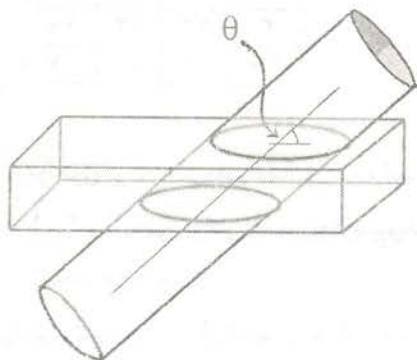


مرحله اول بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور

سال ۱۳۸۱



(۱) کیکی به شکل مکعب مستطیل به ابعاد $۱۰ \times ۲۰ \times ۵۰$ داریم. به کودکی اجازه داده شده به وسیله یک استوانه که دوسر آن باز است، از یک قطعه‌ای جدا کند؛ به این ترتیب که استوانه را با یکی از زوایای ۳۰° ، ۴۵° ، ۶۰° ، ۹۰° نسبت به سطح بزرگ وارد آن کرده و مقدار کیکی را که درون استوانه قرار می‌گیرد برای خود بردارد. در کدام حالت بیش‌ترین مقدار کیکی را به دست می‌آورد؟

الف) $\theta = ۳۰^\circ$

ب) $\theta = ۴۵^\circ$

ج) $\theta = ۶۰^\circ$

د) $\theta = ۹۰^\circ$

ه) در همه موارد، مقدار ثابتی کیکی به دست می‌آید.

(۲) در یک چهار وجهی چهار مثلث داریم که هر کدام سه زاویه دارند. اگر از این دوازده زاویه n تای آن‌ها منفرجه باشند آنگاه

الف) n نمی‌تواند ۱ باشد. ب) n نمی‌تواند ۲ باشد. ج) n نمی‌تواند ۳ باشد.

د) n نمی‌تواند ۴ باشد. ه) هیچ کدام.

(۳) در یک ده، صد خانه ساخته شده است. هر ۱۰ خانه‌ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بام‌هایشان هست (ممکن است روی یک بام هیچ یا چند آنتن هم باشد). هر سه تا آنتنی را که در نظر بگیریم، حداقل دو کلاغ روی آن‌ها نشسته است (ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ هم باشد). این ده حداقل چند کلاغ دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۹۲ ج) ۹۳ د) ۹۸ ه) ۹۹

(۴) اگر از یک عدد سه رقمی کم‌تر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به دست آید؟

الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۳ د) ۵۵ ه) ۵۶

o	o	o	o
o	o	o	o
o	o	o	o
o	o	o	o

(5) در هر مرحله 4 خانه از جدول روبرو انتخاب می‌کنیم به طوری که از هیچ سطر یا ستونی 2 خانه انتخاب نشده باشد. عددهای هر 4 خانه را یک واحد اضافه یا از هر یک، یک واحد کم می‌کنیم. با این روش به کدام یک از جدول‌های زیر می‌توان رسید؟

4	3	2	1
4	3	1	2
3	2	1	4
1	3	4	2

(ج)

20	o	o	13
o	17	4	7
10	5	10	11
o	6	11	13

(ب)

-21	o	-6	3
-6	10	27	27
20	7	7	4
3	23	10	4

(الف)

15	17	3	15
16	13	13	6
14	13	15	8
3	5	19	21

(ه)

10	17	2	21
17	17	14	2
3	13	24	10
20	3	10	17

(د)

(6) هر مولکول از تعدادی اتم تشکیل شده است. بین هر دو اتم یک ملکول، تعدادی پیوند وجود دارد. این تعداد می‌تواند 0، 1، 2 و یا حتی بیشتر باشد. تعداد پیوندهای بین اتم‌های x و y در مولکول‌های مختلف عددی ثابت و وابسته به x و y است. می‌دانیم:

- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b و c دارای 5 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b و d دارای 7 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, c و d دارای 3 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b, c و d دارای 5 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b, c, d چند پیوند دارد؟

(الف) 6

(ب) 10

(ج) 12

(د) 15

(ه) مساله جواب منحصر به فرد ندارد.

(7) مولکول تشکیل شده توسط 10 اتم x_1, x_2, \dots, x_{10} را در نظر بگیرید. می‌دانیم این مولکول 43 پیوند دارد و در ضمن بین هر دو اتم از این مولکول حداکثر یک پیوند موجود است. می‌گوییم سه اتم x_i, x_j, x_k تشکیل یک مثلث می‌دهند، هرگاه بین هر دو تا از آنها پیوند موجود باشد. فرض کنید تعداد مثلث‌های این مولکول برابر t باشد. کدام گزینه صحیح است؟

(ج) $103 \leq t \leq 105$

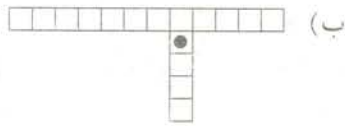
(ب) $99 \leq t \leq 102$

(الف) $96 \leq t \leq 98$

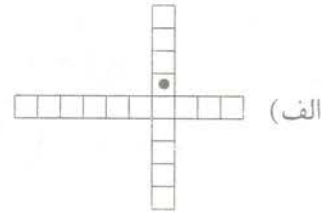
(ه) $109 \leq t \leq 112$

(د) $106 \leq t \leq 108$

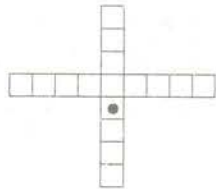
(8) شیرین در نقطه A و فرهاد در نقطه B ایستاده است. آنها می‌خواهند از کوه‌ها و دره‌ها عبور کنند و به هم برسند، ولی هیچ کدام از آنها نمی‌خواهد بالاتر از دیگری قرار گیرد. به همین منظور طوری حرکت می‌کنند که در هر لحظه هم ارتفاع باشند. در کدام یک از کوهستان‌های زیر فرهاد و شیرین به هم می‌رسند؟



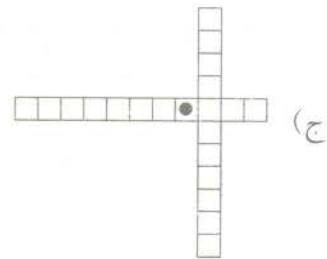
(ب)



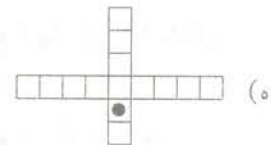
(الف)



(د)



(ج)



(ه)

۱۲) زیرمجموعه A از اعداد طبیعی را ضعیف می‌نامیم؛ هرگاه مجموع هیچ دو عضوی از A بر عضوی از A بخش‌پذیر نباشد. در ضمن، یک مجموعه ضعیف را بزرگ می‌نامیم؛ هرگاه هیچ زیرمجموعه ضعیف دیگری شامل آن نباشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (الف) نامتناهی مجموعه ضعیف نامتناهی داریم.
- (ب) مجموعه ضعیف نامتناهی وجود دارد که بزرگ است.
- (ج) نامتناهی مجموعه ضعیف متناهی داریم که بزرگ هستند.
- (د) مجموعه ضعیف نامتناهی وجود دارد که همه اعضای آن بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیرند.
- (ه) مجموعه‌ای ضعیف وجود دارد که از هر سه عدد متوالی حداقل یکی را دارا است.

۱۳) به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول 4×4 یکی از دو عدد ۰ و ۱ را نوشت به طوری که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون برابر ۲ شود؟

- (الف) ۸۳ (ب) ۴۴ (ج) ۵۴ (د) ۹۰ (ه) ۷۸

۱۴) فرض کنید A یک مجموعه ۱۰ عضوی و B زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد. تعداد زیرمجموعه‌هایی (مانند C) از مجموعه A که $B \cap C$ تعداد فردی عضو داشته باشد برابر است با:

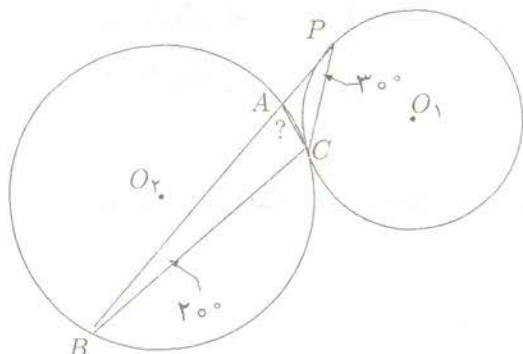
الف) ۵۹۶

ب) ۵۱۲

ج) ۴۶۴

د) ۳۴۸

ه) بستگی به تعداد اعضای B دارد.



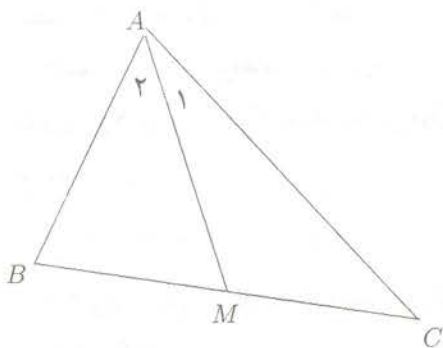
۱۵) در شکل مقابل BP بر دایره (O_1) مماس است. داریم: $\widehat{APC} = 30^\circ$ و $\widehat{CBA} = 20^\circ$. همچنین دایره (O_1) و (O_2) بر هم مماس اند. اندازه \widehat{BAC} کدام است؟

- الف) 80° ب) 130° ج) 60°
 د) 50° ه) 140°

۱۶) در چهار ضلعی محاطی ABCD داریم: $AB = 3, BC = DA = 2, CD = 4$. طول قطر BD چقدر است؟

- الف) ۵ ب) $\frac{7}{4}$ ج) $2\sqrt{3}$ د) $\frac{17}{4}$ ه) ۴

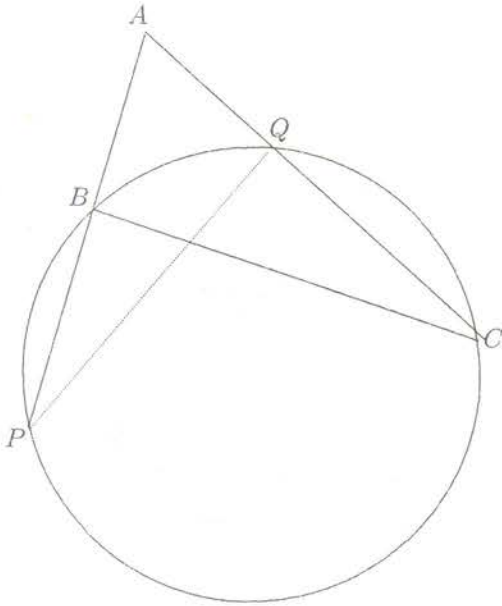
۱۷) در شکل روبه رو زاویه $\widehat{A_1}$ دو برابر زاویه $\widehat{A_2}$ است و داریم: $AB = 1$ و $AC = \sqrt{3}$ و AM میانه BC است. طول BC کدام است؟



- الف) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ج) ۲
 د) $\sqrt{3}$ ه) $\frac{3}{2}$

۱۸) در مثلث ABC، $\widehat{A} = 120^\circ$ و مجموع دو ضلع AB و AC برابر 10 است. در مورد ضلع BC چه می توان گفت؟

- الف) $BC < 9$ ب) $BC \geq 5\sqrt{3}$ ج) $5 \leq BC \leq 9$
 د) $5\sqrt{3} \leq BC \leq 9$ ه) $\frac{11}{2} \leq BC \leq \frac{17}{2}$



۱۹) در مثلث ABC دایره‌ی را در نظر بگیرید که از رئوس B و C می‌گذرند و AB و AC یا امتداد آن‌ها را در نقاطی مثل P و Q قطع می‌کنند. مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی مانند PQ کدام می‌باشد؟

- الف) عمود منصف BC .
- ب) خطی که از A می‌گذرد.
- ج) قسمتی از دایره‌ای که از B و C می‌گذرد.
- د) دایره‌ای که از A می‌گذرد.
- ه) هیچ کدام

۲۰) معادله‌ی زیر در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

$$x^2 + y^5 = 1381 + z^2$$

- الف) صفر
- ب) ۲
- ج) ۴
- د) ۸
- ه) بی‌نهایت

۲۱) فرض کنید n عددی طبیعی باشد، مقسوم علیه d از n را خوب می‌گوییم، اگر $(d, \frac{n}{d}) = 1$. فرض کنید $f(n)$ نماینده‌ی مجموع مقسوم علیه‌های خوب n باشد و S مجموعه‌ی اعداد طبیعی مانند m باشد که $f(m) - 2$ مضرب ۴ است و $1 \leq m \leq 1000$. کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

- الف) عضوی از S وجود دارد که بر ۳۰ بخش پذیر است.
- ب) عضوی از S به شکل $4k + 3$ است.
- ج) هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد.
- د) عضوی از S وجود دارد که تعداد عوامل اول آن ۴ است.
- ه) هیچ کدام.

۲۲) فرض کنید f و g دو تابع از N به R باشند. می‌گوییم $f \triangleleft g$ اگر عدد طبیعی N وجود داشته باشد که برای هر $n > N$ ، $f(n) < g(n)$ اگر:

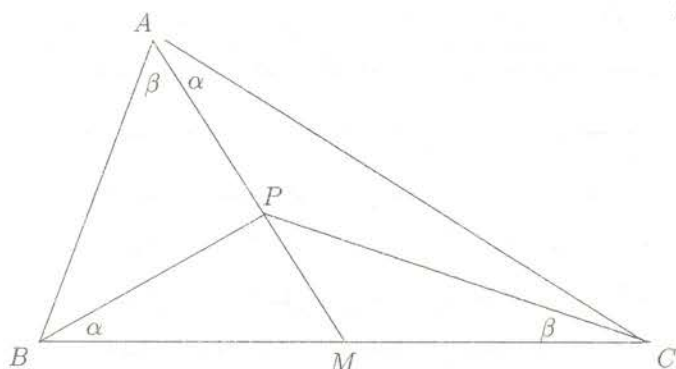
$$f_1(n) = (10^n)!$$

$$f_2(n) = 2^{n!}$$

$$f_3(n) = \sqrt[n]{(n!)!}$$

کدام گزینه صحیح است؟

- الف) $f_1 \triangleleft f_2 \triangleleft f_3$
- ب) $f_2 \triangleleft f_1 \triangleleft f_3$
- ج) $f_3 \triangleleft f_2 \triangleleft f_1$
- د) $f_1 \triangleleft f_3 \triangleleft f_2$
- ه) $f_2 \triangleleft f_3 \triangleleft f_1$



۲۳) در مثلث ABC ، AM میانه است. نقطه P روی AM چنان قرار گرفته است که

$$\widehat{PAC} = \widehat{PBC} = \alpha$$

$$\widehat{PAB} = \widehat{PCB} = \beta$$

اگر $\alpha + \beta = 80^\circ$ زاویه \widehat{CPA} چقدر است؟

الف) 130°

ب) 120°

ج) 140°

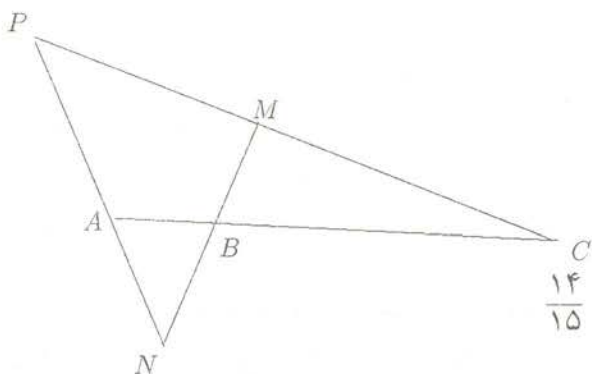
د) $120^\circ < \widehat{CPA} < 130^\circ$

ه) تمام مقادیر بین 120° و 140° می‌تواند باشد.

۲۴) در شکل روبرو $BM = BN$. اگر داشته باشیم

$$\frac{S_{BMC}}{S_{APC}} = \frac{4}{49}$$

مطلوبست مقدار $\frac{AB}{AC}$.



ج) $\frac{14}{15}$

ب) $\frac{2}{7}$

ه) $\frac{2}{3}$

الف) $\frac{4}{49}$

د) $\frac{3}{7}$

۲۵) بزرگ‌ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت یک محاط شود چه مساحتی دارد؟

ه) $\frac{3}{4}$

د) $\frac{2}{3}$

ج) $\frac{1}{4}$

ب) $\frac{1}{3}$

الف) $\frac{1}{4}$

۲۶) داخل یک نیم کره و صفحه گذرنده از دایره عظیمه آن را آینه کرده‌ایم. پرتوی را در نظر بگیرید که از نقطه‌ای روی نیم کره به سوی درون آن تابیده می‌شود. فرض کنید اگر پرتو به مرز دایره عظیمه برخورد کند روی همان مسیر برگردد. (توجه کنید که بردار عمود بر سطح، پرتو تابش و بازتابش همواره در یک صفحه‌اند و هر پرتو که به نیم کره برخورد می‌کند چنان منعکس می‌شود که نیمساز بین پرتو تابش و بازتابش از مرکز کره بگذرد.

الف) مسیر این پرتو به مرز دایره عظیمه میل می‌کند.

ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم کره و دایره عظیمه آن به دلخواه نزدیک می‌شود.

ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.

د) مسیر این پرتو به ازای نامتناهی جهت تابش، متناوب است.

ه) مسیر این پرتو تنها به ازای متناهی جهت تابش، متناوب است.

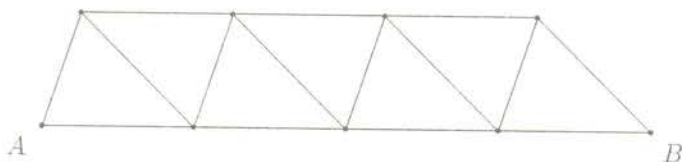
۲۷) خرج نگهداری فیل خیلی زیاد است به همین دلیل رییس باغ وحش شهر خسیس‌ها تصمیم می‌گیرد اگر دو فیل هم شکل داشته باشد، یکی از آن‌ها را بفروشد. به نظر وی دو فیل وقتی هم شکل‌اند که در مقایسه طول خرطوم و طول

دم آن‌ها با هر فیل دیگری که در باغ وحش وجود دارد، هر دو به نتایج یکسانی برسند. یعنی برای مثال، اگر با فیل خاصی مقایسه شوند طول خرطوم هر دو از خرطوم آن کوتاه‌تر باشد و طول دم هر دو از طول دم آن بلندتر باشد. پس از عملیات فروش، وقتی دیگر هیچ دو فیلی هم شکل نیستند کدام یک از گزینه‌ها صحیح است؟

(توجه کنید که طول خرطوم یا دم هیچ دو فیلی برابر نیست.)

- الف) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.
- ب) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۵ فیل باقی بماند.
- ج) ممکن است ۴ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۳ فیل باقی بماند.
- د) ممکن است ۵ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.
- ه) ممکن است هر تعداد بیش‌تر یا مساوی ۳ فیل باقی بماند.

۲۸) در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم از نقطه A به نقطه B برویم به طوری که از هیچ نقطه‌ای دوبار عبور نکنیم؟



- الف) ۸۱
- ب) ۷۲
- ج) ۶۱
- د) ۵۲
- ه) ۴۴

۲۹) دنباله $\{x_n\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم $x_0 = t$ و به ازای $n \geq 0$ $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ چند $t \in [-1, 1]$ وجود دارد که $x_{11} = 1$ ؟ (راهنمایی: $\cos 2\theta + 1 = 2\cos^2 \theta$)

- الف) چنین t ای وجود ندارد.
- ب) تنها یک t با این خاصیت وجود دارد.
- ج) تعدادی چنین t هایی بین صد و هزار است.
- د) بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد.
- ه) نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد.

۳۰) فرض کنید $p(x) = x^2 + a$ که a یک عدد حقیقی و ثابت است. معادله $p(p(x)) = x$ را در نظر بگیرید.

- الف) این معادله چهار جواب دارد اگر و تنها اگر $a < \frac{2}{3}$.
- ب) این معادله همواره جواب دارد.
- ج) به ازای $a = \frac{1}{4}$ این معادله دو جواب دارد.
- د) به ازای $a > 0$ این معادله جواب ندارد.
- ه) الف و ب

به نام او

راه حل سؤالات مرحله اول بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۱

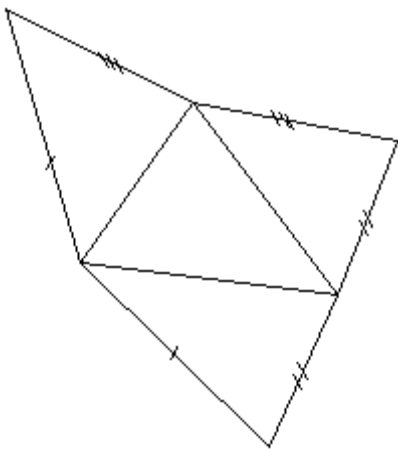
۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

به وضوح می‌دانیم $\overline{abc} - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$ و اگر a, b, c و d چهار عدد طبیعی یک‌رقمی باشند و $11a + b = 11c + d$ باشد آن‌گاه $11(a - c) = d - b$ و چون $|d - b| < 11$ نتیجه می‌شود $b - d = a - c = 0$ و بنابراین تعداد اعدادی که می‌توانیم به آن‌ها برسیم برابر است با تعداد زوج مرتب‌های (a, b) است که عددی کمتر از ۶۰۰ تولید می‌کنند و تعداد این زوج مرتب‌ها برابر است با $5 \times 10 = 50$.

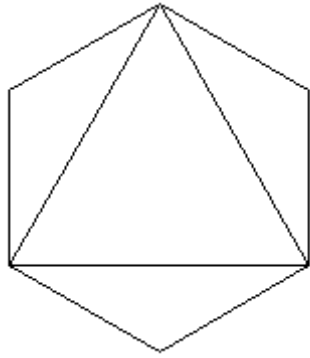
۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

می‌دانیم حجم منشور از رابطه‌ی "مساحت قاعده ضرب در ارتفاع" بدست می‌آید. ارتفاع که ثابت است پس برای به‌دست آوردن حداکثر حجم یک باید بیش‌ترین مساحت قاعده را داشته باشیم، که مساحت قاعده‌ی قطعه یک هم با کاهش زاویه بیش‌تر می‌شود در واقع سطح مقطع یک بیضی است که می‌توان به صورت شهودی دریافت که مساحت آن با کاهش زاویه زیاد می‌شود، پس گزینه‌ی (الف) که کم‌ترین زاویه را دارد درست است.

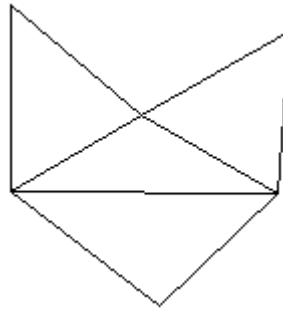
۳- به‌تر است برای تصور چهار وجهی، بازشده‌ی آن را در نظر بگیریم. بازشده‌ی چهاروجهی، چیزی به شکل زیر است (به برابری طول‌های مشخص شده روی شکل توجه کنید).



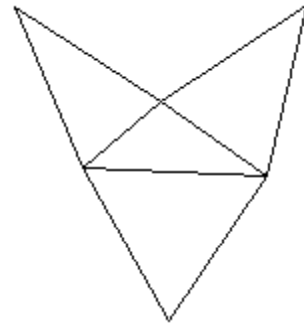
که برابری این طول‌ها شرط کافی برای این‌که این شکل باز شده‌ی یک چهاروجهی باشد است، چون فرض کنید که چنین شکلی را روی کاغذ بریده باشیم با چسباندن دو تا از طول‌های مشخص شده روی شکل به هم‌دیگر مثلثی تشکیل می‌شود که به حالت سه ضلع هم‌نهبشت با مثلثی است که باقی‌مانده پس می‌توان این مثلث هم به دو تای دیگر چسباند و چهاروجهی تشکیل می‌شود. اکنون برای هر کدام از گزینه‌ها یک مثال می‌آوریم و نشان می‌دهیم که گزینه‌ی (ه) درست است.



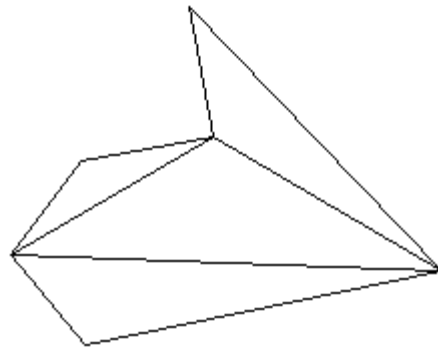
(ج)



(ب)



(الف)



(د)

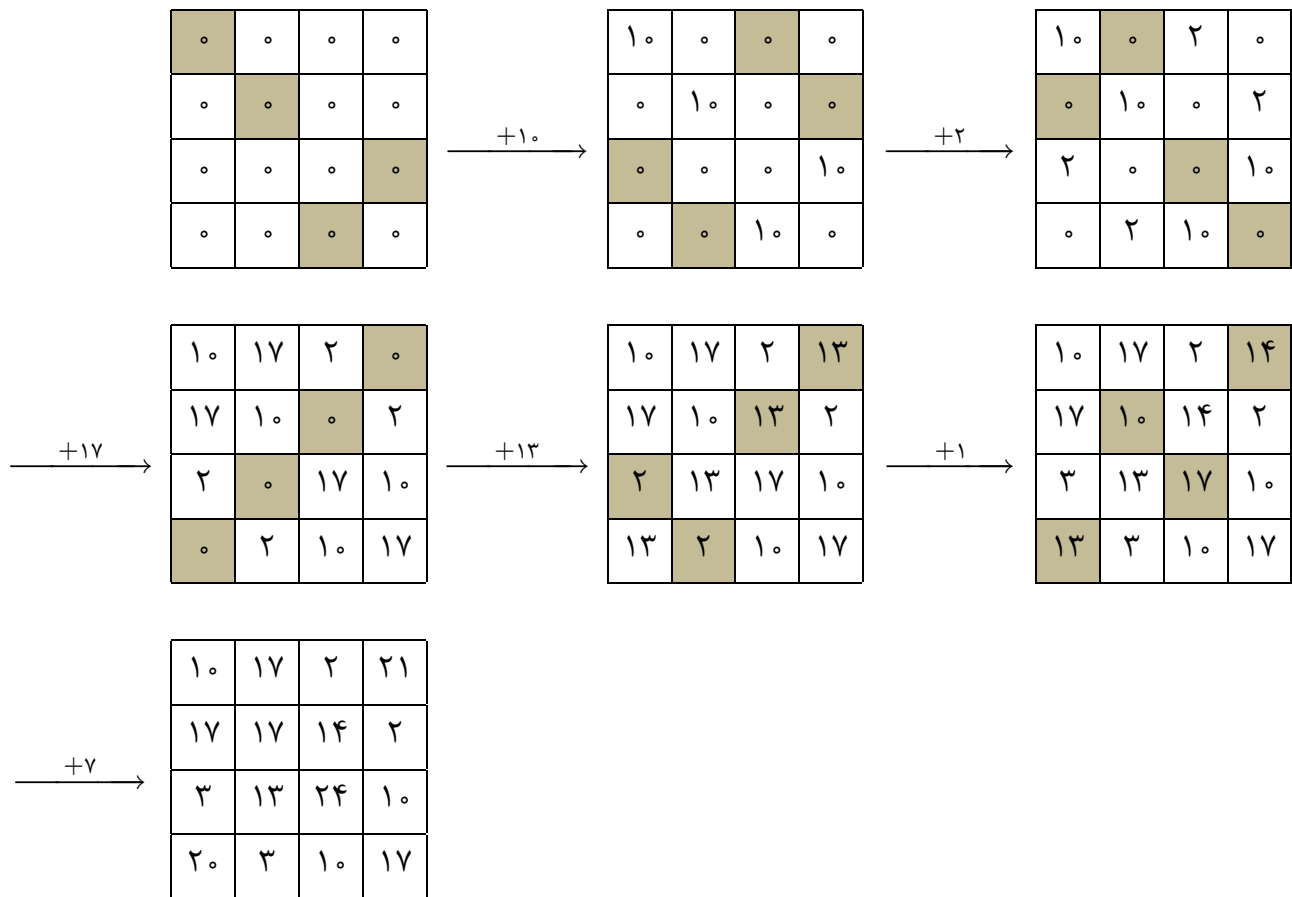
۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اولاً حداقل ۹۳ آنتن در این ده داریم، زیرا فرض کنید کم‌تر از ۹۳ آنتن داشته باشیم و a_i تعداد آنتن‌های خانه‌ی i ‌ام باشد و $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{93}$ (این فرض را می‌توان به دلیل تقارن انجام داد). در این صورت $a_1 = a_2 = \dots = a_8 = 0$ و $a_9, a_{10} \leq 1$ این ده خانه کم‌تر از ۳ آنتن دارند که با فرض مسئله در تناقض است. با استدلالی شبیه به همین نتیجه می‌شود حداقل ۹۲ کلاغ روی این آنتن‌ها وجود دارد.

۵- گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون با هر بار انجام عمل گفته‌شده در صورت مسأله، اختلاف مجموع اعداد یک سطر و یک ستون تغییری نمی‌کند و چون مجموع اعداد هر سطر و هر ستون در ابتدا صفر است بنابراین به هر جدولی که برسیم مجموع

اعداد هر سطر و هر ستون یک عدد است. و تنها جدولی که این خاصیت را در میان پنج گزینه داراست گزینه‌ی (د) است. به صورت زیر با انتخاب خانه‌ها و اضافه کردن اعداد می‌توان به جدول گزینه‌ی (د) رسید.



۶- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر نقطه‌ای که بیش‌ترین (کم‌ترین) ارتفاع را دارد یکتا باشد، این دو عاشق باید در این نقطه به هم برسند چون در غیر این صورت حتماً یکی از آنها از این نقطه عبور کرده در حالی که نفر دیگر جای دیگری بوده که امکان ندارد! با این استدلال گزینه‌های (ب) و (د) رد می‌شوند. در گزینه‌های (ج) و (ه) هم با توجه به همین استدلال، شیرین و فرهاد باید در پایین‌ترین ارتفاع به هم برسند اما در این صورت شیرین که در نقطه‌ی A است باید از دو نقطه‌ی ماکزیمم ارتفاعی کوهستان بگذرد که فرهاد نمی‌تواند بدون عبور از پایین‌ترین ارتفاع به آن بلندی برسد. اما در گزینه‌ی (الف) مشکلی برای وصال وجود ندارد.

۷- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

xy را تعداد پیوندهای بین اتم x و اتم y تعریف می‌کنیم. طبق داده‌های مسأله داریم:

$$ab + bc + ca = 5$$

$$ab + bd + da = 7$$

$$ac + cd + da = 3$$

$$bc + cd + bd = 5$$

و داریم:

$$ab + bc + cd + da + bd + ca =$$

$$\frac{1}{2}[(ab + bc + ca) + (ab + bd + da) + (ac + cd + da) + (bc + cd + bd)]$$

و طرف چپ تساوی تعداد پیوندهای مولکول حاصل از اتم‌های a ، b ، c و d است و طرف راست هم برابر ۱۰ می‌شود.

۸- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون بین هردو اتم حداکثر یک پیوند وجود دارد و این مولکول ده اتم دارد، بنابراین حداکثر $\binom{10}{2} = 45$ پیوند دارد و چون ۴۳ پیوند دارد یعنی دو جفت اتم هستند که پیوندی بینشان نیست که دو حالت داریم که این دو جفت، اتم مشترکی داشته باشند یا نداشته باشند. اگر اتم مشترک داشته باشند فرض کنیم پیوندهای ab و ac وجود نداشته باشند. آنگاه تعداد مثلث‌ها برابر است با $\binom{10}{3} - 8 - 8 + 1 = 105$ و در حالت دوم فرض کنیم پیوند های ab و cd وجود نداشته باشند، آنگاه تعداد مثلث‌ها برابر است با $\binom{10}{3} - 8 - 8 = 104$.

۹- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

مسأله را با توجه به تعداد ۲های جدول می‌توان به چند حالت تقسیم کرد: (دقت کنید که بیش‌تر از سه عدد ۲ نمی‌تواند در جدول موجود باشد زیرا در این صورت دو تا از آن‌ها هم‌سطر می‌شوند که باعث می‌شود مجموع اعداد آن سطر بیش‌تر از ۲ شود.)

الف) اصلاً ۲ در جدول نباشد: در این صورت باید در هر سطر و هر ستون دوتا ۱ داشته باشیم که برای قراردادن دو ۱ در سطر اول ۳ حالت داریم و برای قرار دادن دو یک در سطر دوم ۲ حالت داریم زیرا دو ۱ سطر دوم نمی‌توانند دقیقاً زیر دو ۱ سطر اول قرار بگیرند(چرا؟) و برای قرار دادن یک های سطر سوم هم ۱ راه باقی می‌ماند، پس ۳! راه برای پر کردن جدول در این حالت داریم.

ب) یک ۲ در جدول داشته باشیم: در این صورت خانه‌هایی که در سطر و ستون عدد ۲ قرار دارند باید صفر باشند و بقیه‌ی خانه‌های جدول باید ۱ باشند. پس در این حالت تنها باید مکان عدد ۲ را در جدول مشخص کنیم که ۹ انتخاب برای این حالت وجود دارد.

ج) دو عدد ۲ در جدول باشد: در این صورت هم باید خانه‌هایی که در سطر یا ستون این دو عدد ۲ قرار دارند باید صفر باشند و چون این دو ۲ هم سطر یا هم ستون نیستند تنها یک خانه در جدول باقی می‌ماند که مقدارش تعیین نشده که آن خانه هم باید ۲ باشد. پس امکان ندارد که جدول تنها دو عدد دو داشته باشد.

د) سه عدد دو داشته باشیم: این سه عدد دو نمی‌توانند هم‌سطر یا هم‌ستون باشند، و لذا کافی است مکان آن‌ها را طوری تعیین کنیم که از هر سطر و ستون یک خانه انتخاب کرده باشیم که $3! = 6$ راه برای این کار داریم.

بنابراین جواب برابر است با $6 + 9 + 6 = 21$.

۱۰- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

داریم:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 32 + (x_4 - x_2)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} A &= (32 + (x_4 - x_2))(32 - (x_3 - x_1))(32 - (x_4 - x_2))(32 + (x_3 - x_1)) \\ &= (32^2 - (x_4 - x_2)^2)(32^2 - (x_3 - x_1)^2) \end{aligned}$$

پس بیش‌ترین مقدار A برابر 32^4 است و حالت تساوی زمانی است که $x_1 = x_3$ و $x_2 = x_4$. بنابراین

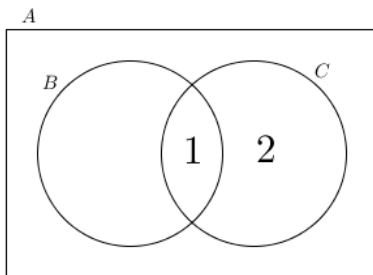
تعداد حالات تساوی برابر ۹ است:

$$(x_1, x_2) = (i, 8 - i), 0 \leq i \leq 8, i \in \mathbb{Z}$$

۱۱- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در زمین گزینه‌ی (ج) از هر طرف چهار طرف تعداد فردی خانه با خانه‌ی شکلاتی (!) فاصله داریم. حال بازیکن دوم به این صورت عمل می‌کند که در هر مرحله، بازیکن اول از هر یک از چهار طرف که خانه‌ای برداشت او هم از همان طرف یک خانه را بر می‌دارد در این صورت همواره در نوبت بازیکن اول تعداد فردی خانه، فاصله تا خانه شکلاتی وجود دارد و او هرگز به این خانه نمی‌رسد و بدیهی است که پس از تعدادی مرحله بازیکن دوم به شکلات می‌رسد. در زمین‌های بازی گزینه‌های دیگر از یک طرف تعداد زوجی خانه تا خانه‌ی شکلاتی فاصله داریم و از سه طرف دیگر تعداد فردی خانه. در این زمین‌ها استراتژی برد نفر اول به این شکل است که او ابتدا از طرفی که تعداد زوجی فاصله داریم یک خانه بر می‌دارد و اکنون نوبت نفر دوم است که بازی کند و زمینی داریم که از هر طرف تعداد فردی فاصله تا خانه شکلاتی داریم و مطابق آن چه گفتیم در چنین زمینی کسی که حرکت دوم را انجام دهد استراتژی برد دارد که همان نفر اول خودمان است. پس در این زمین‌ها نفر اول استراتژی برد دارد.

۱۲- گزینه‌ی (ب) صحیح است.



فرض می‌کنیم B شامل k عضو باشد در این صورت مجموعه‌ی C دارای دو قسمت است: (۱) اعضایی که در B هم هستند و (۲) اعضایی که در B نیستند.

کافی است قسمت ۱ تعداد فردی عضو داشته باشد و قسمت ۲ محدودیت ندارد برای قسمت ۲، 2^{10-k} حالت داریم. چون $10 - k$ عضو A هستند که در B نیستند و یک مجموعه‌ی $10 - k$ عضوی 2^{10-k} زیرمجموعه دارد. هم‌چنین برای این که تعداد حالت‌های قسمت یک را بیابیم باید تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی یک مجموعه‌ی k عضوی را بیابیم که برابر 2^{k-1} است. پس در کل $2^{10-k} \times 2^{k-1} = 2^9$ حالت داریم.

۱۳- گزینه‌ی (ه) صحیح است.

برای رد گزینه‌ی (ه) داریم: چون از هر سه عدد متوالی باید یکی عضو A باشد، پس از بین ۱، ۲ و ۳ یکی باید در A باشد که ۱ نمی‌تواند باشد و اگر ۲ عضو A باشد در این صورت دو عدد فرد یا دو عدد زوج نمی‌توانند در A باشند چون مجموعشان بر ۲ بخش‌پذیر است، پس A نمی‌تواند نامتناهی شود. بنابراین ۳ عضو A است پس عضو به شکل $3k$ در A حداکثر یکی داریم و نمی‌توانیم در A هم عدد به شکل $3k + 1$ هم به شکل $3k + 2$ داشته باشیم چون مجموعشان بر ۳ بخش‌پذیر است و چون از بین $3k$ ، $3k + 1$ و $3k + 2$ باید یکی در A باشد پس می‌توانیم بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم از جایی به بعد همه‌ی $3k + 1$ ها عضو A هستند که در این صورت داریم $2(3k + 1) = (3(k + 1) + 1) + (3(k - 1) + 1)$ پس عبارت گزینه‌ی (ه) نادرست است.

۱۴- گزینه‌ی (د) صحیح است.

اولین چیزی که به دست می‌آید این است که باید در هر سطر و هر ستون، دو یک و دو صفر داشته باشیم. برای حل، مسأله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم: (۱) دو سطر در جدول باشند که مکان ۱ و ۰ هایشان دقیقاً مشابه باشد. (۲) دو سطر دقیقاً مشابه نداشته باشیم.

حالت ۱. در این حالت با نگاه به جدول درمی‌یابیم که دو جفت سطر دقیقاً مشابه داریم، که با تعیین یک جفت، دیگری به طور یک‌تا تعیین می‌شود. $\binom{4}{2} = 6$ راه برای قرار دادن ۱ها در یک سطر داریم و $\binom{4}{2} = 6$ راه برای انتخاب دو سطر از جدول که دو سطر مشابه را در آنها قرار دهیم. یعنی در کل $6 \times 6 = 36$ حالت داریم که هر حالت را دوبار شمرده‌ایم (به ازای هر کدام از ۲ جفت سطرهای مشابه، یکبار شمارش انجام داده‌ایم). پس تعداد حالت‌های مورد قبول در این قسمت $\frac{36}{2} = 18$ است.

حالت ۲. در این حالت $\binom{4}{2} = 6$ روش برای انتخاب ۱های سطر اول وجود دارد و به ازای هر سطر همواره سطر دیگری در جدول هست که مکان ۱های هر کدام دقیقاً بر مکان ۰های سطر دیگر منطبق باشد، زیرا در هر ستون از این جدول که در سطر مورد نظر صفر داریم، باید دو یک موجود باشد و چون تنها سه سطر دیگر داریم

سطری هست که در هر دو ستون در آن خانه یک قرار دارد و تبع آن در دو خانه‌ی دیگر آن سطر صفر داریم، پس این سطر شرط ادعا شده را برآورده می‌کند. این چنین دو سطر را مزدوج می‌نامیم. بنابراین ۳ حالت هم برای انتخاب سطر مزدوج سطر اول در جدول داریم و چهار حالت داریم که اهای دو سطر دیگر جدول را (که آن دو هم قطعاً مزدوج هستند) طوری تعیین کنیم که سطرهای دقیقاً مشابه در جدول به وجود نیاید. پس در کل در این حالت $۷۲ = ۴ \times ۳ \times ۶$ روش داریم.

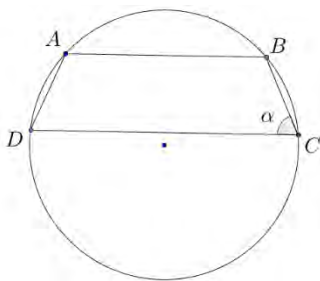
و در نهایت تعداد کل حالت‌ها برابر $۹۰ = ۱۸ + ۷۲$ است.

۱۵- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

مماس مشترک دو دایره که از نقطه‌ی C می‌گذرد را رسم می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی $\angle ADC$ به دو قسمت تبدیل می‌شود، که یک قسمت زاویه‌ی ظلی کمان \widehat{AC} است و قسمت دیگر زاویه‌ی ظلی کمان \widehat{PC} است و اندازه‌ی این دو کمان را هم که داریم. پس $\angle ACP$ برابر است با $۳۰^\circ + ۲۰^\circ = ۵۰^\circ$ و چون $\angle BAC$ زاویه‌ی خارجی مثلث APC است داریم:

$$\angle BAC = \angle ACP + \angle APC = ۵۰^\circ + ۳۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۱۶- گزینه‌ی (ه) صحیح است.



راه حل اول. این راه حل با استفاده از قضیه‌ی بطلمیوس است، که طبق این قضیه در هر چهار ضلعی محاطی $ABCD$ داریم:

$$BD \times AC = AD \times BC + AB \times CD$$

و چون در این چهارضلعی محاطی $BC = AD$ ، پس $BD = AC$ و بنابراین داریم:

$$BD^2 = ۲ \times ۲ + ۳ \times ۴ = ۱۶ \Rightarrow BD = ۴$$

راه حل دوم. استفاده از قضیهی کسینوسها است. چون $ABCD$ محاطی است داریم
 $\angle DAC = 18^\circ - \angle DBC$. پس کسینوس این دو زاویه قرینهی یکدیگر است. اکنون با استفاده از
 قضیهی کسینوسها:

$$DA^2 + AB^2 - 2 \cos \alpha \cdot DA \cdot AB = BC^2 + CD^2 + 2 \cos \alpha \cdot BC \cdot CD = BD^2$$

$$\Rightarrow 13 - 12 \cos \alpha = 20 + 16 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{4}$$

که با جای گذاری دوباره همان جواب $BD = 4$ به دست می آید.

۱۷-گزینهی (ج) صحیح است.

اگر $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ تجزیهی عدد m به عوامل اول باشد، در این صورت هر عدد به فرم
 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ یک مقسوم علیه خوب m است. (یعنی تعدادی از عوامل اول m را با حفظ توانشان انتخاب
 کنیم). پس $f(m) = (1 + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_n^{\alpha_n})$ می دانیم که اگر $p \neq 2$ ، $2 \mid p^\alpha + 1$ پس
 اگر m بیش از دو عامل اول داشته باشد در این صورت $f(m)$ مضرب چهار خواهد شد. پس تنها گزینهی (ج)
 می تواند درست باشد.

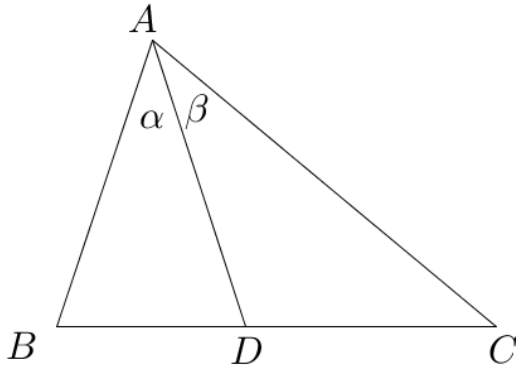
حال به رد گزینه های دیگر هم می پردازیم:

گزینهی (الف) و (د). با توجه به توضیحات بالا هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد ولی اگر عددی بر 30
 بخش پذیر باشد، حداقل سه عامل اول دارد.

گزینهی (ب). هر عدد به شکل $4k + 3$ مقسوم علیهی به همین شکل دارد که توانش در تجزیهی آن عدد فرد
 است. (اگر چنین عددی موجود نباشد قسمت مربوط به هر عدد اول در تقسیم بر 4 دارای باقی ماندهی 1
 می شود و لذا کل عدد در تقسیم بر 4 دارای باقی ماندهی 1 است). فرض کنید این عدد اول p و توانش در
 تجزیه $2s + 1$ باشد. در این صورت (به پیمانهی 4) $1 + p^{2s+1} \equiv 1 + (-1)^{2s+1} \equiv 0$. پس $f(m)$ بر 4
 بخش پذیر می شود.

۱۸- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

می‌دانیم که در هر مثلث ABC با قاطع AD داریم:



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAD)}{AC \cdot \sin(\angle CAD)}$$

بنابراین در شکل مسأله داریم:

$$1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \times \frac{AB}{AC} \stackrel{\alpha=2\beta}{\Rightarrow} 2 \cos \beta = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 30^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

و در نتیجه از قضیه‌ی فیثاغورس بدست می‌آید که $BC = \sqrt{3+1} = 2$.

۱۹- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در طول راه‌حل از نماد a برای طول ضلع BC ، از b برای طول ضلع AC و از c برای طول ضلع AB استفاده شده است. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

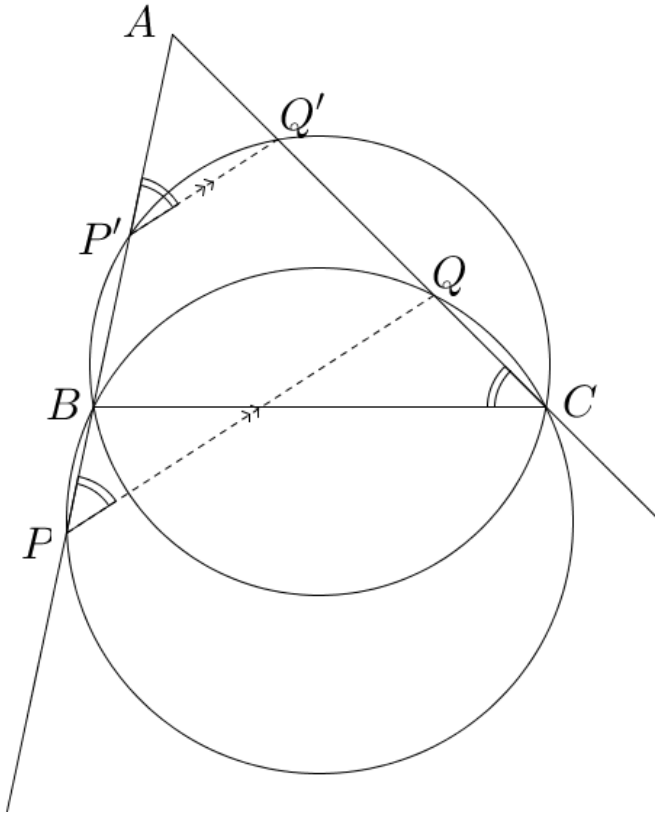
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A = (a+b)^2 - 2(1 + \cos(120^\circ))ab = 100 - ab$$

$$0 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 75 \leq c^2 \leq 100 \Rightarrow 5\sqrt{3} \leq c \leq 10$$

می‌توان a و b را به گونه‌ای انتخاب کرد که با توجه به بالا c هر عدد بین $5\sqrt{3}$ و 10 را به عنوان مقدار بگیرد.

۲۰- گزینه‌ی (ب) صحیح است.



ابتدا با توجه به محاطی بودن چهارضلعی $BQCP$ متوجه می‌شویم $\angle P = \angle C$ و در نتیجه از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که تمام خطوط PQ موازی هم هستند (در شکل PQ موازی $P'Q'$ است) پس اگر میانه مثلث APQ را در نظر بگیریم همواره یک راستای ثابت دارد در نتیجه این مکان هندسی خطی است که از A می‌گذرد. اثبات این‌که به ازای هر نقطه‌ای روی این خط هم یک دایره وجود دارد، در اینجا نیاز نیست اما در امتحانات تشریحی باید این قسمت را هم در نظر داشته باشید.

۲۱- گزینه‌ی (ه) صحیح است.

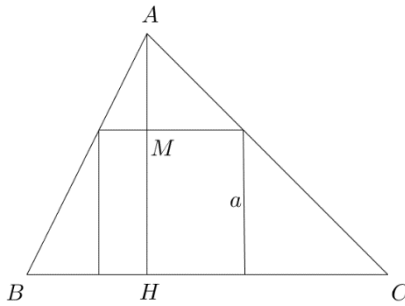
معادله را به صورت $x^2 - z^2 = 1381 - y^5$ بازنویسی می‌کنیم و در نتیجه:

$$(x - z)(x + z) = 1381 - y^5$$

اکنون اگر $1381 - y^5 = pq$ در این صورت $x = \frac{p+q}{2}$ و $z = \frac{p-q}{2}$ یک جواب این معادله است. کافی است برای صحیح بودن x و z اعداد p و q دارای زوجیت یکسان باشند. پس کافی است y را یک عدد زوج در نظر بگیریم که $1381 - y^5$ یک عدد فرد شود و یک عدد فرد را همواره می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عدد فرد (عدد ۱ هم مجاز است) نوشت.

۲۲- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر یکی از اضلاع مربع بر یکی از اضلاع مثلث واقع شده باشد (مانند شکل) داریم:



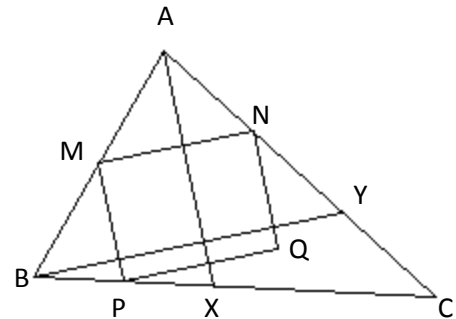
(AH ارتفاع است و a طول ضلع مربع است.)

$$\frac{AM}{a} = \frac{AH}{BC} \Rightarrow \frac{AH - a}{a} = \frac{AH}{BC} \Rightarrow \frac{AH}{a} = \frac{AH + BC}{BC}$$

$$\Rightarrow a = \frac{AH \cdot BC}{AH + BC} \leq \frac{AH \cdot BC}{2\sqrt{AH \cdot BC}} = \frac{\sqrt{AH \cdot BC}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a^2 \leq \frac{1}{2}$$

توجه کنید که این استدلال ناقص است اما برای بدست آوردن یک عدد مناسب است. اما استدلال زیر کامل است.

شکل زیر را در نظر بگیرید.



$MNPQ$ مربع است و $AX \parallel MP, BY \parallel MN$ در نتیجه $AX \perp BY$ و همچنین:

$$AX \cdot BY = 2S_{ABXY} \leq 2S_{ABC} = 2$$

$$S_{MNPQ} = MP \cdot MN = \left(\frac{AM}{AB} \cdot BY\right) \cdot \left(\frac{BM}{AB} \cdot AX\right)$$

$$= \frac{AM \cdot BM}{AB^2} \cdot AX \cdot BY \leq 2 \cdot \frac{AM \cdot BM}{AB^2} \leq 2 \cdot \frac{(AM + BM)^2}{4AB^2} = \frac{1}{2}$$

با این استدلال هم چنین ثابت کردیم مساحت بزرگ‌ترین مستطیل در این مثلث هم $\frac{1}{4}$ است.

23- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که

$$k(n - k + 1) \geq n \Rightarrow n! = (n \times 1)((n - 1) \times 2) \dots \geq n^{\frac{n}{2}}$$

و همچنین $n! < n^n$ بنابراین داریم:

$$(1 \cdot n)! \leq 1 \cdot n! \cdot n < 16^{n! \cdot n} = 2^{4n! \cdot n}, 2^{n!} \geq 2^{\frac{n}{2}}$$

بنابراین برای اینکه ثابت کنیم که $f_1 \ll f_2$ کافی است نشان دهیم که $2^{4n! \cdot n} \ll 2^{\frac{n}{2}}$. حال داریم:

$$2^{4n! \cdot n} \ll 2^{\frac{n}{2}} \Leftrightarrow 4n! \cdot n \ll \frac{n}{2}$$

که این هم درست است. (چرا؟)

و برای اینکه نشان دهیم $f_2 \ll f_3$ داریم: $\sqrt[n]{(n!)!} \geq (n!)^{\frac{n!}{2n}}$ پس کافی است نشان دهیم

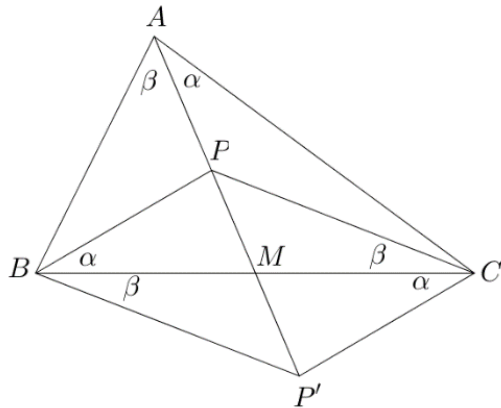
$$:(n!)^{\frac{n!}{2n}} \gg 2^{n!}$$

$$(n!)^{\frac{n!}{2n}} \gg 2^{n!} \Leftrightarrow n! \gg 4^n$$

که این هم درست است. (چرا؟)

24- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

راه‌حل اول: PM را به اندازه‌ی خودش از طرف M ادامه می‌دهیم تا به نقطه‌ی P' برسیم. در این صورت $PCP'B$ متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه که این نتیجه می‌دهد که $\Delta P'MB \sim \Delta P'BA$ (زوایای متناظر در تشابه از ترتیب در نام مثلث‌ها مشخص است.) و لذا $P'M \cdot P'A = P'B^2$ و به همین ترتیب داریم



که از دو قسمت آخر نتیجه می شود $P'M.P'A = P'C^2$
 و در نتیجه $\beta = \alpha$. پس مثلث ABC
 متساوی الساقین است و $\beta = \alpha = 40^\circ$ پس:

$$\angle CPA = \frac{1}{2}(36^\circ - \angle CPB) = 18^\circ - 5^\circ = 13^\circ$$

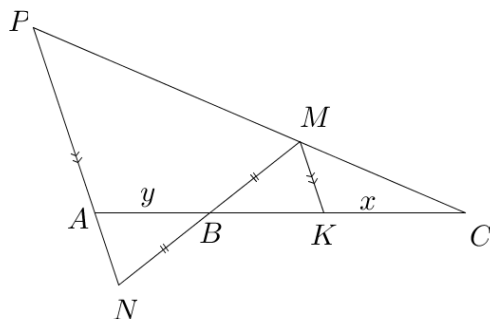
راه دوم:

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{PC} = \frac{\sin \beta}{PB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{PC} = \frac{\sin \angle PCA}{AP}, \frac{\sin \beta}{PB} = \frac{\sin \angle PBA}{AP}$$

پس $\sin \angle PCA = \sin \angle PBA$ (این تساوی با یک بار استفاده از سوی سینوسی برای سه خط هم‌رس در نقطه‌ی P به سادگی به دست می‌آید.) و چون این دو زاویه مکمل نیستند پس با هم برابرند و اگر مقدارشان را x بنامیم داریم: $2x + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ و در نتیجه $x + \alpha + \beta = 90^\circ$ که یعنی AM بر BC عمود است و چون AM میانه هم هست پس ABC متساوی الساقین است و ادامه‌ی راه حل مشابه است.

۲۵- گزینه‌ی (د) درست است.



مطابق شکل بالا، پاره خط MK را به موازات AN رسم می‌کنیم. در این صورت چون $NB = BM$ خواهیم داشت $AN = MK$ و $BK = AB$. اکنون اگر مقدار CK و AB را به ترتیب x و y بنامیم داریم:

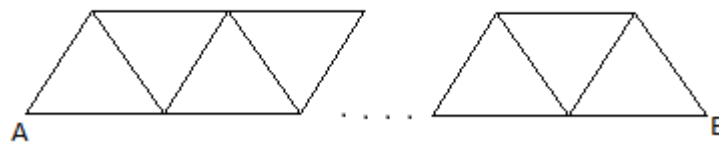
$$\frac{S_{MBC}}{S_{PAC}} = \frac{CM}{CP} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{CK}{CA} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{y}{y+2x} \cdot \frac{y+x}{y+2x} = \frac{4}{49}$$

$$\stackrel{\frac{x}{y}=a}{\Rightarrow} 4(2a+1)^2 = 49(a+1) \Rightarrow a=3 \Rightarrow \frac{x}{y}=3 \Rightarrow \frac{x}{2x+y} = \frac{a}{2a+1} = \frac{3}{7}$$

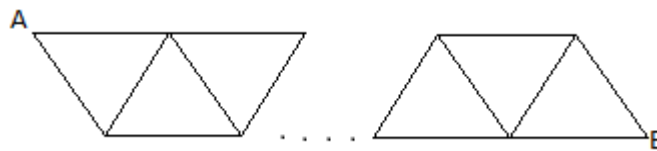
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{7}$$

۲۶-گزینه‌ی (الف) صحیح است.

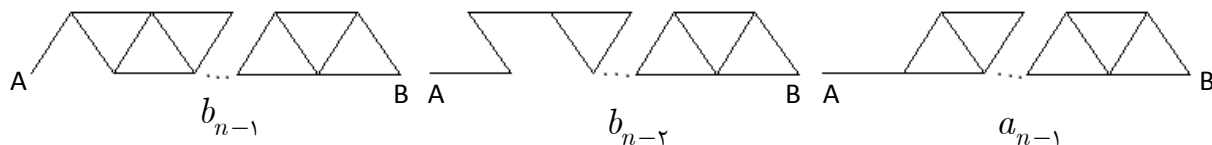
از دنباله‌های بازگشتی استفاده می‌کنیم. اگر a_n برابر تعداد راه‌های رسیدن از A به B در شکل زیر باشد: (تعداد مثلث‌های پایینی n است)



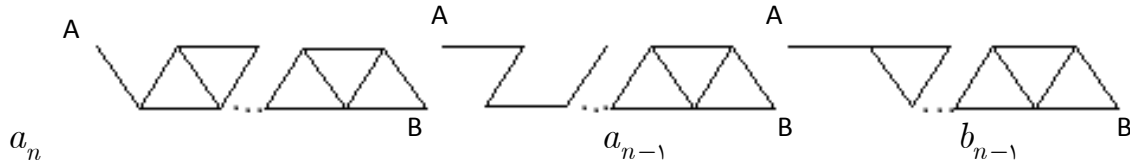
و b_n تعداد راه‌های رسیدن از A به B در شکل زیر باشد: (تعداد مثلث‌های پایینی n است).



اکنون با توجه به شکل زیر داریم:



پس این رابطه بدست می آید: $a_n = a_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-1}$



پس بدست می آید: $b_n = a_n + a_{n-1} + b_{n-1}$

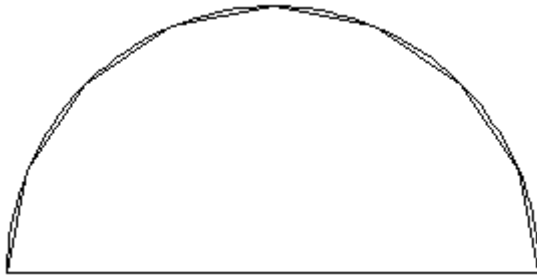
قصد ما بدست آوردن a_n است بنابراین نیازی به حل کلی دنباله‌ی بازگشتی نداریم.

n	0	1	2	3	4
a_n	1	2	7	24	81
b_n	1	4	13	44	لازم نداریم

پس پاسخ مسئله برابر ۸۱ است.

۲۷- گزینه‌ی (د) صحیح است.

مثال زیر را در نظر بگیرید:



می‌بینیم که اگر پرتو طوری در یکی از دایره‌های عظیمه طوری در یک نیم‌دایره بتابد که نیمی از یک $2n$ ضلعی محدب را بسازد، آن‌گاه مسیر این جهت تابش متناوب است زیرا با حرکت به روی اضلاع $2n$ ضلعی و رسیدن به لبه، باز روی همان مسیر باز می‌گردد. اکنون به ازای n های متفاوت جهت‌های تابش متفاوتی بدست می‌آوریم و در نتیجه به

ازای بی‌نهایت جهت تابش مسیر پرتو متناوب است. دقت کنید که می‌توان حرکت پرتو در نیم کره با حرکت یک پرتو دیگر درون یک کره متناظر کرد. به این صورت که هر گاه پرتو به صفحه‌ی قطر نیم‌کره برخورد کرد، به جای قرینه کردن پرتو، آن را مستقیم ادامه دهیم و در حقیقت نیم‌کره را قرینه کنیم. (بازگشت پرتو هنگامی که به گوشه‌ی نیم‌کره می‌خورد متناظر با بازتاب آن در کره می‌شود.)

28- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

نشان می‌دهیم ۳ فیل نمی‌تواند باقی بماند. فرض کنید فیل‌ها را a ، b و c بنامیم که ترتیب خرطوم آن‌ها به شکل $a < b < c$ باشد. اکنون در ترتیب بلندی دم‌ها، b با یکی از فیل‌ها مجاور است (مثلاً در ترتیب $a < c < b$ ، b با c مجاور است). که اگر b با این فیل را در نظر بگیریم این دو فیل هم‌شکل اند. اما نشان می‌دهیم که چهار یا پنج فیل امکان دارد باقی بمانند. فرض کنید فیل‌ها را با اعداد ۱ تا n نمایش دهیم و طول خرطوم‌ها k_1, k_2, \dots, k_n و طول دم‌هایشان g_1, g_2, \dots, g_n باشند. می‌توانیم فرض کنیم $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ و اکنون اگر دو فیل با شماره‌ی i و j ($i < j$) هم‌شکل باشند در این صورت در ترتیب دم‌ها باید $1, \dots, j-1$ بین دو فیل i و j باشند و بقیه فیل‌ها نباید بین آن دو باشند. پس باید تعداد فیل‌هایی که بین i و j قرار دارد در هر دو ترتیب یکسان باشد تا این دو فیل هم‌شکل باشند. این نکته راهی برای ساختن ترتیب‌هایی که هیچ دو فیلی هم‌شکل نباشند به ما نشان می‌دهد. برای $n = 4, 5$ داریم:

$$\begin{aligned} k_1 < k_2 < k_3 < k_4, g_2 < g_4 < g_1 < g_3 \\ k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5, g_1 < g_4 < g_2 < g_5 < g_3 \end{aligned}$$

پس گزینه‌ی (ج) درست است.

۲۹- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ابتدا توجه می‌کنیم که گزینه‌های (ب) و (د) غلط هستند زیرا اگر $a < 1$ در این صورت برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$p(x) > x \Rightarrow p(p(x)) > p(x) > x$$

پس اگر $a < 1$ آن‌گاه معادله جواب ندارد. به ازای $a = \frac{1}{4}$ ، $x = \frac{1}{4}$ جواب است پس گزینه‌ی (د) هم غلط است. گزینه (ه) هم با توجه به غلط بودن (ب)، غلط است. تنها دو گزینه‌ی (الف) و (ج) باقی می‌ماند. داریم:

$$(x^2 - a)^2 - a - x = (x^2 - x - a)(x^2 + x + 1 - a)$$

که $x^2 - x - a$ همواره دارای دو ریشه است و $x^2 + x + 1 - a$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است اگر و تنها اگر $a < \frac{-3}{4}$. گزینه‌ی (ج) هم با توجه به تجزیه، اشتباه است.

۳۰- گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون به دنبال $t \in [0, 1]$ می‌گردیم پس می‌توانیم فرض کنیم که $x_0 = \cos \theta$ و در نتیجه با استقرا ثابت می‌شود که $x_n = \cos(2^n \theta)$. پایه‌ی استقرا که صحیح است و برای n اگر فرض استقرا درست باشد برای $n + 1$ داریم:

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 = 2\cos^2(2^n \theta) - 1 = \cos(2 \times 2^n \theta) = \cos(2^{n+1} \theta)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\cos(2^i \theta) = 1$ و لذا $2^i \theta = 2k\pi$. پس $\theta = \frac{2k\pi}{2^i} = \frac{k\pi}{1024}$ و به ازای $0 \leq i \leq 1024$ θ ‌هایی بدست می‌آوریم که کسینوس‌های متفاوتی دارند و در نتیجه t ‌های متمایزی به دست می‌آید. پس بیش از ۱۰۰۰ جواب برای مسئله یافت می‌شود و گزینه‌ی (د) صحیح است.