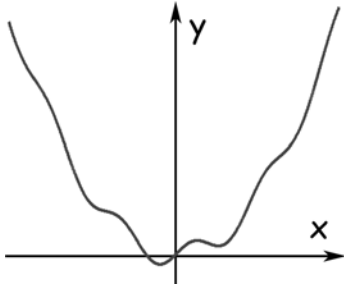


مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۱) نمودار روبرو مربوط به کدام یک از توابع زیر می باشد؟



الف) $y = \frac{x^2}{10} \cdot \sin x$

ب) $y = \frac{(\tan x)^2}{10}$

ج) $y = \cos\left(\frac{x^2}{10}\right) - 1$

د) $y = \frac{x^2}{10} + \cos x - 1$

ه) $y = \frac{x^2}{10} + \sin x$

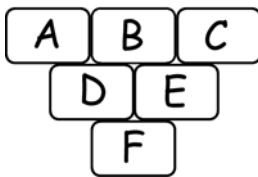
(۲) معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383} + (x+1)^{1382}(x-2) + (x+1)^{1381}(x-2)^2 + \dots + (x+1)(x-2)^{1382} + (x-2)^{1383} = 0$$

ج) ۱۳۸۳

الف) این عبارت همواره صفر است. (ب) ۲

د) ۰ (ه) ۱



(۳) A, B, C و C سه مجموعه دل خواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$ کدام گزینه حتماً درست است؟

الف) $F \subseteq C$ (ب) $B \subseteq F$ (ج) $F \subseteq A \cap C$ (د) $A \cap C \subseteq F$ (ه) $D \cap C \subseteq F$

(۴) ضریب x^5 در چند جمله ای $(1 + x^6 + x^8)^2 (1 + x^{1382} + x^{1381})^2 (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 1382x^{1381})^2$ چند است؟

الف) ۲۰ (ب) ۳۲ (ج) ۴۰ (د) ۶۴ (ه) ۷۰

(۵) تابع دو متغیره f به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 2xy + 2x + 1$$

ناصر و منصور به این شکل با هم بازی می کنند که ابتدا ناصر یک عدد به جای x می گذارد و سپس منصور یک عدد به جای y قرار می دهد و مقدار تابع، هر چقدر که شد به عنوان امتیاز ناصر در نظر گرفته می شود. اگر منصور خوب بازی کند بیشترین امتیازی که ناصر می تواند به دست آورد چقدر است؟

الف) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{5}{4}$ (ج) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (د) -1 (ه) $-\sqrt{2}$

(۶) چند جمله ای $x^3 + ax + 1$ بر $x^2 - 3x + b$ بخش پذیر است. $a + 2b$ چند است؟

الف) -8 (ب) $-\frac{25}{3}$ (ج) 1 (د) 0 (ه) -3

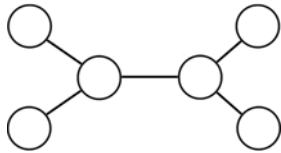
مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

(۷) A و B ماتریس‌هایی 2×2 به شکل زیر هستند.

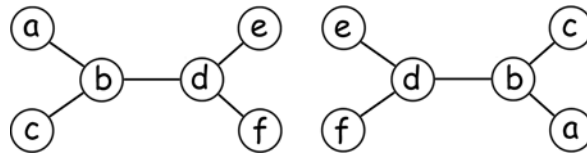
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

چه موقع رابطه $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ برقرار است؟

الف) همواره (ب) وقتی $x+y=0$ (ج) وقتی $x=y$ (د) وقتی $xy=1$ (ه) هیچ‌گاه



(۸) می‌خواهیم در دایره‌های شکل روبرو برچسب‌های a, b, c, d, e, f را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره‌ای برابر نباشند. دو برچسب گذاری را متمایز گوییم هرگاه دو حرف وجود داشته باشند که دایره‌های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیرمجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هرگاه بین آن‌ها پاره‌خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب گذاری‌های زیر یکسانند.



چند برچسب گذاری متمایز وجود دارد؟

الف) ۱۸۰ (ب) ۱۲۰ (ج) ۹۰ (د) ۶۰ (ه) ۴۵

(۹) حداقل چند مستطیل 2×3 باید از یک صفحه شطرنجی 8×8 جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل 2×3 نتوان از شکل باقی مانده جدا کرد؟

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

(۱۰) یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «خوب» می‌نامیم هرگاه جمع هر دو مقسوم‌علیه متمایز آن بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چند عدد خوب کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

(۱۱) فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیه ما مجموعه اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می‌توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

الف) ۱۰۰۰ (ب) ۳۳۰ (ج) ۳۵۰۰۰۰ (د) ۳۷۵ (ه) ۱۰۵۰۰

(۱۲) برای عدد طبیعی n فرض کنید $p(n)$ حاصل ضرب ارقام n در مبنای ۱۰ باشد. $p(1) + \dots + p(999)$ چند است؟

الف) ۱۱۲۵۷۶ (ب) ۲۰۷۰ (ج) ۹۱۱۲۵ (د) ۹۳۱۹۵ (ه) ۱۳۲۰۷۰

مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۳) دو دایره C_1 و C_2 به مراکز O_1 و O_2 در دو نقطه A و B متقاطع می‌باشند. طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطه A گذشته دو دایره را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر اندازه وتر AM برابر ۴ باشد اندازه MN کدام است؟

- الف) $4 + 3\sqrt{3}$ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) $4 + 3\sqrt{\frac{12}{5}}$ (ه) $4\sqrt{5}$



۱۴) رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چند سر حرکت می‌کند. اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می‌دهد که این کار، چندان ساده نیست: این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر n -چشم را ($n > 1$) قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک چشم، یک سر دو چشم، ... و یک سر $(n-1)$ -چشم در می‌آورد!

برآورد چون شیر جنگی غریو
سر و مغزش از گرز او گشت پست

تهمت‌ن چو بشنید گفتار دیو
بزد بر سر دیو چون پیل مست

اگر دیو در ابتدا سه سر، با ۴، ۶، و ۸ چشم داشته باشد رستم چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

الف) ۱۸

ب) ۶۱

ج) ۱۶۸

د) متأسفانه رستم نمی‌تواند دیو را از پای درآورد!

ه) رستم دیو را از پای درمی‌آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.

۱۵) توجه کنید که در این سؤال هم مثل همه سؤال‌های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!

الف) (ب) صحیح است.

ب) (ج) و (د) هر دو غلط‌اند.

ج) (ج) صحیح است.

د) (د) صحیح است.

ه) حداقل یکی از (ج) یا (ه) صحیح‌اند.

۱۶) یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می‌نامیم هرگاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ به دست آمده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی نیستند چند تا است؟

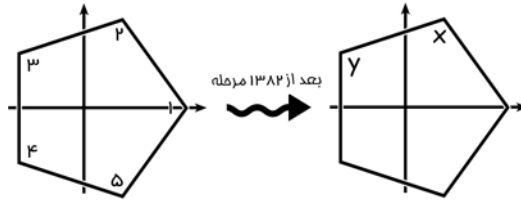
- الف) ۵۸۸ (ب) ۲۹۴ (ج) ۸۸۲ (د) ۱۲۰۰ (ه) ۴۳۲

۱۷) در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\widehat{ABC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ و $AB = CD$. اگر O محل تقاطع AC و BD باشد و $CB = 5$ و $BO = 3$ ، طول CO چقدر است؟

- الف) ۴ (ب) $\sqrt{15}$ (ج) $\sqrt{14}$ (د) ۳ (ه) $3\sqrt{4}$

مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۱۸) فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محورهای مختصات قرار گرفته است. عمل زیر را روی ۵ ضلعی ۱۳۸۲ بار انجام می‌دهیم: «نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، ۷۲° در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت دوران می‌دهیم، دوباره نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.» در این صورت (x, y) چند می‌باشد؟



- الف) (۳, ۴) ب) (۱, ۵) ج) (۵, ۱) د) (۴, ۵) ه) (۵, ۴)

۱۹) در چهارضلعی محدب $ABCD$ نیمساز زاویه ABC ضلع CD را در نقطه E قطع کرده است. اگر $\angle AEB = 90^\circ$ و $\angle CDA = \angle BCD$ ، کدام یک از احکام زیر همواره برقرار است؟

الف) $ABCD$ چهارضلعی محیطی است.

ب) $ABCD$ چهارضلعی محاطی است.

ج) $AB = AD + BC$

د) $CD = AD + BC$

ه) $EA \cdot EB = EC \cdot ED$

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 3ab = b^3 \\ 1 + a^5 = b^5 \end{cases}$$

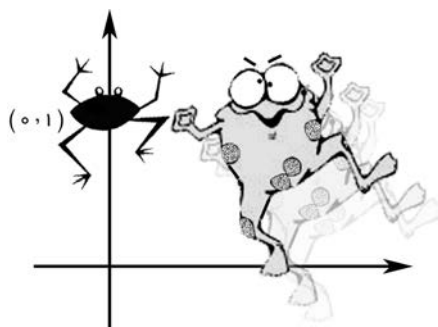
۲۰) دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) نامتناهی جواب

۲۱) بیش‌ترین مقدار λ که برای هر $a > 0$ نامساوی زیر برقرار باشد، چند است؟

$$a^2 + \frac{1}{a^3} - 2 \geq \lambda \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right)$$

- الف) ۰ ب) ۴ ج) ۹ د) $\frac{5}{4}$ ه) ۶



۲۲) یک قورباغه در نقطه $(1, 0)$ از صفحه قرار دارد

و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را به

مکان فعلی‌اش وصل می‌کند (طوری که مبدأ در سمت

راستش قرار بگیرد) به اندازه فاصله همان لحظه‌اش

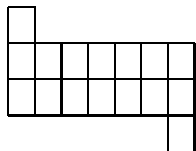
از مبدأ، جهش می‌کند. اگر قورباغه پس از ۱۵

جهش به نقطه (a, b) برسد، a چند است؟

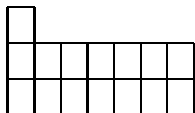
- الف) ۰ ب) ۲۵۶ ج) $-۱۲۸\sqrt{2}$ د) -۲۵۶ ه) -۱۲۸

مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

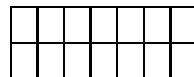
۲۳) تعداد زیادی موزاییک 1×2 در اختیار داریم. دو نفر به نوبت روی یک شکل شطرنجی به صورت زیر با هم بازی می‌کنند. هر نفر در نوبت خود یک موزاییک در دو خانه مجاور از شکل که قبلاً پر نشده باشد قرار می‌دهد. کسی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده بازی است. در کدام شکل نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برنده بازی باشد؟ (فرض کنید نفر اول به بهترین صورت بازی می‌کند.)



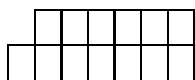
(ج)



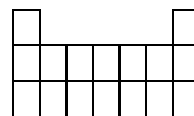
(ب)



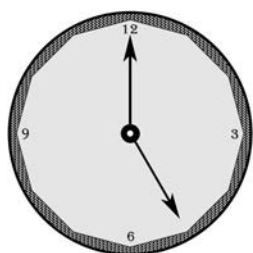
(الف)



(ه)



(د)



۲۴) ساعتی داریم که طول عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار آن برابر است. بین ساعت ۵ تا ۶ چند بار ممکن است عقربه‌ها به گونه‌ای قرار گیرند که ساعت دقیق مشخص نشود؟ مثلاً در حالت روبرو ساعت حتماً ۵ است، و نمی‌تواند ۲۵ : ۱۲ باشد.

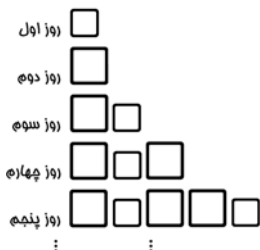
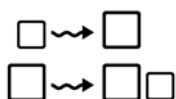
(ه) ۱۳

(د) ۱۲

(ج) ۱۱

(ب) ۱

(الف) ۰

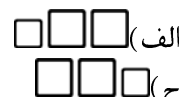


۲۵) بر روی یک رشته بسیار باریک و دراز تعدادی سلول که بعضی کوچک و بعضی بزرگ هستند پشت سر هم قرار گرفته‌اند. بعد از گذشتن هر روز سلول‌های کوچک، بزرگ می‌شوند و سلول‌های بزرگ، یک سلول کوچک در سمت راست خود تولید می‌کنند.

اگر در روز اول تنها یک سلول کوچک داشته باشیم در روز هزار و سیصد و هشتاد و دوم دنباله‌ای طویل از سلول‌ها خواهیم داشت! سه جمله وسط این دنباله کدامند؟



(ج) ۶



(الف) ۸

(ه) اصلاً چنین m ای وجود ندارد.

(د) ۵

۲۶) فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $3^n + 2^n$ بر ۱۲۵ بخش پذیر است. مجموع ارقام n چند است؟

مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

۲۷) یک عدد طبیعی را «ریشه‌دار» می‌گوییم هرگاه مجذور مجموع ارقامش با خودش برابر باشد. کدام گزینه درست است؟

- الف) تعداد اعداد ریشه‌دار نامتناهی است.
 ب) عدد ریشه‌دار دو رقمی وجود ندارد.
 ج) عدد ریشه‌دار چهار رقمی وجود ندارد.
 د) عدد ریشه‌داری به شکل $9k + 3$ وجود دارد.
 ه) عدد ریشه‌داری به شکل $9k + 4$ وجود دارد.

۲۸) از نقطه P خارج دایره (O) دو قاطع بردایره رسم می‌کنیم. اولی در A و B و دومی در C و D دایره را قطع می‌کند. از نقطه P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر M وسط کمان AB باشد و MD و MC به ترتیب، AB را در E و F قطع نمایند و $\angle ETF = 70^\circ$ ، $\angle FTP = 30^\circ$ ، آنگاه زاویه \widehat{TPE} چقدر است؟

- الف) 60° (ب) 30° (ج) 45° (د) 50° (ه) 75°

۲۹) در مثلث $\triangle ABC$ ، طول میانه رأس B ، 3 است و $\hat{A} = 150^\circ$. طول میانه رأس A حداقل چقدر است؟

- الف) 1 (ب) $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ (ج) $\frac{3}{4}(3-\sqrt{7})$ (د) 2 (ه) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

۳۰) خط متغیر D و غیر گذرنده از نقاط B و C همواره دو ضلع AB و AC از مثلث ABC را، به ترتیب، در دو نقطه M و N چنان قطع می‌نماید که مساحت مثلث AMN برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌های MNB و MNC می‌باشد. کدام یک از احکام زیر درست است؟

- الف) این خط باید همواره با ضلع BC موازی باشد.
 ب) $\frac{AM}{NB} = \frac{AN}{MC}$
 ج) این خط باید همواره از یک نقطه ثابت در صفحه مثلث بگذرد.
 د) این خط باید همواره از وسط ارتفاع AH بگذرد.
 ه) این خط باید همواره بر دایره محاطی داخلی مثلث مماس باشد.

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۲

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

فرض کنید $y = f(x)$ تابع مورد نظر باشد. ابتدا با توجه به این که نقطه‌ی $(0, 0)$ روی نمودار قرار دارد، باید $f(0) = 0$ که همه‌ی گزینه‌ها این شرط را برآورده کنند. این نمودار تابعی را مشخص می‌کند که نه زوج است و نه فرد (زیرا نه نسبت به مبدأ مختصات و نه محور y ها تقارن دارد). پس گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) که به ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند نمی‌توانند جواب مسئله باشند.

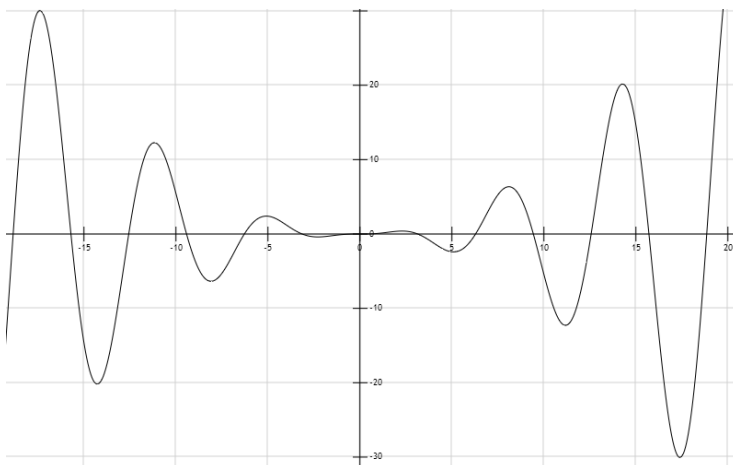
طبق نمودار سؤال برای هر عدد حقیقی مثبت x باید $f(x)$ مثبت باشد، اما اگر در گزینه‌ی (د) به جای x ،

$\frac{\pi}{2}$ قرار دهیم داریم:

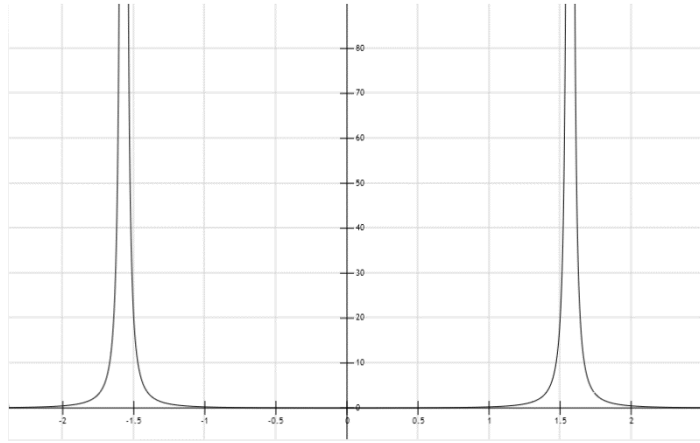
$$\frac{x^2}{10} + \cos x - 1 = \frac{\pi^2}{40} + \cos \pi - 1 = \frac{\pi^2}{40} - 1 < 0.$$

پس گزینه‌ی (د) هم نمی‌تواند جواب مسئله باشد و جواب درست گزینه‌ی (ه) است. در زیر نمودار مربوط به چهار تابع دیگر را می‌بینید.

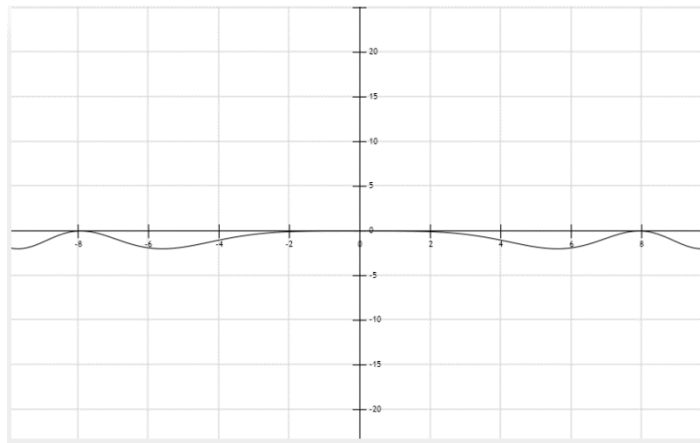
گزینه‌ی الف. $y = \frac{x^2}{10} \cdot \sin x$



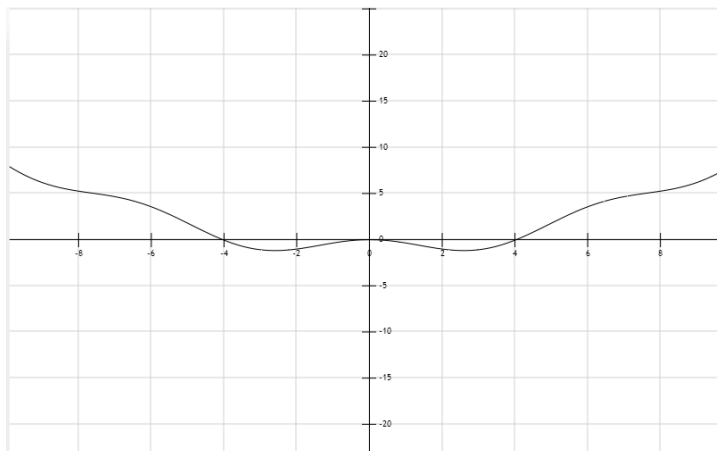
گزینه ی ب. $y = \frac{(\tan x)^2}{1}$



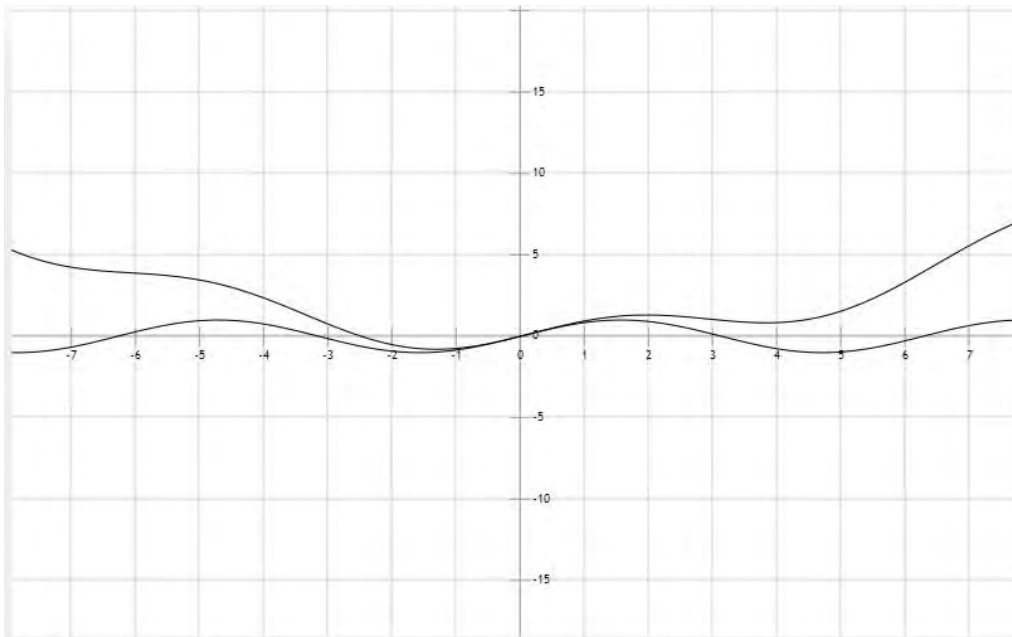
گزینه ی ج. $y = \cos\left(\frac{x^2}{1}\right) - 1$



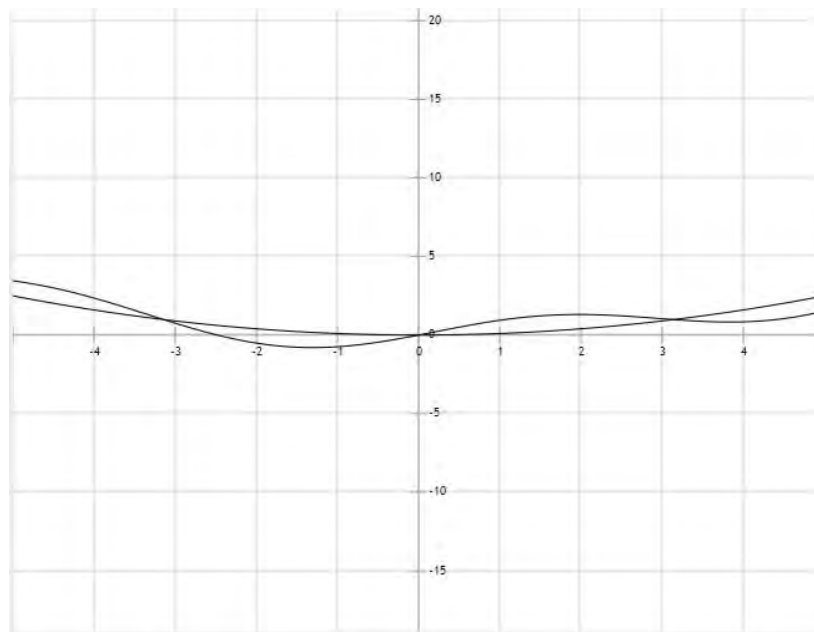
گزینه ی د. $y = \frac{x^2}{1} + \cos x - 1$



توضیح: اگر به نمودار صورت سؤال حول نقطه‌ی صفر که کسر $\frac{x^2}{4}$ در این جا بسیار کوچک است، دقت کنید نموداری شبیه به $\sin x$ می‌بینید. (در شکل زیر نمودار پایینی مربوط به $y = \sin x$ و نمودار بالاتر مربوط به گزینه‌ی (ه) است.)



توضیح: نمودار $\frac{x^2}{10} + \sin x$ از جمع کردن نمودار دو تابع $\frac{x^2}{10}$ و $\sin x$ به دست می‌آید. یعنی به تعبیری کاملاً غیر دقیق باید نمودار $\sin x$ روی نمودار $\frac{x^2}{10}$ قرار گیرد تا به نمودار $\frac{x^2}{10} + \sin x$ برسیم.



۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

صورت سؤال کاملاً ما راه‌نمایی می‌کند که باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم. طرفین عبارت را در $(x - 2) - (x + 1) = 3$ ضرب می‌کنیم. صرفاً برای راحتی در نوشتن از نماد a برای $x + 1$ و از b برای $x - 2$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a^{1384} - b^{1384} &= (a - b)(a^{1383} + a^{1382}b + \dots + ab^{1382} + b^{1383}) \\ &= 3 \times (a^{1383} + a^{1382}b + \dots + ab^{1382} + b^{1383}) = 0. \end{aligned}$$

پس $a^{1384} = b^{1384}$ و لذا $a = b$ و یا $a = -b$. با ترجمه‌ی این عبارت‌ها با استفاده از متغیر اصلی مسئله یعنی x ، $x + 1 = x - 2$ و یا $x + 1 = 2 - x$. حالت اول به $1 = -2$ منجر می‌شود که امکان ندارد، اما از حالت دوم جواب $x = \frac{1}{3}$ به دست می‌آید که تنها جواب مسئله است.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

$$D \cap C = (A - B) \cap C = A \cap B^c \cap C$$

$$\begin{aligned} F &= D - E = D \cap E^c = (A - B) \cap (B - C)^c = (A \cap B^c) \cap (B \cap C^c)^c = \\ &= A \cap (B^c \cap (B^c \cup C)) = A \cap B^c \end{aligned}$$

پس به وضوح حکم مسئله برقرار است.

توضیح ۱. استفاده از نمودار ون در چنین سؤالاتی بسیار سودمند است.

توضیح ۲. $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ و $C = \{2\}$ مثال نقضی برای همه‌ی گزینه‌های دیگر است.

۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای ایجاد x^5 باید از هر کدام از ۴ پرانتز مسئله یکی از جملات انتخاب شود طوری که مجموع توان‌های آن‌ها برابر ۵ باشد.

از هیچ‌کدام از دو پرانتز $x^4 + x^1 + 1$ نمی‌تواند جمله‌ی x^5 انتخاب شود و ضمناً نمی‌توان هم‌زمان از هر دوی آن‌ها x^4 انتخاب کرد زیرا در هر دو صورت مجموع توان‌ها از ۵ بیش‌تر می‌شود.

اگر از یکی از دو $x^4 + x^8 + 1$ ، جمله‌ی x^4 انتخاب شود از دیگری باید لزوماً ۱ را انتخاب کنیم و در این حالت از یکی از دو پرانتز باقی‌مانده و از دیگری $2x$ باید انتخاب شود. بنابراین چهار حالت داریم که هر کدام منجر به یک جمله‌ی $2x^5$ و در مجموع $8x^5$ می‌شوند.

اگر از هر دو پرانتز $x^4 + x^8 + 1$ ، ۱ انتخاب شود باید از دو پرانتز دیگر دو جمله انتخاب کنیم که مجموع توان‌های آن‌ها ۵ باشد پس در این حالت ضریب x^5 برابر $2(1 \times 6 + 2 \times 5 + 3 \times 4) = 56$ می‌شود. یعنی ضریب x^5 در مجموع $64 = 56 + 8$ است.

۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ناصر عدد α را انتخاب کرده باشد، در این صورت منصور برای این که امتیاز کم‌تری به ناصر برسد سعی می‌کند عددی را به جای y قرار دهد تا $f(\alpha, y) = y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 + 2\alpha + 1$ کم‌ترین مقدار ممکن شود. این عبارت یک رابطه‌ی درجه دوم برحسب y است که کم‌ترین مقدار آن وقتی است که y برابر $\alpha = -\frac{-2\alpha}{2} = \alpha$ باشد و این کم‌ترین مقدار برابر است با $f(\alpha, \alpha) = -2\alpha^2 + 2\alpha + 1$. یعنی با فرض این که منصور خوب بازی می‌کند ناصر با انتخاب α به $-2\alpha^2 + 2\alpha + 1$ امتیاز می‌رسد. پس ناصر باید α را طوری انتخاب کند که این مقدار بیش‌ترین مقدار ممکن خود باشد. بیش‌ترین مقدار این عبارت زمانی است که α برابر $\frac{1}{2} = -\frac{2}{2 \times (-2)}$ و این بیش‌ترین مقدار برابر است با $\frac{3}{4} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$.

۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با تقسیم کردن خواهیم داشت:

$$x^2 + ax + 1 = (x + 3)(x^2 - 3x + b) + ((a - b + 9)x + 1 - 3b)$$

اگر طبق فرض مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده باید متحد با صفر باشد.

$$(a - b + 9)x + (1 - 3b) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b + 9 = 0 \Rightarrow a = -9 + b \\ 1 - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + 2b = (-9 + b) + 2b = -9 + 3b = -9 + 3\left(\frac{1}{3}\right) = -9 + 1 = -8$$

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها روی جمع پخش می‌شود اما خاصیت جابه‌جایی ندارد (لزوماً AB و BA با هم برابر نیستند). پس $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. با مقایسه‌ی این رابطه با فرض مسئله می‌فهمیم $AB = BA$ و لذا

$$\left. \begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+xy & 1+x \\ 1+y & 2 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ y+1 & xy+1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy + 1 = 2 \Rightarrow xy = 1$$

۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه حل اول. دو دایره‌ی وسط که هر کدام با سه دایره‌ی دیگر مجاور هستند را دایره‌ی مرکزی می‌نامیم. در دو برجسب‌گذاری یک‌سان باید برجسب دایره‌های مرکزی یکی باشد زیرا در غیر این صورت حرفی وجود دارد که در یکی از دو برجسب‌گذاری در دایره‌ی مرکزی است و با سه حرف دیگر مجاور است اما در برجسب‌گذاری دیگر تنها با یک حرف مجاور است.

بنابراین برای مشخص کردن یک برجسب‌گذاری ابتدا به $C(6,2) = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$ حالت دو حرف دایره‌های مرکزی را انتخاب می‌کنیم، سپس دو حرف از چهار حرف باقی مانده را انتخاب می‌کنیم که مجاور حرفی باشد که زودتر در الفبا ظاهر می‌شود (a زودتر از b ، b زودتر از c و... ظاهر می‌شود). این کار به $c(4,2) = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ حالت امکان‌پذیر است. دو حرف باقی‌مانده هم در دو دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند. پس در کل $15 \times 6 = 90$ برجسب‌گذاری داریم.

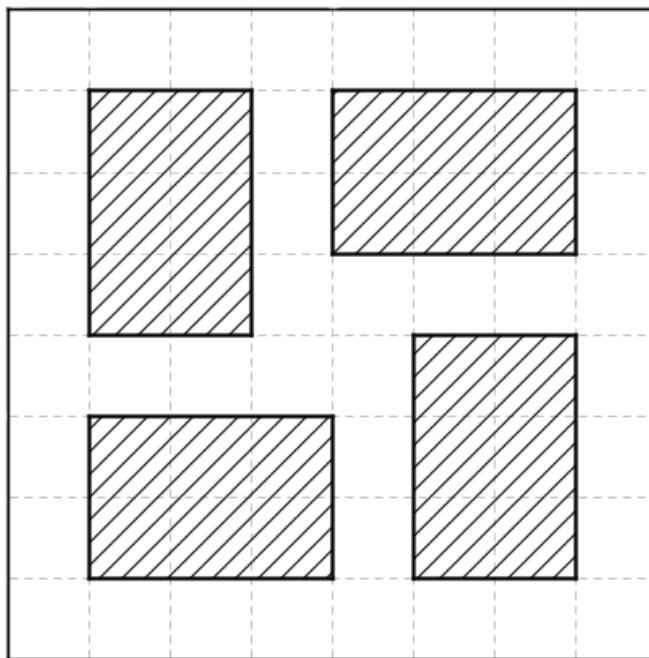
راه حل دوم. اگر فرض کنیم هر دو برجسب‌گذاری با هم متفاوت هستند، تعداد کل برجسب‌گذاری‌ها $720 = 6!$ تا می‌شود. برای یک برجسب‌گذاری خاص مثل شکل زیر تعداد برجسب‌گذاری‌هایی که طبق تعریف مسئله با آن یک‌سان هستند می‌شماریم.

در هر برجسب‌گذاری یک‌سان با این برجسب‌گذاری باز هم حرف‌های a و b باید در دایره‌های مرکزی باشند. پس بسته به این که کدام حرف سمت چپ قرار گیرد دو حالت داریم. در هر کدام از حالت‌ها برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی a دو حالت و برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی b هم

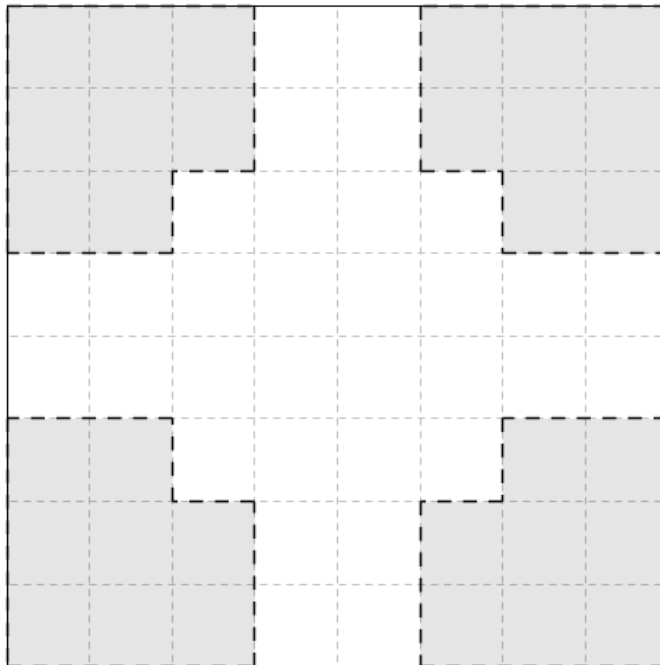
دو حالت داریم. پس در کل ۸ برجسب‌گذاری مشابه با این برجسب‌گذاری وجود دارد (با احتساب خودش). با توجه به این که با استدلال مشابه همین هر برجسب‌گذاری ۸ برجسب‌گذاری مشابه دارد، تعداد کل برجسب‌گذاری‌های متفاوت $90 = \frac{72}{8}$ است.

۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شکل زیر چهار مستطیل 2×3 را در جدولی 8×8 مشخص می‌کند، طوری که هیچ مستطیل دیگری در جدول جای نگیرد.



حال ادعا می‌کنیم به هر صورت که سه مستطیل 2×3 در جدول قرار دهیم، می‌توان یک مستطیل دیگر هم در جدول قرار داد. به چهار شکلی که در گوشه‌ی جدول زیر مشخص هستند دقت کنید. هر مستطیل 2×3 حداکثر با یکی از این چهار شکل گوشه‌ای خانه‌ی مشترک دارد. پس اگر تنها سه مستطیل داشته باشیم یکی از این گوشه‌ها هست که هیچ کدام از خانه‌های آن پوشیده نشده است، و به وضوح در این شکل یک مستطیل 2×3 قرار می‌گیرد.



۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم هر عدد طبیعی خوب مثل n اول است. اگر این طور نباشد مقسوم‌علیه‌ی مثل a دارد که $1 < a < n$. طبق فرض مسئله

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \mid a + 1, \gamma \mid n + 1 \Rightarrow \gamma \mid a + n + 2 \\ \gamma \mid a + n \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma \mid 2$$

که این یک تناقض است. حال یک عدد اول p خوب است اگر $\gamma \mid p + 1$ ، که اعداد اول این‌چنینی کم‌تر از ۱۰۰، تنها $\{13, 41, 83, 97\}$ هستند.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد، $S(n)$ را برابر مجموع $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n که در فهرست ظاهر می‌شود، $S(m)$ فرد است. ابتدا تنها اعداد اول در فهرست هستند و برای هر عدد اول p ، $S(p) = 1$ و فرد است. برای این منظور ادعا می‌کنیم در هر گام این فرد بودن حفظ می‌شود. فرض کنید همه‌ی اعدادی که تا یک مرحله در فهرست قرار دارند فرد هستند و در مرحله‌ی بعدی با استفاده از سه عدد a ، b و c که در فهرست قرار دارند عدد abc را اضافه کنیم. می‌دانیم $S(abc) = S(a) + S(b) + S(c)$ ، حال چون $S(a)$ ، $S(b)$ و $S(c)$ فرد هستند، $S(abc)$ هم فرد می‌شود.

حال باید دید برای اعداد هر گزینه مقدار S چه قدر است.

$$S(۱۰۰۰) = S(۲^۳ \times ۵^۳) = ۶$$

$$S(۳۳۰) = S(۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱) = ۴$$

$$S(۳۵۰۰۰۰) = S(۲^۴ \times ۵^۵ \times ۷) = ۱۰$$

$$S(۳۷۵) = S(۳ \times ۵^۳) = ۴$$

$$S(۱۰۵۰۰) = S(۲^۲ \times ۳ \times ۵^۳ \times ۷) = ۷$$

پس تنها گزینه‌ی (ه) می‌تواند صحیح باشد. با قرآیند زیر نشان می‌دهیم که با در هر گام با استفاده از اعداد اول و عدد به دست آمده در گام قبلی می‌توان به عدد ۱۰۵۰۰ در فهرست رسید.

$$۲, ۳, ۵ \rightarrow ۳۰, \quad ۳۰, ۲, ۵ \rightarrow ۳۰۰, \quad ۳۰۰, ۵, ۷ \rightarrow ۱۰۵۰۰$$

توضیح: با فرآیندی شبیه به بالا می‌توان نشان داد غیر از اعداد اول، تنها اعداد طبیعی n ای در فهرست ظاهر می‌شود که حداقل سه عامل اول داشته باشد و ثانیاً $S(n)$ فرد باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

محاسبه‌ی این حاصل جمع را با توجه به تعداد ارقام به سه قسمت تقسیم می‌کنیم.

$$\sum_{n=۱}^۹ p(n) = \sum_{i=۱}^۹ i = ۴۵$$

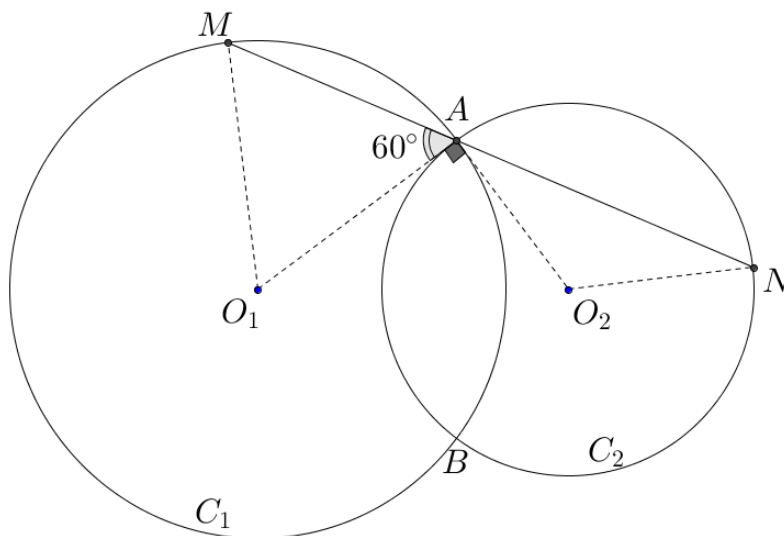
$$\sum_{n=۱۰}^{۹۹} p(n) = \sum_{i=۱}^۹ \sum_{j=۰}^۹ (i \times j) = \left(\sum_{i=۱}^۹ i \right) \left(\sum_{j=۰}^۹ j \right) = \left(\sum_{i=۱}^۹ i \right)^2 = ۴۵^2$$

$$\sum_{n=۱۰۰}^{۹۹۹} p(n) = \sum_{i=۱}^۹ \sum_{j=۰}^۹ \sum_{k=۰}^۹ (i \times j \times k) = \left(\sum_{i=۱}^۹ i \right) \left(\sum_{j=۰}^۹ j \right) \left(\sum_{k=۰}^۹ k \right) = \left(\sum_{i=۱}^۹ i \right)^3 = ۴۵^3$$

بنابراین

$$\sum_{n=۱}^{۹۹۹} p(n) = ۴۵ + ۴۵^2 + ۴۵^3 = ۹۳۱۹۵$$

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



با توجه به شکل بالا می‌بینیم که طول AM طبق فرض مسئله برابر ۴ است. از طرف دیگر MO_1 و AO_1 که شعاع‌های دایره‌ی C_1 هستند، طولی برابر ۴ دارند، پس مثلث AMO_1 متساوی‌الاضلاع است و لذا $\angle MAO_1 = 60^\circ$. به علاوه طبق قضیه‌ی فیثاغورس مثلث AO_1O_2 هم قائم‌الزاویه است ($3^2 + 4^2 = 5^2$)

بنابراین زاویه‌ی $\angle NAO_2$ در مثلث متساوی‌الساقین AO_2N برابر 30° است و لذا با یک محاسبه‌ی ساده نتیجه می‌شود که $AN = 3\sqrt{3}$ و بنابراین $MN = MA + AN = 4 + 3\sqrt{3}$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید a_k تعداد ضربات لازم برای از بین بردن یک سر با k چشم باشد. در این صورت $a_1 = 1$ ، ضمناً اگر $k > 1$ با یک ضربه به این سر، باید تمام سرهای جدید را از بین ببرد و از آن‌جا که برای هر $i < k$ دیو یک سر i چشم درآورده است به a_i ضربه برای از بین بردن این سر احتیاج دارد. پس

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_1 + 1$$

از آن‌جا که $a_1 = 1$ ، با استفاده از رابطه‌ی بالا می‌فهمیم $a_2 = 2$ ، $a_3 = 4$ و با استفاده از استقرا به راحتی دیده می‌شود که $a_k = 2^{k-1}$. پس برای از بین بردن یک سر k چشم، 2^{k-1} ضربه نیاز است. سرهای دیو به ترتیب ۴، ۶ و ۸ چشم دارند، پس برای از بین بردن کامل دیو به

$$a_4 + a_6 + a_8 = 2^3 + 2^5 + 2^7 = 8 + 32 + 128 = 168$$

ضربه نیاز است.

۱۵. گزینه ی (د) صحیح است.

در زیر بررسی می کنیم که اگر هر کدام از گزینه ها درست باشند چه می شود:

الف. این امکان ندارد زیرا در صورت درست بودن (الف) باید (ب) هم درست باشد (آنچه (الف) می گوید) که ممکن نیست.

ب. اگر (ب) درست باشد، چون تنها یک گزینه ی درست داریم باید (الف) غلط باشد، اما غلط بودن (الف) به معنی غلط بودن (ب) هست. پس این گزینه هم نمی تواند درست باشد.

ج. اگر (ج) درست باشد، گزینه ی (ه) به ناچار غلط است، اما غلط بودن گزینه ی (ه) یعنی هیچ کدام از (ج) و (ه) درست نیستند که با فرض اولیه تناقض دارد. پس این گزینه هم نمی تواند گزینه ی درست باشد.

د. اگر (د) درست باشد. گزینه ی (الف) که بیان می کند (ب) صحیح است، غلط می شود. گزینه ی (ب) که بیان می کند (ج) و (د) هر دو غلط هستند به خاطر فرض درستی (د) غلط می شود. گزینه ی (ج) که بیان می کند (ج) غلط است هم غلط می شود. درستی گزینه ی (د) تناقضی با خودش ندارد. در مورد گزینه ی ه، غلط بودن آن نتیجه می دهد که (ج) و (ه) باید هر دو غلط باشند که از قضا این درست است. پس گزینه ی (د) باید گزینه ی صحیح باشد.

ه. درستی (ه) نتیجه می دهد (ب) غلط است و لذا باید یکی از (ج) و (د) درست باشند که این طور نیست پس این گزینه هم غلط است.

۱۶. گزینه ی (الف) صحیح است.

برای این که عدد طبیعی چهاررقمی \overline{xyzt} مضرب ۵ باشد باید $t \in \{0, 5\}$. به علاوه اگر یکی از اعداد x, y و xyz مضرب سه باشند این عدد تقسیمی می شود. بنابراین عدد \overline{xyzt} غیر تقسیمی است اگر $t \in \{0, 5\}$ و x, y, x و \overline{xyz} بر سه بخش پذیر نباشند. معادلاً $x, x + y$ و $x + y + z$ بر سه بخش پذیر نباشد. (یک عدد طبیعی بر ۳ بخش پذیر است، اگر و تنها اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد). بنابراین می توان از روی باقی مانده ی تقسیم x, y و z تشخیص داد که یک عدد تقسیمی هست یا نه. با بررسی حالت های مختلفی که باقی مانده های x, y و z می تواند داشته باشد می بینیم که تنها حالت های زیر منجر به یک عدد غیر تقسیمی می شوند.

راهحل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۲

۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	باقی مانده ی تقسیم x بر ۳
۲	۲	۰	۰	۱	۱	۰	۰	باقی مانده ی تقسیم y بر ۳
۱	۰	۲	۰	۲	۰	۱	۰	باقی مانده ی تقسیم z بر ۳
۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	تعداد حالت ها برای x
۳	۳	۴	۴	۳	۳	۴	۴	تعداد حالت ها برای y
۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۴	تعداد حالت ها برای z
۲۷	۳۶	۳۶	۴۸	۲۷	۳۶	۳۶	۴۸	تعداد حالت ها

با توجه به این که برای t هم دو حالت داریم، تعداد کل اعداد مضرب ۵ غیر تقسیمی ۵۸۸ تا است.

$$2(27 + 36 + 36 + 48 + 27 + 36 + 36 + 48) = 588$$

۱۷. گزینه ی (ج) صحیح است.

از B عمودی بر AC رسم می کنیم و پای این عمود را K می نامیم. در این صورت -
 $\angle CDB = \angle CKB$ و لذا چهارضلعی $CDKB$ محاطی است و در نتیجه - دو مثلث OKB و ODC
 متشابه هستند. بنابراین

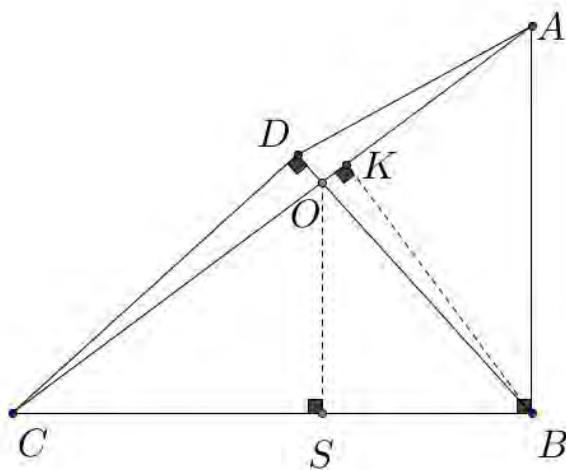
$$\frac{DC}{KB} = \frac{CO}{OB} = \frac{CO}{3} \Rightarrow CO = 3 \frac{DC}{KB} = 3 \frac{AB}{KB} \quad (*)$$

از طرف دیگر دو مثلث ABC و AKB هم متشابه هستند و لذا

$$\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{5} \Rightarrow CO = \frac{3}{5} AC$$

حال از O بر BC عمود می کنیم و پای عمود را S می نامیم. OS و AB هر دو بر BC عمود هستند و لذا با هم موازی اند. بنابراین طبق قضیه ی تالس داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{CS}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{CS}{5} \Rightarrow CS = 3, BS = 2$$



و در نهایت با استفاده از قضیه ی فیثاغورس در مثلث های قائم الزاویه ی OBS و OSC خواهیم داشت:

$$OC^2 = OS^2 + SC^2 = BO^2 - BS^2 + SC^2 = 9 - 4 + 9 = 14$$

و بنابراین $OC = \sqrt{14}$.

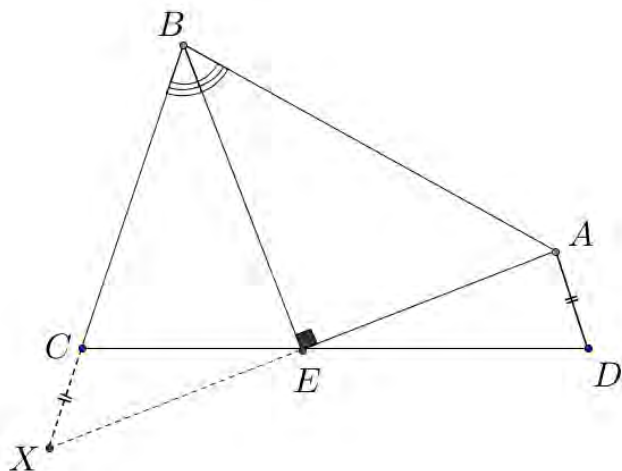
۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

با یک بررسی ساده می‌بینیم که ترکیب اعمال گفته شده در صورت مسئله در حقیقت همان دوران 72° ساعت‌گرد به مرکز مبدأ است و بنابراین انجام این عمل برای ۱۳۸۲ مرحله معادل دورانی به اندازه‌ی 72×1382 درجه است. اما می‌دانیم که دوران 360° درجه و مضارب 360° درجه همان دوران صفر درجه است. پس

$$1382 \times 72 = 1380 \times 72 + 2 \times 72 = (138 \times 2) \times 360 + 144$$

کل این عمل دورانی 144° درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و لذا $x = 4$ و $y = 5$ است.

۱۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



AE را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AEB و XEB به حالت وتر و یک زاویه ($\angle ABE = \angle XBE$) با هم برابر هستند و در نتیجه $(*)$ $XE = AE$ و $BX = AB$ $(**)$. حال با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های ADE و XEC داریم:

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle DEA)}{AD}, \quad \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

با توجه به این که $\angle ADE = \angle BCE$ ، دو زاویه‌ی $\angle ADE$ و $\angle XCE$ مکمل هستند و در نتیجه سینوس برابر دارند. این موضوع و $*$ نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} \Rightarrow \frac{\sin(\angle DEA)}{AD} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

اما دو زاویه‌ی $\angle XEC$ و $\angle DEA$ متقابل‌به‌رأس هستند و لذا سینوس برابر دارند. بنابراین $AD = XC$

و

$$(\star\star) \Rightarrow AB = BX = BC + XC = BC + AD$$

که همان چیزی است که گزینه ی (د) به آن اشاره می کند.

۲۰. گزینه ی (ج) صحیح است.

طبق رابطه ی اول داریم:

$$a^3 + (-b)^3 + 1^3 = 3a(-b)(1)$$

این یعنی مجموع مکعب های سه عدد برابر حاصل ضرب آن ها شده است. طبق اتحاد اویلر این نتیجه می دهد این سه عدد با هم برابر هستند و یا این که مجموع آن ها برابر صفر است. اگر $a = -b = 1$ ، $a^5 = 1 + a^5 = 2$ در حالی که $b^5 = -1$ پس این حالت امکان ندارد و $a - b + 1 = 0$ ، معادلاً $b = a + 1$. حال اگر این نتیجه را در رابطه ی دوم جای گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1 + a^5 &= (1 + a)^5 \Rightarrow (1 + a)((1 + a)^4 - (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)) = 0 \\ (1 + a)^4 - (a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) &= 5a^3 + 5a^2 + 5a = 5a(a^2 + a + 1) \\ \Rightarrow 5a(a + 1)(a^2 + a + 1) &= 0 \end{aligned}$$

از آن جا که $a^2 + a + 1 > 0$ ، تنها جواب های معادله ی اخیر $a = 0$ و $a = -1$ هستند که به ترتیب منجر به $b = 1$ و $b = 0$ می شوند. پس این دست گاه در مجموع دو جواب دارد.

۲۱. گزینه ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که $a + \frac{1}{a} - 2 = \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)^2$ و $a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 = \left(\frac{a^3-1}{a\sqrt{a}}\right)^2$. پس

$$\begin{aligned} a^3 + \frac{1}{a^3} - 2 \geq \lambda \left(a + \frac{1}{a} - 2\right) &\Leftrightarrow \left(\frac{a^3-1}{a\sqrt{a}}\right)^2 - \lambda \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)^2 \left(\left(\frac{a^3+a+1}{a}\right)^2 - \lambda\right) &\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a^3+a+1}{a}\right)^2 \geq \lambda \end{aligned}$$

یعنی باید بزرگترین مقدار λ را بیابیم که رابطه ی بالا را برآورده کند. این یعنی باید کمترین مقدار عبارت $\left(\frac{a^3+a+1}{a}\right)^2$ را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 &\Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2 + a + 1}{a} = a + \frac{1}{a} + 1 \geq 3 \\ &\Rightarrow \left(\frac{a^2 + a + 1}{a}\right)^2 \geq 3^2 = 9 \end{aligned}$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای λ ، 9 است.

۲۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

منظور از زاویه‌ی قورباغه، زاویه‌ای است که خط واصل بین قورباغه با جهت مثبت محور y می‌سازد. دقت کنید که زاویه را با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. در هر حرکت جدید زاویه‌ی قورباغه 45° افزایش پیدا می‌کند، پس بعد از 15 مرحله قورباغه زاویه‌ی قورباغه $315^\circ = 15 \times 45^\circ$ می‌شود و بنابراین قورباغه روی قسمتی از خط $y = -x$ که درون ربع دوم مختصات قرار دارد، خواهد بود.

به علاوه اگر فاصله‌ی قورباغه تا مبدأ مختصات بعد از گام n ام را d_n بنامیم. d_{n+1} طول وتر مثلث

قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی است که طول ساق آن برابر d_n است. بنابراین $d_{n+1} = \sqrt{2}d_n$. پس

$$d_{15} = \sqrt{2} \cdot d_{14} = (\sqrt{2})^2 d_{13} = \dots = (\sqrt{2})^{15} d_0 = (\sqrt{2})^{15} = 2^7 \sqrt{2} = 128\sqrt{2}$$

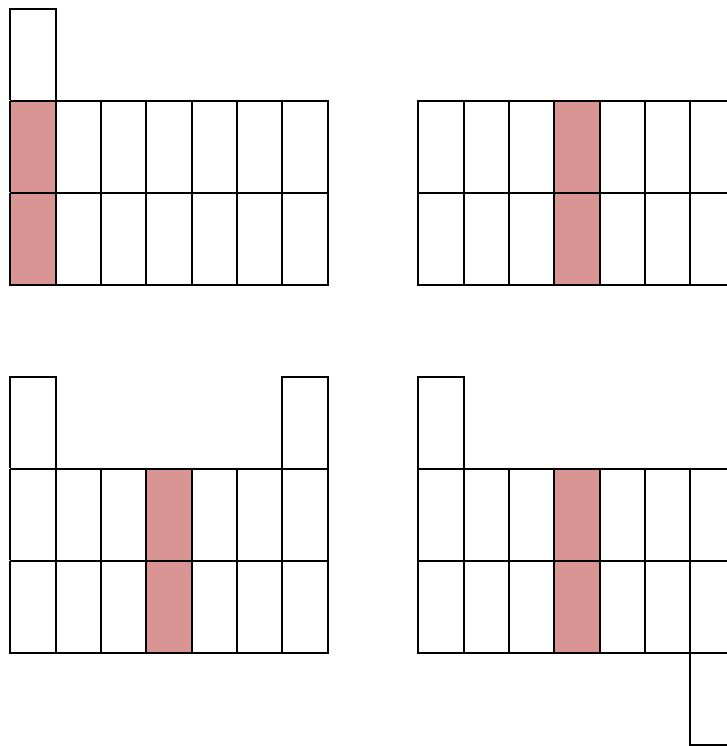
با توجه به این که (a, b) روی خط $y = -x$ قرار دارد، $b = -a > 0$ و

$$2^{15} = (2^7 \sqrt{2})^2 = d_{15}^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = -2^7 = -128$$

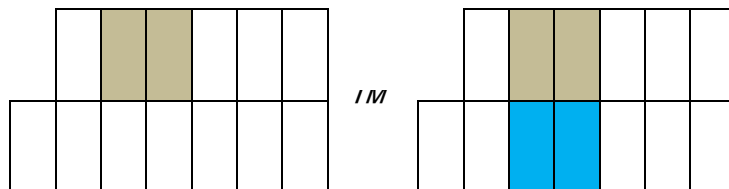
توضیح: می‌توان با اندکی تلاش به دست آورد که اگر قورباغه در خانه‌ی (x, y) قرار داشته باشد، بعد از جهش از این خانه با شیوه‌ای که در صورت سؤال بیان شده است به خانه‌ی $(x+y, y-x)$ می‌رود. (در حقیقت بردار (x, y) با دوران 90° در جهت ساعت‌گرد یعنی $(y, -x)$ جمع می‌شود.)

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

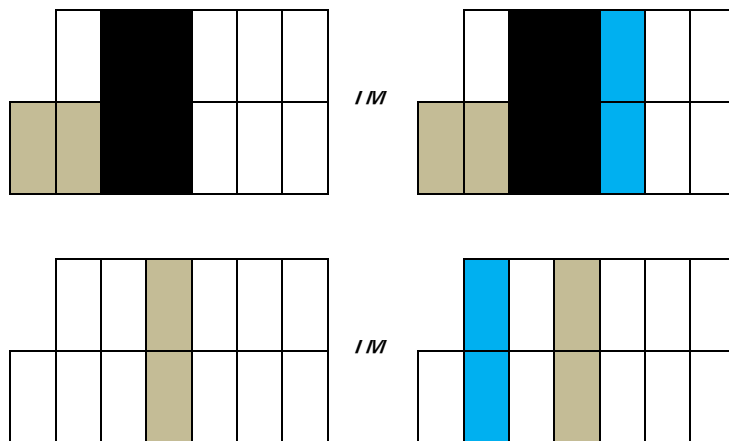
ادعا می‌کنیم در گزینه‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نفر اول همواره می‌تواند برنده‌ی بازی باشد. به این صورت که در هر کدام از این چهار گزینه مطابق شکل زیر با قرار دادن این کاشی زمین بازی شکلی است که دارای یک خط تقارن یا یک مرکز تقارن است و به علاوه در این زمین جدید نفر دوم شروع کننده‌ی بازی است. حالا نفر اول در هر گام قرینه‌ی خانه‌هایی که نفر دوم با یک کاشی پر کرده است را با یک کاشی جدید پر می‌کند. با این نحوه‌ی بازی اگر نفر دوم بازی کند، نفر اول حتماً می‌تواند حرکت بعد از آن را هم انجام دهد و لذا نفر اول نمی‌تواند بازنده باشد و بنابراین حتماً برنده است.



حال روشی آرایه می‌دهیم که نفر دوم می‌تواند با این روش در گزینه‌ی (ه) برنده‌ی بازی باشد.
 اگر نفر اول یک کاشی افقی را در جدول قرار دهد طوری که شامل تک‌خانه‌ی پایین چپ جدول نباشد، نفر دوم یک کاشی افقی را دقیقاً پایین یا بالای کاشی نفر اول قرار می‌دهد. (اگر نفر اول در ردیف پایین گذاشته باشد، نفر دوم در ردیف بالا می‌گذارد و بالعکس)
 در زیر شکل سمت چپ حرکت نفر اول و شکل سمت راست حرکت نفر دوم را تصویر می‌کند. خانه‌های مشکی رنگ هم خانه‌هایی را نشان می‌دهند که قبلاً با کاشی پر شده‌اند.



اگر نفر اول یک کاشی عمودی در جدول قرار دهد، یا این که یک کاشی افقی را مطابق شکل زیر طوری قرار دهد که تک‌خانه‌ی پایین سمت چپ جدول را بپوشاند، نفر دوم یک کاشی عمودی را در اولین ستون از سمت چپ که کاملاً خالی باشد قرار می‌دهد.



وقتی نفر اول و دوم یک دور بازی خود را انجام دهند، دو ستون از ستون‌های دوتایی جدول غیرقابل قابل استفاده می‌شود، اگر نفر اول یک بار از حرکت‌های دوم استفاده کند، تک ستون یک خانه‌ای هم غیرقابل استفاده می‌گردد. بنابراین در هر دو بازی هر دو نفر اول و دوم ۲ ستون از شش ستون کامل جدول (غیر از تک ستون ناقص) غیرقابل استفاده می‌شود. بنابراین با ادامه‌ی این روند به وضعیتی می‌رسیم که نفر اول نتواند بازی را ادامه دهد.

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ساعت ۵ و x دقیقه باشد، در این صورت زاویه‌ی عقربه‌ی دقیقه‌شمار نسبت به نقطه‌ی صفر (همان ۱۲)، $6x = \frac{x}{6} \times 360$ درجه و زاویه‌ی عقربه‌ی ساعت‌شمار برابر $150 + \frac{x}{2}$ درجه باشد. حال اگر در ساعت a و b دقیقه عقربه‌ها در وضعیت مشابهی قرار داشته باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned} 30a + \frac{b}{2} = 6x &\Rightarrow 6 \left| \frac{b}{2} \right| \Rightarrow 12 | b \\ 6b = 150 + \frac{x}{2} &\Rightarrow 6 \left| \frac{x}{2} \right| \Rightarrow x = 12k \quad (0 \leq k \leq 5) \\ \Rightarrow 6b = 150 + 6k &\Rightarrow b = 25 + k \end{aligned}$$

با توجه به این که b بر ۱۲ بخش پذیر است، باید $k + 1$ بر ۱۲ بخش پذیر باشد که برای $k = 0, 1, \dots, 5$ امکان ندارد.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

رشته‌ی مرحله‌ی i ام را با A_i نمایش می‌دهیم. همچنین منظور ما از نماد $A_i A_j$ این است که رشته‌ی مربوط به A_i در سمت چپ رشته‌ی A_j قرار گرفته است. به طور مثال $A_4 A_1 = A_4 A_1$. به استقرا نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی m ، $A_{3m+2} = A_{3m-1} A_{3m-2} A_{3m-1} A_{3m-1} A_{3m-2}$ (با اندکی بازی کردن برای رسیدن به A_8 و سپس A_8 از روی A_5 و با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۳۸۲ بر ۳ برابر ۲ است می‌توان این رابطه را حدس زد.)

برای حالت $m = 1$ که حکم به وضوح برقرار است. $(A_8 = A_4 A_1 A_4 A_1 A_4)$ حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد، یعنی:

$$A_{3k+2} = A_{3k-1} A_{3k-2} A_{3k-1} A_{3k-1} A_{3k-2}$$

حال اگر باکتری‌ها سه مرحله رشد کنند به اندیس هر A_n ای سه واحد اضافه می‌گردد. پس

$$A_{3(k+1)+2} = A_{3k+5} = A_{3k+2} A_{3k+1} A_{3k+2} A_{3k+1} A_{3k+2}$$

و حکم ثابت می‌شود. حال از آن جا که تعداد باکتری‌های دو رشته‌ی $A_{3m-1} A_{3m-2}$ و $A_{3m-2} A_{3m-1}$ یکسان و برابر مجموع تعداد باکتری‌های رشته‌های A_{3m-1} و A_{3m-2} است، سه باکتری وسطی مربوط به A_{3m+2} همان سه باکتری وسطی مربوط به A_{3m-1} است و با استدلال مشابه سه باکتری وسطی A_{3m-1} همان سه باکتری وسطی A_{3m-4} است. با ادامه‌ی همین فرآیند می‌فهمیم که سه باکتری وسطی A_{3m+2}

همان سه باکتری وسطی A_5 است. پس با توجه به این که $1382 = 3 \times 460 + 2$ گزینه ی (الف) گزینه ی درست است.

۲۶. گزینه ی (ب) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که n باید عددی فرد باشد. زیرا اگر n بر ۲ بخش پذیر شود:

$$\circ \equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (-2)^n \equiv 2^n + 2^n \equiv 2^{n+1} \pmod{5} \text{ (به پیمانه ی ۵)}$$

که امکان ندارد. حال برای $n \geq 3$ داریم: (حالت $n = 1$ و $n = 2$ به وضوح جواب نیستند.)
(دقت کنید که همه ی روابط زیر بالا به پیمانه ی ۱۲۵ هستند.)

$$\begin{aligned} \circ &\equiv 2^n + 3^n \equiv 2^n + (5-2)^n \equiv 2^n + \binom{n}{n} 5^n (-2)^0 + \dots + \binom{n}{1} 5^1 (-2)^{n-1} + \binom{n}{0} 5^n (-2)^n \\ &\equiv 2^n - \frac{n(n-1)}{2} 5^2 \times 2^{n-2} + 2^{n-1} \times 5 \times n - 2^n \equiv 2^{n-2} (-25n^2 + 45n) \end{aligned}$$

حال با استفاده ی از رابطه ی بالا خواهیم داشت:

$$125 \mid 2^{n-2} \times 5n(5n-9) \Rightarrow 25 \mid 2^{n-2} n(5n-9)$$

حال با توجه به این که $(5, 2) = 1$ و $(5, 1) = 1$ و $(5, -9) = (5, 5n-9) = 1$ و با به کارگیری لم اقلیدس نتیجه می شود که باید n بر ۲۵ بخش پذیر باشد. کوچک ترین عدد طبیعی مضرب ۲۵ خودش است که مجموع ارقامش برابر ۷ می باشد. پس گزینه ی (ب) صحیح است.

۲۷. گزینه ی (ج) درست است.

اولاً فرض کنید $10^{k-1} \leq n < 10^k$ یک عدد ریشه دار k رقمی باشد. در این صورت $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$ حال داریم

$$10^{k-1} \leq n = (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1)^2 < (10k)^2 \Rightarrow 10^{k-3} < k^2$$

اما به سادگی به کمک استقرا می توان نشان داد که اگر k بزرگ تر از ۴ باشد، $10^{k-3} \geq k^2$ و لذا عدد ریشه دار با بیش از ۴ رقم نداریم و بنابراین تعداد اعداد ریشه دار باید متناهی باشد.

حال ادعا می‌کنیم عدد ریشه‌دار ۴ رقمی هم وجود ندارد. اگر $n = \overline{abcd}$ یک عدد ریشه‌دار چهار رقمی باشد، این یعنی $۱۰۰۰ \leq n = (a + b + c + d)^2 < ۴۰^2 = ۱۶۰۰$ پس $a = ۱$ و اگر a برابر یک باشد، باید داشته باشیم $۱۰۰۰ \leq n = (۱ + b + c + d)^2 < (۱ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰)^2 = ۳۱^2 = ۹۶۱$ که امکان ندارد. پس عدد ریشه‌دار چهاررقمی هم نداریم. اما به وضوح ۸۱ یک عدد ریشه‌دار دورقمی است.

به علاوه دقت کنید که می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۹ با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ با هم برابر هستند. اگر مجموع ارقام n را با $S(n)$ نمایش دهیم، ریشه‌دار است اگر $n = S(n)^2$ پس باید

$$n \equiv S(n) \equiv n \equiv S(n)^2 \equiv n^2 \pmod{9} \text{ (به پیمانه‌ی ۹)}$$

پس باید $9 | n(n-1)$ ، با توجه به این که n و $n-1$ هر دو نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند این تنها در صورتی امکان دارد که $9 | n$ و یا $9 | n-1$. یعنی تمام اعداد ریشه‌دار به شکل $9k$ و $9k+1$ هستند و غیر از این دو صورت عدد ریشه‌داری نداریم.

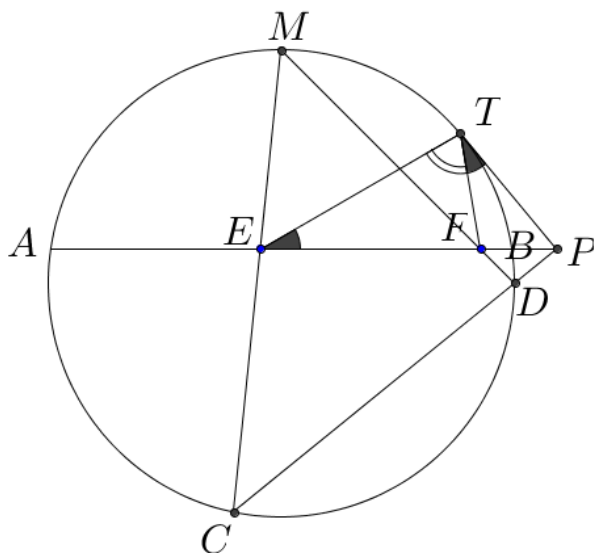
توضیح: دقت کنید که اگر n عددی ریشه‌دار باشد، از آن‌جا که $n < ۱۰۰۰$ ، $S(n) = \sqrt{n} < \sqrt{۱۰۰۰}$. پس $S(n) \leq ۳۲$ اما $S(n) \equiv n \equiv ۰, ۱ \pmod{9}$ (به پیمانه‌ی ۹) پس $S(n) \in \{1, 8, 9, 17, 18, 26, 27\}$.

اما

$$\begin{aligned} S(8^2) &= S(64) = 10 \neq 8 \\ S(17^2) &= S(289) = 19 \neq 17 \\ S(18^2) &= S(324) = 9 \neq 18 \\ S(26^2) &= S(676) = 19 \neq 26 \\ S(27^2) &= S(729) = 18 \neq 27 \end{aligned}$$

بنابراین تنها عددهای ریشه‌دار ۱ و ۸۱ هستند.

۲۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که $\angle MBE = \angle BCM = \frac{\widehat{AB}}{2}$ ، بنابراین با توجه به این که زاویه‌ی $\angle BME$ در دو مثلث BME و BMC مشترک است، این مثلث متشابه هستند. نسبت تشابه این دو مثلث نتیجه می‌دهد $MB^2 = ME \cdot MC$. با استدلال کاملاً مشابه و با توجه به مثلث‌های BAM و AMF می‌آوریم $MA^2 = MF \cdot MD$. از آنجا که دو کمان MA و MB با هم برابر هستند، $MA^2 = MB^2$ و در نتیجه $ME \cdot MC = MF \cdot MD$ و این یعنی

چهارضلعی $EFDC$ محاطی است. از محاطی بودن این چهارضلعی نتیجه می‌شود که $PF \cdot PE = PD \cdot PC$. اما طبق قوت P نسبت به دایره‌ی اصلی مسئله $PD \cdot PC = PT^2$. این رابطه نتیجه می‌دهد که دو مثلث PTE و PTF متشابه‌اند و لذا $\angle TEP = \angle PTF = 3^\circ$. در نتیجه داریم $\angle TPE = 18^\circ - 3^\circ - 3^\circ - 7^\circ = 5^\circ$.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

M را وسط ضلع AC و G را مرکز ثقل مثلث بگیریم. در این صورت نقطه‌ی A باید روی کمان درخور زاویه‌ی 15° نظیر پاره‌خط BM باشد. از آنجا که طول AG برابر $\frac{2}{3}$ میان‌ه‌ی نظیر رأس A است، کافی است کم‌ترین مقدار ممکن برای AG را بیابیم و آن را در $\frac{3}{2}$ ضرب کنیم. فرض کنید O مرکز این کمان درخور باشد و نیم‌خط OG دایره را در نقطه‌ی X قطع کند. حال داریم

$$OG + GA \geq OA = OX \Rightarrow GA \geq OX - OG = XG$$

یعنی کم‌ترین مقدار ممکن طول GX است. حال باید طول GX را بیابیم. با توجه به قوت نقطه‌ی G داریم:

$$TG \cdot GX = GA \cdot GM = 2 \Rightarrow (2R - GX)GX = 2$$

که T و R به ترتیب محل تماس دوم خط GX و دایره‌ی محیطی AMC و شعاع این دایره هستند.

$$R = \frac{3}{2 \sin(15^\circ)} = 3$$

پس $GX^2 - 6GX + 2 = 0$ و بنابراین $GX = 3 \pm \sqrt{7}$ که چون $GX < R = 3$ تنها حالت $GX = 3 - \sqrt{7}$ قابل قبول است.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

T را نقطه‌ی وسط ضلع BC بگیرید و فرض کنید h_a, h_b, h_c و h_t به ترتیب طول عمودهای وارد از A, B, C بر T و MN باشند. از آن جا که قاعده‌ی هر سه مثلث همان MN است باید $h_b + h_c = h_a$. حال از آن جا که T نقطه‌ی وسط ضلع BC است، می‌توان به سادگی به کمک قضیه‌ی تالس نتیجه گرفت که $h_t = \frac{h_b + h_c}{2} = \frac{h_a}{2}$. حال فرض کنید خط واصل بین A و T ، خط مذکور در صورت سؤال را در نقطه‌ی S قطع کند. در این صورت به دلیل قضیه‌ی تالس و توازی عمودهای وارد از A و T ، $\frac{AS}{ST} = \frac{h_a}{h_t} = 2$ ، پس S نقطه‌ای روی میانه‌ی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است که این میانه را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس باید مرکز ثقل مثلث باشد و بنابراین این خط همواره از مرکز ثقل مثلث که نقطه‌ای ثابت در صفحه‌ی مثلث است می‌گذرد.