



مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

$$\begin{array}{r} CAAB \\ + BAA \\ \hline ACBC \end{array}$$

(۱) A, B, C سه رقم متمایز از بین $\{0, 1, \dots, 9\}$ هستند و می دانیم که جمع روبه‌رو درست است. $A + B + C$ کدام است؟

الف) ۷ ب) ۱۶ ج) ۱۹ د) ۲۱ ه) ۲۴

(۲) چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محور x ها را قطع می‌کنند؟
 $4, 9, 11, -11, 19, 15, 5, 1, -9, 1, -3, -1, 2, 3, -5, 5, -7, 12, 8, 7, 6, -15$

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۱۶ د) ۲۱ ه) ۲۴

(۳) مجموع مساحت و محیط مستطیلی ۱۴۰ شده است. مساحت آن حداکثر چه قدر است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۷۰ ج) ۸۰ د) ۶۰ ه) هیچ کدام

(۴) چند عدد چهاررقمی به شکل \overline{abab} وجود دارد که دقیقاً چهارده مقسوم‌علیه داشته باشد؟

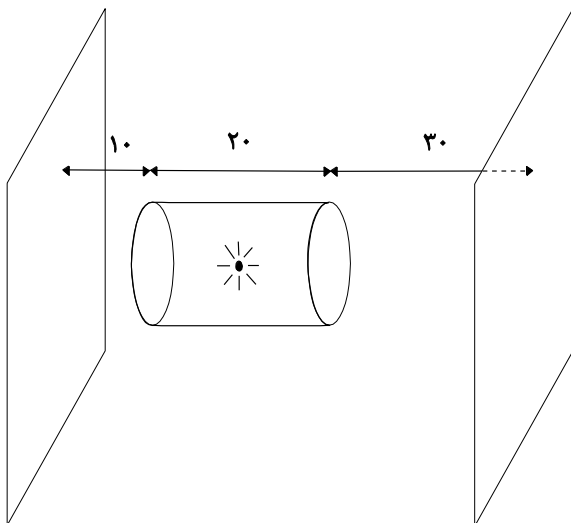
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) چنین عددی وجود ندارد.

(۵) چند عدد سه رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟

الف) ۶۴۸ ب) ۷۲۰ ج) ۷۲۹ د) ۸۱۰ ه) ۹۰۰

(۶) چند خط در صفحه وجود دارد که یک مستطیل 2×5 داده شده را به دو مستطیل متشابه تقسیم کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵



(۷) وسط لوله‌ای استوانه‌ای شکل به طول ۲۰ سانتی‌متر لامپی روشن است. در دو طرف لوله دو پرده به فاصله‌های ۱۰ و ۳۰ سانتی‌متر قرار گرفته است. نسبت مساحت ناحیه‌های روشن روی دو پرده چند است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۹

(۸) در یک امتحان تستی ۳۰ سؤال، هر پاسخ صحیح چهار نمره و هر پاسخ غلط یک نمره منفی دارد. اگر نمره یکی از شرکت‌کنندگان ۸۹ باشد، او چند سؤال را بدون پاسخ رها کرده است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷



مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

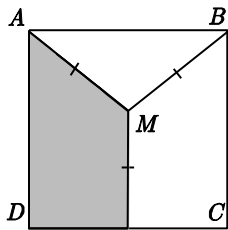
ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

۹) حجم هشت وجهی‌ای که رأس‌هایش مرکزهای وجه‌های مکعبی به ضلع یک است، چند است؟

- الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{6}$ د) $\frac{1}{8}$ ه) $\frac{1}{12}$

۱۰) کدام عدد در غربال اراتستن، برای مشخص کردن اعداد اول کوچک‌تر از ۵۰۰۰، دیرتر حذف می‌شود؟

- الف) ۳۲۵۶ ب) ۴۱۴۱ ج) ۳۵۵۳ د) ۳۸۰۱ ه) ۴۱۴۵



۱۱) در شکل روبه‌رو ضلع مربع $ABCD$ ، یک است و نقطه M از رأس A ، رأس B و ضلع DC به یک فاصله است. مساحت چهارضلعی مشخص شده چند است؟

- الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) $\frac{13}{30}$ د) $\frac{13}{32}$ ه) $\frac{7}{15}$

۱۲) فرض کنید $x, y, z \in [-1, 1]$ و $x + y + z = 0$. بیش‌ترین مقدار ممکن xyz چند است؟

- الف) $\frac{1}{27}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{2}$ ه) ۱

۱۳) $1 - 2^{25}$ برابر کدام گزینه است؟

- الف) ۴۲۹۴۹۶۹۲۸۵ ب) ۴۲۹۴۹۶۴۱۵۵ ج) ۴۲۹۴۹۶۳۳۳۵ د) ۴۲۹۴۹۶۸۰۱۵ ه) ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵

۱۴) به چند شکل می‌توان وجوه یک مکعب را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرد به طوری که از هر دو رنگ استفاده شود؟ دو رنگ آمیزی را که با دوران مکعب به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض کنید.

- الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۳۲

۱۵) مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ مفروض است. کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع فاصله‌های یک نقطه درون آن مثلث با اضلاع آن چند است؟

- الف) $\frac{7}{2}$ ب) $\frac{12}{5}$ ج) $\frac{6}{5}$ د) $\frac{10}{3}$ ه) ۳

۱۶) A, B, C و D مجموعه‌هایی هستند که در روابط روبه‌رو صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟

$$\begin{cases} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = B \cap C \cup D \end{cases}$$

- الف) $D = \emptyset$ ب) $C = D$ ج) $A \subseteq B$ د) $A = B \cup D$ ه) $D = A \cap B$



مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

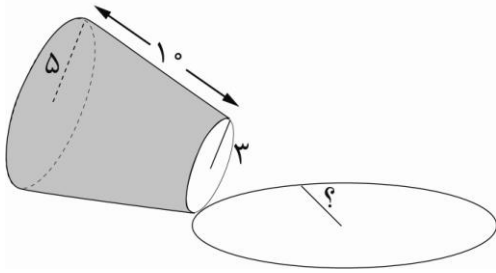
ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان

۱۷) ماتریسی 10×10 است که درایه هایش صفر یا یک هستند. می دانیم $A^2 = 0$. ماتریس A حداکثر چند یک دارد؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۹ (د) ۲۵ (ه) ۴۵

۱۸) به چند راه می توان ۱۱ خانه جدولی 2×12 را سیاه کرد که دو خانه سیاه، ضلع مشترک نداشته نباشند؟

- الف) ۴۲ (ب) ۴۴ (ج) ۴۶ (د) ۴۸ (ه) ۵۰



۱۹) مخروط ناقصی به شکل روبه رو روی زمین می غلظد و به جای اولیه اش بر می گردد. اگر شعاع قاعده های مخروط، ۳ و ۵ و طول یال آن ۱۰ باشد، شعاع دایره ای که قاعده کوچک تر مخروط طی می کند چه قدر است؟

- الف) ۳ (ب) ۵ (ج) ۱۰ (د) ۱۵ (ه) ۲۰

۲۰) معادله $\sin^2(24x) + \sin^2(32x) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۲۱) 340° در مبنای ده چند رقمی است؟

- الف) ۱۷ (ب) ۱۸ (ج) ۱۹ (د) ۲۰ (ه) ۲۱

۲۲) فاصله نقطه ای روی دایره محاطی یک مربع، از دو ضلع نزدیک تر مربع برابر ۱ و ۲ است. طول ضلع مربع چند است؟ (دایره ای محاطی دایره ای است که از داخل بر اضلاع مربع مماس است.)

- الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۲۳) تعداد جواب های معادله $x^2 + x + 8 = y^2$ در مجموعه اعداد طبیعی چند است؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۲۴) در اتاقی 5×5 حداکثر چند کاشی 1×3 می توان قرار داد؟

- الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۹

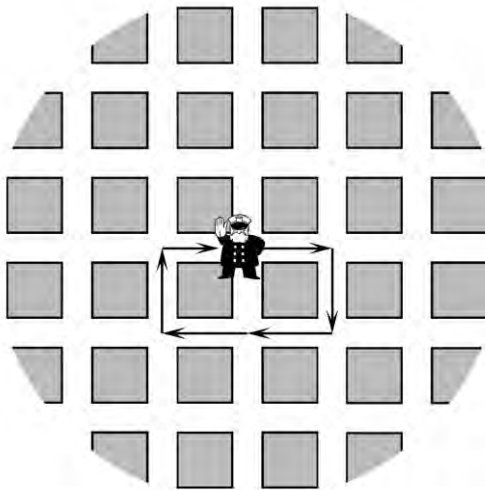
۲۵) A و B دو ماتریس هستند که $AB = B$ و $BA = A$. کدام گزینه برابر $(A + B)^2$ است؟

- الف) $2A^2 + 2A$ (ب) $4A^2$ (ج) $4A$ (د) $2(A + B)$ (ه) $A^2 + 2AB + B^2$



مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان



۲۶) پاسبانی می خواهد با شروع از تقاطعی که کلانتری در نیشش واقع شده است، یک ساعت در خیابان ها قدم بزند و در نهایت به کلانتری برگردد. اگر خیابان ها به شکل یک شبکه مربعی، مانند تصویر روبه رو، باشد و طی کردن هر خیابان ده دقیقه طول بکشد، این کار به چند طریق ممکن است؟ پاسبان تنها سر تقاطع ممکن است مسیرش را تغییر دهد و ممکن است از جلوی کلانتری و یا از یک خیابان چند بار عبور کند.

- الف) ۶۴ ب) ۳۶۰ ج) ۴۰۰
د) ۱۲۹۶ ه) ۴۰۹۶

۲۷) برای کدام عدد طبیعی n هیچ کدام از اعداد $n, 2n, 3n, \dots, 1000n$ مربع کامل نیست؟

- الف) ۱۷۸۵۰ ب) ۸۶۴۹ ج) ۳۲۹۲ د) ۲۶۰۷ ه) ۲۰۳۶

۲۸) معادله $x^2 = \lfloor x^3 \rfloor$ چند جواب دارد؟ $\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی نهایت

۲۹) یک مستطیل کاغذی به طول ۵ و عرض ۱ را به گونه ای تا می کنیم که دو سر یک قطر آن روی هم قرار گیرند. مساحت ناحیه یک لایه چقدر است؟

- الف) ۰ ب) $\frac{5}{2}$ ج) ۲ د) $\frac{6}{5}$ ه) $\frac{12}{5}$

۳۰) در مسابقات کشتی پهلوانی ۹ نفر دوبه دو مسابقه داده اند. حداکثر چند نفر بیش از ۴ مسابقه را برده اند؟

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۵

کد سوالات: ۲

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر فرض ارقام سمت چپ دو عدد $CAAB$ و $ACBC$ متفاوت هستند. پس لزوماً $A = C + 1$ همچنین با توجه به ردیف‌های اول و سوم از سمت راست می‌توان گفت که $A + B = 10 + C$ از ردیف دوم (از سمت راست) هم می‌توان متوجه شد که $2 \times A + 1 = B$ حال به راحتی می‌توان این سه رقم را مشخص کرد.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر a و b طول و عرض مستطیل مفروض باشد:

$$\begin{aligned} ab + 2(a + b) = 140 \text{ و } (a + b)^2 - 4ab \geq 0 &\Rightarrow \\ ab + 4\sqrt{ab} \leq 140 &\Rightarrow (\sqrt{ab} + 2)^2 \leq 144 \Rightarrow ab \leq 10 \end{aligned}$$

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اشعه‌های نوری نواحی دایره شکل روی پرده ایجاد می‌کنند که شعاع آن‌ها بنابر رابطه‌ی تالس، به دست خواهد آمد. در نتیجه شعاع دایره‌ی تشکیل شده در پرده‌ی سمت چپ برابر دو برابر شعاع استوانه و در پرده دیگر چهار برابر شعاع استوانه است.

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

می‌دانیم $\overline{abab} = 101 \times \overline{ab}$ و ۱۰۱ عددی اول است. پس \overline{ab} ، ۷ مقسوم علیه دارد و بنابر رابطه‌ی تعداد مقسوم علیه‌ها (تعداد مقسوم علیه‌های عدد به شکل $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ که p_1, p_2, \dots, p_k اعدادی اول هستند برابر است با $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$) می‌توان گفت که تنها عدد ۶۴ این خاصیت را داراست.

۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای رقم اول ۹ حالت ممکن است. برای رقم دوم هم با توجه به انتخاب رقم اول، ۹ حالت ممکن است. برای رقم سوم هم به همین ترتیب ۹ حالت ممکن است.

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که پاره‌خط واصل بین دو نقطه یک خط را هنگامی قطع می‌کند که آن دو نقطه در دو طرف آن خط حضور داشته باشند. در این سوال در دو طرف خط بودن بدین معنا است که یکی دارای مولفه‌ی γ منفی و دیگری دارای مولفه‌ی γ مثبت باشد.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

دو خط هستند که یکی طول و دیگری عرض را نصف می‌کنند. همچنین دو خط موازی عرض مستطیل (یکی در سمت چپ و دیگری در سمت راست خط نصف‌کننده‌ی طول مستطیل که طول مستطیل را به نسبت 4:1 تقسیم می‌کنند) وجود دارند که این خاصیت را دارند.

۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر a تعداد پاسخ‌های صحیح و b تعداد پاسخ‌های نادرست او باشد، می‌دانیم

$$4a - b = 89 \text{ و } a + b \leq 30, a, b \in \mathbb{N}$$

پس تنها جواب‌های ممکن $a = 23$ و $b = 3$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر الگوریتم غربال اراتستن، عددی که کوچک‌ترین مقسوم علیه اولش از سایر گزینه‌ها بیش‌تر باشد، دیرتر حذف می‌شود. کوچک‌ترین مقسوم علیه اول گزینه‌ها به ترتیب برابر $2, 11, 3, 5$ است.

۱۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح در حالتی که دو تا از این اعداد مثبت هستند، حاصل ضرب منفی است. پس می‌توان فرض کرد که دو تا از این اعداد مانند x و γ منفی هستند و z مثبت. حال می‌توان نشان داد که

$$xyz \leq \frac{z^3}{4}$$

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که $2^{25} \equiv 256^4 \equiv 36^2 \equiv 96 \pmod{100}$

۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

در حالتی که دو وجه آبی باشند، تنها دو حالت متفاوت داریم. یکی اینکه دو وجه روبرو باشند و دیگری آن که دو وجه آبی مجاور باشند. به همین ترتیب نیز دو حالت برای دو وجه قرمز داریم. اگر سه وجه آبی داشته باشیم نیز دو حالت برای آن‌ها ممکن است. یکی آن که سه وجه آبی در یک رأس مشترک باشند. در این حالت سه وجه قرمز نیز در رأس روبرو به این رأس مشترک هستند. یا این که دو وجه از این سه وجه روبه روی هم باشند و سومی بین این دو قرار بگیرد. دو حالت هم مربوط به زمانی است که تنها یک وجه آبی یا تنها یک وجه قرمز داشته باشیم.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$\begin{aligned} A \cap C &= (B \cap C) \cup D \implies A = (A \cap C) \cup A \setminus C = (B \setminus C) \cup ((B \cap C) \cup D) \\ &= B \cup D \end{aligned}$$

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث باشد. اضلاع این مثلث در شرط فیثاغورس برای مثلث‌های قائم‌الزاویه صدق می‌کند. پس مثلث مذکور قائم‌الزاویه است. حال نقطه‌ی P را بر ضلع به طول ۳ تصویر کنید و نام نقطه را Q بگذارید. می‌توان نشان داد که مجموع فواصل Q از سه ضلع از این مجموع برای P کم‌تر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مجموع این فواصل برای رأس قائمه‌ی مثلث از Q کم‌تر است. پس کم‌ترین مجموع فواصل را رأس قائمه‌ی مثلث دارد.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

این هشت وجهی در واقع از یک مربع به قطر ۱ و دو نقطه به فواصل $\frac{1}{2}$ از این مربع در بالا و پایین آن تشکیل شده است. در واقع اجتماع دو هرم مربع القاعده به سطح قاعده $\frac{1}{2}$ و ارتفاع $\frac{1}{2}$ است.

۱۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید H پای عمود از M بر AB باشد. اکنون با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث BMH، طول BM به راحتی محاسبه می‌شود. از طرفی در دوزنقه AMND مساحت برابر است با

$$\frac{1}{4}(1 + MN)$$

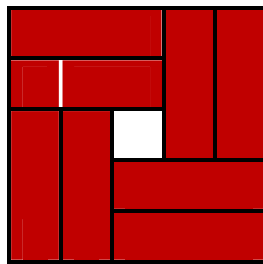
۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

بنابر شرط ماتریس A، اگر در سطر iام ماتریس ۱ داشته باشیم، در ستون jام نمی‌توانیم ۱ داشته باشیم و بالعکس. فرض کنید در t سطر درایه ۱ وجود داشته باشد. پس در t ستون هیچ درایه ۱ی وجود ندارد. پس حداکثر $t(10 - t) \leq 25$ درایه ۱ می‌توانیم داشته باشیم. برای حالت تساوی هم ماتریسی را در نظر بگیرید که تمامی خانه‌های ربع بالا سمت راست آن ۱ باشد.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

طبق قضیه‌ی تالس اگر شعاع خواسته شده r باشد، $\frac{3}{5} = \frac{r}{r+10}$

۱۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.



۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح اگر x ریشه‌ی این معادله باشد، $\sin(24x)$ و $\sin(32x)$ هر دو صفر باشند. به عبارتی ریشه‌ها هم به شکل $\frac{k\pi}{24}$ هستند و هم به شکل $\frac{l\pi}{32}$. اعداد مثبت بدین شکل که از π بیش‌تر نیستند، به صورت $\frac{m\pi}{8}$ هستند که m عددی صحیح است که $0 \leq m \leq 8$.

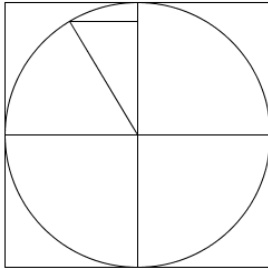
۲۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم $\log e > \frac{1}{3}$ و $\ln 9 > 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{81^2 \times 2}$ پس $20 \log 9 > 19$ همچنین به وضوح $20 \log 9 < 20$ پس 9^{20} عددی ۲۰ رقمی است.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در واقع باید ۱۱ ستون دارای خانه‌ی سیاه باشند، زیرا در یک ستون نمی‌توانیم دو خانه‌ی سیاه داشته باشیم. پس در اول ما یک ستون را انتخاب می‌کنیم که فاقد خانه سیاه است. اگر این ستون یکی از دو ستون کناری جدول باشد، خانه‌های دیگر دقیقاً به ۲ روش می‌توان رنگ کرد. در غیر این صورت ۴ روش مختلف می‌توان داشت.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.



اگر نصف ضلع مربع را r فرض کنیم، فاصله‌ی این نقطه از قطر عمودی دایره برابر $r - 2$ و از قطر افقی برابر است با $r - 1$. پس بنا بر رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت: $r^2 = (r - 1)^2 + (r - 2)^2$ پس $r = 5$

۲۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$B^2 = B \text{ به همین ترتیب } AB = B, BA = A \Rightarrow A^2 = ABA = BA = A$$

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2y - (2x + 1))(2y + (2x + 1)) &= 31 \\ \Rightarrow 2y - (2x + 1) = 1, (2y + (2x + 1)) &= 31 \end{aligned}$$

پس تنها جواب معادله $x = 7, y = 8$ است.

توجه کنید که ۳۱ اول است.

۲۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

هر عدد طبیعی n را می‌توان به صورت یکتا به شکل qd^2 نوشت که q حاصل ضرب چند عدد اول متمایز است. به راحتی ثابت می‌شود که اگر kn مربع کامل باشد آنگاه $q \mid k$. در این مسئله گزینه‌ی درست است که q در آن از ۱۰۰۰ بیش‌تر باشد.

۲۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

خط‌هایی که ایجاد می‌شود، از نقطه‌ای واقع بر طول می‌گذرد که فاصله‌ی آن از دو رأس روبرو مستطیل به یک اندازه است. برای این فاصله x داریم: $x^2 = 1 + (5 - x)^2$ پس $x = \frac{13}{5}$. حال مساحت ناحیه یک لایه متشکل از دو مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه‌ی ۱ و $\frac{12}{5}$ است.

۲۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ما هر حرکت پاسبان را با یکی از حروف U (بالا)، D (پایین)، R (راست) و L (چپ) مشخص می‌کنیم. به وضوح باید تعداد U ها با D ها برابر باشد. همچنین تعداد R ها و L ها. پس تعداد حالات برابر است با تعداد کلمات ۶ حرفی متشکل از این حروف به گونه‌ای که در شرط فوق صدق کنند.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اولاً به وضوح x^2 عددی صحیح است و همچنین نامنفی است. برای $x = 0, 1$ که به وضوح برابری برقرار است. اگر $x > 1$

$$x^2 = [x^3] = x^2 + [x^2(x - 1)] \Rightarrow 0 \leq x^2(x - 1) \leq 1$$

که تنها $\sqrt{2}$ در این شرط صدق می‌کند.

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید تعداد این افراد a باشد. A را مجموعه‌ی بازی‌هایی در نظر بگیرید که یکی از این a نفر در آن پیروز شده باشد. به وضوح در $\binom{a}{2}$ بازی که این افراد با هم انجام می‌دهند در مجموعه‌ی A هستند. همچنین این افراد در دیدار با کشتی گیران دیگر حداکثر می‌توانند $a(9 - a)$ پیروزی کسب کنند. از طرفی بنابر فرض مسئله $|A| \geq 5a$. پس

$$\frac{1}{2}a(a - 1) + a(9 - a) \geq |A| \geq 5a \Rightarrow \frac{1}{2}(a - 1) + 9 - a \geq 5$$

حال یک گروه ۷ نفره را در نظر بگیرید که هرکدام در گروه خود دقیقا ۳ نفر را برده‌اند (کافی است سه دور مجزای یالی را در نظر بگیریم که گراف کامل ۷ راسی را افراز می‌کنند.) و همگی آن‌ها ۲ نفر باقی‌مانده را شکست داده‌اند.