مرحله ی اول نوزدهمین دوره ی المپیاد ریاضی ایران

بهمن ماه ۱۳۷۹

۱) جدول اعداد زیر را در نظر بگیرید:

۱

۱   -۱

۱   -۱   ۱

۱   -۱   ۱   -۱

۱   -۱   ۱   -۱   ۱

.

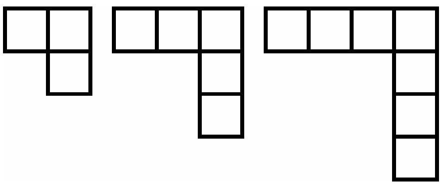
.

.

حاصل جمع کلیه ی سطر ها از سطر اول تا سطر ۱۳۷۹ (با خود سطر ۱۳۷۹) برابر است با:

الف) ۶۹۰   ب) ۱   ج) ۰   د) ۱۳۷۹   ه) ۶۸۹

۲) شکل های زیر با چوب کبریت ساخته شده اند:



اگر ۵۰۰ تا چوب کبریت داشتیم، چند تا است؟

الف) ۱۶۷   ب) ۱۶۶   ج) ۱۶۵   د) ۱۶۴   ه) هیچ کدام

۳) ۴۰ توپ را با اعداد ۱ تا ۴۰ شماره گذاری کرده ایم. می خواهیم توپ ها را در تعدادی جعبه قرار دهیم به این ترتیب که اگر در یک جعبه توپی با شماره ی n قرار داده شده باشد، توپ دیگری با مضارب n را نمی توانیم در آن جعبه بگذاریم، حداقل چند تا جعبه برای قرار دادن همه ی توپ ها لازم است؟

الف) ۵   ب) ۶   ج) ۱۲   د) ۱۴   ه) ۲۰

۴) پنج نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض است، کدام یک از نتیجه گیری های زیر درباره ی مختصات وسط پاره خط های واصل بین این نقاط درست است؟

الف) مختصات کلیه ی نقاط فوق الذکر نیز لزوما صحیح است.

ب) مختصات هیچ کدام لزوما صحیح نیست.

ج) حداقل مختصات یکی از نقاط صیح است و نه لزوما بیش تر.

د) حداقل مختصات دو نقطه صحیح است و نه لزوما بیش تر.

ه) حداقل مختصات سه نقطه صحیح است و نه لزوما بیش تر.

۵) یک زوج (a,b)، $a,b \in \mathbb{Z}$، خوب نامیده می شود اگر از هر مسیری از نقطه ی (۰،۲) حرکت کنیم و در هر مرحله روی شبکه ی مختصات یک واحد به بالا، پایین، چپ یا راست برویم و سرانجام به نقطه ی (a,b) برسیم دست کم یک بار از نقطه ای مثل (x,y) گذشته باشیم که $x^۲-۴y$ مربع کامل باشد. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف) زوج (۲۰۰۰،۱۳۷۹) خوب است ولی زوج (۱۳۶۱،۷۶۵-) خوب نیست.

ب) زوج (۲۰۰۰،۱۳۷۹) و زوج (۱۳۶۱،۷۶۵-) خوب هستند.

ج) زوج (۲۰۰۰،۱۳۷۹) خوب نیست ولی زوج (۱۳۶۱،۷۶۵-) خوب است.

د) هیچ زوج خوبی وجود ندارد.

ه) تعداد متناهی زوج خوب وجود دارد و حداقل یک زوج خوب وجود دارد.

۶) تعداد اعداد طبیعی n≤۱۳۷۹ که به ازای آن ها عدد $n^۳+۲n^۲$ مربع کامل باشد، چند تاست؟

الف) ۱۶ ب) ۶۴ ج) ۴۹ د) ۵۵ ه) ۳۶

۷) تعداد x های صحیح که در معادله ی زیر صدق می کنند چند تا است؟

$$\frac{x^۳+x}{x+۳}=۳۵$$

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی شمار

۸) در مثلث ΔABC، B' قرینه ی B نسبت به ضلع AC و C' قرینه ی C نسبت به ضلع AB است. می دانیم که $B'C'=AB+AC$. زاویه ی $\angle A$ چند درجه است؟

الف) ۳۰° ب) ۴۰° ج) ۶۰° د) ۹۰° ه) این زاویه یا ۳۰° است و یا ۶۰°.

۹) اعداد طبیعی x، y و n در شرایط زیر صدق می کنند:

i) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک x و y برابر با ۱۳۷۹ است.

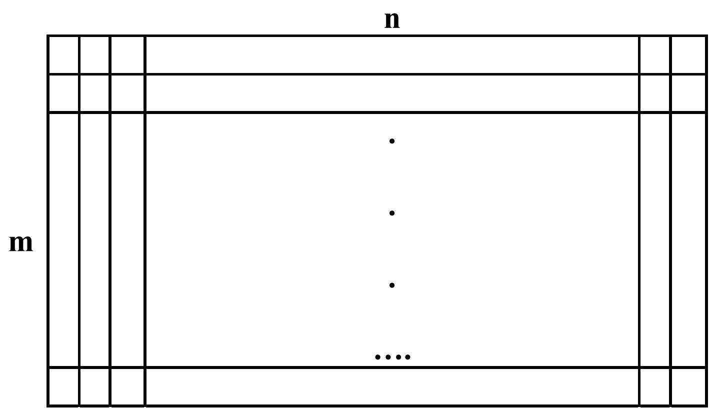
ii) کوچک ترین مقسوم علیه مشترک x و y برابر $n!$ است.

$(n!=۱\times۲\times\dots\times n)$ n با کدام یک از اعداد زیر می تواند برابر باشد؟

الف) ۲۷ ب) ۶۴ ج) ۱۲۵ د) ۲۱۶ ه) هیچ کدام

۱۰) کارخانه ی « شوکولات » شکلات کاکائویی خوشمزه ای به شکل یک مستطیل شبکه بندی شده تولید کرده است. وقت خوردن، در هر گاز، یکی از خطوط افقی یا عمودی زیر دندان قرار می گیرد و می شکند. در نتیجه شکلات به دو مستطیل تقسیم می شود. و یک قسمت آن خورده می شود، شخص با انتخاب کدام ابعاد برای شکلاتش می تواند در بیش ترین تعداد گاز آن را بخورد؟

الف) ۳۲×۳۵ ب) ۶۰×۴ ج) ۳۳×۳۴ د) ۳×۸۰ ه) ۷۹×۷



۱۱) آیا اعداد طبیعی x_1، x_2، ...، x_n و x_{n+1} وجود دارند که

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=x_{n+1}^2$$

الف) برای هر n ای اعداد $x_1,...,x_{n+1}$ وجود دارند.

ب) به جز n=۱،۲ چنین اعدادی وجود ندارند.

ج) فقط برای هر n مربع کامل و n=۱،۲ چنین اعدادی وجود دارند.

د) فقط برای n=۱ و اعداد اول n چنین اعدادی وجود دارند.

ه) هیچ کدام

۱۲) در مثلث ABC داریم AB>AC. دو نیم دایره به قطر های AB و AC در خارج مثلث رسم می کنیم. نقاط تلاقی امتداد ارتفاع های 'CH و BH را با نیم دایره های مزبور به ترتیب 'C و 'B می نامیم. کدام صحیح است؟

الف) همواره AC'<AB'

ب) AC'<AB' اگر و تنها اگر A> حاده باشد.

ج) همواره AC'>AB'

د) AC'=AB' اگر و تنها اگر A> حاده باشد.

ه) همواره AC'=AB'

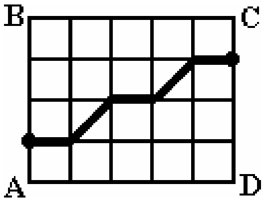
۱۳) در مثلث حاده الزاویه ی ABC، BD و CE به ترتیب ارتفاع های وارد بر اضلاع AC و AB هستند. می دانیم ۲DE=BC. زاویه ی A> چند درجه است؟

الف) ۶۰^o ب) ۳۰^o ج) ۴۵^o د) ۳۰^o یا ۶۰^o ه) نمی توان زاویه ی A> را مشخص کرد.

۱۴) یک جدول ۹×۹ از مربعات سفید موجود است. حداکثر مقدار n را بیابید که اگر به هر طریق ممکن n تا از خانه های جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان به هر طریق ممکن n تا از خانه های جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان چهار خانه ی سفید متوالی عمودی یا افقی یافت.

الف) ۱۷ ب) ۱۸ ج) ۱۹ د) ۲۰ ه) ۲۱

۱۵) می خواهیم در شکل زیر از نقطه ی دلخواه روی ضلع AB به نقطه ی دلخواه روی ضلع CD بـرویم. فـرض کنید تنها مجازیم دو نوع حرکت انجام دهیم، یک قدم افقی به سمت راست یا یک قدم مایل با زاویه ی ۴۵^{o} بـه سمت بالا- راست . به چند طریق این کار ممکن است؟



الف) ۱۲۶ ب) ۱۲۷ ج) ۱۲۸ د) ۱۲۹ ه) ۱۳۰

۱۶) یک فرش مربعی شکل ۳×۳ داریم که طرح روی آن ۹ مربع ۱×۱ است. می خواهیم هر یک از مربـع هـای ۱×۱ را با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم. چند فرش متفاوت با این خواص داریم؟ (اگر فـرش را دوران دهیم، فرش جدیدی به وجود نمی آید!)

الف) ۱۲۰ ب) $۲^{۷}$ ج) $۲^{۸}$ د) $۲^{۹}$ ه) ۱۴۰

۱۷) چند سه تایی مرتب (x,y,z) از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد به طوری که داشته باشیم:

$xyz=۲+x+y+z$, $xy+yz+zx=۱۲$

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) ۱۲

۱۸) تمام پنج تایی های مرتب از اعداد طبیعی به صورت $(a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵)$ را در نظر بگیرید که

$$\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\frac{۱}{a_۳}+\frac{۱}{a_۴}+\frac{۱}{a_۵}=۱$$

در این صورت کدام یک از گزینه های زیر در مورد تعداد این پنج تایی های مرتب صحیح است؟

الف) تعداد آن ها متناهی است.

ب) فقط یک پنج تایی مرتب با خاصیت فوق وجود دارد.

ج) تعداد این پنج تایی ها بر ۵ بخش پذیر است.

د) تعداد این پنج تایی ها به صورت $۵k+۱$ است که $k\geq ۱$ است.

ه) هیچ کدام

۱۹) بزرگ ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر سه عدد حقیقی $a,b,c\geq 0$ داشته باشیم:

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)\geq k(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۹ ه) ۱۲

۲۰) دنباله ای از اعداد حقیقی به این شکل تعریف می شوند $x_0=3$، $x_1=8$ و برای هر $n\geq 1$، $x_{n+1}=3x_n-4x_{n-1}$. به طور مثال: $x_2=12, x_3=4, \ldots$. در بین ۲۰۰۱ جمله ی ابتدایی این دنباله از x_0 تا x_{2000} چند مضرب ۳ داریم؟

الف) ۹۹۹ ب) ۱۰۰۰ ج) ۱۰۰۱ د) ۱۵۰۰ ه) ۱۵۰۱

۲۱) چند عدد صحیح $n\geq 2$، وجود دارد که به ازای هر n عدد حقیقی x_1، x_2، ... و x_n، گزاره ی شرطی زیر برقرار باشد؟

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leq 0 \Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_n=0$$

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۲۲) در یک صفحه ی شطرنج 13×79 یک خانه را مناسب می نامیم. اگر با حذف آن خانه بتوان مابقی خانه های صفحه س شطرنج را با موزاییک های 2×1 پر کرد. تعداد خانه های مناسب این صفحه ی شطرنج چند تاست؟ (موزاییک ها می توانند افقی یا عمودی قرار گیرند.)

الف) ۳۱۷ ب) ۴۲۹ ج) ۵۱۴ د) ۶۲۰ ه) ۷۱۶

۲۳) یک بازی ۷ نفره، بین امین، سلمان، علی، بابک، آرش، رضا و داود که به ترتیب دور یک دایره نشسته اند، انجام می شود. ابتدا هر کدام تعدادی کارت دارند. تعداد کل کارت های بین آن ها ۶ تاست. بازی از امین شروع می شود و به ترتیب سلمان، علی، ...، رضا، داود، سلمان، ... بازی می کنند. در هر مرحله کسی که نوبتش است اگر بیش از یک کارت دستش باشد ۱ کارت را نگه می دارد و بقیه ی کارت ها را به کسی که نوبت بعدی را دارد می دهد. کسی که هیچ وقت کارتی به او نرسد برنده است. (اگر ۶ نفر دقیقا ۱ کارت داشته باشند و نفر هفتم بدون کارت باشد با انجام بازی وضعیت تغییر نمی کند.) تعداد حالاتی را بیابید که امین برنده شود.

الف) ۱۳۸ ب)۸۸ ج) ۱۴۲ د) ۱۳۲ ه) ۱۳۰

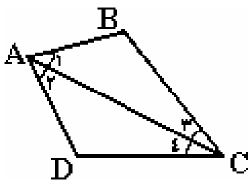
۲۴) کدام یک از اعداد زیر به صورت a^2-b^2، $a,b\in\mathbb{Z}$ قابل بیان هستند؟

الف) ۱۶، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ ب) ۱۶، ۲۰۰۱، ۹۸

ج) ۱۴، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ د) ۲۰۰۱، ۶۶، ۹۸

ه) ۱۶، ۶۶، ۹۸

۲۵) مساحت چهارضلعی زیر چقدر است اگر $\angle A_1+\angle C_4=30^\circ$ و $\angle A_1+\angle C_3=90^\circ$ و $AB=4,\ BC=8,\ CD=9,\ DA=5$.



الف) ۲۸

ب) ۲۹

ج) $۱۸+۱۰\sqrt{۳}$

د) $۱۰+۹\sqrt{۳}$

ه) $۹+۱۰\sqrt{۳}$

۲۶) فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد. تعداد جواب های طبیعی معادله ی $2^k+b^2=c^2$ چند تاست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) k د) $(k-1)^2$ ه) $k-1$

۲۷) تعداد جواب های معادله ی $3xy-y-5x=13$ که $x, y\in\mathbb{N}$ برابر است با

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی نهایت

۲۸) چند عدد حقیقی مانند a وجود دارد که در معادله ی زیر صدق می کند؟

$$\left[\frac{a}{۲}\right]+\left[\frac{a}{۳}\right]+\left[\frac{a}{۵}\right]=a$$

([x] برابر با بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x است.)

الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۳۰ د) ۶۰ ه) بی نهایت

۲۹) یک عدد ۱۰ رقمی را جالب می گوییم اگر تمام ارقام آن متفاوت باشند و بر ۱۱۱۱۱ بخش پذیر باشد. چند عدد ۱۰ رقمی جالب وجود دارد؟

الف) ۲۰۴۸ ب) ۴۰۹۶ ج) ۳۴۵۶ د) ۳۸۴۰ ه) هیچ کدام

۳۰) عدد طبیعی n را یک عدد « مثلثی » می گوییم اگر بتوان هر مثلث دل خواه را به n مثلث متساوی الساقین افراز کرد (این n مثلث تنها می توانند روی محیط با هم اشتراک داشته باشند). کدام یک از اعضای مجموعه ی {۴،۶،۷،۱۰} مثلثی هستند؟

الف) هیچ کدام از این اعداد مثلثی نیستند.

ب) ۷

ج) ۴، ۶ و ۱۰

د) ۴

ه) همه ی این اعداد مثلثی هستند.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۷۹

---

۱. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

حاصل‌جمع اعداد سطرهای با شماره‌ی فرد ۱ و سطرهای با شماره‌ی زوج صفر است پس مجموع کل اعداد برابر تعداد سطرهای با شماره‌ی فرد است و چون ۶۹۰ عدد فرد از ۱ تا ۱۳۷۹ موجود است جمع کل اعداد ۶۹۰ می‌شود .

۲. صورت سوال ایراد دارد!

چرا که اگر منظورش ساخت یکی از آن شکل‌ها بود باید تعداد چوب کبریت‌ها 6k+4 می‌بود و اگر منظورش مجموعه‌ی این شکل‌ها بود باید تعداد چوب کبریت‌ها مساوی $\sum_{i=1}^{k} 6i + 4 = 6\frac{k(k+1)}{2} + 4k = 3k^2 + 7k$ می‌بود ولی معادله‌ی $3k^2 + 7k = 500$ جواب ندارد.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

مطمئناً حداقل ۶ جعبه لازم است چرا که هیچ دو تایی از اعداد ۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲ نمی‌توانند در یک جعبه باشند. دسته‌بندی زیر نشان می‌دهد که ۶ جعبه کافی هم است.

۱

۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۳۹

۴,۶,۹,۱۰,۱۴,۱۵,۲۱,۲۲,۲۵,۲۶,۳۳,۳۴,۳۵,۳۸

۸,۱۲,۱۸,۲۰,۲۷,۲۸,۳۰

۱۶,۲۴,۳۶,۴۰

۳۲

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

پنج نقطه با مختصات صحیح داریم طبق اصل لانه کبوتری زوجیت مولفه‌ی x سه تا از این اعداد با هم برابر است حال باز هم از بین این سه نقطه دو نقطه موجودند که زوجیت مولفه‌ی yشان نیز برابر است. پس دو نقطه یافتیم که زوجیت مولفه‌ی x شان با هم و y شان نیز با هم برابر است پس وسط این دو نقطه دارای مختصات صحیح است. مثال زیر هم نشان می‌دهد که لزومی ندارد این اتفاق بیش از یکبار بیفتد.

(۱,۱) (۱,۲) (۲,۳) (۲,۴) (۲,۷)

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید به برای هر نقطه‌ی (x,y) روی خط $y = x - ۱$ و $y = -x - ۱$ مقدار $x^۲ - ۴y$ مربع کامل است. زیرا

$$x^۲ - ۴(x-۱) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x-۲)^۲$$
$$x^۲ - ۴(-x-۱) = x^۲ + ۴x + ۴ = (x+۲)^۲$$

دقت کنید که مطابق شکل اگر نقطه‌ای زیر یکی از این دو خط قرار داشته باشد با توجه به این که $(۰,۲)$ بالای این دو خط است برای حرکت از $(۰,۲)$ و رسیدن به آن نقطه ناچار باید از نقاطی از یکی از این دو خط عبور کنیم. یعنی نقاطی که $y \le x - ۱$ و یا $y \le -x - ۱$(معادلاً $y \le \left|x\right| - ۱$) خوب هستند. بنابراین هر دو زوج $(۲۰۰۰,۱۳۷۹)$ و $(-۱۳۶۱,۷۶۵)$ خوب هستند.

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

پس $n+2=\frac{k^2}{n^2}=(\frac{k}{n})^2$ پس n+2 باید مربع کامل باشد.

و از آن‌جایی که n≤1379 :

پس ۳۶ عدد با این خاصیت داریم.

۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

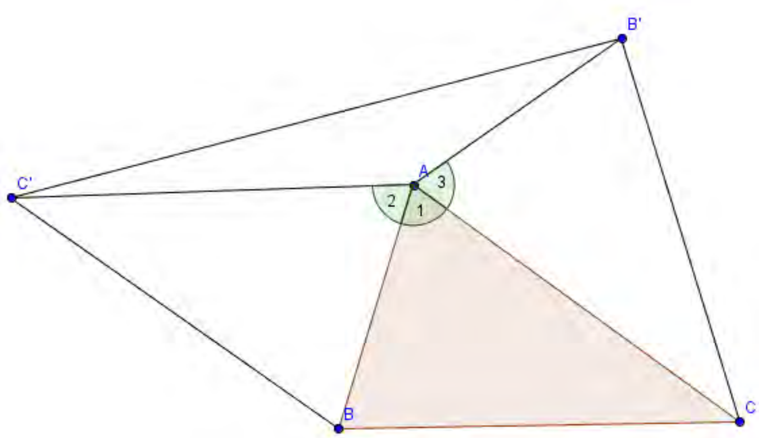
ولی $x^2+1 \equiv 1,2,5,3 \ (mod\ 7) \ \rightarrow \ 7 \nmid x^2+1$

پس *x=7k* با جای‌گذاری در *(1)* دایم: $k(49k^2+1)=5(7k+3)$ در ضمن *k* ناصفر است(*k=0* نتیجه می‌دهد *x=0* که جواب نیست) پس با تقسیم بر *k* داریم: $49k^2+1=35+\frac{15}{k}$ ولی طرف راست این عبارت

حداکثر ۵۰ است و طرف چپ به ازای $k \neq 0,1,-1$ بزرگ‌تر از ۵۰ است و با امتحان این سه مقدار می‌بینیم که فقط k=1 جواب است و در نتیجه فقط x=7 جواب است .

۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون c′ و b′ قرینه‌ی c و b اند پس ABC′ و AB′C با ABC هم‌نهشت اند و AC′ برابر AC و AB′ برابر AB است پس داریم: AC′ + AB′ =C′B′ یعنی زاویه‌ی C′AB′ برابر ۱۸۰° است.



و چون A1,A2,A3 با هم برابراند وجمعشان ۱۸۰° است پس هرکدام۶۰° اند .

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این شرط فقط در گزینه‌ی (د) صدق می‌کند.(مثال X=۱۳۷۹ , y=۲۱۶! نشان می‌دهد که این گزینه درست است.)

۱۰. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در هر مرحله گاز زدن m+n(جمع طول و عرض مستطیل) حداقل یک واحد کم می‌شود پس تعداد گاز زدن‌ها حداکثر m+n است در ضمن m+n ممکن است به این صورت که هر بار پایین‌ترین خط افقی را گاز می‌زنیم تا به مستطیلی n×۱ برسیم سپس راست‌ترین خط‌های عمودی را گاز می‌زنیم. ماکزیمم m+n برای گزینه‌ی (ه) به دست می‌آید.

۱۱. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ثابت می‌کنیم برای هر nای این کار امکان‌پذیر است برای n=۱ که به وضوح دو عدد مساوی جواب است برای n=۲ هم اعداد فیثاغورسی موجودند مثلا $12^2 + 5^2 = 13^2$ برای سایر n ها با توجه به رابطه‌ی

روش ساختنی زیر را ارائه می‌دهیم:

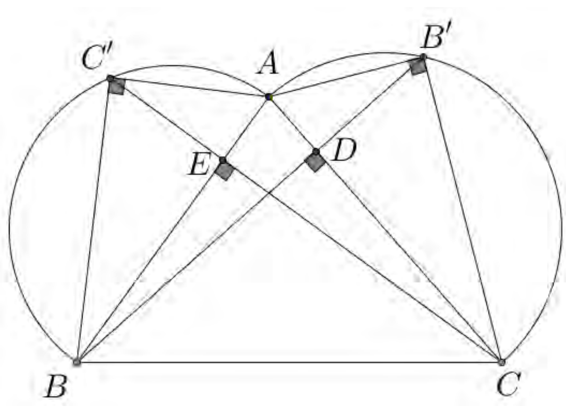
برای مثال x ای که در $2x+1 = 13^2$ صدق می‌کند یعنی ۸۴ را در نظر بگیرید طبق فرمول فوق :

$$84^2 + 13^2 = 85^2 = 84^2 + 12^2 + 5^2$$

وبرای n=4: $85^2 = 2x + 1 \rightarrow x = 3612 \rightarrow 3612^2 + 85^2 = 3613^2$

و همین طور به صورت استقرایی برای تمامی n ها ساخته می‌شود .

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

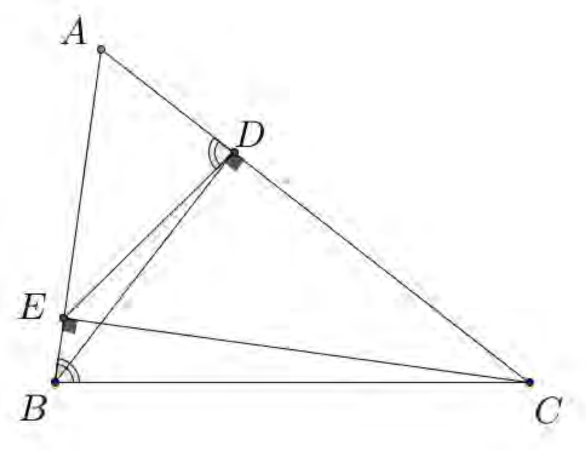


ابتدا دقت کنید که اگر زاویه‌ی A حاده نباشد، ارتفاع‌های یاد شده اصلاً نیم‌دایره‌ها را قطع نمی‌کنند. حال اگر زاویه‌ی A حاده باشد داریم:

$$AB' \perp B'C, AC \perp B'D \Rightarrow AB'^{۲} = AD.AC$$
$$AC' \perp BC', AB \perp C'E \Rightarrow AC'^{۲} = AE.AB$$

به علاوه دقت کنید که $\angle BEC = \angle BDC = ۹۰^\circ$ پس چهارضلعی $BEDC$ محاطی است و بنابراین $AD.AC = AE.AB$ که این با توجه به رابطه‌ی بالا نتیجه می‌دهد $AB' = AC'$.

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



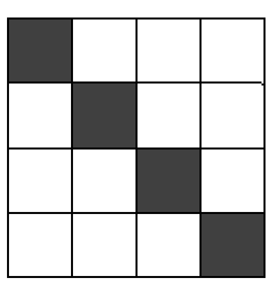
ابتدا دقت کنید که مطابق شکل روبه‌رو داریم:

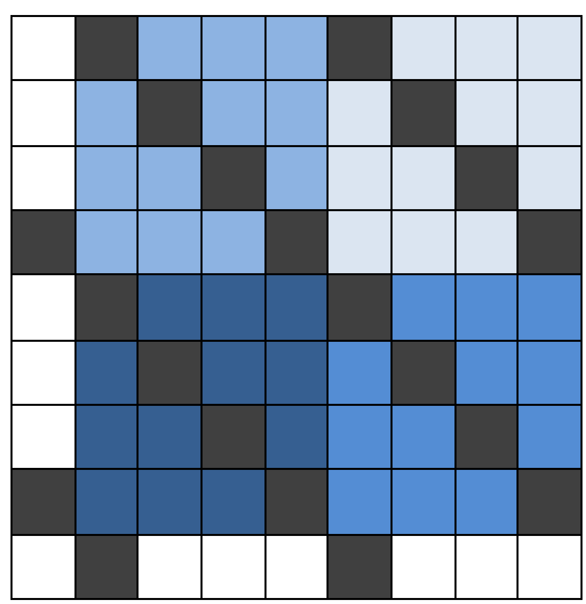
$$\angle BDC = \angle BEC = ۹۰^\circ$$

پس چهارضلعی $BEDC$ محاطی است. بنابراین زاویه‌های $\angle ADE$ و $\angle ABC$ برابر هستند که این نتیجه می‌دهد دو مثلث ADE و ABC متشابه هستند که چون $\frac{DE}{BC} = \frac{۱}{۲}$ پس $\frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۲}$ و لذا $\cos(\angle A) = \frac{۱}{۲}$ و $\angle A = ۶۰^\circ$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

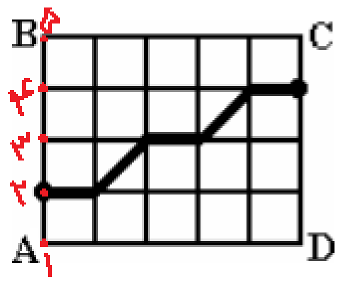
هر جدول ۴×۴ به وضوح حداقل ۴ خانه‌ی سیاه نیاز دارد تا هیچ ۴ خانه‌ی متوالی سفیدی در آن یافت نشود . شکل سمت چپ در زیر یک مثال برای ۴ خانه‌ی سیاه است. هم‌چنین هر سطر یا ستون ۹ تایی برای این که ۴ خانه‌ی متوالی سفید در آن یافت نشود، حداقل ۲ خانه‌ی سیاه نیاز دارد و چون جدول ۹×۹ را می‌توان به ۴ جدول ۴×۴ و دو ردیف ۹ تایی مانند شکل افراز کرد پس حداقل ۴×۴+۲×۲=۲۰ خانه‌ی سیاه نیاز است تا هیچ ۴ خانه‌ی سفید متوالی یافت نشود. شکل زیر نشان می‌دهد که ۲۰ خانه‌ی سیاه برای رسیدن به این هدف کافی هم هست. بنابراین با حداکثر ۱۹ خانه‌ی سیاه نمی‌توان این کار را کرد و حتماً ۴ خانه‌ی متوالی سفید یافت خواهد شد.





۱۵. سؤال اشکال دارد!

چون در هر گام حتماً یک خانه‌ی افقی به سمت راست می‌رویم و فاصله‌ی افقی دو ضلع AB و CD نیز ۵ خانه است پس در کل هر مسیر شامل ۵ گام است.



برای نمونه تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۱ روی AB به نقطه‌ی ۳ روی CD برابر $\binom{5}{2}$ است چرا که باید ۲ تا از حرکات را از نوع اُریب انتخاب کنیم . به همین ترتیب :

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۱ روی AB به ضلع CD : $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۲ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۳ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۴ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۵ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}$

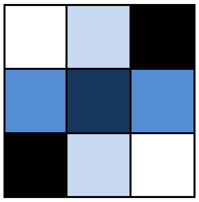
جواب ۸۰ می‌شود که در گزینه‌ها موجود نیست!

۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در کل به 2^9 طریق می‌توان فرش را رنگ کرد که یه سری حالات تکراری هستند:

چون دوران حالت جدیدی به وجود نمی‌آورد، پس بعضی حالات را هرکدام ۴ بار شمرده‌ایم به جز :

- حالاتی که با هر دورانی تغییری نمی‌کنند که تنها یک بار شمرده شده‌اند: در این حالت گوشه‌ها باید با هم هم‌رنگ باشند پس برای رنگ آن‌ها 2 حالت داریم. رنگ خانه‌ی وسط هم ۲ حالت دارد بقیه خانه‌ها هم با هم هم‌رنگ اند پس برای رنگ آن‌ها هم ۲ حالت داریم پس در کل ۲×۲×۲=۸ حالت داریم.
- حالاتی که با دوران ۱۸۰ درجه ثابت می‌مانند و بنابراین دو بار شمرده شده اند: در این حالت هم‌رنگ‌ها در شکل روبه‌رو باید در فرش با هم هم‌رنگ باشند که منجر به ۳۲ حالت می‌شود.



پس تعداد حالاتی که با دوران ۱۸۰ تغییر نمی‌کنند ولی مثلاً با دوران ۹۰ تغییر می‌کنند برابر ۳۲-۸ =۲۴ است.

پس تعداد کل حالت‌ها برابر عبارت زیر است :

$$\frac{۲^{۹} - (۲۴ + ۸)}{۴} + ۸ + \frac{۲۴}{۲} = ۱۴۰$$

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

نامساوی حسابی هندسی : $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{\mathrm{xyz}}$

نامساوی حسابی توافقی: $\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{y}}+\frac{1}{\mathrm{z}}}$

نامساوی هندسی توافقی: $\sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{y}}+\frac{1}{\mathrm{z}}}$

بنابر نامساوی حسابی توافقی: $\frac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} - \frac{2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$$\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq \frac{2}{3} \xRightarrow{\text{(نامساوی توافقی هندسی)}} xyz \geq \left(\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)^3 \geq 8$$

$12 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \rightarrow xyz \leq 8$ (نامساوی حسابی هندسی)

پس $xyz = 8$ و حالت تساوی نامساوی‌های فوق رخ داده یعنی همه با هم برابر هستند و $x = y = z = 2$

۱۸. گزینه‌های (الف) و (د) هر دو صحیح هستند.

ابتدا فرض می‌کنیم $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ و از آنجایی که همه‌ی a_i ها نمی‌توانند بزرگتر از ۵ باشند (در این صورت مجموع مورد نظر از ۱ کمتر می‌شود) باید داشته باشیم $a_1 \leq 5$ پس

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که

$a_2 \leq \frac{1}{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{k})} = \frac{4k}{k-1}$ $(k = 1,2,3,4,5)$ یعنی $a_2 \leq 8$ و به همین ترتیب برای بقیه‌ی اعداد نیز کران بالایی پیدا می‌شود، یعنی تعداد جواب‌ها متناهی است.

به علاوه غیر از حالتی که ۵ عدد با هم مساوی هستند، در دیگر حالت‌ها (مثلاً در حالتی که چهارتا از عددها برابر ۸ و یکی برابر ۲ است.) با جای‌گشت اعداد به تعدادی جواب می‌رسیم که مضرب ۵ است. پس در کل تعداد جواب‌های معادله به صورت $5k + 1$ است.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید که

$$(a+b+c)^2 ab \geq (a+b)^2 ab \geq 4a^2b^2$$

با نوشتن نامساوی‌های مشابه برای دیگر متغیرها و جمع کردن آن‌ها نامساوی خواسته‌شده برای $k = 4$ نتیجه می‌شود. پس $k \leq 4$ است و مثال $(a,b,c) = (1,1,0)$ نشان می‌دهد که $k = 4$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

x_1

پس دقیقاً x های با اندیس زوج مضرب ۳ هستند که ۱۰۰۱ عدد هستند.

۲۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر $n = ۲$، $x_۱ + x_۲ = ۰$ و لذا $x_۱^۲ + x_۲^۲ + ۲x_۱x_۲ = ۰$ پس $x_۱x_۲ + x_۲x_۱ \leq ۰$.

اگر $n = ۳$، $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰$ و لذا $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + ۲(x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱) = ۰$، بنابراین $x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱ \leq ۰$.

اگر $n = ۴$، $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$ و لذا

$$x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۴ + x_۴x_۱ = (x_۲ + x_۴)(x_۱ + x_۳)$$

که چون جمع دو عدد $x_۲ + x_۴$ و $x_۱ + x_۳$ صفر شده است، حاصل‌ضربشان نامثبت است.

برای $n \geq ۵$ قرار می‌دهیم $x_۱ = x_۲ = -(n-۲)$ و $x_۳ = \cdots = x_n = ۲$. می‌دانیم مجموع این اعداد برابر صفر است، اما

$$\begin{aligned} x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + \cdots + x_nx_۱ &= (n-۲)^۲ - ۲(n-۲) + \underbrace{۴ + \cdots + ۴}_{n-۳} - ۲(n-۲) \\ &= n^۲ - ۴n = n(n-۴) \geq ۵ \times ۱ > ۰ \end{aligned}$$

پس تنها سه عدد طبیعی دارای این خاصیت هستند.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

صفحه را شطرنجی رنگ می‌کنیم چون تعداد خانه‌ها فرد است از یک رنگ بیش‌تر داریم در ضمن هر موزائیک ۱×۲ از هر رنگ یک خانه را می‌پوشاند. پس اگر صفحه را فرش کرده باشیم از هر دو رنگ به یک تعداد داریم. خانه‌های به آن رنگی که تعدادشان بیش‌تر است همه مناسب اند یعنی ۵۱۴ تا. با یک بررسی ساده و الگویابی می‌توان نشان داد که با حذف هر کدام از این ۵۱۴ خانه بقیه‌ی جدول را می‌توان با موزاییک‌های ۲×۱ پر کرد.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون شرایط در کل برای همه یک‌سان است احتمال برد همه با هم برابر است، پس تعداد حالاتی که امین برنده می‌شود برابر یک هفتم تعداد راه‌های دادن ۶ کارت به ۷ نفر است که برابر $\binom{12}{6} = 942$ است پس جواب مساله برابر ۱۳۲ است.

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

لذا هر عدد فرد یا هر عدد مضرب ۴ ای این خاصیت را دارد. به علاوه با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد مربع کامل بر ۴ برابر ۱ و صفر است، امکان ندارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی که به این صورت قابل نمایش است بر ۴ برابر دو باشد. حال با بررسی گزینه‌ها می‌بینیم که تنها گزینه‌ی (الف) در خواسته‌ی سؤال صادق است.

۲۵. صورت سوال ایراد دارد از آنجایی که BC بزرگ‌تر از AB است زاویه‌ی $\angle A_۱$ بزرگ‌تر از زاویه‌ی $\angle C_۳$ می‌شود، یعنی زاویه‌ی $\angle A_۱$ بزرگ‌تر از ۴۵° می‌شود که این با توجه به شرط اول مسئله امکان ندارد.

۲۶. این مسئله ایراد دارد!

$c-b \big| c^۲-b^۲$ پس اختلاف b و c توانی از ۲ است پس $c = b + ۲^s$ که s یک عدد صحیح نامنفی است.

$$(b+۲^s)^۲ - b^۲ = ۲^{s+۱}(b+۲^{s-۱}) = ۲^k \Rightarrow b = ۲^{k-s-۱} - ۲^{s-۱}$$

که برای $s = ۱,۲,\ldots,\left\lceil \frac{k-۱}{۲} \right\rceil$ یک جواب طبیعی به ما می‌دهد. پس جواب $\left\lceil \frac{k-۱}{۲} \right\rceil$ است که در گزینه‌ها موجود نیست.

۲۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$۳xy - y - ۵x = ۱۳ \Rightarrow x = \frac{y+۱۳}{۳y-۵} \Rightarrow \ ۳y-۵ \mid y+۱۳ \Rightarrow \left|۳y-۵\right| \leq y+۱۳$$

دقت کنید که اگر x طبیعی است پس مخرج کسری که با x برابر است یعنی $۳y-۵$ مثبت است و لذا

$$۳y-۵ \leq y+۱۳ \Rightarrow ۲y \leq ۱۸ \Rightarrow y \leq ۹$$

با امتحان کردن yها مشخص می‌شود ۳ جواب $\begin{cases} x = ۱۵ \ , y = ۲ \\ x = ۴ \ , y = ۳ \\ x = ۱, y = ۹ \end{cases}$ موجود است .

۲۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه حل اول :

$0 \leq \{$

اگر این مقادیر را امتحان کنیم می بینیم برای ۳۰ مقدار زیر درست است :

0,6,10,12,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28,31,32,33,34,35,37,38,39,41,43,44,47,49,53,59

راه حل دوم :

فرض کنید $0 \leq r < 30$ که $a = 30k + r$ در این صورت :

یعنی: $31k + \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{5}\right] = 30k + r$ پس : $k = r - \left[\frac{r}{2}\right] - \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{5}\right]$

پس برای هر مقدار $0 \leq r < 30$ یک k خواهیم داشت یعنی تعداد جواب‌ها ۳۰ تا است .

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

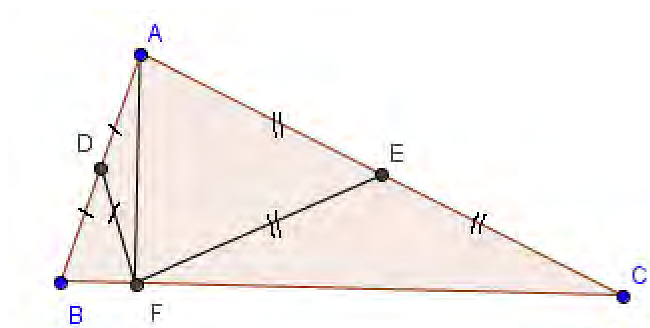
دقت کنید که چون در نمایش یک عدد جالب همه‌ی اعداد ۰،۱،... ، ۹ ظاهر می‌شوند هر عدد جالب باید بر ۹ هم بخش‌پذیر باشد پس هر عدد جالب بر ۹۹۹۹۹ بخش‌پذیر است. حال فرض کنید n عددی جالب باشد و x و y به ترتیب ۵ رقم سمت چپ و سمت راست n باشند. در این صورت $n = ۱۰^۵x + y$. دقت کنید که

$$۰ \equiv n \equiv ۱۰^۵x + y \equiv x + y \pmod{۹۹۹۹۹}$$

پس $x + y$ باید بر ۹۹۹۹۹ بخش‌پذیر باشد، اما x و y هر دو ۵رقمی و با توجه به متفاوت بودن ارقامشان متمایز هستند، پس $۰ < x + y < ۲ \times ۹۹۹۹۹$. این نتیجه می‌دهد که $x + y = ۹۹۹۹۹$. با توجه به این که در ایجاد مجموع ۹ در یک جمع ده بر یک نداریم پس مجموع هر رقم در x با رقم متناظرش در y برابر ۹ است. پس کافی است پنج رقم x را انتخاب کنیم. برای انتخاب رقم سمت چپ ۹ حالت برای رقم بعدی ۸ حالت و رقم‌های بعدی به ترتیب ۶، ۴ و ۲ حالت داریم. پس در کل تعداد چنین اعدادی $۹ \times ۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۴۵۶$ خواهد بود.

۳۰. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ادعا می‌کنیم عدد ۴ و همه‌ی اعداد طبیعی بیش‌تر یا مساوی ۶ مثلثی هستند. برای ۴ با توجه به این که میانه‌ی وارده بر وتر نصف وتر است شکل زیر را در نظر می‌گیریم.



اگر برای یکی از مثلث‌های درونی شکل بالا این کار را انجام دهیم نتیجه می‌شود که ۷ هم عددی مثلثی است. حال دقت کنید که اگر n مثلثی باشد، می‌توان ابتدا یک ارتفاع مثلث را رسم کرد و به وسیله‌ی روش بالا یکی از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ایجاد شده را به دو مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کرد. به علاوه چون n مثلثی است می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر را به n مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کرد. پس در کل مثلث به $n + ۲$ مثلث متساوی‌الساقین تقسیم شده است و در نتیجه $n + ۲$ هم مثلثی است.

حال با توجه به این که ۴ مثلثی است و اگر n مثلثی باشد $n+۲$ هم مثلثی است، همه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲ مثلثی هستند. به علاوه از آن‌جا که ۷ مثلثی است همه‌ی اعداد فرد بزرگ‌تر از ۵ هم مثلثی هستند. پس ادعایمان ثابت شد.