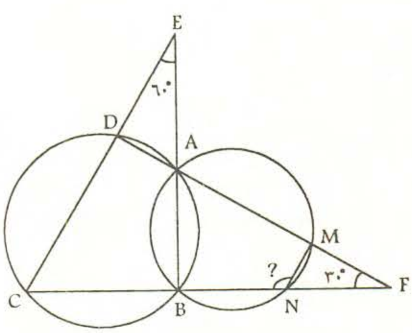
سؤالات مرحلهٔ اول بیستمین المپیاد ریاضی، سال ۱۳۸۰

۱) به ازای چند عدد طبیعی n، $۳^n + ۳^{۱۱} + ۳^{۷}$ مربع کامل است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) بی‌نهایت

۲) به ازای چند عدد طبیعی n معادلهٔ $n^a + n^b + n^c = n^d$ در اعداد طبیعی جواب دارد؟

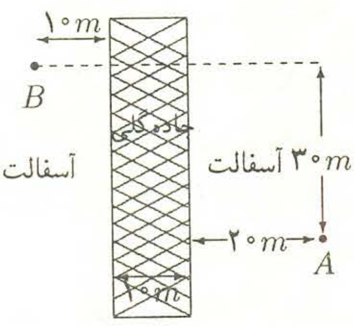
الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت



۳) در چهارضلعی محاطی $ABCD$، E و F به ترتیب محل برخورد AB با CD و AD با BC می‌باشند. دایره‌ای دلخواه از A و B می‌گذرانیم تا AF و BF را به ترتیب در M و N قطع کند. اگر $A\hat{F}B = ۳۰^\circ$ و $A\hat{E}D = ۶۰^\circ$، آنگاه $M\hat{N}B$ برابر است با:

الف) ۹۰° ب) ۱۲۰° ج) ۱۳۵°

د) ۱۰۵° ه) ۱۵۰°



۴) مطابق شکل مقابل، یک دونده در نقطهٔ A قرار دارد و می‌خواهد در کم‌ترین زمان ممکن خود را به B برساند.

در مسیر حرکت او یک جادهٔ گِلی وجود دارد که باعث می‌شود سرعت حرکتش حین گذر از آن به نصف کاهش یابد. سرعت حرکت دونده روی آسفالت ۱۰ متر بر ثانیه است. کم‌ترین زمان ممکن را پیدا کنید.

الف) $\sqrt{۲۶}$ ثانیه ب) $\sqrt{۲۰}$ ثانیه ج) ۵ ثانیه

د) $\sqrt{۳۰}$ ثانیه ه) $\sqrt{۳۴}$ ثانیه

۵) با رقمهای ۱ و ۲ حداکثر چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت، طوری که هر دو عدد حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند؟

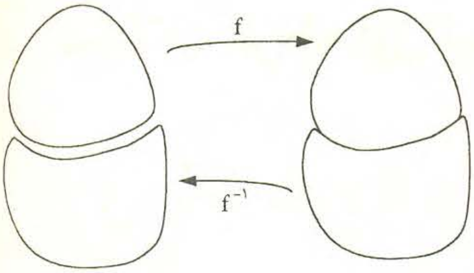
الف) ۱۶ ب) ۱۷ ج) ۱۸ د) ۱۹ ه) ۲۰

۶) a و b دو عدد حقیقی مثبت و متمایز هستند، به‌طوری که $a = ۱ + \sqrt[۳]{۶a - ۲}$ و $b = ۱ + \sqrt[۳]{۶b - ۲}$. ab برابر با چه مقداری است؟

الف) $\sqrt[۳]{۶}$ ب) ۴ ج) ۱ د) ۲ ه) $\sqrt{۲}$

۷) یک «تبدیل پیوسته» تبدیلی است که نقاطی که قبل از تبدیل نزدیک به هم هستند، بعد از تبدیل نیز نزدیک به هم بمانند. تبدیل f بین دو تکه خمیر را این طور در نظر می‌گیریم که لبه‌های دو تکه خمیر را به هم می‌چسباند و لذا تبدیل وارون آن، یعنی $f^{-۱}$، تکه خمیر بزرگ‌تر را به دو تکه خمیر جدا از هم تقسیم می‌کند.
در این صورت:

الف) f و $f^{-۱}$ هر دو پیوسته‌اند.



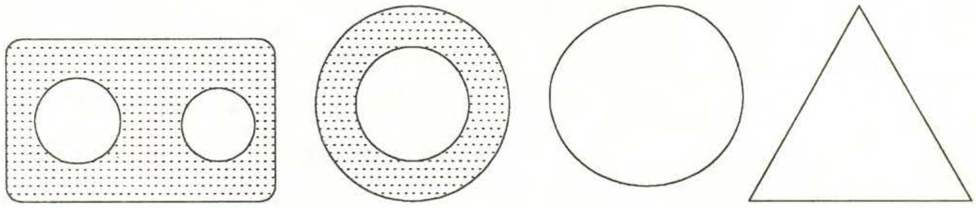
ب) f و f^{-1} هیچ‌کدام پیوسته نیستند.

ج) f پیوسته است ولی f^{-1} پیوسته نیست.

د) f پیوسته نیست ولی f^{-1} پیوسته است.

ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق، درست نیست.

۸) اگر شکل A با تبدیلی پیوسته که وارون آن هم پیوسته است (در سؤال قبل تعریف شده است) قابل تبدیل به شکل B باشد، می‌گوییم این دو شکل «هم‌ریخت» هستند، اجسام زیر را در نظر بگیرید.



(فرض کنید A و B از سیم نرم ساخته شده‌اند و C و D نیز از خمیر ساخته شده‌اند).
کدام گزینه درست است؟

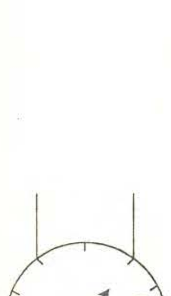
الف) A و B هم‌ریختند ولی C و D هم‌ریخت نیستند.

ب) A و B هم‌ریختند و C و D نیز هم‌ریختند.

ج) A و B هم‌ریخت نیستند ولی C و D هم‌ریختند.

د) A و B هم‌ریخت نیستند و C و D نیز هم‌ریخت نیستند.

ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق درست نیست.



۹) یک ساعت عقربه‌ای جادویی در اختیار داریم. این ساعت دارای یک خط طلایی است که شمارهٔ ۳ را به ۹ وصل کرده است. این ساعت ویژگی جالبی دارد و آن این است که هرگاه خط طلایی نیم‌ساز**داخلی** دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار شود، ساعت زنگ می‌زند. در حال حاضر ساعت ۱۲ : ۱ ظهر می‌باشد، تا ساعت ۱۲ : ۱ شب ساعت چند بار زنگ می‌زند؟

الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۱۰) در دبیرستان پسرانهٔ ابن‌سینا تعدادی دانش‌آموز تحصیل می‌کنند. اگر دو دانش‌آموز از این مدرسه دوست باشند، پدرهای این دو دانش‌آموز نیز با هم دوست هستند (دوستی یک رابطه دو طرفه است و هیچ‌کس با خودش دوست نیست!). کدام گزینه قطعاً درست است؟

الف) اگر حامد (یکی از دانش‌آموزان مدرسه) k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابوحامد (پدر حامد) حداقل k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.

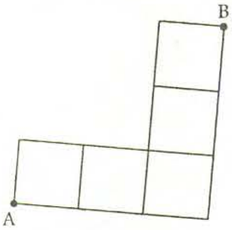
ب) اگر حامد k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابوحامد حداکثر k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.

ج) اگر k دانش‌آموز از دبیرستان موجود باشند که هیچ دوتایی از آن‌ها دوست نباشند، آنگاه در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

د) اگر در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دوتایی دوست نباشند، آنگاه k دانش‌آموز وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

ه) اگر حسام برادر کوچک‌تر حامد باشد، آنگاه حسام و حامد با هم دوست هستند (حسام و حامد هر دو در دبیرستان ابن‌سینا تحصیل می‌کنند).

۱۱) یک متحرک در نقطهٔ A از شکل زیر قرار دارد. این متحرک می‌خواهد خود را به نقطهٔ B برساند. متحرک می‌تواند روی خطوط شبکه حرکت کند و از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به B برساند؟



الف) ۲۴ ب) ۲۸
ج) ۳۲ د) ۳۶
ه) ۴۰

۱۲) سه دایره $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ به شعاع ۵ و به مراکز $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که $O_۱O_۲ = ۶$، $O_۱O_۳ = ۸$ و $O_۱O_۲$ بر $O_۱O_۳$ عمود است. مساحت ناحیه‌ای از $C_۱$ که با $C_۲$ و $C_۳$ تداخل ندارد، چقدر است؟

الف) ۱۰π ب) ۱۲π ج) ۲۴ د) ۴۸ ه) ۵۴

۱۳) یک صفحهٔ بی‌نهایت در بی‌نهایت داریم که خانه‌های آن را به صورت شطرنجی، سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. شعاع دایره‌ای که همهٔ نقاط محیط آن در خانه‌های سیاه قرار بگیرد حداکثر چقدر است؟ (طول هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی ۱ واحد است.)

الف) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۳}{۲}$ ه) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۱۴) عدد حقیقی x را «جالب» می‌گوییم اگر در بسط اعشاری آن، بعد از ممیز، هر عدد طبیعی ظاهر شده باشد. مثلاً عدد $۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲\ldots$ که از پشت سرهم قرارگرفتن همهٔ اعداد طبیعی به وجود آمده، عددی جالب است. کدام یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ اعداد جالب صحیح **نیست**؟

الف) در بسط اعشاری هر عدد جالب نامتناهی بار ۱۳۸۰ ظاهر می‌شود.

ب) هر عدد جالب گنگ است.

ج) اگر x و y دو عدد جالب باشند، $\frac{۱}{x}$ و xy هم جالب هستند.

د) اگر x جالب باشد، عدد y هم که از حذف ارقام x به صورت یکی در میان به دست می‌آید، جالب است.

ه) اگر x جالب باشد، $x - ۱$ هم جالب است.

۱۵) فرض کنید $\triangle ABC$ مثلثی در صفحهٔ مختصات باشد که مختصات رؤوس آن $A = (x_۱, y_۱)$، $B = (x_۲, y_۲)$ و $C = (x_۳, y_۳)$ باشد. در این صورت مساحت مثلث $\triangle ABC$ از رابطهٔ $\frac{۱}{۲}|y_۱(x_۲ - x_۳) + y_۲(x_۳ - x_۱) + y_۳(x_۱ - x_۲)|$ به دست می‌آید. با دانستن این مطلب کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ توجه کنید منظور از نقاط شبکه‌ای، نقاطی از صفحهٔ مختصات است که مختصات آن‌ها صحیح است.

الف) در صفحه می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۵ با رؤوس شبکه‌ای رسم کرد.

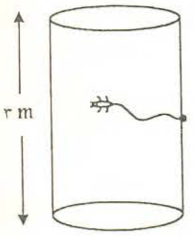
ب) یک مربع ۳ × ۳ را می‌توان به ۲۰ مثلث با رؤوس شبکه‌ای افراز کرد.

ج) نقطه‌ای شبکه‌ای درون متوازی‌الاضلاعی با مختصات رؤوس (۰, ۰)، (۱, ۱)، (۱۰۰۰, ۱۰۰۱) و (۱۰۰۱, ۱۰۰۲) وجود دارد.

د) مساحت هر متوازی‌الاضلاع با رؤوس شبکه‌ای صحیح است.

ه) یک مستطیل ۷ × ۴ را می‌توان به ۲۰ متوازی‌الاضلاع و ۲۰ مثلث با رؤوس شبکه‌ای افراز کرد.

۱۶) حشره‌ای را با نخی به طول ۱ متر به وسط یک استوانهٔ به ارتفاع ۳ متر و محیط قاعدهٔ $\sqrt{۳}$ متر، از بیرون بسته‌ایم! مساحت قسمتی از استوانه که حشره می‌تواند به آن برود، چقدر است؟



الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۲}{۳}\pi$

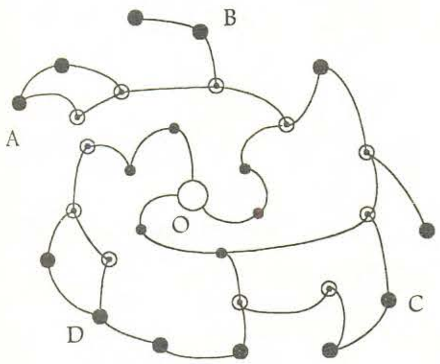
ب) π

ج) $\sqrt{۳} + \frac{۲}{۳}\pi$

د) $\sqrt{۳} + \pi$

ه) $۲\sqrt{۳}$

۱۷) آرش و علی روی شکل زیر با یک مهره مشغول بازی هستند، هر کس در نوبت خود می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد.



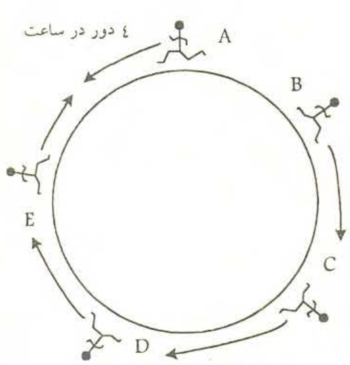
- مهره را روی یال‌ها در جهت ساعت‌گرد هر تعداد خانه که بخواهد حرکت دهد.
- مهره را روی یال متصل به رأس مجاورکه در لایهٔ درونی است (در صورت وجود چنین رأسی) حرکت دهد (رؤوس هم لایه شبیه هم هستند).

هر کس مهره را به خانهٔ مرکزی (O) برساند، برنده بازی است. فرض کنید آرش بازی را شروع کند و هیچ‌کس دچار اشتباه نشود. با آغاز از کدام خانه آرش برنده بازی خواهد بود؟

۱۸

الف) B, A ب) D, C ج) D, A د) A, C ه) D, B

۱۸) در یک پیست دو میدانی دایره‌وار پنج دوندهٔ A، B، C، D و E به فاصله‌های مساوی روی پیست قرار گرفته‌اند (مانند شکل) و چوبی در دست دوندهٔ A قرار دارد. بعد از شروع مسابقه، دوندهٔ A با سرعت ۴ دور در ساعت (یعنی در هر ساعت چهار بار دور پیست را طی می‌کند) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و دونده‌های B، C، D و E با سرعت ۱ دور در ساعت در جهت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت می‌کنند. در ضمن در هر زمان که دو دونده از کنار هم عبور کنند و چوب در دست یکی از آن‌ها باشد، آن را به دیگری می‌دهد. بعد از گذشت ۱ ساعت چوب در دست کدام دونده است؟



الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

۱۹) اتومبیلی از شهر A به سمت شهر B در حرکت است و فاصلهٔ دو شهر ۱۰۰ کیلومتر است. حرکت اتومبیل این‌گونه است که وقتی در x کیلومتری شهر B قرار دارد با سرعت x کیلومتر بر ساعت در حرکت است. کدام گزینه درست است؟

الف) اتومبیل قبل از نیم ساعت ۵۰ کیلومتر اول را طی می‌کند.

ب) زمانی که اتومبیل ۵۰ کیلومتر آخر را طی می‌کند کم‌تر از ۲ ساعت است.

ج) زمانی که اتومبیل ۲۵ کیلومتر آخر را طی می‌کند کم‌تر از ۱ ساعت است.

د) زمان طی کردن ۲۵ کیلومتر سوم بیش‌تر از ۱ ساعت است.

ه) اتومبیل هیچ‌گاه به مقصد نمی‌رسد!

۲۰) می‌گوییم زیرمجموعهٔ A از صفحه «ساختار دایره‌ای» دارد، اگر برای هر $x \in A$، دایرهٔ توپُری به مرکز x وجود داشته باشد که کاملاً در A قرار بگیرد؛ به طور مشابه، می‌گوییم B «ساختار مثلثی» دارد هرگاه برای هر $x \in B$، مثلث متساوی‌الاضلاع توپُری به مرکز ثقل x، داخل B وجود داشته باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح **نیست**؟

الف) دایرهٔ واحد، $D = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ < ۱\}$ ساختار مثلثی دارد.

ب) نیم‌صفحهٔ $H = \{(x,y) | y > ۰\}$ ساختار دایره‌ای دارد.

ج) هر مجموعه‌ای که ساختار دایره‌ای داشته‌باشد، ساختار مثلثی دارد.

د) هر مجموعه‌ای که ساختار مثلثی داشته باشد، ساختار دایره‌ای دارد.

ه) می‌توان صفحه را به دو زیرمجموعهٔ ناتهی طوری تقسیم کرد که یکی ساختار دایره‌ای و دیگری ساختار مثلثی داشته باشد.

۲۱) در مثلث $\triangle ABC$ نقاط P و Q درون مثلث، دارای این خاصیت هستند که

$$S(\triangle PAC) = \frac{۱}{۲}S(\triangle PAB) = \frac{۱}{۳}S(\triangle PBC)$$
$$S(\triangle QAB) = \frac{۱}{۲}S(\triangle QBC) = \frac{۱}{۳}S(\triangle QAC)$$

اگر پاره‌خط PQ ضلع AB را در F قطع کند، مطلوبست محاسبهٔ $\frac{AF}{FB}$ (منظور از $S(\triangle XYZ)$ مساحت مثلث $\triangle XYZ$ است).

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۲) حداکثر چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰\}$ می‌توان انتخاب کرد که هیچ‌کدام از آن‌ها حاصل ضرب بقیه‌شان را عاد نکند؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

توجه:

بارم سؤال‌های ۲۳ الی ۳۰ دو برابر بارم بقیهٔ سؤال‌هاست

(در نظر داشته باشید که نمره منفی این سؤال‌ها هم طبق همین قاعده محاسبه می‌شود).

در سه سؤال بعد منظور از «نقطه» عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{Z}^2$ است، یعنی (m,n)هایی که m و n اعدادی صحیح هستند. زیرمجموعهٔ A از $\mathbb{Z}^2$ را «خط» می‌نامیم اگر اولاً ناتهی باشد، ثانیاً اعداد صحیح a، b و c وجود داشته باشد که $a^2+b^2 \neq 0$ و $A=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 | am+bn=c\}$. می‌گوییم دو خط A و B موازی‌اند، اگر $A\cap B=\varnothing$ یا $A=B$. اگر O یک نقطه و r یک عدد حقیقی نامنفی باشد، منظور از دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r مجموعه نقاطی است که فاصله‌شان تا O برابر r است. خط A را بر دایرهٔ C مماس می‌گوییم، اگر $A\cap C$ تک عضوی باشد.

۲۳) کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) از هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط می‌گذرد.

۲) اگر x نقطه‌ای خارج از خط A باشد، دقیقاً یک خط وجود دارد که از x می‌گذرد و موازی A است.

۳) اگر A موازی B و B موازی C باشد، آن‌گاه A موازی C است.

۴) مجموعه نقاطی که از دو نقطه متمایز به یک فاصله‌اند، یک خط است.

الف) ۱، ۲ و ۳ ب) ۱ ج) ۲، ۳ و ۴ د) ۳ و ۴ ه) همهٔ عبارات

۲۴) کدام‌یک از مقادیر زیر می‌توانند تعداد نقاط یک دایره باشند؟

الف) ۷ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) بی‌نهایت ه) ب و ج

۲۵) با توجه به تعریف‌های بالا کدام گزینه درست است؟

الف) از هر نقطه خارج یک دایره دقیقاً دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

ب) از هر نقطه روی دایره بی‌نهایت مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

ج) دو دایره متمایز حداکثر ۴ مماس مشترک دارند.

د) از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می‌گذرد.

ه) با زیاد شدن شعاع، تعداد نقاط روی دایره افزایش می‌یابد.

۲۶) ۱۷۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، بزرگ‌ترین گردهمایی نقاشان برجسته در شهر بلاف‌بلوف افتتاح شد. صدها نفر از همهٔ نقاط راه شیری جمع شده بودند. برای مراسم افتتاحیه، سرگرمی‌ای تدارک دیده شده بود که به این صورت اجرا می‌شد: ابتدا یک نفر، یک «شکل» دلخواه روی تابلو می‌کشید. منظور از «شکل»، همهٔ نقاط درون و روی یک منحنی بسته است (که خودش را قطع نکند). سپس نفر دوم باید شکلی روی همان تابلو بکشد که حتماً شامل تعدادی نقطهٔ جدید بشود (این شکل ممکن است با شکل‌های قبلی اشتراک داشته باشد یا نداشته باشد). به همین ترتیب هر کس به نوبت باید شکلی بکشد که شامل تعدادی نقطهٔ جدید (نقاطی که در هیچ یک از شکل‌های قبلی نیامده باشد) بشود. زیر تابلو، شکل‌های کشیده شده در آن ـ بدون این که ترتیب کشیده شدنِ آن‌ها ذکر شود ـ نام برده می‌شود.

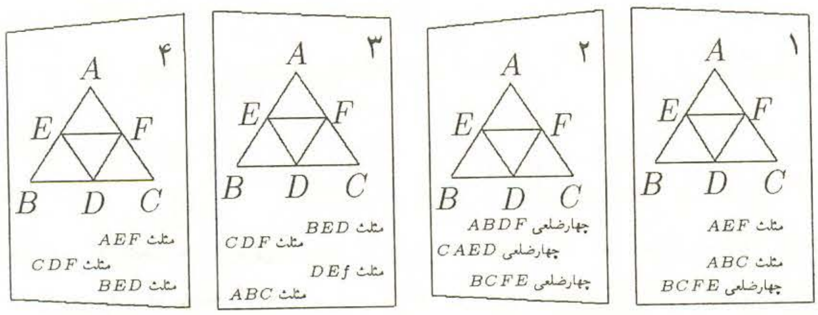
ممکن است کسی از روی خط‌های شکل‌های قبلی دوباره بکشد. ولی هیچ‌گاه دو شکل بر هم منطبق نداریم. مثلاً تابلوی روبه‌رو توسط چهار نقاش بزرگ کشیده شد و در پایان مراسم به قیمت ۱۰۰۰۰۰ بلوفی (واحد پول بلاف‌بلوف) به فروش رفت. در ابتدا، امین مثلث $\triangle DEF$ را کشید، بعد سیامک چهارضلعی $BEFC$ را کشید، پس از آن احسان مثلث $\triangle ABC$ را کشید و در نهایت ایمان منحنی G را رسم کرد. توجه کنید که ترتیب نقاشی مهم است. مثلاً امکان نداشت اول احسان مثلث $\triangle ABC$

را بکشد و بعد سیامک بخواهد چهارضلعی $BEFC$ را بکشد. چون در آن صورت شکل سیامک نقطهٔ جدیدی نسبت به نقاط قبلی نداشت. بعدها در تاریخ هر n شکل که امکان داشته باشد در این مراسم کشیده شده باشند، یک مَنگول نامیده شد!

حمید ادعا می‌کند تابلوهای زیر را در پایان همان مراسم خریداری کرده است.

کدام تابلوها قطعاً تقلّبی‌اند؟ (به عبارت دیگر کدام‌ها مَنگول نیستند؟)

الف) ۲ و ۱ ب) ۳ و ۱ ج) ۴ و ۱ د) ۳ و ۲ هـ) ۴ و ۲



۲۷) مردی راست‌گو از فرامفیا آمده است و اصوات نامفهومی از دهانش خارج می‌شود. مترجم او می‌گوید: «من درست نمی‌فهمم چه می‌گوید، ولی مطمئنم منظور او یکی از این جملات است:

۱) تابلوی من شامل تعدادی شکل است که همگی با انتقال از روی یکدیگر به دست می‌آیند.

۲) تابلوی من شامل تعدادی شکل هم‌نهشت است (شکل‌های قابل انطباق با هم).

۳) تابلوی من شامل تعدادی دایره است.

۴) در تابلوی من شکلی هست که زیرمجموعهٔ اجتماع بقیهٔ شکل‌ها نیست.»

اگر کدام جمله را گفته باشد می‌توان مطمئن بود که این تابلو مَنگول است؟

الف) ۲ و ۱ ب) ۳ و ۱ ج) ۴ و ۱ د) ۳ و ۲ هـ) ۴ و ۲

۲۸) دو نفر از برگزارکنندگان مراسم تصمیم می‌گیرند با یکی از مهمان خارجی ـ و ناآشنا به قوانین ـ شوخی کنند. به همین دلیل وقتی نحوهٔ کشیده شدن تابلوها را توضیح می‌دادند، ترتیب کشیده شدن را معکوس می‌گفتند (مثلاً اگر به ترتیب شکل‌های $F_1, F_2, \ldots, F_n$ کشیده شده بود، به او می‌گفتند: ابتدا شکل F_n رسم شده، بعد شکل F_{n-1}، ... ، و در نهایت شکل F_1). برای این که همهٔ تابلوها را به این شکل توضیح بدهند و قضیه لو نرود، آن‌ها باید قانونِ سرگرمی را به چه صورت برای مهمانان خارجی بیان کنند؟

الف) هرکس باید شکلی بکشد که شامل تعدادی نقطهٔ جدید بشود (نقاطی که در شکل‌های قبل نیامده)

ب) هرکس باید شکلی بکشد که شامل کلّ نقاط یکی از شکل‌های قبلی نشود.

ج) هرکس باید شکلی بکشد که زیرمجموعهٔ اجتماع شکل‌های قبلی باشد.

د) هرکس باید شکلی بکشد که از اجتماع آن با k تا از شکل‌های قبل، اجتماع $k+1$ تا از شکل‌های قبلی پوشانده نشود.

هـ) هیچ‌کدام

۲۹) دو تابلوی تقلّبی که در هر کدام ۱۰۰۰۰ شکل رسم شده است، داریم. هر کس نظری می‌دهد:
بهزاد تابلوی ۱ را ندیده و می‌گوید: در این تابلو می‌توان ۱۰ شکل انتخاب کرد که مَنگول باشند.
امید تابلوی ۲ را دیده و می‌گوید: در این تابلو می‌توان ۲۰ شکل انتخاب کرد که مَنگول باشند.
کسری تابلوی ۲ را دیده و می‌گوید: در این تابلو هیچ ۲۱ شکلی تشکیل یک مَنگول نمی‌دهند.
کدام گزاره بهترین نتیجه‌گیری است؟

الف) بهزاد حتماً راست می‌گوید.

ب) ممکن است امید و کسری هر دو راست بگویند.

ج) ممکن است امید و کسری هر دو دروغ بگویند.

د) الف و ب

ه) الف و ج

۳۰) یاسر و مرتضی که در همهٔ جنبه‌های زندگی ـ حتّی نفس کشیدن ـ سعی می‌کنند با هم رقابت کنند، با دیدن مراسم بین خودشان یک مسابقه ترتیب می‌دهند. به این ترتیب که ابتدا یکی از آن دو شکلی را می‌کشد. سپس نفر دیگر شکل دیگری را می‌کشد. به همین ترتیب هر کس در نوبت خود یک شکل می‌کشد. اولین کسی که بتواند شکلی بکشد که باعث شود همهٔ شکل‌ها غیر مَنگول شوند، برنده است.

فرض کنید تابلوشان از هر طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد.

الف) نفر اول می‌تواند همیشه برنده شود.

ب) نفر دوم می‌تواند همیشه برنده شود.

ج) اگر هر دو خوب بازی کنند، تا آخر دنیا کسی برنده نمی‌شود.

د) بعد از ۲۸ حرکت بازی تمام می‌شود.

ه) یاسر می‌تواند همیشه برنده شود.

دیتریشی DIETERCI

اسلام‌شناس آلمانی

همین علوم و معارف مسلمین بود که اروپا را در قرن دهم میلادی جلو برد همان علومی است که سرچشمه آنها قرآن کریم بود و اروپا از این حیث مدیون اسلام است.

اسلام از نظر دانشمندان غرب ص ۴

به نقل از کتاب اعترافات دانشمندان بزرگ جهان ص ۶۲

پاسخ مسائل مرحله اول بیستمین المپیاد ریاضی، سال ۱۳۸۰

۱) گزینهٔ (الف) صحیح است.

اگر $n \geqslant ۷$ باشد، آنگاه $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n = ۳^۷(۱ + ۳^۴ + ۳^{n-۷})$ و در نتیجه توان ۳ در این عبارت عددی فرد خواهد بود و لذا این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد. پس $n < ۷$.

حال با توجه به اینکه $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n = ۳^n(۳^{۷-n} + ۳^{۱۱-n} + ۱)$ نتیجه می‌گیریم که n باید عددی زوج باشد. امّا در این صورت $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n \overset{۴}{\equiv} -۱ - ۱ + (-۱)^n \overset{۴}{\equiv} -۱$ در حالی که باقیمانده یک عدد مربع کامل بر ۴ نمی‌تواند برابر ۱− باشد. بنابر این در حالت $n < ۷$ هم این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد.

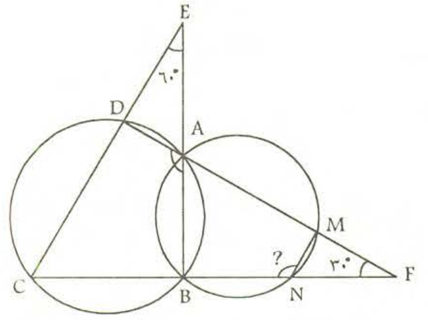
۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.

ابتدا روشن است که d باید از هر سه عدد a و b و c بزرگ‌تر باشد. بنابر این

$$n^d = n^a + n^b + n^c \leqslant n^{d-۱} + n^{d-۱} + n^{d-۱} = ۳n^{d-۱} \Rightarrow n \leqslant ۳ \Rightarrow n = ۳ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۱$$

واضح است که $n \neq ۱$. مثال‌های سادهٔ $۲^۳ = ۲^۲ + ۲ + ۲$ و $۳^۲ = ۳ + ۳ + ۳$ نشان می‌دهند که به ازای $n = ۲$ و $n = ۳$ معادلهٔ مذکور جواب دارد.

۳) گزینهٔ (ج) صحیح است.

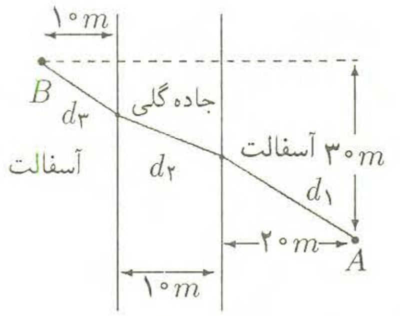


از آنجایی که چهارضلعی $ABNM$ محاطی است، لذا $\angle MNB = \angle BAD$. با جمع زدن زوایای دو مثلث $\triangle ECB$ و $\triangle FCD$ بدست می‌آوریم:

$$۲\hat{C} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{D} + \hat{B} = ۳۶۰^\circ$$

امّا $\hat{E} + \hat{F} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$، بنابر این $\hat{C} = ۴۵^\circ$ و از آنجا $\angle BAD = ۱۸۰ - ۴۵ = ۱۳۵^\circ$.

۴) پاسخ صحیح در بین گزینه‌ها موجود نمی‌باشد.



همهٔ گزینه‌ها را رد می‌کنیم.

فرض کنید دونده مطابق شکل پس از طی سه تکهٔ $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ از A به B برسد. زمانی که لازم دارد برابر است با:

$$t = \frac{d_۱}{۱۰} + \frac{d_۲}{۵} + \frac{d_۳}{۱۰} = \frac{d_۱ + d_۲ + d_۳}{۱۰} + \frac{d_۲}{۱۰} > \frac{AB}{۱۰} + \frac{۱۰}{۱۰} = \frac{۵۰}{۱۰} + ۱ = ۶$$

بنابر این این دونده به زمانی بیشتر از ۶ ثانیه احتیاج خواهد داشت، در حالی که همهٔ گزینه‌ها از ۶ کمترند.

۵) گزینهٔ (الف) صحیح است.
از بین این اعداد، اعدادی را انتخاب می‌کنیم که در نوشتن آنها از تعداد فردی ۱ استفاده شده باشد. در اینصورت هر دوتایی از این اعداد حداقل در دو رقم با هم اختلاف دارند و تعداد کل چنین اعدادی برابر است با:

$$\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۵} = ۵ + ۱۰ + ۱ = ۱۶$$

در ادامه نشان می‌دهیم که انتخاب بیش از ۱۶ عدد با خاصیت خواسته شده ممکن نیست.

تعداد کل اعداد ۵ رقمی که با رقم‌های ۱ و ۲ می‌توان ساخت برابر است با $۳۲ = ۲^۵$. حال ما این ۳۲ عدد را به شیوهٔ زیر به ۱۶ دستهٔ دوتایی تقسیم می‌کنیم:

هر دو عددی را که فقط در رقم یکان با هم تفاوت دارند در یک دسته قرار می‌دهیم. برای مثال دو عدد (۱۱۲۱۱, ۱۱۲۱۲) در یک دسته قرار می‌گیرند. حال واضح است که از دو عدد واقع در هر یک از این ۱۶ دسته حداکثر یکی را می‌توان انتخاب کرد. لذا حداکثر ۱۶ عدد از این اعداد را می‌توان انتخاب کرد.

۶) گزینهٔ (ج) صحیح است.

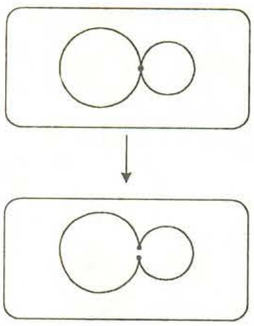
$$\begin{aligned} a = ۱ + \sqrt[۳]{۶a - ۲} &\Rightarrow (a-۱)^۳ = ۶a - ۲ \Rightarrow a^۳ - ۳a^۲ + ۳a - ۱ = ۶a - ۲ \\ &\Rightarrow a^۳ - ۳a^۲ - ۳a + ۱ = ۰ \Rightarrow a^۳ + ۱ - ۳a(a+۱) = ۰ \\ &\Rightarrow (a+۱)(a^۲ - a + ۱ - ۳a) = ۰ \end{aligned}$$

که با توجه به مثبت بودن a، $a + ۱ \neq ۰$ و لذا $a^۲ - ۴a + ۱ = ۰$. مشابهاً $b^۲ - ۴b + ۱ = ۰$ بنابر این با توجه به فرض متمایز بودن a و b، این دو عدد باید همان ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند. لذا با توجه به رابطهٔ مربوط به حاصل‌ضرب ریشه‌ها خواهیم داشت $ab = ۱$.

۷) گزینهٔ (ج) صحیح است.
اگر در تبدیل f، دو نقطهٔ نزدیک به هم در نظر بگیریم، از آنجایی که تبدیل f این دو تکه خمیر را به هم می‌چسباند لذا بعد از تبدیل، این دو نقطه همچنان نزدیک به هم باقی خواهند ماند. بنابر این f یک تبدیل پیوسته است.

امّا اگر در دو تکه خمیر به هم چسبیده شده، دو نقطه نزدیک به هم انتخاب کنیم بطوریکه هر دو در یک تکه خمیر نباشند (در دو طرف مرز چسبیدگی دو تکه خمیر باشند)، آنگاه تبدیل یافته‌های این دو نقطه، یکی در تکه خمیر بالایی و دیگری در تکه خمیر پایینی می‌افتد و لذا این نقاط دیگر نزدیک به هم نخواهند بود. بنابر این $f^{-۱}$ یک تبدیل ناپیوسته است.

۸) گزینهٔ (الف) صحیح است.
دو شکل A و B هم‌ریختند، زیرا به روشنی با تغییرات پیوسته می‌توان شکل A را به شکل B تبدیل کرد، بطوریکه نقاط نزدیک به هم، همچنان نزدیک به یکدیگر باقی بمانند.



امّا دو شکل C و D هم‌ریخت نیستند. زیرا اگر بخواهیم شکل D را به شکل C تبدیل کنیم، ابتدا باید دو سوراخ را به هم نزدیک کنیم تا جایی که دقیقاً در یک نقطه مطابق شکل مشترک شوند. حال باید خمیر را از نقطهٔ اشتراک دو دایره پاره کنیم تا دو سوراخ به یک سوراخ تبدیل شوند، ولی در اینصورت نقاط دو طرف محل اشتراک دو دایره، به وضوح از هم دور خواهند شد و لذا تبدیل پیوسته نیست.

۹) گزینهٔ (هـ) صحیح است.

راه اول: با کمی دقت می‌توان دریافت که در فاصلهٔ هر یک ساعت، دقیقاً یک بار این اتفاق روی می‌دهد. یک بار بین ساعت ۱ و ۲، یک بار بین ساعت ۲ و ۳ و .... امّا علاوه بر اینها رأس ساعت ۶ هم یک بار دیگر این اتفاق روی می‌دهد. لذا در کل ۱۳ بار این ساعت زنگ می‌زند.

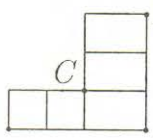
راه دوم: فرض کنید z مختصات نوک عقربهٔ ساعت‌شمار در صفحهٔ مختلط باشد. می‌توان z را روی دایره واحد فرض کرد. در اینصورت مختصات عقربهٔ دقیقه‌شمار برابر $z^{۱۲}$ خواهد بود. حال برای اینکه محور افقی نیمساز زاویهٔ بین دو عقربه باشد، باید $\bar{z} = z^{۱۲}$ و به عبارتی $z \cdot \bar{z} = z \cdot z^{۱۲} = ۱$ یعنی $z^{۱۳} = ۱$ که این معادله دارای ۱۳ جواب در مجموعهٔ اعداد مختلط است.

۱۰) گزینهٔ (د) صحیح است.

از فرض مسأله نتیجه می‌شود که اگر دو پدر با هم دوست نباشند، پسرهای آنها نیز با هم دوست نیستند. لذا اگر در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دوتایی دوست نباشند، آنگاه پسرهای آنها نیز با هم دوست نیستند و لذا k دانش‌آموز وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

۱۱) گزینهٔ (ب) صحیح است.

مسیرها را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:



i) مسیرهایی که از C رد می‌شوند و از D رد نمی‌شوند، که در اینصورت از A تا C، ۴ راه و از C تا B هم ۴ راه خواهیم داشت، لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با $۴ \times ۴ = ۱۶$.

ii) مسیرهایی که از D رد می‌شوند و از C رد نمی‌شوند، که در اینصورت از A تا D، ۲ راه و از D تا B هم ۲ راه خواهیم داشت، لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با $۲ \times ۲ = ۴$.

iii) مسیرهایی که هم از C و هم از D رد می‌شوند، که این خود به دو صورت ممکن است:

اول اینکه، از A به C، از C به D و از D به B برویم که تعداد این مسیرها با توجه به اینکه از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کرد، به ترتیب برابرند با: ۲، ۱، ۲ و لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با: $۲ \times ۱ \times ۲ = ۴$

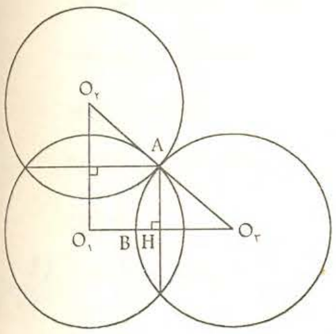
دوم اینکه، از A به D، از D به C و از C به B برویم که تعداد این مسیرها با توجه به اینکه از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کرد، به ترتیب برابرند با: ۲، ۱، ۲ و لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با: $۲ \times ۱ \times ۲ = ۴$.

بنابر این تعداد کل مسیرهای از A به B برابر خواهد بود با $۱۶ + ۴ + ۴ + ۴ = ۲۸$.

۱۲) گزینهٔ (د) صحیح است.

اولاً طبق قضیه فیثاغورس

$$.O_۲O_۳ = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰$$



بنابر این دو دایرهٔ $C_۲$ و $C_۳$ در وسط $O_۲O_۳$ بر هم مماسند، و البته از آنجایی که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است، فاصلهٔ $O_۱$ از وسط $O_۲O_۳$ برابر $۵ = \frac{۱۰}{۲}$ خواهد بود و بنابر این دایرهٔ $C_۱$ نیز از وسط $O_۲O_۳$ یعنی همان محل تماس $C_۲$ و $C_۳$ می‌گذرد.

قرار دهید $\hat{O}_۲ = \theta$ و $\hat{O}_۳ = \theta'$. در اینصورت مساحت ناحیهٔ مشترک $C_۳$ و $C_۱$ برابر است با:

$$= (\text{مساحت مثلث } \triangle O_۳AH - \text{مساحت قطاع } O_۳AB) \times ۴$$

$$۴\times(\frac{۵^۲\theta'}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{O_۱O_۳}{۲} \times \frac{O_۱O_۲}{۲}) = ۴\times(\frac{۵^۲\theta'}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۲} \times \frac{۸}{۲}) = ۵۰\theta' - ۲۴$$

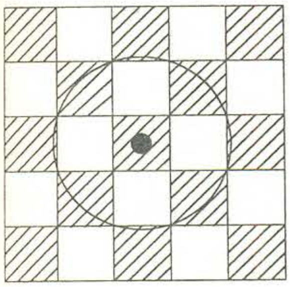
مشابهاً مساحت ناحیه مشترک $C_۲$ و $C_۱$ برابر است با:

$$۴(\frac{۵^۲\theta}{۲} - \frac{۳\times ۴}{۲}) = ۵۰\theta - ۲۴$$

لذا مساحت ناحیه‌ای از $C_۱$ که با $C_۲$ و $C_۳$ تداخل ندارد، برابر است با:

$$\pi \times ۵^۲ - (۵۰\theta - ۲۴ + ۵۰\theta' - ۲۴) = ۲۵\pi - (۵۰(\theta + \theta') - ۴۸)$$
$$= ۲۵\pi - (۵۰ \times \frac{\pi}{۲} - ۴۸) = ۴۸$$

۱۳) گزینهٔ (الف) صحیح است.



دایره نشان داده شده در شکل تماماً در خانه‌های سیاه قرار دارد و شعاع آن برابر است با

$$\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

و چون $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ بزرگ‌ترین گزینهٔ مسأله است، پس $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ جواب مسأله خواهد بود.

۱۴) گزینهٔ (ج) صحیح است.

زیرا چنانچه گزارهٔ (ج) در مورد اعداد جالب برقرار باشد، باید $x \cdot (\frac{۱}{x}) = ۱$ هم جالب باشد که نیست.

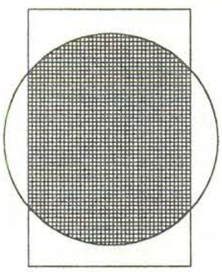
۱۵) گزینهٔ (د) صحیح است.

با کمی دقت و نگاه کردن به گزینه‌ها می‌توان به سادگی دریافت که گزینهٔ (د) صحیح است، زیرا مساحت متوازی‌الاضلاعی مثل $ABCD$ که رئوس آن شبکه‌ای باشند، برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} = 2S_{ABC} &= 2 \times \frac{1}{2}|y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)| \\ &= |y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)| \end{aligned}$$

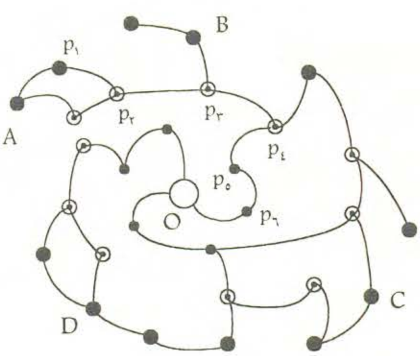
که عددی صحیح است. لذا گزینهٔ (د) صحیح است.

۱۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.



اگر استوانه را باز کنیم تا به مستطیلی تبدیل شود، مساحتی که حشره می‌تواند به آن برود قسمتی از دایرهٔ به مرکز وسط مستطیل و شعاع یک خواهد بود که داخل مستطیل قرار می‌گیرد. (دقت کنید که چون قطر دایره برابر ۲ و از $\sqrt{3}$ بیشتر است، دایره کاملاً داخل مستطیل نمی‌افتد.) همین جا می‌توان جواب مسأله را پیدا کرد، زیرا مساحت این ناحیه حتماً از مساحت کل دایره که $\pi \times 1^2 = \pi$ است کمتر است و بین گزینه‌ها تنها گزینه (الف) از π کمتر است. البته خودتان به سادگی می‌توانید مساحت قسمت‌هایی از دایره را که بیرون مستطیل می‌افتد حساب کنید و به صورت تشریحی هم به همین جواب برسید.

۱۷) گزینهٔ (الف) صحیح است.



A: آرش مهره را به p_1 می‌برد، علی به اجبار آن را به p_2 می‌برد. آرش آن را به p_3 و سپس علی به اجبار به p_4، آرش آن را به p_5 و علی به اجبار به p_6 و در نهایت آرش آن را به O می‌برد

B: آرش مهره را به p_3 و علی به اجبار به p_4 و سپس آرش آن را به p_5 و علی به اجبار به p_6 و در نهایت آرش آن را به O می‌برد.

۱۸) گزینهٔ (الف) صحیح است.

دقت کنید که می‌توان دونده‌های E و D و C و B را بدون حرکت در نظر گرفت و در عوض سرعت آنها یعنی یک دور در ساعت را به سرعت A افزود. (به بیانی سرعت نسبی این متحرک‌ها مهم است.) در این صورت همهٔ دونده‌ها ثابتند و A با سرعت ۵ دور در ساعت حرکت می‌کند. در دور اول چوب را به E می‌دهد، در دور دوم چوب را از E گرفته به D می‌دهد، در دور سوم از D به C و در دور چهارم از C به B می‌دهد. در دور پنجم هم چوب را از B می‌گیرد و لذا در پایان این دور چوب در دست خود A خواهد بود.

۱۹) گزینهٔ (ه) صحیح است.

فرض کنیم که این اتومبیل در فاصلهٔ x کیلومتری شهر B باشد. سرعت این اتومبیل در x کیلومتر باقیمانده حداکثر x کیلومتر بر ساعت است. لذا برای طی مسافت باقیمانده به حداقل یک ساعت زمان احتیاج دارد.

به عبارتی این اتومبیل در هر نقطه‌ای از مسیر که باشد، حداقل یک ساعت تا مقصد فاصله دارد. بنابر این این اتومبیل هیچ‌گاه به مقصد نخواهد رسید!

۲۰) گزینهٔ (هـ) صحیح است.

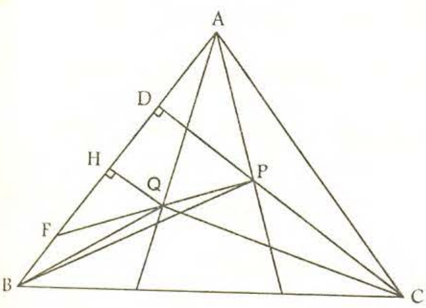
گزارهٔ (الف) صحیح است، زیرا اگر x نقطه‌ای درون دایره واحد باشد، مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز ثقل x در نظر می‌گیریم و آن قدر این مثلث را کوچک می‌کنیم که کاملاً درون دایرهٔ واحد بیفتد. درستی گزارهٔ (ب) نیز با استدلال مشابهی اثبات می‌شود.

گزارهٔ (ج) نیز صحیح است، زیرا فرض کنید x نقطه‌ای درون مجموعه‌ای با ساختار دایره‌ای باشد، لذا دایره توپری به مرکز x وجود دارد که کاملاً داخل مجموعه بیفتد. حال مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز ثقل x در نظر می‌گیریم و آن را آنقدر کوچک می‌کنیم تا کاملاً درون این دایره بیفتد، لذا مثلث متساوی‌الاضلاع توپری به مرکز ثقل x وجود دارد که کاملاً درون مجموعه باشد، بنابر این مجموعه ساختار مثلثی نیز دارد.

درستی گزارهٔ (د) نیز مشابهاً اثبات می‌شود.

بنابر این گزینهٔ (هـ) پاسخ مسأله خواهد بود.

۲۱) گزینهٔ (هـ) صحیح است.



اولاً ادعا می‌کنیم $PQ = QF$، زیرا:

$$\frac{QF}{PF}=\frac{QH}{PD}=\frac{QH\cdot AB}{PD\cdot AB}=\frac{S_{AQB}}{S_{APB}}=\frac{\frac{۱}{۶}S_{ABC}}{\frac{۲}{۶}S_{ABC}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابر این $QF = \frac{۱}{۲}PF$ و یا معادلاً $PQ = QF$، یعنی نقطه Q وسط پاره‌خط PF است.

حال از آنجایی که $\frac{AF}{FB} = \frac{S_{AFC}}{S_{BFC}}$، سعی می‌کنیم مساحت مثلث $\triangle BFC$ را محاسبه کنیم. دقت می‌کنیم که چون Q وسط PF است، لذا ارتفاع وارد از Q بر BC برابر نصف مجموع ارتفاع‌های وارد از P و F بر BC می‌باشد و لذا $S_{QBC} = \frac{S_{FBC}+S_{PBC}}{۲}$ و از آنجا:

$$S_{FBC} = ۲S_{QBC} - S_{PBC} = ۲\times\frac{۲}{۶}S_{ABC} - \frac{۳}{۶}S_{ABC} = \frac{۱}{۶}S_{ABC} \Rightarrow$$
$$S_{AFC} = S_{ABC} - S_{BFC} = \frac{۵}{۶}S_{ABC}$$

و بنابر این،

$$\frac{AF}{FB} = \frac{S_{AFC}}{S_{BFC}} = \frac{\frac{۵}{۶}S_{ABC}}{\frac{۱}{۶}S_{ABC}} = ۵$$

۲۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول از ۱ تا ۳۰ را انتخاب می‌کنیم. تعداد این اعداد ۱۰ تاست و روشن است که هیچ‌یک از این اعداد حاصلضرب بقیه‌شان را نمی‌شمارد.

حال نشان می‌دهیم که ۱۰ حداکثر مقدار ممکن نیز می‌باشد.

فرض کنید تعدادی عدد انتخاب کرده‌ایم، بطوریکه هیچ‌کدام از آن‌ها حاصلضرب مابقی را نمی‌شمارد. ادعا می‌کنیم می‌توان تمام این اعداد را به صورت p^α در نظر گرفت، بدون اینکه تعداد این اعداد کاهش یابد. برای این کار فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ یکی از این اعداد باشد، در اینصورت حداقل یکی از $p_i^{\alpha_i}$ها حاصلضرب مابقی اعداد را نمی‌شمارد، زیرا در غیر اینصورت حاصلضرب مابقی اعداد باید بر همهٔ $p_i^{\alpha_i}$ها و در نتیجه بر حاصلضرب آنها یعنی n بخشپذیر باشد که تناقض است. حال می‌توان جای n و $p_i^{\alpha_i}$ را با هم عوض کرد، بدون اینکه خاصیت مسأله به هم بخورد.

به این ترتیب می‌توان همهٔ این اعداد را به p^αها تبدیل کرد بدون اینکه تعداد آنها کاهش یابد. حال دقت می‌کنیم که اگر p^α و q^β دو تا از این اعداد باشند، در اینصورت $p \neq q$ (چرا؟) لذا تعداد این اعداد حداکثر برابر تعداد اعداد اول مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, 30\}$، یعنی ۱۰ خواهد بود.

* قبل از شروع به بررسی این سه سؤال سعی می‌کنیم برداشت مناسبی از مفاهیم خط، نقطه و دایره که در این مسأله تعریف شده‌اند پیدا کنیم:

نقطه: منظور از نقطه همان نقطهٔ صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ است. با این خاصیت که باید مختصات آن صحیح باشد.

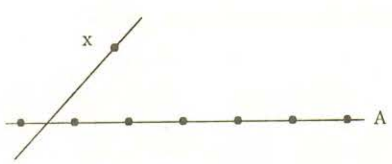
خط: منظور از یک خط، نقاط صحیح واقع بر یک خط است، البته این خط باید حداقل یک نقطه صحیح داشته باشد و به علاوه شیب آن نیز باید گویا باشد. (و یا موازی محور عمودی باشد.)

دایره: منظور از دایره، نقاط صحیح واقع بر یک دایره است. البته مختصات مرکز دایره نیز باید صحیح باشد.

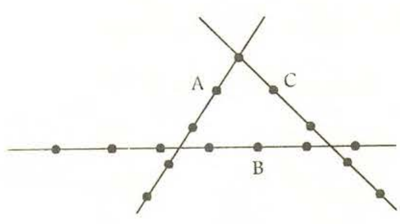
حال با در نظر داشتن این مطالب به حل این مسایل می‌پردازیم.

۲۳) گزینهٔ (ب) صحیح است.

گزارهٔ (۱) به وضوح درست است.



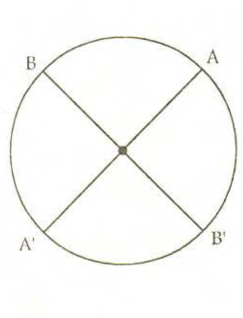
گزارهٔ (۲) غلط است. زیرا اگر x نقطه‌ای خارج از خط A باشد کافیست از این نقطه خطی با شیب گویا رسم کنید که خط A را در نقطه‌ای غیر صحیح قطع کند. در اینصورت این خط با خط A موازی خواهد بود.



گزارهٔ (۳) غلط است. مطابق شکل A با B موازی و B با C موازی است، ولی A و C موازی نیستند.

گزارهٔ (۴) غلط است، مثلاً دو نقطهٔ $(1, 0)$ و $(0, 0)$ را در نظر بگیرید. مجموعه نقاطی که از این دو نقطه به یک فاصله‌اند خط $x = \frac{1}{2}$ است، که شامل هیچ نقطهٔ صحیحی نیست؛ لذا یک خط نیست.

۲۴) گزینهٔ (ج) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که تعداد نقاط صحیح روی یک دایره متناهی است. حال ادعا می‌کنیم که این تعداد مضرب ۴ است. زیرا اگر A نقطه‌ای صحیح روی دایره باشد، A' نقطهٔ مقابل قطری A و دو سر قطر عمود بر AA' نیز صحیح خواهند بود. پس نقاط صحیح روی دایره به صورت دسته‌های چهارتایی هستند و لذا تعداد آنها مضرب ۴ می‌باشد.

۲۵) گزینهٔ (ب) صحیح است.

زیرا از هر نقطه روی دایره می‌توان بی‌نهایت خط با شیب گویا رسم کرد که دایره را در نقطهٔ صحیحی قطع نکنند. در اینصورت تمام این خطوط بر دایره مماس خواهند بود.

۲۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.

دقت کنید که در شکل (۱)، اجتماع هر دو شکل، شکل سوم را می‌پوشاند. بنابر این، این تابلو منگول نیست. در مورد شکل (۲) نیز همین مطلب صادق است.

۲۷) گزینهٔ (ب) صحیح است.

تابلوی گزارهٔ (۱) منگول است، زیرا خطی را در نظر بگیرید که موازی هیچ‌کدام از محورهای انتقال نباشد. با نزدیک کردن این خط از بی‌نهایت به این شکل‌ها، به ترتیب برخورد، ترتیب کشیده شدن شکل‌ها بدست می‌آید.

تابلوی گزارهٔ (۳) نیز منگول است، دایره‌ای به شعاع به اندازهٔ کافی بزرگ در نظر بگیرید که همه شکل‌ها را شامل باشد. با کوچک کردن شعاع، این دایره دایره‌ها را قطع خواهد کرد. حال کافیست شکل‌ها به ترتیب عکس این قطع کردن‌ها کشیده شوند. (البته باید دایرهٔ مذکور را طوری انتخاب کنیم که هیچ‌گاه به طور همزمان بر دو تا از این دوایر مماس نشود که برای این منظور هم کافیست مرکز دایره را نقطه‌ای غیر از نقاط واقع بر هذلولی‌های به کانون‌های مراکز این دوایر و به فاصلهٔ رأسی تفاضل دوبه‌دوی شعاع‌های این دوایر در نظر بگیریم. (چرا؟))

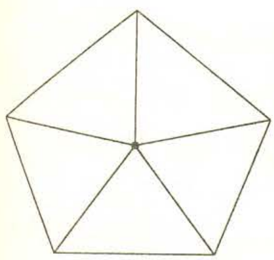
۲۸) گزینهٔ (ب) صحیح است.

به سادگی می‌توان دید که در هر شکل منگول شرط (ب) برقرار است.

توضیح: به دلیل برداشت‌های متفاوتی که از صورت این سؤال شده بود، هر سه گزینهٔ (ب)، (د) و (ه) در تصحیح اوراق به عنوان پاسخ صحیح پذیرفته شدند.

۲۹) گزینهٔ (ب) صحیح است.

ابتدا یک تابلو برای گزینهٔ (ب) ارائه می‌کنیم. یک ۱۰۰۰۰ ضلعی منتظم در نظر بگیرید که با وصل کردن مرکز آن به رئوسش به ۱۰۰۰۰ قاچ برابر تقسیم شده است. (این کار در شکل برای ۵ ضلعی منتظم نشان داده شده است.)



حال ۱۹ قاچ پشت سرهم از این ۱۰۰۰۰ ضلعی منتظم را حذف کنید و شکل باقیمانده را F_1 بنامید. از حذف ۱۹ قاچ‌های متوالی دیگر اشکال $F_2, F_3, \ldots, F_{10000}$ بدست می‌آیند. حال تابلو را متشکل از این ۱۰۰۰۰ شکل بگیرید. به وضوح هیچ ۲۱ شکلی تشکیل یک منگول نمی‌دهند، زیرا اجتماع هر ۲۰ تا از آنها حتماً ۲۱ـامی را می‌پوشاند. از طرفی یک شکل و ۱۹ دوران دیگر آن به اندازهٔ $\frac{2\pi}{10000}$ (به عبارتی هر ۲۰ شکل متوالی) منگول می‌باشند. پس گزینهٔ (ب) قطعاً درست است.

حال شما خود می‌توانید با مثال مشابهی گزینهٔ (الف) را رد کنید. یعنی مثالی بسازید که در آن هیچ ۱۰ شکلی تشکیل منگول ندهند. برای این منظور کافیست در مثال قبل بجای ۱۹ قاچ پشت سرهم، ۸ قاچ متوالی را حذف کنید تا دیگر در این تابلو هیچ ۱۰ شکلی منگول نباشند.

۳۰) گزینهٔ (ج) صحیح است.

زیرا هر بار هرکس شکلی بکشد، کافی است نفر بعد شکلی بکشد که از همه شکل‌ها به اندازهٔ کافی فاصله داشته باشد و با آنها اشتراکی نداشته باشد.

توماس کارلایل TOMASS CARLYLE

نویسنده دانشمند مشهور انگلیسی

هیچ‌کس قرآن را با دقت نمی‌خواند مگر آن‌که می‌بیند حقایقی اصیل در برابر وی آشکار است و در می‌یابد که این کتاب وابسته به اصلی حقیقی و مبدئی عالی و مقدس پیوسته است و تردیدی نیست که گفتار حقیقی و درست نفوذ خاصی بر دل‌ها دارد و حق آن است که تمام کتاب‌ها در برابر قرآن ناچیز و کوچکند و این کتاب از هرگونه عیب و نقص و اصول ناپسند پاکیزه و مبرا است.

تاریخ قرآن ص ۱۵۲، به نقل از کتاب اعترافات دانشمندان بزرگ جهان، ص ۴۷.