



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید. جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی $۶۹۵۰/۷۳$ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

| | | | | |
|--|---|---|---|---|
| | ۶ | ۹ | ۵ | ۰ |
|--|---|---|---|---|

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شماره گزینه درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینه شماره ۳ درست است باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

| | | | | |
|--|--|--|--|---|
| | | | | ۳ |
|--|--|--|--|---|

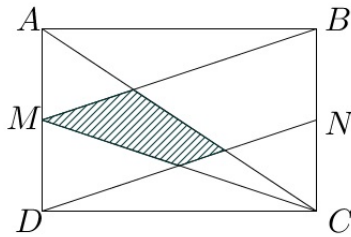
لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. سینا می‌خواهد برای دوره کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایه آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همه کتاب‌ها را مطالعه کند؟

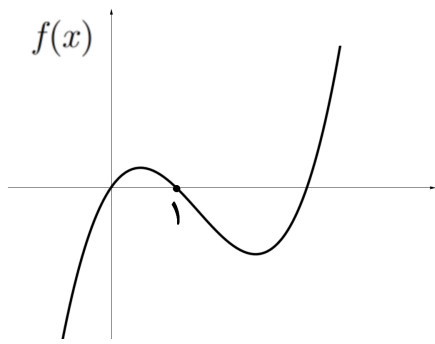
۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = 6$ و $x^2 + y^2 = 40$ مقدار $x^6 + y^6$ چه قدر است؟



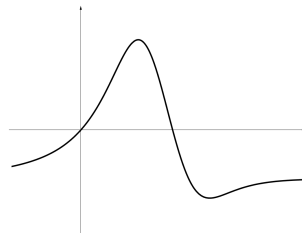
آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



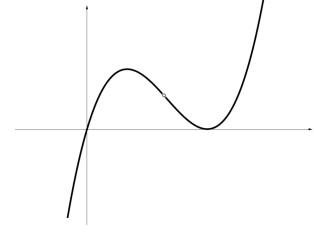
۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشورخورده است؟



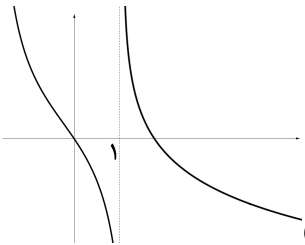
۴. فرض کنید نمودار تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل رو به رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همه گزینه‌ها در نقطه $x=1$ تعریف نشده هستند.)



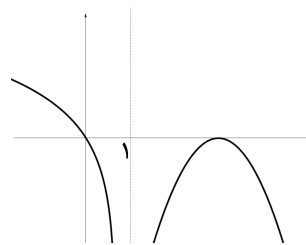
(۲)



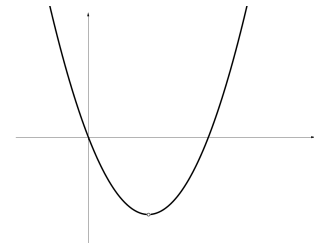
(۱)



(۵)



(۴)



(۳)

۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه حداقل سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۶ (۵) بی‌نهایت

۶. در مثلث ABC نقطه D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های \widehat{BAD} ، \widehat{CAD} و \widehat{ABC} با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۵) $\frac{\sqrt{6}}{2}$



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۷. دنباله a_0, a_1, a_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 13^{a_n} \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

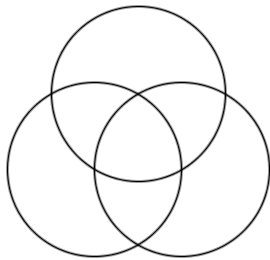
رقم یکان a_{1392} چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷ (۵) ۹

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = 100!, \quad b = 2^{100}, \quad c = 2^{2^{2^2}}$$

- (۱) $a < b < c$ (۲) $b < a < c$ (۳) $c < a < b$ (۴) $b < c < a$ (۵) $a < c < b$



۹. می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیه درون شکل روبه‌رو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است؟

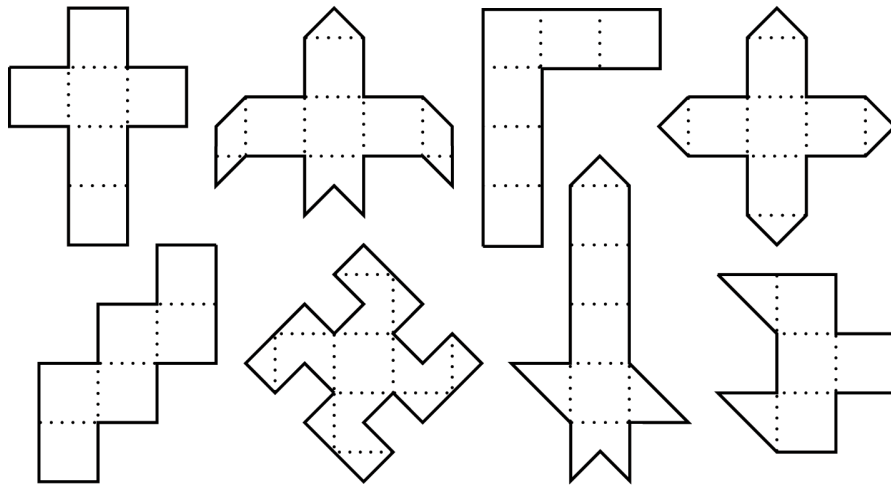
۱۰. وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $288, 524 = 2^{19}$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژه بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه زاهدان انتخاب شده و در نقطه وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

۱۱. ((ضربین حساب))، ماشینی است که از یک صفحه نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین حساب بلافاصله عدد صفحه نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحه نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $5^{1392} \times 3^{1435} \times 2^{2014}$ دست‌کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $729 = 9 \times 9 \times 9$).

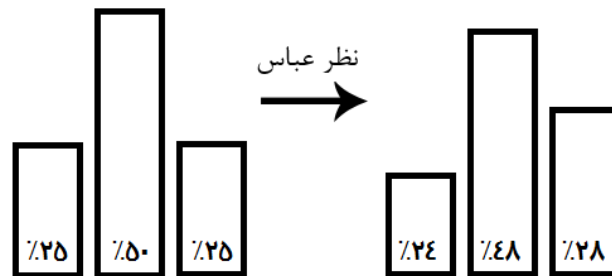


آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟



۱۳. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysc.ir) کیفیت آزمون مرحله اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از ((خیلی خوب بود.))، ((عالی بود.)) و ((به‌تر از این نمی‌شد.))! پیش از این که عباس نظر خود را در وب‌گاه ثبت کند، درصد این گزینه‌ها به ترتیب برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است. پس از ثبت نظر او این نسبت به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تغییر می‌کند. تعداد نظرهای ثبت شده پیش از ثبت نظر عباس چه قدر بوده است؟ (درصدها دقیق هستند.)



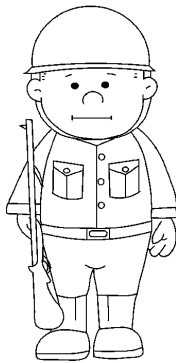
۱۴. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^2 - pq + q^2 = 37^2$.



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

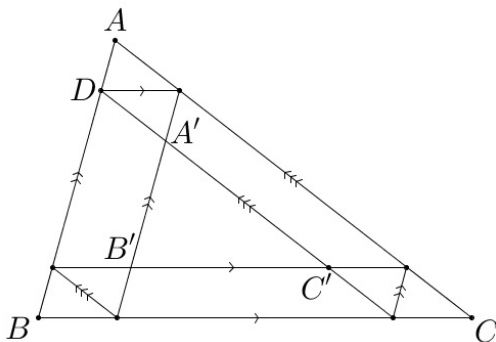
۱۵. کوچکترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

۱۶. چوپانی گوسفند گرسنه خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همه قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دسترسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟



۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲ تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم.)

۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟



۱۹. مجموعه S را مجموعه همه اعداد حقیقی مثل a می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

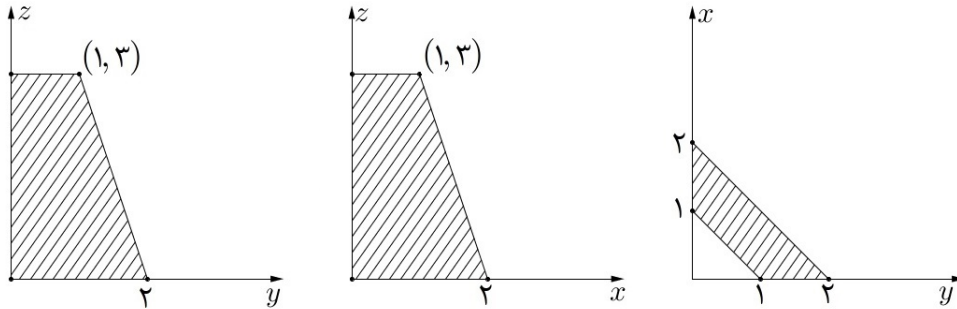
$$a(a-1) + x(x-1) + y(y-1) = \frac{3}{4}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه قدر است؟



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

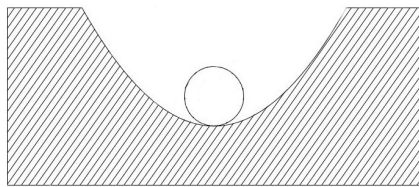
۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحه مختصات به شکل های زیر است. مجموع مربع های طول قطرهای این چهارضلعی چه قدر است؟



۲۱. چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^2 & 9 \quad (3) & 5 \quad (2) & 1 \quad (1) \\ yz + zt + ty = x^2 & & 5 \text{ بی نهایت} & 25 \quad (4) \\ zt + tx + xz = y^2 & & & \\ tx + xy + yt = z^2 & & & \end{cases}$$

۲۲. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لوله انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی و سطح مقطع لوله به شکل یک دایره است. (منظور از سهمی نمودار یک چندجمله ای درجه دوم است.) اگر عرض کانال برابر ۲ متر و عمق آن ۴ متر باشد، شعاع بزرگترین لوله ای که می توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین ترین نقطه کانال تماس داشته باشد، چند سانتی متر است؟ (نسبت اندازه ها در شکل صحیح نیست.)

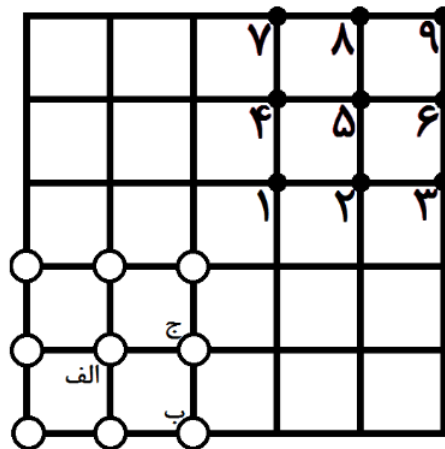




آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۲۳. طول اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسط‌های AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطه D برخورد می‌کند. طول AD چه قدر است؟

۲۴. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایره توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایره توپر نمایش داده شده ببرد، به نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطه ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟

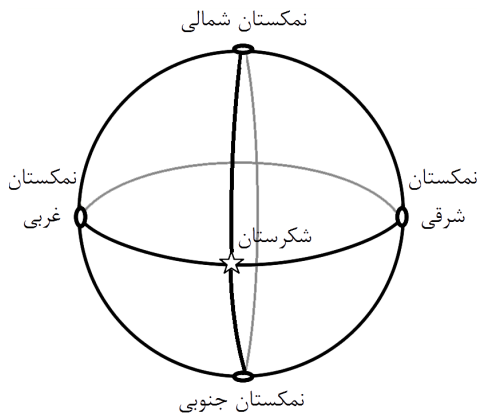


(۱) ۲، ۳، ۵ (۲) ۸، ۷، ۵ (۳) ۸، ۷، ۹ (۴) ۴، ۷، ۵ (۵) نمی‌توان تعیین کرد.



آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۲۵. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیۀ شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیۀ، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ شهر همسایه به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟



| از | شکرستان | نمکستان شرقی | نمکستان غربی | نمکستان شمالی | نمکستان جنوبی |
|---------------|---------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| شکرستان | × | ۳ | ۱ | ۰ | ۲ |
| نمکستان شرقی | ۰ | × | ۲ | ۰ | ۱ |
| نمکستان غربی | ۱ | ۰ | × | ۳ | ۰ |
| نمکستان شمالی | ۲ | ۰ | ۱ | × | ۱ |
| نمکستان جنوبی | ۲ | ۰ | ۰ | ۲ | × |

(۳) نمکستان غربی

(۲) نمکستان شرقی

(۱) شکرستان

(۵) نمکستان جنوبی

(۴) نمکستان شمالی

سؤالات و پاسخ‌های تشریحی آزمون
مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی
ایران

وبگاه المپیاد ریاضی ایران

mathysc.ir



کمیته ی ملی المپیاد ریاضی ایران
باشگاه دانش پژوهان جوان

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱ اسفند ۱۳۹۲ و با شرکت ۲۵۸۷۱ نفر از دانش‌آموزان پایه‌های اول، دوم و سوم دبیرستان به طور همزمان در سراسر کشور برگزار گردید. دفترچه‌ی پیش رو مجموعه‌ی سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که به همت وبگاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

زمان: ۱۸۰ دقیقه

تعداد سؤالات: ۲۵



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱. سینا می‌خواهد برای دوره‌کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایه آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همه کتاب‌ها را مطالعه کند؟

پاسخ: ۱۶۸۰

هر روش مطالعه معادل است با یک نحوه قرار دادن سه کلمه‌ی ریاضی، سه کلمه‌ی فیزیک و سه کلمه‌ی ادبیات در یک ردیف ۹ تایی.

بدین منظور، برای انتخاب مکان سه کلمه‌ی ریاضی، (۳) حالت مختلف داریم. سپس از بین ۶ جایگاه باقی‌مانده، برای انتخاب مکان سه کلمه‌ی ادبیات، (۶) حالت مختلف داریم و بعد از آن، مکان کلمات فیزیک به طور یکتا مشخص می‌شود. پس جواب مسأله برابر است با

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = \frac{9!}{6!3!} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680.$$

۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x + y = 6$ و $x^2 + y^2 = 40$. مقدار $x^6 + y^6$ چه قدر است؟

پاسخ: ۶۳۵۲۰

راه حل اول. ابتدا می‌توان مقدار xy را محاسبه کرد.

$$36 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 40 + 2xy \Rightarrow xy = -2$$

حال با استفاده از اتحاد مجموع مکعب‌ها داریم:

$$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2) = 40(x^4 + y^4 - 4)$$

می‌توان مقدار $x^4 + y^4$ را هم به سادگی محاسبه کرد.

$$1600 = 40^2 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + 8 \Rightarrow x^4 + y^4 = 1592$$

پس در نهایت داریم:

$$x^6 + y^6 = 40(1592 - 4) = 40 \times 1588 = 63520.$$

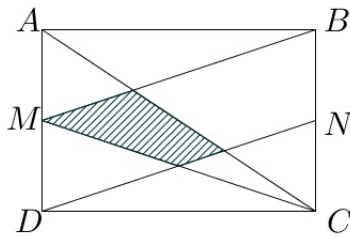


پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

راه حل دوم. طبق قسمت اول راه حل بالا می‌دانیم که حاصل ضرب x و y برابر -2 است. بنابراین با توجه به این که مجموع آن‌ها هم برابر 6 است، x و y دو ریشه چندجمله‌ای $z^2 - 6z - 2$ هستند. بنابراین

$$\{x, y\} = \{3 + \sqrt{9+2}, 3 - \sqrt{9+2}\} = \{3 + \sqrt{11}, 3 - \sqrt{11}\}$$

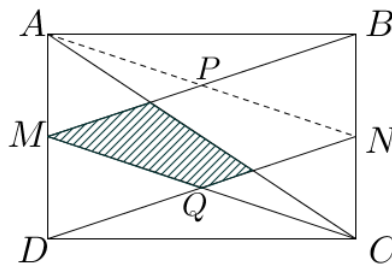
حال با به دست آمدن مقدار x و y می‌توان مقدار $x^6 + y^6$ را با بسط دادن $(3 \pm \sqrt{11})^6$ به دست آورد.



۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشورخورده است؟

پاسخ: ۸

راه حل اول. مطابق شکل زیر اگر با پاره‌خطی نقطه‌ی A را به N وصل کنیم، با توجه به این که $AN \parallel MC$ و $MB \parallel DN$ ، چهارضلعی $PNQM$ یک متوازی‌الاضلاع است. مرکز این چهارضلعی وسط قطرهای آن یعنی وسط MN است که همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. دقت کنید که خط AC از مرکز این متوازی‌الاضلاع عبور می‌کند و بنابراین مساحت آن را نصف می‌کند.



پس مساحت چهارضلعی هاشورخورده، نصف مساحت چهارضلعی $MPNQ$ است که برابر مساحت مثلث MQN است. برای به دست آوردن مساحت این مثلث دقت کنید که ارتفاع نظیر

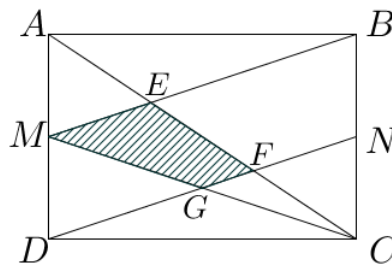


پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

Q ، $\frac{1}{4}$ طول ضلع AD و قاعده‌ی آن یعنی MN برابر طول ضلع AB است. پس در کل مساحت مستطیل 8 برابر مساحت مثلث MNQ و بنابراین 8 برابر مساحت چهارضلعی هاشورخورده است.

راه حل دوم. مطابق شکل زیر این بار سه رأس دیگر چهارضلعی هاشورخورده را E ، F و G می‌نامیم. هم‌چنین مساحت مستطیل را با S نمایش می‌دهیم.

$$\text{مساحت } AMC = \frac{1}{4} AM \cdot CD = \frac{1}{4} \times \frac{AD}{4} \times DC = \frac{1}{16} S$$



دقت کنید که دو مثلث AEM و CEB متشابه هستند. پس نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث برابر نسبت $\frac{AM}{BC}$ است که برابر $\frac{1}{4}$ است. از طرفی می‌دانیم مجموع طول ارتفاع‌های این دو مثلث برابر طول ضلع AB است. پس طول ارتفاع AEM برابر $\frac{1}{4} AB$ است و در نتیجه

$$\text{مساحت } AME = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times AM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} AB \times \frac{1}{4} AD = \frac{1}{16} S$$

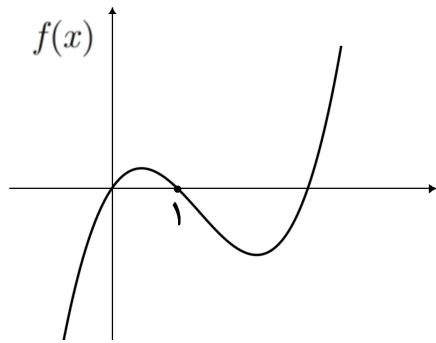
پس مساحت مثلث EMC که تفاضل مساحت مثلث‌های AME و AMC است، برابر $\frac{1}{8} S$ است.

در نهایت توجه کنید که چون مثلث‌های CEM و CFG متشابه هستند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $\frac{1}{4} = \left(\frac{CG}{CM}\right)^2$ است. پس

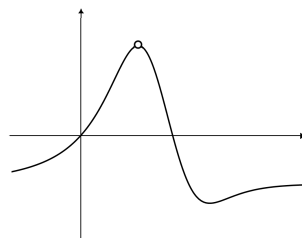
$$\text{مساحت } MFG = \frac{3}{4} \times \text{مساحت } MEC = \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} S = \frac{3}{32} S$$



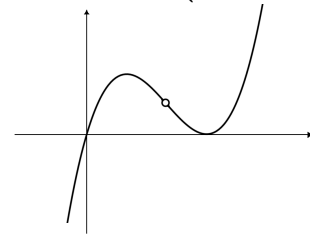
پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



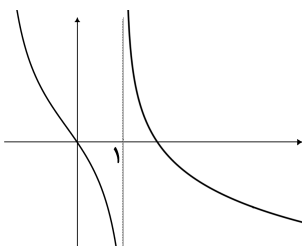
۴. فرض کنید نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل روبه‌رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همه گزینه‌ها در نقطه $x=1$ تعریف نشده هستند.)



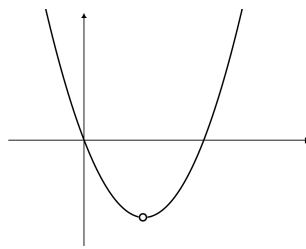
(۲)



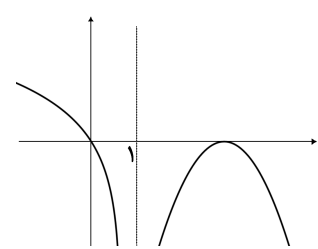
(۱)



(۵)



(۴)



(۳)

پاسخ: ۴

از آنجا که برای اعداد کمتر از صفر $f(x)$ و $x-1$ هر دو منفی هستند، حاصل تقسیم آن‌ها عددی مثبت خواهد شد. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نمی‌توانند نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-1}$ باشند. فرض کنید f به جز نقاط صفر و یک، در نقطه c صفر شده است. برای اعداد بیشتر از c ، $f(x)$ و $x-1$ هر دو مثبت هستند. بنابراین در این محدوده نیز حاصل تقسیم آن‌ها مثبت است. به این ترتیب گزینه‌های ۳ و ۵ نیز نمی‌توانند جواب مسأله باشند. بنابراین جواب تنها می‌تواند گزینه ۴ باشد. اگر $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ، آنگاه $\frac{f(x)}{x-1} = x(x-2)$ نموداری شبیه گزینه ۴ دارد.

۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه دست کم سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۶ (۵) بی‌نهایت



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

پاسخ: ۲

کوچکترین مقسوم علیه مثبت هر عددی یک است و دومین مقسوم علیه کوچک عدد اولی مثل p است. سومین مقسوم علیه هم عدد اول دیگری مثل q و یا p^2 است. اگر n عددی کوچولو باشد، مقسوم علیه سوم آن نمی تواند p^2 باشد، چون در این صورت $n = 1 + p + p^2$ که در این صورت n نمی تواند بر p بخش پذیر باشد.

پس $n = 1 + p + q$ که $p < q$ دو مقسوم علیه اول کوچک n هستند. چون $p|n$ و $q|n$ ، نتیجه می شود، $p|1 + p$ و $q|1 + q$. پس $q \leq 1 + p$ ، از طرف دیگر $p < q$. بنابراین $q = p + 1$ و در نتیجه p و q دو عدد اول متوالی هستند. این یعنی $p = 2$ و $q = 3$. در این صورت n برابر ۶ می شود که خاصیت مورد نظر را دارد. پس تنها همین یک عدد کوچولو را داریم و پاسخ گزینه ی ۲ است.

۶. در مثلث ABC نقطه D روی ضلع BC به گونه ای قرار گرفته که زاویه های \widehat{BAD} ، \widehat{CAD} و \widehat{ABC} با هم برابرند و طول پاره خط های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه قدر است؟

(۵) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

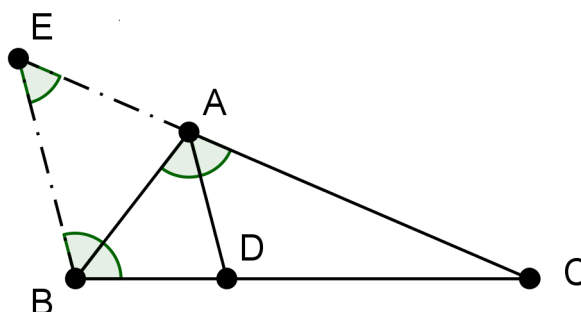
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{2}$

پاسخ: ۳



طول AB را x می نامیم. از نقطه ی B خطی به موازات AD رسم می کنیم تا امتداد ضلع AC را در E قطع کند.



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

با توجه به موازی بودن AD و BE داریم:

$$\widehat{BEA} = \widehat{CAD}, \quad \widehat{EBA} = \widehat{BAD}$$

بنابراین، $\widehat{EBA} = \widehat{BEA}$ و در نتیجه مثلث ABE متساوی الساقین است، یعنی $EA = BA = x$.
از طرف دیگر، بنابر قضیه تالس برای دو خط موازی AD و BE ،

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{1}$$

بنابراین $CA = 2AE = 2x$ و نیز، $CE = 3x$.

از طرف دیگر، توجه کنید که $\widehat{CBE} = \widehat{CAB}$ ، پس دو مثلث CBE و CAB با همین ترتیب
رئوس با یکدیگر متشابه‌اند. بنابراین،

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC}$$

که با توجه به روابط قبلی به دست می‌آید

$$\frac{2x}{3} = \frac{3}{3x}$$

که از آن به دست می‌آید $x^2 = \frac{3}{3}$ و در نتیجه $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

۷. دنباله a_0, a_1, a_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 13^{a_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

رقم یکان a_{1392} چه عددی است؟

۱ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹ (۵)

پاسخ: ۲

برای تعیین رقم یکان a_{1392} کافی است باقی‌مانده تقسیم آن به ۱۰ را مشخص کنیم.
برای این منظور دقت کنید که برای هر عدد طبیعی n :



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

$$a_{n+1} \equiv 13^{a_n} \equiv 1^{a_n} \equiv 1 \quad (\text{به پیمانه‌ی } 4)$$

یعنی هر a_n ای به شکل $4b_n + 1$ است که b_n خود یک عدد صحیح است. حال داریم

$$a_{1392} \equiv 13^{a_{1391}} \equiv 3^{4b_{1391}+1} \equiv (3^4)^{b_{1391}} \times 3 \equiv (81)^{b_{1391}} \times 3 \equiv 3 \quad (\text{به پیمانه‌ی } 10)$$

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = 100!, \quad b = 2^{100}, \quad c = 2^{2^{2^2}}$$

$$a < c < b \quad (5) \quad b < c < a \quad (4) \quad c < a < b \quad (3) \quad a < b < c \quad (2) \quad b < a < c \quad (1)$$

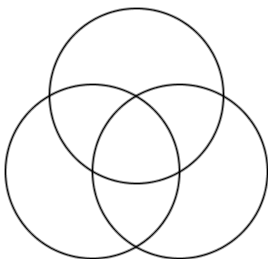
پاسخ: ۱

$$b = 2^{100} = \overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^{100} = \overbrace{(2 \times \dots \times 2)}^{98} \times 2 \times 2 <$$

$$(2 \times 3 \times \dots \times 99) \times 100 = 100! = a$$

$$a = 1 \times 2 \times \dots \times 100 < 100 \cdot 100 < 128 \cdot 100 = 2^7 \cdot 100 < 2^{210} < 2^{2^{2^2}} = c$$

پس $b < a < c$



۹. می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیه درون شکل روبه‌رو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است؟

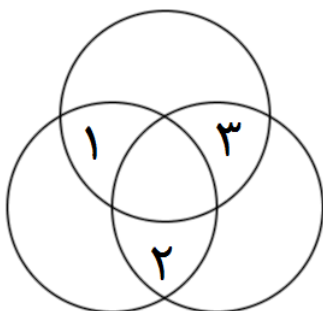
پاسخ: ۸۴

فرض می‌کنیم ناحیه‌های مشخص شده با اعداد ۱، ۲، ۳ در شکل زیر به ترتیب دارای رنگ‌های X, Y, Z باشند. توجه کنید که تمامی رنگ‌های X, Y, Z نمی‌توانند متمایز باشند زیرا در غیر



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

این صورت ناحیه‌ی مرکزی را با هیچ رنگی نمی‌توان رنگ کرد. اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم.



حالت اول: X, Y, Z هم‌رنگ باشند. در این حالت رنگ مشترک را می‌توان به ۳ حالت انتخاب کرد. همچنین هر یک از دیگر نواحی را می‌توان به دو صورت رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت تعداد رنگ‌آمیزی‌ها برابر $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ است.

حالت دوم: در میان X, Y, Z از یک رنگ دوبار و از یک رنگ یک بار استفاده شده باشد. برای انتخاب ناحیه‌ی با رنگ متمایز ۳، برای انتخاب رنگ این ناحیه ۳ و برای انتخاب رنگ دیگر ۲ انتخاب داریم. پس برای مشخص نمودن رنگ ناحیه‌ی ۱, ۲, ۳ در این حالت $18 = 3 \times 3 \times 2$ روش متمایز داریم. حال توجه کنید که رنگ ناحیه‌ی مرکزی به صورت یکتا مشخص می‌شود چرا که از دو رنگ متمایز، همسایه دارد. همچنین دو تا از نواحی گوشه‌ای نیز با هر دو رنگ مجاور هستند و رنگ این نواحی نیز به صورت یکتا مشخص می‌گردد. تنها ناحیه‌ی نامشخص ناحیه‌ی گوشه‌ای است که با دو ناحیه‌ی هم‌رنگ مجاور است و در نتیجه می‌توان آن را به دو شیوه رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت طبق اصل ضرب تعداد شیوه‌های رنگ‌آمیزی برابر $36 = 18 \times 2$ است.

پس طبق اصل جمع تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی شکل برابر $84 = 48 + 36$ است.

۱۰. وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $524288 = 2^{19}$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژه بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

به زاهدان انتخاب شده و در نقطه وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

پاسخ: ۲۳۰۴۰

اولین چراغ در وسط آزادراه احداث می‌شود. چراغ‌های دوم و سوم به ترتیب در $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ مسیر زاهدان به مشهد احداث می‌شوند. به همین شکل چراغ‌های چهارم تا هفتم بین آن‌ها و در حالت کلی برای عدد طبیعی n چراغ‌های 2^n ام تا $2^{n+1} - 1$ ام در میانه راه‌های بین چراغ‌های فعلی قرار خواهند گرفت. می‌دانیم که ۱۰۰۱ بین $2^9 = 512$ و $2^{10} = 1024$ است و فاصله بین چراغ‌های متوالی تا قبل از نصب چراغ ۵۱۲ برابر $\frac{2^{10}}{3^9} = 1024$ متر است. در نتیجه فاصله مشهد تا چراغ ۱۰۰۱ ام برابر $23040 = 512 + 1024 \times (1001 - 512)$ است.

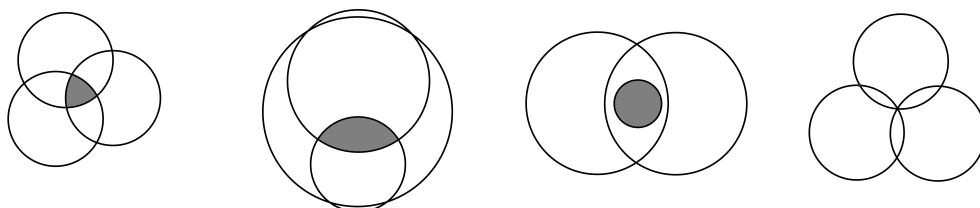
۱۱. چوپانی گوسفند گرسنه خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همه قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دسترسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟



پاسخ: ۵

به مرکز هر درخت، دایره‌ای به شعاع طول طنابی که به آن وصل است رسم می‌کنیم. ناحیه‌ای که گوسفند علف‌های آن را می‌خورد دقیقاً اشتراک ناحیه درونی این سه دایره است. بنابراین باید تعیین کنیم که اشتراک ناحیه‌ی داخل سه دایره، کدام شکل نمی‌تواند باشد.

گزینه‌های ۱ تا ۴ می‌توانند باشند، مانند شکل‌های زیر:

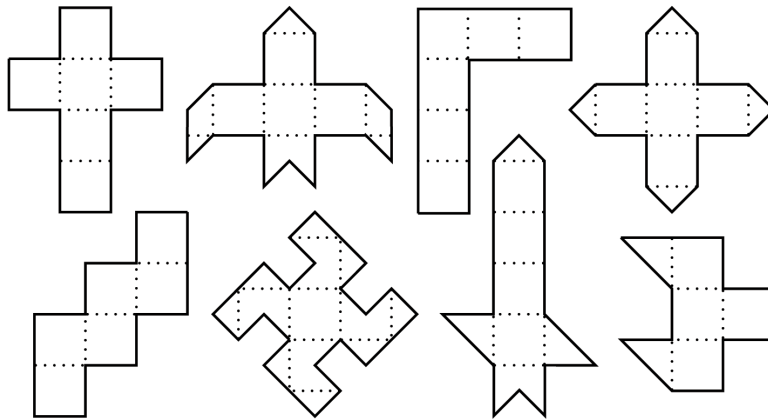




پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

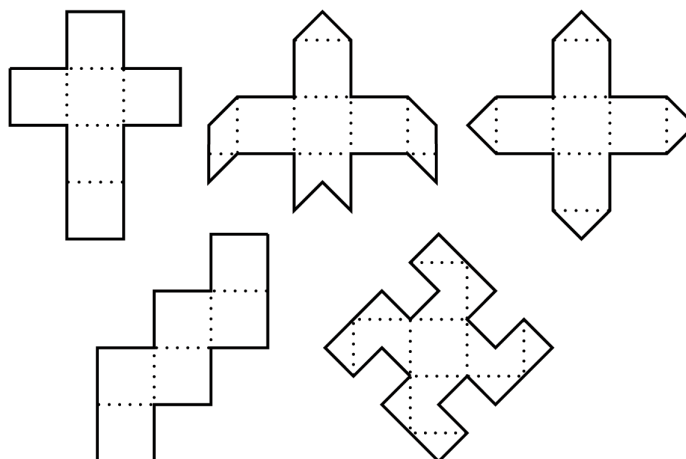
اما گزینه‌ی ۵ نمی‌تواند ناحیه اشتراک سه دایره باشد. زیرا مرز آن از ۴ کمان تشکیل شده در حالی که ما تنها سه دایره داریم پس باید دوتا از کمان‌ها متعلق به یک دایره باشند اما به توجه به شکل، هیچ دوتایی متعلق به یک دایره نیستند. پس گزینه‌ی ۵ صحیح است.

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟



پاسخ: ۵

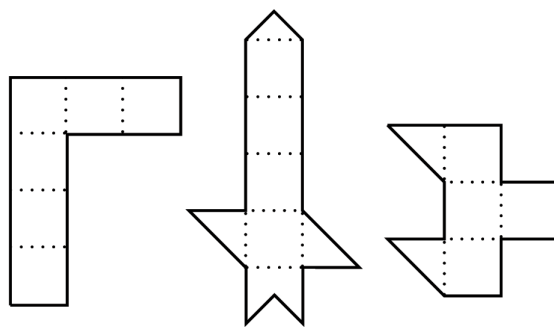
با اندکی تجسم فضایی می‌توان دید که شکل‌های زیر می‌توانند باز شده یک مکعب باشند.





پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

اما با اشکال زیر نمی توان یک مکعب ساخت. شکل سمت راست پنج مربع دارد. در شکل وسط نیز مسیری موازی اضلاع به طول پنج وجود دارد. در شکل سمت چپ نیز مشاهده می شود که هر طور شکل را تا کنیم یک مکعب کامل به دست نمی آید.



۱۳. کوچک ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

پاسخ: ۶

می دانیم $1392 = 2^4 \times 3 \times 16 \times 29$ حالت های مختلف برای عددی با ۱۳۹۲ مقسوم علیه مثبت فقط چهار حالت زیر است که در آن ها همه p_i ها اعدادی اول هستند.

$$\text{حالت اول: } p_1^{28} \times p_2^{15} \times p_3^2$$

$$\text{حالت دوم: } p_1^{28} \times p_2^7 \times p_3^2 \times p_4^1$$

$$\text{حالت سوم: } p_1^{28} \times p_2^3 \times p_3^2 \times p_4^2$$

$$\text{حالت چهارم: } p_1^{28} \times p_2^2 \times p_3^2 \times p_4^1 \times p_5^1 \times p_6^1$$

در هر کدام از حالت های بالا برای کوچک تر شدن عدد باید از عددهای اول کوچک به ترتیب استفاده کنیم پس کافی است عددهای زیر را باهم مقایسه کنیم و کوچک ترین آن ها را بیابیم.

$$a_1 = 2^{28} \times 3^{15} \times 5^2$$

$$a_2 = 2^{28} \times 3^7 \times 5^2 \times 7^1$$

$$a_3 = 2^{28} \times 3^3 \times 5^3 \times 7^2$$

$$a_4 = 2^{28} \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 11^1 \times 13^1$$



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

حال با انجام محاسبات جواب را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3^8}{7} \Rightarrow a_1 > a_2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{11 \times 13}{3 \times 5^2 \times 7} \Rightarrow a_3 > a_4$$

$$\frac{a_2}{a_4} = \frac{3^5 \times 5}{11 \times 13} \Rightarrow a_2 > a_4$$

پس جواب سوال a_4 است که دارای ۶ عامل اول است.

۱۴. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysc.ir) کیفیت آزمون مرحله اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از «خیلی خوب بود»، «عالی بود»، و «به‌تر از این نمی‌شد.»! پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، درصد گزینه‌ها به ترتیب دقیقاً برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است و پس از آن این نسبت‌ها به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تبدیل می‌شود. به غیر از عباس چند نفر در نظر سنجی شرکت کرده‌اند؟

پاسخ: ۲۴

فرض کنید پیش از عباس n نفر در نظر سنجی شرکت کرده‌باشند. از آنجایی که یکی از گزینه‌ها دقیقاً ۲۵ درصد از آرا را به دست آورده است، پس n باید بر ۴ بخشپذیر باشد. فرض کنید $n = 4k$. پس از رأی عباس گزینه‌ی آخر («به‌تر از این نمی‌شد.») افزایش یافته است پس عباس به این گزینه رأی داده‌است. با توجه به صورت سوال پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، k نفر به گزینه‌ی آخر رأی دادند. پس بعد از رأی عباس $k + 1$ نفر و در نتیجه $100 \times \frac{k+1}{4k+1}$ درصد از افراد این گزینه‌را انتخاب کرده‌اند. با توجه به صورت سوال این مقدار برابر ۲۸ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{k+1}{4k+1} \times 100 = 28 \Rightarrow 100k + 100 = 112k + 28 \Rightarrow 71 = 12k \Rightarrow k = 6$$

پس $n = 4k = 24$ پاسخ سوال است.



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^2 - pq + q^2 = 37^2$.

پاسخ: ۱

به دلیل تقارن مسئله نسبت به p و q می‌توان فرض کرد $q \leq p$. حال داریم:

$$p(p - q) = (37 - q)(37 + q)$$

با توجه به این که سمت چپ نامنفی است، باید سمت راست هم نامنفی باشد و در نتیجه $q \leq 37$. توجه کنید که چون $(37 - q)(37 + q)$ بر p بخش پذیر است، $p | 37 - q$ و یا $p | 37 + q$. اگر $p | 37 - q$ ، نتیجه می‌شود که $p < 37$ و در نتیجه $(37 + q)(37 - q) < 37(37 - q) < p(p - q)$. پس این حالت ممکن نیست و تنها حالت $p | 37 + q$ باقی می‌ماند. دقت کنید که اگر $p = 37 + q$ باشد، زوجیت p و q متفاوت است، و چون $p > q$ است، $q = 2$ و $p = 39$ است. اما 39 اول نیست. در نتیجه داریم $p \leq \frac{37+q}{2} \leq 37$.

$$p^2 - pq + q^2 = p^2 + q(q - p) \leq 37^2 + 0 = 37^2$$

چون این نابرابری به تساوی تبدیل شده است، باید $p = 37$ و $q = p$ باشد. ضمناً اگر $p = q = 37$ باشد، این معادله برقرار است. بنابراین با توجه به اول بودن 37 ، $(37, 37)$ تنها جواب این معادله در اعداد اول است.

۱۶. «ضربین حساب» ماشینی است که از یک صفحه نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین حساب بلافاصله عدد صفحه نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحه نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $5^{1392} \times 3^{1435} \times 2^{2014}$ دست کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین حساب به $729 = 9 \times 9 \times 9$ دست یافت، زیرا $729 = 9 \times 9 \times 9$).

پاسخ: ۲۷۸۱



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

عدد مورد نظر در صورت مسأله را A بنامید. ابتدا نشان می‌دهیم که با ۲۷۸۱ بار استفاده از دکمه‌ها می‌توان عدد A را نمایش داد:

۱۳۹۲ بار دکمه‌ی ۵ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{۲۰۱۳}{۳}$ بار دکمه‌ی ۸ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{۱۴۳۴}{۳}$ بار دکمه‌ی ۹ را فشار می‌دهیم و در نهایت یک بار دکمه‌ی ۶ را فشار می‌دهیم. عددی که به دست می‌آید برابر است با

$$۵^{۱۳۹۲} \times ۸^{\frac{۲۰۱۳}{۳}} \times ۹^{\frac{۱۴۳۴}{۳}} \times ۶$$

که برابر با A است. به این ترتیب در مجموع $۱۳۹۲ + \frac{۲۰۱۳}{۳} + \frac{۱۴۳۴}{۳} + ۱ = ۲۷۸۱$ بار از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرده‌ایم.

اکنون نشان می‌دهیم با کم‌تر از این تعداد نمی‌توان این کار را انجام داد. یک روش استفاده از دکمه‌ها را بهینه می‌نامیم اگر با کم‌ترین تعداد استفاده از دکمه‌ها به عدد A برسیم. توجه کنید که ما ناگزیر هستیم که ۱۳۹۲ بار از دکمه‌ی ۵ استفاده کنیم. زیرا در بین ارقام ۱ تا ۹، تنها عددی که عامل ۵ دارد، رقم ۵ است و ما باید ۱۳۹۲ عامل ۵ را ایجاد کنیم پس باید ۱۳۹۲ بار از رقم ۵ استفاده کنیم.

ادعا می‌کنیم روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از رقم ۶ استفاده شده است، زیرا به جای هر دو بار استفاده از رقم ۶ می‌توانیم یک بار ۴ و یک بار ۹ را استفاده کنیم. به این ترتیب می‌توانیم ۶ها را دوتا دوتا با ۴ و ۹ جایگزین کنیم تا در نهایت حداکثر یک ۶ باقی بماند. از طرف دیگر روشن است که در روش بهینه، ما حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم چون اگر بیش از یک بار از ۳ استفاده کرده باشیم، می‌توانیم به جای دو تا ۳، یک بار از ۹ استفاده کنیم و به این ترتیب تعداد دکمه‌های استفاده شده را کاهش دهیم که این با بهینه بودن روش مورد نظر تناقض دارد. بنابراین حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم. مشابهاً می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر یک بار از ۲ استفاده کرده‌ایم چون به جای دو بار استفاده از ۲ می‌توان یک بار از ۴ استفاده کرد. همچنین روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از ۴ استفاده شده است. زیرا به جای هر دو بار استفاده از ۴ می‌توان یک بار از ۲ و یک بار از ۸ استفاده کرد. همچنین روشن است که امکان ندارد هم از ۲ و هم از ۴ استفاده کرده باشیم زیرا به جای آن‌ها می‌توان یک بار از ۸ استفاده کرد.

حال دقت کنید که عوامل ۲ از یکی از اعداد ۸ یا ۶ یا ۴ یا ۲ می‌آیند. اگر تعداد استفاده از این



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

ارقام به ترتیب a_2, a_4, a_6, a_8 باشند، داریم

$$2014 = 3a_8 + 2a_4 + a_6 + a_2$$

زیرا در نهایت باید 2014 عامل 2 به دست بیاوریم.

با توجه به اینکه باقیماندهی 2014 بر 3، 1 است و $3a_8$ بر 3 بخش پذیر است، پس باید باقیماندهی $2a_4 + a_6 + a_2$ نیز بر 3 برابر با 1 باشد، اما با توجه به توضیحات بالا، a_2, a_4, a_6 هر کدام صفر یا یک هستند و a_2 و a_4 هر دو نمی توانند یک باشند. با بررسی همه ی حالتها، به راحتی می توان دید که تنها حالات ممکن عبارتند از

$$a_2 = 1, a_4 = a_6 = 0$$

$$a_6 = 1, a_2 = a_4 = 0$$

اگر حالت اول رخ دهد، از رقم 6 استفاده نکرده ایم و از طرف دیگر چون از رقم 2 استفاده کرده ایم با توجه به توضیحات قبل از رقم 3 هم استفاده نکرده ایم بنابراین تنها رقمی که عامل 3 دارد رقم 9 است ولی این غیر ممکن است زیرا هر 9، دو عامل 3 دارد و حال آنکه در مجموع به 1435 عامل 3 نیاز داریم که عددی فرد است.

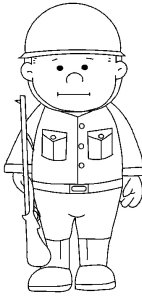
پس حالت اول غیر ممکن است و حالت دوم رخ می دهد. پس یک بار از 6 استفاده کرده ایم و یک عامل 2 به دست آورده ایم و سایر عوامل 2 را باید از 8 به دست بیاوریم. پس باید $\frac{2014}{3}$ بار از 8 استفاده کنیم.

حال چون یک بار از 6 استفاده کرده ایم پس یک عامل 3 به دست آورده ایم و 1434 عامل 3 باقی می ماند که چون 1434 بر 2 بخش پذیر است می توانیم همه ی آنها را با استفاده از 9 به دست آوریم. پس $\frac{1434}{3}$ بار از 9 استفاده می کنیم.

به این ترتیب در روش بهینه، به همان تعداد 2781 تا استفاده از دکمه ها نیاز داریم.



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور



۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲ تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم).

پاسخ: ۳۱

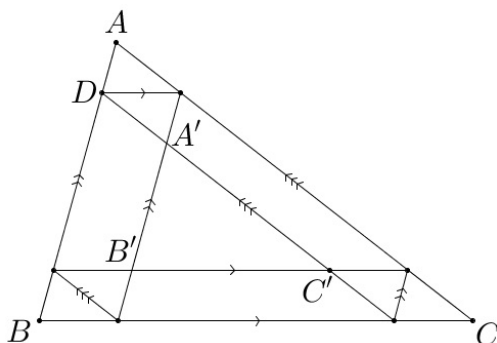
فرض کنید که این سرباز در ردیف آخر نفر سمت چپ باشد و سربازهای هر ردیف را به ترتیب از چپ به راست با شماره‌های ۰، ۱، ... و ۹۱ مشخص کنیم. به وضوح سرباز آخر، سرباز شماره ۰ از ردیف اول را نمی‌بیند. اما برای هر $i \in \{1, 2, \dots, 91\}$ ، سرباز شماره i دیده می‌شود، هرگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه i و ۱۲ برابر ۱ باشد. زیرا اگر i و ۱۲ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از ۱ مثلاً z داشته باشند، سرباز شماره‌ی $\frac{i}{z}$ که در ردیف جلوتر از ردیف آخر ایستاده است، بین آن‌ها قرار دارد و بنابراین سرباز شماره i از ردیف اول دیده نمی‌شود.

بنابراین باید، تعداد اعدادی در $\{1, 2, \dots, 91\}$ را بشماریم که نسبت به ۱۲ اول هستند، یعنی معادلاً بر ۲ و ۳ بخش پذیر نیستند. باقی‌مانده تقسیم چنین اعدادی بر ۶ برابر ۱ یا ۵ است.

باقی‌مانده تقسیم ۱۶ عدد $\{1, 7, \dots, 91\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۱ است.

باقی‌مانده تقسیم ۱۵ عدد $\{5, 11, \dots, 89\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۵ است.

پس در کل $31 = 16 + 15$ عدد در این مجموعه وجود دارند که نسبت به ۱۲ اول هستند و بنابراین ۳۱ سرباز از ردیف اول دیده می‌شوند.



۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه قدر است؟

پاسخ: ۳

توجه کنید که معادله صورت سوال را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

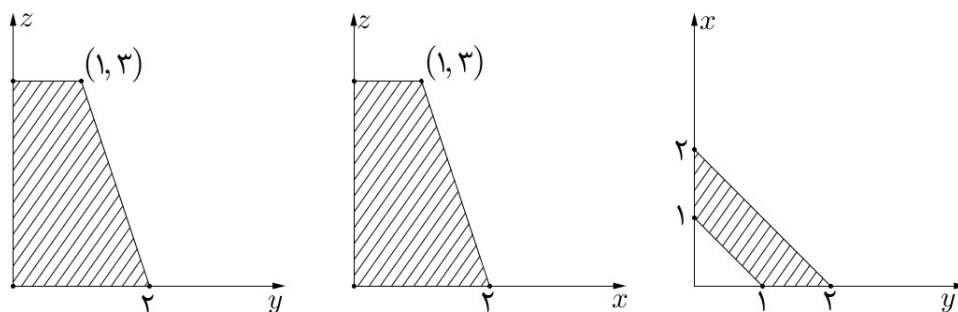
$$(a^2 - a + \frac{1}{4}) + (x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 - y + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

و در نتیجه:

$$(a - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

حال توجه کنید که $(x - \frac{1}{2})^2, (y - \frac{1}{2})^2$ عباراتی نامنفی هستند پس همواره $(a - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4}$ پس a همواره در بازه $[-1, 2]$ قرار دارد. همچنین به سادگی دیده می‌شود که به ازای هر a در بازه $[-1, 2]$ ، با قرار دادن $x = \frac{1}{2}$ و با توجه به پوشا بودن $(y - \frac{1}{2})^2$ روی بازه $[0, \infty)$ ، معادله می‌تواند برقرار باشد. پس طول بازه مورد نظر برابر ۳ است.

۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحه مختصات به شکل‌های زیر است. مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چه قدر است؟



پاسخ: ۲۸

چون تصویر این چهارضلعی روی هریک از صفحه‌ها خود یک چهارضلعی مسطح است، رأس‌های آن باید به رأس‌های چهارضلعی تصویر برود. به این ترتیب رأسی که تصویرش در صفحه xy به نقطه $(1, 0)$ می‌رود، در صفحه xz تنها می‌تواند به $(1, 3)$ برود و در نتیجه مختصات آن در فضا برابر $(1, 0, 3)$ است. به همین شکل سه راس دیگر چهارضلعی نقاط



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

بنابراین مجموع مربع‌های قطرهای این چهارضلعی برابر
 $(0, 1, 3), (2, 0, 0)$ و $(0, 2, 0)$ است. $2(1^2 + 2^2 + 3^2) = 28$ است.

۲۱. چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^2 & 1 \text{ (۱)} \\ yz + zt + ty = x^2 & 5 \text{ (۲)} \\ zt + tx + xz = y^2 & 9 \text{ (۳)} \\ tx + xy + yt = z^2 & 25 \text{ (۴)} \end{cases}$$

(۵) بی‌نهایت

پاسخ: ۱

با کم کردن رابطه دوم از اول داریم:

$$z(x-t) + y(x-t) = (t-x)(t+x) \Rightarrow (x-t)(x+y+z+t) = 0$$

و مشابه آن با کم کردن رابطه سوم از دوم، چهارم از سوم و اول از چهارم:

$$(y-x)(x+y+z+t) = 0, \quad (z-y)(x+y+z+t) = 0, \quad (t-x)(x+y+z+t) = 0$$

بنابراین اگر $x+y+z+t \neq 0$ ، چهار عدد با هم برابر می‌شوند که با جایگذاری در معادله هر چهار متغیر برابر صفر می‌شوند.

اما اگر $x+y+z+t = 0$ آنگاه $t = -x - y - z$ و در نتیجه با جایگذاری در معادله اول:

$$xy + yz + zx = (-x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 0 \Rightarrow$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 0 \Rightarrow x = -y, y = -z, z = -x \Rightarrow x = y = z = 0$$



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

و در نتیجه t هم صفر می‌شود. پس در این حالت به همان جواب $(0, 0, 0, 0)$ می‌رسیم. بنابراین این چهارتایی تنها جواب معادله است.

۲۲. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیۀ شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیۀ، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ نمکستان‌های شرقی، غربی، شمالی و جنوبی به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|---------|---------|---------|----------|-------------------|
| از | ن. جنوبی | ن. شمالی | ن. غربی | ن. شرقی | شکرستان | به | |
| شکرستان | ۲ | ۰ | ۱ | ۳ | × | شکرستان | (۱) شکرستان |
| ن. شرقی | ۱ | ۰ | ۲ | × | ۰ | ن. شرقی | (۲) نمکستان شرقی |
| ن. غربی | ۰ | ۳ | × | ۰ | ۱ | ن. غربی | (۳) نمکستان غربی |
| ن. شمالی | ۱ | × | ۱ | ۰ | ۲ | ن. شمالی | (۴) نمکستان شمالی |
| ن. جنوبی | × | ۲ | ۰ | ۰ | ۲ | ن. جنوبی | (۵) نمکستان جنوبی |

پاسخ: ۱

جدول زیر نشان می‌دهد که این دزد از هر کدام از شهرها چند بار خارج شده است و چند بار به هر کدام از شهرها وارد شده است.

| نام شهر | شکرستان | ن. شمالی | ن. جنوبی | ن. غربی | ن. شرقی |
|------------|---------|----------|----------|---------|---------|
| تعداد خروج | ۵ | ۵ | ۴ | ۴ | ۳ |
| تعداد ورود | ۶ | ۴ | ۴ | ۴ | ۳ |

بنابراین او از شکرستان ۵ بار خارج شده است و ۶ بار به این شهر برگشته است، بنابراین اکنون در این شهر است و پاسخ درست گزینه‌ی (۱) است.

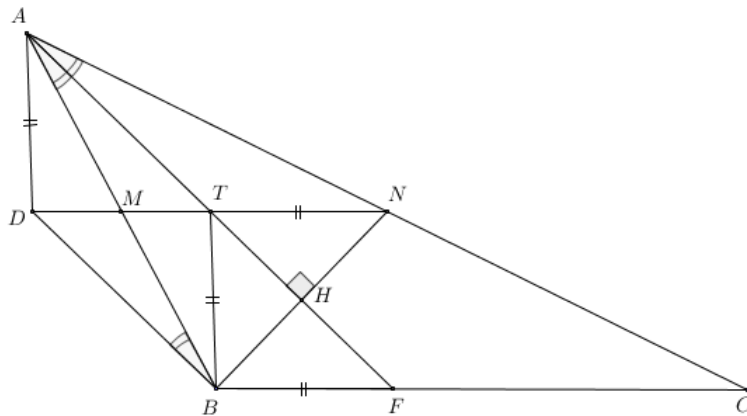


پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

توضیح. هم‌چنین با استدلال مشابه می‌توان فهمید که او سفر را از نمکستان شمالی آغاز کرده است، چون ۵ بار از این شهر خارج شده و تنها ۴ بار به آن بازگشته است.

۲۳. طول اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسط‌های AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطه D برخورد می‌کند. طول AD چه قدر است؟

پاسخ: ۰



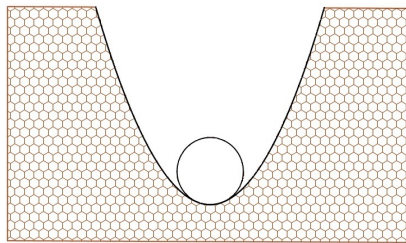
مطابق شکل زیر فرض کنید M وسط AB و N وسط AC باشد خط BN را رسم کنید چون مثلث ABN متساوی‌الساقین است پس نیم‌ساز آن ارتفاع نیز هست فرض کنید H پای ارتفاع وارد از A بر BN و T تقاطع MN با AH باشد. چهارضلعی $ADBT$ متوازی‌الاضلاع است زیرا دو مثلث AMT و BMD با هم برابر هستند در نتیجه $AD = BT$ از طرفی چون مثلث ABH با مثلث ANH هم‌نهشت است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $BT = TN$. پس کافی است مقدار TN را حساب کنیم، فرض کنید F محل برخورد نیم‌ساز با ضلع BC باشد، در مثلث AFC چون TN میان خط (خطی موازی یک ضلع که از وسط دو ضلع دیگر عبور می‌کند) است پس $TN = \frac{1}{3}FC$ و هم‌چنین می‌دانیم نیم‌ساز ضلع را به نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند



پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

در نتیجه

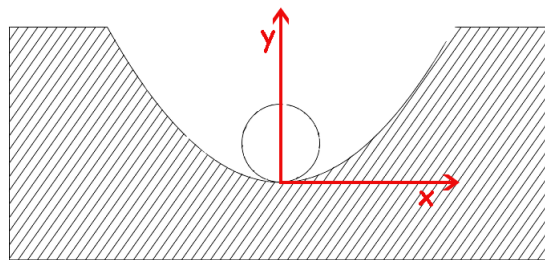
$$AD = BT = TN = \frac{1}{4}FC = \frac{1}{2} \frac{AC \times BC}{AC + AB} = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.881\dots$$



۲۴. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لوله انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع لوله دایره و سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی است. (سهمی نمودار یک چندجمله‌ای درجه دوم است). اگر عرض و عمق کانال برابر ۱ متر باشد، قطر بزرگ‌ترین لوله‌ای که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطه کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟

پاسخ: ۲۵

ابتدا فرض می‌کنیم لوله و کانال در مبدأ با یکدیگر تماس دارند و مختصات را مانند شکل معین می‌کنیم. قطر لوله در صورتی مناسب است که اگر پایین لوله (دایره) را در کف کانال (سهمی) قرار دهیم، دایره و سهمی برخورد دیگری نداشته باشند.



معادله سهمی معرفی شده در صورت سوال برابر است با:

$$y = 4x^2$$

همچنین معادله دایره معرفی شده به قطر D و مماس بر سهمی در مبدأ برابر است با:

$$\left(y - \frac{D}{4}\right)^2 + x^2 = \frac{D^2}{4} \Rightarrow y^2 - yD + \frac{D^2}{4} + x^2 = \frac{D^2}{4} \Rightarrow y^2 - yD + x^2 = 0$$



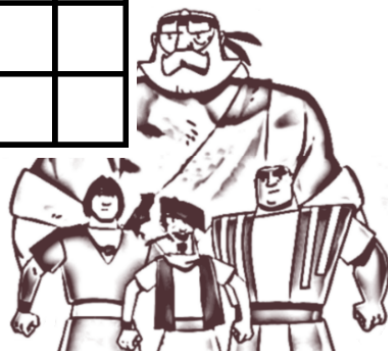
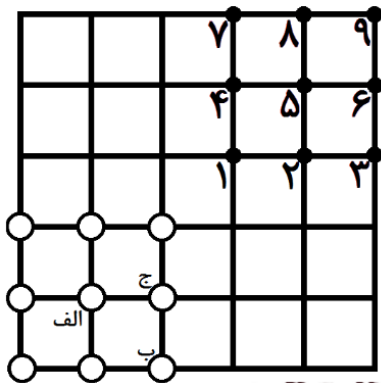
پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

با استفاده از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$y^2 - yD + \frac{y}{4} = 0$$

و معادله فوق برقرار است اگر $y = 0$ (که همان نقطه تماس است و نقطه‌ی جدیدی به حساب نمی‌آید) و یا $y = D - \frac{1}{4}$. چنانچه $D \leq \frac{1}{4}$ ، عددی نامثبت خواهد بود که نشان دهنده عدم برخورد جدید است اما اگر $D > \frac{1}{4}$ ، در نقطه‌ی $(D - \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{D}{4} - \frac{1}{16}})$ برخورد خواهند داشت و این نشان می‌دهد که در این صورت قطر لوله مناسب نبوده است. پس حداکثر قطر لوله برابر $\frac{1}{4}$ متر یا همان ۲۵ سانتی‌متر است.

۲۵. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایره توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایره توپر نمایش داده شده ببرد، به نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطه ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟



- (۱) ۲، ۳، ۵
- (۲) ۸، ۷، ۵
- (۳) ۸، ۷، ۹
- (۴) ۴، ۷، ۵
- (۵) نمی‌توان تعیین کرد.

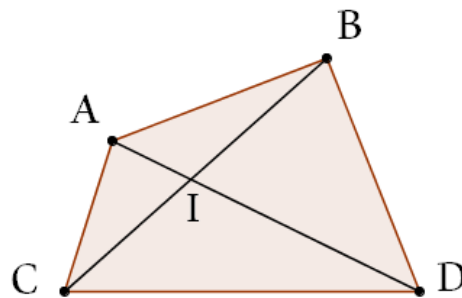


پاسخنامه آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور

پاسخ: ۵

لم: در هر چهار ضلعی محدب مجموع طول قطرهای از مجموع طول دو ضلع روبرو بیشتر است. با نوشتن نامساوی مثلث برای مثلث‌های ABI و CDI مشاهده می‌کنیم که:

$$AD + BC > AB + CD$$



ادعا می‌کنیم اگر مجموع فواصل ۹ زوج نقطه بیشترین مقدار شود، باید هر دو مسیری بین نقاط ابتدایی و انتهایی همدیگر را قطع کنند. زیرا اگر میل نقطه A به B و میل نقطه C به D برود و AB و CD برخورد نداشته باشند، طبق لم بالا با بردن میل نقطه A به D و میل نقطه C به B مسیر بیشتری طی می‌شود. حال به میل نقطه B در صورت سوال نگاه کنید. این میل تنها به نقطه‌ای ۷ می‌تواند منتقل شود تا با تمام مسیرها برخورد داشته باشد. (اگر به این نقطه نرود با مسیری که به نقطه ۷ می‌رسد برخورد ندارد.) پس نقطه B به نقطه ۷ می‌رود. به همین شکل شمال غربی ترین میل نیز باید به نقطه ۳ برود. به همین طریق می‌توان بررسی کرد که میل‌های نقاط ج، بالا، پایین و سمت راست الف نیز باید به ترتیب به نقاط ۴، ۲، ۶ و ۸ بروند تا با تمام خطوط دیگر برخورد کند.

اما میل‌های روی قطر مربع باقی می‌مانند. این میل‌ها به هر ترتیبی به نقطه ۱، ۵ و ۹ منتقل شوند مجموع جابه جایی ثابت می‌ماند. بنابراین برای جای‌گذاری میل نقطه الف سه حالت وجود دارد و به طور یکتا مشخص نمی‌شود.