

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهرا ن اخباریفر

۱. اگر $n \geq 2$ عددی طبیعی و $2^n + n^2$ عددی اول باشد، باقیمانده‌ی n بر ۶ کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

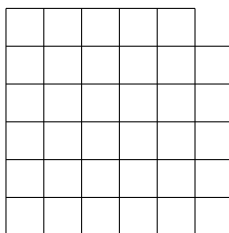
- (الف) ۱ (ب) ۳ (ج) ۵ (د) الف و ب (ه) ب و ج

۲. در مثلث ABC ارتفاع وارد بر ضلع BC آن را در D قطع می‌کند و ارتفاع وارد بر ضلع CA نیز AD را در H قطع می‌کند. اگر $AD = 4$ ، $BD = 3$ و $CD = 2$ ، آن‌گاه طول HD برابر است با:

- (الف) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\sqrt{5}$ (د) $\frac{5}{4}$ (ه) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

۳. در شکل زیر چند مربع وجود دارد؟

- (الف) ۳۵ (ب) ۷۵ (ج) ۸۵ (د) ۱۰۵ (ه) ۲۰۵



۴. ۵ عدد میله‌ی آهنی به طولهای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ داریم. با این میله‌ها به چند صورت می‌توان یک مثلث درست کرد؟

- (الف) ۳ (ب) ۵ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰

۵. x و y دو عدد صحیح متوالی هستند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد عبارت $x^2 + y^2 + (xy)^2$ درست است؟

(الف) مجموعه‌ی رقمهای یکان آنها شامل مجموعه‌ی $\{0, 1, 3, 5, 6, 9\}$ است.

(ب) همواره مربع کامل است.

(ج) به‌ازای مقادیری از x و y ، عددی اول است.

(د) همواره عددی مرکب است.

(ه) هیچ‌کدام

۶. دنباله‌ی a_n به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = na_n + a_n + n \end{cases}$$

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

باقیمانده‌ی تقسیم a_{101} بر 102 چند است؟

- (الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۹۹ (د) ۱۰۰ (ه) ۱۰۱

۷. طول اقطار دوزنقه‌های ۱۳ و ۱۵ و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. مساحت این دوزنقه چقدر است؟

- (الف) ۵۶ (ب) ۷۲ (ج) ۸۴ (د) ۹۶ (ه) با این اطلاعات قابل محاسبه نیست.

۸. بزرگترین توان ۲ که عدد $1 - 3^{512} = N$ بر آن بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (الف) 2^8 (ب) 2^9 (ج) 2^{10} (د) 2^{11} (ه) 2^{12}

۹. اعداد طبیعی را مطابق الگوی زیر در یک جدول قرار داده‌ایم. مثلاً ۱۴ در سطر دوم و ستون چهارم آمده است. مکان عدد ۱۳۷۷ کدام است؟

- (الف) سطر ۲ ستون ۵۲ (ب) سطر ۵۲ ستون ۲ (ج) سطر ۲ ستون ۵۱ (د) سطر ۵۱ ستون ۲ (ه) هیچ کدام

۱	۲	۶	۷	۱۵	
۳	۵	۸	۱۴		
۴	۹	۱۳			
۱۰	۱۲				
۱۱					

۱۰. چند عدد در مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{1999, \dots, 1377\}$ وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند؟

- (الف) ۳۱۱ (ب) ۳۱۲ (ج) ۴۶۶ (د) ۴۶۷ (ه) ۶۲۳

۱۱. عددهای ۱، ۲، ... و ۱۳۷۷ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. هر بار دو تا از اعداد روی تخته را به دلخواه پاک می‌کنیم و قدر مطلق تفاضلشان را روی تخته می‌نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد عدد به دست آمده کامل تر است؟

- (الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.
 (ب) این عدد همواره فرد است.
 (ج) باقی مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۴، مساوی یک است.
 (د) این عدد همواره زوج است.
 (ه) هیچ کدام

۱۲. در مثلث ABC یکی از میانه‌ها بر یکی از نیمسازهای درونی عمود است. اگر اندازه‌ی اضلاع این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشند، آن گاه اندازه‌ی محیط این مثلث برابر است با:

- (الف) ۶ (ب) ۹ (ج) ۱۵ (د) ۱۸ (ه) ۲۱

۱۳. اگر a, b, c, d, e یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ باشد، در این صورت حداکثر مقدار عبارت $S = ab + bc + cd + de + ea$ به ازای ترتیبهای مختلف چقدر است؟

- (الف) ۴۲ (ب) ۴۳ (ج) ۴۵ (د) ۴۸ (ه) ۵۰

۱۴. فرض کنید A, B و C سه نقطه در داخل یا روی اضلاع یک مربع به ضلع واحد باشند. اگر داشته باشیم $x = \min\{AB, AC, BC\}$ (که در آن، \min کوچکترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد)، آنگاه

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

حداکثر مقدار x ، وقتی که A ، B و C داخل یا روی اضلاع مربع تغییر می‌کنند، چیست؟
 الف) $\frac{4}{5}$ (ب) ۱ (ج) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (د) $\sqrt{2}$ (ه) $\frac{4}{3}$

۱۵. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی است یک‌به‌یک و پوشا و به‌علاوه می‌دانیم که m بر n بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر $f(m)$ بر $f(n)$ بخش‌پذیر باشد. کدام گزینه در مورد هر تابع به این شکل درست است؟
 الف) $f(n)$ بر n بخش‌پذیر است.
 ب) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $f(p) = p$
 ج) برای هر a و b داریم: $f(ab) = f(a)f(b)$
 د) $f(n) \leq n^2$
 ه) $f(f(n)) = n$

۱۶. از بین عددهای مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 53\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دوتایی از آنها برابر با ۴ نباشد؟
 الف) ۲۶ (ب) ۲۷ (ج) ۲۸ (د) ۲۹ (ه) ۳۰

۱۷. یک تکه مقوای مربع شکل را با فیچگی به n تا مربع کوچکتر (نه لزوماً مساوی) بریده‌ایم. n کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟
 الف) ۱۱۲ (ب) ۱۷۲ (ج) ۲۲۲ (د) ۳۱۲
 ه) همهی مقادیر الف، ب، ج، و د

۱۸. از میان عددهای $1, 2, \dots, 20$ حداقل چند عدد را باید حذف کنیم به‌طوری که مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده، عددی اول نباشد.
 الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۱۹. فرض کنید $A = \overbrace{99 \dots 99}^{81}$. مجموع ارقام A^2 در پایه‌ی ۱۰ چند است؟
 الف) ۶۹۳ (ب) ۷۲۹ (ج) ۷۹۰ (د) ۸۳۷ (ه) ۹۳۶

۲۰. C_1 و C_2 دو دایره به شعاعهای ۳ و ۱ هستند که فاصله‌ی بین مرکزهای آنها برابر ۱۰ است. فرض کنید S مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی باشد که یک سر آن روی محیط C_1 و سر دیگر آن روی محیط C_2 است. مساحت S چقدر است؟
 الف) ۰ (ب) 3π (ج) 4π (د) 5π (ه) 6π

۲۱. $A \subseteq \mathbb{N}$ را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بتوان اعضای آن را به‌صورت دنباله‌ی a_1, a_2, a_3, \dots نوشت به‌طوری که هر دو جمله‌ی متوالی مثل a_i و a_{i+1} دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ باشند. کدام یک از مجموعه‌های زیر خوب نیستند؟
 الف) اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ (ب) اعداد فرد بزرگتر از ۱
 ج) اعداد طبیعی به‌صورت $3k + 2$ (د) اعداد مربع کامل بزرگتر از ۱
 ه) هر چهار مجموعه، خوب هستند.

۲۲. در مثلث ABC ، D نقطه‌ی وسط AB ، و E نقطه‌ای روی BC است به‌طوری که $BE = 2EC$. فرض کنید $\angle ADC = \angle BAE$. زاویه‌ی $\angle BAC$ چقدر است؟
 الف) ۴۵ درجه (ب) ۶۰ درجه (ج) ۷۵ درجه (د) این زاویه به‌طور یکتا مشخص می‌شود ولی هیچ‌کدام از جوابهای بالا درست نیست.
 ه) اطلاعات برای تعیین زاویه کافی نیست.

۲۳. ABC یک مثلث است. D نقطه‌ای روی AB و E نقطه‌ای روی AC است. تقاطع BE و CD را P می‌نامیم. اگر مساحت مثلثهای ADE ، BPD ، CEP به‌ترتیب ۵، ۸ و ۳ باشد، مساحت مثلث ABC

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

چقدر است؟

- (الف) ۲۵ (ب) ۲۷ (ج) ۳۰ (د) ۳۲ (ه) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲۴. فرض کنید $a_n = n^3 - 5n^2 + 6n$ ، $b_n = n^2 + 5$ و d_n برابر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a_n و b_n است. کدام گزینه درست است؟ (max بزرگترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد.)
 (الف) d_n متناوب است. (ب) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ (ج) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 630$ (د) d_n از جایی به بعد ثابت است.
 (ه) الف و ج

۲۵. چند عدد گویای t وجود دارد که $0 \leq t \leq 77$ و $3t^2 + 10t^2 - 3t$ عددی صحیح باشد؟
 (الف) ۷۸ (ب) ۸۶ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۰۴ (ه) ۲۳۲

۲۶. نقطه‌ی P روی نقاط صفحه‌ی xy با مختصات صحیح در حال حرکت است. به این صورت که اگر در نقطه‌ی (a, b) باشد با توجه به اینکه باقیمانده‌ی تقسیم $a + b$ بر ۴، برابر ۰، ۱، ۲، یا ۳ است به ترتیب به راست، بالا، چپ، یا پایین می‌رود. فرض کنید P از P_0 شروع به حرکت کرده و پس از ۱۰۰ حرکت به نقطه‌ی $(0, 10)$ رسیده است. به ازای چه تعداد P_0 چنین اتفاقی می‌افتد؟
 (الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۲۷. می‌خواهیم ۱۰ عدد سکه را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه‌ی مجاوری به رو نباشند. به چند صورت این کار امکان‌پذیر است؟
 (الف) ۱۰۰ (ب) ۱۲۱ (ج) ۱۴۴ (د) ۲۴۳ (ه) ۲۵۶

۲۸. چند دوتایی (x, y) از اعداد طبیعی در معادله‌ی $26x^2 + 1201 = y^2 + 2x^2y^2$ صدق می‌کند؟
 (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) این معادله جواب ندارد.

۲۹. به ازای کدام دسته از مقادیر n ، تابع $f: \{1, \dots, 31\} \rightarrow \{1, \dots, 31\}$ وجود دارد که در هر دو شرط زیر صدق می‌کند:

$$(f^i = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^i)$$

- برای هر $x \in \{1, \dots, 31\}$ داریم $f^n(x) = x$ برای هر $0 < i < n$ داریم $x = 1$
 (الف) مجموعه‌ی اعداد اول کمتر از ۳۱ (ب) $\{2, 8, 16\}$
 (ج) $\{2, 3, 15\}$ (د) $\{2k + 1 \mid k = 1, 2, \dots, 14\}$ (ه) $\{3, 7, 13\}$

۳۰. بزرگترین m ای که دنباله‌ای مثل a_1, a_2, \dots, a_m با شرایط زیر وجود دارد، چند است؟
 $a_i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ اگر $a_i = a_j$ و $a_{i+1} = a_{j+1}$ آنگاه $j = i$
 (الف) ۹۸ (ب) ۹۹ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۰۱ (ه) ۱۰۲

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۷

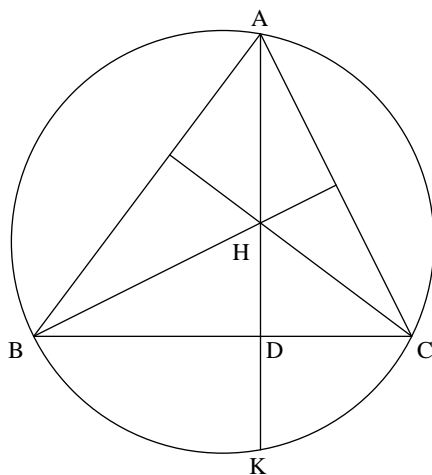
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهرا ن اخباریفر

۱. گزینه (ب) صحیح است.
فرض کنید که عدد $m = 2^n + n^2$ عددی اول باشد. روشن است که n باید فرد باشد، چون در غیر این صورت m زوج خواهد بود. پس n به پیمانه‌ی ۶ با یکی از اعداد ۱، ۳ یا ۵ هم‌نهشت خواهد بود. اما توجه کنید که اگر $n \equiv 1 \pmod{6}$ ، آنگاه $n = 6k + 1$ و در نتیجه،

$$2^n \equiv (2^6)^k \times 2 \equiv 2 \pmod{6}$$

همچنین، $n^2 \equiv 1 \pmod{6}$ و بنابراین $n^2 + 2^n \equiv 0 \pmod{6}$ و m اول نخواهد بود. به دلیل مشابه ۵ $n \equiv 5 \pmod{6}$ نیز رد می‌شود و فقط حالت $n \equiv 3 \pmod{6}$ باقی می‌ماند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
محل برخورد AD با دایره‌ی محیطی مثلث را K می‌نامیم.



راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

دقت کنید که چون H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است،

$$\angle HCB = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle AKC = \angle BCK$$

پس در مثلث HCK ، ارتفاع و نیمساز برهم منطبق شده‌اند، و در نتیجه، این مثلث متساوی‌الساقین است. پس $HD = DK$. حال قوت نقطه‌ی D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$P(D) = BD \cdot CD = DK \cdot DA = HD \cdot DA$$

$$HD = \frac{3}{4} \text{ و بنابراین } 4HD = 3 \times 2 \text{ پس}$$

۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید که S_k تعداد مربعهای به ضلع k در شکل زیر باشد.

					A
				B	

روشن است که چنین مربعی با مشخص شدن رأس گوشه‌ی پایین چپ آن به‌طور یکتا مشخص می‌شود. دقت کنید که هر یک از این نقاط مشخص شده جز A در S_1 شمرده می‌شوند. پس $S_1 = 6^2 - 1$. به‌طور مشابه، هر یک از مربعهای غیر از نقاط سطر بالا و ستون راست و همچنین، نقطه‌ی B ، در محاسبه‌ی S_2 به حساب می‌آیند. پس $S_2 = 5^2 - 1$ ، با استدلال مشابه می‌توان دید که $S_3 = 4^2 - 1$ ، ...، $S_6 = 1^2 - 1$ و $S_6 = 1^2 - 1$. پس اگر N تعداد کل مربعها را نشان دهد، آنگاه

$$N = (1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) - 6 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 6 = 85$$

یادداشت. استدلال مشابه نشان می‌دهد که اگر به‌جای جدول 6×6 ، جدولی $n \times n$ با یک خانه‌ی حذف شده در گوشه داشته باشیم تعداد مربعها برابر است با

$$N = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اولاً دقت کنید که میله‌ی به‌طول 10 نمی‌تواند در هیچ مثلثی شرکت کند. چون اگر طول اضلاع مثلثی $10 < a < b$ باشند، آنگاه $10 \geq b - a$ و بنابراین، $a + 10 \leq b$. پس $(a, b, 10)$ اضلاع مثلث نیستند. فرض کنید $a < b < 20$ طول اضلاع مثلثی باشند. اگر $a = 30$ ، آنگاه $a = 30 + a = 50$. پس $b = 40$ و جواب قابل‌قبول $(20, 30, 40)$ به‌دست می‌آید. اگر $a = 40$ ، آنگاه جواب قابل‌قبول $(20, 40, 50)$ پیدا می‌شود. همین‌طور، اگر $a < b < 30$ طول اضلاع مثلث باشند، لزوماً $a = 40$ و $b = 50$ و جواب قابل‌قبول $(30, 40, 50)$ به‌دست می‌آید. پس در مجموع سه مثلث به کمک این میله‌ها ساخته می‌شوند.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید $y = x + 1$. در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (xy)^2 &= x^2 + (x+1)^2 + (x(x+1))^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 1 + (x(x+1))^2 \\ &= 2x(x+1) + 1 + (x(x+1))^2 \\ &= (x(x+1) + 1)^2 \end{aligned}$$

که مربع کامل است.

۶. گزینه (ه) صحیح است.

اگر تعریف کنیم $b_n = a_n + 1$. آنگاه $b_0 = 0$ و به‌ازای $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + 1 \\ &= (n+1)a_n + n + 1 \\ &= (n+1)(a_n + 1) \\ &= (n+1)b_n \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به $b_0 = 1$ داریم،

$$b_n = nb_{n-1} = n(n-1)b_{n-2} = \dots = n!$$

پس $a_n = n! - 1$ اما دقت کنید که

$$101 = 1 \times 2 \times \dots \times 51 \times \dots \times 101$$

بر $102 = 2 \times 51$ بخش‌پذیر است. بنابراین،

$$a_{101} \equiv_{102} (101)! - 1$$

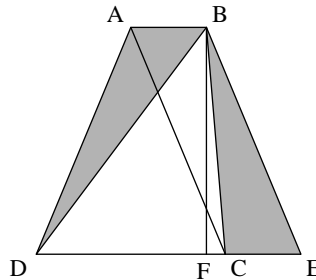
$$\equiv_{102} 102 - 1$$

$$\equiv_{102} 101$$

۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در دوزنقه‌ی $ABCD$ فرض کنید که $AC = 13$ و $BD = 15$ و ارتفاع دوزنقه برابر ۱۲ باشد.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور



از نقطه‌ی B به موازات قطر AC خطی رسم می‌کنیم تا امتداد قاعده‌ی DC را در نقطه‌ی E قطع کند. چون چهارضلعی $ABEC$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AB = CE$. پس دو مثلث BCE و ABD دارای قاعده و ارتفاع مساوی‌اند. پس مساحت این دو مثلث برابر است. حال اگر مساحت شکل \triangle را با $[\triangle]$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [ABD] + [BCD] \\ &= [BCE] + [BCD] \\ &= [BDE] \end{aligned}$$

اگر پای عمود وارد از B بر CD را F بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} DE &= DF + EF \\ &= \sqrt{BD^2 - BF^2} + \sqrt{BE^2 - BF^2} \\ &= \sqrt{15^2 - 12^2} + \sqrt{13^2 - 12^2} \\ &= 9 + 5 \\ &= 14 \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [BDE] \\ &= \frac{1}{2}(14 \times 12) \\ &= 84 \end{aligned}$$

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
 N را به صورت زیر تجزیه‌ی می‌کنیم:

$$N = (3^{256} + 1)(3^{128} + 1) \cdots (3^2 + 1)(3^2 - 1)$$

توجه کنید که به‌ازای هر عدد زوج مانند k ،

$$3^k + 1 \equiv (-1)^k + 1 \equiv 2$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

پس بزرگترین توان ۲ در $3^k + 1$ برابر ۲ است. اما چون بزرگترین توان ۲ در $3^2 - 1$ برابر ۳ است، پس بزرگترین توان ۲ در N برابر $11 = 8 + 3$ خواهد بود.
یادداشت. استدلالی مشابه استدلال بالا نشان می‌دهد که به‌ازای $n \geq 3$ ، توان ۲ در $3^{2^n} - 1$ برابر $n + 2$ است.

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید $a_i = 0$ و به‌ازای $i \geq 1$ ، $a_i = 1 + 2 + \dots + i = \frac{i(i+1)}{2}$ ، با توجه به اینکه روی قطر i ام دقیقاً i عدد می‌آیند، به آسانی می‌توان دید که قطر i ام با عدد $1 + a_{i-1}$ شروع می‌شود و با عدد a_i پایان می‌پذیرد. همچنین برای مقادیر زوج i ، اولین عدد در قطر i ام در سطر اول و برای مقادیر فرد i ، اولین عدد در قطر i ام، در ستون اول ظاهر می‌شود.
ابتدا قطری را که عدد ۱۳۷۷ در آن قرار دارد پیدا می‌کنیم. باید مقدار i را پیدا کنیم که $a_{i-1} + 1 \leq 1377 \leq a_i$ توجه کنید که اگر

$$\frac{i(i-1)}{2} + 1 \leq 1377 \leq \frac{i(i+1)}{2}$$

آنگاه

$$4i^2 - 4i + 8 \leq 11016 \leq 4i^2 + 4i$$

نابرابری سمت چپ به‌صورت $11009 \leq (2i-1)^2$ یا $104 < 2i-1 \leq 103$ در می‌آید. پس $i \leq 52$. نابرابری سمت راست به‌صورت $11017 \leq (2i+1)^2$ یا $104 < 2i+1 \leq 105$ در می‌آید. پس $i \geq 52$. بنابراین، $i = 52$. چون $a_{52} = 1378$ پس 1377 عدد یکی مانده به‌آخر در قطر ۵۲ ام است. اما چون ۵۲ زوج است، پس آخرین عدد در این قطر در ستون اول و سطر ۵۲ ظاهر می‌شود. بنابراین عدد ۱۳۷۷ در این جدول در ستون دوم و سطر ۵۱ ظاهر شده است.

۱۰. گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که عدد طبیعی n را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت اگر و فقط اگر n فرد باشد و یا $4|n$. در واقع، با توجه به رابطه‌های

$$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$$

$$4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$$

هر یک از اعداد به‌صورت بالا را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت. همچنین اگر $n = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ، بسته به آن که x و y زوجیت یکسان یا متفاوت داشته باشند، عدد n فرد و یا مضرب ۴ خواهد بود.

پس کافی است اعداد به‌صورت $4k + 2$ در مجموعه‌ی $\{1377, \dots, 1999\}$ را حذف کنیم. اما

$$1377 \leq 4k + 2 \leq 1999$$

آنگاه

$$344 \leq k \leq 499$$

پس باید ۱۵۶ عدد از بین $623 = 1376 - 1999$ عدد را حذف کنیم و ۴۶۷ عدد باقی می‌ماند.

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دو تا از عددها را x و y می‌نامیم اگر مجموع اعداد قبل و بعد از حذف x و y را به‌ترتیب با S و S' نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$S' = S + |x - y| - x - y \stackrel{\vee}{=} S + x - y - x - y \stackrel{\vee}{=} S$$

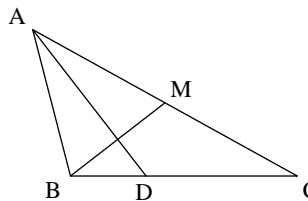
راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

پس چون $1 + 2 + \dots + 1377 = 689 \times 1377$ ، عددی فرد است و زوجیت S هر بار ثابت می‌ماند، پس عدد نهایی باید فرد باشد. گزینه‌ی (ج) نادرست است. توجه کنید که دنباله‌ی $1, 2, \dots, i + 4$ را می‌توان با سه گام به دنباله‌ی $1, 2, \dots, i$ تبدیل کرد. برای این کار ابتدا $i + 4$ و $i + 3$ و سپس $i + 2$ را حذف می‌کنیم و در گام سوم دو عدد 1 به دست آمده را حذف می‌کنیم. با تکرار این کار می‌توان به دنباله‌ی $1, 2, 3, 4, 5$ رسید. اگر فرایند حذف i و j را با $\xrightarrow{i, j}$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$1, 2, 3, 4, 5 \xrightarrow{15} 2, 3, 4, 4 \xrightarrow{24} 2, 3, 4 \xrightarrow{22} 1, 4 \xrightarrow{14} 3$$

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

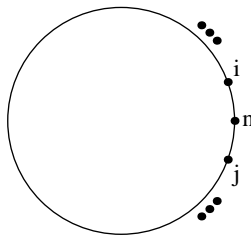
فرض کنید AD نیمساز زاویه‌ی A و BM میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد و $AD \perp BM$.



در مثلث ABM ، ارتفاع و نیمساز نظیر را A برهم منطبق شده‌اند. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $AM = AB$. پس $AC = 2AB$. بنابراین اگر $x + 1$ ، x و $x - 1$ طول اضلاع مثلث باشند، یکی از این سه عدد دو برابر دیگری است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که این فقط وقتی امکان دارد که $x = 3$. پس اضلاع مثلث $2, 3, 4$ و محیط مثلث برابر 9 است.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

توجه کنید که مسأله معادل با این مسأله است که اعداد $1, 2, 3, 4, 5$ را به ترتیبی دور دایره بچینیم که مجموع حاصل ضربهای اعداد مجاور بیشترین مقدار ممکن باشد.

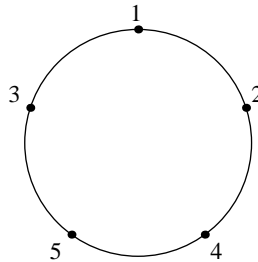


فرض کنید که در حالت کلی اعداد $1, 2, \dots, n - 1$ را به ترتیبی دور دایره چیده باشیم و بخواهیم n را اضافه کنیم. اگر S_{n-1} مجموع مورد نظر در وضعیت اول و S_n مجموع پس از اضافه کردن n بین عددهای i و j باشد آنگاه

$$S_n = S_{n-1} - ij + ni + nj = S_{n-1} - (n - i)(n - j) + n^2$$

پس برای اینکه S_n بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید $(n - i)(n - j)$ کمترین مقدار ممکن را اختیار کند، پس i و j باید اعداد 1 و $n - 2$ باشند. یعنی در هر گام برای ماکزیمم شدن S_n باید n را بین 1 و $n - 2$ قرار دهیم.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور



پس آرایش نشان داده شده در شکل به دست می‌آید و می‌توانیم بنویسیم

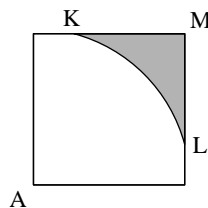
$$S_5 = 2 + 8 + 20 + 15 + 3 = 48$$

یادداشت. با استدلالی مشابه استدلال بالا می‌توان نشان داد که در حالت کلی، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$S_n = \frac{2n^2 + 3n^2 - 118 + 18}{6}$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

روشن است که نقطه‌های A و B و C را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که در یک امتداد نباشند. اگر به مرکز A دایره‌ای به شعاع $r = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ رسم کنیم تا اضلاع مربع را در نقاط K و L قطع کند.



بنابر فرض چون $AB, AC \geq r$ پس B و C درون ناحیه‌ی سایه‌دار KLM قرار می‌گیرند. اما محاسبه‌ی ساده‌ای نشان می‌دهد که $KL = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ پس $BC < KL$ که با فرض $x > \sqrt{6} - \sqrt{2}$ تناقض دارد.

همچنین به سادگی می‌توان دید که در مثلث AKL داریم $x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ و بنابراین، بزرگترین مقدار x همین عدد است.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید p عددی اول باشد. نشان می‌دهیم که $f(p)$ نیز عددی اول است. در واقع اگر $q | f(p)$ ، آنگاه عددی مانند r وجود دارد که $q = f(r)$. پس $f(r) | f(p)$ و بنابراین، $r | p$ پس $r = p$ (توجه کنید که $r \neq 1$ زیرا به آسانی می‌توان دید که $f(1) = 1$). در نتیجه، $q = f(p)$ و بنابراین، $f(p)$ عددی اول است. همچنین اگر n عددی طبیعی باشد که $f(n)$ توانی از q باشد، آنگاه n توانی از p است، زیرا اگر r عامل اولی از n و مخالف p باشد، آنگاه $f(r) | f(n)$ و بنابراین $f(r) = q$ و در نتیجه، $r = p$ که تناقض است. حال توجه کنید که $p | p^2 | p^3 | \dots$ و بنابراین، $q = f(p) | f(p^2) | f(p^3) | \dots$ چون f پوشاست پس همه‌ی توانهای q در برد f قرار دارند. اما چنین اعضای می‌توانند تنها از اثر f بر توانهای p به دست آیند. پس نتیجه می‌شود که $f(p^i) = q^i$. اکنون به آسانی می‌توان دید که اگر a و b دو عدد طبیعی

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

باشند که $(a, b) = 1$ آنگاه $f(ab) = f(a)f(b)$. پس اگر $\prod p_i^{\alpha_i}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد. آنگاه $f(n) = \prod f(p_i)^{\alpha_i}$. ویژگی (ج) به آسانی از این حکم نتیجه می‌شود.

یادداشت. برای گزینه‌های دیگر، می‌توان به روش زیر مثال نقض ساخت. فرض کنید P مجموعه‌ی اعداد اول باشد و $\sigma : P \rightarrow P$ یک جایگشت باشد، یعنی σ یک به یک و پوشا باشد. حال برای $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ تعریف کنید $f(n) = \prod \sigma(p_i)^{\alpha_i}$.

اگر σ جایگشتی مخالف همانی باشد، (الف) و (ب) نادرست خواهند بود. همچنین با انتخاب $\sigma(2) = 5$ و $\sigma(5) = 2$ نتیجه می‌شود $f(2) = 5$ که مثال نقض (د) است. همچنین اگر σ طوری باشد که $\sigma \circ \sigma \neq 1$ ، آنگاه تابع به‌دست آمده از σ ، مثال نقض برای گزینه‌ی (ه) است.

۱۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید A_1, A_2, A_3 و A_4 مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۱ و ۵۳ باشند که به پیمانه‌ی ۴ به‌ترتیب هم‌نهشت با ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند. توجه کنید که

$$|A_1| = 14, \quad |A_2| = |A_3| = |A_4| = 13,$$

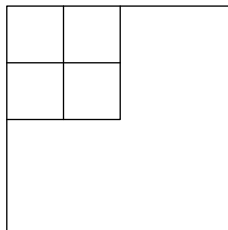
اگر $S \subset \{1, 2, \dots, 53\}$ دارای خاصیت مورد نظر مسأله باشد، واضح است که

$$|S \cap A_1| \leq 7, \quad |S \cap A_2| \leq 7, \quad |S \cap A_3| \leq 7, \quad |S \cap A_4| \leq 7$$

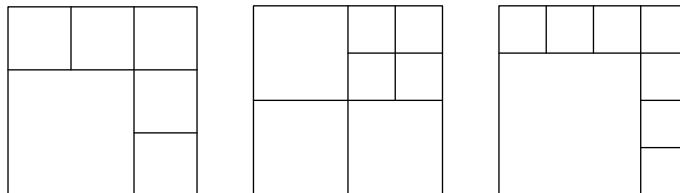
زیرا از بین n و $n+4$ حداکثر یکی را می‌توان انتخاب کرد. پس $|S| \leq 28$. به آسانی می‌توان مجموعه‌ی S با خاصیت مورد نظر را طوری ساخت که $|S| = 28$.

۱۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که اگر بتوان از یک مربع n مربع برید، آن‌گاه می‌توان مطابق شکل، با چهار قسمت کردن یکی از مربعها، آن را به $n+3$ مربع نیز برید.



همچنین، مطابق شکل‌های زیر، می‌توان یک مربع را به ۶ یا ۷ یا ۸ مربع برید.



پس به‌ازای $n \geq 6$ ، می‌توان هر مربع را به n مربع افراز کرد.

یادداشت. با کمی بحث، می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان یک مربع را به دو، سه یا پنج مربع افراز کرد.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

توجه کنید که اگر اعداد فرد را حذف کنیم، اعداد باقی‌مانده دارای خاصیت مورد نظر مسأله هستند. برای آن که نشان دهیم باید حداقل ۱۰ عدد را حذف کرد، زوجهای مرتب $(1, 2)$ ، $(3, 20)$ ، $(4, 19)$ ، ... و $(11, 12)$ را در نظر بگیرید. چون مجموع مولفه‌ی اول و دوم هر یک از این زوجهای مرتب عددی اول است، پس از هر زوج باید حداقل یک مولفه‌اش حذف شود. پس چون ۱۰ زوج داریم، حذف حداقل ۱۰ عدد لازم است.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که اگر به‌جای ۲۰، عدد زوجی مانند $2k$ بگذاریم، باید حداقل k عدد را حذف کنیم تا مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده اول نباشد. این مطلب را به استقرا نشان می‌دهیم. فرض کنید p عددی اول بین $2k$ و $4k$ باشد. وجود چنین عدد اولی از قضیه‌ی چبیشف نتیجه می‌شود. اکنون زوجهای مرتب $(2k, p - 2k)$ ، $(2k - 1, p - 2k + 1)$ ، ... و $(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2})$ را در نظر بگیرید. با استدلالی مشابه استدلال بالا باید حداقل به تعداد $2k - \frac{p-1}{2}$ از این اعداد حذف شوند. همچنین از بین اعداد ۱، ۲، ... و $p - 2k - 1$ نیز باید حداقل تعداد $\frac{p-2k-1}{2}$ حذف شوند (فرض استقرا). توجه کنید که این دو مجموعه از اعداد هیچ اشتراکی ندارند (این مطلب از این که $p < 4k$ نتیجه می‌شود). پس دست‌کم $k = 2k - \frac{p-1}{2} + \frac{p-2k-1}{2}$ عدد باید حذف شوند.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

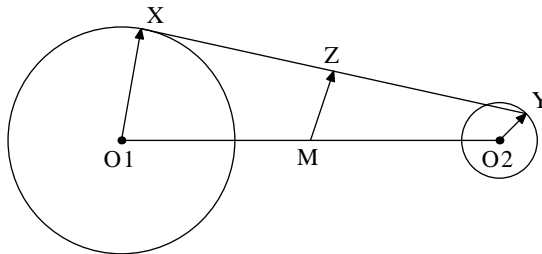
توجه کنید که $A = 10^{81} - 1$. بنابراین، $A^2 = 10^{162} - 2 \times 10^{81} + 1$ پس نمایش ده‌دهی A^2 به‌صورت زیر است:

$$A^2 = \underbrace{99 \dots 98}_{80} 00 \dots 01$$

پس مجموع رقمهای A^2 در پایه‌ی ۱۰ برابر $729 = 9 \times 80 + 8 + 1$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

با توجه به شکل فرض کنید O_1 مرکز دایره C_1 و O_2 مرکز دایره‌ی C_2 را نشان دهد. همچنین X را نقطه‌ای روی C_1 و Y را نقطه‌ای روی C_2 بگیرید. اگر Z وسط پاره‌خط XY و M وسط O_1O_2 را نشان دهد.



می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \vec{MZ} &= \frac{1}{2}(\vec{MX} + \vec{MY}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{MO}_1 + \vec{O}_1\vec{X} + \vec{MO}_2 + \vec{O}_2\vec{Y}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{O}_1\vec{X} + \vec{O}_2\vec{Y}) \end{aligned}$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

توجه کنید که

$$|\vec{O_1X}| = 3$$

و

$$|\vec{O_2Y}| = 1$$

پس

$$2 \leq |\vec{O_1X} + \vec{O_2Y}| \leq 4$$

و بنابراین،

$$1 \leq |\vec{MZ}| \leq 2$$

همچنین به آسانی می‌توان ثابت کرد که \vec{MZ} می‌تواند هر برداری با طول دلخواه $1 \leq r \leq 2$ باشد. پس Z در ناحیه‌ای بین دو دایره به شعاعهای ۱ و ۲ و مرکز M تغییر می‌کند. پس مساحت مکان هندسی فوق برابر است با $\pi(2^2 - 1) = 3\pi$.

۲۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ثابت می‌کنیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ خوب است. استدلال در بقیه‌ی موارد نیز مشابه است. دنباله‌ی مورد نظر را به طور استقرایی می‌سازیم. فرض کنید $a_1 = 2$ و اعداد a_1, a_2, \dots, a_n را ساخته‌ایم و m کوچکترین عدد طبیعی است که در این بین نیامده است. عدد طبیعی k را آن قدر بزرگ انتخاب کنید که عدد kma_n در این فهرست نیامده باشد. حال قرار دهید $a_{n+1} = kma_n, a_{n+2} = m$. روشن است که هر عدد طبیعی سرانجام در این دنباله خواهد آمد. همچنین توجه کنید که

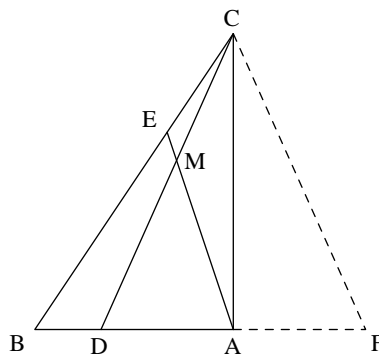
$$(a_n, a_{n+1}) = (a_n, kma_n) = a_n > 1$$

$$(a_{n+1}, a_{n+2}) = (kma_n, m) = m > 1$$

بنابراین مجموعه‌ی $\mathbb{N} - \{1\}$ مجموعه‌ای خوب است.

۲۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

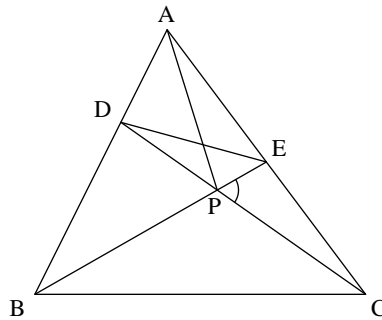
از نقطه‌ی C خطی به موازات AE رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه‌ی F قطع کند. در مثلث BCF چون $AE \parallel CF$ و $BE = 2EC$ نتیجه می‌شود $AB = 2AF$ و بنابراین، $DA = AF$.



راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است. مساحت شکل \triangle را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $x = [DEP]$ و $y = [PBC]$. اگر زاویه‌ی $\angle DPE$ برابر α باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} xy &= [DEP] \cdot [PBC] \\ &= \frac{1}{4} PE \cdot DP \cdot PB \cdot PC \cdot \sin^2 \alpha \\ &= [PEC] \cdot [PDB] \\ &= 8 \times 3 \\ &= 24 \end{aligned}$$



بنابر قضیه‌ی منلائوس در مثلث CAD ،

$$\frac{BA}{BD} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{BA}{BD} = \frac{[AEB]}{[DEB]} = \frac{x+13}{x+8}, \quad \frac{PD}{PC} = \frac{[EPD]}{[EPC]} = \frac{x}{3}$$

و

$$\frac{CE}{EA} = \frac{[DCE]}{[DEA]} = \frac{x+3}{5}$$

بنابراین،

$$x(x+13)(x+3) = 15(x+8)$$

معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی $x=2$ است. بنابراین، $y=12$ و مساحت مثلث برابر ۳۰ است.

۲۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

با استفاده از الگوریتم اقلیدس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} d_n &= (a_n, b_n) \\ &= (n^2 - 5n^2 + 6n, n^2 + 5) \\ &= (n^2 + 5, n + 25) \\ &= (n + 25, 630) \end{aligned}$$

پس $d_n \leq 630$ چون $d_{630} = 630$ ، بنابراین، $\max\{d_n | n \in N\} = 630$. همچنین بدیهی است که

$$d_{n+630} = (n + 630 + 25, 630) = (n + 25, 630) = d_n$$

و بنابراین، d_n متناوب است.

۲۵. این مسأله نادرست است.

فرض کنید $t = \frac{a}{b}$ که $(a, b) = 1$ در این صورت

$$f(t) = 3t^3 + 10t^2 - 3t = \frac{3a^3 + 10a^2b - 3ab^2}{b^3}$$

اگر $f(t) \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه $3a^3 + 10a^2b - 3ab^2$ و در نتیجه $b | 3a^3$ و $b | 3a^2$ اما چون $(b, a) = 1$ پس $b | 3$ یعنی b یکی از اعداد ۱ یا ۳ خواهد بود. اگر $b = 1$ ، آن‌گاه باید $0 \leq a \leq 77$ و ۷۸ انتخاب برای a وجود دارد.

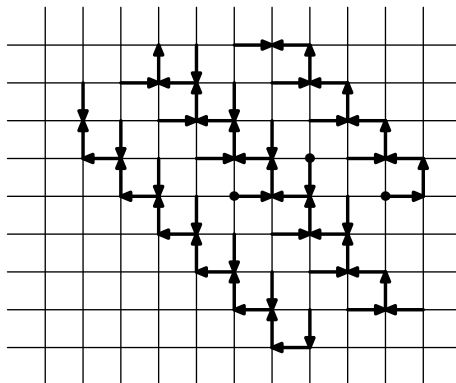
اگر $b = 3$ ، نتیجه می‌شود که $27 | 3a^3 + 30a^2 - 27a$ و بنابراین $9 | a^3 + 10a^2$ و چون $(a, 3) = 1$ پس $9 | a + 10$ یعنی $a = 9k - 1$ که $k \in \mathbb{Z}$. پس از شرط $0 \leq t \leq 77$ نتیجه می‌شود

$$0 \leq \frac{9k - 1}{3} \leq 77$$

و در نتیجه $1 \leq k \leq 25$. پس ۲۵ انتخاب برای k و بنابراین، برای a وجود دارد. بنابراین در مجموع ۱۰۳ انتخاب برای t وجود دارد که در بین گزینه‌ها وجود ندارد.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در شکل زیر مسیر حرکت یک نقطه مشخص شده است. توجه کنید که چون $10 \equiv 2 \pmod{4}$ ، در صورت مسأله می‌توان به‌جای نقطه‌ی $(0, 10)$ ، از نقطه‌ی $(0, 2)$ استفاده کرد.



راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

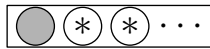
پس کافی است از نقطه‌ی $(0, 2)$ شروع کنیم و ۱۰۰ گام به عقب برگردیم. اگر حرکت به چپ، راست، بالا و پایین را به ترتیب با L, R, U, D نشان دهیم، با کمی دقت می‌توان دید که برای بازگشت، فقط دو راه وجود دارد:

$$DRDR \dots DRDR, \quad DRDR \dots DRDL$$

(در واقع اگر مسیر دیگری را انتخاب کنیم، پیش از ۱۰۰ گام، متوقف می‌شویم.)

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید a_n تعداد روشهای چیدن n سکه در یک ردیف باشد که هیچ دو سکه‌ی مجاورى به رو نباشد. ادعا می‌کنیم که $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. برای اثبات توجه کنید که اگر اولین سکه به پشت باشد، $n-1$ سکه‌ی بعدی به a_{n-1} طریق می‌توانند چیده شوند.



اما اگر اولین سکه به رو گذاشته شود، سکه‌ی مجاور آن باید حتماً به پشت باشد و $n-2$ سکه‌ی بعدی به a_{n-2} روش می‌توانند قرار بگیرند.



حال با توجه به اینکه $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$ ، به آسانی نتیجه می‌شود $a_{10} = 144$.

۲۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^2y^2 + y^2 - 26x^2 - 13 = 1201 - 13 = 1188$$

یا

$$(2x^2 + 1)(y^2 - 13) = 4 \times 27 \times 11$$

با توجه به این که $2x^2 + 1$ عددی فرد است، این عدد، باید برابر با یکی از اعداد ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۸۱، ۲۴۳، ۷۲۹ یا ۲۱۸۷ باشد. اما از حل معادله‌ی $2x^2 + 1 = a$ به‌ازای این مقادیر a ، فقط جوابهای $x = 1, 2, 4, 7$ به‌دست می‌آیند. اما به‌ازای این مقادیر x ، معادله به‌صورت $y^2 = 409, 145, 49, 25$ در می‌آید که فقط دو جواب آخر قابل قبول‌اند. پس معادله دارای دو جواب $(x, y) = (4, 7)$ و $(x, y) = (7, 5)$ است.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید که تابع f با شرایط داده شده وجود داشته باشد. ادعا می‌کنیم که $n|3^0$ برای اثبات، توجه کنید که برای هر $x \neq 1$ ، مدار x ، یعنی مجموعه‌ی $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ مجموعه‌ای n عضوی است. همچنین اگر مدار x را با $O(x)$ نشان دهیم، هر دو مجموعه‌ی $O(x)$ و $O(y)$ یا مساوی و یا جدا از هم‌اند. زیرا اگر $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$ و مثلاً $f^i(x) = f^j(y) = z$ ، آنگاه چون تابع f یک‌به‌یک و پوشاست (این مطلب از شرط اول به‌سادگی نتیجه می‌شود)، پس اگر $j > i$ نتیجه می‌شود $f^{i-j}(x) = y$ و بنابراین، $y \in O(x)$. پس $O(y) = O(x)$. حال چون مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 3^0\}$ به تعدادی مجموعه که تعداد اعضای هر کدام برابر n است افزاز شده است، پس $n|3^0$ و در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (ج) در این شرط صدق می‌کند.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

یادداشت. توجه کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $3 \mid n$ ، چنین تابعی وجود دارد. کافی است f را چنین تعریف کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ (x + \frac{x}{n}) \pmod{3} & x \neq 1 \end{cases}$$

به‌سادگی می‌توان این مسأله را برای حالتی که $3 \nmid n$ با عدد طبیعی دلخواهی عوض شده باشد، تعمیم داد.

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

ابتدا همه‌ی زوجهای $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{m-1}, a_m)$ را در نظر بگیرید. با توجه به شرط دوم، این $m-1$ زوج مرتب، دوبه‌دو متمایزند. اما چون $a_i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ پس حداکثر ۱۰۰ زوج مرتب به‌صورت (a_i, a_{i+1}) وجود دارند. پس $100 \leq m-1$ و بنابراین، $m \leq 101$. حال ثابت می‌کنیم که چنین دنباله‌ای به‌طول ۱۰۱ وجود دارد. برای اثبات، در حالت کلی ثابت می‌کنیم که اگر $10 \leq n$ با عدد طبیعی n جایگزین کنیم، دنباله‌ای به‌طول $n^2 + 1$ با شرایط مسأله وجود دارد و این دنباله دارای این شرط اضافی نیز هست که $a_1 = a_{n^2+1} = 1$. این مطلب را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$ دنباله‌ی $1, 1$ در شرط مسأله صدق می‌کند. فرض کنید که برای عدد طبیعی n دنباله‌ی $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ را ساخته باشیم که $a_1 = 1$ و $a_{n^2+1} = 1$. حال دنباله را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$1, n+1, 2, n+1, \dots, n-1, n+1, n, n+1, n+1, 1$$

توجه کنید که $2n+1$ جمله به دنباله‌ی قبلی افزوده‌ایم. به‌سادگی می‌توان دید که دنباله‌ی فوق دنباله‌ای به‌طول $(n+1)^2 + 1$ است که جمله‌های اول و آخر آن برابر ۱ هستند و در شرایط مسأله نیز صدق می‌کند.