



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

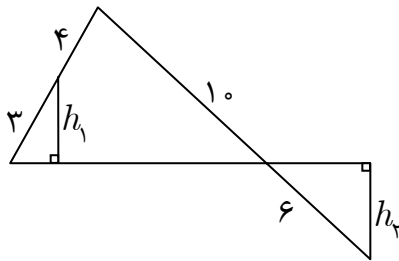
$$\begin{array}{r} 228 \\ *** \\ \times 9 \\ \hline 1*** \end{array}$$

۱. ارقام ستاره‌دار در حاصل ضرب روبه‌رو نامعلوم‌اند و لزوماً برابر نیستند. مجموع ارقام حاصل ضرب چه قدر است؟ (اعداد کوچک سطر بالا از ده بر یک حاصل شده‌اند.)

- الف) ۵ (ب) ۹ (ج) ۱۸ (د) ۲۷ (ه) ۳۶

۲. چند سه‌تایی (a, b, c) از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک a ، b و c برابر ۷۰۰۰ باشد؟

- الف) ۱۰۰۸ (ب) ۲۱۸۷ (ج) ۵۱۰۳ (د) ۵۴۸۸ (ه) ۹۵۸۳



۳. در شکل روبه‌رو، نسبت h_1 به h_2 چه قدر است؟

- الف) $0/8$ (ب) ۱ (ج) $1/2$ (د) $1/4$ (ه) ۲

۴. طول سه میانه‌ی مثلثی، ۵، ۵ و ۸ سانتی‌متر است. کوتاه‌ترین ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟

- الف) ۲ (ب) $3\sqrt{7}$ (ج) $\frac{\sqrt{19}}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$ (ه) ۴

۵. در بسط $(1 + x^3 + x^6)^{50}$ چند جمله با ضریب ناصفر وجود دارد؟

- الف) ۵۱ (ب) ۱۰۱ (ج) ۱۵۱ (د) ۲۰۱ (ه) ۳۰۱

۶. تعداد مقسوم‌علیه‌های $2008 \times (1387! + 1430)$ چند برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های $1387! + 1430$ است؟

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۲۰۰

۷. چند عدد پنج رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم آن با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد؟

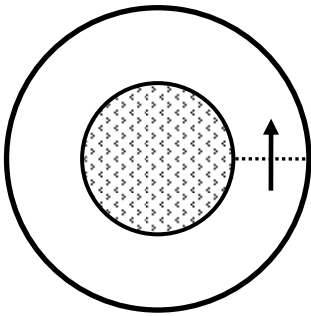
- الف) ۸ (ب) ۱۲ (ج) ۱۶ (د) ۲۴ (ه) ۳۶



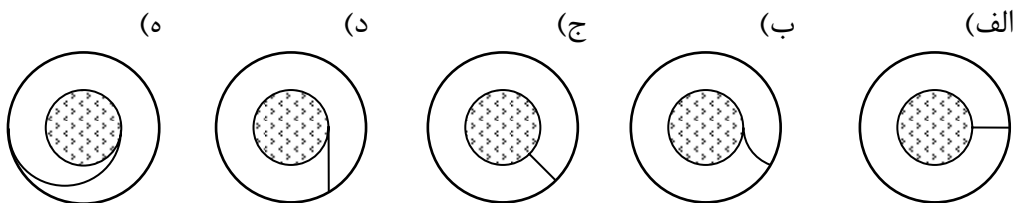
آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۸. ده نفر، با شماره‌های یک تا ده، به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میزی نشسته‌اند. در ابتدا هر کس ۱۰۰ مهره دارد. با شروع از نفر شماره یک، هر نفر ۲ مهره از نفر سمت راست خود می‌گیرد و ۱ مهره به نفر سمت چپ خود می‌دهد و نوبت به نفر سمت چپ منتقل می‌شود. پس از انجام ۸۷ مرحله، نفر هشتم چند مهره خواهد داشت؟

- الف) ۹۸ ب) ۹۹ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۱ ه) ۱۰۲



۹. در پیست دایره‌ای روبه‌رو، دوندگان روی دایره‌های متحدالمرکز می‌دوند. خط شروع مسابقه و جهت حرکت در شکل مشخص شده است. نقطه‌ی پایان مسابقه روی کدام یک از خم‌های زیر باشد تا طول مسیری که دوندگان مختلف تا رسیدن به خط پایان طی می‌کنند، با هم برابر باشد؟



۱۰. برای دو عدد مثبت a و b ، M و G را به ترتیب میانگین حسابی $(\frac{a+b}{2})$ و میانگین هندسی (\sqrt{ab}) در نظر می‌گیریم. کوچک‌ترین عدد k را بیابید که نابرابری زیر برای هر a و b حقیقی مثبت برقرار باشد.

$$|M - G| \leq k|a - b|$$

- الف) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{2}$ ه) ۱

۱۱. کاغذی مربع شکل را از روی قطر آن تا می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به دست آید. سپس مثلث را از روی محور تقارن آن تا می‌کنیم و مثلث دیگری به دست می‌آوریم و این کار را ۱۱ بار انجام می‌دهیم. سپس دو گوشه‌ی غیر قائمه‌ی مثلث حاصل را می‌بریم. اکنون اگر کاغذ را باز کنیم، چند سوراخ در آن می‌بینیم؟ (توجه کنید که در مجموع، ۱۲ بار عمل تا کردن انجام شده است.)

- الف) ۸۴۱ ب) ۹۰۰ ج) ۹۶۱ د) ۱۰۲۴ ه) ۱۰۸۹



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. هرمی مربع‌القاعده در نظر بگیرید که وجوه جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. طول ضلع بزرگ‌ترین مکعبی که در این هرم جا می‌شود چه قدر است؟

- (الف) $\sqrt{2} - 1$ (ب) $2 - \sqrt{3}$ (ج) $2\sqrt{3} - 3$
(د) $\sqrt{3} - 1$ (ه) $2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

۱۳. دو ماتریس A و B را هم‌توان گوئیم اگر اعداد طبیعی m و n وجود داشته باشند که $A^m = B^n$. کدام گزینه نادرست است؟

(الف) اگر A و B هم‌توان و B و C هم‌توان باشند، آن‌گاه A و C نیز هم‌توان اند.
(ب) اگر A و I هم‌توان باشند، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

- (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هم‌توان اند.
(د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ هم‌توان اند.
(ه) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هم‌توان اند.

۱۴. چند سه‌تایی (a, b, c) از اعداد تک‌رقمی ناصفر وجود دارد که $b \neq c$ و مجموعه‌ی ارقام دو عدد $a \times b$ و $a \times c$ یک‌سان باشند؟

- (الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۱۲

۱۵. شانزده نقطه در یک شبکه‌ی مربعی 4×4 قرار گرفته‌اند. از این نقاط حداکثر چند نقطه می‌توان انتخاب کرد که هیچ سه تایی هم‌خط نباشند؟

- (الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰



۱۶. چرخ‌ی به شعاع یک متر در ابتدای پلکانی قرار دارد که ارتفاع هر پله‌ی آن نیم متر و طول هر پله‌ی آن ۲ متر است. وقتی چرخ از دو پله بالا رفت، در ابتدای پله، چند رادیان چرخیده است؟

- (الف) $2 + \pi$ (ب) $2 + \frac{4}{3}\pi$ (ج) $2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ (د) $4 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۷. x_1, \dots, x_9 جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو است. x_5 چند است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \\ \vdots \\ x_8 + x_{10} = 2x_9 \\ x_9 + x_1 = 22 \\ x_{10} + x_2 = 26 \end{cases}$$

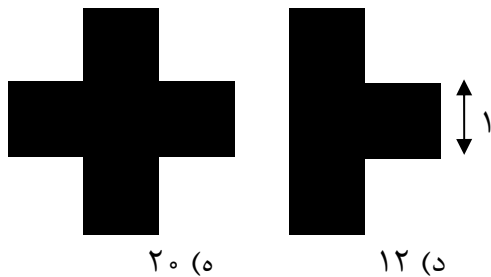
الف) ۰ ب) ۵ ج) ۹ د) ۱۱ ه) ۱۶

۱۸. یک جدول 8×8 که هر خانه‌ی آن مربعی به ضلع یک است در نظر بگیرید. مجموع مساحت همه‌ی مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها در این جدول دیده می‌شود چند است؟

الف) ۱۲۹۶ ب) ۴۰۹۶ ج) ۱۴۴۰۰ د) ۱۶۴۰۰ ه) ۲۴۳۸۴

۱۹. سه رقم سمت راست 21^{64} کدام است؟

الف) ۶۸۱ ب) ۸۸۱ ج) ۴۸۱ د) ۲۲۱ ه) ۳۸۱



۲۰. جسمی سه بعدی را بر روی صفحات $x - y$ و $y - z$ تصویر کرده‌ایم و دو شکل روبه‌رو به دست آمده است. حداکثر حجمی که جسم سه بعدی می‌تواند داشته باشد، چه قدر است؟

الف) ۶ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۲ ه) ۲۰

۲۱. نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به خط $y + 5x = 0$ قرینه می‌کنیم. در مورد شکل حاصل کدام درست است؟

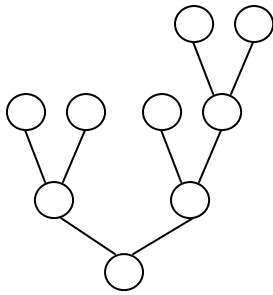
- الف) نمودار یک تابع پوشا است.
ب) نمودار یک تابع یک به یک است.
ج) نمودار یک تابع صعودی است.
د) نمودار یک تابع نزولی است.
ه) نمودار یک تابع نیست.

۲۲. مجموع ارقام کدام یک از اعداد زیر بیش‌تر است؟

الف) $20 + 2^{100}$ ب) $12 + 2^{100}$ ج) $8 + 2^{100}$ د) $4 + 2^{100}$ ه) 2^{100}



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور



۲۳. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را، بدون تکرار، در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار داد به طوری که عدد هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کمتر باشد؟

الف) ۱۶ (ب) ۹۶ (ج) ۴۴۸ (د) ۸۹۶ (ه) ۳۶۲۸۸۰

۲۴. معادله‌ی $2^{b-a} + a = b^2$ در اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۴ (ه) بی‌نهایت

۲۵. مثلث به رأس‌های A ، B و C دارای این خاصیت است که فواصل رأس‌های آن تا نقطه‌ی ثابت P ، به ترتیب، برابر با ۷، ۱۰ و ۱۴ است و در بین مثلث‌های با این خاصیت، بیش‌ترین مساحت را دارد. نسبت فاصله‌ی P از ضلع AB به فاصله‌ی P از ضلع BC ، چه قدر است؟

الف) ۱ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) ۲ (د) $\frac{2}{3}$ (ه) $\frac{7}{10}$

۲۶. x و y و z جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو در بازه‌ی $(-\pi, \pi]$ هستند. $x^2 + y^2 + z^2$ کدام گزینه است؟

الف) ۰ (ب) $\frac{\pi^2}{4}$ (ج) $\frac{3\pi^2}{4}$ (د) $\frac{8\pi^2}{9}$ (ه) $\frac{27\pi^2}{4}$

$$\begin{cases} A_0 = \emptyset, A_1 = \{1\} \\ A_n = (A_{n-1} \Delta A_{n-2}) \cup \{n\} \end{cases}$$

۲۷. زیرمجموعه‌های A_0, A_1, A_2, \dots از اعداد طبیعی به صورت روبه‌رو تعریف شده‌اند. کدام یک از اعداد زیر عضو A_1 نیست؟ (توجه کنید که $(A \Delta B) = (A - B) \cup (B - A)$)

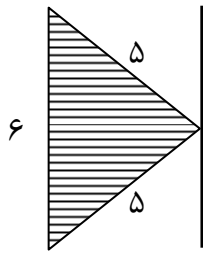
الف) ۶۹ (ب) ۷۰ (ج) ۷۱ (د) ۷۲ (ه) ۷۳



آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۲۸. چراغ‌قوه‌ای داریم که به دو باتری نیاز دارد. پنج باتری در اختیار داریم که دقیقاً سه تای آن‌ها سالم است. با دست‌کم چند بار امتحان کردن می‌توانیم حتماً چراغ‌قوه را روشن کنیم؟ (آخرین باری که چراغ‌قوه روشن می‌شود نیز یک بار امتحان کردن محسوب می‌شود).

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷



۲۹. مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده‌ی ۶ و طول ساق‌های ۵ را حول محوری که از رأس آن می‌گذرد و موازی قاعده‌ی آن است دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه قدر است؟

- الف) 12π ب) 48π ج) 64π د) 72π ه) 96π

۳۰. در یک جدول با ۷۲ سطر و ۱۴۰ ستون، مهره‌ای با این قاعده حرکت می‌کند که در هر حرکت ۳۰ واحد به سمت راست و ۲۰ واحد به سمت بالا می‌رود و وقتی به ضلع راست یا ضلع بالای جدول می‌رسد، حرکت را از ضلع مقابل ادامه می‌دهد. مثلاً اگر مهره در خانه‌ی ۱۲۰ افقی و ۷۰ عمودی باشد در حرکت بعد به خانه‌ی ۱۰ افقی و ۱۸ عمودی می‌رود. اگر این مهره از خانه‌ی گوشه‌ی پایین سمت چپ (۱ افقی و ۱ عمودی) شروع به حرکت کند، به چه نسبتی از خانه‌های جدول می‌تواند برسد؟

- الف) $\frac{1}{80}$ ب) $\frac{1}{40}$ ج) $\frac{1}{30}$ د) $\frac{1}{20}$ ه) $\frac{5}{12}$

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

حاصل ضرب اولین ستاره‌ی بالا در عدد ۹، رقم دهگان ۸ دارد و لذا این ستاره تنها می‌تواند ۹ باشد و $۹ \times ۹ = ۸۱$ ، پس اولین ستاره‌ی پایین رقم ۱ است. حاصل ضرب دومین ستاره‌ی بالا در ۹ به اضافه‌ی ۸ رقم دهگان ۲ دارد پس تنها ۲ می‌تواند باشد. در نتیجه دومین ستاره‌ی پایین ۶ است. حاصل ضرب سومین ستاره‌ی بالا در ۹، ۲۰ است پس سومین ستاره‌ی بالا برابر ۲ است و در نهایت آخرین ستاره‌ی بالا ضرب در ۹ به اضافه‌ی ۲، دهگان ۱ دارد پس ۱ است. در نتیجه آخرین ستاره‌ی پایین برابر یکان حاصل زیر یعنی ۱ است $۱۱ = ۲ + ۹ \times ۱$. در نتیجه حاصل ضرب برابر ۱۱۰۶۱ است که مجموع ارقامش برابر ۹ می‌باشد.

۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

۷۰۰۰ یک عامل ۷ دارد، پس حداقل یکی از این اعداد یک عامل ۷ باید داشته باشد پس هر کدام از آنها ۲ حالت دارد (یا ۷ دارد و یا ندارد). البته حالتی که هیچ‌کدام ۷ نداشته باشند پذیرفته نیست. در نتیجه به $۲^۳ - ۱$ طریق تعداد عوامل ۷ تعیین می‌گردد. ۷۰۰۰ سه عامل ۵ و ۲ دارد پس حداقل یکی از این اعداد سه عامل ۲ و ۵ دارد و حالتی که همه‌ی آنها کم‌تر از ۳ عامل ۲ و ۵ داشته باشند قابل قبول نیست و در نتیجه به $۳^۳ - ۳^۲ = ۳۷$ طریق تعداد عوامل ۲ و ۵ تعیین می‌گردد. بنابراین در کل تعداد حالت‌های ممکن برای چنین سه‌تایی‌هایی برابر $۳۷ \times ۳۷ \times ۷ = ۹۵۸۳$ است.

۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

ارتفاع مثلث بزرگ‌تر را رسم می‌کنیم و $h_۳$ می‌نامیم. نسبت $h_۳$ به $h_۱$ طبق قضیه‌ی تالس ۳ به ۷ است. دو مثلث متحدالرأس با هم متشابه هستند پس نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت اضلاع می‌باشد. بنابراین نسبت $h_۳$ به $h_۲$ برابر ۱۰ به ۶ است، و لذا نسبت $h_۳$ به $h_۱$ برابر ۷ به ۵ یعنی $۴/۱$ است.

۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون مثلث دو میانه‌ی برابر دارد، پس مثلث متساوی‌الساقین است و میانه به طول ۸ که ارتفاع آن نیز هست بر ضلع کوچک‌تر وارد شده است. فرض کنید G مرکز ثقل مثلث و A ، B و C سه رأس مثلث به ترتیب متناظر با میانه‌های به طول ۸، ۵ و ۵،

و M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد. از آن جایی که مرکز ثقل میانه‌ها را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس $GM = \frac{1}{3}$ و $GB = \frac{1}{3}$ چون GM عمود بر BC است، طبق قضیه‌ی فیثاغورس $MB^2 = GB^2 - GM^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9} = 4$ ، پس $MB = 2$ و $BC = 4$.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا به جای x^3 در این عبارت y را جای‌گذاری می‌کنیم و عبارت به صورت $(1 + y + y^2)^{50}$ در می‌آید که حاصل این عبارت از جمله‌های به صورت y^0, y^1, \dots, y^{100} تشکیل شده است که هیچ کدام ضریب صفر ندارند زیرا تمام جملات عبارت اولیه مثبت هستند، پس ۱۰۱ جمله با ضریب ناصفر داریم.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌توان نوشت $(\frac{1387!}{4} + 715) \times 2008 = 2^4 \times 251 \times (\frac{1387!}{4} + 715)$ که $\frac{1387!}{4} + 715$ نسبت به ۲ و ۲۵۱ اول است. به همین ترتیب $(\frac{1387!}{4} + 715) = 2 \times (\frac{1387!}{4} + 715)$. اگر $\frac{1387!}{4} + 715 = m$ مقسوم‌علیه داشته باشد، عبارت اول $m \times (1 + 1) \times (4 + 1) = 10m$ مقسوم‌علیه و عبارت دوم $m \times (1 + 1) = 2m$ مقسوم‌علیه خواهد داشت و بنابراین نسبت تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۵ است.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

مجموع دو عدد متمایز بین ۱ تا ۵ اعداد بین ۳ تا ۹ می‌تواند باشد. دقت کنید که برای مجموع‌های ۹، ۸، ۳ و ۴ تنها یک حالت وجود دارد، به طور مثال برای ۴ تنها یک حالت وجود دارد ($4 = 1 + 3$). اما برای عدد ۷ دو حالت وجود دارد ($7 = 1 + 6 = 2 + 5$). برای جای‌گذاری چهار رقم در جای‌گاه‌های اول، دوم، چهارم و پنجم $8 = 4 \times 2$ حالت وجود دارد (چهار حالت برای رقم اول، دو حالت برای رقم دوم و تنها یک حالت برای رقم‌های چهارم و پنجم). از بین اعداد ۱ تا ۵ یک عدد باقی می‌ماند که در جای‌گاه سوم قرار می‌گیرد. بنابراین برای هر یک از مجموع‌ها ۸ حالت وجود دارد و در کل $24 = 3 \times 8$ عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت. (دقت کنید که برای سه مجموع ۵، ۶ و ۷ دو حالت وجود دارد که مجموع برابر آن عدد شود).

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

وقتی هر کدام از نفرات یک دور بازی خود را انجام دادند، هر نفر دو مهره به نفر سمت راستش داده و یک مهره از نفر سمت راستش و یک مهره‌ی دیگر از نفر دوم سمت راستش گرفته است، پس تعداد مهره‌های هیچ‌کس تغییر نکرده است. بنابراین بعد از ۸۰ مرحله بازی هم تعداد مهره‌های همه برابر ۱۰۰ می‌ماند. حال در هفت دور بازی باقی‌مانده، نفر هشتم تنها در بازی نفر هفتم دخیل می‌شود و از این بازی یکی از دو مهره‌ای که نفر هفتم از نفر شماره‌ی شش می‌گیرد به او می‌رسد، پس نفر هشتم دارای ۱۰۱ مهره می‌شود.

۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

دونده‌ای که به محیط دایره‌ی بزرگ‌تر نزدیک‌تر است، محیط بیش‌تری را طی می‌کند پس باید نقطه‌ی پایان نزدیک‌تری داشته باشد و دونده‌ای که به محیط دایره کوچک‌تر نزدیک‌تر است باید نقطه‌ی پایان دورتری داشته باشد.

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$M - G = \frac{1}{4}(a + b - 2\sqrt{ab}) = \frac{1}{4}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

و با فرض $b \geq a$ خواهیم داشت:

$$|a - b| = b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$$

در نهایت $k \geq \frac{M-G}{b-a} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ اگر $a = 0$ در نظر بگیریم $k \geq \frac{1}{4}$ ، در نتیجه کم‌ترین مقدار k حداقل $\frac{1}{4}$ است. ضمناً

اگر k برابر $\frac{1}{4}$ باشد، از آن‌جا که $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ نامساوی را برقرار می‌کند. پس کم‌ترین مقدار ممکن برای k ، همان $\frac{1}{4}$ است.

۱۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

از جست‌وجوی الگو استفاده کنید. به جای تا کردن کاغذ خطوطی که از روی آن‌ها در هر مرحله کاغذ تا می‌شود را رسم کنید و به جای سوراخ کردن کاغذ جاهایی در کاغذ که سوراخ ایجاد می‌شوند را علامت بزنید. به این ترتیب، بعد از گذشت مرحله‌ی اول چهار نقطه‌ی گوشه‌ای کاغذ علامت خورده می‌شوند، با گذشت دو مرحله در مرحله‌ی سوم نقطه‌ی وسط هر ضلع و مرکز مربع هم علامت می‌خورند یعنی تعداد نقطه‌های علامت خورده به ۹ تا می‌رسد. با گذشت دو مرحله‌ی بعدی نقطه‌ی وسط هر ضلع و هم‌چنین مرکز چهار مربع کوچک مرحله‌ی سوم علامت می‌خورند. به همین ترتیب می‌توان حدس زد که در مرحله‌ی $2n + 1$ ام (یعنی در یک مرحله‌ی فرد)، k^2 نقطه‌ی علامت‌خورده داشته باشیم در مرحله‌ی فرد بعدی (مرحله‌ی $2n + 3$ ام) $(2k - 1)^2$

نقطه‌ی علامت‌خورده داریم. پس در مرحله‌ی ۱۱ام $۳۳^۲$ نقطه‌ی علامت‌خورده خواهیم داشت که چون نقاط روی مرز مد نظر ما نیستند، تنها $۳۱^۲ = ۹۶۱$ نقطه‌ی علامت‌خورده داریم. (اثبات این حدس هم می‌تواند به کمک استقرا انجام شود).

۱۲.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

عبارت گزینه‌ی (الف) درست است، زیرا اگر $A^m = B^n$ و $B^p = C^q$ ، آن‌گاه $A^{mp} = B^{np} = C^{qn}$ پس A و C نیز هم‌توانند.

عبارت گزینه‌ی (ب) درست است، زیرا اگر $A^n = I^m = I$ در نتیجه اگر $n = ۱$ که $A = I$ وارون‌پذیر است و اگر $n > ۱$ ، $I = A^n = A \times A^{n-1}$ پس A وارون A است و A وارون‌پذیر است.

عبارت گزینه‌ی (ج) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

عبارت گزینه‌ی (ه) درست است، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^۴ = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^۲$$

بنابراین عبارت گزینه‌ی (د) غلط است. اگر ماتریسی با ماتریس همانی هم‌توان باشد باید عدد طبیعی n موجود باشد که وقتی

آن ماتریس به توان n می‌رسد برابر ماتریس همانی شود. اما می‌توان به راحتی دید که اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ به توان n برسد

روی قطر آن اعداد ۱ و ۲^n خواهند بود، پس هیچ توانی از این ماتریس برابر همانی نمی‌شود.

توضیح: می‌توان استدلال دیگری را نیز برای اشتباه بودن عبارت گزینه‌ی (د) به کمک دترمینان ارائه کرد. اگر $A^m = B^n$

(یعنی دو ماتریس هم‌توان باشند). $\det(A)^m = \det(B)^n$. اما دترمینان ماتریس همانی یک است ولی دترمینان $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n$

برابر 2^n است. پس این دو ماتریس هم‌توان نیستند.

۱۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

۱. زیرا اگر $a \neq 1$ ، $a \neq 1$ باشد آنگاه $b = c$ که طبق فرض صورت سؤال درست نیست.

اگر $a \times b = \overline{xy}$ و $a \times c = \overline{yx}$ (دقت کنید که $x \neq y$ ، زیرا اگر این دو برابر باشند مجدداً b و c برابر خواهند شد).

آنگاه $a \times b + a \times c = 11x + 11y = 11(x + y)$ بنابراین $11 \mid a(b + c)$ و چون a یک‌رقمی است و نمی‌تواند بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، پس $11 \mid b + c$. با این توصیفات خواهیم داشت:

$$(b, c) \in \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\}$$

از طرف دیگر $a(b - c) = a \times b - a \times c = 9(x - y)$ بنابراین $9 \mid a(b - c)$

حال روی حالت‌های مختلف a بحث می‌کنیم.

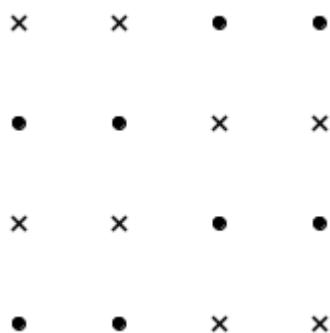
اگر $a = 9$ باشد تمامی حالت‌های بالا برای زوج (b, c) امکان دارند.

اگر $a = 3$ و یا $a = 6$ آنگاه باید $b - c$ بر ۳ بخش‌پذیر شود که بین حالت‌های بالا تنها $(4, 7)$ و $(7, 4)$ این خاصیت را دارند.

و در بقیه حالات باید $9 \mid b - c$ که هیچ b و c تک‌رقمی نابرابر چنین شرایطی ندارند. بنابراین کل حالات ۱۲ تا می‌شود.

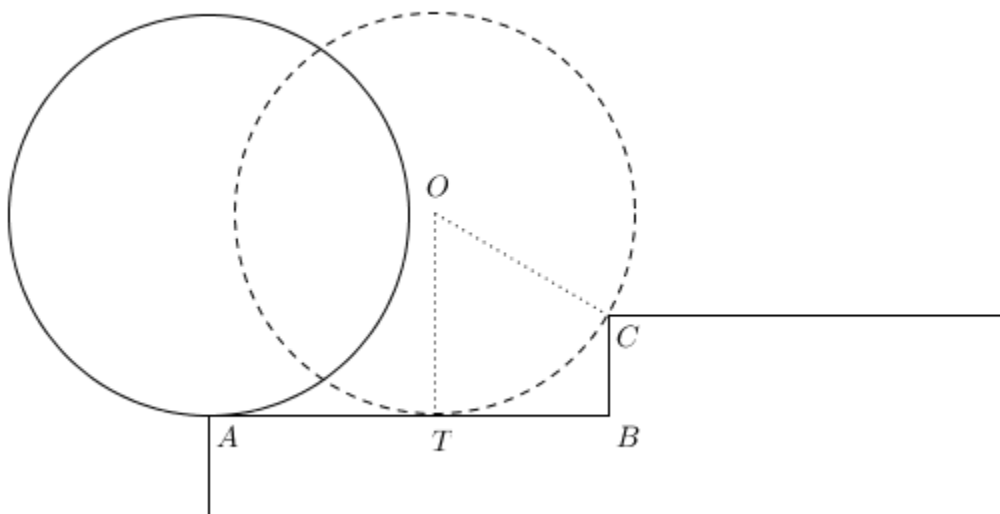
۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که اگر از یک سطر بیش از دو نقطه انتخاب کنیم، قطعاً سه نقطه‌ی هم‌خط یافت می‌شوند و بنابراین تعداد نقطه‌ها نمی‌تواند از ۸ تا بیشتر باشد. برای ۸ نقطه هم اگر نقاطی که در شکل زیر با \times مشخص شده‌اند را انتخاب کنیم، خاصیت مسئله را دارا هستند.



۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا چرخ شروع به غلطیدن روی پله‌ی اول می‌کند تا نقطه‌ای از آن به پله‌ی دوم برخورد کند. (شکل زیر)



در این صورت زاویه‌ای که چرخ به رادیان می‌چرخد، برابر طول AT تقسیم بر شعاع دایره است. زیرا طول یک کمان از دایره برابر زاویه‌ی آن به رادیان در شعاع دایره است و در این جا طول کمانی که یک نقطه‌ای از دایره می‌چرخد برابر طول AT است.

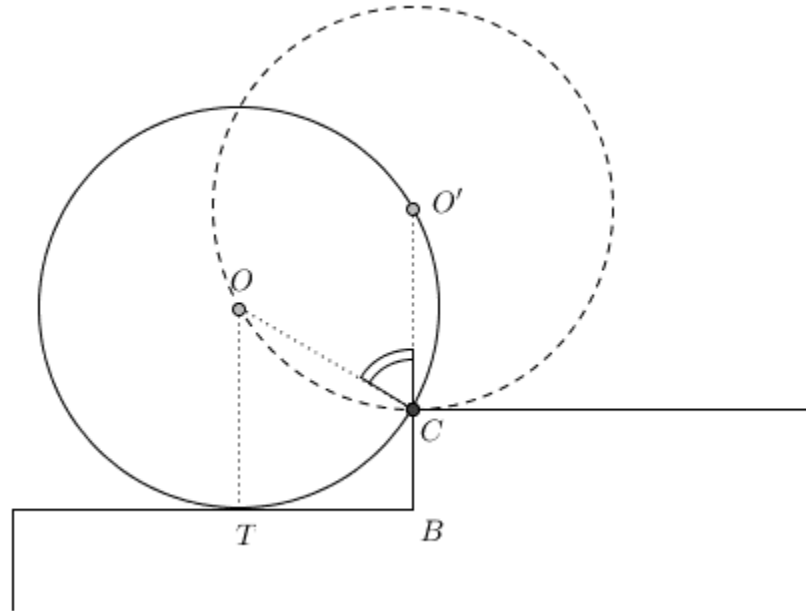
حال دقت کنید که $AT = AB - BT = 2 - BT$. پس کافی است طول BT را پیدا کنیم.

$$BT^2 = OC^2 - (OT - CB)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow BT = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AT = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

دقت کنید که چون شعاع دایره یک است، زاویه‌ی طی شده هم برابر همین مقدار $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

حال چرخ حول نقطه‌ی C باید بچرخد تا به پله‌ی بالاتر منتقل شود. مقدار این چرخش برابر زاویه‌ی $\angle OCO'$ است.

$$\sin(\angle OCO') = \frac{BT}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle OCO' = \frac{\pi}{3}$$



این فرآیند باید یک بار دیگر برای پله‌ی دوم هم انجام شود. پس چرخ در مجموع $2(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}) = 4 - \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$ زاویه می‌چرخد.

۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

از هشت رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_8 - x_7$$

این مقدار مشترک را d می‌نامیم. پس $x_n = x_1 + (n - 1)d$.

$$x_8 + x_1 = 2x_1 + 7d = 22 \Rightarrow x_8 = x_1 + 7d = 11$$

توضیح: با راه‌حلی که ارائه شد، به رابطه‌ی آخر صورت سؤال نیازی نیست. اما به کمک این رابطه و رابطه‌ای که در بالا داریم می‌توان مقدار x_1 و d را به تنهایی محاسبه کرد. کاری که در راه‌حل بالا انجام نشد.

۱۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر $m, n \leq 8$ تعداد مستطیل های به طول m و عرض n این گونه تعیین می گردد که از ضلع عمودی مستطیل 8×8 دو سطر که فاصله ی آنها به اندازه ی m باشد و از ضلع افقی دو ستون که فاصله ی آنها از یکدیگر به اندازه ی n باشد انتخاب می کنیم که به ترتیب $9 - m$ و $9 - n$ حالت دارد. پس تعداد مستطیل ها با این ابعاد برابر $(9 - m)(9 - n)$ و مساحت هر کدام نیز برابر mn است پس مجموع مساحت کل این مستطیل ها برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 (9 - m)(9 - n)mn &= 81 \left(\sum_{m=1}^8 m \right)^2 - 18 \left(\sum_{m=1}^8 m \right) \left(\sum_{m=1}^8 m^2 \right) + \left(\sum_{m=1}^8 m^2 \right)^2 \\ &= 81 \times 36^2 - 18 \times 36 \times 204 + 204^2 = \\ &= 104976 - 132192 + 41616 = 14400. \end{aligned}$$

۱۹. گزینه ی (الف) صحیح است.

برای بدست آوردن سه رقم سمت راست، باقی مانده ی این عدد در تقسیم بر 1000 را بدست می آوریم.

$$21^{64} = (20 + 1)^{64} = \sum_{i=0}^{64} \binom{64}{i} 20^i = 1 + 64 \times 20 + \frac{64 \times 63}{2} \times 20^2 + 20^3 (\dots) = 807681 + 20^3 (\dots)$$

پس سه رقم سمت راست برابر 681 است.

۲۰. گزینه ی (ب) صحیح است.

اگر تصویر بر روی صفحه ی $x - y$ شکل سمت چپ باشد، جسم می تواند از لایه های 5 تایی که روی سایه هایشان قرار گرفته اند تشکیل شده باشد، اما چون تصویر جسم بر روی صفحه ی عمود بر این صفحه به صورت شکل 2 است. بنابراین باید 2 لایه باشد که لایه ی اول از 5 و لایه ی دوم از 3 مکعب 1×1 تشکیل شده است که در مجموع 8 مکعب می شوند.

۲۱. گزینه ی (الف) صحیح است.

لم اول. قرینه ی نقطه ی (a, b) نسبت به خط $y + 5x = 0$ ، نقطه ی $(a, b) - 2(5, 1) \frac{5a + b}{26}$ خواهد بود.

روند اثبات. ابتدا معادله ی خط گذرنده از نقطه ی (a, b) و عمود بر خط $y + 5x = 0$ را می یابیم. قرینه ی نقطه ی (a, b) نسبت به محل برخورد این دو خط همان نقطه ی مورد نظر خواهد بود.

بنا بر لم بالا، قرینه‌ی نقطه‌ی $(a, 0)$ نسبت به این خط نقطه‌ی $(-\frac{24}{36}a, -\frac{10}{36}a)$ است و لذا قرینه‌ی خط $y = 0$ نسبت به این خط، $y = \frac{10}{36}x$ خواهد بود. حال دقت کنید که خط $y = \frac{10}{36}x$ ، نمودار تابع $y = x^3$ را در سه نقطه قطع می‌کند و بنابراین قرینه‌ی این نمودار نسبت به $y + 5x = 0$ و خط $y = 0$ در سه نقطه متقاطع هستند. لذا اگر قرینه‌ی این نمودار، خود نمودار تابع باشد، تابع جدید نمی‌تواند یک به یک و صعودی یا نزولی باشد.

از طرف دیگر برای هر عدد حقیقی k' ، معادله‌ی $x^3 = \frac{10}{36}x + k'$ جواب حقیقی دارد. این یعنی تمام خطوط به شکل $y = \frac{10}{36}x + k'$ و منحنی $y = x^3$ متقاطع هستند. بنابراین قرینه‌ی نمودار $y = x^3$ هر خط افقی را در حداقل یک نقطه قطع می‌کند و این یعنی قرینه‌ی این نمودار اگر تابع باشد، تابعی پوشا است.

با استدلالی شبیه به آنچه در بالا آورده شد قرینه‌ی خط $x = 0$ نسبت به خط $y + 5x = 0$ ، خط $y = -\frac{24}{10}x$ است. با توجه به نکته‌ای که در بالا توضیح داده شد، قرینه‌ی خطوط به شکل $x = k$ به صورت $y = -\frac{24}{10}x + k'$ در می‌آیند. حال برای این که نشان دهیم قرینه‌ی نمودار $y = x^3$ خود نمودار یک تابع است، ادعا می‌کنیم قرینه‌ی این نمودار هر خط به صورت $x = k$ را در دقیقاً یک نقطه قطع می‌کند. به طور معادل بعد از قرینه کردن نسبت به خط $y + 5x = 0$ ، نمودار $y = x^3$ هر خط به صورت $y = -\frac{24}{10}x + k'$ را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند و این هم یعنی معادله‌ی $x^3 + \frac{24}{10}x - k' = 0$ برای هر عدد حقیقی k' دقیقاً یک جواب حقیقی دارد. اولاً دقت کنید که این یک معادله‌ی درجه سه است که حداقل یک جواب حقیقی دارد. ثانیاً می‌توان به صورت زیر نشان داد تابع $P(x) = x^3 + \frac{24}{10}x - k'$ یک به یک است و بنابراین این معادله تنها یک جواب می‌تواند داشته باشد.

$$\begin{aligned} P(x_1) = P(x_2) &\Rightarrow x_1^3 + \frac{24}{10}x_1 - k' = x_2^3 + \frac{24}{10}x_2 - k' \\ &\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + \frac{24}{10}x_1 - \frac{24}{10}x_2 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \frac{24}{10}) = 0 \end{aligned}$$

اما $0 < \frac{24}{10}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \frac{24}{10}) = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{8} > 0$ پس $x_1 = x_2$ و لذا $P(x)$ یک به یک است.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دو رقم سمت راست $۲^{۱۰۰}$ را به وسیله‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} ۲^{۱۰۰} &\equiv ۱۰۲۴^{۱۰} \equiv ۲۴^{۱۰} \equiv (۲۰ + ۴)^{۱۰} \equiv ۴^{۱۰} + ۲۰ \times ۴^9 \times \binom{۱۰}{۱} + ۴۰۰(\dots) \\ &\equiv ۲^۲ \equiv ۱۰۲۴^۲ \equiv ۲۴^۲ \equiv ۵۷۶ \equiv ۷۶ \end{aligned}$$

(که منظور از \equiv ، هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ است.)

حال با توجه به این که دو رقم سمت راست ۷۶ است، جمع کردن $۲^{۱۰۰}$ با اعداد حاضر در گزینه‌های سؤال در ارقام سوم به بعد $۲^{۱۰۰}$ تأثیری ندارد، پس باید مجموع دو رقم سمت راست گزینه‌ها را بیابیم.

مجموع دو رقم سمت راست	دو رقم سمت راست	
۱۵	۹۶	گزینه‌ی (الف)
۱۶	۸۸	گزینه‌ی (ب)
۱۲	۸۴	گزینه‌ی (ج)
۸	۸۰	گزینه‌ی (د)
۱۴	۷۶	گزینه‌ی (ه)

پس بیش‌ترین مجموع ارقام مربوط به گزینه‌ی (ب) است.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

اولاً واضح است که ۱ باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد. حال از بین ۸ عدد باقی‌مانده، ۳ عدد را به $۵۶ = \binom{۸}{۳}$ برای سه جای‌گاه سمت چپ انتخاب می‌کنیم. کوچک‌ترین عدد بین این سه عدد باید در پایین‌ترین خانه قرار بگیرد و دو عدد دیگر به دو حالت در خانه‌ی بالایی جای می‌گیرند. حال از بین ۵ عدد دیگر که باید در ۵ دایره‌ی سمت راست جای بگیرند، کوچک‌ترین عدد در پایین‌ترین خانه قرار می‌گیرد و می‌توان به ۴ طریق یکی از ۴ عدد باقی‌مانده را برای خانه‌ی تنهای ردیف سوم انتخاب کرد. ۳ عدد باقی‌مانده هم شبیه بالا به دو حالت در سه دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند. (عدد کوچک‌تر در دایره‌ی پایین‌تر و دو عدد دیگر به دو حالت در دو دایره‌ی بالاتر) پس در کل این عمل به $۸۹۶ = ۵۶ \times ۲ \times ۴ \times ۲$ طریق امکان دارد.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اولاً a و b هر دو صحیح هستند پس 2^{b-a} هم صحیح است و لذا $b \geq a$. اگر $b = a$ ، باید $b^2 = b + 1$ که با توجه به تفاوت زوجیت دو طرف برای هیچ عدد صحیحی امکان ندارد. بنابراین $b - a \geq 1$ و لذا 2^{b-a} زوج است. حال با توجه به این زوجیت a و b یک‌سان خواهد بود و لذا $b - a = 2^k$ برای یک عدد طبیعی k .

$$b^2 = a + 2^{2k} \Rightarrow a = (b - 2^k)(b + 2^k)$$

دقت کنید از آن‌جا که a نامنفی است، $b \geq 2^k$. حال اگر $b > 2^k$ ، آن‌گاه $a = (b + 2^k)(b - 2^k) \geq b > a$ که امکان ندارد، پس $b = 2^k$ و بنابراین $a = 0$. حال معادله به صورت $b^2 = 2^b$ در می‌آید و معادلاً $2^{2k} = 2^{2^k}$. از رابطه نتیجه می‌شود که $k = 2^{k-1}$. اگر $k > 3$ به سادگی با استقرا می‌توان نشان داد که $2^{k-1} > k$ و $k = 0, 1$ جواب این معادله هستند که منجر به $b = 2, 4$ می‌شوند. پس این معادله دارای دو جواب $(0, 2)$ و $(0, 4)$ است.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم نقطه‌ی P باید مرکز ارتفاعی این مثلثی باشد. به برهان خلف فرض کنید این چنین نباشد و برای مثال نقطه‌ی A روی خط عمود بر BC که از P می‌گذرد قرار نداشته باشد. دو نقطه روی خط عمود بر BC و گذرا از P وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها تا P برابر γ است. این دو نقطه را A_1 و A_2 می‌نامیم. به علاوه فرض کنید l_1 و l_2 به ترتیب خط‌های موازی با BC گذرا از A_1 و A_2 باشند. به وضوح دایره‌ی به شعاع γ به مرکز P بین این دو خط قرار دارد و بنابراین دو خط l_1 و l_2 در دو طرف نقطه‌ی A که روی دایره است قرار دارند. بنابراین با توجه به این که BC هم با این دو خط موازی است نقطه‌ی A بین یکی از این دو خط (مثلاً l_1) و خط BC قرار دارد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که فاصله‌ی BC با خط l_1 (ارتفاع نظیر A_1 از مثلث A_1BC) بیش‌تر از فاصله‌ی نقطه‌ی A با BC (ارتفاع نظیر A از مثلث ABC) است و چون قاعده‌ی هر دو مثلث BC است، مساحت مثلث اول بیش‌تر است که با بیش‌ترین بودن مساحت مثلث ABC تناقض دارد. بنابراین باید P روی ارتفاع نظیر A باشد. با استدلال مشابه P باید روی دو ارتفاع دیگر هم قرار داشته باشد و بنابراین مرکز ارتفاعی مثلث است.

حال اگر A' و C' به ترتیب پای ارتفاع‌های نظیر A و C باشند، می‌دانیم چهارضلعی $AC'A'C$ محاطی است و لذا

$$PC' \cdot PC = PA' \cdot PA \Rightarrow \frac{PC'}{PA'} = \frac{PA}{PC} = \frac{\gamma}{14} = \frac{1}{2}$$

پس نسبت مورد نظر برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin x + \sin y = -\sin z \\ \cos x + \cos y = -\cos z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y = \sin^2 z \\ \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y = \cos^2 z \end{cases} \\ &\Rightarrow 2 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 4 \\ &\Rightarrow \cos(x - y) = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

(ابتدا دو طرف رابطه‌ها را به توان دو رسانده و سپس دو رابطه را با هم جمع کرده‌ایم.)

حال از آن جا که $x, y \in (-\pi, \pi]$ نتیجه می‌گیریم $x - y \in (-2\pi, 2\pi)$. ضمناً $\cos(x - y) = \frac{-1}{2}$ و بنابراین

$$x - y \in \left\{ \frac{\pm 2\pi}{3}, \frac{\pm 4\pi}{3} \right\}. \text{ با استدلال کاملاً مشابه برای دیگر متغیرهای درمی‌یابیم } y - z, z - x \in \left\{ \frac{\pm 2\pi}{3}, \frac{\pm 4\pi}{3} \right\}$$

از آن جا که $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ با اندکی بررسی درمی‌یابیم تنها حالات ممکن برای این سه عدد این است که دو تا از آنها برابر $\frac{2\pi}{3}$ و یکی $\frac{-4\pi}{3}$ و در حالت دیگر دو تا برابر $\frac{-2\pi}{3}$ و یکی برابر $\frac{4\pi}{3}$ باشد.

حال با اندکی آزمون و خطا و با توجه به رابطه‌ی سوم (که تا کنون استفاده نشده) می‌توان تمام جواب‌های مسأله را پیدا کرد اما خواسته‌ی مسأله مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ است. بنابراین چنین کاری لازم نیست، بل که می‌توانیم با همین اطلاعات مقدار خواسته شده را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} x + y + z = 0 &\Rightarrow (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

$$\text{از سوی دیگر } (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8\pi^2}{9}$$

با الگویی و بررسی مقادیر اولیه برای A_n می توان حدس زد که

$$A_n = \{n, n-1, n-3, n-4, \dots\}$$

یعنی اعداد کوچکتر از n مثل k که باقی مانده $n-k$ بر ۳ برابر دو باشد در A_n نیستند. این ادعا را می توان به کمک

استقرا ثابت کرد. فرض کنید حکم برای A_{m-1} و A_{m-2} برقرار باشد. در این صورت برای A_m

اگر $k < m$ و (به پیمانه ۳) $m-k \equiv 0$ ، در صورت $k \notin A_{m-1}$ ولی $k \in A_{m-2}$ بنابراین نتیجه می گیریم که

$$k \in (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup \{m\} = A_m$$

اگر $k < m$ و (به پیمانه ۳) $m-k \equiv 1$ ، در صورت $k \in A_{m-1}$ ولی $k \notin A_{m-2}$ بنابراین نتیجه می گیریم که

$$k \in (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup \{m\} = A_m$$

اگر $k < m$ و (به پیمانه ۳) $m-k \equiv 2$ ، در صورت $k \in A_{m-1}$ و ضمناً $k \in A_{m-2}$ بنابراین نتیجه می گیریم که

$$k \notin (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup \{m\} = A_m$$

و اگر $k = m$ به وضوح طبق تعریف $k \in (A_{m-1} \Delta A_{m-2}) \cup \{m\} = A_m$

پس حکم به طور کامل ثابت می شود. تنها باید اعداد ابتدایی را به عنوان پایه ی استقرا بررسی کرد.

حال برای $n = 100$ ، تنها $29 = 100 - 71$ دارای باقی مانده ی ۲ در تقسیم به ۳ است و بنابراین تنها ۷۱ در A_{100} ظاهر

نمی شود.

۲۸. گزینه ی (ب) صحیح است.

باتری ها را از ۱ تا ۵ شماره گذاری می کنیم. ابتدا جفت های $\{1, 2\}$ و $\{4, 5\}$ را امتحان می کنیم اگر سالم بودند که چراغ قوه

روشن شده است و به هدف خود رسیده ایم. اگر نه پس قطعاً باتری شماره ۳ سالم است و ضمناً چون از بین هر کدام از این

جفت ها حتماً یکی خراب بوده و فقط ۲ باتری خراب داریم در هر جفت یک باتری خراب و یک باتری سالم است. در نهایت اگر

جفت $\{1, 3\}$ و $\{2, 3\}$ را امتحان کنیم حتماً در یکی از این دو امتحان چراغ قوه روشن می شود (چون یکی از ۱ و ۲ حتماً سالم

است). پس در مجموع با چهار بار امتحان حتماً می توان چراغ قوه را روشن کرد.

ضمناً ادعا می کنیم با سه بار امتحان لزوماً چراغ قوه روشن نمی شود. زیرا دقت کنید که حتماً باتری ای یافت می شود که در حداقل

دو امتحان در چراغ قوه قرار داده شده باشد. (در غیر این صورت باید حداقل شش باتری داشته باشیم). فرض کنید این باتری

مشترک در امتحان‌های اول و دوم آمده باشد. در این صورت اگر این باتری مشترک و یکی از باتری‌های امتحان سوم خراب باشند، چراغ قوه روشن نمی‌شود.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

رأس مثلث را A می‌نامیم از A عمودی بر محور رسم می‌کنیم که چون ضلع قاعده و محور موازی‌اند این خط بر قاعده نیز عمود است و آن را نصف می‌کند (مثلث متساوی‌الساقین است) پس می‌توان این‌گونه تصور کرد که حجم مورد نظر از یک استوانه که ارتفاع آن ۶ و شعاع قاعده‌ی آن برابر $4 = \sqrt{5^2 - 3^2}$ است تشکیل شده که از آن دو مخروط به ارتفاع ۳ و شعاع برابر شعاع استوانه بیرون آورده شده است. حال حجم استوانه برابر $96\pi = 6 \times 4^2 \pi$ و حجم هر مخروط برابر $16\pi = 3 \times \frac{1}{3} 4^2 \pi$ بنابراین حجم شکل حاصل برابر است با $64\pi = 96\pi - 2 \times 16\pi$.

۳۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

دقت کنید که این مهره به هر تعداد دل‌خواهی حرکت می‌کند ولی تعداد خانه‌هایی که از آن‌ها می‌گذرد محدود است، پس زمانی می‌رسد که از خانه‌ای که قبلاً از آن گذشته عبور می‌کند. حال خانه‌ای که مهره بعد از n امین حرکتش در آن قرار می‌گیرد را A_n می‌نامیم. توضیحات بالا نشان می‌دهد می‌توان دو عدد طبیعی $k < l$ یافت که $A_k = A_l$. از آن‌جا که می‌توان حرکت مهره را در جهت عکس انجام داد (۳۰ خانه به سمت چپ و ۲۰ خانه به سمت پایین حرکت کرد). اگر $A_k = A_l$ باید $A_{k-1} = A_{l-1}$ و به همین ترتیب $A_{k-2} = A_{l-2}$ و ... تا این که $A_{k-l} = A_l$. یعنی زمانی می‌رسد که مهره از خانه‌ی اولیه عبور می‌کند. حال m را کوچک‌ترین عدد طبیعی بگیرید که $A_m = A_l$ در این صورت باید A_0, A_1, \dots, A_{m-1} متمایز باشند زیرا در غیر این صورت، مهره زودتر از مرحله‌ی m ام هم به خانه‌ی اولیه‌ی خود برگشته است که با فرض ما مبنی بر کوچک‌ترین بودن m تناقض دارد. حال دقت کنید که در این شرایط کل خانه‌هایی که مهره از آن‌ها عبور می‌کند همین m خانه هستند. پس جواب مسئله $\frac{m}{14 \times 72}$ است و هدف باید پیدا کردن m باشد.

با توجه به نحوه‌ی حرکت مهره بعد از مرحله‌ی n ام مهره در خانه‌ای که قرار دارد که شماره‌ی ستونش باقی‌مانده‌ی تقسیم $30n + 1$ بر 140 و شماره‌ی سطرش باقی‌مانده‌ی تقسیم $20n + 1$ بر 72 باشد. بنابراین هدف ما یافتن کوچک‌ترین عدد طبیعی m است که $30m + 1 \equiv 1 \pmod{140}$ و $20m + 1 \equiv 1 \pmod{72}$ (به پیمانه‌ی ۷۲) باشد.

$$\left. \begin{array}{l} 140 \mid 30m \Rightarrow 14 \mid 3m, (14, 3) = 1 \Rightarrow 14 \mid m \\ 72 \mid 20m \Rightarrow 18 \mid 5m, (18, 5) = 1 \Rightarrow 18 \mid m \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \times 7 \times 9 = [14, 18] \mid m$$

و چون m کمترین مقدار طبیعی ممکن است $m = 2 \times 7 \times 9$ و بنابراین مهره به $\frac{1}{80}$ از خانه‌های $\frac{m}{140 \times 72} = \frac{2 \times 7 \times 9}{140 \times 72} = \frac{1}{80}$ جدول می‌تواند برسد.