



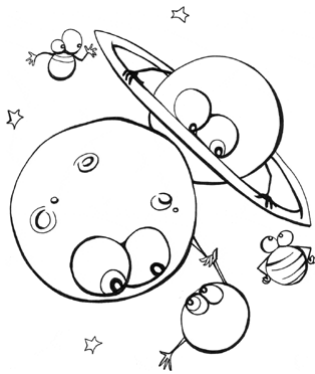
آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

۱. دایره‌ای به شعاع واحد در نظر بگیرید. مساحت این دایره به مساحت چند مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد نزدیک‌تر است؟

- الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۲. فرض کنید حاصل ضرب همه اعداد داخل جدول ضرب 10×10 برابر n باشد. بزرگ‌ترین عدد m که $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی باشد چند است؟

- الف) ۲ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۲۰ ه) ۴۰



۳. دانش‌مندان، منظومه‌ای در کهکشان راه شیری کشف کرده‌اند که دارای یک ستاره، ۹ سیاره و ۱۲۲ قمر است و هر سیاره آن دست‌کم یک قمر دارد. تحقیقات نشان می‌دهد که جرم ستاره برابر $1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$ است و مجموع جرم سیاره‌ها برابر جرم ستاره و مجموع جرم قمرهای هر سیاره برابر جرم آن سیاره است. میانگین جرم اجرام این منظومه چه قدر است؟

- الف) $1.5 \times 10^{28} \text{ kg}$ ب) $4.5 \times 10^{28} \text{ kg}$ ج) $6.6 \times 10^{28} \text{ kg}$ د) $5.94 \times 10^{28} \text{ kg}$ ه) اطلاعات موجود کافی نیست.

۴. چهار میله به طول‌های ۵، ۳، ۷ و ۴ متر به همین ترتیب به هم لولا شده‌اند و ابتدای میله اول هم به انتهای میله چهارم لولا شده است. اگر میله‌ها بتوانند آزادانه در یک صفحه حول لولاهایشان بچرخند، فاصله لولای بین میله‌های ۵ متری و ۴ متری تا لولای مقابل چند متر می‌تواند باشد؟

- الف) هر مقدار بین ۳ و ۸ متر ب) هر مقدار بین ۲ و ۱۱ متر
ج) هر مقدار بین ۲ و ۸ متر د) هر مقدار بین ۳ و ۱۱ متر
ه) هر مقدار بین ۲ و ۳ متر و هر مقدار بین ۸ و ۱۱ متر

۵. یک امتحان ۱۰۰ نمره‌ای از دانش‌آموزان دو کلاس الف و ب گرفته شده است. هر کلاس ۵۰ دانش‌آموز دارد. پس از اعلام نتایج، مشخص شد که میانگین نمرات کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. حداکثر چند دانش‌آموز در کلاس ب هستند که نمره آن‌ها از همه دانش‌آموزان کلاس الف بیشتر است؟

- الف) ۱ ب) ۲۵ ج) ۴۹ د) ۵۰

ه) امکان ندارد دانش‌آموزی از کلاس ب، نمره‌اش از همه دانش‌آموزان کلاس الف بیشتر باشد.



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور



۶. مهندس ناظر تونل توحید در اولین شنبه بعد از آغاز کار از پروژه تونل توحید بازدید کرده است. از آن روز به بعد برنامه بازدید وی از تونل به این شکل بوده است: فردای همان روز، یعنی یکشنبه، از پروژه مجدداً بازدید کرده و در ادامه هر بار یک روز به فاصله بین بازدیدها اضافه کرده است. صدمین بازدید در چه روزی از هفته انجام شده است؟

الف) شنبه ب) یکشنبه ج) دوشنبه د) سه‌شنبه ه) چهارشنبه

۷. شخصی در اصفهان زندگی می‌کند و می‌خواهد از سه شهر تبریز، مشهد مقدس و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان باز گردد به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شنبه آغاز کند، به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟ (توجه کنید که این شخص به هر ترتیبی می‌تواند به این سه شهر سفر کند.)

الف) ۳۶ ب) ۷۲ ج) ۱۰۸ د) ۱۲۰ ه) ۲۱۶

۸. چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که حاصل ضرب ارقامش ۹۸۰۰ باشد؟

الف) ۱۶۸۰ ب) ۵۰۴۰ ج) ۸۴۰۰ د) ۱۰۰۸۰ ه) ۱۲۰۹۶۰

۹. فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

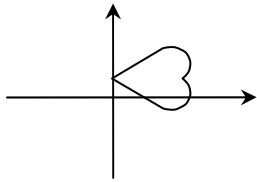
الف) دست‌کم یکی از a^3 و $a^4 - 1$ گنگ است. ب) دست‌کم یکی از $a^3 - 1$ و a^6 گنگ است.
ج) دست‌کم یکی از a^2 ، a^3 و a^5 گویا است. د) a^2 و $a^3 - 1$ گنگ هستند.
ه) حداکثر یکی از $a^3 + 1$ و a^4 گنگ است.

۱۰. تعداد اعداد طبیعی بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ که عامل اولی به غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد چند تاست؟

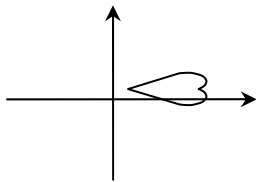
الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۴ د) ۲۰ ه) ۸۳۳



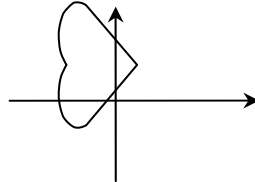
آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور



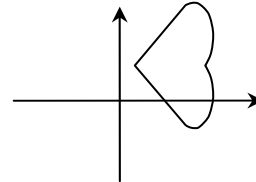
۱۱. $f(x, y)$ تابعی دومتغیره است و شکل روبه‌رو مجموعه نقاط (x, y) در صفحه است که $f(x, y) = 0$. مجموعه نقاط (x, y) که $f(1-x, 2y) = 0$ کدام گزینه است؟



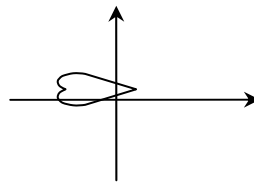
(ج)



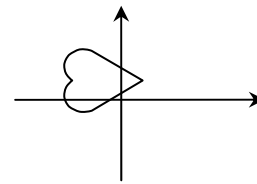
(ب)



(الف)



(ه)



(د)

۱۲. ظرفی مکعب شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر را تا نصفه پر از آب کرده‌ایم. اگر این ظرف را به آرامی طوری کج کنیم که یک ضلع کف روی زمین باقی بماند و کف آن با زمین زاویه 60° درجه بسازد، چند سانتی‌متر مکعب آب بیرون می‌ریزد؟

(ج) $10.8 - 9\sqrt{3}$

(ب) $216 - 12\sqrt{3}$

(الف) $10.8 - 36\sqrt{3}$

(ه) اصلاً آبی نمی‌ریزد.

(د) $216 - 18\sqrt{3}$

۱۳. معادله $y^3 - 2x^2 = 1388$ در مجموعه اعداد صحیح چند جواب دارد؟

(ه) بی‌نهایت

(د) ۳

(ج) ۲

(ب) ۱

(الف) ۰

۱۴. چند عدد چهار رقمی وجود دارد که هر رقم آن از رقم سمت چپ کوچک‌تر باشد و اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کنیم، تفاضل این دو عدد 6174 شود؟

(ه) ۲۱

(د) ۱۲

(ج) ۱۰

(ب) ۸

(الف) ۱

۱۵. فرض کنید مقدار تابع $f(x) = -x^2 + bx + c$ همواره کم‌تر یا مساوی ۲ باشد. اگر این تابع

دو ریشه حقیقی داشته باشد، فاصله ریشه‌های آن حداکثر چه قدر است؟

(ه) $2\sqrt{2}$

(د) $\sqrt{2}$

(ج) ۸

(ب) ۴

(الف) ۲



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۶. می‌گوییم یک عدد در مبنای a کاهشی است در صورتی که اگر آن را در مبنای a بنویسیم، هیچ رقمی از رقم سمت چپ خود بزرگ‌تر نباشد. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۲۴ وجود دارد که هم در مبنای ۲ و هم در مبنای ۴ کاهشی باشد؟

- الف) ۱۰ (ب) ۳۰ (ج) ۳۵ (د) ۴۰ (ه) ۵۵

۱۷. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که $۲x + ۷y$ بر $x + y$ بخش‌پذیر باشد؟

- الف) ۵۰ (ب) ۷۸ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۱۶ (ه) ۲۰۰

۱۸. ضلع AB ، از مثلث ABC را از طرف B به اندازه خودش تا P ادامه می‌دهیم. ضلع AC را هم از طرف C به اندازه دو برابر خودش تا نقطه Q امتداد می‌دهیم. اگر M وسط PQ باشد، مساحت مثلث MBC چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

- الف) ۱ (ب) $1/۲۵$ (ج) $۱/۵$ (د) $۱/۷۵$ (ه) ۲

۱۹. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را، بدون تکرار، در جدول زیر بنویسیم به طوری که هر عدد هم از عدد سمت راستش و هم از عدد پایینش کوچک‌تر باشد. این کار به چند طریق ممکن است؟

- الف) ۳۴ (ب) ۳۵ (ج) ۳۶

- د) ۴۴ (ه) ۴۵

۲۰. فرض کنید عدد طبیعی n روی تخته‌سیاه نوشته شده است. این عدد را پاک می‌کنیم و به جای آن عدد $۲^a - ۲^b + n$ را می‌نویسیم که در آن a بزرگ‌ترین عددی است که n به ۲^a بخش‌پذیر است و b کوچک‌ترین عددی است که $n < ۲^b$. اگر در ابتدا عدد ۴۲ نوشته شده باشد بعد از ۱۱۳ بار انجام این کار چه عددی روی تخته خواهد بود؟

- الف) ۷×۲^{۱۱۶} (ب) $۲^{۱۱۷} - ۱۸۴$ (ج) ۹×۲^{۱۱۷}

- د) $۲^{۱۱۳} + ۴۲$ (ه) $۲^{۱۱۸} - ۱۸۴$



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

۲۱. فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین باشد که AB وتر آن است. مورچه‌ای داخل مثلث است. وی ابتدا به سمت نقطه A می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود. سپس به سمت نقطه B می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود و این دو حرکت را متناوباً تکرار می‌کند. بعد از ۲۰ مرحله انجام این کار مورچه به کدام نقطه نزدیک‌تر است؟
الف) A ب) B ج) C د) وسط وتر AB ه) بستگی به مکان اولیه مورچه دارد.



۲۲. در یک ستون ۲۵۷ سرباز ایستاده‌اند. فرمانده دستور می‌دهد که نفراتی که در مکان‌های فرد قرار گرفته‌اند به همان ترتیب از صف خارج شوند، نفرات دیگر با حفظ ترتیب جای آن‌ها را پر کنند و در نهایت نفرات از صف خارج شده به همان ترتیب به انتهای صف بروند. اگر فرمانده ۴۱ مرتبه دیگر این دستور را تکرار کند سربازی که در نهایت نفر اول صف شده در ابتدا نفر چندم بوده است؟

الف) ۱ ب) ۱۶ ج) ۱۲۸ د) ۲۵۳ ه) ۲۵۵

۲۳. به چند صورت می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه پنج ساخت که ضرایب آن، با ترتیبی دل‌خواه، اعداد ۱، ۲، ۳ و ... ۶ باشد و به علاوه به چندجمله‌ای $1 + x + x^2$ بخش پذیر باشد؟ (بخش پذیر بودن یک چندجمله‌ای به چندجمله‌ای $1 + x + x^2$ یعنی آن را بتوان به صورت ضرب چندجمله‌ای $1 + x + x^2$ و یک چندجمله‌ای دیگر نوشت.)

الف) ۱ ب) ۴۸ ج) ۱۲۰ د) ۳۶۰ ه) چنین چندجمله‌ایی وجود ندارد.

۲۴. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a - \frac{1}{a} \geq 1$ داشته

$$\text{باشیم } a^3 - \frac{1}{a^3} \geq k\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

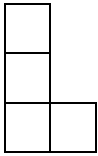
الف) ۲ ب) $\sqrt{3}$ ج) ۴ د) $4\sqrt{3}$ ه) ۵

۲۵. تویی به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی سطح زمین قرار دارد. بالاترین نقطه توپ را علامت می‌زنیم. پس از آن توپ را به اندازه 25π سانتی‌متر به سمت شرق و سپس به اندازه 25π سانتی‌متر به سمت شمال می‌غلطانیم. در نهایت ارتفاع علامت از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟

الف) $20 - 10\sqrt{2}$ ب) ۲۰ ج) $20 + 5\sqrt{2}$ د) $20 + 10\sqrt{2}$ ه) ۳۰



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور



۲۶. به چند طریق می‌توان جدول ۱۳۸۸×۱۳۸۸ را با اعداد ۱ تا ۶ پر کرد به طوری که اگر کاشی به شکل روبه‌رو را بر روی چهار خانه از جدول قرار دهیم، مجموع ۴ عدد زیر کاشی مضربی از ۶ باشد؟ (کاشی را می‌توان چرخاند یا پشت و رو کرد).

- الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۲۰

۲۷. کدام گزینه دربارهٔ سه عدد زیر صحیح است؟ در عبارتی که برابر A است ۵۰۰ بار ۲ و ۵۰۰ بار ۴ ظاهر شده است و در عبارتی که برابر B است نیز همین طور است. در عبارتی که برابر C است ۲۰۰۰ بار ۲ ظاهر شده است.

$$C = ۲^{۲۰۰۰ \cdot ۲} \quad \text{و} \quad B = ۴^{۲۰۰۰ \cdot ۲} \quad , \quad A = ۲^{۲۰۰۰ \cdot ۴}$$

- الف) $A > B > C$ ب) $B > A > C$ ج) $C > A > B$
د) $C > B > A$ ه) $B > C > A$

۲۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، $\widehat{DAB} = ۱۱^\circ$ ، $\widehat{BCD} = ۱۲۵^\circ$ و $AB = AD = ۶$. طول قطر AC چه قدر است؟

- الف) ۵ ب) $۵/۵$ ج) ۶ د) $۶/۵$ ه) اطلاعات کافی نیست.

۲۹. یک جورچین (پازل) ساده از ۱۰ قطعهٔ مربعی شکل تشکیل شده است که باید در یک ردیف در کنار هم قرار بگیرند تا تصویری مشخص را درست کنند. فرض کنید مکان‌های سوم و هشتم به‌درستی پر شده است و از این به بعد در هر مرحله تنها مجازیم قطعه‌ای را سر جایش قرار دهیم که دست‌کم یکی از قطعات مجاورش قبلاً جای‌گذاری شده باشد. به چند روش مختلف می‌توان ۸ قطعهٔ باقی‌مانده را سر جایشان گذاشت؟

- الف) ۱۶۸۰ ب) ۳۳۶۰ ج) ۴۲۰۰ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

۳۰. حداکثر چند دایره در فضا می‌توان قرار داد به طوری که هر دو تا هم‌دیگر را در دو نقطه قطع کنند، هیچ سه تایی از یک نقطه عبور نکنند و هیچ دو تایی در یک صفحه قرار نداشته باشند؟

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۲ ه) بی‌نهایت



پانچ تشریحی سوالات مرحلہ اول

المپیاد ریاضی ۱۳۸۸

مخصوص شرکت کنندگان مرحلہ اول المپیاد کشوری ریاضی

مؤلفین

خشایار خسروی

سپهر قاضی نظامی

ماهد آب روشن

سیداحسان آزر م سا

بہمن ۱۳۸۸

۱. گزینه (ب) صحیح است.

داریم که :

$$\text{مساحت مثلث به ضلع واحد} \quad \text{و} \quad \text{مساحت دایره به شعاع واحد} = \pi$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

بنابراین می خواهیم n ای را بیابیم که $|\pi - n \frac{\sqrt{3}}{4}|$ کمینه باشد یا معادل آن $|\frac{4\pi}{\sqrt{3}} - n|$ کمینه باشد.
داریم که :

$$\pi \cong 3.1 \quad \text{و} \quad \sqrt{3} \cong 1.7 \Rightarrow \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cong 7.3$$

پس n برابر ۷ است.

۲- گزینه (د) صحیح است.

ابتدا حاصل ضرب اعداد جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ را محاسبه می کنیم. توجه کنید حاصل ضرب اعداد سطر i ام برابر است با $i! \times 10!$. در نتیجه حاصل ضرب کل اعداد جدول برابر است با $(10!)^{20}$. اکنون می خواهیم ببینیم بزرگترین m طبیعی که به ازای آن $\sqrt[m]{(10!)^{20}}$ صحیح است چیست. توجه کنید برای اینکه این امر محقق شود باید توان همه ی عوامل اول $(10!)^{20}$ بر عدد m بخش پذیر باشد. در نتیجه بزرگترین عدد طبیعی m با این خاصیت برابر با م.م.م توان عوامل اول در $(10!)^{20}$ است. در نتیجه با توجه به اینکه :

$$(10!)^{20} = 2^{160} \times 3^{80} \times 5^{40} \times 7^{20}$$

در نتیجه بزرگترین m با خاصیت مذکور برابر است با : $(160, 80, 40, 20) = 20$.

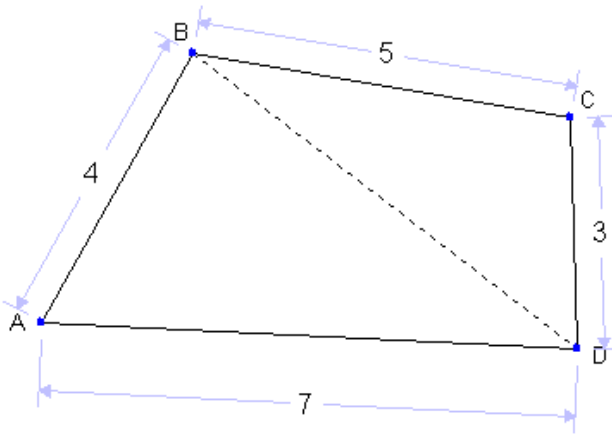
۳- گزینه (ب) صحیح است.

با توجه به این که هر سیاره لااقل یک قمر دارد، می توان گفت که مجموع جرم اقمار این منظومه با مجموع جرم سیارات این منظومه برابر است. از طرفی همان طور که گفتیم مجموع جرم سیارات برابر با مجموع جرم ستاره این منظومه است. پس در نتیجه می توان گفت که مجموع جرم اجرام این منظومه برابر با ۳ برابر جرم ستاره است. حال با توجه به این که ۱۳۲ جرم در این منظومه قرار دارد، می توان گفت که

$$\text{میانگین اجرام} = \frac{3 \times 1.98 \times 10^{30}}{132} = 4.5 \times 10^{28}$$

۴. گزینه (الف) صحیح است.

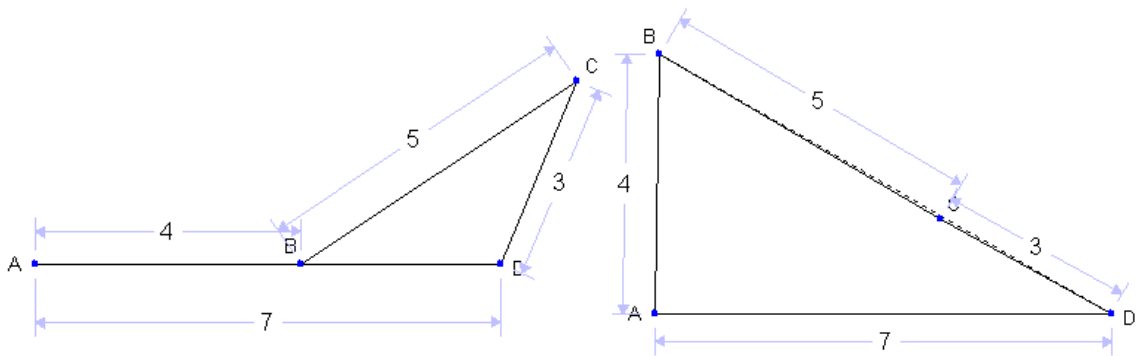
مطابق شکل:



داریم که طبق نامساوی مثلث $BA + BD \geq AD$ پس $4 + BD \geq 7$ یا $BD \geq 3$

همچنین داریم که $BC + CD \geq BD$ پس $8 \geq BD$

پس داریم که $3 \leq BD \leq 8$ و به سادگی می توانید تحقیق کنید که هر مقداری این میان را اتخاذ می کند.



۵- گزینه (ج) صحیح است.

با توجه به این که نمره نفر اول کلاس الف بیشتر یا مساوی میانگین نمرات این کلاس است و این میانگین از میانگین کلاس ب بیشتر است، می توان گفت که نمره نفر اول کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. در نتیجه ممکن نیست که کسی در کلاس ب نباشد که نمره اش از نفر اول کلاس الف کمتر باشد. در نتیجه حداکثر ۴۹ نفر در کلاس ب هستند که از تمامی افراد کلاس الف بیشتر است.

حال کافی است که برای ۴۹ نیز مثالی ذکر کنیم. فرض کنید ۴۹ نفر در کلاس ب نمره ۱۰۰ کسب کردند و یکی صفر شده باشد. در کلاس الف نیز همگی نمره ۹۹ را کسب کرده باشند. در نتیجه

$$\frac{100 \times 49}{50} < \frac{50 \times 99}{50}$$

در این حالت به وضوح ۴۹ نفر در کلاس ب نمره شان از تمامی افراد کلاس الف بیشتر شده است.

۶. گزینه (ب) صحیح است.

شنبه ای که مهندس ناظر برای اولین بار از تونل بازدید کرده را روز صفر بنامید. پس مطابق زیر برنامه بازدیدها را می نویسیم:

روز ۰	اولین بازدید
روز ۱+۰	دومین بازدید
روز ۲+۱+۰	سومین بازدید
روز ۳+۲+۱+۰	چهارمین بازدید
.	.
.	.
.	.
روز ۹۹+۹۸+...+۱+۰	صدمین بازدید

پس صدمین بازدید در روز $۹۹ \times ۱۰۰ = \frac{۹۹ \times ۱۰۰}{۲} = ۴۹۵۰$ انجام می شود داریم که باقیمانده ۴۹۵۰ بر ۷ برابر ۱ است لذا این بازدید در یک روز بعد از شنبه یعنی یک شنبه صورت می گیرد.

۷- گزینه (ه) صحیح است.

این فرد در روز اول به یکی از ۳ شهر تبریز، مشهد مقدس یا شیراز سفر می کند. پس مسیر مسافرتش در روز اول به سه طریق مشخص می شود. این مسافرت نیز به وسیله هواپیما، قطار یا اتوبوس صورت گیرد. پس به ۳ طریق می تواند وسیله مورد نظرش را انتخاب کند. در روز دوم با دو وسیله می تواند مسافرت کند و از شهر اول به یکی از دوسه باقیمانده می تواند سفر کند. در روز سوم با سه وسیله به شهر باقیمانده سفر می کند. در روز چهارم نیز با دو وسیله می تواند به اصفهان بازگردد. در نتیجه تعداد راه های مسافرت او بنابر اصل ضرب برابر است با:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۲۱۶$$

۸- گزینه (ج) صحیح است.

با تجزیه 9800 به عوامل اول خواهید یافت که $9800 = 2^3 \times 5^2 \times 7^2$. در نتیجه با توجه به این که ارقام از 0 تا 9 هستند، لزوماً از هر کدام از 5 و 7 دو مرتبه استفاده می شود. حال برای ایجاد عامل 2^3 سه راه وجود دارد:

(الف) از یک 8 استفاده کنیم و در نتیجه باید برای بقیه ارقام از 1 استفاده شود. به $(\overset{8}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 7 ها را مشخص کرد. سپس به $(\overset{6}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 5 ها را مشخص کرد و در آخر به $(\overset{4}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 8 را مشخص کرد. پس در این حالت 1680 عدد 8 رقمی داریم.

(ب) از یک 4 استفاده کنیم و یک 2 . به $(\overset{8}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 7 ها را مشخص کرد. سپس به $(\overset{6}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 5 ها را مشخص کرد و به $(\overset{4}{\text{پ}})$ طریق جایگاه 4 و به $(\overset{3}{\text{پ}})$ طریق جایگاه 2 را مشخص می کنیم. پس در این حالت 5040 عدد 8 رقمی داریم.

(ج) از 3 عدد 2 استفاده می کنیم. به $(\overset{8}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 7 ها را مشخص کرد. سپس به $(\overset{6}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 5 ها را مشخص کرد و به $(\overset{4}{\text{پ}})$ طریق می توان جایگاه 2 ها را مشخص کرد. پس در این حالت 1680 عدد 8 رقمی داریم.

در نتیجه در کل 8400 عدد 8 رقمی با این خاصیت وجود دارد.

۹- گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا ثابت می کنیم الف همواره درست است. فرض کنید a گنگ باشد ولی a^3 و $a^4 - 1$ گویا باشند. در این صورت a^4 هم گویا است. علاوه بر آن $a = \frac{a^4}{a^3}$ و $a^3 \neq 0$. در نتیجه تقسیم دو عبارت گویا برابر با عبارتی گنگ شده در حالی که می دانیم حاصل تقسیم دو عدد گویا عددی گویاست. این تناقض است.

راه دیگری هم برای اثبات مسئله وجود دارد و آن ارائه مثال نقض برای بقیه گزینه هاست.

برای ب کافی است $a = \sqrt[3]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای ج کافی است $a = \sqrt[30]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای د کافی است $a = \sqrt{2}$ را در نظر بگیرید.

و برای ه کافی است $a = \sqrt[6]{2}$ را در نظر بگیرید.

پس گزینه الف صحیح است.

۱۰=گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید سوال به دنبال تعداد اعداد به فرم $2^m \times 3^n$ ای می گردد که بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ قرار دارند و نه خود اعداد. توجه کنید که برای هر n حداکثر یک m به دست می آید که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$ (اگر دو m به دست آید یعنی اینکه یک عدد و دوبرابرش در بازه (5000,10000) قرار گرفته اند که این امکان ندارد). علاوه بر این می خواهیم نشان دهیم برای هر n صحیح و نامنفی که $3^n < 10000$ باشد m ای پیدا می شود که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$. برای این کار ابتدا $m=0$ را در نظر می گیریم. اگر عدد 3^n از ۵۰۰۰ بیش تر باشد که چیزی که می خواستیم یافته ایم در غیر اینصورت $m=1$ در نظر گرفته می شود. اکنون دقت کنید که امکان ندارد که $2 \times 3^n > 10000$ زیرا در اینصورت 3^n بزرگتر از ۵۰۰۰ بوده که می دانیم اینگونه نبوده است. در نتیجه $2 \times 3^n < 10000$. اگر این عدد از ۵۰۰۰ بیش تر باشد مسئله حل است. در غیر اینصورت $m=2$ را در نظر می گیریم و روند فوق را ادامه می دهیم. توجه کنید که این روند متوقف می شود زیرا به جایی می رسیم که $2^2 \times 3^n \geq 2^2 > 10000$. وقتی روند متوقف شد m را یافته ایم و این m هم یکتاست. در حقیقت ما ابتدا یک عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰ در نظر می گیریم و در هر مرحله آن را دو برابر می کنیم. این روند را آن قدر ادامه می دهیم تا اولین مرحله ای که از ۱۰۰۰۰ بیش تر شویم. اگر مرحله ی قبل از این مرحله را در نظر بگیریم حتما عددمان در این مرحله چیزی بین ۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ بوده است.

در نتیجه جواب مسئله برابر است با تعداد اعداد صحیح و نامنفی m که $3^m < 10000$ که با یک بررسی ساده می بینیم که ۹ عدد m در رابطه بالا صدق می کنند یعنی اعداد صحیح از ۰ تا ۸. پس گزینه ب صحیح است.

۱۱-گزینه (ه) صحیح است.

فرض کنید که $1-x=u$ و $2y=v$ باشند در اینصورت $f(u,v)=0$ در نتیجه مجموعه جوابی که برای u,v به دست می آید همان شکلی است که در فرض مسئله داده شده است. اکنون :

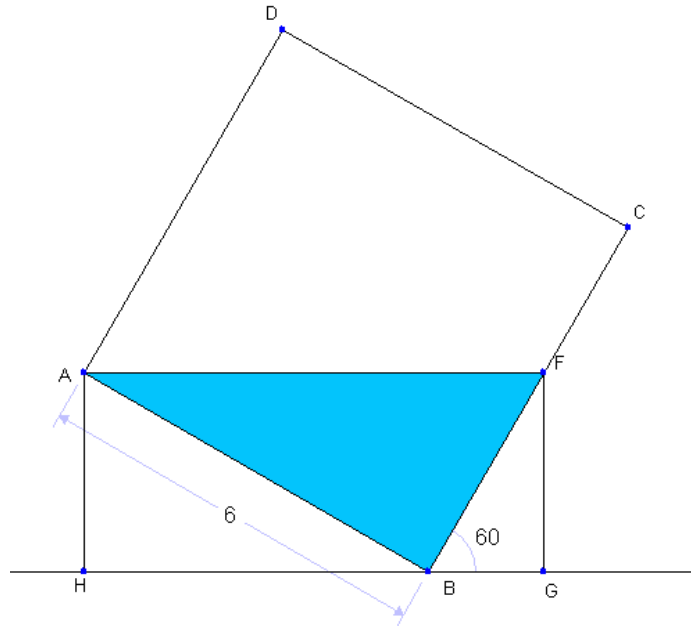
$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = \frac{v}{2} \end{cases}$$

در نتیجه برای به دست آوردن مجموعه نقاط خواسته شده باید ابتدا نموداری که در مسئله داده شده است را نسبت به محور y ها قرینه کنیم. سپس یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. در پایان هم باید با یک

تجانس به نسبت $\frac{1}{2}$ مختص دوم همه ی نقاط را نصف کنیم (به نوعی نمودار را جمع کنیم). اگر این کارها را انجام دهیم به سادگی معلوم است که گزینه (ه) جواب مسئله است.

۱۲. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا $۱۰۸ = ۳ \times ۶ \times ۶$ متر مکعب آب درون مکعب قرار دارد. شکل زیر نمای کناری مکعب بعد از کج شدن است:



$$FG = AH = 6 \sin(30^\circ) = 3, GH = BH + BG = AH \cdot \cot(30^\circ) + FG \cdot \tan(30^\circ) \\ = 3 \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 4\sqrt{3}$$

پس حجم آب باقی مانده برابر است با:

$$6 \times (\text{مساحت مثلث } ABF) = 6 \times \frac{3 \times 4\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

داریم که $۱۰۸ < ۳۶\sqrt{۳}$ پس آب بیرون می ریزد و حجم آب بیرون ریخته شده برابر $۱۰۸ - ۳۶\sqrt{۳}$ است.

۱۳- گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که ۱۳۸۸ بر ۴ بخشپذیر است اما بر ۸ بخشپذیر نیست. طبق معادله $y^3 = 2x^2 + 1388$ نتیجه می گیریم y^3 زوج است. پس y نیز زوج است. در نتیجه y^3 بر ۸ بخشپذیر است. حال عبارت $1388 - y^3$ بر ۴ بخشپذیر است. در نتیجه لزوماً x^2 زوج است. پس x نیز زوج است و $2x^2$ بر ۸ بخشپذیر است. در نتیجه $2x^2 - y^3$ نیز بر ۸ بخشپذیر است که این گونه نیست. زیرا ۱۳۸۸ بر ۸ بخشپذیر نیست.

۱۴- گزینه (د) صحیح است.

راه اول:

$$\begin{aligned} \text{فرض کنید } \overline{abcd} \text{ عددی چهار رقمی با این خاصیت باشد. به راحتی می توان دید که} \\ \overline{abcd} - \overline{dcba} = 999a + 90b - 90c - 999d = 9(111(a-d) + 10(b-c)) \\ = 6174 \\ \Rightarrow 111(a-d) + 10(b-c) = 686 \end{aligned}$$

توجه کنید که

$$686 \equiv 111(a-d) \pmod{10} \Rightarrow 6 \equiv a-d \pmod{10}$$

پس با توجه به این که $a > d$ لزوماً $a - d = 6$ و بنابر رابطه فوق لزوماً $b - c = 2$.
پس با توجه به این تساوی ها می توان گفت که $0 \leq d \leq 3$ و $d < c < 4 + d$. (چرا؟). پس کلاً
۴ انتخاب برای d و ۳ انتخاب متناظر با آن برای c داریم. همچنین a و b به صورت یکتا با توجه به
آن دو مشخص می گردند. در نتیجه به ۱۲ حالت می توان اعداد مطلوب را تولید کرد.

راه دوم:

داریم که

$$a > b > c > d$$

و

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 6174$$

حال شروط برقراری رابطه بالا را بررسی می کنیم. اولاً چون $a > d$ پس در محاسبه رقم یکان حاصل عبارت ده بر یک صورت می گیرد پس $4 = d - a + 10$ پس $a - d = 6$ همین طور در این مرحله یکی از رقم c که بزرگتر صف نیز هست کم می شود. پس هنوز داریم که $0 \leq c - 1 < b$ پس اینجا نیز باید ده بر یک بکنیم و داریم که

$7 = b - (c - 1) + 10$ پس داریم که $b - c = 2$ در این مرحله نیز یکی از b کم می شود ولی باز هم داریم که $c \geq b - 1$ پس $b - 1 - c = 1$ یا $b - c = 2$ در نهایت هم داریم که برای محاسبه رقم چهارم باید a را منهای d کنیم که نتیجه می شود $a - d = 6$ پس دو شرط $a - d = 6$ و $b - c = 2$ لازم و کافی هستند.

با توجه به شرط اول به سادگی به دست می آید که برای انتخاب a و d تنها ۴ حالت وجود دارد و با داشتن a و d برای انتخاب b و c تنها ۳ حالت وجود دارد. پس در کل $3 \times 4 = 12$ حالت برای انتخاب \overline{abcd} وجود دارد.

۱۵- گزینه (ه) صحیح است.

توجه کنید f یک سهمی است که ضریب درجه دوم آن منفی است پس ماکسیمم دارد. همچنین ماکسیمم آن به ازای $x = -\frac{b}{2a} = \frac{b}{2}$ رخ می دهد. از آن جایی که این مقادیر سهمی باید همواره کمتر از یا مساوی ۲ باشند پس ماکسیمم آن از ۲ نابیشتر است. پس

$$f\left(\frac{b}{2}\right) \leq 2 \Rightarrow -\left(\frac{b}{2}\right) + b\left(\frac{b}{2}\right) + c \leq 2 \Rightarrow b^2 + 4c \leq 8$$

اکنون می دانیم که فاصله ی ریشه ها برابر است با :

$$S = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{-2} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{-2} \right| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 + 4c} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

در نتیجه کافی است مثالی ارائه دهیم. توجه کنید هر دو عدد حقیقی b, c که برای آن ها $b^2 + 4c = 8$ جواب هستند و مثال مورد نظر را می توانید بسازید. پس گزینه (ه) صحیح است.

۱۶-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید از آنجایی که عدد در مبنای ۲ فقط از ۰ و ۱ تشکیل شده است در نتیجه یک عدد در این مبنا کاهشی است اگر به فرم $1111...100...000$ باشد که در این عدد m بار ۱ و n بار صفر استفاده شده است. از آنجایی که ما فقط اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۲۴ را بررسی می کنیم پس اعدادی را بررسی می کنیم که برای آن ها $m+n \leq 10, m \geq 1$. اکنون می خواهیم ببینیم چه تعدادی از این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند. توجه کنید برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۴ از راست شروع می کنیم و به جای ۰۰, ۰۱, ۱۰ و ۱۱ به ترتیب ۰, ۱, ۲, ۳ قرار می دهیم. اگر تعداد ارقام در مبنای ۲ فرد بود در پایان یک عدد باقی می ماند که حتما ۱ است یا معادلا ۰۱ است که به جای آن ۱ قرار می دهیم. در نتیجه اعداد بالا را به دو قسمت تقسیم می کنیم :

- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ زوج است: توجه کنید همه ی این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند (در واقع اگر دوتا دوتا تقسیم کنید و به فرم این اعداد در مبنای ۲ توجه کنید کاملا مشخص است). فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد طبیعی $2k$ رقمی در مبنای ۲ که به فرم $11...100...0$ هستند را بشماریم. توجه کنید تعداد صفر ها در این اعداد می تواند عددی بین ۰ تا $2k-1$ باشد و با تعداد صفر ها عدد یکتا معلوم می شود. پس دقیقا $2k$ تا از این اعداد داریم. در نتیجه تعداد اعداد در این قسمت دقیقا برابر است با: $2+4+6+8+10+...+2k$

- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ فرد است: اگر به مطالبی که در بالا توضیح داده شد دقت کنید می بینید که چپ ترین رقم این اعداد در مبنای ۴ حتما ۱ است. در نتیجه رقم های دیگر این عدد همگی باید ۰ یا ۱ باشند (در مبنای ۴). اما هیچکدام از این ارقام نمی توانند ۱ باشند در واقع اگر بخواهد رقمی در مبنای ۴ غیر از این چپ ترین ۱, ۱ باشد پس این عدد به فرم $11...100...0$ در مبنای ۴ است که در آن تعداد ۱ ها حداقل ۲ است و این به این معناست که این عدد در مبنای ۲ به فرم: $1010101...01000...0$ است که از آنجایی که تعداد ۱ ها در مبنای ۴ حداقل ۲ تا است پس در مبنای ۲ هم حداقل یک عبارت 101 داریم و این با فرم اولیه ی این اعداد متناقض است. در نتیجه در بین اعدادی که در مبنای ۲ فرد رقم دارند و به فرم $11...100...0$ هستند فقط اعدادی می توانند مناسب باشند که دقیقا یک عدد ۱ در نمایششان داشته باشند. علاوه بر این همه ی این اعداد هم مناسب هستند. در نتیجه از آنجایی که تعداد ارقام این اعداد حداکثر ۱۰ است پس دقیقا ۵ تا از این اعداد داریم (۱ رقمی, ۳ رقمی, ۵ رقمی, ۷ رقمی و ۹ رقمی در مبنای ۲ و از هر کدام دقیقا یکی).

در نتیجه در کل دقیقا $35=30+5$ تا از این اعداد کاهشی در هر دو مبنا داریم و گزینه ج صحیح است.

۱۷- گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $(x, y) = d$ (یعنی d م.م.ب دو عدد x و y باشد) و $x = dx'$ و $y = dy'$ در نتیجه:

$$x + y | 2x + 7y \Rightarrow d(x' + y') | d(2x' + 7y') \Rightarrow x' + y' | 2x' + 7y' \\ \Rightarrow x' + y' | 5y' \Rightarrow x' + y' | 5 \Rightarrow x' + y' = 5$$

توجه کنید که $(y', x' + y') = 1 \Rightarrow (y', x' + y') = 1$ و x' و y' هر دو طبیعی هستند. در نتیجه روابط خط آخر عبارت فوق صحیح هستند. از طرفی می توان بررسی کرد که هر دو عدد طبیعی که دارای شرط فوق باشند (یعنی $(x, y) = 5$) در شرط مسئله صدق می کنند. پس کافی است تنها تعداد (x, y) را بشماریم که در شرط فوق صدق کنند و هر دو از ۱۰۱ کمتر باشند. پس ۴ حالت ممکن است:

الف- $x' = 4, y' = 1 \Rightarrow dx' = x < 101 \Rightarrow 1 \leq d \leq 25$

پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x' = 3, y' = 2 \Rightarrow dx' = x < 101 \Rightarrow 1 \leq d \leq 33$

پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ج- $x' = 1, y' = 4 \Rightarrow dy' = y < 101 \Rightarrow 1 \leq d \leq 25$

پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x' = 2, y' = 3 \Rightarrow dy' = y < 101 \Rightarrow 1 \leq d \leq 33$

پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

در کل جواب برابر است با $25 + 33 + 25 + 33 = 116$.

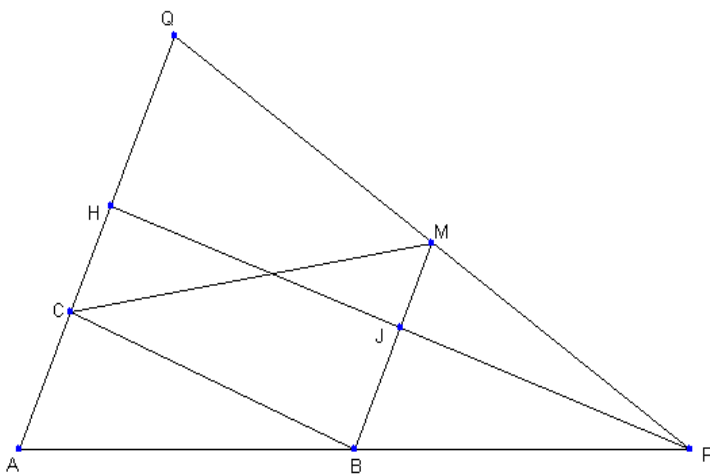
۱۸. گزینه (ج) صحیح است.

منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است.

داریم که با توجه به شرایط مساله $MB \parallel AQ$

و همچنین فرض کنید PH بر BM و AQ

عمود است. داریم که :



$$BM = \frac{1}{2}AQ, \frac{1}{2}PH = HJ \Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{APQ}} = \frac{HJ \cdot BM}{PH \cdot AQ} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MBC} = \frac{1}{4}S_{APQ}$$

همچنین داریم که:

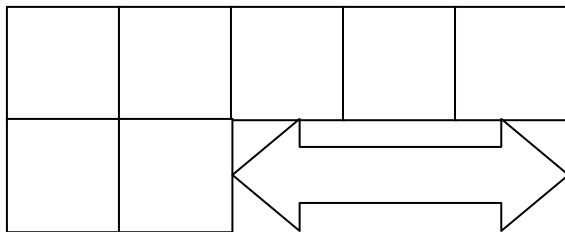
$$S_{ABC} = \frac{AC}{AQ} S_{AQB} = \frac{AC}{AQ} \frac{AB}{AP} S_{APQ} \Rightarrow S_{APQ} = 6 S_{ABC}$$

پس:

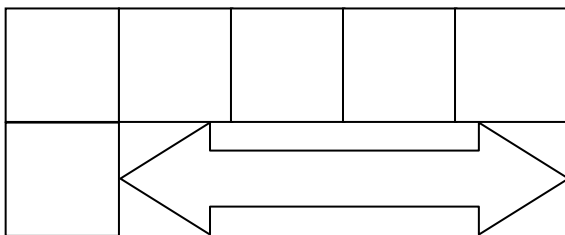
$$S_{MBC} = \frac{1}{4} S_{APQ} = \frac{3}{2} S_{ABC}$$

۱۹- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید تعداد حالتی که می توان اعداد ۱ تا n ($n \geq 4$) را در یک جدول مشابه شکل زیر چید(به طوری که اعداد در دو سطر و در دو ستون از کوچک به بزرگ چیده شده باشند) برابر باشد با b_n .



به راحتی بررسی می توان کرد که در شکلی مشابه زیر به $m - 1$ طریق می توان اعداد ۱ تا m را جاسازی کرد(به طوری که اعداد در سطر و ستون به صورت صعودی چیده شده باشند).



حال به وضوح عدد n را در جدول فوق به دو صورت می توان جاسازی کرد(انتهای سطر اول و انتهای سطر دوم). حال در حالت اول بقیه جدول را می توان به b_{n-1} طریق اعداد را جاسازی کرد و در حالت دوم به $n - 2$ طریق پس می توان نتیجه گرفت که $b_n = b_{n-1} + n - 2$. حال با توجه به این که $b_4 = 2$ ، نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} b_n &= b_4 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) = 2 + 3 + \dots + (n - 2) \\ &= \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - 1 \end{aligned}$$

پس $b_1 = 35$.

۲۰. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا عدد n را در مبنای ۲ می نویسیم و این عملیات را بررسی می کنیم.

نشان می دهیم که عملیات فوق اولین رقم ناصفر عدد در مبنای دو را ۰ می کند و یک ۱ به انتهای آن اضافه می کند.

چرا که بزرگترین 2^a ای که $2^a | n$ همان ضریب اولین ۱ در نمایش مبنای ۲ عدد n است و کوچکترین 2^b که $2^b < n$ همان ضریب رقمی است که بعد از آخرین یک عدد n در بسط مبنای ۲ ظاهر می شود:

$$\begin{aligned} n &= (\dots a_{u-1} a_u \dots a_1 a_0)_2 \\ 2^a &= (\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots)_2 \\ 2^b &= (\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots)_2 \\ n + 2^b - 2^a &= (\dots a_{u-1} a_u \dots a_1 a_0 \dots \dots \dots)_2 \end{aligned}$$

بنابراین با این الگو از ۴۲ شروع می کنیم و داریم که $42 = (101010)_2$:

$(101010)_2$	مرحله ۰
$(1101000)_2$	مرحله ۱
$(11100000)_2$	مرحله ۲
$(111000000)_2$	مرحله ۳
$(1110000000)_2$	مرحله ۴

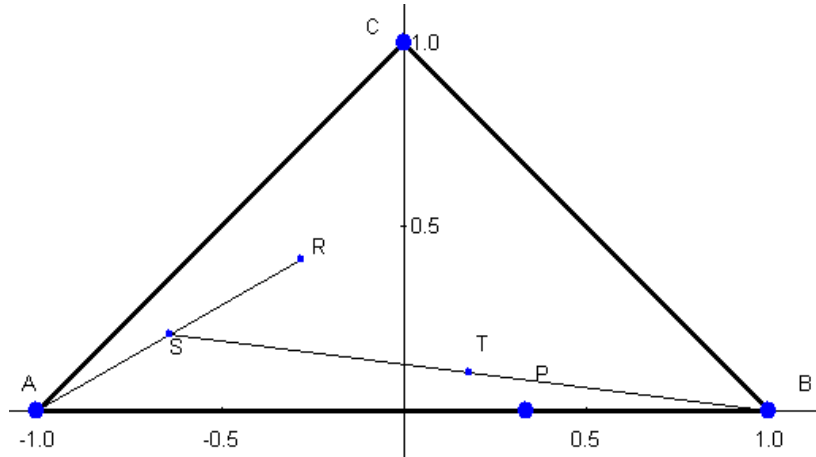
همانطور که مشاهده می شود از مرحله ۲ به بعد هر بار عدد فوق دو برابر می شود. در مرحله ۲ برابر است با

$$2^5 + 2^6 + 2^7$$

لذا در مرحله ۱۱۳ یعنی $2^{113} = 2^{112} + 2^{111} + 2^{110} + \dots + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$ می رسیم.

۲۱. گزینه (د) صحیح است.

نشان می دهیم که در هر دو مرحله (یعنی یک مرحله با شماره زوج و بعد یک مرحله با شماره فرد) فاصله مورچه تا نقطه P روی خط AB که فاصله P تا نقطه B نصف فاصله آن از A است یک چهارم می شود. این نکته را به ۲ راه نشان می دهیم:



راه اول:

مطابق شکل مثلث را روی محور مختصات قرار دهید:

اگر مورچه ابتدا در نقطه (x_{2k}, y_{2k}) قرار داشته باشد بعد از یک مرحله به نقطه (x_{2k+1}, y_{2k+1}) می رود و سپس به نقطه $(\frac{x_{2k-1}}{2}, \frac{y_{2k}}{2})$ می رود. پس می توانیم بنویسیم:

$$(x_{2k+2}, y_{2k+2}) = \left(\frac{x_{2k+1}+1}{2}, \frac{y_{2k+1}}{2} \right) = \left(\frac{\left(\frac{x_{2k-1}}{2} \right) + 1}{2}, \frac{y_{2k}}{2} \right) = \left(\frac{x_{2k-1} + 2}{4}, \frac{y_{2k}}{2} \right)$$

$$\left(x_{2k+2} - \frac{1}{3}, y_{2k+2} \right) = \left(\frac{1}{4} \left(x_{2k} - \frac{1}{3} \right), \frac{1}{4} (y_{2k}) \right)$$

پس فاصله مورچه در مرحله $2k + 2$ از نقطه $\frac{1}{3}$ برابر یک چهارم فاصله مورچه تا همین نقطه در مرحله $2k$ است.

راه دوم:

در مراحل فرد مانند این است که تجانسی به مرکز A و نسبت $\frac{1}{3}$ و در مراحل فرد تجانسی به مرکز B و نسبت $\frac{1}{3}$ می زنیم.

این تجانس ها حرکات مورچه را مشخص می کنند. می دانیم ترکیب این دو تجانس، تجانسی به نسبت $\frac{1}{4}$ می شود. حال کافی است مرکز آن را بیابیم. می دانیم که مرکز تجانس تنها نقطه ای است که در اثر تجانس

ثابت می ماند. می توانید به سادگی نشان دهید که نقطه P ثابت می ماند لذا مرکز تجانس است. پس مانند بالا اثبات شد که در این دو مرحله فاصله مورچه تا نقطه P یک چهارم می شود. پس به طریق دوم نیز اثبات شد.

حال داریم که فاصله مورچه در ابتدا از نقطه P کمتر از طول AB است پس بعد از ۲۰ مرحله نیز فاصله آن از P کمتر از $\frac{AB}{۴۰}$ می شود و به وضوح به همواره به وسط AB نزدیک تر خواهد بود.

۲۲- گزینه (د) صحیح است.

راه حل اول:

به وضوح فردی که در ابتدا، در انتهای صف حضور داشته است، تا ابد در آخر صف باقی خواهد ماند. توجه کنید که فردی که در حال حاضر نفر i صف است، پس از دستور فرمانده طبق تابع زیر جایگاهش در صف تغییر می کند:

$$\begin{cases} i & \text{فرد} \\ \frac{i}{۲} & \text{زوج } i \end{cases}$$

فردی که در نهایت پس از ۴۲ مرتبه دستور فرمانده در ابتدای صف قرار می گیرد را علی اکبر بنامید. به وضوح علی اکبر در مرحله قبل نفر دوم، در مرحله قبل آن نفر چهارم و ۰۰۰ بوده است. به همین ترتیب می توان گفت که علی اکبر پس از ۳۴ دستور فرمانده، نفر ۲۵۶ صف بوده است. در مرحله قبل از این به راحتی می توان بررسی کرد که نفر ۲۵۵ صف بوده است. توجه کنید که $۲۵۵ = ۲(۱۱۱۱۱۱۱)$. در مرحله قبل از این علی اکبر در جایگاه ۲۵۳ حضور داشت که $۲۵۳ = ۲(۱۱۱۱۱۱۰۱)$. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم، هر مرحله که به عقب بازگردیم، دومین یک از سمت راست (در مبنای ۲) تبدیل به صفر خواهد شد. پس می توان نتیجه گرفت که بعد از ۲۶ دستور، علی اکبر در ابتدای صف حضور داشته است. با تکرار این روند باز می توان نتیجه گرفت که بعد از دستور دهم نیز علی اکبر در جایگاه اول قرار داشته و بعد از دستور دوم در جایگاه ۲۵۶. پس بعد از دستور اول در جایگاه ۲۵۵ قرار گرفته است. در نتیجه در اول کار علی اکبر در جایگاه ۲۵۳ صف بوده است.

راه حل دوم:

باز هم مانند بالا علی اکبر را همان سربازی که در مرحله ۴۲ در ابتدای صف قرار می گیرد بنامید. اگر a_i مکان یکی از سربازها مثلا علی اکبر در مرحله i ام باشد به سادگی می توان نشان داد که

$$a_i \equiv 2a_{i+1} \pmod{257} \quad (\text{به پیمانه } 257)$$

پس بعد از ۴۲ مرحله داریم که (به پیمانہ ۲۵۷) $a_{42} \equiv 2^{42} a_{42}$ چون برای علی اکبر داریم $a_{42} = 1$ پس داریم که:

$$a_1 \equiv 2^{42} \equiv 256^5 \times 4 \equiv (-1)^5 \times 4 \equiv 253 \pmod{257}$$

پس علی اکبر ابتدا در مکان ۲۵۳ بوده است.

۲۳- گزینه (ب) صحیح است.

چندجمله ای مورد نظر به فرم $a_5x^5 + a_4x^4 + \dots + a_0$ است که ضرایب جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند. اکنون می خواهیم این چندجمله ای بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد. توجه کنید که: $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$. در نتیجه اگر چندجمله ای فوق بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد پس چندجمله ای $(a_5 + a_2)x^2 + (a_4 + a_1)x + (a_3 + a_0)$ هم بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است. اگر به جای عبارت حاصل باقی مانده ی آن را بر $x^2 + x + 1$ قرار دهیم آنگاه این باقی مانده باید صفر باشد. این باقی مانده برابر است با: $(a_4 + a_1 - a_5 - a_2)x + (a_3 + a_0 - a_5 - a_2)$. صفر شدن این باقی مانده یعنی اینک:

$$a_0 + a_3 = a_1 + a_4 = a_2 + a_5 = S$$

علاوه بر آن این اعداد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند پس:

$$a_0 + a_1 + \dots + a_6 = 1 + 2 + \dots + 6 = 21$$

در نتیجه باید $S = 7$ باشد. حال برای شمردن تعداد این ۶ تایی ها بدین نحو عمل می کنیم. ابتدا a_0 را به دلخواه به ۶ حالت انتخاب می کنیم. از روی a_0 مقدار $a_3 = 7 - a_0$ به طور یکتا به دست می آید. بعد از آن از بین ۴ عدد باقی مانده a_1 را به دلخواه تعیین می کنیم پس مشابه بالا a_4 به طور یکتا معلوم می شود و در پایان از میان ۲ عدد باقی مانده به ۲ حالت a_2 را انتخاب می کنیم و a_5 به طور یکتا تعیین می شود. پس جواب مسئله برابر است با: $2 \times 4 \times 6 = 48$ و مسئله حل است.

۲۴-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که :

$$a^3 - \frac{1}{a^3} \geq k(a - \frac{1}{a}) \Rightarrow (a - \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1) \geq k(a - \frac{1}{a})$$

اما $a - \frac{1}{a} > 0$ پس با ساده کردن آن از طرفین معلوم می شود که باید بزرگترین k حقیقی را بیابیم که برای هر a مثبت با شرط $a - \frac{1}{a} \geq 1$ داشته باشیم :

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq k \Rightarrow (a - \frac{1}{a})^2 + 3 \geq k$$

اکنون دقت کنید که اگر عدد مثبت a به نحوی باشد که $a - \frac{1}{a} = 1$ ($a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$) در این صورت در رابطه

بالا به دست می آوریم که $4 \geq k$. برای اینکه نشان دهیم ماکزیمم k , ۴ است تنها کافی است نشان

دهیم که برای هر a با شرط $a - \frac{1}{a} \geq 1$ داریم $(a - \frac{1}{a})^2 + 3 \geq 4$ که این هم بدیهی است. پس برای ۴ هم

اثبات ارائه کردیم و هم مثالی ارائه کردیم که نشان دهیم از این عدد بزرگتر نمی توان یافت. در نتیجه گزینه

• توجه : نکته ای که باید به آن توجه کنید این است که هنگامی که به رابطه $a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq k$ می

رسید اگر از نامساوی حسابی-هندسی بهره ببرید به این نتیجه می رسید که $a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq 3$ پس

احتمالا حدس می زنید که شاید بهترین k همان ۳ باشد. البته این که در تست جواب ۳ وجود

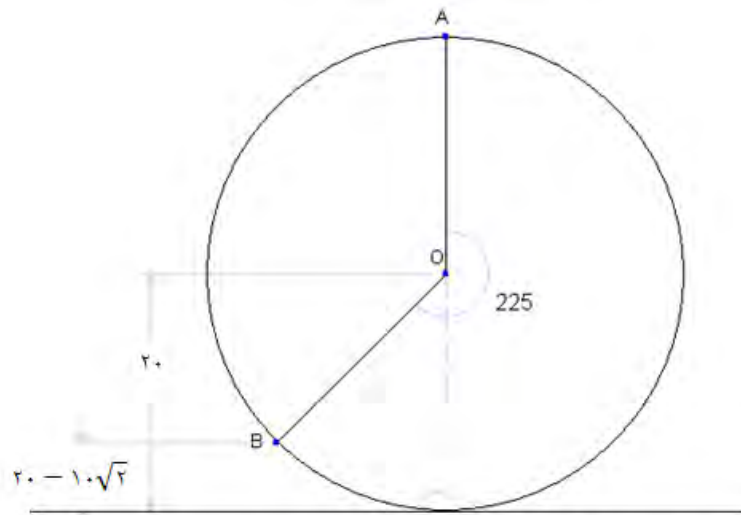
ندارد به شما کمک می کند تا احساس کنید در قسمتی اشتباه کرده اید. اما اگر در گزینه ها عدد ۳

وجود داشت توجه به این نکته که شما از فرض $a - \frac{1}{a} \geq 1$ هیچ استفاده ای نکرده اید می توانست

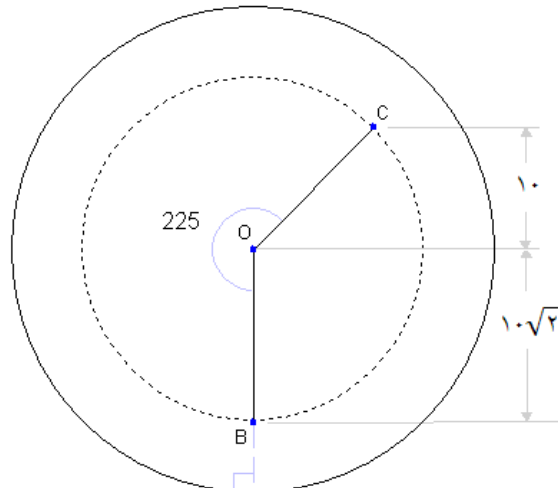
راهنمای شما برای پیدا کردن خطا باشد.

۲۵. گزینه (ه) صحیح است.

محیط دایره عظیمه توپ برابر است با 40π و توپ 25π حرکت کرده است. پس در کل به اندازه دور یا $\frac{25\pi}{40\pi} = \frac{5}{8}$ چرخیده است. لذا با توجه به اینکه نقطه علامت خورده خود یک دایره عظیمه را می پیماید ارتفاع نقطه علامت خورده پس از حرکت به سمت شرق برابر $20 - 10\sqrt{2} = 20 + 20 \cos(225^\circ)$ می شود. از اینجا به بعد در حرکت به سمت شمال هم توپ مقدار 225° می چرخد ولی نقطه علامت خورده روی دایره ای ثابت حرکت می کند که شعاع آن برابر $10\sqrt{2} = 20 - (20 - 10\sqrt{2})$ است و در ابتدا نقطه مورد نظر در پایین دایره قرار دارد. با چرخش به مقدار 225° دیگر نقطه به ارتفاع $(20 - 10\sqrt{2}) \cos(225^\circ)$ یا $20 - 30$ سانتی متر می رسد. در اشکال زیر نمای جانبی کره را در هر یک از این حرکات می بینید.



A محل نقطه پیش از حرکت به سمت شرق و B مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت



B محل نقطه پیش از حرکت به سمت شمال و C مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت

۲۶- گزینه (ج) صحیح است.

در شکل زیر دو کاشی روی جدول قرار گرفته است. با توجه به این که باید مجموع اعداد روی کاشی بر ۶ بخشپذیر باشد، لزوماً $A_۳$ و $A_۴$ باید برابر باشند (چرا؟). به کمک این استدلال می توان گفت که اعداد نوشته شده در دو خانه ای که فاصله عمودی یا افقی آن ها ۲ است، برابر است.

A	B	A	B	
C	D	C	D	
A	B	A	B	
C	D	C	D	

به عبارتی اگر سطر ها و ستون ها را از چپ به راست و از بالا به پایین از ۱ تا ۱۳۸۸ شماره گذاری کنیم، خانه های با سطر فرد و ستون فرد با هم برابر هستند و این مقدار را A فرض کنید. به همین ترتیب کلیه خانه های (فرد،زوج) برابر C ، تمام خانه های (زوج، فرد) برابر B و تمام خانه های (زوج،زوج) برابر D هستند. همچنین با کاشی گذاری ها، می توان ثابت کرد که

$$۲B \equiv ۲C \pmod{۶} \Rightarrow B \equiv C \pmod{۳}$$

$$۲A \equiv ۲D \pmod{۶} \Rightarrow A \equiv D \pmod{۳}$$

$$۶|۲B + A + D \Rightarrow ۲|A + D \Rightarrow A \equiv D \pmod{۲}$$

$$۶|۲D + B + C \Rightarrow ۲|B + C \Rightarrow B \equiv C \pmod{۲}$$

از روابط فوق می توان نتیجه گرفت که $A = D$ و $B = C$ در نتیجه کافی است که

$$۶|۲(A + B) \Rightarrow ۳|A + B$$

حال A می تواند به ۶ حالت انتخاب شود و B متناظر با آن در ۲ حالت انتخاب می شود. پس جواب $12 = 6 \times 2$ است.

۲۷- گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید A_n, B_n عباراتی باشند که از در آنها از n تا 2 و n تا 4 استفاده شده باشد و C_n عبارتی باشد که در آن از $4n$ تا 2 استفاده شده باشد :

$$A_n = 2^{4^{2^{\dots^4}}} \quad B_n = 4^{2^{4^{\dots^2}}} \quad C_n = 2^{2^{2^{\dots^2}}}$$

اکنون هدف ما نشان دادن نامساوی $C_n > A_n > B_n$ برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ است. اگر این نامساوی را نشان دهیم از قرار دادن $n = 500$ جواب به دست می آید. این حکم را به روش استقرایی نشان می دهیم. به راحتی می توان این نامساوی را برای حالت پایه یعنی $n = 2$ چک کرد. اگر نامساوی برای n درست باشد برای $n+1$ می توان نوشت :

$$A_{n+1} = 2^{4^{A_n}} = 2^{2^{2A_n}} \quad B_{n+1} = 4^{2^{B_n}} = 2^{2^{B_n+1}} \quad C_{n+1} = 2^{2^{2^{C_n}}}$$

اکنون اگر دقت کنید $2A_n > 2B_n \geq B_n + 1$ در نتیجه $2^{2^{2A_n}} > 2^{2^{B_n+1}}$ یا معادلا : $A_{n+1} > B_{n+1}$.

اکنون می خواهیم A_{n+1}, C_{n+1} را با هم مقایسه کنیم. ثابت می کنیم که : $2^{2^{C_n}} > 2A_n$ و از آن حکم

را نتیجه می گیریم. توجه کنید که اگر u عددی طبیعی باشد $2^{2^u} > 2u$ صحیح است. در نتیجه :

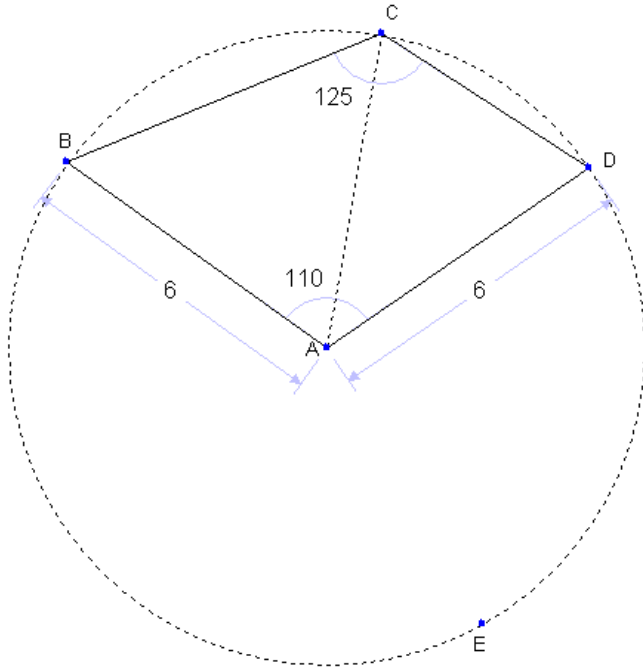
$$2^{2^{C_n}} > 2C_n > 2A_n \Rightarrow 2^{2^{2^{C_n}}} > 2^{2^{2A_n}}$$

که از آن نتیجه می شود : $C_{n+1} > A_{n+1}$.

در نتیجه چیزی که می خواستیم ثابت کنیم باستقرا ثابت شد. پس برای $n = 500$ داریم :

$C > A > B$ و در نتیجه گزینه (ج) صحیح است.

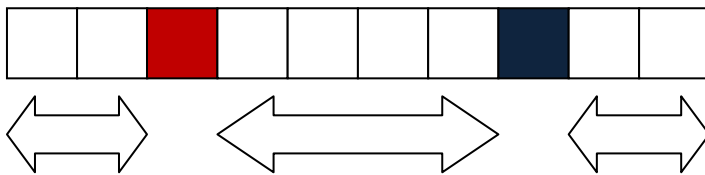
۲۸. گزینه (ج) صحیح است.



دایره به مرکز A و شعاع 6 را اضافه می کنیم. (مطابق شکل) واضح است که B و D روی این دایره قرار دارند. نشان می دهیم که C هم روی این دایره قرار دارد. داریم که کمان BED برابر $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$ است و زاویه BCD هم برابر $\frac{250^\circ}{2} = 125^\circ$ است. لذا BED کمان درخور زاویه BCD است و C روی دایره قرار دارد. پس $AC = 6$.

۲۹- گزینه (ب) صحیح است.

در هر حرکت ما قطعه جورچین را در یکی از سه ناحیه چپ، وسط و راست قرار می دهیم.

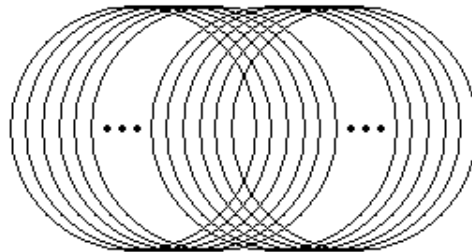


در اول تعداد روش های چیدن قطعات در ناحیه وسط را می شماریم. در ۳ مرحله ممکن است قطعات را از سمت چپ پیشروی دهیم یا از سمت راست (مثلا در مرحله اول ما می توانیم یک قطعه مجاور خانه قرمز قرار دهیم یا یک قطعه مجاور خانه آبی). قطعه آخر هم به صورت یکتا قرار خواهد گرفت. پس به ۸ طریق می توان ۴ خانه وسط را پر نمود. حال نوبت به چیدن قطعات ناحیه چپ است. در این جا دو قطعه باید قرار بگیرند که لزوماً قطعه خانه ۲ زودتر از قطعه خانه ۱ پر می شود. در نتیجه برای ترکیب کردن چیدمان ناحیه چپ و وسط کافی است تعداد راه های قرار دادن دو حرکت بین ۴ حرکت خانه های وسط را شمارد. این هم بدین ترتیب است که ما می توانیم یکی از ۵ جایگاه ممکن برای قرار دادن این حرکات را به هر دو اختصاص دهیم یا دو محل مختلف اختصاص دهیم که در کل به ۱۵ طریق می توان حرکات ناحیه چپ را بین حرکات ناحیه وسط انجام داد. حال حرکات ناحیه راست را می خواهیم در بین ۶ حرکت نواحی چپ و وسط انجام دهیم. با استدلالی مشابه دو حرکت ناحیه راست

را به ۲۸ طریق می توان دو حرکت را جاسازی کرد $(\binom{7}{2} + 7)$. پس در کل به $8 \times 15 \times 28 = 3360$ طریق می توان جورچین را چید.

توجه کنید که در این سوال از تکنیک ادغام حرکات استفاده شده بود. یعنی ما حرکات لازم برای انجام کارهای مختلف را به طور مناسبی در هم می آمیزیم. به همین منظور مسئله را به سه حالت تقسیم کرده و سپس آن ها را در هم آمیختیم.
۳۰. گزینه (ه) صحیح است.

دقت کنید که اگر شرط هم صفحه بودن وجود نداشت می توانستیم بی نهایت دایره را با الگوی شکل زیر روی یک صفحه قرار دهیم:



حال مناسب است با همان الگوی بالا بی نهایت دایره را روی یک کره بچینیم. به وضوح هر سه شرط مساله را بر آورده

کرده ایم.

