



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

۱. همه‌ی زاویه‌های مثلثی از 59° درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه درباره‌ی این مثلث همواره صحیح است؟
 (۱) یک زاویه‌ی منفرجه دارد. (۲) یک زاویه‌ی 60° درجه دارد. (۳) قائم‌الزاویه است.
 (۴) متساوی‌الاضلاع است. (۵) همه‌ی زاویه‌هایش از 62° درجه کوچک‌ترند.

۲. چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بیش از ۱۵ نداشته باشد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش پذیر نباشد.

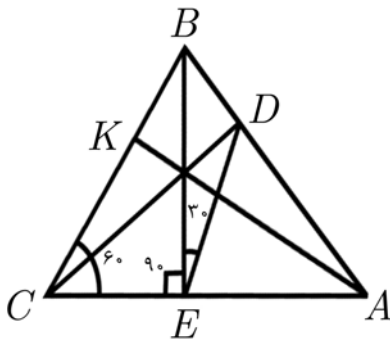
(۱) ۶۴ (۲) ۷۲۰ (۳) ۷۲۹ (۴) ۲۱۸۷ (۵) ۴۰۹۶

۳. معادله‌ی $1 = |a + 3| - 2$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۸ (۵) جواب ندارد.

۴. مجموع ارقام کوچک‌ترین عددی که حاصل ضرب ارقام آن برابر ۱۰۰۰ است، چیست؟

(۱) ۱۴ (۲) ۲۱ (۳) ۲۳ (۴) ۲۶ (۵) ۳۰



۵. در شکل روبه‌رو BE بر AC عمود است. اگر $\angle BED = 30^\circ$ و $\angle ACB = 60^\circ$ باشد، نسبت BK به BC چند است؟ (شکل دقیق نیست.)

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۵) $\frac{1}{2}$

۶. عددی دو رقمی در نظر بگیرید. حاصل ضرب ارقامش را محاسبه کنید. برای عدد به‌دست آمده همین کار را انجام دهید و این کار را آنقدر تکرار کنید تا به عددی یک‌رقمی برسید. با شروع از چند عدد دورقمی به عدد ۲ می‌رسید؟

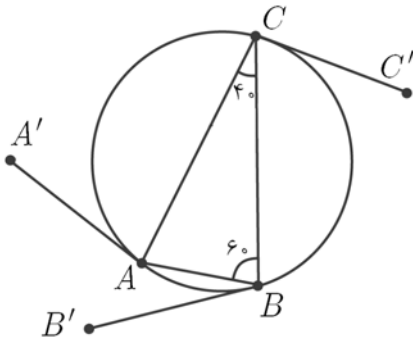
(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) ۱۰

۷. تمام اعداد طبیعی ۵ رقمی که شامل ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ و بدون رقم تکراری هستند را از کوچک به بزرگ مرتب کرده‌ایم. 32451 چندمین عدد است؟

(۱) ۴۶ (۲) ۴۹ (۳) ۵۲ (۴) ۵۵ (۵) ۵۸



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور



۸. در مثلث ABC ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 40^\circ$. AA' ، BB' و CC' هم‌طول و در یک جهت بر دایره محیطی ABC مماسند. زاویه‌ی $\angle B'A'C'$ چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰ (۵) ۱۲۰

۹. عددی طبیعی را مثلثی گوئیم هر گاه بتوان به ازای یک عدد طبیعی n آن را به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ نوشت. چند

زوج (a, b) از اعداد مثلثی وجود دارد که $a - b = 101$ ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۱۰. بزرگ‌ترین ضریب در بسط دو جمله‌ای $(1+x)^{100}$ چند رقم دارد؟

- (۱) کم‌تر از ۱۵ (۲) بین ۱۵ تا ۲۵ (۳) بین ۲۵ تا ۳۵ (۴) بین ۳۵ تا ۴۵ (۵) بیش‌تر از ۴۵

۱۱. یک عدد اول را «بسیار اول» گوئیم اگر هر قطعه از ارقام متوالی آن نیز عددی اول به وجود آورند. اعداد بسیار اول دورقمی عبارتند از ۲۳، ۳۷، ۵۳ و ۷۳. چند عدد سه‌رقمی بسیار اول وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۱۲. مجلس هشتم ۲۸۵ کرسی دارد. اگر سه حزب در انتخابات شرکت کنند به چند حالت ممکن است هیچ حزبی اکثریت مطلق را به دست نیاورد؟ (یعنی تعداد نمایندگان منتخب از آن حزب بیش از نصف نباشد.)

- (۱) ۱۰۱۵۳ (۲) ۱۰۲۰۱ (۳) ۱۱۳۲۵ (۴) ۱۱۴۰۰ (۵) ۱۱۷۱۵

۱۳. دستگاه معادلات روبه‌رو در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - 1 = yz \\ y - 1 = zx \\ z - 1 = xy \end{cases}$$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) جواب ندارد.



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

۱۴. به چند طریق می‌توان ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سفید را در یک ردیف قرار داد که دقیقاً سه بلوک سیاه داشته باشد؟
یک بلوک سیاه چند مهره‌ی سیاه کنار هم است که در دو طرف آن‌ها مهره‌ی سیاه دیگری نباشد.



مثلاً آرایش روبه‌رو دو بلوک سفید و سه بلوک سیاه دارد.

- (۱) ۵۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۴۰۰ (۵) ۵۴۰

۱۵. بیش‌ترین تعداد عامل ۲ در مجموع پنج عدد طبیعی که ضرب آن‌ها 2^{1386} باشد چند است؟

- (۱) ۲۷۶ (۲) ۲۷۷ (۳) ۲۷۸ (۴) ۲۷۹ (۵) ۲۸۰

۱۶. نقطه‌ی A روی دایره‌ی C ثابت است و نقطه‌های M و N طوری روی دایره حرکت می‌کنند که مقدار زاویه‌ی $\angle MAN$ همواره ۳۳ درجه است. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) همه‌ی خطوط MN از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند.
(۲) همه‌ی خطوط MN به دایره‌ی ثابتی مماس هستند.
(۳) تفاضل طول AM و AN مقداری ثابت است.
(۴) نسبت طول AM و AN مقداری ثابت است.
(۵) اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی مثلث AMN عددی ثابت است.

۱۷. بیش‌ترین مقدار $ab + bc + cd$ برای $a, b, c, d \geq 0$ با شرط $a + b + c + d = 1$ چند است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{9}$ (۵) $\frac{3}{16}$

۱۸. الاغی می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود ولی دقیقاً در وسط راه دریاچه‌ای دایره‌ای شکل به قطر دو کیلومتر قرار دارد. اگر فاصله‌ی A و B چهار کیلومتر باشد کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟



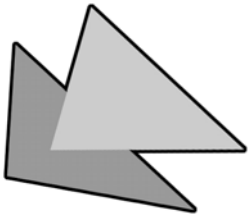
- (۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۲) $2 + \pi$ (۳) ۵ (۴) $2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ (۵) ۶

۱۹. تعداد مثلث‌های غیرهم‌نهشت که رئوسشان از بین رئوس ده ضلعی منتظم انتخاب شده باشند برابر است با

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵) ۱۰



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. دو مثلث کاغذی را روی هم قرار می‌دهیم. مرز بیرونی شکلی که به وجود می‌آید چند ضلع نمی‌تواند داشته باشد؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲ (۵)

۲۱. شش جعبه خالی با اندازه‌های مختلف داریم. ابعاد جعبه‌ها طوری است که درون هر جعبه می‌توان همه‌ی جعبه‌های کوچک‌تر از آن را، جدا از هم، جا داد. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را درون بزرگ‌ترین جعبه جاسازی کرد؟ (توجه کنید که می‌شود بعضی از جعبه‌ها را درون بعضی دیگر قرار داد.)

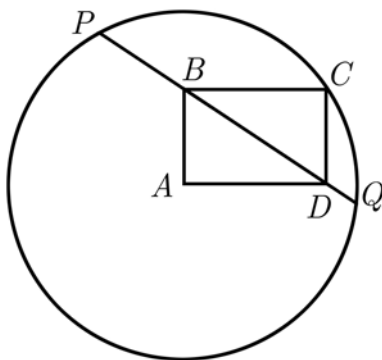
- ۶۴ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۴۰ (۵)

۲۲. فرض کنید $f(x) = ax + b$. اگر $f(0) \leq 2$ ، $f(1) \geq 0$ و $f(2) \leq 4$ ، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $f(10)$ چند است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۲۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰ (۵)

۲۳. مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در مربع به ضلع یک چقدر است؟

- $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$ (۳) $25\sqrt{3} - 48$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ (۵)



۲۴. فرض کنید $ABCD$ مستطیلی 1×2 باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم می‌کنیم. اگر امتداد BD دایره را در نقاط P و Q قطع کند طول PQ چقدر است؟

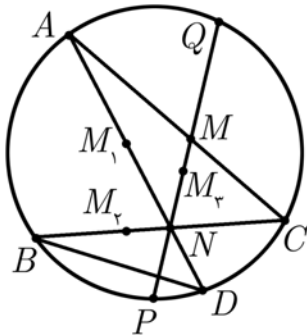
- $\sqrt{\frac{92}{5}}$ (۳) $\sqrt{\frac{35}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{84}{5}}$ (۱) $\sqrt{20}$ (۵) $\sqrt{6\pi}$ (۴)

۲۵. معادله‌ی $2^x + 2x^2 = y^2$ در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۵ جواب ندارد (۵)



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور



۲۶. در شکل روبه‌رو M_1, M_2, M_3, M_4 و M ، به ترتیب، وسط PQ, BC, AD و CA هستند و $\angle ANQ = 40^\circ$. زاویه‌ی بین دو خط گذرنده از M_2M_3 و M_1M_2 چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

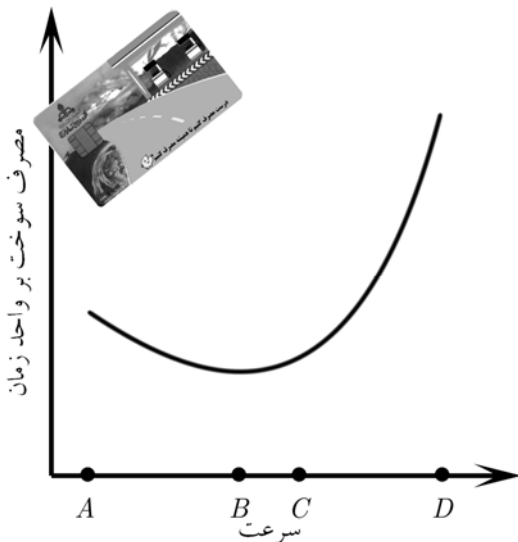
- (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰ (۵) ۸۰

۲۷. a عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ و x_n رقم دهگان a^n است. بسط اعشاری $0.x_1x_2x_3\dots$

- (۱) به ازای هر a متناوب ساده است.
 (۲) به ازای هر a متناوب مرکب است.
 (۳) به ازای هر a نامتناوب است.
 (۴) برای بعضی از مقادیر a متناوب و برای بعضی نامتناوب است.
 (۵) برای بعضی از مقادیر a متناوب ساده و برای بعضی متناوب مرکب است.

۲۸. به هر وجه و هر رأس یک مکعب عددی طبیعی نسبت داده‌ایم. می‌دانیم عدد هر رأس برابر ضرب اعداد سه وجه مجاورش است. مجموع اعداد رئوس ۲۳۱ است. مجموع اعداد وجوه چند است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۷ (۳) ۲۱ (۴) ۳۰ (۵) اطلاعات ناقص است.



۲۹. نمودار مقابل مصرف سوخت در واحد زمان یک خودرو را بر حسب سرعت آن نشان می‌دهد. اگر بخواهیم با سرعت ثابت از زنجان به قزوین برویم با چه سرعتی کل سوخت مصرف شده کم‌تر است؟

- (۱) کم‌ترین سرعت ممکن یعنی A
 (۲) B
 (۳) بیش‌ترین سرعت ممکن یعنی D
 (۴) C
 (۵) بستگی به فاصله‌ی زنجان و قزوین دارد.

۳۰. چند سه‌تایی (A, B, C) از زیرمجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ داریم که $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$ ؟

- (۱) ۷۵۰۰ (۲) ۷۶۵۵ (۳) ۷۶۵۶ (۴) ۷۷۰۰ (۵) ۷۷۷۶

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۶

۱. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است، اگر یکی از زوایا بیش‌تر یا مساوی ۶۲ درجه باشد مجموع دو زاویه دیگر کم‌تر یا مساوی ۱۱۸ درجه شده، که مستوجب این است که یکی از زوایا کم‌تر یا مساوی ۵۹ درجه شود.

۲. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

عوامل اول کوچک‌تر از ۱۵ عبارتند از ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ (شش عامل). از طرف دیگر با توجه به اینکه این اعداد نباید بر هیچ عدد مکعب کاملی بخش‌پذیر باشند، پس نمای این عوامل باید کم‌تر از ۳ باشد (۰ و ۱ و ۲). چرا که در غیر این صورت آن عامل اول به توان ۳ عددی مکعب کامل بوده که عدد مذکور را می‌شمارد. بدین ترتیب تعداد اعداد برابر است با ۳^۶ یعنی ۷۲۹.

۳. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

دقت کنید از آنجا که حاصل قدر مطلق یک عدد همواره نامنفی است، پس $|a| \geq 0$ در نتیجه $|a| + 3 > 0$ بنا بر این $|a| + 3 = |a + 3|$ پس :

$$1 = |2 - ||a| + 3|| = |2 - (|a| + 3)| = |-1 - |a|| = |1 + |a||$$

حال با توجه به رابطه‌ی $|1 + |a|| = 1$ و این که $|a| + 1$ مثبت است داریم::

$$|1 + |a|| = |a| + 1 = 1 \Rightarrow |a| = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس مسئله تنها دارای یک جواب است.

۴. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۰۰۰ برابر است با $۵^۳ \times ۲^۳$. بنابراین این ارقام عدد مورد نظر یا ۱ یا ۲ یا ۵ هستند. اگر عدد مورد نظر دارای رقم ۱ بود، می‌توان آن را حذف کرد، پس به عددی کوچک‌تر با شرایط مذکور دست خواهیم یافت. پس تنها باید از رقم‌های ۵ و ۲ استفاده کنیم. در نتیجه با توجه به اینکه می‌خواهیم کم‌ترین ارقام را داشته باشیم (چراکه عددی که دارای رقم‌های بیش‌تر است، بزرگ‌تر است) پس ارقام عبارتند از ۸ و ۵ و ۵ و ۵ که مجموعشان ۲۳ است.

۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

M, L را به ترتیب محل برخورد DE, AK و BE, CD در می‌نظر گیریم

$$\angle CBE = 90^\circ - \angle ECB = 30^\circ \Rightarrow DE \parallel CB$$

$$BKM \sim ELM \Rightarrow \frac{EL}{BK} = \frac{ME}{MB} \quad (I)$$

$$BCM \sim EDM \Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{DE}{BC} \quad (II)$$

$$\Rightarrow \text{قضیه تالس} \Rightarrow \begin{cases} \frac{EL}{CK} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{EL}{CK} \quad (III)$$

$$\stackrel{I, II, III}{\implies} \frac{EL}{BK} = \frac{EL}{CK} \Rightarrow BK = CK \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$$

۶. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

اگر در یک مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم، ارقام باید ۱ و ۲ باشند. پس اعداد ۱۲ و ۲۱ می‌باشند.

حال فرض کنید در دو مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم. پس حاصل ضرب ارقام یا به ۱۲ رسیده یا به ۲۱. (چرا که حاصل ضرب ارقام هر عدد دو رقمی، خود عددی حداکثر دو رقمی است) در این حالت باید این دو عدد را به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی بنویسیم. لذا داریم:

اعداد ۳۴ و ۴۳ به ۱۲ می‌رسند. $12=3 \times 4 \Rightarrow$

اعداد ۲۶ و ۶۲ به ۱۲ می‌رسند. $12=2 \times 6 \Rightarrow$

اعداد ۳۷ و ۷۳ به ۲۱ می‌رسند. $21=3 \times 7 \Rightarrow$

تا اینجا ۸ عدد حاصل شده است. اکنون با توجه به اینکه هیچکدام از ۶ عدد مرحله قبل را نمی‌توان به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی نوشت، پس حالت دیگری نمی‌ماند و کار خاتمه یافته است.

(۷) گزینه ۵

۱×۲×۳×۴ یعنی ۲۴ عدد داریم که رقم اولشان ثابت باشد. به همین ترتیب ۱×۲×۳ یعنی ۶ عدد نیز داریم که رقم اولشان ثابت باشد. رقم اول از سمت چپ عدد ۳ است بنابراین ۲×۲۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم (اعدادی که رقم اولشان ۲ و ۱ بوده) برای رقم دوم از سمت چپ که رقم ۲ می‌باشد نیز ۶ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. پس ۵۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. از میان سه رقم باقی‌مانده هم به ترتیب ۵، ۴ و ۱ و ۱۵ و ۱۴ و ۱۵ و ۴۱ و ۴۵ یعنی ۴ عدد دیگر باید جلو برویم. پس ۳۲۴۵۱، ۵۸ امین عدد است.

۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مرکز دایره است. O

$$\begin{cases} AA' \perp OA, BB' \perp OB \\ OA = OB \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow OAA' = OBB' \Rightarrow \begin{cases} OA' = OB' (I) \\ \angle AOA' = \angle BOB' (II) \end{cases}$$
$$\angle A'OB' = \angle A'OA + \angle AOB' (III)$$
$$\angle AOB = \angle B'OB + \angle AOB' (IV)$$

(اگر دو مثلث $A'OA$ و $B'OB$ هم پوشانی داشته باشند، علامت جمع فوق، علامت تفریق خواهد شد)

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{II, III, IV} \angle A'OB' = \angle AOB (V) \\ & \xrightarrow{I} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} (VI) \\ & \xrightarrow{V, VI} AOB \sim A'OB' \end{aligned}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB}, \frac{C'A'}{CA} = \frac{OC'}{OC}$$

$$\Rightarrow ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \angle B'A'C' = \angle BAC = \lambda.$$

۹. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$a = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$a - b = 101$$

$$\Rightarrow a - b = \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$$

$$\Rightarrow (n-m)(n+m+1) = 202 = 2 \times 101$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-m=1 \\ n+m+1=202 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=101 \\ m=100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-m=2 \\ n+m+1=101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=51 \\ m=49 \end{cases}$$

پس دو دسته جواب دارد.

۱۰. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اگر n عددی طبیعی باشد، در میان $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ ، بزرگ‌ترین اعداد $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ می‌باشند.

پس بزرگ‌ترین ضریب $\binom{100}{50}$ می‌باشد.

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!50!} = \frac{100 \times 99 \times \dots \times 1}{(50 \times 49 \times \dots \times 1)^2}$$

$$= 2^{50} \frac{99 \times 97 \times \dots \times 1}{50 \times 49 \times \dots \times 1} < 2^{50} \frac{100}{50} \times \frac{98}{49} \times \dots \times \frac{2}{1} < 2^{50} \times 2^{50} = 2^{100}$$

$$= 2 \times (2^3)^{33} < 2 \times 10^{33} < 10^{34}$$

برای طرف دیگر داریم:

$$\binom{100}{50} = 2 \frac{99 \times 97 \times \dots \times 1}{50 \times 49 \times \dots \times 1} = 2^{50} \times \frac{99}{49} \times \frac{97}{48} \times \dots \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{50}$$

$$> 2^{50} \times \frac{98}{49} \times \frac{96}{48} \times \dots \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{100} = 2^{50} \times 2^{49} \times 2 \times \frac{1}{100} = \frac{2^{100}}{100}$$

$$= \frac{(2^{10})^{10}}{100} > \frac{(10^3)^{10}}{100} = 10^{28}$$

۱۱. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هر قطعه از آن اول است، پس هر قطعه از آن نیز باید بسیار اول باشد. پس دو رقم سمت چپ آن نیز بسیار اول است. حال در صورتیکه با ۲۳ شروع شود، رقم سوم باید ۷ باشد زیرا ۳۷ تنها عدد بسیار اولی است که با ۳ آغاز می‌شود. به همین منوال، تنها اعدادی که می‌توانند بسیار اول باشند عبارتند از: ۲۳۷ و ۳۷۳ و ۵۳۷ و ۷۳۳. خود این اعداد نیز باید اول باشند که از این اعداد تنها ۳۷۳ اول است. (دو تا بر ۳ و دیگری بر ۱۱ بخش پذیر است)

۱۲. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هیچ یک از احزاب بیش از نصف رای نیاورده است، پس حداکثر تعداد نمایندگان هر حزب ۱۴۲ نفر است. حال اگر از حزب اول ۱۴۲ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموعاً از حزب دوم و سوم ۱۴۳ نفر رای آورده‌اند که تعداد آراء حزب دوم از ۱ تا ۱۴۲ می‌تواند باشد (آراء حزب سوم خود به خود تعیین می‌شود). اگر از حزب اول ۱۴۱ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموع آراء دو حزب دیگر ۱۴۴ رای می‌شود و حزب دوم می‌تواند از ۲ تا ۱۴۲ باشد (زیرا اگر ۱ رای داشته باشد حزب سوم ۱۴۳ رای دارد که بیش از نصف است). به همین ترتیب هر بار تعداد حالات یکی کمتر می‌شود. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$142 + 141 + \dots + 1 = \frac{142 \times 143}{2} = 10153$$

۱۳. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$x - 1 = yz \Rightarrow x - yz = 1 \quad (I)$$

$$y - 1 = zx \Rightarrow y - zx = 1 \quad (II)$$

$$\stackrel{I, II}{\Rightarrow} x - yz = y - zx \Rightarrow x + zx = y + yz \Rightarrow x(1 + z) = y(1 + z) \stackrel{z \neq -1}{\implies} x = y$$

به طریق مشابه اگر $x \neq -1$ خواهیم داشت $y = z$. پس $x = y = z$. در نتیجه $x - 1 = x^2$ که در این حالت جواب حقیقی نداریم. اگر $x = -1$ در نتیجه $x = y = -1$ در نتیجه $z - 1 = 1$ پس $z = 2$ که سه تایی $(-1, -1, 2)$ در معادله صدق می‌کند. حال اگر یکی از x, y, z برابر -1 نباشد، همانند فوق تنها جواب این است که آن مجهول ۲ بوده و دوتای دیگر -1 باشند. پس بدین ترتیب ۳ جواب زیر را داریم:

$$(-1, -1, 2), (-1, 2, -1), (2, -1, -1)$$

پس اگر حداقل یکی از مجهولات مخالف -1 باشد جواب‌ها به صورت فوق خواهند بود. تنها می‌ماند اینکه همه -1 باشند که این به وضوح جواب نیست. پس ۳ جواب داریم.

۱۴. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

ابتدا به این توجه می‌کنیم که معادله زیر چند جواب مختلف دارد:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, x_i \geq 1$$

برای حل به این نکته دقت می‌کنیم که حل این معادله به منزله این است که k شی مشابه را به n قسمت افراز کنیم. حال فرض کنید که این k شی کنار هم قرار گرفته‌اند حال برای افراز این اشیاء، تعداد $n - 1$ جداکننده بین این اشیاء قرار می‌دهیم. بین این k شی، $k - 1$ جا برای قرار دادن این جداکننده‌ها وجود دارد. پس پاسخ عبارتست از:

$$\binom{k-1}{n-1}$$

حال می‌خواهیم این ۵ مهره‌ی سیاه به ۳ قسمت افراز کنیم که این کار را می‌توان به ۶ حالت انجام داد. اما برای قرار دادن مهره‌های سفید می‌دانیم که این مهره‌ها را در ۴ جا (قبل از قسمت اول مهره‌های سیاه، بین قسمت اول و دوم، بین قسمت دوم و سوم و بعد از قسمت سوم) می‌توان قرار داد. به طوری که حتماً بین قسمت اول و دوم و قسمت دوم و سوم، حداقل یک مهره سفید قرار داشته باشد. بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; x_1, x_4 \geq 0; x_2, x_3 \geq 1$$

که با شرایط مطلوب ما اندکی تفاوت دارد. برای حل این مشکل ترفندی به کار می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 1; x'_4 = x_4 + 1 \\ \Rightarrow x'_1 + x_2 + x_3 + x'_4 &= 7; x'_1, x_3, x_2, x'_4 \geq 1 \end{aligned}$$

که شرایط مطلوب ماست. بنابراین پاسخ مساله عبارتست از:

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120.$$

۱۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه عدد فقط عامل ۲ دارد، پس همه ۵ عدد توانی از ۲ هستند. داریم:

$$\begin{aligned} 2^{276} \times 2^{276} \times 2^{277} \times 2^{278} \times 2^{279} &= 2^{1386} \\ 2^{276} + 2^{276} + 2^{277} + 2^{278} + 2^{279} &= 2^{276}(1 + 1 + 2 + 4 + 8) = 2^{280} \end{aligned}$$

که بیش‌ترین گزینه است.

۱۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\angle MAN = \angle M'AN' = 33^\circ \Rightarrow MN = M'N'$$

P و P' را به ترتیب وسط MN و $M'N'$ می‌نامیم و O مرکز دایره است.

$$\begin{cases} \angle MON = \angle M'ON' = 66 \\ MO = M'O \\ NO = N'O \end{cases} \Rightarrow MON = M'ON' \Rightarrow \begin{cases} OP = OP' \\ OP \perp MN, OP' \perp M'N' \end{cases}$$

پس وترها همگی از وسط به دایره‌ای به مرکز O مماسند.

۱۷. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$c = 1 - a - b - d \Rightarrow A = ab + bc + cd = ab + (b + d)(1 - a - b - d) \\ = -ad + (b + d)(1 - b - d)$$

از طرفی با استفاده از نابرابری حسابی هندسی داریم:

$$(b + d)(1 - b - d) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = -ad + (b + d)(1 - b - d) \leq -ad + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

پس A کم‌تر مساوی با $\frac{1}{4}$ است و به ازای $\frac{1}{4}$ ، $b = c = \frac{1}{4}$ ، $a = d = 0$ مقدار $\frac{1}{4}$ را اتخاذ می‌کند. در نتیجه $\frac{1}{4}$ جواب مورد نظر است.

۱۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

بهترین مسیر آن است که به دریاچه مماس باشد. در این حالت داریم:

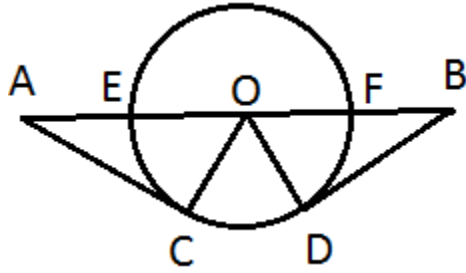
$$AB = 4 \Rightarrow AO = 2, OC = 1$$

$$AC^2 = AO^2 - OC^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$$

$$OC = 1, AO = 2 \Rightarrow OC = \frac{1}{2}AO \Rightarrow \angle OAC = 30^\circ \Rightarrow \angle AOC = 60^\circ \Rightarrow \angle DOB = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle COD = 60^\circ$$

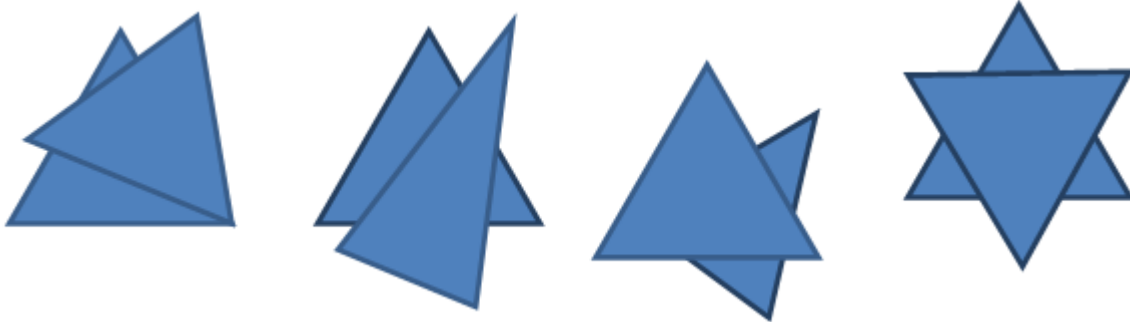
$$\Rightarrow \text{کمان } DC = 2\pi(\text{شعاع}) \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = 2\pi \times 1 \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{جواب} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$



۱۹. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اضلاع هر مثلث شامل وترهایی می‌شود که رئوس آن‌ها روی دایره‌اند. از طرفی می‌توان هر ضلع مثلث را با تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی که میان دو راس آن ضلع قرار دارند، مقایسه کرد. پس مثلث‌ها به صورت زیر هستند: (۸ و ۱)، (۷ و ۲)، (۶ و ۳)، (۵ و ۴)، (۶ و ۲)، (۵ و ۳)، (۴ و ۴)، (۴ و ۳) (اعداد نشان‌گر تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی هستند که میان دو راس مثلث قرار گرفته‌اند).

۲۰. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



اشکال فوق مثال‌هایی برای ۸، ۹، ۱۰ و ۱۲ ضلع می‌باشند.

۲۱. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

جعبه‌ها را از کوچک به بزرگ به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۶ شماره گذاری می‌کنیم. جعبه شماره ۵ به یک صورت درون جعبه ۶ قرار می‌گیرد. حال برای قرار دادن جعبه ۴، دو حالت داریم، یکی درون جعبه ۵ و یکی بیرون آن. به همین ترتیب هر جعبه‌ای که اضافه می‌شود، یک فضا به فضاهای ممکن برای قرار دادن جعبه بعدی اضافه می‌کند. پس در کل $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ حالت داریم.

۲۲. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(0) &\leq 2 \Rightarrow b \leq 2 \\ f(1) &\geq 0 \Rightarrow 0 \leq a + b \quad (I) \\ f(2) &\leq 4 \Rightarrow 2a + b \leq 4 \quad (II) \\ \xrightarrow{(I),(II)} a &\leq 4 \Rightarrow 8a \leq 32 \xrightarrow{(II)} 10a + b \leq 36 \Rightarrow f(10) \leq 36 \end{aligned}$$

حالت تساوی به ازای $a = 4$ و $b = -4$ حاصل می‌شود.

۲۳. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

$$\begin{cases} \angle A = \angle C = 90^\circ \\ BE = BF \Rightarrow \triangle ABE = \triangle CBF \Rightarrow AE = CF \Rightarrow \\ AB = BC \\ DF = DE \end{cases}$$

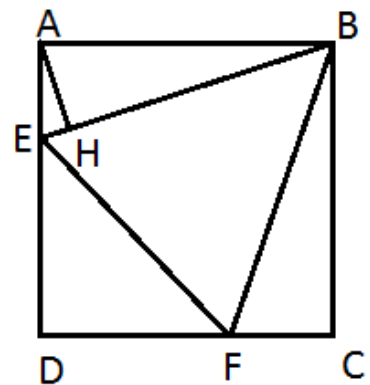
$$\angle ABE = \angle CBF = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{4} BE$$

$$BE = BF = EF = l$$

$$DE = DF = \frac{\sqrt{2}}{2} l$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABE} + S_{BEF} + S_{DEF}$$

$$\Rightarrow 1 = AH \cdot BE + \frac{\sqrt{3}}{4} BE^2 + \frac{1}{2} DE^2$$



$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 + \frac{1}{4}l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{4}{2 + \sqrt{3}}$$

$$S_{BEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \Rightarrow S_{BEF} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

H را پای ارتفاع A می‌گیریم

$$S_{ABCD} = AB \times AD = AH \times BD \Rightarrow AH = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AP = AC = BD = \sqrt{5}$$

$$AH^2 + PH^2 = AP^2 \Rightarrow PH = \sqrt{\frac{21}{5}}$$

$$PQ = 2PH \Rightarrow PQ = \sqrt{\frac{84}{5}}$$

۲۵. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$2^x + 2x^2 = y^2$$

$$x^2, y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 + 0 = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$$

حال فرض کنید $x = 2^k m$ که m عددی فرد است.

$$\Rightarrow 2^{2^k m} + 2^{2k+1} m^2 = y^2$$

$$m = 1 \Rightarrow 2^{2^k} + 2^{2k+1} = y^2$$

$$(I) 2^k > 2k + 1 \Rightarrow 2^{2k+1} (2^{2^k - 2k - 1} + 1) = y^2$$

چون 2^{2k+1} و $2^{2^k - 2k - 1} + 1$ نسبت به هم اولند، پس هر دو باید مربع کامل باشند. اما 2^{2k+1} نیست.

$$(II) 2^k \leq 2k + 1 \Rightarrow k \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow 2 + 2 = y^2 \Rightarrow y = \pm 2 \\ k = 1 \Rightarrow 4 + 8 = y^2 \text{ ندارد جواب صحیح} \\ k = 2 \Rightarrow 16 + 32 = y^2 \text{ ندارد جواب صحیح} \end{cases}$$

$$m \geq 3 \Rightarrow 2^k m \geq 3 \times 2^k > 2k + 1 \quad (III)$$

$$\Rightarrow 2^{2k+1} (2^{2k} m - 2k - 1 + m^2) = y^2$$

که همانند بالا جواب نخواهد داشت (چون $2^{2k} m - 2k - 1 + m^2$ فرد است). پس ۴ تا جواب داریم.

۲۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مرکز دایره را O می‌نامیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} OM_1 \perp AD \\ OM_2 \perp BC \\ OM_3 \perp PQ \end{cases} \Rightarrow \text{محاطی } OM_1 M_2 N, OM_1 N M_3$$

با توجه به این که از هر سه نقطه یک دایره می‌گذرد.

$$\Rightarrow M_1 M_2 N M_3 \text{ محاطی} \Rightarrow \angle M_1 M_2 M_3 = \angle M_1 N M_3 \Rightarrow \angle M_1 M_2 M_3 = 40^\circ \blacksquare$$

۲۷. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که این عدد حتماً متناوب است. برای این کار کفایت ثابت کنیم که دو رقم اول پس از تعدادی مرحله به تکرار می‌افتد. حال برای یافتن دو رقم اول کفایت که عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم و باقی‌مانده همان دو رقم اول خواهد بود. فرض کنید ۱۰۱ مرحله گذشته باشد. با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به اینکه باقی‌مانده بر ۱۰۰ از ۰ تا ۹۹ (۱۰۰ عدد) مختلف می‌تواند باشد، پس حداقل دو عدد یکسان در این ۱۰۰ عدد پیدا می‌شود. با توجه به اینکه هر بار در عدد ثابتی ضرب می‌کنیم لذا اعداد بعدی این دو نیز برابر خواهند بود و همین‌طور دو تای بعدیشان (منظور به هنگ ۱۰۰ آنهاست) و ... پس عدد اعشاری حتماً متناوب است و با عنایت به این موضوع که این عدد اعشاری برای عدد ۲۰ متناوب مرکب و برای عدد ۱۰۰ متناوب ساده است، گزینه‌ی ۵ صحیح خواهد بود.

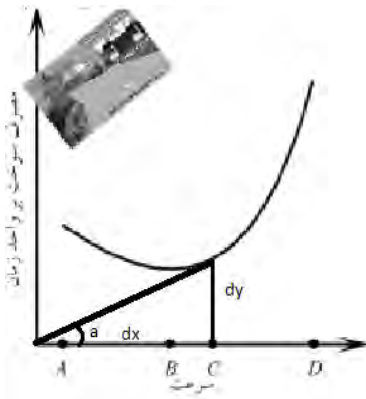
۲۸. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

دو وجه روبروی هم را در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد این وجوه یکی a و دیگری b باشد. فرض کنید اعداد چهار وجه دیگر زمانی که از وجه با عدد a به مکعب می‌نگیریم، به ترتیب c, d, e, f باشد. در نتیجه مجموع اعداد رئوس روی وجه a برابر خواهد بود با $a(cd + de + ef + fc)$. به طریق مشابه مجموع اعداد رئوس روی وجه با عدد b نیز $b(cd + de + ef + fc)$ خواهد بود. پس مجموع اعداد رئوس مکعب برابر است با $= 231$

$$(a + b)(c + e)(d + f) = (a + b)(cd + de + ef + fc)$$

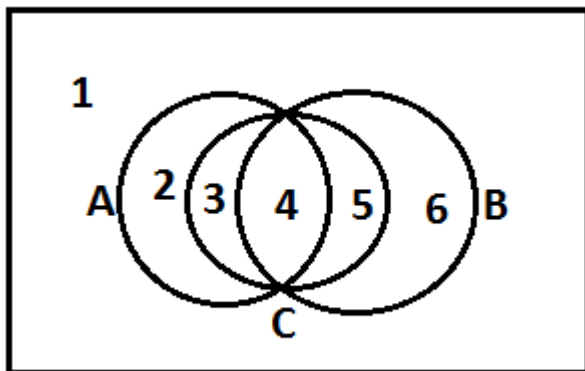
از طرفی با توجه به اینکه 231 برابر $3 \times 7 \times 11$ است و اینکه مجموع اعداد دو وجه مقابل از 1 بیش‌تر است، مجموع اعداد وجوه مقابل 3 و 7 و 11 خواهد بود. پس مجموع اعداد وجوه مکعب برابر $3 + 7 + 11$ یعنی 21 خواهد بود.

۲۹. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



با توجه به اینکه نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی (تانژانت زاویه) نشان‌گر مصرف سوخت بر مسافت است با عنایت به این موضوع که ما می‌خواهیم این مقدار به حداقل برسد (با توجه به شکل) بنابراین نقطه سوم به‌ترین نقطه می‌باشد.

$$\tan a = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{زمان}}}{\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}} = \frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{مسافت}}$$



۳۰. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

سه مجموعه‌ی مورد نظر به صورت ذیل می‌باشند و هر کدام از اعداد در یکی از ۶ جای اشاره شده در شکل می‌توانند باشند. پس پاسخ ۶^۵ برابر ۷۷۷۶ خواهد بود.