



آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ‌نامه چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱. بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳ و ... $11n$ حداکثر سه مقسوم علیه اول داشته باشند چند است؟



۲. دوازده کشتی‌گیر در جام جهان‌پهلوان تختی شرکت کرده‌اند. ممکن است دو کشتی‌گیر چند بار با هم مبارزه کنند. کسی که پنج بار ببازد از دور رقابت‌ها حذف می‌شود. در این جام حداکثر چند کشتی برگزار می‌شود؟ (توجه کنید که کشتی تساوی ندارد.)

۳. نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۱۱ نفره اعدادی صحیح از صفر تا ۲۰ است. فرض کنید میانگین نمرات ۱۸ و میانگین نمرات ۱۹ است؛ کم‌ترین نمره کلاس حداقل چند می‌تواند باشد؟ (میانگین ۱۱ نمره، نمره‌ای است که پس از مرتب کردن نمرات به ترتیب نزولی، در رتبه ششم قرار می‌گیرد.)



۴. قیمت سهام شرکت «نوسان‌سازان شدید» دچار نوسانات شدیدی شده است! در ابتدای ورود شرکت به بازار بورس، هر سهم آن هزار ریال قیمت‌گذاری شد. پس از یک روز، قیمت هر سهم یک ریال کاهش پیدا کرد. سپس به مدت دو روز، هر روز یک ریال افزایش یافت. سپس به مدت سه روز، هر روز یک ریال کاهش یافت و الی آخر. بعد از گذشت ۳۶۵ روز از ورود شرکت به بازار بورس قیمت هر سهم چند ریال است؟

۵. به ازای چند عدد صحیح a ، معادله $x^2 + ax + ۱۳۸۹ = ۰$ ریشه‌ای صحیح دارد؟

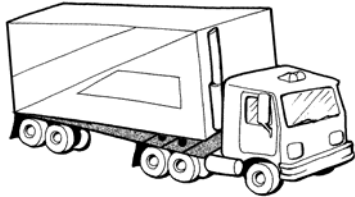


آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

۶. فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد که برای m از ۲ تا ۶، $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی است. n چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۷. طول محفظه کامیونی ۴ متر و عرض و ارتفاع آن ۲ متر است. مقداری آب در محفظه کامیون جمع شده که در حالت افقی بودن محفظه، ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است. راننده می‌خواهد برای

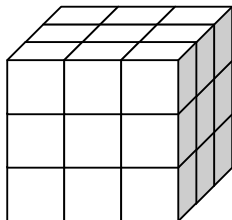


جلوگیری از زنگ زدن محفظه، آن را بالا بیاورد طوری که سطح تماس آب با بدنه کم‌ترین مقدار ممکن شود. سقف و در محفظه بسته است. او باید محفظه را چند درجه بالا بیاورد؟ (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)

۸. کوچک‌ترین عدد n که 17^n مقسوم‌علیه $\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1 \times 2 \times \dots \times n}$ باشد، چند است؟



۹. سه رادار بر روی زمین طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌های آن‌ها از هم ۶، ۸ و ۱۰ کیلومتر است. در یک لحظه، هر سه فاصله هواپیمایی تا خود را ۱۳ کیلومتر گزارش می‌کنند. ارتفاع هواپیما تا سطح زمین چند کیلومتر است؟ زمین را مسطح فرض کنید. (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)



۱۰. مکعبی به ضلع سه در نظر بگیرید که به مکعب‌های به ضلع یک تقسیم شده است. چند خط وجود دارد که با وجه پایینی مکعب بزرگ زاویه ۴۵ درجه می‌سازد و دست‌کم از مرکز دو تا از مکعب‌های کوچک می‌گذرد؟



آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

۶. کوچک‌ترین عدد گویای مثبت است که بسط اعشاری q^3 به شکل $abcabcabc\dots$ است

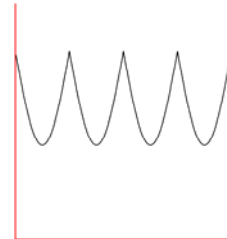
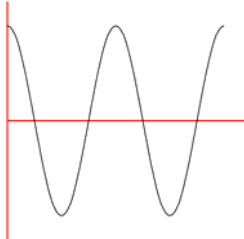
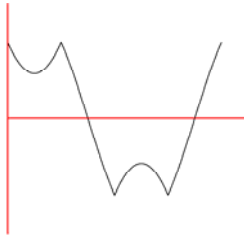
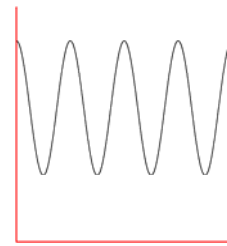
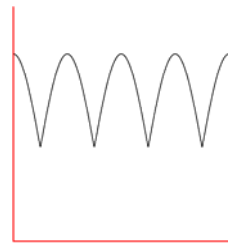
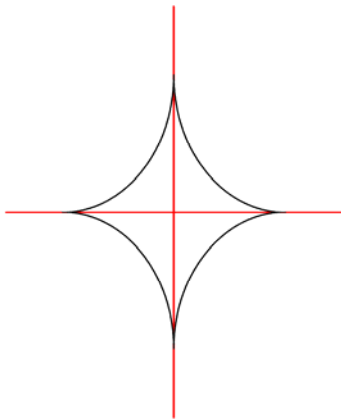
که a ، b و c ارقامی از بین ۰، ۱، ۲ و... ۹ هستند. $a + b + c$ چند است؟

- (الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۷ (د) ۱۸ (ه) ۲۷

۷. متحرکی از نقطه $(1, 0)$ شروع کرده و با سرعت ثابت در جهت

مثلثاتی، روی شکل روبه‌رو حرکت می‌کند. نمودارِ مجموع

مؤلفه‌های x و y آن بر حسب زمان، شبیه کدام گزینه است؟



(ه)

(د)

(ج)

۸. بزرگ‌ترین عدد حقیقی M را طوری بیابید که برای هر $a, b \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$a^2 + b^{1389} \geq Mab$$

- (الف) صفر (ب) 2^{-1386} (ج) ۱ (د) $\frac{1391}{1389}$ (ه) ۲

۹. دانش‌آموزی می‌خواهد کتاب‌های ریاضی، فیزیک، ادبیات و عربی اول و دوم دبیرستان را در هشت

هفته، در هر هفته یک کتاب، مرور کند. او باید کتاب سال دوم هر موضوع را زمانی مطالعه کند که

کتاب سال اول آن موضوع را قبلاً خوانده باشد. این کار به چند روش ممکن است؟

- (الف) ۷۰ (ب) ۵۷۶ (ج) ۲۵۲۰ (د) ۲۰۱۶۰ (ه) ۴۰۳۲۰

۱۰. برای چند زوج مرتب (a, b) از اعداد طبیعی که $1 \leq a, b \leq 10$ ، معادله $x^2 = ax - b$

ریشه‌ای در $[0, 1]$ دارد؟

- (الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۲۰ (د) ۴۵ (ه) ۶۲



آزمون مرحله اول بیست و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

۱۱. عدد $۲۱۰۳۱۵^{۱۲}$ روی تخته نوشته شده است. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد (غیر از خودش) را در نظر گرفته و آن را از عدد روی تخته کم می‌کنیم و حاصل را به جای عدد روی تخته می‌نویسیم. همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم. پس از چند بار به عدد ۱ می‌رسیم؟ (مثلاً اگر در ابتدا عدد ۷ روی تخته می‌بود، پس از ۴ مرحله به عدد ۱ می‌رسیدیم: ۶، ۳، ۲ و ۱).

الف) ۳۳ (ب) ۴۵ (ج) ۵۶ (د) ۶۸ (ه) ۸۰

۱۲. سه ساعت داریم که اولی سالم است، دومی هر ساعت، ۷ دقیقه و سومی هر ساعت ۱۱ دقیقه جلو می‌افتد. اگر ساعت‌ها در ظهر امروز به درستی تنظیم شوند بعد از گذشت چند ساعت، هر دو ساعت خراب، ۶ ساعت جلوتر از ساعت سالم را نشان می‌دهند؟

الف) ۱۸ (ب) ۷۷ (ج) ۱۸۰ (د) ۳۶۰ (ه) ۷۲۰

۱۳. فرض کنید $f(abc) = ab + bc + ca$ که \overline{abc} نمایش در مبنای ۱۰ است. دقت کنید ممکن است برخی از a ، b و c صفر باشند. مثلاً $f(۲۳) = ۰ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۰ = ۶$. مجموع $f(۰) + f(۱) + \dots + f(۹۹۹)$ چند است؟

الف) ۲۴۳ (ب) ۶۹۳۰ (ج) ۶۰۷۵۰ (د) ۱۲۱۵۰۰ (ه) ۴۹۹۵۰۰

۱۴. کاغذی مربعی به ضلع ۲۰cm از یکی از اضلاع به وسط یک میز بزرگ چسبیده و می‌تواند حول آن ضلع دوران بکند. دو طرف این کاغذ کاملاً جوهری شده است و به هر جایی که مالیده شود آن را جوهری می‌کند. می‌خواهیم تنها با تا کردن و خم کردن کاغذ و مالیدن و تکان دادن آن بیش‌ترین سطح ممکن از میز را رنگی کنیم. حداکثر چند سانتی‌متر مربع از میز را می‌توان رنگی کرد؟

الف) $۲۰۰\pi + ۴۰۰$ (ب) $۳۰۰\pi + ۲۰۰$ (ج) ۴۰۰π (د) ۶۰۰π (ه) $۶۰۰\pi - ۴۰۰$

۱۵. فرض کنید H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. از H خطی به موازات ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه D قطع کند. نقطه E را روی دایره محیطی مثلث بین A و C طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{HDB} = \widehat{EDC}$. اگر $DH = ۱$ ، $HB = ۳$ و $BA = ۸۹$ چه قدر است AE ؟

الف) ۳۰ (ب) $\frac{۸۹}{۳}$ (ج) $\frac{۸۶}{۳}$ (د) $\frac{۸۵}{۳}$ (ه) $\frac{۴۵}{۲}$

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۹

دفترچه کد ۱ - سؤالات جواب آخر

۱. کوچکترین عدد طبیعی که چهار مقسوم‌علیه اول دارد برابر است با $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. بنابراین $11 \times n$ باید کوچکتر از ۲۱۰ باشد که نتیجه می‌دهد n باید کمتر از ۲۰ باشد. پس پاسخ ۱۹ است.

۲. در هر کشتی یک نفر می‌بازد؛ پس تعداد باخت‌ها برابر تعداد مبارزه‌ها است. ابتدا نشان می‌دهیم تعداد کشتی‌های برگزار شده (یا همان تعداد باخت‌ها) نمی‌تواند از $1 - 12 = 5 \times 12 = 59$ بیش‌تر باشد:

اگر بیش از ۵۹ کشتی برگزار شده باشد؛ بیش از ۵۹ باخت صورت گرفته (حداقل ۶۰ تا). همچنین هیچ کشتی‌گیری نمی‌تواند بیش از ۵ باخت کسب کند (با باخت پنجم حذف شده و دیگر بازی نخواهد کرد) بنابراین همه کشتی‌گیرها حداقل ۵ باخت خواهند داشت ($60 < 4 + 5 \times 11$) که نتیجه می‌دهد همه آن‌ها از دور رقابت‌ها حذف شده‌اند ولی این نتیجه غیر ممکن است چون در بازی آخر ۲ نفر که حذف نشده‌اند با هم مسابقه می‌دهند و حداکثر یکی از آن‌ها حذف می‌شود (چون یکی می‌برد و به باخت‌هایش اضافه نمی‌شود). با توجه به این‌که به تناقض رسیدیم (اینکه همه کشتی‌گیرها حذف می‌شوند) تعداد بازی‌ها نمی‌تواند از ۵۹ بیشتر باشد.

حال با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم ممکن است ۵۹ بازی برگزار شود: برای بازی مثالی هم وجود دارد: ابتدا در ۴ بازی کشتی‌گیر ۱۲ از ۱۱ می‌بازد و سپس کشتی‌گیر ۱۲ با هر کشتی‌گیر دیگری (۱، ۲، ۳، ...، ۱۱) ۵ بار بازی کرده و همه را می‌برد. در انتها همه کشتی‌گیرها غیر از شماره ۱۲ حذف شده‌اند و $59 = 4 + 11 \times 5$ بازی انجام شده است.

پس پاسخ ۵۹ است.

۳. فرض کنید افراد را بر اساس نمره به صورت نزولی مرتب کرده‌ایم. داریم:

$$198 = (\text{تعداد}) \times (\text{میانگین}) = (\text{مجموع کل نمره‌ها})$$

$$(\text{مجموع نمرات } 10 \text{ نفر اول}) - (\text{مجموع کل نمره‌ها}) = (\text{نمره‌ی نفر آخر})$$

با توجه به رابطه بالا هرچه مجموع نمرات ۱۰ نفر اول بیشتر باشد نمره نفر آخر کمتر می‌شود. پس اگر بخواهیم نمره‌ی نفر اول کمینه باشد، باید مجموع نمرات بقیه بیشینه باشد. مجموع نمرات ۵ نفر اول حداکثر ۱۰۰ است و در حالتی به دست می‌آید که نمره‌ی همه‌ی آن‌ها ۲۰ باشد. نمره‌ی ۵ نفر بعدی باید کمتر مساوی ۱۹ باشد (زیرا نمره‌ی نفر ۶ ام ۱۹ است) پس مجموع نمرات آن‌ها حداکثر ۹۵ است و در حالتی به دست می‌آید که نمره‌ی همه‌شان ۱۹ باشد. بنابراین مجموع نمرات ۱۰ نفر اول حداکثر ۱۹۵ است که با این فرض، نمره‌ی نفر آخر ۳ خواهد بود و این مقدار، حداقل نمره نفر آخر می‌باشد. پاسخ ۳ است.

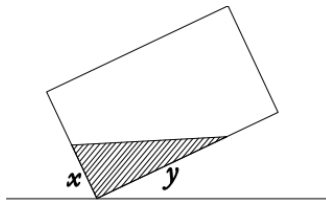
۴. دنباله‌ی متناظر با تغییرات قیمت به صورت $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ است. بعد از گذشت یک روز تغییر قیمت سهام برابر -1 ریال خواهد بود، بعد از $1+2$ روز قیمت سهام $1+2-1=2$ نسبت به روز اول تغییر کرده و... و بعد از $1+2+3+\dots+n$ روز $1+2-3+\dots\pm n$ ریال قیمت سهام تغییر می‌کند. توجه کنید که بعد از روزهای $\frac{n(n+1)}{2}, 3, 6, \dots, 1$ علامت یک‌های دنباله‌ی تغییرات عوض می‌شود.

برای این که بفهمیم در روز ۳۶۵م در چه وضعیتی هستیم، معادله‌ی $\frac{n(n+1)}{2} < 365$ را حل کرده و به این نتیجه می‌رسیم که $n < 27$. طبق گفته‌های بالا تا روز ۳۵۱ ($= \frac{27 \times 26}{2}$) قیمت سهام $1+2-3+\dots+26$ ریال تغییر می‌کند، یعنی $13+$ ریال. بعد از آن تا روز ۳۶۵م هر روز یک ریال قیمت کاهش می‌یابد که تعداد این روزها $365-351=14$ است. نهایتاً بعد از گذشت ۳۶۵ روز قیمت هر سهم برابر $13-14=99$ می‌شود. پاسخ ۹۹ است.

۵. ضرب ریشه‌های عبارت $x^2 + ax + 1389$ برابر ۱۳۸۹ است. تجزیه ۱۳۸۹ به عوامل اول به صورت $1389 = 3 \times 463$ است بنابراین این ۱۳۸۹ را به ۴ طریق می‌توان به صورت ضرب دو عدد صحیح نوشت (۱، ۱۳۸۹، ۱۳۸۹-، ۱-، ۳، ۴۶۳، ۳، ۴۶۳-، ۳-، ۴۶۳-). که در هر حالت a به طور یکتا (منفی جمع دو ریشه) تعیین می‌شود و ۴ مقدار متفاوت برای a بدست می‌آید. پس پاسخ ۴ است.

۶. راه حل اول: کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۲ تا ۶، ۶۰ است پس عددی که ریشه ۲ تا ۶ام آن صحیح است باید ریشه‌ی ۶۰امش هم صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد با این ویژگی 2^{60} است که $61 = 1 + 60$ مقسوم‌علیه دارد. پس پاسخ ۶۱ است.

راه حل دوم: اگر تجزیه به عوامل اول عددی به صورت $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ باشد ریشه k ام آن برابر $p_1^{\alpha_1 \div k} \dots p_n^{\alpha_n \div k}$ خواهد بود؛ پس برای طبیعی بودن ریشه k ام a باید α_i ها بر k بخشپذیر باشند؛ در این سوال نماها باید بر کوچکترین مضرب مشترک ۲ تا ۶ یعنی ۶۰ بخشپذیر باشند؛ کوچکترین عدد طبیعی با این ویژگی 2^{60} بوده و ۶۱ مقسوم علیه دارد. پاسخ ۶۱ است.



۷. اگر فرض کنیم آب درون محفظه به صورت روبه رو درآمده باشد رابطه‌های زیر را داریم:

$$x : \text{حجم آب} = \frac{1}{2}$$

$$2x : \text{سطح تماس}$$

برای مینیمم شدن سطح تماس آب با محفظه طبق روابط بالا باید $x + y$ مینیمم شود. طبق نامساوی حسابی-هندسی داریم $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ، درحالی در این مسئله xy ثابت (۰.۸) است. تساوی نامساوی حسابی-هندسی با فرض ثابت بودن حاصل ضرب xy وقتی حاصل می‌شود که x و y برابر باشند پس در صورت برابر بودن x و y مجموع‌شان مینیمم می‌شود و در نتیجه سطح تماس آب و محفظه مینیمم می‌شود. بنابراین زاویه سطح محفظه با افق برابر ۴۵ درجه خواهد بود لذا پاسخ ۴۵ است.

۸. توجه کنید که کسر داده شده برابر $\left(\frac{2n}{n}\right)$ است لذا همواره حاصل آن عددی طبیعی خواهد بود. ابتدا نشان

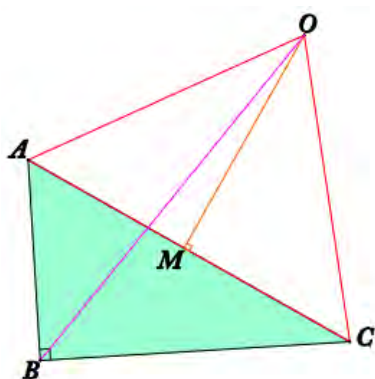
می‌دهیم در صورتیکه $17^2 < 2n < 17^3$ جواب موجود نمی‌باشد:

اگر $17^2 < 2n < 17^3$ هر مضرب ۱۷ در تجزیه به عوامل اول دقیقا ۱ عامل ۱۷ دارد. اگر $n = 17k + r$ ($0 \leq r < 17$) مخرج کسر k عامل ۱۷ خواهد داشت، همچنین خواهیم داشت:

$$2n = 17(2k) + 2r \leq 17(2k) + 32 \leq 17(2k + 1) + 15$$

پس در صورت کسر حداکثر $k + 1$ مضرب 17 خواهیم داشت و در نتیجه صورت حداکثر $k + 1$ عامل 17 خواهد داشت ولی برای اینکه کسر داده شده بر 17^2 بخشپذیر باشد باید تعداد مضارب 17 در صورت حداقل 2 تا از تعداد مضارب 17 در مخرج بیشتر باشد پس 289 در صورتیکه $17^2 < 2n$ خواسته سوال ممکن نخواهد بود.

تا اینجا ثابت کردیم $2n \geq 17^2 = 289$. کوچکترین عدد طبیعی n که این شرط را دارد 145 است که با آزمایش کردن آن ($n = 145$) مشاهده می‌کنیم کسر داده شده بر 17^2 بخشپذیر است؛ پس پاسخ 145 است.



۹. با توجه به برقراری قضیه فیثاغورس برای فواصل رادارها، سه رادار، مثلی قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند (A, B و C). با توجه به برابر بودن فاصله هواپیما (نقطه O) از دو راس هر ضلع مثلث، این نقطه روی صفحات عمودمنصف ضلع‌ها قرار گرفته. اشتراک این سه صفحه خطی عمود بر صفحه مثلث (زمین) در وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه (نقطه M) می‌باشد؛ پس O روی آن خط قرار دارد و شرط دیگر این است که فاصله آن از رئوس مثلث 13 کیلومتر است. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OMA طول ضلع OM که همان ارتفاع هواپیما از زمین

است بدست می‌آید: $12 = \sqrt{13^2 - 5^2}$. پاسخ 12 است.

۱۰. خطوط مطلوب را به 2 گروه تقسیم می‌کنیم:

گروه اول: خطوط موازی دو وجه مقابل از مکعب که با توجه به تقارن 4 جانبه مکعب، یک دسته از 4 دسته آن‌ها را مشخص می‌کنیم: (شماره مکعب‌های 1×1 مربوط به خطوط آورده شده)

۱۳-۱ ۱۴-۲ ۱۵-۳ ۱۶-۴ ۱۷-۵ ۱۸-۶ ۲۲-۱۰ ۲۳-۱۱ ۲۴-۱۲

پس گروه اول $36 = 4 \times 9$ خط دارد.

گروه دوم: خطوط موازی قطر اصلی مکعب. این گروه نیز با توجه به تقارن به ۴ دسته متناظر و هم‌اندازه تقسیم می‌شود که یک دسته را آورده‌ایم:

۲۶-۱۳ ۲۴-۱۱ ۲۳-۱۰ ۱۸-۵ ۱۷-۴ ۱۵-۲ ۱۴-۱

این گروه از $۲۸=۴ \times ۷$ خط تشکیل شده.

در مجموع $۶۴ = ۳۶+۲۸$ خط قابل قبول وجود دارد. پاسخ ۶۴ است.

		۲۱	۱۲		
		۲۰	۱۱		۳
	۱۹	۱۰		۲	۶
۱۹	۱۰			۱	۵
۲۲	۱۳			۴	۹
۲۵	۱۶			۷	۸

دفترچه کد ۱ - سوالات تستی

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون C' دوران 60° درجه C است، مثلث ACC' متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه نسبت خواسته شده در سوال برابر ۱ است.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با فرض طبیعی بودن کسر $\frac{596+k}{700-k}$ ، باید $596+k \mid 700-k$.

از طرف دیگر $700-k \mid 700-k$.

با جمع این دو رابطه خواهی داشت: $700-k \mid 1296$ پس $700-k$ باید مقسوم‌علیه 1296 باشد و هر مقسوم‌علیه‌های 1296 که کوچکتر از 700 باشد یک جواب قابل قبول خواهد بود. $1296 = 2^4 \times 3^4$ ، بنابراین ۲۵ مقسوم‌علیه دارد که همه آن‌ها غیر از خود 1296 از 700 کوچکترند و به ازای هر کدام یک جواب داریم. پس به ازای ۲۴ مقدار طبیعی برای k کسر مورد نظر طبیعی خواهد بود.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

راه حل اول: برای دستگاه مختصات، جهت افقی (راست) را محور x ها و جهت عمودی (بالا) را محور y ها و مبدا مختصات را منزل آقای فراموش‌کار در نظر می‌گیریم. محل وی را با (a, b) نشان می‌دهیم. با گذشت هر ساعت مقدار یکی از a یا b یک واحد تغییر می‌کند. با توجه به اینکه ۱۵ ساعت از آغاز حرکت گذشته باید داشته باشیم: $|a| + |b| \leq 15$ و همچنین $|a| + |b|$ باید فرد باشد (چون با گذشت هر ساعت مقدار آن دقیقاً ۱ واحد تغییر می‌کند).

پس مجموع ممکن ۱۶ است ۱، ۳، ۵، ...، ۱۵ باشد. تعداد مختصات‌های ممکن با این ویژگی‌ها عبارت است از:

$$4 \times (2+4+\dots+16) - 32 = 256$$

(ضریب ۴ به خاطر ۴ ناحیه‌ی مختصات، اعداد داخل پرانتز تعداد راه‌های نوشتن ۱ تا ۱۵ به صورت مجموع دو عدد صحیح نامنفی و ۳۲ تعداد نقاط روی محورها که دوبار شمرده شده‌اند)

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر تعداد شکلات‌ها حداقل $36=6 \times 6$ تا باشد با قرار دادن ۶ شکلات در ۶ ردیف اول فرض سؤال نقض می‌شود. ادعا می‌کنیم ۳۵ شکلات هر طوری قرار بگیرند نمی‌توانند بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها را پر کنند؛ در هر ردیفی که بیش‌تر خانه‌هایش پر شده، حداقل ۶ شکلات قرار دارد و حداقل ۶ ردیف باید این شرایط را داشته باشند پس برای پر کردن بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها حداقل $36=6 \times 6$ شکلات مورد نیاز است.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به این که $PE \perp AC$ و $PD \perp AB$ و $DE \parallel BC$ داریم: $\angle EDP = 45^\circ$ و $\angle DEP = 60^\circ$ حال با توجه

به قضیه سینوس‌ها در مثلث PDE داریم $\frac{PE}{PD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ و داریم: $PC = \frac{PE}{\sin(30^\circ)} = 2PE$ و

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\frac{PD}{\sin(45^\circ)}}{\frac{PE}{\sin(30^\circ)}} = \frac{PD}{PE} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ پس داریم: } PB = \frac{PD}{\sin(45^\circ)} = \sqrt{2}PD$$

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم: $q^3 = \overline{.abcabc \dots}$ پس $q^3 = \overline{abc.abcabc \dots}$ و با کم کردن این دو عبارت

داریم: $999q^3 = \overline{abc}$ پس $q^3 = \frac{\overline{abc}}{999}$. چون q گویاست؛ هم صورت و هم مخرج q^3 وقتی که تا حد امکان

ساده شود باید مکعب کامل باشند. با توجه به اینکه $999 = 3^3 \times 37$ صورت q حداقل یک عامل ۳۷ دارد لذا

کوچکترین q^3 ممکن $\frac{1}{27}$ بوده که کوچکترین q را نتیجه می‌دهد. پس $q^3 = \frac{1}{27} = \frac{37}{999}$.

نتیجه می‌شود $\overline{abc} = 37$ و $a + b + c = 10$

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در ابتدا مجموع مختصات برابر ۱ است و بعد از طی کردن یک چهارم مسیر به مقدار ۱- می‌رسد و بعد از پیمودن یک چهارم دیگر این مقدار دوباره ۱- می‌شود در بعد از پیمودن یک چهارم آخر این مقدار ۱ می‌شود و سپس این مسیر دوباره تکرار می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (ه) این خاصیت را دارد.

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

چون b بین 10^b است 1389 عددی بسیار کوچک است و با تقریب خوبی می‌توان از آن صرف نظر کرد و در نتیجه می‌توان صورت مسئله را به صورت روبه‌رو ساده کرد: $M \leq \frac{a}{b} \rightarrow a \geq Mb \rightarrow a^2 \geq Mab$. حال a را می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفت در این صورت M به صفر میل می‌کند. در واقع برای هر M بزرگ‌تر از صفر a, b ای می‌توان ارائه داد که نامساوی غلط باشد. به این صورت که b طوری انتخاب می‌کنیم که 1389 از Mab کم‌تر باشد و سپس a را آنقدر کوچک می‌گیریم که a^2 را اگر به 1389 اضافه کنیم به Mab نرسد.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

تعداد راه‌های مطالعه‌ی این کتاب‌ها برابر تعداد راه‌های نوشتن کلمه‌ای هشت حرفی با a, b, c, d است بطوریکه از هر حرف دقیقا دو بار استفاده شود. این عدد برابر $2520 = \frac{8!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!}$ است. (بدون هیچ محدودیت ترتیبی $8!$ روش داریم؛ به محدودیت ترتیبی هر دو کتاب روش‌ها نصف می‌شوند چون دقیقا در نصف راه‌ها یک کتاب زودتر از دیگری آمده)

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این معادله نمی‌تواند دو ریشه در بازه‌ی $[0, 1]$ داشته باشد زیرا در غیر این صورت ضرب دو ریشه که مقدار آن برابر b خواهد بود کمتر از 1 می‌شود که متناقض با طبیعی بودن b است. پس این معادله حداکثر یک ریشه در این بازه دارد. و این هم وقتی رخ می‌دهد که مقدار تابع $x^2 - ax + b$ در نقطه صفر و نقطه 1 مختلف‌العلامت باشد (یا یکی صفر باشد). مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر b و مقدار تابع در نقطه‌ی 1 برابر $1 - a + b$ است. حال برای b ها از 1 تا 10 مقدار b مثبت است. پس باید مقدار $1 - a + b$ نامثبت باشد. برای $1 - a + b = 1$ ، $a = 9$ ، $b = 2$ حالت، برای $1 - a + b = 2$ ، $a = 8$ ، $b = 9$ حالت و... برای $1 - a + b = 9$ ، $a = 1$ ، $b = 9$ حالت دارد. پس در کل تعداد زوج مرتب‌ها برابر $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ است.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

تا وقتی که عدد زوج است بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آن نصف آن است و نتیجه‌ی عملیات ما نصف کردن عدد مورد نظر است پس در 10 مرحله، عدد $5^{12} \times 3^{11}$ به دست می‌آید. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد یک سوم

آن است و نتیجه‌ی عملیات ما دو سوم کردن عدد مورد نظر است. حال عدد زوج شده و انجام عملیات به معنای نصف کردن آن است. پس اگر عدد بر ۳ بخش پذیر باشد بعد از دو مرحله یک سوم می شود؛ در نتیجه بعد از $2 \times 11 = 22$ مرحله به 5^{12} می‌رسیم. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد $\frac{1}{5}$ آن است و نتیجه‌ی عملیات ما چهار پنجم کردن عدد است. حال عدد بر ۴ بخش پذیر شده و طی دو مرحله‌ی بعدی دو بار بر ۲ تقسیم می شود. پس اگر عدد بر ۵ بخش پذیر باشد بعد از ۳ مرحله تقسیم بر ۵ می‌شود؛ لذا بعد از $3 \times 12 = 36$ مرحله به ۱ می‌رسیم. پس در کل $68 = 10 + 36 + 22$ مرحله انجام می‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای اینکه دو ساعت خراب هر کدام ۶ ساعت جلو بیفتند باید رابطه‌های زیر برقرار باشد:

$$7K \equiv 6$$

ضرب در ۶۰ شدن پیمانه‌ها و اعداد به منظور هم واحد شدن طرفین است (همه به دقیقه). که از این رابطه‌ها به دست می‌آید $K \equiv 360 \pmod{720}$ که نتیجه می‌دهد کوچک‌ترین K ممکن برابر ۳۶۰ است.

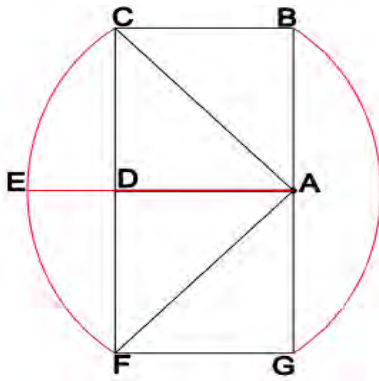
۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه حل اول: اگر هر عدد را عددی سه رقمی تصور کنیم (با گذاشتن صفر به اندازه‌ی نیاز در اولش) از هر یک از ارقام ۳۰۰ بار آمده است می‌توان دید $607500 = (0 \times (0 + 1 + \dots + 9) + 1 \times (0 + 1 + \dots + 9) + 9 \times (0 + 1 + \dots + 9)) \times 300$ ۱۰ برابر مجموع مورد نظر ماست (هر جمله از جواب ده بار در این مجموع آمده است) پس حاصل ۶۰۷۵۰ خواهد بود.

راه حل دوم: مجموعه اعداد ۰، ۹۹۹، ...، مجموعه اعدادی است که از نوشتن ۳ رقم از ارقام ۰، ۹، ...، کنار هم حاصل می‌شوند. اگر تعریف کنیم $f_1(\overline{abc}) = ab$ و $f_2(\overline{abc}) = bc$ و $f_3(\overline{abc}) = ca$ تابع مورد نظر سوال حاصل جمع این سه تابع است و می‌توانیم حاصل جمع این توابع را روی مجموعه اعداد داده شده جداگانه حساب کنیم. با توجه به تقارن مجموعه اعداد ۰، ۹۹۹، ...، نسبت به ۳ رقم (یکان، دهگان و صدگان)، محاسبه یک مجموع و ۳ برابر کردن آن کفایت (مثلاً فقط برای f_1):

$$\text{جواب} = 3 \times \sum_{i=0}^9 \sum_{j=0}^9 i \times j \times 10 = 30 \times \sum_{i=0}^9 (i \times \sum_{j=0}^9 j) = 30 \times \sum_{i=0}^9 i \times \sum_{j=0}^9 j = 30 \times 45 \times 45 = 60750$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



اگر کاغذ را چنان تا کنیم که امتداد قطر CA بر روی امتداد ضلع DA قرار گیرد آن‌گاه نقطه C بر E منطبق خواهد شد. بنابراین اگر به مرکز A کاغذ را بچرخانیم، ربع دایره ای به مرکز A و به شعاع AC و اگر به مرکز D بچرخانیم ربع دایره‌ای به مرکز D و شعاع DB رنگ خواهد شد. تمام نقاط داخل مستطیل $CBGF$ نیز بدون نیاز به تا کردن رنگ می‌شوند پس:

۲ = پاسخ

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم: $\angle HDB = \angle C$. هم‌چنین داریم: $\angle C = \angle AEB$. زاویه‌ی $\angle DBH$ برابر $\angle C - 90^\circ$ است. اگر AH را امتداد داده تا دایره‌ی محیطی مثلث را در A' قطع کند، می‌دانیم که A' قرینه‌ی H نسبت به BC است. در نتیجه $\angle HA'D = \angle DHA' = 90^\circ - \angle C$:

در این صورت $\angle ABE = \angle AA'E = \widehat{AE}$. پس دو مثلث HBD و ABE با یکدیگر متشابه اند. در نتیجه داریم:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{DH}{AE} \rightarrow$$

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۹

دفترچه کد ۱ - سؤالات جواب آخر

۱. کوچکترین عدد طبیعی که چهار مقسوم‌علیه اول دارد برابر است با $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. بنابراین $11 \times n$ باید کوچکتر از ۲۱۰ باشد که نتیجه می‌دهد n باید کمتر از ۲۰ باشد. پس پاسخ ۱۹ است.

۲. در هر کشتی یک نفر می‌بازد؛ پس تعداد باخت‌ها برابر تعداد مبارزه‌ها است. ابتدا نشان می‌دهیم تعداد کشتی‌های برگزار شده (یا همان تعداد باخت‌ها) نمی‌تواند از $1 - 12 = 5 \times 12 = 59$ بیش‌تر باشد:

اگر بیش از ۵۹ کشتی برگزار شده باشد؛ بیش از ۵۹ باخت صورت گرفته (حداقل ۶۰ تا). همچنین هیچ کشتی‌گیری نمی‌تواند بیش از ۵ باخت کسب کند (با باخت پنجم حذف شده و دیگر بازی نخواهد کرد) بنابراین همه کشتی‌گیرها حداقل ۵ باخت خواهند داشت ($60 < 4 + 5 \times 11$) که نتیجه می‌دهد همه آن‌ها از دور رقابت‌ها حذف شده‌اند ولی این نتیجه غیر ممکن است چون در بازی آخر ۲ نفر که حذف نشده‌اند با هم مسابقه می‌دهند و حداکثر یکی از آن‌ها حذف می‌شود (چون یکی می‌برد و به باخت‌هایش اضافه نمی‌شود). با توجه به این‌که به تناقض رسیدیم (اینکه همه کشتی‌گیرها حذف می‌شوند) تعداد بازی‌ها نمی‌تواند از ۵۹ بیشتر باشد.

حال با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم ممکن است ۵۹ بازی برگزار شود: برای بازی مثالی هم وجود دارد: ابتدا در ۴ بازی کشتی‌گیر ۱۲ از ۱۱ می‌بازد و سپس کشتی‌گیر ۱۲ با هر کشتی‌گیر دیگری (۱، ۲، ۳، ...، ۱۱) ۵ بار بازی کرده و همه را می‌برد. در انتها همه کشتی‌گیرها غیر از شماره ۱۲ حذف شده‌اند و $59 = 4 + 11 \times 5$ بازی انجام شده است.

پس پاسخ ۵۹ است.

۳. فرض کنید افراد را بر اساس نمره به صورت نزولی مرتب کرده‌ایم. داریم:

$$198 = (\text{تعداد}) \times (\text{میانگین}) = (\text{مجموع کل نمره‌ها})$$

$$(\text{مجموع نمرات } 10 \text{ نفر اول}) - (\text{مجموع کل نمره‌ها}) = (\text{نمره‌ی نفر آخر})$$

با توجه به رابطه بالا هرچه مجموع نمرات ۱۰ نفر اول بیشتر باشد نمره نفر آخر کمتر می‌شود. پس اگر بخواهیم نمره‌ی نفر اول کمینه باشد، باید مجموع نمرات بقیه بیشینه باشد. مجموع نمرات ۵ نفر اول حداکثر ۱۰۰ است و در حالتی به دست می‌آید که نمره‌ی همه‌ی آن‌ها ۲۰ باشد. نمره‌ی ۵ نفر بعدی باید کمتر مساوی ۱۹ باشد (زیرا نمره‌ی نفر ۶ ام ۱۹ است) پس مجموع نمرات آن‌ها حداکثر ۹۵ است و در حالتی به دست می‌آید که نمره‌ی همه‌شان ۱۹ باشد. بنابراین مجموع نمرات ۱۰ نفر اول حداکثر ۱۹۵ است که با این فرض، نمره‌ی نفر آخر ۳ خواهد بود و این مقدار، حداقل نمره نفر آخر می‌باشد. پاسخ ۳ است.

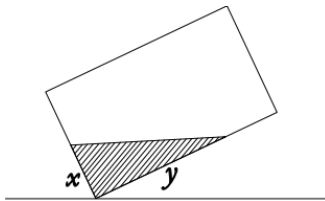
۴. دنباله‌ی متناظر با تغییرات قیمت به صورت $\dots, -1, -1, -1, +1, +1, +1$ است. بعد از گذشت یک روز تغییر قیمت سهام برابر -1 ریال خواهد بود، بعد از $1+2$ روز قیمت سهام $1+2$ نسبت به روز اول تغییر کرده و... و بعد از $1+2+3+\dots+n$ روز $1+2-3+\dots\pm n$ ریال قیمت سهام تغییر می‌کند. توجه کنید که بعد از روزهای $\frac{n(n+1)}{2}, \dots, 6, 3, 1$ علامت یک‌های دنباله‌ی تغییرات عوض می‌شود.

برای این که بفهمیم در روز ۳۶۵م در چه وضعیتی هستیم، معادله‌ی $\frac{n(n+1)}{2} < 365$ را حل کرده و به این نتیجه می‌رسیم که $n < 27$. طبق گفته‌های بالا تا روز ۳۵۱ ($= \frac{27 \times 26}{2}$) قیمت سهام $1+2-3+\dots+26$ ریال تغییر می‌کند، یعنی $13+$ ریال. بعد از آن تا روز ۳۶۵م هر روز یک ریال قیمت کاهش می‌یابد که تعداد این روزها $365-351=14$ است. نهایتاً بعد از گذشت ۳۶۵ روز قیمت هر سهم برابر $14-13=1$ می‌شود. پاسخ ۹۹۹ است.

۵. ضرب ریشه‌های عبارت $x^2 + ax + 1389$ برابر ۱۳۸۹ است. تجزیه ۱۳۸۹ به عوامل اول به صورت $1389 = 3 \times 463$ است بنابراین این ۱۳۸۹ را به ۴ طریق می‌توان به صورت ضرب دو عدد صحیح نوشت (۱، ۱۳۸۹، ۱۳۸۹-، ۱-، ۳، ۴۶۳، ۳، ۴۶۳-، ۳-، ۴۶۳-). که در هر حالت a به طور یکتا (منفی جمع دو ریشه) تعیین می‌شود و ۴ مقدار متفاوت برای a بدست می‌آید. پس پاسخ ۴ است.

۶. راه حل اول: کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۲ تا ۶، ۶۰ است پس عددی که ریشه ۲ تا ۶ام آن صحیح است باید ریشه‌ی ۶۰امش هم صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد با این ویژگی 2^{60} است که $61 = 1 + 60$ مقسوم‌علیه دارد. پس پاسخ ۶۱ است.

راه حل دوم: اگر تجزیه به عوامل اول عددی به صورت $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ باشد ریشه k ام آن برابر $p_1^{\alpha_1 \div k} \dots p_n^{\alpha_n \div k}$ خواهد بود؛ پس برای طبیعی بودن ریشه k ام a باید α_i ها بر k بخشپذیر باشند؛ در این سوال نماها باید بر کوچکترین مضرب مشترک ۲ تا ۶ یعنی ۶۰ بخشپذیر باشند؛ کوچکترین عدد طبیعی با این ویژگی 2^{60} بوده و ۶۱ مقسوم علیه دارد. پاسخ ۶۱ است.



۷. اگر فرض کنیم آب درون محفظه به صورت روبه رو درآمدن باشد رابطه‌های زیر را داریم:

$$x : \text{حجم آب} = \frac{1}{2}$$

$$2x : \text{سطح تماس}$$

برای مینیمم شدن سطح تماس آب با محفظه طبق روابط بالا باید $x + y$ مینیمم شود. طبق نامساوی حسابی-هندسی داریم $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ، درحالی در این مسئله xy ثابت (۰.۸) است. تساوی نامساوی حسابی-هندسی با فرض ثابت بودن حاصل ضرب xy وقتی حاصل می‌شود که x و y برابر باشند پس در صورت برابر بودن x و y مجموع‌شان مینیمم می‌شود و در نتیجه سطح تماس آب و محفظه مینیمم می‌شود. بنابراین زاویه سطح محفظه با افق برابر ۴۵ درجه خواهد بود لذا پاسخ ۴۵ است.

۸. توجه کنید که کسر داده شده برابر $\left(\frac{2n}{n}\right)$ است لذا همواره حاصل آن عددی طبیعی خواهد بود. ابتدا نشان

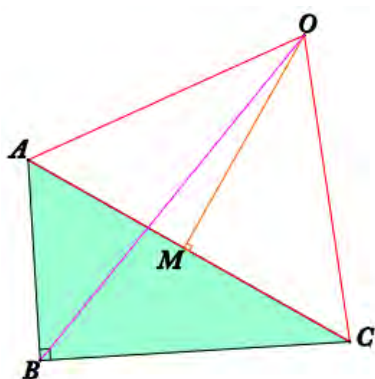
می‌دهیم در صورتیکه $17^2 < 2n < 17^2$ جواب موجود نمی‌باشد:

اگر $17^2 < 2n < 17^2$ هر مضرب ۱۷ در تجزیه به عوامل اول دقیقا ۱ عامل ۱۷ دارد. اگر $n = 17k + r$ ($0 \leq r < 17$) مخرج کسر k عامل ۱۷ خواهد داشت، همچنین خواهیم داشت:

$$2n = 17(2k) + 2r \leq 17(2k) + 32 \leq 17(2k + 1) + 15$$

پس در صورت کسر حداکثر $k + 1$ مضرب 17 خواهیم داشت و در نتیجه صورت حداکثر $k + 1$ عامل 17 خواهد داشت ولی برای اینکه کسر داده شده بر 17^2 بخشپذیر باشد باید تعداد مضارب 17 در صورت حداقل 2 تا از تعداد مضارب 17 در مخرج بیشتر باشد پس 289 در صورتیکه $17^2 < 2n$ خواسته سوال ممکن نخواهد بود.

تا اینجا ثابت کردیم $2n \geq 17^2 = 289$. کوچکترین عدد طبیعی n که این شرط را دارد 145 است که با آزمایش کردن آن ($n = 145$) مشاهده می‌کنیم کسر داده شده بر 17^2 بخشپذیر است؛ پس پاسخ 145 است.



۹. با توجه به برقراری قضیه فیثاغورس برای فواصل رادارها، سه رادار، مثلثی قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند (A, B و C). با توجه به برابر بودن فاصله هواپیما (نقطه O) از دو راس هر ضلع مثلث، این نقطه روی صفحات عمودمنصف ضلع‌ها قرار گرفته. اشتراک این سه صفحه خطی عمود بر صفحه مثلث (زمین) در وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه (نقطه M) می‌باشد؛ پس O روی آن خط قرار دارد و شرط دیگر این است که فاصله آن از رئوس مثلث 13 کیلومتر است. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OMA طول ضلع OM که همان ارتفاع هواپیما از زمین

است بدست می‌آید: $12 = \sqrt{13^2 - 5^2}$. پاسخ 12 است.

۱۰. خطوط مطلوب را به 2 گروه تقسیم می‌کنیم:

گروه اول: خطوط موازی دو وجه مقابل از مکعب که با توجه به تقارن 4 جانبه مکعب، یک دسته از 4 دسته آن‌ها را مشخص می‌کنیم: (شماره مکعب‌های 1×1 مربوط به خطوط آورده شده)

۱۳-۱ ۱۴-۲ ۱۵-۳ ۱۶-۴ ۱۷-۵ ۱۸-۶ ۲۲-۱۰ ۲۳-۱۱ ۲۴-۱۲

پس گروه اول $36 = 4 \times 9$ خط دارد.

گروه دوم: خطوط موازی قطر اصلی مکعب. این گروه نیز با توجه به تقارن به ۴ دسته متناظر و هم‌اندازه تقسیم می‌شود که یک دسته را آورده‌ایم:

۲۶-۱۳ ۲۴-۱۱ ۲۳-۱۰ ۱۸-۵ ۱۷-۴ ۱۵-۲ ۱۴-۱

این گروه از $۲۸=۴ \times ۷$ خط تشکیل شده.

در مجموع $۶۴ = ۳۶ + ۲۸$ خط قابل قبول وجود دارد. پاسخ ۶۴ است.

		۲۱	۱۲		
		۲۰	۱۱		۳
	۱۹	۱۰		۲	۶
۱۹	۱۰			۱	۵
۲۲	۱۳			۴	۹
۲۵	۱۶			۷	۸

دفترچه کد ۱ - سوالات تستی

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون C' دوران 60° درجه C است، مثلث ACC' متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه نسبت خواسته شده در سوال برابر ۱ است.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با فرض طبیعی بودن کسر $\frac{596+k}{700-k}$ ، باید $596+k \mid 700-k$.

از طرف دیگر $700-k \mid 700-k$.

با جمع این دو رابطه خواهی داشت: $700-k \mid 1296$ پس $700-k$ باید مقسوم‌علیه 1296 باشد و هر مقسوم‌علیه‌های 1296 که کوچکتر از 700 باشد یک جواب قابل قبول خواهد بود. $1296 = 2^4 \times 3^4$ ، بنابراین ۲۵ مقسوم‌علیه دارد که همه آن‌ها غیر از خود 1296 از 700 کوچکترند و به ازای هر کدام یک جواب داریم. پس به ازای ۲۴ مقدار طبیعی برای k کسر مورد نظر طبیعی خواهد بود.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

راه حل اول: برای دستگاه مختصات، جهت افقی (راست) را محور x ها و جهت عمودی (بالا) را محور y ها و مبدا مختصات را منزل آقای فراموش‌کار در نظر می‌گیریم. محل وی را با (a, b) نشان می‌دهیم. با گذشت هر ساعت مقدار یکی از a یا b یک واحد تغییر می‌کند. با توجه به اینکه ۱۵ ساعت از آغاز حرکت گذشته باید داشته باشیم: $|a| + |b| \leq 15$ و همچنین $|a| + |b|$ باید فرد باشد (چون با گذشت هر ساعت مقدار آن دقیقاً ۱ واحد تغییر می‌کند).

پس مجموع ممکن ۱۶ است ۱، ۳، ۵، ...، ۱۵ باشد. تعداد مختصات‌های ممکن با این ویژگی‌ها عبارت است از:

$$4 \times (2+4+\dots+16) - 32 = 256$$

(ضریب ۴ به خاطر ۴ ناحیه‌ی مختصات، اعداد داخل پرانتز تعداد راه‌های نوشتن ۱ تا ۱۵ به صورت مجموع دو

عدد صحیح نامنفی و ۳۲ تعداد نقاط روی محورها که دوبار شمرده شده‌اند)

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر تعداد شکلات‌ها حداقل $36=6 \times 6$ تا باشد با قرار دادن ۶ شکلات در ۶ ردیف اول فرض سؤال نقض می‌شود. ادعا می‌کنیم ۳۵ شکلات هر طوری قرار بگیرند نمی‌توانند بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها را پر کنند؛ در هر ردیفی که بیش‌تر خانه‌هایش پر شده، حداقل ۶ شکلات قرار دارد و حداقل ۶ ردیف باید این شرایط را داشته باشند پس برای پر کردن بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها حداقل $36=6 \times 6$ شکلات مورد نیاز است.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به این که $PE \perp AC$ و $PD \perp AB$ و $DE \parallel BC$ داریم: $\angle EDP = 45^\circ$ و $\angle DEP = 60^\circ$ حال با توجه

به قضیه سینوس‌ها در مثلث PDE داریم $\frac{PE}{PD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ و داریم: $PC = \frac{PE}{\sin(30^\circ)} = 2PE$ و

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\frac{PD}{\sin(45^\circ)}}{\frac{PE}{\sin(30^\circ)}} = \frac{PD}{PE} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ پس داریم: } PB = \frac{PD}{\sin(45^\circ)} = \sqrt{2}PD$$

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم: $q^3 = \overline{.abcabc \dots}$ پس $q^3 = \overline{abc.abcabc \dots}$ و با کم کردن این دو عبارت

داریم: $999q^3 = \overline{abc}$ پس $q^3 = \frac{\overline{abc}}{999}$. چون q گویاست؛ هم صورت و هم مخرج q^3 وقتیکه تا حد امکان

ساده شود باید مکعب کامل باشند. با توجه به اینکه $999 = 3^3 \times 37$ صورت q حداقل یک عامل ۳۷ دارد لذا

کوچکترین q^3 ممکن $\frac{1}{27}$ بوده که کوچکترین q را نتیجه می‌دهد. پس $q^3 = \frac{1}{27} = \frac{37}{999}$.

نتیجه می‌شود $\overline{abc} = 37$ و $a + b + c = 10$

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در ابتدا مجموع مختصات برابر ۱ است و بعد از طی کردن یک چهارم مسیر به مقدار ۱- می‌رسد و بعد از پیمودن یک چهارم دیگر این مقدار دوباره ۱- می‌شود در بعد از پیمودن یک چهارم آخر این مقدار ۱ می‌شود و سپس این مسیر دوباره تکرار می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (ه) این خاصیت را دارد.

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

چون b بین 10^b و 10^{1389} عددی بسیار کوچک است و با تقریب خوبی می‌توان از آن صرف نظر کرد و در نتیجه می‌توان صورت مسئله را به صورت روبه‌رو ساده کرد: $M \leq \frac{a}{b} \rightarrow a \geq Mb \rightarrow a^2 \geq Mab$. حال a را می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفت در این صورت M به صفر میل می‌کند. در واقع برای هر M بزرگ‌تر از صفر a, b ای می‌توان ارائه داد که نامساوی غلط باشد. به این صورت که b طوری انتخاب می‌کنیم که 10^{1389} از Mab کم‌تر باشد و سپس a را آنقدر کوچک می‌گیریم که a^2 را اگر به 10^{1389} اضافه کنیم به Mab نرسد.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

تعداد راه‌های مطالعه‌ی این کتاب‌ها برابر تعداد راه‌های نوشتن کلمه‌ای هشت حرفی با a, b, c, d است بطوریکه از هر حرف دقیقا دو بار استفاده شود. این عدد برابر $\frac{8!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 2520$ است. (بدون هیچ محدودیت ترتیبی $8!$ روش داریم؛ به محدودیت ترتیبی هر دو کتاب روش‌ها نصف می‌شوند چون دقیقا در نصف راه‌ها یک کتاب زودتر از دیگری آمده)

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این معادله نمی‌تواند دو ریشه در بازه‌ی $[0, 1]$ داشته باشد زیرا در غیر این صورت ضرب دو ریشه که مقدار آن برابر b خواهد بود کمتر از 1 می‌شود که متناقض با طبیعی بودن b است. پس این معادله حداکثر یک ریشه در این بازه دارد. و این هم وقتی رخ می‌دهد که مقدار تابع $x^2 - ax + b$ در نقطه صفر و نقطه 1 مختلف‌العلامت باشد (یا یکی صفر باشد). مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر b و مقدار تابع در نقطه‌ی 1 برابر $1 - a + b$ است. حال برای b ها از 1 تا 10 مقدار b مثبت است. پس باید مقدار $1 - a + b$ نامثبت باشد. برای $1 - a + b = 1$ ، $1 - a + b = 9$ حالت، برای $1 - a + b = 2$ ، $1 - a + b = 8$ حالت و... برای $1 - a + b = 9$ حالت دارد. پس در کل تعداد زوج مرتب‌ها برابر $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ است.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

تا وقتی که عدد زوج است بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آن نصف آن است و نتیجه‌ی عملیات ما نصف کردن عدد مورد نظر است پس در 10 مرحله، عدد $5^{12} \times 3^{11}$ به دست می‌آید. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد یک سوم

آن است و نتیجه‌ی عملیات ما دو سوم کردن عدد مورد نظر است. حال عدد زوج شده و انجام عملیات به معنای نصف کردن آن است. پس اگر عدد بر ۳ بخش پذیر باشد بعد از دو مرحله یک سوم می شود؛ در نتیجه بعد از $2 \times 11 = 22$ مرحله به 5^{12} می‌رسیم. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد $\frac{1}{5}$ آن است و نتیجه‌ی عملیات ما چهار پنجم کردن عدد است. حال عدد بر ۴ بخش پذیر شده و طی دو مرحله‌ی بعدی دو بار بر ۲ تقسیم می شود. پس اگر عدد بر ۵ بخش پذیر باشد بعد از ۳ مرحله تقسیم بر ۵ می‌شود؛ لذا بعد از $3 \times 12 = 36$ مرحله به ۱ می‌رسیم. پس در کل $68 = 10 + 36 + 22$ مرحله انجام می‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای اینکه دو ساعت خراب هر کدام ۶ ساعت جلو بیفتند باید رابطه‌های زیر برقرار باشد:

$$7K \equiv 6$$

ضرب در ۶۰ شدن پیمانه‌ها و اعداد به منظور هم واحد شدن طرفین است (همه به دقیقه). که از این رابطه‌ها به دست می‌آید $K \equiv 360 \pmod{720}$ که نتیجه می‌دهد کوچک‌ترین K ممکن برابر ۳۶۰ است.

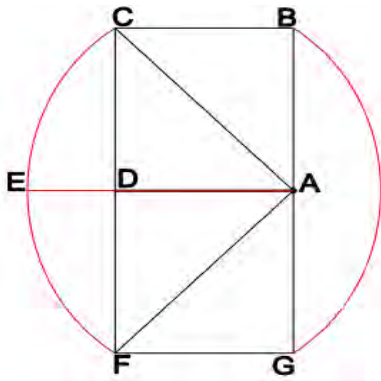
۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه حل اول: اگر هر عدد را عددی سه رقمی تصور کنیم (با گذاشتن صفر به اندازه‌ی نیاز در اولش) از هر یک از ارقام ۳۰۰ بار آمده است می‌توان دید $607500 = (0 \times (0 + 1 + \dots + 9) + 1 \times (0 + 1 + \dots + 9) + 9 \times (0 + 1 + \dots + 9)) \times 300$ ۱۰ برابر مجموع مورد نظر ماست (هر جمله از جواب ده بار در این مجموع آمده است) پس حاصل ۶۰۷۵۰ خواهد بود.

راه حل دوم: مجموعه اعداد ۰، ۹۹۹، ...، ۰ مجموعه اعدادی است که از نوشتن ۳ رقم از ارقام ۰، ۹، ...، ۰ کنار هم حاصل می‌شوند. اگر تعریف کنیم $f_1(\overline{abc}) = ab$ و $f_2(\overline{abc}) = bc$ و $f_3(\overline{abc}) = ca$ تابع مورد نظر سوال حاصل جمع این سه تابع است و می‌توانیم حاصل جمع این توابع را روی مجموعه اعداد داده شده جداگانه حساب کنیم. با توجه به تقارن مجموعه اعداد ۰، ۹۹۹، ...، ۰ نسبت به ۳ رقم (یکان، دهگان و صدگان)، محاسبه یک مجموع و ۳ برابر کردن آن کفایت (مثلاً فقط برای f_1):

$$\text{جواب} = 3 \times \sum_{i=0}^9 \sum_{j=0}^9 i \times j \times 10 = 30 \times \sum_{i=0}^9 (i \times \sum_{j=0}^9 j) = 30 \times \sum_{i=0}^9 i \times \sum_{j=0}^9 j = 30 \times 45 \times 45 = 60750$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



اگر کاغذ را چنان تا کنیم که امتداد قطر CA بر روی امتداد ضلع DA قرار گیرد آن‌گاه نقطه C بر E منطبق خواهد شد. بنابراین اگر به مرکز A کاغذ را بچرخانیم، ربع دایره ای به مرکز A و به شعاع AC و اگر به مرکز D بچرخانیم ربع دایره‌ای به مرکز D و شعاع DB رنگ خواهد شد. تمام نقاط داخل مستطیل $CBGF$ نیز بدون نیاز به تا کردن رنگ می‌شوند پس:

۲ = پاسخ

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم: $\angle HDB = \angle C$. هم‌چنین داریم: $\angle C = \angle AEB$. زاویه‌ی $\angle DBH$ برابر $\angle C - 90^\circ$ است. اگر AH را امتداد داده تا دایره‌ی محیطی مثلث را در A' قطع کند، می‌دانیم که A' قرینه‌ی H نسبت به BC است. در نتیجه $\angle HA'D = \angle DHA' = 90^\circ - \angle C$:

در این صورت $\angle ABE = \angle AA'E = \frac{\widehat{AE}}{2}$. پس دو مثلث HBD و ABE با یکدیگر متشابه اند. در نتیجه داریم:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{DH}{AE} \rightarrow$$