



آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید.

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰/۷۳ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شماره گزینه درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینه شماره ۳ درست است باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳
--	--	--	--	---

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه‌های بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به‌علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. مأمور آمار، یک سرشماری در شکرستان انجام داده است. فراوانی نسبی تعداد خانواده‌ها به صورت زیر است:

۶	۵	۴	۳	۲	تعداد اعضای خانواده
۲۰	۱۰	۳۰	۳۰	۱۰	درصد

چند درصد از مردم، در خانواده‌های ۲ نفری زندگی می‌کنند؟

۲. کم‌ترین مقدار $\frac{a^2}{b}$ در مجموعه زیر چند است؟

$$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, (a + 1)(b + 1) = ab, 0 \leq b\}$$

۳. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش‌پذیر باشد؟



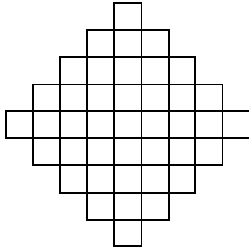
آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد

ریاضی کشور

۴. در دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ طول ضلع AB برابر ۴ و طول دو ساق BC و AD برابر ۲ است. زاویه $\angle ABC$ نیز برابر 120° درجه است. اگر E محل برخورد دو قطر دوزنقه باشد، نسبت $\frac{BE}{DE}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{5}{9}$ (۵) $\frac{2}{3}$

۵. تعدادی مهر مربعی شکل با ابعاد 1×1 ، 2×2 ، 3×3 ، 4×4 و 5×5 به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک مهر را آغشته به رنگ کرده و سپس با کوبیدن آن روی نقشه روبه‌رو آن را رنگ کنیم به طوری که تمامی سطح مهر درون نقشه قرار گیرد. دست‌کم چند بار باید مهر روی نقشه بکوبیم تا همه جای نقشه رنگ شود؟ (ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



۶. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ xy + x + y = 11 \end{cases}$$



۷. در لحظه‌ای که ماهواره امید در ارتفاع ۲۵۶ کیلومتری از سطح زمین قرار داشته، فاصله ماهواره تا دورترین نقطه روی زمین که می‌توانسته آن را ببیند چند کیلومتر بوده است؟ (زمین را کره‌ای به شعاع ۶۳۷۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

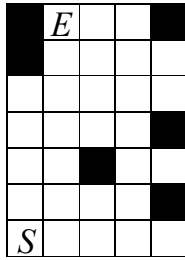
۸. چند چهارتایی (a, b, c, d) از اعداد طبیعی در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند؟

$$a^b = cd, \quad b^c = da, \quad c^d = ab, \quad d^a = bc.$$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) بی‌نهایت



آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور



۹. در شکل روبه‌رو، مهره‌ای ابتدا در خانه S قرار دارد و در هر قدم می‌توانیم آن را در یکی از جهتهای بالا، چپ و راست یک خانه جابه‌جا کنیم، بدون این‌که از جدول خارج شود یا وارد خانه‌های سیاه‌رنگ شود. اگر بخواهیم از هیچ خانه‌ای بیش از یک مرتبه عبور نکنیم، به چند روش مختلف می‌توان مهره را به خانه E رساند؟

۱۰. حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دوتایی از آن‌ها مربع کامل باشد؟

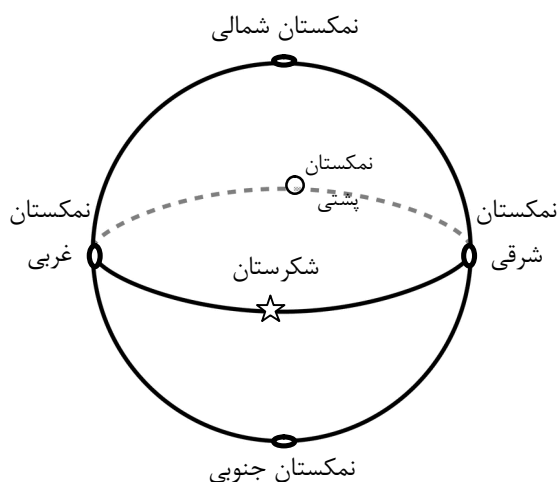
۱۱. برای دو عدد طبیعی a و b عمل \wedge به این صورت تعریف می‌شود: $a \wedge b = a^b$. عمل \otimes نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

$$a \otimes b = (\dots((a \wedge a) \wedge a) \wedge \dots \wedge a)$$

که در عبارت سمت راست، a ، b مرتبه ظاهر شده است. در این صورت $a \otimes b$ برابر است با:

$$a^{a^{\dots^a}} \quad (۱) \quad b^a \quad (۲) \quad a^{ab} \quad (۳) \quad a^{a^{b-1}} \quad (۴) \quad ab^{b^a} \quad (۵)$$

۱۲. در مثلث ABC ، میانه‌های نظیر رأس B و رأس C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد. طول ضلع BC چه قدر است؟



۱۳. سلطان شکرستان در نظر دارد که یک تور جهان‌گردی بین شکرستان و ۵ شهر دیگر برقرار کند: نمکستان‌های شمالی، جنوبی، شرقی، غربی و پشتی! (در شکل، نمکستان پشتی، در پشت کره است!). هر شهر تنها به ۴ شهر نزدیک خود خط هوایی دارد. به چند صورت می‌توان توری طراحی کرد که ابتدا و انتهای آن شکرستان باشد و از شهرهای دیگر دقیقاً یک بار بگذرد؟

$$۱۶ \quad (۱) \quad ۲۰ \quad (۲) \quad ۳۲ \quad (۳) \quad ۴۰ \quad (۴) \quad ۴۸ \quad (۵)$$



آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد

ریاضی کشور

۱۴. به تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابعی n مقداری می‌گوییم اگر برد آن مجموعه‌ای n عضوی باشد. اگر f و g به ترتیب n و m مقداری باشند. توابع $f + g$ ، $f \times g$ و $f \circ g$ ، به ترتیب حداکثر چند مقداری هستند؟

(۱) mn ، mn و $\min(m, n)$ (۲) mn ، $m + n$ و $\max(m, n)$

(۳) $m + n$ ، mn و n^m (۴) $m + n$ ، mn و mn

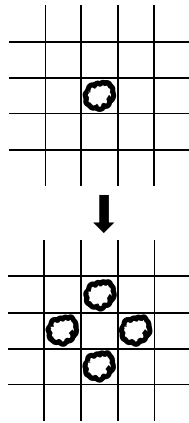
(۵) $\max(m, n)$ ، mn و mn

۱۵. در دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ ، $(\angle A = \angle D = 90^\circ)$ ، M وسط ضلع BC است. فرض کنید دایره به مرکز M و شعاع MB ، درون پاره خط AD را در X و Y قطع کند. اگر $AB = 1$ و طول پاره‌خط‌های BC ، CD و DA به ترتیب p ، q و r باشد. طول پاره‌خط‌های AX و AY ریشه‌های کدام معادله زیر هستند؟

(۱) $x^2 + px + q$ (۲) $x^2 - rx + q$ (۳) $x^2 - px + q$

(۴) $qx^2 + rx + p$ (۵) $px^2 - qx + r$

۱۶. جمع صورت و مخرج چند تا از کسرهای $\frac{1}{90}$ ، $\frac{2}{90}$ ، \dots ، $\frac{90}{90}$ ، بعد از ساده کردن بر ۳ بخش‌پذیر است؟



۱۷. در خانه‌های یک شبکه مربعی نامتناهی، گونه‌ای باکتری به نام «چارزا» زندگی می‌کند. در هر خانه هر تعداد چارزا می‌توانند هم‌زمان زندگی کنند. بعد از یک ساعت هر چارزا به چهار چارزا تقسیم شده و هر کدام به یکی از چهار خانه مجاور می‌رود. اگر در ابتدا فقط یک چارزا وجود داشته باشد، بعد از شش ساعت چند چارزا در خانه‌ای است که با خانه ابتدایی فقط یک رأس مشترک دارد؟ (به طور مثال پس از یک ساعت فقط در هر کدام از چهار خانه مجاور خانه آغازی، دقیقاً یک چارزا وجود خواهد داشت.)

۱۸. چند زیرمجموعه چهار عضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دوه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعه $\{2, 8, 9, 32, 36, 144\}$ شود؟



آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد

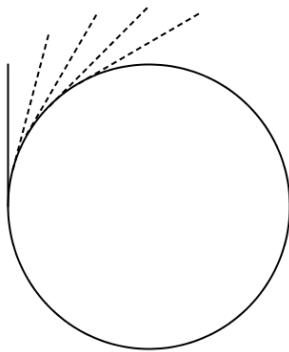
ریاضی کشور

۱۹. تابع $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ این گونه تعریف شده است که $f(1) = 1$ و برای $n > 1$ اگر تجزیه n به عوامل اول به صورت $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ باشد، آن گاه $f(n) = r_1^{p_1} \cdots r_k^{p_k}$. کدام درست است؟
 (۱) f پوша است.
 (۲) f یک به یک است.

(۳) اگر a و b عضو برد f باشند، آن گاه ab عضو برد f است.

(۴) برای هر دو عدد طبیعی m و n ، $f(m)f(n) \leq f(mn)$.

(۵) برای هر دو عدد طبیعی m و n ، $f(m)f(n) \geq f(mn)$.



۲۰. چرخی به شعاع ده متر از مرکز به وسیله محوری به زمین متصل شده، طوری که می تواند آزادانه حول آن محور بچرخد. میله ای به طول ده متر به شکل مماس به چرخ متصل شده است. اگر چرخ 60° بچرخد، نزدیک ترین گزینه به مساحت نقطه هایی که این میله از روی آن ها عبور می کند، (بر حسب متر مربع) کدام است؟ (شکل وضعیت میله در ابتدا، انتها و سه لحظه بینی را نشان می دهد).

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰ (۵) ۶۰

۲۱. دنباله $\{a_n\}$ با دو عدد حقیقی دل خواه a_1 و a_2 شروع می شود و جمله های بعدی آن از رابطه $a_{n+2} = \max\{a_{n+1} - 1, a_n + 1\}$ به دست می آیند. اگر $a_{100} = 100$ ، بیش ترین مقدار ممکن برای a_1 چند است؟

	۱
۳	۲
۴	

۲۲. احسان و حسام در جدولی 3×2 مطابق شکل، با هم مهره بازی می کنند. در این بازی هر کس در نوبت خودش می تواند یک مهره در یکی از خانه های خالی جدول قرار دهد یا یکی از مهره های موجود را به خانه سمت راستش یا خانه بالایش منتقل کند، البته اگر آن خانه خالی باشد. بازنده اولین کسی است که نتواند حرکتی انجام دهد. احسان برای شروع بازی در کدام یک از خانه های شماره گذاری شده، مهره را قرار دهد تا بتواند بازی را ببرد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(۵) در هر کدام از این چهار حالت، حسام می تواند طوری بازی کند که برنده شود.



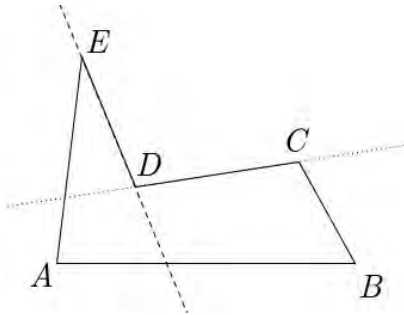
آزمون مرحله اول سی و یکمین المپیاد

ریاضی کشور

۲۳. تعداد جواب‌های معادله زیر در اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، با شرط $x \leq y$ را بیابید.

$$x^2 + y^2 = xy(x, y) + [x, y].$$

منظور از (x, y) ، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک x و y و منظور از $[x, y]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y است.



۲۴. منظور از یک ضلع «ناجور» در یک چندضلعی که اضلاع آن یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، ضلعی است که دو ضلع مجاورش در دو طرف خط شامل آن قرار دارند. مثلاً در پنج‌ضلعی روبه‌رو تنها ضلع‌های DE و CD ناجور هستند. یک ۱۳۹۱ ضلعی حداکثر چند ضلع ناجور می‌تواند داشته باشد؟

۲۵. روی سطح کره‌ای، ۴ دایره رسم شده است. سطح این کره حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۱۷ (۵)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۱

۱- پاسخ : ۵ ؛ توجه کنید که در یک خانواده ی n نفری، n نفر زندگی می کنند! پس پاسخ سؤال این گونه محاسبه می شود:

$$\frac{2 \times 10}{2 \times 10 + 3 \times 30 + 4 \times 30 + 5 \times 10 + 6 \times 20} = \frac{20}{400} = 5\%$$

۲- پاسخ : ۴ ؛ $(a + 1)(b + 1) = ab \Rightarrow ab + a + b + 1 = ab \Rightarrow a = -(b + 1)$ پس اکنون داریم که

$$\frac{a^2}{b} = \frac{(b+1)^2}{b} = 2 + b + \frac{1}{b}$$

و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم: $2 + b + \frac{1}{b} \geq 2 + 2\sqrt{b \times \frac{1}{b}} = 4$ و این مقدار با قرار دادن $a = -2$ و $b = 1$ به دست می آید.

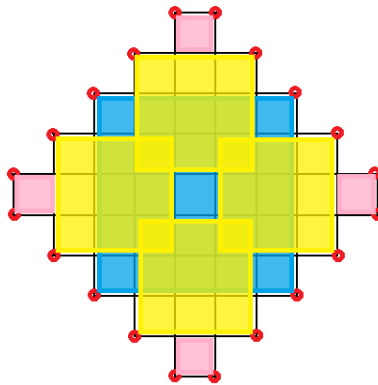
۳- پاسخ : ۲ ؛ توجه کنید که عدد ۳ تنها می تواند کنار عدد ۱ قرار گیرد. عدد ۱ تنها می تواند کنار اعداد ۳ و ۲ قرار گیرد. عدد ۲ تنها می تواند کنار اعداد ۴ و ۱ قرار گیرد و عدد ۴ تنها می تواند کنار عدد ۲ قرار گیرد. با این توضیحات اعداد ۳ و ۴ نمی توانند به عنوان رقم دوم یا سوم قرار گیرند، پس یکی از آنها در جای گاه اول و دیگری در جای گاه چهارم است. اکنون با اندکی بررسی می فهمیم که در کل دو عدد خوب داریم: ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳.

۴- پاسخ : ۵ ؛ عمود وارد از نقاط A و B بر خط CD را به ترتیب X و Y می نامیم. از آن جایی که در مثلث قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویه ی 30° درجه نصف وتر است، پس DX و GY برابر ۱ هستند. پس CD برابر $1 + 4 + 1 = 6$ است. طبق قضیه ی

تالس می دانیم $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ پس مقدار خواسته شده برابر $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است.



۵- پاسخ : ۹ ؛ گوشه‌های تیز شکل (نقاط قرمز) را در نظر بگیرید. تعداد این گوشه‌ها ۲۰ تا است و پس از پوشانده شدن شکل، این گوشه‌ها، توسط رئوس مهرها پوشانده می‌شوند. توجه کنید که به جز مهر مربعی ۵×۵ که می‌تواند ۴ تا گوشه را بپوشاند، دیگر مهرها حداکثر می‌توانند ۲ گوشه را بپوشانند. همچنین استفاده‌ی بیش از یک بار مهر ۵×۵ موجب رنگی شدن خانه‌ی بار از مهرها استفاده کنیم n جدیدی نمی‌گردد (چون تنها یک راه برای قرار دادن یک مهر ۵×۵ در جدول داریم). پس اگر حداقل ۹ است. در n بیشتر نیست. این مقدار باید حداقل ۲۰ باشد، پس $2(n-1) + 4$ تعداد گوشه‌های پوشانده شده از شکل می‌بینیم که ۹ مهر برای این کار کافی نیز هست.



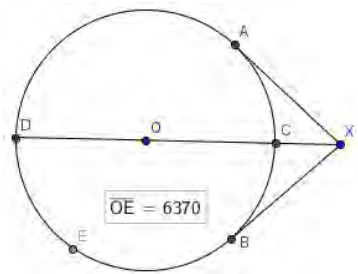
۶- پاسخ : ۴ ؛ توجه کنید که $y \neq -1$ زیرا در غیر این صورت با توجه به عبارت دوم نتیجه می‌گیریم که $11 = -1$. اکنون با استفاده از عبارت دوم، داریم که: $x = \frac{12}{y+1} - 1 = \frac{11-y}{y+1}$ با جای گذاری x در عبارت اول داریم :

$$\left(\frac{11-y}{y+1}\right)^2 y + \frac{11-y}{y+1} y^2 = 3 \Rightarrow \frac{11-y}{y+1} y \left(\frac{11-y}{y+1} + y\right) = 3 \Rightarrow \left(\frac{11-y}{y+1}\right) y \left(\frac{11+y^2}{y+1}\right) = 3.$$

$$\Rightarrow (11-y)(11+y^2)y = 3 \cdot (y+1)^2 \Rightarrow 121y - 11y^2 + 11y^3 - y^4 = 3 \cdot y^2 + 6 \cdot y + 3.$$

$$\Rightarrow y^4 - 11y^3 + 41y^2 - 61y + 3 = 0.$$

ریشه‌های چندجمله‌ای به دست آمده برابر ۱، ۲، ۳ و ۵ است. پس ۴ جواب داریم.



۷- پاسخ : 1824 ؛ می توان صورت سؤال را مانند شکل زیر تفسیر کرد. پس از صورت سؤال داریم که : $XC = 256, OC = OD = 6370$ و سؤال از ما طول XA را می خواهد. طبق رابطه ی قوت نقطه ی X داریم:

$$XA^2 = XC \cdot XD = 256 \times (2 \times 6370 + 256)$$

$XA = 1824$ پس

۸- پاسخ : ۲ ؛ اگر یکی از a یا b یا c یا d برابر یک باشد، تمام اعداد یک هستند و این خود یک جواب برای مسئله است. اکنون به دنبال دیگر جواب ها هستیم پس فرض می کنیم این اعداد همگی بزرگ تر مساوی ۲ اند. از ضرب سه رابطه داریم:

$$a^b b^c c^d d^a = a^2 b^2 c^2 d^2$$

ولی چون فرض کردیم همه ی چهار عدد مسئله بزرگ تر مساوی ۲ هستند خواهیم داشت:

$$a^b b^c c^d d^a \geq a^2 b^2 c^2 d^2$$

پس اکنون حالت تساوی رخ داده است و در نتیجه تمام اعداد ۲ هستند. این نیز یک جواب درست است. پس در کل ۲ جواب داریم.

۹- پاسخ : ۹۶۰ ؛ از خانه های سطر بالایی شروع می کنیم و روی هر خانه تعداد راه های رسیدن به خانه ی E را با شروع حرکت از آن خانه می نویسیم. همین کار را برای سطرها ی پایینی هم انجام می دهیم. اگر برای خانه ی X ، خانه هایی از سطر بالایی را در نظر بگیریم که می توان از X به آن ها رفت، طبق اصل جمع تعداد راه های رسیدن از X به E (با شروع حرکت از خود خانه ی X) برابر مجموع تعداد راه های رسیدن از خانه های بالایی آن خانه به E است. پس شکل زیر به دست می آید و جواب ۹۶۰ است.

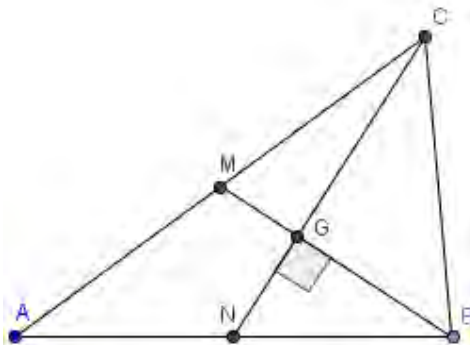
	$E:1$	۱	۱	
	۳	۳	۳	۳
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸	
۹۶	۹۶		۴۸	۴۸
۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	
$S:960$	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰

۱۰- پاسخ : ۳۷ ؛ فرض کنید که $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n$ اعدادی باشند که ویژگی سوال را دارا هستند و فرض کنید $a_1 = Xb_1^2$ که X عددی خالی از مربع (یعنی بر هیچ مربع کاملی بخش پذیر نیست) است. اکنون توجه کنید که طبق ادعای سؤال می توان نتیجه گرفت که برای هر $i \geq 2$: $a_i = X \times b_i^2$ و چون b_i ها اعداد متمایز بزرگتر از ۱ و کوچکتر مساوی $\sqrt{1391}$ هستند پس تعداد کل اعداد حداکثر $\lfloor \sqrt{1391} \rfloor = 37$ است. حال توجه کنید که عدد 1^2 و 2^2 و ... و 37^2 در شرایط سوال صدق می کنند. پس جواب سوال ۳۷ است.

۱۱- پاسخ : ۴ ؛ کافی است توجه کنید که $(x^y)^z = x^{y \times z}$ پس به سادگی و با استقرا می توان نشان داد که مقدار مورد نظر برابر $a^{a^{b-1}}$ است.

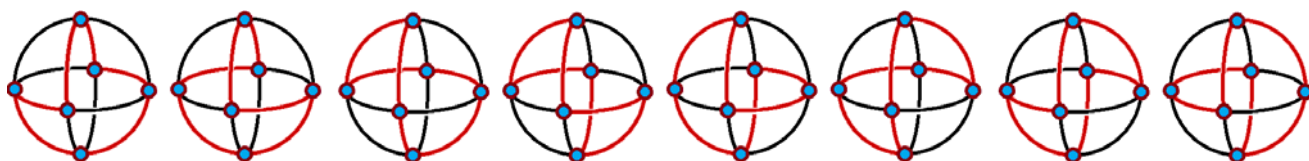
۱۲- پاسخ : ۱۳ ؛ با توجه به این که میانه ها یکدیگر را به نسبت یک به دو قطع می کنند، دو مثلث MGN و BGC با نسبت یک به دو متشابه اند پس $MN = \frac{BC}{3}$. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

حال با جایگذاری مقادیر MC و NB داریم: $MC^2 + NB^2 = 11^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \frac{484+361}{4} = \frac{845}{4}$ پس مقدار BC^2 برابر $169 = \frac{4}{5} \times \frac{845}{4}$ خواهد بود و بنابراین BC برابر ۱۳ است.



۱۳- پاسخ : ۳۲ ؛ به علت تقارن «نمکستان»ها، تعداد راه‌های رسیدن از «شکرستان» به «نمکستان شمالی» را حساب می‌کنیم و چهار برابر این عدد جواب مسأله خواهد بود. با حالت‌بندی کاملاً ساده به این نتیجه می‌رسیم که تمام راه‌های موجود دقیقاً ۸ راه (جهت‌دار) نمایش داده شده در شکل زیر هستند. پس ۳۲ حالت داریم.

(می‌توان برحسب این‌که نمکستان پشتی شهر چندم سفر است، حالت‌بندی را انجام داد.)

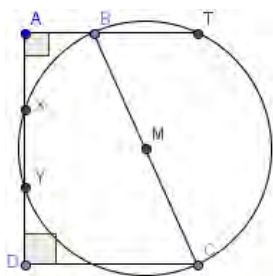


۱۴- پاسخ : ۱ ؛ فرض کنید برد f اعداد a_1, a_2, \dots, a_n و برد g اعداد b_1, b_2, \dots, b_n باشند. برد حاصل جمع حداکثر می‌تواند اعداد $a_i + b_j (i \leq n, j \leq m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی، باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، n برابر باقی‌مانده‌ی $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که mn عدد متمایز خواهیم داشت.

برد حاصل ضرب حداکثر می‌تواند اعداد $a_i \times b_j (i \leq n, j \leq m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی دو به توان باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، دو به توان n برابر باقی‌مانده‌ی $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. به همان سادگی می‌توان دید که این mn عدد نیز متمایز اند.

در مورد ترکیب توابع چون برد تابع f ، m عضوی است پس خروجی $f \circ g$ نیز حداکثر m عضو دارد. از طرفی چون تابع g حداکثر n خروجی دارد پس $f \circ g$ نیز نمی‌تواند بیش از n خروجی داشته باشد. پس حداکثر اعضای برد $\min\{m, n\}$ است. برای این حالت یک مثال می‌تواند این باشد که: f به اعداد ۱ تا n خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. هم‌چنین g به اعداد ۱ تا m خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که این مثال حداکثر ادعا شده را می‌دهد. پس جواب گزینه‌ی ۱ است.

۱۵- پاسخ : ۲ ؛ از رابطه‌ی قوت داریم: $AX \times AY = AB \times AT = ۱ \times DC = q$ از طرفی $AX = YD$ پس:
 $AX + AY = AY + YD = AD = r$ و چون $(x - AX)(x - AY) = x^2 - (AX + AY)x + AX \times AY$ پس
 پاسخ سوال $x^2 - rx + q$ است.



۱۶- پاسخ : ۳ ؛ دقت کنید که اگر تعداد عوامل ۳ در صورت و مخرج کسر متفاوت باشد، بعد از ساده کردن دقیقاً یکی از صورت و مخرج بر ۳ بخش پذیر است و دیگری نیست و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها نمی‌تواند بر ۳ بخش پذیر باشد. پس تنها باید کسرهایی را بررسی کنیم که صورت آن‌ها دو عامل ۳ دارد. این کسرها بعد از ساده کردن به شکل $\frac{n}{۱۰}$ در می‌آید که n بر ۳ بخش پذیر نیست. دقت کنید که ضرب صورت و مخرج کسر در عددی که بر ۳ بخش پذیر نیست ویژگی مورد نظر را تغییر نمی‌دهد پس کافی است این کسرها بررسی شوند. با بررسی این کسرها می‌بینیم که تنها سه کسر $\frac{۲}{۱۰}$ ، $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۴}{۱۰}$ این خاصیت را دارا هستند. پس پاسخ مسئله برابر ۳ است.

۱۷- پاسخ : ۳۰۰ ؛ توجه کنید که در مرحله n ، روی هر خانه، تعداد گشت‌های به طول n از مبدأ به آن خانه نوشته می‌شود. پس برای حل سوال باید تعداد گشت‌های از مبدأ به خانه‌ی $(۱, ۱)$ را حساب کنیم. این معادل شمارش تعداد دنباله‌های به طول ۶ از حروف U, R, D است که $L = D + ۱$ و $R = L + ۱$ و به علاوه حاصل جمع آن‌ها برابر شش است. توجه کنید که حروف U, R, D و L نمایش‌گر بالا و راست و پایین و چپ هستند. پس سه حالت داریم.

حالت ۱. $U = ۳, D = ۲, R = ۱, L = ۰$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۶۰ = \frac{۶!}{۰!۱!۲!۳!}$ است.

حالت ۲. $U = ۲, D = ۱, R = ۲, L = ۱$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۱۸۰ = \frac{۶!}{۱!۲!۱!۲!}$ است.

حالت ۳. $U = ۰, D = ۱, R = ۳, L = ۲$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $۶۰ = \frac{۶!}{۲!۳!۰!۱!}$ است.

پس در کل $۶۰ + ۱۸۰ + ۶۰ = ۳۰۰$ حالت داریم.

۱۸- پاسخ : ۲؛ فرض کنید اعداد ما $p < q < r < s$ باشند. داریم: $pq < pr < ps, qr < qs < rs$ پس دو حالت داریم:

حالت ۱: $pq = ۲, pr = ۸, ps = ۹, qr = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\text{و با توجه به این که } pq = ۲ \text{ پس } p = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲} \text{ و در نتیجه } q = ۲\sqrt{۲}, r = ۸\sqrt{۲} \text{ و } s = ۹\sqrt{۲}.$$

حالت ۲: $pq = ۲, pr = ۸, qr = ۹, ps = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\text{و با توجه به این که } pq = ۲ \text{ پس } p = \frac{۴}{۳} \text{ و در نتیجه } q = \frac{۳}{۲}, r = ۶ \text{ و } s = ۲۴.$$

و توجه کنید که هر دوی این جوابها درست هستند.

۱۹- پاسخ : ۳؛

مثال نقض برای گزینه ی ۱: از آنجایی که همیشه $p_i \geq ۲$ ، f هیچ عددی نمی تواند ۲ باشد.

مثال نقض برای گزینه ی ۲: $f(۳) = ۱ = f(۲)$ پس f یک به یک نیست.

مثال نقض برای گزینه ی ۴: $m = ۴, n = ۸ \Rightarrow f(۴)f(۸) = ۴ \times ۹ = ۳۶ > ۲۵ = f(۳۲)$

مثال نقض برای گزینه ی ۵: $m = ۲, n = ۲ \Rightarrow f(۲)f(۲) = ۱ \times ۱ = ۱ < ۴ = f(۴)$

دلیل درستی گزینه ی ۳: خروجی تابع نمی تواند از یک عامل اول تنها یکی داشته باشد زیرا توان هر r_i ، p_i است و اعداد اول (p_i ها)، بزرگتر مساوی دو هستند. حال ادعا می کنیم که این شرط کافی نیز هست یعنی اعداد به شکل $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ ($r_i \geq ۲$) دقیقاً در برد هستند. اثبات ادعا: فرض کنید بخواهیم خروجی تابع عدد $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ ($r_i \geq ۲$) باشد. توجه کنید که هر عدد بزرگتر مساوی ۲ را می توان به صورت جمع مضارب نامنفی از ۲ و ۳ نوشت پس فرض کنید $r_i = ۲a_i + ۳b_i$. اکنون توجه کنید که خروجی تابع برای $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ برابر ۲ و برای $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ برابر ۳

ضرب بسته‌اند، گزینه‌ی ۳ درست است. $p_k = \frac{2a_1+2b_1}{p_2} \dots \frac{2a_k+2b_k}{p_k}$ است که این همان مقدار مورد نظر است. همچنین چون اعداد معرفی شده نسبت به

۲۰- پاسخ : ۴ ؛ اگر چرخ را ۶ بار ۶۰ درجه بچرخانیم، میله هر بار مقدار ثابتی را جارو می‌کند و در نهایت یک دور کامل می‌زند. پس از ۳۶۰ درجه چرخش، دایره‌ی بزرگی به شعاع $\sqrt{2}$ ایجاد خواهد شد. درون این دایره، دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ است که خود چرخ بوده و در نتیجه جارو نمی‌شود. پس مساحت جارو شده برابر

است. حال توجه کنید که این مساحت برای ۶ بار چرخش است. پس مساحت جارو شده پس از طی ۶۰ درجه $\frac{314}{6}$ است و نزدیکترین عدد صحیح به این مساحت ۵۰ است.

۲۱- پاسخ : ۵۲ ؛ می‌دانیم $a_{n+2} = \max\{a_{n+1} - 1, a_n + 1\}$ پس $a_n \leq a_{n+2} - 1$ با چند بار استفاده از این رابطه داریم: $52 \leq 48 \leq a_{100} - 48 \leq \dots \leq a_8 - 2 \leq a_6 - 1 \leq a_4 = \max\{a_3 - 1, a_2 + 1\}$ پس $a_3 \leq 53$ و چون $a_n \leq a_{n+2} - 1$ پس $a_1 \leq a_3 - 1 \leq 52$. پس ثابت کردیم که اولین عضو دنباله کم‌تر مساوی ۵۲ است. حال برای این کران بالا مثال می‌آوریم: $a_{2n} = 51 + n$ و $a_{2n+1} = 52 + n$.

۲۲- پاسخ : ۵ ؛ ادعا می‌کنیم که احسان هر گونه بازی کند حسام می‌تواند بازی را ببرد. برای اثبات ادعا این الگوریتم را برای حسام ارایه می‌دهیم. (این الگوریتم را می‌توان نوعی تقلید دانست.)

الگوریتم: اگر احسان مهره‌ای قرار داد، مهره‌ای کنار آن مهره قرار بده و اگر احسان مهره‌ای را بالا برد، مهره‌ای که کنار مهره‌ی حرکت داده شده بود را بالا ببر. با این الگوریتم پس از هر حرکت حسام، سطرها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی می‌شوند. پس احسان در هنگام حرکتش یا باید یک سطر را نیمه‌پر کند که حسام می‌تواند الگوریتم را اجرا کند و یا باید یک خانه از یک سطر پر را یک واحد بالا(به سطر تمام خالی بالایی) ببرد و در این حالت نیز حسام می‌تواند طبق الگوریتم حرکت خود را انجام دهد. پس برای هر حرکت احسان، حسام یک حرکت تضمین شده دارد که وضعیت بازی را مناسب برای حرکات بعدی

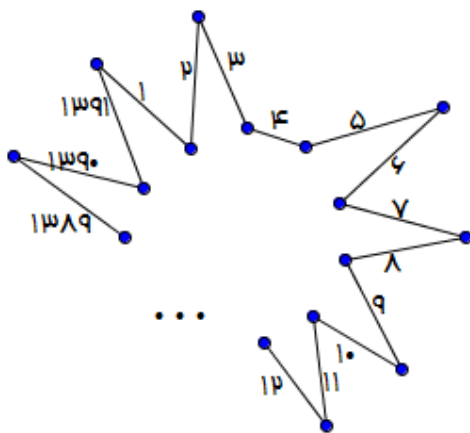
می‌کند. چون بازی بالاخره تمام می‌شود پس در نهایت کسی بدون حرکت می‌ماند. این فرد حسام نیست پس احسان است! پس حسام بازی را می‌برد.

۲۳- پاسخ : ۱۰ ؛ ب.م.م x و y را برابر d می‌گیریم. x' و y' را حاصل تقسیم x و y بر d می‌گیریم. پس داریم:

$$x' + y'$$

و چون $y \geq x \Rightarrow y' \geq x'$ پس $y' = dx' \Rightarrow (dx' - y') = 0$ و چون x' و y' نسبت به هم اول هستند، نتیجه می‌گیریم $y' = d, x' = 1$. پس جواب‌ها دقیقاً d و d^2 ها هستند که ۱۰ تا از این جواب‌ها در بازه‌ی ۱ تا ۱۰۰ هستند.

۲۴- پاسخ : ۱۳۹۰ ؛ یک ضلع را در نظر بگیرید. دو سر این ضلع در چند ضلعی دو زاویه‌ی داخلی داریم. این ضلع «ناجور» است اگر و تنها اگر یکی از این دو زاویه بیش‌تر از 180° درجه و یکی از این دو زاویه کم‌تر از 180° درجه باشد. در غیر این صورت هر دو ضلع کناری در یک طرف پاره‌خط قرار می‌گیرند. اکنون ادعا می‌کنیم که نمی‌توان ۱۳۹۱ ضلعی ناجور داشت. زیرا اگر تمام ضلع‌ها ناجور باشند، زوایای یکی در میان کم‌تر و بیش‌تر از 180° درجه هستند و چون ۱۳۹۱ فرد است این موضوع امکان ندارد. مثال برای ۱۳۹۰ را در زیر مشاهده کنید:



۲۵- پاسخ : ۱۴ ؛ هنگامی که دایره‌ی n ام را اضافه می‌کنیم حداکثر در $2(n-1)$ نقطه با دیگر دایره‌ها برخورد دارد. از طرفی هر دایره که اضافه می‌کنیم به تعداد کمان‌هایش ناحیه‌ها را زیاد می‌کند. پس دایره‌ی اول دو ناحیه ایجاد می‌کند. دایره‌ی دوم دو ناحیه‌ی جدید اضافه می‌کند. دایره‌ی سوم حداکثر $2 \times 2 = 4$ ناحیه‌ی اضافه ایجاد می‌کند و دایره‌ی چهارم

حداکثر $6 = 3 \times 2$ ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌کند. پس در کل حداکثر $14 = 6 + 4 + 2 + 2$ ناحیه خواهیم داشت. توجه کنید هر گونه که 4 دایره روی کره بگذاریم که هر دوتایی متقاطع باشند و هیچ سه تایی در یک نقطه به هم نرسند 14 ناحیه خواهیم داشت.