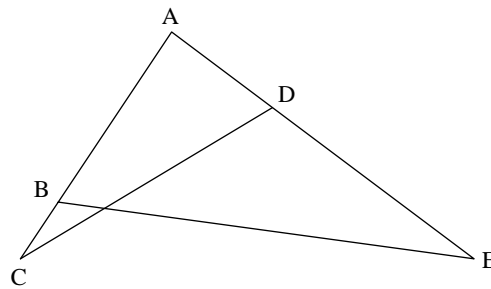


آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله‌ی $d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ که a, b, c, d اعداد طبیعی هستند و $a < b < c$ ، چند جواب دارد؟
الف) جواب ندارد (ب) ۱ (ج) ۳ (د) ۶ (ه) بینهایت
۲. در شکل زیر زوایای $\angle CDE$ و $\angle CBE$ مساوی‌اند. اگر $AD = c, BC = b, AB = a$ و $DE = d$ ، آنگاه داریم:
الف) $b(a + b) = d(c + d)$ (ب) $ab = cd$
ج) $a(a + b) = c(c + d)$ (د) $ad = cb$
ه) $c(a + b) = a(c + d)$



۳. مجموعه‌ی A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟
الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸
۴. چند عدد اول کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲ است؟
الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) بیش از ۵
۵. معادله‌ی $x^y + 1 = (x + 1)^2$ روی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۵
۶. فرض کنید که معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ دو جواب صحیح داشته باشد. عبارتهای زیر را در نظر بگیرید:
۱) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a و b فرد است.
۲) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
۳) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

- ۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.
- ۵) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
- ۶) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a و b فرد است.
کدام یک از عبارتهای فوق درست است؟
- الف) ۱ و ۴ (ب) ۲ و ۴ (ج) ۱ و ۵ (د) ۳ و ۵ (ه) ۲ و ۶
۷. معادله‌ی $3^{n-1} + 3 = n!$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟
الف) یک (ب) دو (ج) سه (د) چهار (ه) بینهایت
۸. اگر ABC مثلثی باشد که $\angle A = 45^\circ$ و D نقطه‌ای روی امتداد BA باشد به قسمی که $BD = BA + AC$ و نقاط M و K به ترتیب روی AB و BC به گونه‌ای قرار داشته باشند که مساحت مثلث BDM مساوی مساحت مثلث BCK باشد آنگاه $\angle BKM$ برابر است با:
الف) $22/5^\circ$ (ب) 30° (ج) 45° (د) 15° (ه) 20°
۹. فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$. چند تابع $f: A \rightarrow A$ وجود دارد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم:
 $f(f(x)) = f(x)$
الف) ۱ (ب) ۴ (ج) ۷ (د) ۱۰ (ه) ۱۳
۱۰. مثلث ABC را با اضلاعی با طولهای صحیح a و b و c در نظر می‌گیریم و طول ارتفاعهای آن را h_a, h_b و h_c می‌نامیم. فرض کنید $h_a = h_b + h_c$. در این صورت داریم:
الف) $a^2 + b^2 + c^2$ مربع کامل است.
ب) $2(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است.
ج) $3(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است.
د) $b^2 + c^2 - a^2$ مربع کامل است.
ه) $a^2 + b^2 - c^2$ مربع کامل است.
۱۱. فرض کنید $a = 10^{2 \times 1376} - 10^{1376} + 1$. مقدار $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$ برابر است با:
الف) $2 \times 10^{1376} - 2$ (ب) $2 \times 10^{1376} - 1$ (ج) 2×10^{1376} (د) $2 \times 10^{1376} + 1$ (ه) $2 \times 10^{1376} + 2$
۱۲. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. نقاط D و E را به ترتیب روی AB و AC می‌گیریم به طوری که دایره‌ی محیطی مثلث ADE در نقطه‌ی X بر BC مماس باشد. اگر D و E را طوری انتخاب کنیم که DE مینیمم شود در این صورت داریم:
الف) AX میانه است.
ب) AX ارتفاع است.
ج) AX نیمساز است.
د) X بین پای نیمساز و پای میانه قرار دارد.
ه) X بین پای نیمساز و پای ارتفاع قرار دارد.
۱۳. ۵ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه داریم. به چند طریق این مهره‌ها را می‌توانیم در یک ردیف از چپ به راست کنار هم بچینیم، به طوری که بلافاصله بعد از هر مهره‌ی سفید حداقل یک مهره‌ی سیاه قرار داشته باشد؟
الف) ۱۲۶ (ب) ۱۳۲ (ج) ۲۱۸ (د) ۲۵۲ (ه) ۳۱۲
۱۴. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$
 $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک } n \text{ و } x \text{ بزرگتر از یک است}\}$
عدد طبیعی $n < 1$ را «خوب» می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A_n$ ، داشته باشیم $x + y \in A_n$. چند عدد خوب زوج داریم که کوچکتر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند؟
الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۹ (ه) ۲۳

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. نقطه‌ی M درون مثلث ABC قرار دارد. H_1, H_2, H_3 به ترتیب پای عمودهای مرسوم از M بر BC, AC و AB می‌باشند. اگر حاصل ضرب $MH_1 \cdot MH_2 \cdot MH_3$ بیشترین مقدار ممکن خود را اختیار کند آنگاه M کدام یک از نقطه‌های زیر است؟
 الف) مرکز ارتفاعی ب) مرکز دایره‌ی محاطی ج) مرکز دایره‌ی محیطی
 د) مرکز ثقل ه) نقطه‌ای که از آن سه ضلع به یک زاویه دیده می‌شود.
۱۶. معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1376}$ با شرط $(x \leq y)$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
 الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) جواب ندارد
۱۷. چند تابع $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ داشته باشیم:
 $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$
 الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه ه) بینهایت
۱۸. چند عدد اول سه رقمی \overline{abc} وجود دارد که در آن داشته باشیم $9 = 4ac - b^2$?
 الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴
۱۹. در زیرمجموعه‌ی $\{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq 5; x, y \in \mathbb{Z}\}$ از نقاط صفحه حداکثر چند نقطه می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که فاصله‌ی دوه‌دوی این نقاط متمایز باشد؟
 الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸
۲۰. تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:
 ۱) به ازای هر $x, y \in \mathbb{N}$ داریم: $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$
 ۲) فقط به ازای تعداد متناهی x داریم: $f(x) = 1$
 ۳) $f(30) = 6$
 مقدار $f(2)$ چقدر است؟
 الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵
۲۱. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ باشند به طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی A_i و A_j حداقل ۲ عضو دارد. در این صورت بیشترین مقدار n کدام یک از مقادیر زیر است؟
 الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴ ه) ۲۵
۲۲. تعداد مقسوم‌علیه‌های هر عدد طبیعی n را با $d(n)$ نشان می‌دهیم. عدد n را «جالب» گوئیم هرگاه $d(d(d(n))) = d(d(n))$. کدام یک از احکام زیر نادرست است؟
 الف) بینهایت عدد جالب مضرب ۳ وجود دارد.
 ب) بینهایت عدد جالب زوج وجود دارد.
 ج) بینهایت عدد جالب فرد وجود دارد.
 د) اگر n جالب باشد، n^3 نیز جالب است.
 ه) اگر n جالب باشد، $d(n)$ نیز جالب است.
۲۳. اعداد حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n روی تخته نوشته شده‌اند. در هر «گام» دو تا از آنها مثل x و y را به دلخواه انتخاب کرده و آنها را حذف می‌کنیم و به جای آنها عدد $x + y + xy$ را می‌نویسیم. پس از $n - 1$ گام عدد A روی تخته باقی مانده است. کدام یک از نتیجه‌گیریهای زیر درست است؟
 الف) می‌توان مقادیر اولیه‌ی a_1, a_2, \dots, a_n را چنان تعیین کرد که با روشهای مختلف $n!$ مقدار متمایز برای A حاصل شود.
 ب) مقدار A به طور منحصر به فرد توسط a_1, a_2, \dots, a_n تعیین می‌شود.
 ج) اگر $a_1 = 2$ ، در این صورت A حتماً عددی زوج است.
 د) به تعداد متناهی مقادیر a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارد که برای آنها A می‌تواند برابر ۱ شود.
 ه) تمام گزینه‌های بالا نادرست است.

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. ۱۳۷۶ لامپ داریم که همه در حالت اولیه خاموش هستند. این لامپها را از ۱ تا ۱۳۷۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای هر عدد صحیح و مثبت k ، سوئیچ P_k وضعیت خاموش و روشن لامپهایی که شماره‌ی آنها مضربی از k است را عوض می‌کند. سوئیچهای $P_1, P_2, \dots, P_{1376}$ را متوالیاً می‌زنیم. در آخر چند لامپ روشن می‌ماند؟

الف) ۱۳۷۶ (ب) ۱۳۳۹ (ج) ۷۶ (د) ۳۹ (ه) ۳۷

۲۵. از جدول زیر ۵ عدد انتخاب می‌کنیم به طوری که هیچ دو عددی در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند. کوچکترین این اعداد را a می‌نامیم. a حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۲۰	۲۲	۲۹	۲۱	۳۱
۱۴	۱۲	۱۵	۲۰	۷
۳	۹	۷	۱۳	۲۳
۲۳	۱۴	۱۱	۱۷	۳۱
۲۱	۲۶	۲	۴۱	۲۸

الف) ۱۴ (ب) ۱۵ (ج) ۱۶ (د) ۲۰ (ه) ۲۱

۲۶. از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 1001\}$ زیرمجموعه‌ای مانند $S \subset A$ انتخاب می‌کنیم به طوری که اگر $x, y \in S$ آنگاه $x + y \notin S$ حداکثر تعداد اعضای S چقدر است؟

الف) ۴۹۹ (ب) ۵۰۰ (ج) ۵۰۱ (د) ۵۰۲ (ه) ۵۰۳

۲۷. برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می‌دهیم (مثلاً $f(1376) = 17$). اگر $n_0 = (13)^{76}$ ، کدام یک از اعداد زیر در دنباله‌ی

$$n_0, f(n_0), f(f(n_0)), \dots, f(f(\dots(f(n_0))\dots)), \dots$$

وجود دارد؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) هیچ کدام

۲۸. مثلث ABC با اضلاع $AB = 4, AC = 5$ و $BC = 6$ مفروض است. نقاط A', B' و C' پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A, B و C هستند. A'', B'' و C'' را به ترتیب محل تلاقی امتداد این ارتفاعها با دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گیریم. در این صورت $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'}$ برابر است با:

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) $3\sqrt{2}$ (د) $2\sqrt{3} + 1$ (ه) $3\sqrt{3} - 1$

۲۹. در کدام یک از مجموعه‌های زیر عددی به صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{5^m + 5^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ (ب) $\{4^m + 4^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$
 ج) $\{6^m + 6^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ (د) $\{7^m + 7^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$

(ه) هیچ کدام

۳۰. معادله‌ی $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1376}} = \frac{1376}{a_1 + a_2 + \dots + a_{1376}}$ که در آن

$$1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{1376}$$

روی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) $1376!$ (د) بینهایت (ه) $2 \times (1376!)$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبداللّه محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهرا ن اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = d$$

که در آن a, b, c, d و عددهایی طبیعی‌اند و $a < b < c$. چون

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2$$

بنابراین $d = 1$.

ادعا می‌کنیم که $a = 2$. توجه کنید که $a \neq 1$ و اگر $a \geq 3$ ، آنگاه،

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$$

که ناممکن است. پس $a = 2$ و بنابراین،

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

و $b \geq 3$

ادعا می‌کنیم $b = 3$. توجه کنید که اگر $b \geq 4$ ، آنگاه

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$$

پس $b = 3$ و در نتیجه، $c = 6$ به‌طور یکتا به‌دست می‌آید. پس تنها جواب مسأله $a = 2, b = 3, c = 6$ و $d = 1$ است.

۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون $\angle CDE = \angle CBE$ ، بنابراین چهار نقطه‌ی D, E, B, C روی یک دایره قرار دارند. پس بنابر تعریف قوت نقطه، $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ و بنابراین،

$$a(a + b) = c(c + d)$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید $|A| \geq 5$. در این صورت اگر A از هر رده‌ی مانده‌های به پیمانه‌ی ۳ دست کم یک عضو داشته باشد، مجموع این سه عضو بر ۳ بخش پذیر است. پس A دست کم از یکی از رده‌های مانده‌های به پیمانه‌ی ۳ عضوی ندارد. در این صورت، بنابر اصل لانه‌کبوتری، عددی مانند r وجود دارد که $0 \leq r \leq 2$ و n دارای سه عضو متمایز مانند x_1, x_2, x_3 است که

$$x_i \equiv r, \quad 1 \leq i \leq 3$$

اما در این صورت $|x_1 + x_2 + x_3| \leq 4$. پس $|A| \leq 4$. مثال $A = \{1, 2, 4, 5\}$ نشان می‌دهد که $|A| = 4$ امکان پذیر است.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید N عددی با ویژگی مورد نظر باشد. چون مجموع ارقام N برابر ۲ است پس یا $N = 2$ یا N دارای دو رقم ۱ است و بقیه‌ی ارقام آن صفرند. اما چون N اول است، رقم آخر آن باید ۱ باشد. پس n باید به شکل

$$N = \underbrace{100\dots0}_n 1 = 10^n + 1$$

باشد و چون $1376 < N < 10000$ ، پس $n < 4$. به‌ازای $n = 1$ و $n = 2$ عددهای ۱۱ و ۱۰۱ به‌دست می‌آیند که اول‌اند. اما به‌ازای $n = 3$ عدد $n = 1001$ بر ۱۱ بخش پذیر است.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

چون $x^y + 1 = (x + 1)^2$ ، پس $x^y = x^2 + 2x$. در نتیجه، $x^{y-1} = x + 2$ اگر $y = 1$ ، نتیجه می‌شود $x + 2 = 1$ که غیرممکن است. پس $y \geq 2$. بنابراین، $x|x^{y-1}$ و چون $x|x$ پس $x|2$ بنابراین، $x = 1$ یا $x = 2$ اگر $x = 1$ ، به رابطه‌ی $1 = 1 + 2$ می‌رسیم که تناقض است. اگر $x = 2$ نتیجه می‌شود $y = 3$. پس تنها جواب مسأله $(x, y) = (2, 3)$ است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

توجه کنید که اگر x_1 و x_2 دو جواب معادله باشند، آنگاه، $b = x_1 x_2$ و $a = -(x_1 + x_2)$. پس اگر $x_1 x_2$ فرد باشند، a زوج و b فرد خواهد بود و اگر یکی از x_1 و x_2 فرد و دیگری زوج باشد، a فرد و b زوج خواهد بود. پس عبارتهای ۲ و ۴ صحیح هستند.

۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

به آسانی می‌توان دید که $n = 3$ و $n = 4$ جوابهای معادله‌ی $3^{n-1} = n! + 3$ هستند اما $n = 1$ بر $n = 2$ و $n = 5$ جواب این معادله نیستند. به‌ازای $n \geq 6$ بر $n!$ بخش پذیر است ولی $3^{n-1} - 3$ بر ۹ بخش پذیر نیست.

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

چون $BD = BA + AC$ ، پس $AD = AC$ و در نتیجه زاویه‌های $\angle ADC$ و $\angle ACD$ برابرند. بنابراین،

$$\angle ADC = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle ACD) = \frac{1}{2}\angle A = 22/5^\circ$$

فرض کنید L نقطه‌ی تقاطع CK با DM باشد. اگر مساحت شکل \triangle را با $[\triangle]$ نشان دهیم، از $[BDM] = [BCK]$ نتیجه می‌شود

$$[MLC] = [KLD]$$

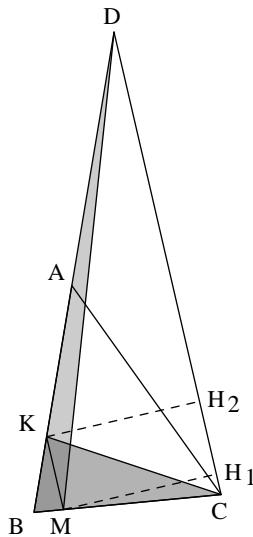
پس، $[MCD] = [KCD]$ و بنابراین، اگر H_1 و H_2 به ترتیب پاهای عمودهای رسم شده از M و K بر CD باشند،

$$CD \cdot MH_1 = CD \cdot KH_2$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

در نتیجه، $MH_1 = KH_2$ یعنی CD و KM موازی‌اند بنابراین،

$$\angle BKM = \angle BDC = \angle ADC = 22/5^\circ$$



۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

شرط $f(f(x)) = f(x)$ هم ارز آن است که اگر y در برد تابع f قرار داشته باشد، آنگاه $f(y) = y$. اگر برد f را با R_f نشان دهیم، سه حالت خواهیم داشت:

(الف) $|R_f| = 2$. در این حالت f روی R_f همانی است و به‌ازای تنها عضو خارج از R_f باید مقدار f را برابر با عضوی در R_f تعریف کنیم. پس دو امکان برای f وجود دارد و چون $\binom{2}{2} = 3$ امکان برای R_f وجود دارد پس $2 \times 3 = 6$ امکان در این حالت وجود دارد.

(ب) $|R_f| = 3$. در این حالت $R_f = A$ و f روی A همانی است و بنابراین تنها ۱ انتخاب وجود دارد.

(ج) $|R_f| = 1$. در این حالت f تابعی ثابت است و بنابراین، ۳ انتخاب برای f وجود دارد.

پس جمعاً $1 + 3 + 6 = 10$ انتخاب برای تابع f وجود دارد.

۱۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر S مساحت مثلث ABC باشد، چون $h_a = h_b + h_c$ نتیجه می‌شود

$$\frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

و در نتیجه، $bc = ab + ac$ بنابراین

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = (a - b - c)^2$$

پس $a^2 + b^2 + c^2$ مربع کامل است.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که

$$\left(10^{1376} - \frac{1}{2}\right)^2 < a < (10^{1376})^2$$

بنابراین،

$$2 \times 10^{1376} - 1 < 2\sqrt{a} < 2 \times 10^{1376}$$

و در نتیجه،

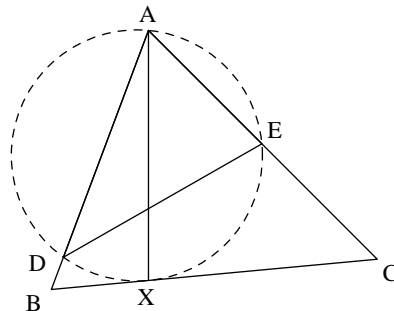
$$[2\sqrt{a}] = 2 \times 10^{1376} - 1$$

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ADE را R بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$DE = 2R \sin A$$

پس DE وقتی مینیمم می‌شود که R مینیمم شود (چون $\sin A$ ثابت است).



اما چون $h_a \leq AX \leq 2R$ $h_a \leq AX$ ارتفاع وارد بر ضلع BC است، پس R وقتی مینیمم می‌شود که $2R = h_a$ یعنی AX ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

به هر مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سیاه می‌چسبانیم؛ حال ۵ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره سفید سیاه داریم که می‌خواهیم در یک ردیف آنها را از چپ به راست بچینیم. هر روش چیدن این مهره‌ها دقیقاً متناظر است با یک روش چیدن مهره‌ها که پس از هر سفید، دست‌کم یک سیاه قرار داشته باشد. پس تعداد حالتها برابر است با $N = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$.

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

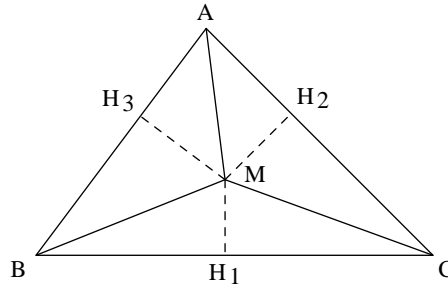
ادعا می‌کنیم که هر عدد خوب زوج لزوماً توانی از ۲ است. فرض کنید n یک عددی خوب و زوج باشد و فرض کنید $n = 2^k m$ که در آن $k \geq 1$ و m عددی فرد است. اگر n توانی از ۲ نباشد، $m > 1$ و بنابراین، $(m, n) = m > 1$ پس $m \in A$ همچنین $2^k \in A_n$ اما

$$(2^k + m, n) = (2^k + m, 2^k m) = (2^k + m, m) = (2^k, m) = 1$$

عدد $2^k + m$ در A_n نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض $m > 1$ نادرست است. همچنین به آسانی می‌توان ثابت کرد که هر توان ۲ عددی خوب است. اکنون باید تعداد توانهای ۲ را بشماریم که از ۱۳۷۶ کوچکترند. اگر $2^n < 1376$ ، نتیجه می‌شود $n \leq 10$. پس ۱۰ عدد خوب زوج کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.
 قرار می‌دهیم $a = BC$, $b = AC$ و $c = AB$ ، و مساحت شکل \triangle را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم.



در این صورت،

$$[MBC] \cdot [MAC] \cdot [MAB] = \frac{1}{8} abc \cdot MH_1 \cdot MH_2 \cdot MH_3$$

و چون a و b و c ثابت‌اند، حاصل ضرب $MH_1 \cdot MH_2 \cdot MH_3$ وقتی ماکزیمم است که $[MBC] \cdot [MAC] \cdot [MAB]$ ماکزیمم باشد. اما چون $[MBC] + [MAC] + [MAB] = [ABC]$ مقداری ثابت است، پس حاصل ضرب بالا وقتی ماکزیمم است که

$$[MBC] = [MAC] = [MAB] = \frac{[ABC]}{3}$$

پس M باید مرکز ثقل مثلث باشد.

۱۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
 فرض کنید $x = dx'$ و $y = dy'$ که $(x', y') = 1$ پس $\frac{1376}{d} = x' + y' + \sqrt{x'y'}$ و چون $\sqrt{x'y'} = u^2$ و $x' = u^2$ صحیح است و y' نسبت به هم اول‌اند پس x' و y' هر دو مربع کامل هستند. فرض کنید $x' = u^2$ و $y' = v^2$ پس $(u+v)^2 = \frac{1376}{d}$ و با توجه به $43 \times 3^5 = 1376$ داریم 16 ، 4 و از آنجا جوابهای $(u, v) = (1, 1)$ و $(u, v) = (1, 3)$ به دست می‌آیند که متناظر با $(x, y) = (104, 104)$ و $(x, y) = (26, 78)$ هستند.

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
 توجه کنید که f تابعی یک به یک است. در واقع، اگر $f(m) = f(n)$ آنگاه $ff(m) = ff(n)$ پس $2m + 3 = 2n + 3$ و در نتیجه، $m = n$ اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$f(0) + ff(0) = 3$$

اگر $f(0) = 0$ ، نتیجه می‌شود $0 = f(0) + f(f(0)) = 3$ که تناقض است. پس همین طور اگر $f(0) = 3$ ، نتیجه می‌شود $3 + f(3) = 3$ و بنابراین، $f(3) = 0$.

$$9 = f(3) + f(f(3)) = 0 + 3 = 3$$

که باز هم تناقض است. پس $f(0) = 1$ یا $f(0) = 2$. اگر $f(0) = 2$ ، نتیجه می‌شود $2 + f(2) = 3$ و بنابراین، $f(2) = 1$. پس $f(2) + f(1) = 9$ و در نتیجه، $f(1) = 8$. اما $f(1) \leq f(1) + 1$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

$f(f(1)) = 5$. پس نتیجه می‌گیریم $f(0) = 1$. اکنون به استقرا ثابت می‌کنیم که $f(n) = n + 1$. حکم به‌ازای $n = 0$ صحیح است. اگر تساوی به‌ازای n برقرار باشد، آنگاه

$$f(n+1) = 2n+3 - f(n) = 2n+3 - (n+1) = n+2$$

پس تنها یک تابع در این معادله صدق می‌کند.

۱۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

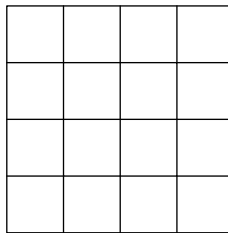
هیچ عدد سه رقمی با این خاصیت وجود ندارد. در واقع اگر $b^2 - 4ac = 9$ ، چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ روی مجموعه‌ی اعداد صحیح به‌صورت $(px+q)(rx+s)$ تجزیه می‌شود. بنابراین،

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = (10p+q)(10r+s)$$

عددی مرکب خواهد بود.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

توجه کنید که بیش از ۵ نقطه با این خاصیت نمی‌تواند وجود داشته باشد،



A

چون $\binom{6}{2} = 15$ فاصله به‌وجود می‌آورند و به سادگی می‌توان دید که در شکل بالا دقیقاً ۱۴ فاصله‌ی ناصفر متمایز وجود دارد.

شکل بالا ۵ نقطه را نشان می‌دهد که تمام فاصله‌ها در آن متمایزند.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم که اگر $x \leq 1$ ، آنگاه $f(x) \geq 2$. در واقع اگر $f(x) = 1$ ، آنگاه

$$f(x^2) = f(x) + f(x) - 1 = 1$$

و به‌همین ترتیب، $f(x^4) = f(x^2) = \dots = 1$. پس به‌ازای تعدادی نامتناهی عدد طبیعی مانند y ، $f(y) = 1$ که با فرض (۲) مسأله تناقض دارد. از سوی دیگر از شرط (۳) نتیجه می‌شود

$$f(30) = f(15) + f(2) - 1 = f(3) + f(5) + f(2) = 6$$

اما چون $f(2), f(3), f(5) \geq 2$ و مجموع آنها برابر ۶ است، پس $f(2) = f(3) = f(5) = 2$.

۲۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید که همه‌ی زیرمجموعه‌های ۴، ۵ و ۶ عضوی را انتخاب کنیم. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

و روشن است که هر دو تایی آنها دست‌کم در ۲ عضو مشترک‌اند.

حال ادعا می‌کنیم که بیش از ۲۲ مجموعه نمی‌توان انتخاب کرد. اولاً در مجموعه‌های انتخاب شده \emptyset و مجموعه‌های تک‌عضوی نمی‌توانند وجود داشته باشند. همچنین اگر مجموعه‌ای دو‌عضوی مثل $\{1, 2\}$ در این زیرمجموعه‌ها باشد، بقیه باید همه شامل این زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی باشند و بنابراین، تعداد کل مجموعه‌ها حداکثر $2^2 = 4$ خواهد بود. همچنین اگر مجموعه‌ای سه‌عضوی مثل $\{1, 2, 3\}$ بین زیرمجموعه‌ها باشد، باز هم با استدلالی مشابه استدلال قبل می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان به بیش از ۲۲ مجموعه رسید.

۲۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

توجه کنید که $n = 2$ عددی جالب است چون $d(d(2)) = d(2) = 2$ ولی $n^2 = 4$ نیست چون $d(d(4)) = d(4) = 3$ ولی $d(3) = 2 \neq 3$

۲۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

عمل $*$ را روی اعداد حقیقی چنین تعریف کنید:

$$x * y = x + y + xy$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که $*$ عملی جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است. بنابراین اعداد a_1, \dots, a_n را به هر شکل و با هر ترتیب که با عمل $*$ ترکیب کنیم نتیجه‌ی نهایی به ترتیب انجام این کار بستگی ندارد و A به‌طور منحصر به‌فرد توسط a_1, \dots, a_n مشخص می‌شود.

۲۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

روشن است که لامپ شماره‌ی m به تعداد مقسوم‌علیه‌های m تغییر وضعیت می‌دهد. بنابراین چون در ابتدا همه‌ی لامپ‌ها خاموش بوده‌اند، در پایان لامپ‌هایی روشن خواهند بود که تعداد مقسوم‌علیه‌های آنها عددی فرد باشد. اما اگر

$$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$$

تجزیه‌ی m به عوامل اول باشد، در این صورت تعداد شمارنده‌های m برابر است با $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_s + 1)$ و $d(m)$ فقط وقتی فرد خواهد بود که هر α_i زوج باشد، یعنی m مربع کامل باشد. پس تعداد لامپ‌های روشن برابر تعداد مربع‌های کامل کوچکتر از ۱۳۷۶ است. اگر $m^2 < 1376$ نتیجه می‌شود $m \leq 37$.

۲۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

توجه کنید که با انتخاب اعداد ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۳۰ و ۳۳ از ستون‌های اول تا پنجم به عدد ۲۰ می‌رسیم. برای آنکه ثابت کنیم a نمی‌تواند از ۲۰ بزرگتر باشد، توجه کنید که از مربع 3×3 وسط باید دست‌کم یک عدد انتخاب شود و بزرگترین عدد در این مربع نیز ۲۰ است.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

توجه کنید که زیرمجموعه‌ی $S = \{501, 502, \dots, 1001\}$ که ۵۰۱ عضو دارد، در شرط مسأله صدق می‌کند. اگر $|S| > 501$ فرض کنید که t بزرگترین عضو S باشد. زوج‌های

$$(1, t-1), (2, t-2), \dots, \left(\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \right)$$

$\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ زوج مرتب‌اند که مجموع مولفه‌ی اول و دوم هر یک از آنها برابر t است. بنابراین از هر زوج مرتب حداکثر یک مولفه‌ی آن می‌تواند در S باشد. چون همه‌ی اعداد $1, 2, \dots, t-1$ در مولفه‌های این $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ زوج مرتب ظاهر شده‌اند، بنابراین $|S| \leq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$. از فرض $|S| > 501$ نتیجه می‌شود $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \geq 502$ و بنابراین $t \geq 1004$ که تناقض است.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم که n و $f(n)$ همواره باقیمانده‌ی مساوی در تقسیم بر عدد ۹ دارند. یعنی $n \equiv f(n) \pmod{9}$. اما،

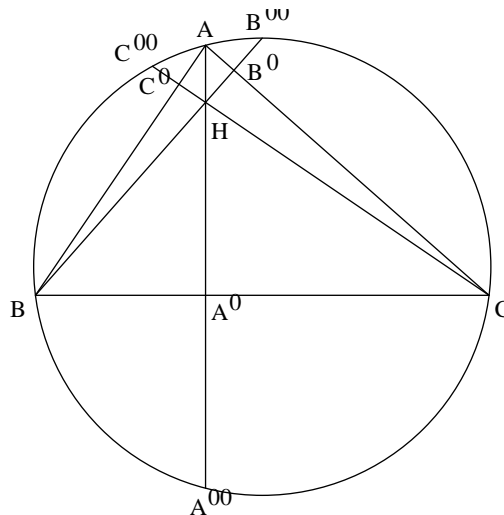
$$\begin{aligned} (13)^{76} &\equiv 4^{76} \equiv (4^2)^{38} \\ &\equiv (-2)^{38} \equiv (2^3)^{12} \times 2^2 \\ &\equiv (-1)^{12} \times 4 \equiv 4 \end{aligned}$$

پس اگر $k = f(f(\dots f(n_s)))$ ، آنگاه $k \equiv 4 \pmod{9}$.

اکنون توجه کنید که چون برای هر عدد مانند n که دست‌کم دو رقم داشته باشد، $f(n) < n$ ، در دنباله‌ی داده شده اعداد مرتباً کوچک می‌شوند تا به یک عدد یک رقمی برسیم این عدد یک رقمی لزوماً ۴ خواهد بود.

۲۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

نقطه‌ی تلاقی ارتفاعها را H می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{AA''}{AA'} = 1 + \frac{A'A''}{AA'} = 1 + \frac{HA'}{AA'} = 1 + \frac{HA' \cdot BC}{AA' \cdot BC}$$

را به همین ترتیب ساده می‌کنیم. اگر مساحت شکل \triangle را با $[\triangle]$ نشان دهیم، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} &= 3 + \frac{[BHC] + [AHC] + [AHB]}{[ABC]} \\ &= 3 + \frac{[ABC]}{[ABC]} \\ &= 4 \end{aligned}$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که اگر m و k عددهایی طبیعی باشند، $5^m + 5^k \equiv 2 \pmod{4}$. اما هیچ عدد مربع کامل به صورت $4r + 2$ وجود ندارد. گزینه‌های (ب)، (ج) و (د) نیز با هم‌نهشتی به پیمانه‌های ۳، ۵ و ۶ و دقت به این نکته که هیچ مربع کاملی به پیمانه‌ی این اعداد هم‌نهشت با ۲ نیست رد می‌شوند.

۳۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

از نابرابری کوشی-شوارتز نتیجه می‌شود،

$$\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{1376}} \right) (a_1 + \dots + a_{1376}) \geq 1376^2$$

و اگر معادله جواب داشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت $1376 \geq 1376^2$ که تناقض است. پس این معادله جواب ندارد.