = AC$ ، نقاط X و Y روی پاره خط AC طوری قرار گرفته اند که X بین A و Y قرار دارد و به علاوه $BY = AX = BX$. اگر $\angle YBC = 10^\circ$ ، زاویه $\angle BAC$ چند درجه است؟

(۱) $\frac{95}{3}$ (۲) ۳۸ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱ (۵) $\frac{185}{4}$

راه حل:

گزینه ی (۳) صحیح است.

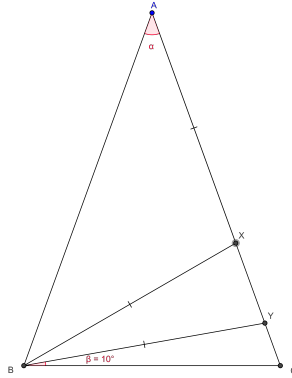
همانند شکل زیر فرض کنید $\angle BAX = \alpha$. می دانیم $AX = BX$ پس زاویه $\angle ABX = \alpha$ می شود از طرفی زاویه $\angle BXC$ زاویه ی خارجی مثلث ABX است پس $\angle BXC = 2\alpha$ طبق فرض مسئله می دانیم $BX = BY$ پس زاویه $\angle BYA = 2\alpha$ است. در مثلث ABC می دانیم:

$$\angle BAX = \alpha, AB = AC \Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

در مثلث BYC زاویه ی $\angle BYA$ زاویه ی خارجی است پس خواهیم داشت:

$$\angle YBC + \angle YCB = \angle BYA \Rightarrow 10^\circ = \angle YBC = 2\alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۱

۳. x و y دو عدد حقیقی هستند که $2^{x+1} = 18$ و $3^{-y} = 2$. مقدار xy چقدر است؟

- ۲ (۱)
-۱ (۲)
۲ (۳)
 $-\frac{1}{4}$ (۴)
 $\frac{1}{4}$ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۱) صحیح است.

چون $2^{x+1} = 18$ ، نتیجه می گیریم که $2^x = 9$ ، پس

$$2^x = 9 \Rightarrow 2^{xy} = 9^y = (3^2)^y = 3^{2y} = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Rightarrow xy = -2$$

می توان با لگاریتم گرفتن از دو رابطه ی بالا راه حل مشابهی برای مسئله ارائه کرد.

۴. چند عدد طبیعی کوچک تر از 1393 مثل a وجود دارد که $\underbrace{a^{a^{a^{\dots^a}}}}_{a \text{ بار}}$ مربع کامل باشد؟

- ۳۷ (۱)
۶۹۶ (۲)
۷۱۵ (۳)
۷۳۳ (۴)
۷۳۴ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۳) صحیح است.

دو حالت در نظر می گیریم.

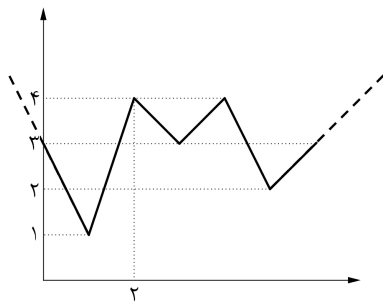
حالت (۱): a عددی زوج است. در این حالت، عدد مذکور حتماً مربع کامل است زیرا برابر است با a به توان عددی زوج.

تعداد اعداد زوج کوچک تر از 1393 برابر است با 696 .

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

حالت (۲): a عددی فرد است. در این حالت، عدد مذکور برابر است با a به توان عددی فرد، پس تنها در صورتی مربع کامل است که خود a مربع کامل باشد. تعداد اعداد فرد مربع کامل کوچکتر از 1393 برابر است با 19 . بنابراین تعداد a های با خاصیت مورد نظر، برابر است با $715 = 696 + 19$.

۵. نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در پایین می بینید. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی است که برای هر عدد حقیقی x ، $g(x) \leq f(x)$ حداکثر مقدار $g(2)$ کدام است؟



- ۰ (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)
- ۴ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۳) صحیح است.

با توجه به صعودی بودن تابع g ، برای هر $x \geq 2$ باید $g(x) \geq g(2)$ و بنابراین $f(x) \geq g(2)$ اما دقت کنید که کمترین مقدار f برای x های بیش تر یا مساوی مربوط به $x = 5$ است که مقدار $f(x)$ برابر ۲ می باشد. این موضوع نتیجه می دهد که حداکثر مقدار $g(2)$ برابر ۲ است. ضمناً به وضوح تابع صعودی زیر هم همه ی شرط های مسئله را برآورده می کند:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 5 \\ f(x) & 5 \leq x \end{cases}$$

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۶. در شهر نیستان قیمت نی‌ها با افزایش طول نی زیاد می‌شود. تاجر در شکرستان قصد وارد کردن نی از نیستان را دارد. در شکرستان لیوان‌ها به شکل مخروط ناقص با ارتفاع ۱۶ سانتی‌متر، قطر دهانه ۱۰ سانتی‌متر و قطر انتهای ۶ سانتی‌متر هستند. تاجر قصد دارد کم‌ترین پول را خرج کند ولی با توجه به قوانین شکرستان به هیچ وجه نی نباید کاملاً داخل لیوان قرار گیرد. اندازه نی‌هایی که او می‌خرد چقدر است؟ (از قطر نی صرف نظر می‌کنیم، یعنی نی را یک پاره خط فرض می‌کنیم.)

(۵) $10\sqrt{3}$

(۴) $2\sqrt{87}$

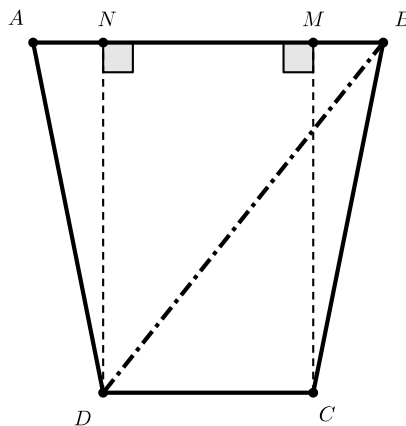
(۳) $8\sqrt{5}$

(۲) $2\sqrt{89}$

(۱) $2\sqrt{73}$

راه حل:

گزینه (۳) صحیح است.



در شکل بالا مقطعی از لیوان رسم شده است. در این شکل AB دهانه و CD انتهای لیوان است. نی‌هایی که تاجر می‌خرد از طرفی باید کم‌ترین طول را داشته باشند، و از طرف دیگر نباید به طور کامل در لیوان قرار بگیرند. در نتیجه این نی‌ها باید مانند پاره خط BD روی لبه لیوان قرار بگیرند.

$$AN + MB = AB - MN = AB - CD = 10 - 6 = 4$$

پس طبق تقارن شکل حول محور عمودی داریم $AN = MB = 2$. برای محاسبه BD از قضیه فیثاغورس استفاده

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

می کنیم.

$$BD^2 = BN^2 + ND^2 = (2 + 6)^2 + 16^2 = 8\sqrt{5}$$

۷. مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه ناتهی دارد که اختلاف بزرگترین و کوچکترین عضو آن ۶ باشد؟

۳۲ (۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۵۶ (۴) ۱۰۲۴ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۳) صحیح است.

برای انتخاب یک زیرمجموعه از $\{1, 2, \dots, 10\}$ که اختلاف بزرگترین و کوچکترین عضو آن ۶ است، ابتدا کوچکترین عضو را انتخاب می کنیم. این کار ۴ حالت دارد چرا که کوچکترین عضو می تواند یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، یا ۴ باشد. فرض کنید کوچکترین عضو را m بنامیم. پس بزرگترین عضو برابر $m + 6$ خواهد بود. برای انتخاب دیگر اعضای زیرمجموعه، ۳۲ حالت داریم چرا که دیگر اعضا، زیرمجموعه ای دلخواه از $\{m + 1, m + 2, m + 3, m + 4, m + 5\}$ هستند. پس در کل $4 \times 32 = 128$ حالت برای انتخاب این گونه مجموعه ها داریم.

۸. کشور شکرستان از سه استان نمکستان، فلفلستان و سماقستان تشکیل شده است که به ترتیب ۱۰، n و $2n$ شهر دارند. می دانیم تعداد شهروندان در شهرهای مختلف این کشور یک سان است و جمعیت کل کشور $n^2 + n + 1$ نفر است. عدد n در کدام یک از محدوده های زیر قرار دارد؟

۱۰ تا ۱ (۱) ۲۰ تا ۱۱ (۲) ۳۰ تا ۲۱ (۳) ۴۰ تا ۳۱ (۴) ۵۰ تا ۴۱ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۳) صحیح است.

فرض کنید جمعیت هر شهر k نفر باشد. پس باید

$$n^2 + n + 1 = (3n + 10)k$$

بنابراین

$$\left. \begin{array}{l} 3n + 10 \mid n^2 + n + 1 \Rightarrow 3n + 10 \mid 3n^2 + 3n + 3 \\ 3n + 10 \mid 3n^2 + 10n \end{array} \right\} \Rightarrow 3n + 10 \mid 7n - 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow 3n + 10 \mid 21n - 9 \\ 3n + 10 \mid 21n + 70 \end{array} \right\} \Rightarrow 3n + 10 \mid 79$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

و چون 79 عددی اول است و $3n + 10 > 1$ پس باید $3n + 10 = 79$ و در نتیجه $n = 23$.

۹. $ABCD$ دوزنقه ای است که در آن $AB \parallel CD$ و $CD = 3AB$. نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع BC و CD هستند و مساحت دوزنقه 32 است. مساحت مثلث AMN چه قدر است؟

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۲) صحیح است.

اگر مساحت مثلث ABC را برابر S_1 و مساحت مثلث ACD را برابر S_2 قرار دهیم و طبق فرض مسئله می دانیم $S_1 + S_2 = 32$ است.

مساحت مثلث ABM نصف مساحت مثلث ABC است زیرا دارای ارتفاع یکسان هستند ولی قاعده ی مثلث ABM نصف قاعده ی ABC است پس مساحتش برابر $\frac{S_1}{2}$ است به طور مشابه مساحت مثلث AND نصف ACD است پس برابر $\frac{S_2}{2}$ است.

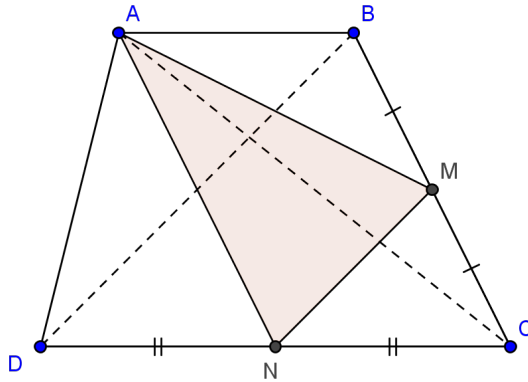
جمع مساحت های مثلث های ABD و BCD برابر کل دوزنقه و برابر 32 است ولی مساحت مثلث BCD سه برابر مساحت مثلث ABD است زیرا دارای ارتفاع یکسان هستند ولی قاعده ی مثلث BCD که ضلع CD باشد سه برابر قاعده ی مثلث ABD یعنی AB است. پس مساحت مثلث BCD برابر 24 است. در مثلث BCD داریم:

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$$

پس با استفاده از قضیه تالس مثلث CMN با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ با مثلث CBD متشابه است پس مساحت مثلث CMN ربع مساحت مثلث CBD است که برابر 6 می شود.

جمع مساحت مثلث های ABM ، AND و CMN برابر با $22 = 16 + 6 = 22$ است پس مساحت باقی مانده از مساحت کل همان مساحت مثلث AMN است که برابر $10 = 32 - 22$ می شود.

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۲

۱۰. برای چند مقدار صحیح n دو چندجمله‌ای $x^3 + nx - 1$ و $x^3 + x - n^2$ ریشه حقیقی مشترک دارند؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر x_0 ریشه‌ی حقیقی مشترک دو چندجمله‌ای $x^3 + nx - 1$ و $x^3 + x - n^2$ باشد، باید ریشه‌ی تفاضل آن‌ها نیز باشد، یعنی

$$(x_0 - n^2) - (nx_0 - 1) = x_0(1 - n) + (1 - n)(1 + n) = (1 - n)(x_0 + n + 1) = 0$$

پس یا $n = 1$ یا $x_0 = -n - 1$ اگر $n = 1$ باشد، این دو چندجمله‌ای یک‌سان هستند و همه‌ی ریشه‌های آن‌ها یکی است. ضمناً چون چندجمله‌ای درجه سوم حتماً ریشه‌ی حقیقی دارد، این دو ریشه‌ی حقیقی مشترک خواهند داشت. اما اگر $x_0 = -n - 1$

$$(-n - 1)^3 + (-n - 1) - n^2 = 0 \Rightarrow n^3 + 4n^2 + 4n + 2 = 0$$

چون n صحیح است، با توجه به رابطه‌ی بالا باید زوج باشد، یعنی عدد صحیح m باشد که $n = 2m$. با جای‌گزین کردن این رابطه در بالا به دست می‌آید که:

$$8m^3 + 16m^2 + 4m + 2 = 0 \Rightarrow 4m^3 + 8m^2 + 2m + 1 = 0$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

که تساوی آخر به دلیل زوج بودن سمت راست و فرد بودن سمت چپ امکان ندارد. پس در این حالت دو معادله ریشه‌ی مشترکی ندارند.

۱۱. حداکثر چند مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد که طول اضلاع آن‌ها از بین اعداد ۱، ۲، ۴، ۸، ... و 2^{10} باشند؟ (طول اضلاع می‌توانند با هم برابر باشند).

۵۵ (۱) ۶۶ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۶۵ (۵)

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

توجه کنید که اعداد داده شده توان‌های دو هستند و نیز شرط لازم و کافی برای اینکه بتوان با سه طول داده شده مثلث ساخت این است که در نامساوی مثلث صدق کنند یعنی جمع دو طول کمتر بیش از بیشترین طول باشد. اکنون فرض کنید سه طول مورد نظر 2^x و 2^y و 2^z باشند که $x \geq y \geq z$ در این صورت اگر $x > y$ خواهیم داشت:

$$2^z + 2^y \leq 2^y + 2^y = 2^{y+1} \leq 2^x$$

بنابراین سه طول داده شده تشکیل مثلث نمی‌دهند پس باید $x = y$ باشد یعنی مثلث‌ها فقط می‌توانند متساوی الساقین باشند و به علاوه z می‌تواند هرکدام از اعداد 0 تا x باشد که هرکدام مثلثی جدید می‌شود. یعنی $x + 1$ مثلث با طول بزرگترین ضلع 2^x داریم و $0 \leq x \leq 10$. پس در کل

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 = 66$$

مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد.

۱۲. برای عدد طبیعی n چندجمله‌ای $P_n(x)$ را برابر $(x+n)^2$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم

$$P_{1393}(P_{1392}(\dots(P_1(x))\dots))$$

یک چندجمله‌ای از درجه 2^{1393} است. ضریب $x^{2^{1393}-1}$ در این چندجمله‌ای برابر کدام است؟

۰ (۱) 2^{1392} (۲) $2^{1392} + 1$ (۳) $2^{1393} - 1$ (۴) 2^{1393} (۵)

راه حل:

گزینه‌ی (۵) صحیح است.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

به استقرا روی n نشان می‌دهیم که $Q_n(x) = P_n(P_{n-1}(\dots(P_1(x))\dots))$ یک چندجمله‌ای از درجه 2^n است که ضریب جملات x^{2^n} و $x^{2^{n-1}}$ در آن به ترتیب ۱ و 2^n هستند.

در مورد $P_1(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ که همه‌ی نکات فوق درست هستند. حالت فرض کنید که احکام بالا تا n درست باشد یعنی:

$$Q_n(x) = x^{2^n} + 2^n x^{2^{n-1}} + \dots$$

حال

$$Q_{n+1}(x) = P_{n+1}(Q_n(x)) = (x^{2^n} + 2^n x^{2^{n-1}} + \dots + n)^2 = x^{2^{n+1}} + 2(x^{2^n})(2^n x^{2^{n-1}}) + \dots$$

دقت کنید که مابقی جملات نمی‌توانند منجر به جمله‌های با درجه‌ی 2^n یا $2^n - 1$ شوند. پس عدد خواسته شده در صورت مسئله برابر $2^{13 \cdot 93}$ خواهد بود.

۱۳. فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $B = \{1, 2, \dots, 100\}$. تعداد توابع $f: A \rightarrow B$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی m و n که $2 \leq m, n \leq 10$ و $mn \leq 100$ رابطه $f(mn) = mf(n)$ برقرار باشد.

$$\begin{matrix} 10^2 & (1) & 10^2 & (2) & 10^4 & (3) & 10^5 & (4) & 2 \times 10^5 & (5) \end{matrix}$$

راه حل:

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

همه‌ی زوج‌های مرتب (m, n) که در شرایط $2 \leq m, n \leq 10$ و $mn \leq 100$ صدق می‌کنند عبارتند از

$$(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 2)$$

که بنابر خاصیت تابع f ، این روابط را به دست می‌آوریم

$$f(6) = 2f(3), f(8) = 2f(4), f(10) = 2f(5), f(6) = 3f(2),$$

$$f(9) = 3f(3), f(8) = 4f(2), f(10) = 5f(2)$$

با توجه به روابط بالا، اگر مقدار $f(2)$ را مشخص کنیم، مقادیر $f(n)$ به ازای $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ مشخص می‌شود. در واقع اگر قرار دهیم $f(2) = a$ ، به دست می‌آوریم.

$$f(3) = 3a/2, f(4) = 2a, f(5) = 5a/2, f(6) = 3a, f(8) = 4a, f(9) = 9a/2, f(10) = 5a$$

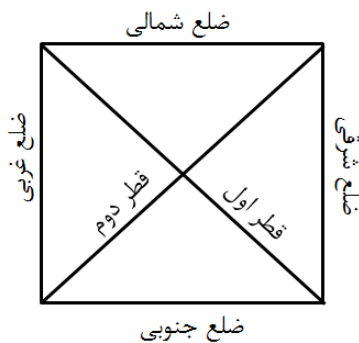
سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

و در نتیجه a عددی طبیعی و زوج است و از آن جا که همه‌ی اعداد بالا باید عضو مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 100\}$ باشند، باید $a \leq 20$.

برعکس، اگر $f(2)$ هر عدد طبیعی زوج و کوچکتر یا مساوی ۲۰ باشد و مقادیر $f(n)$ را برای $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ طبق روابط بالا تعیین کنیم و سپس مقدار $f(1)$ و $f(7)$ را نیز به دلخواه از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 100\}$ انتخاب کنیم، تابع حاصل در شرایط مسأله صدق می‌کند. پس برای $f(2)$ ، ۱۰ انتخاب وجود دارد و برای $f(1)$ و $f(7)$ نیز هر کدام ۱۰۰ انتخاب وجود دارد. بنابراین تعداد توابع مطلوب برابر است با

$$10 \times 100 \times 100 = 10^5$$

۱۴. پادشاه شکرستان که قصری به شکل مربع دارد، به تازگی کتیبه‌ای به خط نمکی مربوط به یکی از اجدادش پیدا کرده که ریاضی‌دان بوده است. پس از ترجمه کتیبه توسط زبان‌شناسان مشخص شد که در نقطه‌های مختلفی از شهر، گنج‌هایی وجود دارد. ترجمه کتیبه را در زیر می‌بینید.



گنج‌ها در نقطه‌هایی از شهر پنهان گشته‌اند که اگر هر کدام از آن‌ها را به ترتیب نسبت به ضلع شمالی، ضلع جنوبی، ضلع شرقی، ضلع غربی، قطر اول و در نهایت قطر دوم قصر قرینه کنیم به جای اول بازگرد.

چند گنج در شهر پنهان شده است؟

۸ (۵)

۴ (۴)

۲ (۳)

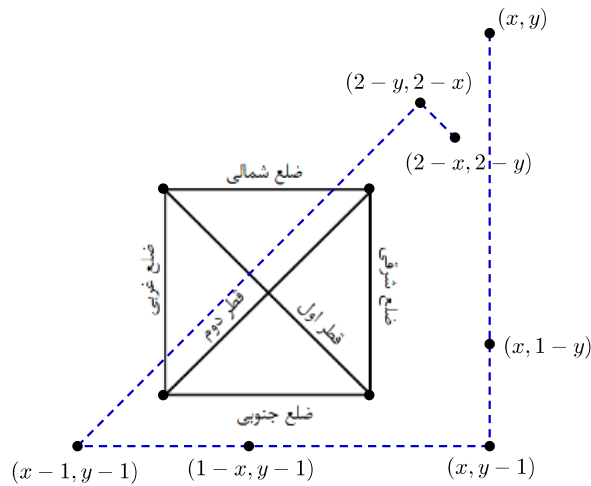
۱ (۲)

۰ (۱)

راه حل:

گزینه (۲) صحیح است.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



فرض کنید راس‌های مربع در نقاط $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 1)$ واقع باشند. در شکل روبرو با شروع از نقطه دل‌خواه (x, y) مختصات نقاط به دست آمده بعد از هر تقارن را مشخص کرده‌ایم. برای این که نقطه آخر بر نقطه اول منطبق شود باید داشته باشیم $x - x = 2 - x$ و $y - y = 2 - y$. پس دقیقاً یک نقطه با این خاصیت وجود دارد.

۱۵. مهندس شش‌دیواری قصد دارد نقشه‌ی خانه‌ای با شش دیوار را طراحی کند. او می‌خواهد سه تا از دیوارها در امتداد شمالی-جنوبی و با طول‌های ۲، ۴ و ۶ متر باشند و سه تا از دیوارها نیز در امتداد شرقی-غربی و با طول‌های ۴، ۶ و ۱۰ متر باشند. او چند نقشه‌ی مختلف با این ویژگی‌ها می‌تواند بکشد؟

- ۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵)

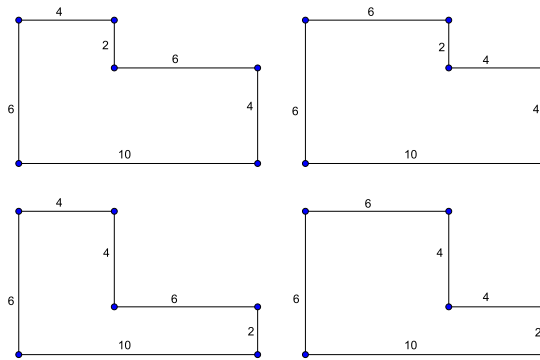
راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

در نقشه‌ی ساختمان، ابتدا دیوار با طول ۱۰ را ثابت در نظر می‌گیریم. از آنجایی که دیوارها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، دو دیوار افقی با طول‌های ۴ و ۶، هر دو یا در بالا و یا در پایین دیوار با طول ۱۰ هستند. فرض کنید دیوارهای افقی با طول‌های ۴ و ۶، هر دو در بالای دیوار با طول ۱۰ باشند. پس به خاطر تقارن موجود، در نهایت تعداد حالات را در ۲ ضرب خواهیم کرد. به همین ترتیب دیوارهای عمودی به طول‌های ۲ و ۴، هر دو یا در چپ و یا در راست دیوار عمودی به طول ۶ قرار دارند. باز هم فرض می‌کنیم این دو دیوار سمت راست دیوار عمودی به طول ۶ قرار داشته باشند و جواب این حالت را نیز در ۲ ضرب خواهیم کرد.

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

با این مفروضات برای چیدن دو دیوار افقی به طول های ۴ و ۶، و دو دیوار عمودی به طول های ۲ و ۴، با توجه به این که دیوار افقی با طول ۴ بالاتر باشد یا دیوار افقی با طول ۶ و این که دیوار عمودی با طول ۲ راست تر باشد یا دیوار عمودی با طول ۴، چهار حالت مختلف معتبر خواهیم داشت که در شکل زیر مشخص اند.



پس در کل $16 = 4 \times 2 \times 2$ حالت خواهیم داشت.

۱۶. می دانیم عددی طبیعی در مبنای دو، 3^0 رقمی است. در مورد تعداد ارقام این عدد در مبنای سه چه می توان گفت؟

(۱) حتماً ۱۸ رقمی است.

(۲) حتماً ۱۹ رقمی است.

(۳) حتماً ۲۰ رقمی است.

(۴) برای بعضی اعداد ۱۸ رقمی و برای بعضی ۱۹ رقمی است.

(۵) برای بعضی اعداد ۱۹ رقمی و برای بعضی ۲۰ رقمی است. راه حل:

گزینه ی (۲) صحیح است.

از آنجایی که این عدد در مبنای دو، 3^0 رقمی است، پس حداقل 2^{29} و حداکثر $2^{30} - 1$ است.

داریم

$$2^{29} = 2^{24} \times 2^5 = (2^8)^3 \times 2^5 = (256)^3 \times 32 > (243)^3 \times 27 = 3^{15} \times 3^3 = 3^{18}$$

پس 2^{29} حداقل در مبنای ۳ حداقل ۱۹ رقمی است.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
 2^{30} &= 2^{11} \times 2^{11} \times 2^8 = 2048 \times 2048 \times 256 \\
 &= (2048 \times \sqrt{1,1}) \times (2048 \times \sqrt{1,1}) \times \frac{256}{1,1} \\
 &< (2048 \times 1,05) \times (2048 \times 1,05) \times \frac{256}{1,1} \quad (1) \\
 &< 2160 \times 2160 \times 240 < 2187 \times 2187 \times 243 \\
 &= 3^7 \times 3^7 \times 3^5 = 3^{19}
 \end{aligned}$$

پس $2^{30} - 1$ از $3^{19} - 1$ کمتر بوده و در نتیجه این عدد حداکثر ۱۹ رقمی است.

پس هر عدد که در مبنای دو، ۳۰ رقمی است، در بازه‌ی $[2^{29}, 2^{30} - 1]$ قرار داشته و با توجه به آنچه گفته شد، ۱۹ رقم دارد.

۱۷. عدد صحیح n را «نه چندان بزرگ» می‌گوییم هرگاه برای هر دو عدد مثبت x و y که $(x+1)(y+1) = 2$ داشته باشیم $xy + \frac{1}{xy} \geq n$ بزرگ‌ترین عدد نه چندان بزرگ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵)

راه حل:

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

برای هر دو عدد حقیقی x و y می‌دانیم که $(x-y)^2 \geq 0$ و این یعنی $(x+y)^2 \geq 4xy$. حال اگر x و y در رابطه‌ی $(x+1)(y+1) = 2$ صدق کنند داریم:

$$xy + x + y = 1 \Rightarrow (1 - xy)^2 \geq 4xy \Rightarrow (xy)^2 + 1 \geq 6xy \Rightarrow xy + \frac{1}{xy} \geq 6$$

از طرف دیگر برای این که در این نابرابر تساوی اتفاق بیفتد باید $x = y$ باشد که شرط $(x+1)(y+1) = 2$ نتیجه می‌دهد که $x = y = \sqrt{2} - 1$ در این حالت:

$$xy + \frac{1}{xy} = (\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} = 3 - 2\sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

۱۸. رئوس یک پنج‌ضلعی محدب را به ترتیب ساعت‌گرد A, B, C, D, E می‌نامیم. می‌دانیم $\angle BAE = 2\angle DAC = 93^\circ$ و $\angle EDA = \angle DCA$ و $\angle BCA = \angle CDA$. اگر $AD = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2$ آن‌گاه مقدار $\frac{AE}{AB}$ برابر کدام

گزینه است؟

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۳ (۵)

۳ sin ۹۳° (۴)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3} \sin ۹۳^\circ$ (۱)

راه حل:

گزینه ی (۵) صحیح است.

مطابق فرض مسئله می دانیم

$$\angle EAB = 2\angle DAC \Rightarrow \angle EAD + \angle CAB = \angle DAC$$

نقطه ی X را مطابق شکل روی ضلع DC طوری انتخاب می کنیم که

$$\angle XAC = \angle EAD$$

$$\angle DAX = \angle CAB$$

دو مثلث XAC و EAD متشابه هستند زیرا

$$\angle ACX = \angle ADE, \angle EAD = \angle XAC$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{AX} = \frac{AD}{AC} \quad (۱)$$

همچنین دو مثلث XAD و BAC متشابه هستند زیرا

$$\angle ADX = \angle ACB, \angle DAX = \angle CAB$$

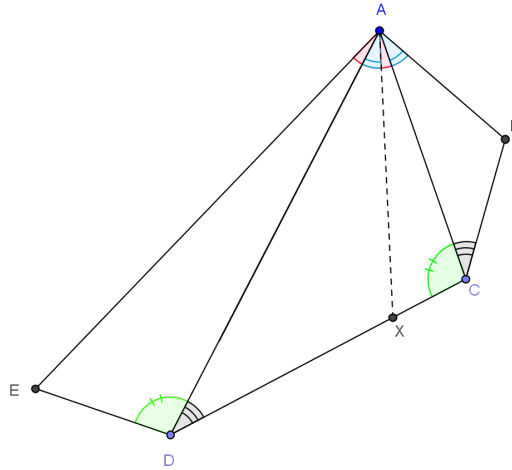
پس خواهیم داشت:

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AD}{AC} \quad (۲)$$

در نهایت اگر رابطه ی اول را در رابطه ی دوم ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{AB} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = ۳$$

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۳

۱۹. x و y دو عدد حقیقی هستند که $\sin(x) + \cos(y) = 1$. بیش‌ترین مقدار $\sin(y) + \cos(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
(۵) ۲

راه حل:

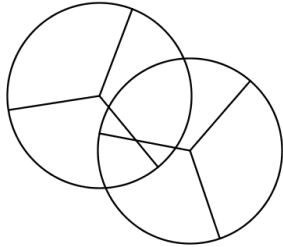
گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\begin{aligned}
 1 + (\sin(y) + \cos(x))^2 &= (\sin(x) + \cos(y))^2 + (\sin(y) + \cos(x))^2 \\
 &= \sin^2(x) + \cos^2(x) + \sin^2(y) + \cos^2(y) \\
 &\quad + 2(\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)) \\
 &= 2 + 2\sin(x+y) \\
 &\leq 4
 \end{aligned}$$

پس $|\sin(y) + \cos(x)| \leq \sqrt{3}$. یعنی حداکثر مقدار ممکن برای $\sin(y) + \cos(x)$ همین $\sqrt{3}$ است. از سوی دیگر برای تساوی اگر $x = \frac{\pi}{6}$ و $y = \frac{\pi}{3}$ باشد، داریم

$$\sin(x) + \cos(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \sin(y) + \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. دو صفحه پلاستیکی شفاف و رنگی به شکل دو دایره برابر داریم که هر کدام از آنها توسط سه شعاع با زاویه های 120° ، به سه قسمت برابر تقسیم شده اند. قسمت ها دارای رنگ های متفاوت هستند. هرگاه دو رنگ روی هم قرار گیرند، رنگی جدید ایجاد می شود و رنگ های ترکیبی ایجاد شده نیز با یکدیگر متفاوت اند. مثلاً در شکل رو به رو ۱۰ رنگ مختلف به وجود آمده است.

حداکثر تعداد رنگ های مختلفی که در یک وضعیت قرار گرفتن صفحه ها می تواند به وجود بیاید چند تاست؟

۱۵ (۵)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

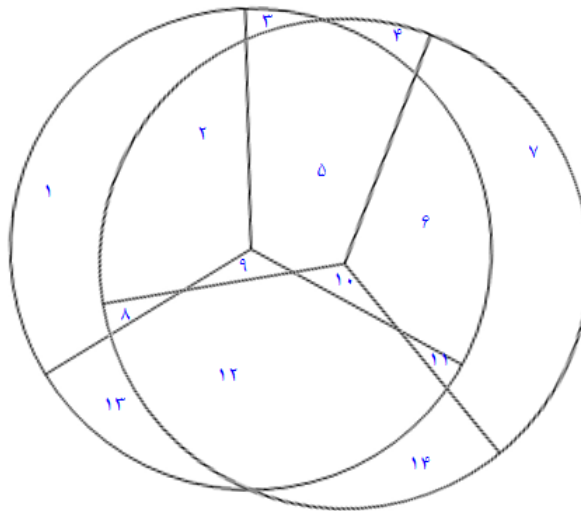
۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

راه حل:

گزینه ی (۴) صحیح است.

در ابتدا ۶ رنگ داریم و برای ایجاد هر رنگ جدید باید یک رنگ از یک صفحه بر روی رنگی از صفحه ی دیگر قرار گیرد و چون هر صفحه ای سه رنگ دارد این کار به 3×3 طریق ممکن است. بنابراین حداکثر ۹ رنگ جدید ایجاد می شود. پس نمی توان بیش از ۱۵ رنگ به وجود آورد. به علاوه در شکل زیر مثالی که در آن ۱۴ رنگ به وجود آمده را مشاهده می کنید:

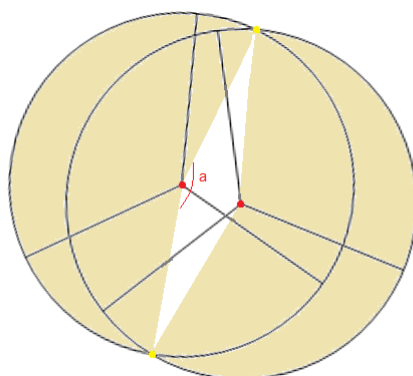


شکل ۱

در ادامه ثابت می کنیم چرا به وجود آوردن ۱۵ رنگ نیز غیر ممکن است. توجه کنید که اگر مراکز دو صفحه روی هم

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

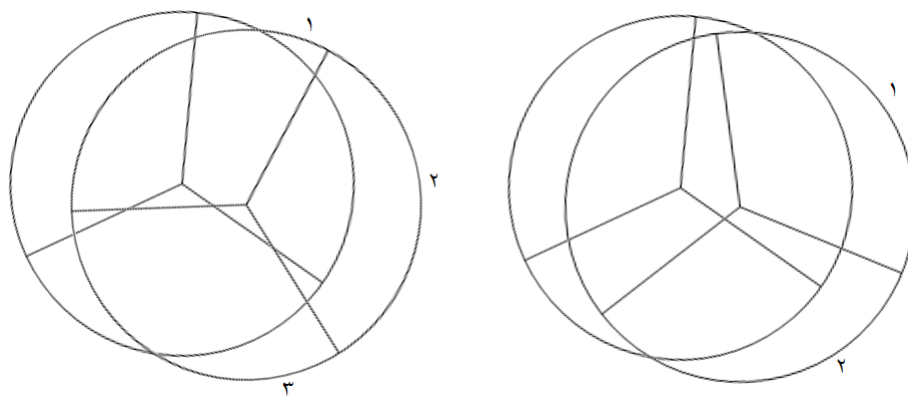
قرار گیرد رنگ‌های ابتدایی از بین می‌روند و اگر دو دایره هم‌دیگر را قطع نکنند ۶ رنگ خواهیم داشت. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم دو دایره در دو نقطه متقاطع اند پس روی هر کدام از دو دایره دو کمان تشکیل می‌شود که یکی درون دایره‌ی دیگر است و یکی بیرون آن و می‌دانیم طول کمان بیرونی بیشتر از کمان درونی است.



شکل ۲

در واقع همان‌طور که در شکل بالا مشاهده می‌کنید مراکز دو صفحه و دو نقطه‌ی تقاطع تشکیل یک لوزی می‌دهند و اندازه‌ی کمان درونی که برابر با زاویه‌ی a در شکل فوق است کمتر از نیم‌صفحه خواهد بود.

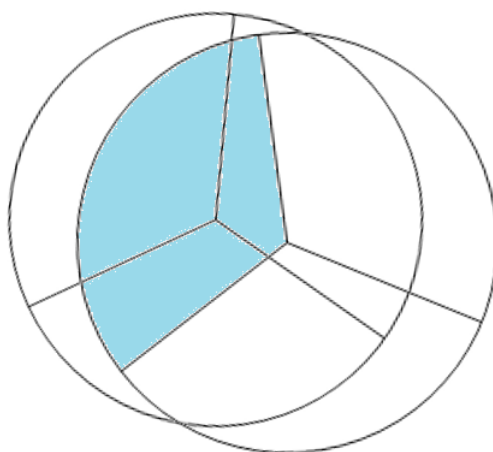
حال توجه کنید که هر دایره به سه کمان 120° درجه تقسیم شده که هر کمان به یک رنگ است بنابراین چون کمان‌های بیرونی بیش از نیم‌صفحه اند نمی‌توانند یک رنگ باشند پس دو یا سه رنگ دارند. که در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



شکل ۳

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

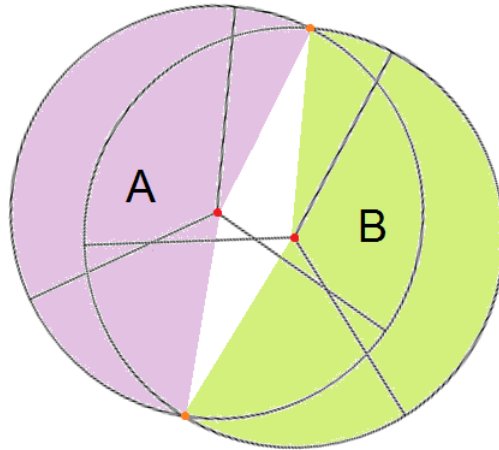
وقتی کمان بیرونی یکی از دایره‌ها دو رنگ داشته باشد به این معنی است که یکی از قسمت‌های آن به طور کامل درون دایره‌ی دیگر قرار دارد - مانند قسمتی که در شکل ۵ به رنگ آبی است - در نتیجه رنگ اولیه‌ی آن به وجود نمی‌آید پس در این حالت نمی‌تواند ۱۵ رنگ به وجود آید.



شکل ۴

بنابراین تنها بررسی حالتی می‌ماند که کمان بیرونی هر دو دایره سه رنگ داشته باشند. در این حالت چون کمان‌های بیرونی سه رنگ دارند و طول هر کمان رنگی 120° درجه است یک قسمت رنگی از هر دو دایره خواهد بود که مرکز بیرونی آن به طور کامل در کمان بیرونی آن دایره قرار گیرد. اکنون ناحیه‌های شکل را به ترتیب زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۵

حال بنا بر گفته های بالا یک قسمت رنگی به تمامی در ناحیه A و یک قسمت رنگی دیگر به تمامی در ناحیه B قراردارند و در نتیجه رنگ حاصل از روی هم قرار گرفتن آن دو به وجود نمی آید. بنابراین ثابت می شود حداکثر ۱۴ رنگ قابل تولید است.

۲۱. یک زیرمجموعه ناتهی از اعداد طبیعی را «منظم» گوئیم اگر میانگین اعضای آن عددی طبیعی باشد و آن را «فوق منظم» گوئیم اگر همه زیرمجموعه های ناتهی آن منظم باشند. تعداد زیرمجموعه های فوق منظم پنج عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 67\}$ چند است؟

(۱) ۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۹ (۵) ۴۷

راه حل:

گزینه ی (۴) صحیح است.

مجموعه ی مورد نظر را $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ در نظر می گیریم. منظم بودن زیرمجموعه های A معادل با شرایط زیر است:

(آ) برای هر i, j متمایز، $2|a_i + a_j$.

(ب) برای هر i, j, k متمایز، $3|a_i + a_j + a_k$.

(ج) برای هر i, j, k, l متمایز، $4|a_i + a_j + a_k + a_l$.

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

$$(د) \quad 5|a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

شرط (آ) معادل است با این که همه a_i ها دارای زوجیت یکسان باشند. شرط (ب) معادل است با این که همه a_i به پیمانه ۳ همبسته باشند، زیرا اگر i, j, k, k' متمایز باشند، بنابر شرط (ب)،

$$\left. \begin{array}{l} 3|a_i + a_j + a_k \\ 3|a_i + a_j + a_{k'} \end{array} \right\} \Rightarrow a_k \equiv a_{k'}$$

مشابهاً شرط (ج) معادل است با این که همه a_i به پیمانه ۴ همبسته باشند. بنابراین شرط (ج)، شرط (آ) را نتیجه می دهد. از طرف دیگر، شرط های (ب) و (ج) در کنار هم، معادل با این هستند که همه a_i به پیمانه ۱۲ همبسته باشند.

پس مجموعه ی پنج عضوی A فوق منظم است، اگر و تنها اگر همه ی اعضای آن به پیمانه ۱۲ همبسته باشند و جمع اعضای آن بر ۵ بخش پذیر باشد.

اکنون توجه کنید که هر عدد طبیعی a را می توان به صورت $12b + t$ نمایش داد که b عددی صحیح و نامنفی است و $1 \leq t \leq 12$. پس a_i ها را به شکل $a_i = 12b_i + t_i$ نمایش می دهیم. از آن جا که a_i ها باید به پیمانه ۱۲ همبسته باشند، پس t_i ها با هم برابرند. پس می توان نوشت $a_i = 12b_i + t$.

اکنون داریم

$$a_1 + \dots + a_5 = 12(b_1 + \dots + b_5) + 5t$$

بنابراین شرط این که مجموع a_i ها بر ۵ بخش پذیر باشد، معادل با این است که مجموع b_i ها بر ۵ بخش پذیر باشد. اما از آن جا که $a_i \leq 67$ پس $b_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. همچنین چون a_i ها متمایزند، پس b_i ها نیز باید متمایز باشند. به راحتی می توان دید که تنها دو زیرمجموعه ی پنج عضوی از $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ وجود دارد که مجموع اعضای آن ها بر پنج بخش پذیر است. که عبارت اند از:

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

در حالت اول، a_i ها عبارتند از $\{t, 12+t, 24+t, 36+t, 48+t\}$ که t هر یک از اعداد $1, 2, \dots, 12$ می تواند باشد. پس در این حالت ۱۲ زیرمجموعه ی فوق منظم پیدا کردیم.

در حالت دوم، a_i ها عبارتند از $\{t, 12+t, 24+t, 36+t, 48+t, 60+t\}$ که در این حالت برای این که $60+t \leq 67$ لازم است که $t \leq 7$. پس در این حالت برای t هفت حالت $1, 2, \dots, 7$ وجود دارد.

بنابراین در مجموع ۱۹ حالت وجود دارد.

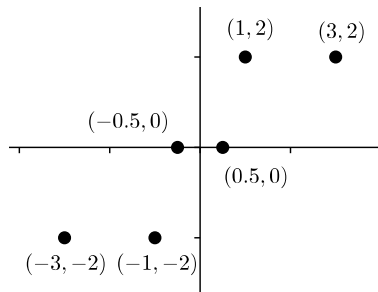
سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۲. شش نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آنها هم خط نیستند. در بین زوایایی که این نقاط تشکیل می دهند، حداکثر چند زاویه در بازه $(90^\circ, 180^\circ)$ وجود دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰ (۵) ۲۴

راه حل:

گزینه (۴) صحیح است.



با این نقاط $(\frac{6}{3})$ مثلث می توان ساخت و در هر مثلث حداکثر یک زاویه منفرجه خواهیم داشت. پس در کل حداکثر $20 = (\frac{6}{3})$ زاویه در بازه $(90^\circ, 180^\circ)$ خواهیم داشت. شکل بالا مثالی از این تعداد زاویه است.

۲۳. نقطه P روی کمان BC از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل A نیست) قرار دارد. می دانیم $AB = 2$ ، $AC = 3$ و $BC = 4$. نقاط M و N روی خط BC قرار دارند به طوری که B بین C و M است و C بین M و N است. می دانیم $MA = PN$ و $MA = PN$ مماس هستند و AP خط BC را در نقطه T قطع می کند. اندازه PT چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{5\sqrt{13}}{7}$ (۴) $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ (۵) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

راه حل:

گزینه (۵) صحیح است.

خطوط MA و NP بر دایره مماس هستند پس قوت نقطه N نسبت به دایره برابر با

$$NP^2 = NC \cdot NB$$

است و قوت نقطه M نسبت به دایره برابر با

$$MA^2 = MB \cdot MC$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

طبق فرض مسئله می دانیم $NP^2 = MA^2$ پس خواهیم داشت:

$$MA^2 = MB \cdot MC = MB^2 + 4MB = (MB + 2)^2 - 4$$

$$NP^2 = NC \cdot NB = NC^2 + 4NC = (NC + 2)^2 - 4$$

$$\Rightarrow (MB + 2)^2 = (NC + 2)^2 \Rightarrow (MB - NC) \cdot (MB + NC + 4) = 0 \Rightarrow MB = NC$$

طبق قضیه ی سینوسها در مثلث ABT خواهیم داشت:

$$\frac{MA}{\sin(ATM)} = \frac{MT}{\sin(MAT)}$$

طبق قضیه ی سینوسها در مثلث NPT خواهیم داشت:

$$\frac{PN}{\sin(PTN)} = \frac{NT}{\sin(TPN)}$$

زاویه ی ظلّی NPA برابر نصف کمان ACP و زاویه ی ظلّی MAP برابر نصف کمان ABP است پس دو زاویه ی TPN و MAT مکمل یکدیگر و $\sin(TPN) = \sin(MAT)$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{MA \cdot \sin(MAT)}{\sin(ATM)} = \frac{PN \cdot \sin(TPN)}{\sin(PTN)}$$

$$\Rightarrow MT = NT \Rightarrow BT = CT$$

برای بدست آوردن طول PT ابتدا طول AT یعنی میانه مثلث را محاسبه می کنیم.

طول میانه ی مثلث با استفاده از رابطه ی زیر که در انتها اثبات خواهیم کرد محاسبه می شود.

$$AT^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

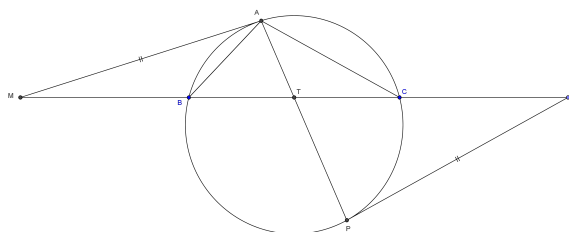
$$\Rightarrow AT = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

قوت نقطه ی T نسبت به دایره برابر است با:

$$BT \cdot TC = AT \cdot TP$$

$$\Rightarrow TP = \frac{BT \cdot TC}{AT} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۴

بدست آوردن طول میانه یک مثلث : همانطور که در شکل زیر مشاهده می کنید AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC و N وسط AC قرار دارد.

با استفاده از قضیه‌ی کسینوسها در مثلث MNC خواهیم داشت:

$$-2 \cdot MN \cdot NC \cdot \cos(MNC) = MC^2 - MN^2 - NC^2 \quad (1)$$

و با استفاده از قضیه‌ی کسینوسها در مثلث ANM خواهیم داشت:

$$-2 \cdot MN \cdot AN \cdot \cos(180^\circ - MNC) = AM^2 - MN^2 - AN^2$$

$$\Rightarrow -2 \cdot MN \cdot NC \cdot \cos(MNC) = -AM^2 + MN^2 + AN^2 \quad (2)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱ و ۲ داریم:

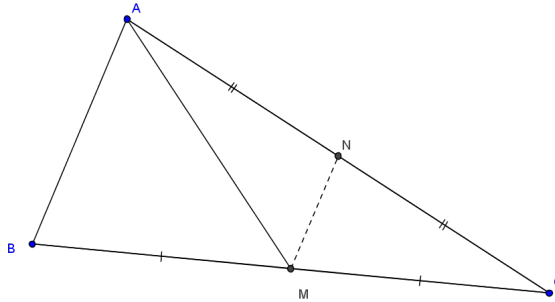
$$MC^2 - MN^2 - NC^2 = -AM^2 + MN^2 + AN^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = 2AN^2 + 2MN^2 - MC^2$$

از طرفی طبق قضیه‌ی تالس MN برابر نصف AB و موازی آن است. پس

$$AM^2 = 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۴-۱

۲۴. عدد طبیعی M را خوب می نامیم هرگاه اعداد طبیعی نه لزوماً متمایز a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) یافت شوند به طوری که $M = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ و خواص زیر برقرار باشد.

(آ) M بر توان سوم هیچ عدد طبیعی بزرگتر از یکی بخش پذیر نیست.

(ب) اگر $1 \leq i \leq n$ آن گاه $a_{i-1}a_{i+1}$ بر a_i بخش پذیر است. ($a_{n+1} = a_1$ و $a_0 = a_n$)

چند عدد خوب کوچکتر از ۲۰۱۵ داریم؟

۲۲ (۱) ۲۶ (۲) ۲۹ (۳) ۴۴ (۴) ۷۲ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۳) صحیح است.

ادعا می کنیم عدد طبیعی M خوب است اگر و تنها اگر این عدد مربع کامل باشد.

اثبات: ابتدا فرض کنید عدد طبیعی M خوب باشد. در اینصورت اعداد a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) وجود دارند که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $a_{i-1}a_{i+1}$ بر a_i بخش پذیر باشد. حال فرض کنید در M ، عامل اول p وجود داشته باشد. پس چون $M = a_1 a_2 \dots a_n$ ، a_j وجود دارد که بر p بخش پذیر باشد. از طرفی چون $a_{j-1}a_{j+1}$ بر a_j بخش پذیر است، پس حداقل یکی از اعداد a_{j-1} یا a_{j+1} بر p بخش پذیر هستند. پس $M = a_1 a_2 \dots a_n$ حداقل بر p^2 بخش پذیر است. با توجه به فرض سوال، M نمی تواند بر p^3 بخش پذیر باشد. پس برای هر عامل اول p در M ، M دقیقاً بر p^2 بخش پذیر است. پس توان همه ی عوامل اول M ، دقیقاً برابر ۲ است.

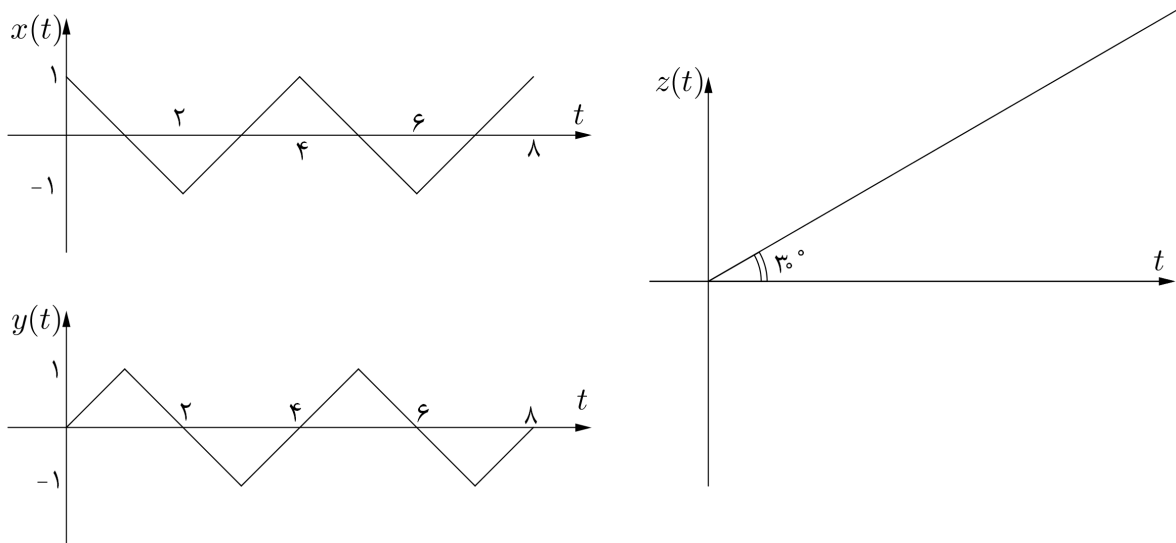
از طرف دیگر فرض کنید توان هر عامل اول M برابر ۲ باشد. پس عدد طبیعی r وجود دارد که $M = r^2$. حال دنباله معرفی شده در زیر خواص مورد نظر صورت سوال را داشته و در نتیجه M عدد خوبی خواهد بود.

$$n = 3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = r, \quad a_3 = r$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

به حل مسأله باز می گردیم. با توجه به ادعا، باید تعداد اعداد کوچکتر از 2015 را بیابیم که مربع کامل هستند و توان هر عامل اول آن ها دقیقاً 2 است. با توجه به این که $44 \times 44 = 1936$ و $45 \times 45 = 2025$ پس اعداد خوب مورد نظر دقیقاً k^2 هایی هستند که $1 \leq k \leq 44$ و از هیچ عامل اولی بیش از یکی ندارد، که با یک بررسی ساده مشخص می شود این اعداد عبارت اند از $1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 6^2, 7^2, 10^2, 11^2, 13^2, 14^2, 15^2, 17^2, 19^2, 21^2, 22^2, 23^2,$
 $26^2, 29^2, 30^2, 31^2, 33^2, 34^2, 35^2, 37^2, 38^2, 39^2, 41^2, 42^2, 43^2$ که تعداد آن ها 29 تا است.

۲۵. متحرکی در فضا به گونه ای حرکت می کند که در لحظه t در نقطه $(x(t), y(t), z(t))$ قرار دارد. اگر نمودارهای $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر حسب t به شکل های زیر باشند، مسافتی که این متحرک از $t = 0$ تا $t = 8$ طی می کند برابر کدام گزینه است؟



- $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (۱) $4\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۲) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۳) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۴) $16\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۵)

راه حل:

گزینه ی (۴) صحیح است.

اگر به مسیر حرکت این متحرک کمی فکر کنیم، خواهیم فهمید که در هر کدام از بازه های $[0, 1]$ ، $[1, 2]$ ، ... و $[7, 8]$ که سه مؤلفه ی حرکت آن به صورت خط در آمده است، خود متحرک هم در فضا روی پاره خط هایی حرکت می کرده است. پس کافی است که طول هر کدام از این پاره خط ها را یافته و با هم جمع کنیم.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

از طرف دیگر با توجه به شباهت حرکت متحرک در هر کدام از بازه‌ها طول این ۸ پاره‌خط با هم برابر است، پس کافی است طول یکی از آن‌ها مثلاً پاره‌خط مربوط به بازه‌ی اول را یافته و در ۸ ضرب کنیم.

متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ در نقطه‌ی $(1, 0, 0)$ و در لحظه‌ی $t = 1$ در نقطه‌ی $(0, 1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ قرار دارد. بنابراین طول طی شده در بازه‌ی $[0, 1]$ برابر است با:

$$\sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

پس کل مسافت طی شده از $t = 0$ تا $t = 8$ برابر $8\sqrt{\frac{7}{3}}$ خواهد بود.

۲۶. «پشیزها» موجوداتی میکروسکوپی هستند که اندازه‌های مختلفی دارند. هرگاه دو پشیز با اندازه‌های x و y در مجاورت هم قرار بگیرند، می‌توانند با صرف انرژی‌ای برابر $|x - y|$ به هم بچسبند و یک پشیز با اندازه‌ی $x + y$ ایجاد کنند.

اگر ۱۰۲۵ پشیز با اندازه‌ی ۱ روی یک خط ردیف شده باشند، کم‌ترین انرژی‌ای که باید در مجموع صرف کنند تا تبدیل به یک پشیز با اندازه‌ی ۱۰۲۵ شوند، چه قدر است؟

۳۲ (۵) ۳۱ (۴) ۱۱ (۳) ۱۰ (۲) ۹ (۱)

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

ابتدا نشان می‌دهیم با صرف انرژی ۱۰ می‌توان پشیز با اندازه ۱۰۲۵ به دست آورد. برای این کار در ۱۰ گام پشیزها را به هم می‌چسبانیم به طوری که در هر گام تنها یک واحد انرژی مصرف گردد.

در گام ۰، دو پشیز نخست را به هم می‌چسبانیم تا یک پشیز به طول ۲، و ۱۰۲۳ پشیز به طول ۱ داشته باشیم. (بدون صرف انرژی)

در گام ۱، ۱۰۲۴ پشیز باقیمانده را دوباره به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۳ و ۵۱۱ پشیز به طول ۲ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

در گام ۲، ۵۱۲ پشیز باقیمانده را دوباره به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۵ و ۲۵۵ پشیز به طول ۴ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

به همین صورت در گام j ، $(1 \leq j \leq 9)$ ، 2^{j-1} پشیز باقیمانده را دوباره به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول $2^j + 1$ و $2^j - 1$ پشیز به طول 2^j خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

در گام ۱۰ (آخر)، ۲ پیشیز باقیمانده (یکی به طول ۵۱۳ و دیگری به طول ۵۱۲) را به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پیشیز به طول ۱۰۲۵ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

حال نشان می‌دهیم این راه بهینه است؛ یعنی برای دستیابی به پیشیز با طول ۱۰۲۵، صرف حداقل ۱۰ واحد انرژی لازم است.

ادعا: برای هر عدد طبیعی n که $2^i < n < 2^{i+1}$ ، صرف i واحد انرژی برای به دست آوردن یک پیشیز به طول n لازم است.

اثبات: حکم را به استقرای قوی روی n اثبات می‌کنیم.

پایه: حکم برای $n = 3, 5, 6, 7$ به سادگی قابل بررسی و صحیح است.

گام: فرض کنید $2^i < n < 2^{i+1}$ ، در اینصورت برا به دست آوردن پیشیز به طول n ، باید دو پیشیز به یکدیگر چسبیده باشند. پس فرض کنید این دو پیشیز طول‌های x, y داشته باشند. پس $x + y = n$ بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم $x \geq y$ در اینصورت دو حالت داریم:

حالت ۱، $x = y$: در این حالت با توجه به این که $2^i < n < 2^{i+1}$ ، پس $2^{i-1} < x = y < 2^i$ پس در این حالت با توجه به فرض استقرا، صرف $2(i-1)$ انرژی لازم است. با توجه به این که $i \geq 3$ ، این مقدار از i کمتر نخواهد بود.

حالت ۲، $x > y$ و $x \neq 2^i$: در حالت خواهیم داشت:

$$2^i < n = x + y < 2x < 2n < 2^{i+2}$$

پس $2^{i-1} < x < 2^{i+1}$ پس با توجه به فرض استقرا، برای تولید پیشیز به طول x نیاز به حداقل $i-1$ واحد انرژی داریم. از طرفی چون $x \neq y$ ، پس برای تولید پیشیز به طول $n = x + y$ با به هم چسباندن دو پیشیز به طول‌های x, y ، نیاز به حداقل یک واحد انرژی داریم. پس در این حالت نیز صرف حداقل i واحد انرژی نیاز خواهد بود.

حالت ۳، $x > y$ و $x = 2^i$: در این حالت اگر $y > 2^{i-1}$ ، در اینصورت با توجه به فرض استقرا برای تولید پیشیز به طول y ، حداقل $i-1$ واحد انرژی و برای چسباندن دو پیشیز x, y حداقل یک واحد انرژی نیاز است که این مانند قبل حکم را نتیجه می‌دهد. اما اگر $y \leq 2^{i-1}$ ، در اینصورت برای چسباندن دو پیشیز x, y ، صرف $2^{i-1} \geq |x - y|$ واحد انرژی لازم است. با توجه به این که $i \geq 3$ ، این مقدار از i کمتر نخواهد بود.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

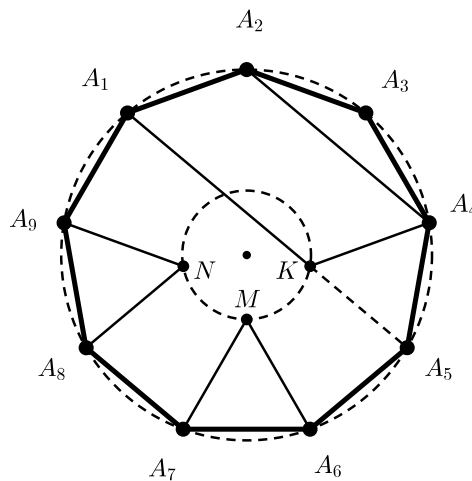
اکنون با توجه به ادعا می‌توان دید که چون $2^{11} < 1025 < 2^{10}$ ، پس صرف 10° واحد انرژی برای به دست آوردن پیشیز به طول 1025 لازم است و این اثبات ما را کامل می‌کند.

۲۷. $A_1A_2 \dots A_9$ یک ۹ ضلعی منتظم است و نقطه‌های K ، M و N درون آن به گونه‌ای هستند که $A_1A_2A_3K$ متوازی‌الاضلاع و A_6A_7M و A_8A_9N مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه $\angle MKN$ چه قدر است؟

- ۲۰ (۱)
۳۰ (۲)
۴۰ (۳)
۴۵ (۴)
۶۰ (۵)

راه حل:

گزینه (۳) صحیح است.



راس‌های این ۹ ضلعی دایره محیطی آن را به ۹ کمان مساوی تقسیم کرده‌اند. پس هر قطعه کمان $\frac{360}{9} = 40^\circ$ درجه است. بنابراین زاویه $\angle A_1A_2A_3K$ (که روبه‌رو به ۶ قطعه کمان است) 120° درجه است. زاویه $\angle A_2A_1K$ ، زاویه مجاور آن در متوازی‌الاضلاع، 60° درجه خواهد بود. اما زاویه $\angle A_2A_1A_5$ هم 60° درجه است، چرا که روبه‌رو به ۳ قطعه کمان است. پس

$$\angle A_2A_1A_5 = \angle A_2A_1K = 60^\circ$$

بنابراین سه نقطه A_1 ، A_5 و K هم‌خط‌اند. زاویه $\angle KA_5A_6$ (که روبه‌رو به ۳ قطعه کمان است) 60° درجه است. از طرفی

$$\angle KA_6A_5 = \angle A_2A_6A_5 - \angle A_2A_6K = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

پس مثلث A_4A_5K هم متساوی‌الاضلاع است.

اگر شکل را 80° درجه حول مرکز دایره به طور ساعت‌گرد دوران دهیم مثلث A_4A_5K به A_6A_7M و مثلث A_6A_7M به A_8A_9N تبدیل می‌شود، چرا که اضلاع ۹ ضلعی طی این دوران به هم تبدیل می‌شوند. در نتیجه با این دوران K به M و M به N تبدیل می‌شود. پس کمان MN (روی دایره کوچک‌تر) 80° درجه است. زاویه $\angle MKN <$ (که روبه‌رو به این کمان است) 40° درجه خواهد بود.

۲۸. فرض کنید A مجموعه نقاط با مختصات صحیح در صفحه باشد و تابع $f: A \rightarrow \{0, 1, 2\}$ دارای این خاصیت است که برای هر x و y صحیح،

$$f(x, y) - f(x+1, y) - f(x-1, y) - f(x, y+1) - f(x, y-1)$$

بر ۳ بخش‌پذیر است. کدام گزاره صحیح است؟

(۱) f باید تابعی ثابت باشد.

(۲) مجموعه‌ای متناهی وجود ندارد که با دانستن f در آن مجموعه، تابع f به صورت یک‌تا تعیین شود.

(۳) اگر مجموعه نقاطی که f در آن‌ها مقدار ۱ را اتخاذ می‌کند، مشخص باشد (فرض کنید این مجموعه ناتهی است) تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.

(۴) اگر مقدار f را روی نقاطی که هر دو مؤلفه آن‌ها زوج است بدانیم، تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.

(۵) گزینه‌های ۲ و ۳

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مجموعه‌ی نقاط با مختصات صحیح را با \mathbb{Z}^2 نشان می‌دهیم.

تابعی که در شرط مسأله صدق کند را تابع خوب می‌نامیم.

گزاره‌ی (۱) غلط است. زیرا به سادگی می‌توان دید که تابع زیر یک تابع خوب است،

$$f(x, y) = 3 \text{ بر } (x + y) \text{ باقیمانده‌ی}$$

گزاره‌ی (۲) درست است. برای اثبات آن، ابتدا چند تعریف ارائه می‌کنیم.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

برای هر $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ منظور از همسایه‌های (x, y) ، نقاط $(x, y - 1)$ ، $(x, y + 1)$ ، $(x - 1, y)$ و $(x + 1, y)$ هستند.

اگر S زیرمجموعه‌ای از \mathbb{Z}^2 باشد، آن‌گاه (x, y) را نقطه‌ای درونی از S می‌گوییم اگر خودش و همسایه‌هایش عضو S باشند.

اگر f تابعی از S به $\{0, 1, 2\}$ باشد و (x, y) نقطه‌ای درونی از S باشد، تعریف می‌کنیم

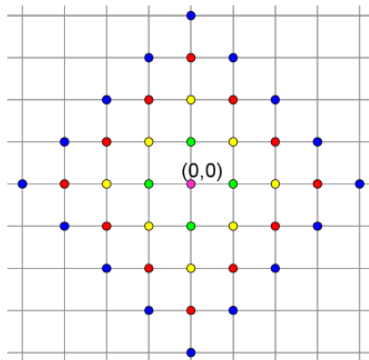
$$\Delta f(x, y) =$$

$$\text{باقیمانده‌ی } (f(x, y) - f(x + 1, y) - f(x - 1, y) - f(x, y + 1) - f(x, y - 1)) \text{ بر } 3$$

برای هر عدد صحیح نامنفی n ، مجموعه‌های A_n و B_n را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |x| + |y| = n\}$$

مثلاً $A_0 = \{(0, 0)\}$ ، $A_1 = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$. در شکل زیر، A_n ها با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند.



همچنین تعریف می‌کنیم

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |x| + |y| \leq n\}$$

تابع $h : B_n \rightarrow \{0, 1, 2\}$ را خوب می‌نامیم اگر برای هر $(x, y) \in B_{n-1}$ ، $\Delta h(x, y) = 0$.

حال لم زیر را ثابت می‌کنیم.

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

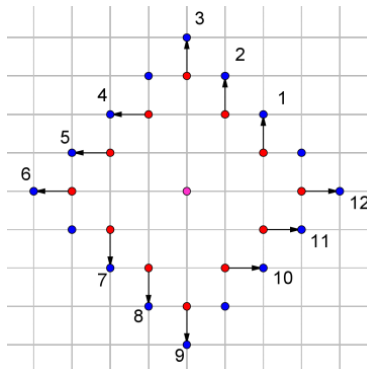
لم: فرض کنید N عددی طبیعی و $h: B_N \rightarrow \{0, 1, 2\}$ تابعی خوب باشد. در این صورت h را می توان به تابعی خوب روی کل \mathbb{Z}^2 گسترش داد.

اثبات لم:

به طور استقرایی تابع h را روی B_n برای هر $n > N$ گسترش می دهیم به نحوی که خوب باقی بماند.

فرض کنید h روی B_n تعریف شده باشد و خوب باشد. می خواهیم آن را روی B_{n+1} گسترش دهیم به طوری که خوب بماند. به این منظور کافی است آن را روی A_{n+1} تعریف کنیم به نحوی که برای $(x, y) \in A_n$ داشته باشیم $\Delta h(x, y) = 0$ (چون برای $m < n$ بنا بر فرض استقرا شرط مسأله روی A_m برقرار است).

به هر کدام از اعضای A_n ، طبق الگوی شکل زیر، عضوی از A_{n+1} را نسبت می دهیم. اعضای A_{n+1} که به هیچ عضوی نسبت داده نشده اند را عضو آزاد و بقیه را عضو وابسته می نامیم. مطابق شکل، اعضای وابسته ی A_{n+1} را به ترتیب شماره گذاری می کنیم. این شماره گذاری دارای این خاصیت است: «هر عضو وابسته ی A_{n+1} ، به عضوی از A_n وابسته شده که همسایه ی هیچ یک از اعضای وابسته ی بعدی نیست.»



حال ابتدا مقدار تابع h را روی همه ی اعضای A_{n+1} برابر با صفر تعریف می کنیم. سپس با شروع از عضو وابسته ی شماره ۱، مقدار h را روی هر عضو وابسته به نحوی تغییر می دهیم که Δh روی عضوی که به آن وابسته است صفر شود. با توجه به خاصیت بیان شده در بالا، در نهایت تابع h ای به دست می آوریم که برای هر $(x, y) \in A_n$ ، $\Delta h(x, y) = 0$. توجه کنید که تغییر مقدار h روی اعضای وابسته ی بعدی، مقدار Δh را در نقاط قبلی تغییر نمی دهد.

به این ترتیب تابع h روی کل B_{n+1} تعریف می شود و برای هر $(x, y) \in B_n$ ، داریم $\Delta h(x, y) = 0$. اکنون با بزرگ کردن n به دلخواه، یک تابع h روی کل \mathbb{Z}^2 به دست می آوریم که $\Delta h(x, y) = 0$ و اثبات لم تمام می شود.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

حال با استفاده از لم بالا می‌توان به راحتی درستی گزاره‌ی ۲ را ثابت کرد. زیرا فرض کنید مقدار f را روی یک مجموعه‌ی متناهی S از نقاط \mathbb{Z}^2 بدانیم. از آن‌جا که مجموعه‌ی S متناهی است، پس عدد طبیعی N وجود دارد که $S \subset B_{N+1}$. اکنون مقدار تابع f را روی نقاط A_{N+1} به این صورت تغییر می‌دهیم که یکی در میان آن‌ها را بعلاوه و منهای یک می‌کنیم. تابع حاصل از تغییر این مقادیر را g می‌نامیم. دقت کنید که تحدید تابع g به B_{N+1} تابعی خوب است زیرا مقدار Δg روی B_N همچنان صفر است. پس بنا بر لم، تابع خوب h وجود دارد که روی B_{N+1} با g برابر است. پس f و h روی B_N در نتیجه روی S با هم برابرند ولی در کل با هم برابر نیستند. بنابراین با دانستن f روی یک مجموعه‌ی متناهی نمی‌توان آن را به طور یکتا تعیین کرد.

گزاره‌ی (۳) غلط است، زیرا دو تابع زیر، هر دو خوب هستند و مجموعه‌ی نقاطی که مقدار ۱ را اتخاذ می‌کنند یکسان و ناتهی است ولی دو تابع با یکدیگر متفاوت‌اند.

$$f(x, y) = 3 \text{ بر } (x + y + 1) \text{ باقیمانده‌ی}$$

$$f(x, y) = 3 \text{ بر } (2x + 2y + 1) \text{ باقیمانده‌ی}$$

بنابراین گزینه‌ی (۵) نیز نادرست است. پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۲۹. مثلی که طول هر سه ضلعش عددی در بازه $[1, 2]$ ، و اندازه همه زاویه‌هایش در بازه $[45^\circ, 90^\circ]$ درجه است، را «معتدل» می‌گوییم. اختلاف مساحت دو مثلث معتدل حداکثر چه قدر است؟

$$(1) \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (2) \frac{8-\sqrt{2}}{2} \quad (3) \sqrt{3} \quad (4) \frac{12-2\sqrt{2}}{8} \quad (5) \text{هیچ کدام}$$

راه حل:

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

فرض کنید مثلث ABC مثلی معتدل و داری کمترین مساحت باشد و فرض کنید زاویه‌ی A بزرگترین زاویه‌ی آن باشد

پس

$$AB, AC \geq 1, \angle A \geq 60^\circ \Rightarrow \sin(A) \geq \sin(60^\circ) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(A) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

سوالات و راه حل های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

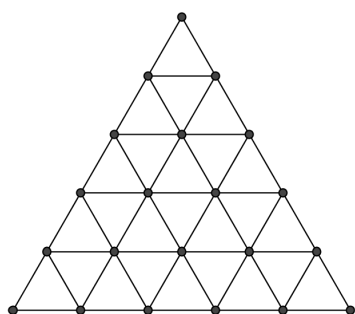
همچنین فرض کنید مثلث $A'B'C'$ مثلثی معتدل و داری بیشترین مساحت باشد و فرض کنید زاویه ی A' کوچکترین زاویه ی آن باشد پس

$$A'B', A'C' \leq 2, \angle A' \leq 60^\circ \Rightarrow \sin(A') \leq \sin(60^\circ) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot A'C' \cdot \sin(A') \leq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} - S_{ABC} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

به عنوان مثال مثلث با اضلاع ۲, ۲, ۲ را مثلث با بیشترین مساحت و مثلث با اضلاع ۱, ۱, ۱ را به عنوان کمترین مساحت در نظر بگیرید که حالت تساوی نامساوی بالا بدست می آید.



۲۷۷۴ (۵)

۱۳۸۷ (۴)

۷۲۶ (۳)

۳۶۳ (۲)

۱۲۶ (۱)

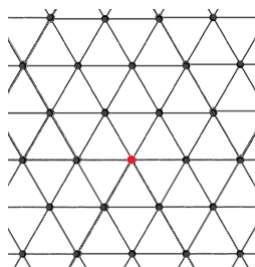
۳۰. مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۵ را به شکل روبه رو به مثلث هایی به ضلع یک تقسیم کرده ایم. به هر یک از رئوس این شبکه بندی، برداری دل خواه به طول یک و موازی با یکی از اضلاع مثلث نسبت می دهیم. مجموع همه ی این بردارها چند حالت مختلف می تواند داشته باشد؟

راه حل:

گزینه ی (۴) صحیح است.

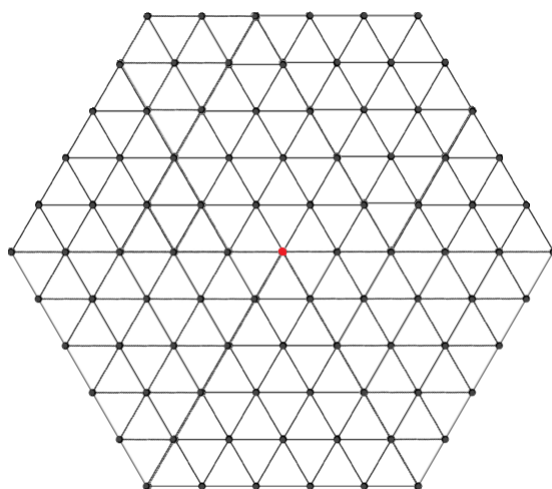
برای یافتن مجموع تعدادی بردار می توانیم فرض کنیم متحرکی به ترتیب در راستای هر کدام از بردارها و به اندازه ی آن بردار حرکت می کند سپس برداری که ابتدای آن محل اولیه ی متحرک یادشده و انتهای آن محل پایانی متحرک باشد مجموع بردارهای اولیه خواهد بود. بنابراین برای یافتن پاسخ این سوال کافی است تعداد نقاط انتهایی ممکن برای متحرکی که از نقطه ی ثابتی شروع به حرکت می کند و همه ی بردارهای منظور شده در شکل را طی می کند بیابیم. توجه کنید که طول و جهت بردارها باعث می شود اگر متحرک از نقطه ی قرمز در شکل زیر شروع به حرکت کند در هر مرحله روی نقاط سیاه باقی بماند.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۱

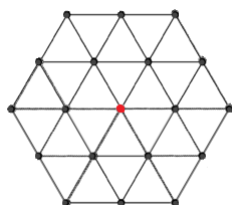
پس کافی است تعداد نقاطی که در انتها می‌تواند در آن‌ها باشد را بیابیم. به استقرا نشان می‌دهیم اگر متحرک $n > 1$ قدم حرکت کند نقاطی که می‌تواند در آن‌ها قرار گیرد مرز و داخل یک شش ضلعی منتظم با طول ضلع n خواهد بود. به عنوان مثال برای $n = 5$ همه‌ی نقاط شکل زیر جواب است.



شکل ۲

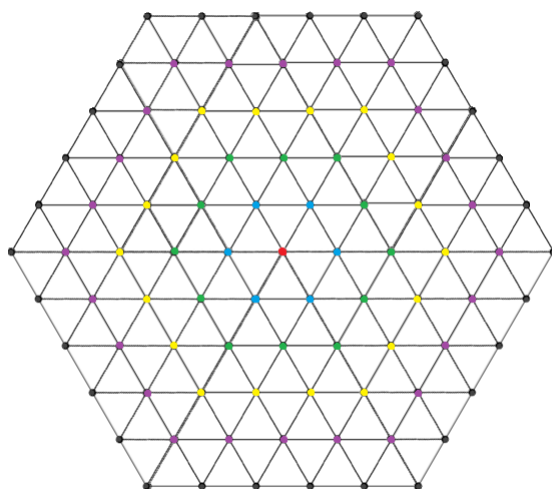
پایه‌ی استقرا $n = 2$ است. روشن است که با دو قدم می‌توان به همه‌ی نقاط شکل زیر رسید.

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۳

اکنون فرض کنید حکم را برای $n = k$ می‌دانیم. توجه کنید که شکل مربوط به حالت $n = k + 1$ یک لایه بیش از شکل قبلی است. برای مثال در شکل زیر نقاطی که در هر مرحله اضافه می‌شوند با رنگ‌های مختلف نشان داده شده‌اند.

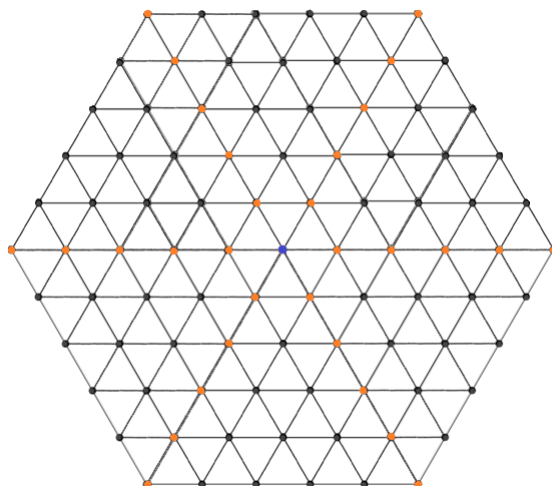


شکل ۴

توجه کنید که طبق فرض استقرا می‌دانیم به تمامی نقاط غیر از لایه‌ی خارجی می‌توان با k قدم رسید و به علاوه هر خانه در شش‌ضلعی با طول ضلع $k + 1$ یک خانه‌ی مجاور دارد که در شش‌ضلعی داخلی و به طول ضلع k قرار دارد بنابراین به هر خانه‌ی شکل با $k + 1$ قدم می‌توان رسید و حکم ثابت می‌شود. از طرفی هر نقطه خارج از این شش‌ضلعی را که در نظر بگیریم هیچ مسیر با طول کمتر مساوی $k + 1$ تا نقطه‌ی قرمز ندارد. (این حکم را هم با استقرایی مشابه می‌توان نتیجه گرفت.) پس ثابت می‌شود با $k + 1$ قدم دقیقاً به نقاط شش‌ضلعی یادشده می‌توان رسید. حال می‌دانیم که تعداد قدم‌های متحرک ما ۲۱ است پس تعداد نقاط یک شش‌ضلعی با طول ضلع ۲۱ جواب مورد نظر ما است. توجه

سوالات و راه حل‌های آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

کنید که این شش‌ضلعی را می‌توان به شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲۱ تقسیم کرد. برای مثال در شکل مربوط به شش‌ضلعی به طول ضلع ۵ این تقسیم‌بندی را مشاهده می‌کنید.



شکل ۵

می‌دانیم تعداد نقاط مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع n برابر $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ است پس با در نظر گرفتن نقاط تکراری (نقاط نارنجی و آبی در شکل فوق) تعداد کل نقاط برای شش‌ضلعی به طول ضلع n برابر

$$\frac{6(n+2)(n+1)}{2} - 6 \times n - 5$$

است. پس جواب ما برابر است با: ۱۳۸۷.