

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

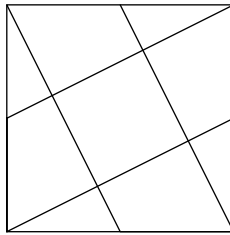
زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله‌ی $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$ دارای چند جواب است؟
الف) جواب ندارد. ب) یک جواب ج) دو جواب
د) تعداد متناهی جواب ه) تعداد نامتناهی جواب

۲. رقم راست عدد $23^{23} - 17^{17}$ برابر است با:
الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۳. در شکل زیر فرض کنید مساحت مربع بزرگ برابر ۱ باشد. هر رأس مربع را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کنیم. مساحت مربع کوچک چقدر است؟
الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{5}$ ج) $\frac{1}{6}$ د) $\frac{1}{7}$ ه) $\frac{1}{8}$



۴. حداقل چند عضو از مجموعه‌ی $\{2, 3, \dots, 1375\}$ را حذف کنیم به طوری که مجموعه‌ی باقی مانده دارای این خاصیت باشد که حاصل ضرب هیچ یک از دو عضوش در خودش نباشد؟
الف) ۱۶ ب) ۳۶ ج) ۵۶ د) ۷۶ ه) ۹۶

۵. فرض کنید مجموع $n + 2 + 1$ یک عدد سه‌رقمی باشد که رقمهای آن مساوی‌اند. در این صورت n بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟
الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۱۱

۶. فرض کنید در مثلث ABC ، CH ارتفاع باشد و $CH \geq AB$. در این صورت بزرگترین مقدار زاویه‌ی C برابر است با:
الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90° ه) 120°

۷. تعدادی متناهی وزنه داریم که وزن هر یک حداکثر ۱۰ کیلوگرم است. می‌دانیم که اگر این وزنه‌ها را به دلخواه به دو دسته تقسیم کنیم مجموع وزنه‌های یکی از دسته‌ها حداکثر ۱۰ کیلوگرم می‌شود. بیشترین وزن مجموع

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

وزنه‌ها چند کیلوگرم می‌تواند باشد؟

- الف) ۲۰ (ب) ۲۵ (ج) ۳۰ (د) ۳۵ (ه) ۴۰

۸. فرض کنید هر حرف لاتین نماینده‌ی یک رقم باشد و اگر دو حرف لاتین متفاوت باشند حتماً رقمهای آنها نیز متفاوت است. اگر داشته باشیم $\frac{SIX}{NINE} = \frac{7}{4}$ در این صورت مقدار I برابر است با:

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

۹. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به طوری که

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$$

در این صورت دقیق‌ترین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت چیست؟

- الف) $x = y = 0$ (ب) $x + y = 0$ (ج) $x + y \geq 0$ (د) $x + y \leq 0$ (ه) x و y هم‌علامت‌اند.

۱۰. اگر $0 < a < 1$ و $b > 0$ در این صورت داریم

- الف) $a^a b^b \geq a^b b^a$ (ب) $a^\alpha b^{1-\alpha} < a + b$ (ج) $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b+1}{4}}$ (د) $(\alpha a + (1-\alpha)b)^2 \geq \alpha a^2 + (1-\alpha)b^2$ (ه) الف و ب و ج هر سه صحیح است.

۱۱. از نقطه‌ی O واقع در درون مثلث ABC ، عمودهای OM ، ON و OP را به ترتیب بر اضلاع BC ، AB و AC رسم می‌کنیم. اگر $AM = 3$ ، $MB = 5$ ، $BN = 4$ ، $NC = 2$ و $CP = 4$ در این صورت مقدار AP برابر است با:

- الف) ۳ (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) ۴ (د) $2\sqrt{3}$ (ه) $2\sqrt{2}$

۱۲. نقاط A ، B و C روی یک خط واقع‌اند و B نقطه‌ای میان A و C است. تمام دایره‌های گذرا از نقاط A و B را در نظر می‌گیریم و از C مماسهایی بر آنها رسم می‌کنیم. در این صورت مکان هندسی نقاط تماس برابر است با:

- الف) یک خط راست (ب) یک دایره (ج) یک نیم‌دایره (د) یک بیضی (ه) هیچ‌کدام

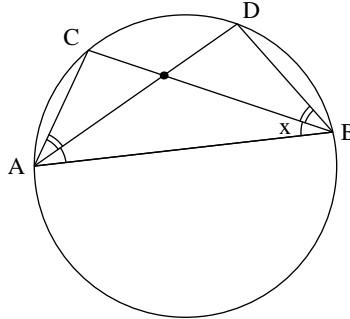
۱۳. معادله‌ی $3^y + 1 = 2^x$ در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

- الف) ۱ جواب (ب) ۲ جواب (ج) ۳ جواب (د) ۴ جواب (ه) نامتناهی جواب

۱۴. مثلث ABC محاط در داخل دایره‌ی C را در نظر بگیرید. فرض کنید AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. اگر $AB = \sqrt{6}BC = \sqrt{6}AD$ در این صورت زوایای مثلث ABC برابرند با:

- الف) 15° ، 30° ، 135° (ب) 30° ، 60° ، 90° (ج) 45° ، 45° ، 90° (د) 20° ، 40° ، 120° (ه) 15° ، 60° ، 105°

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور



۱۵. فرض کنید a و b دو عدد طبیعی بوده به طوری که $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ عددی طبیعی باشد. در این صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b از کدام یک از اعداد زیر بزرگتر نیست (بهترین جواب ممکن مورد نظر است)؟

(الف) $\sqrt{a+b}$ (ب) $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}}$ (ج) $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}}$ (د) $\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2b}}{2}$
 (ه) $\sqrt{a+b} - 1$

۱۶. فرض کنید α و β دو عدد باشند به طوری که $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 13\alpha = 1$ و $\beta^3 - 6\beta^2 + 13\beta = 19$. در این صورت مقدار $\alpha + \beta$ برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

(الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۱۷. عدد a را متعادل گوئیم هرگاه بتوان رقمهای آن را به دو دسته تقسیم کرد به طوری که مجموع رقمهای دو دسته مساوی باشد. کوچکترین عدد a ، به طوری که a و $a+1$ متعادل باشند در کدام یک از فاصله‌های زیر قرار می‌گیرند؟

(الف) $[100, 200]$ (ب) $[200, 300]$ (ج) $[300, 400]$ (د) $[400, 500]$ (ه) $[500, 600]$

۱۸. در مثلث ABC نقطه‌ی M را روی BC در نظر می‌گیریم و از M خطوطی موازی اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. فرض کنید مساحت متوازی الاضلاع حاصل $\frac{5}{18}$ مساحت مثلث شود. در این صورت نقطه‌ی M ضلع BC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

(الف) ۱ به ۶ (ب) ۱ به ۴ (ج) ۱ به ۵ (د) ۲ به ۹ (ه) ۱ به ۳

۱۹. یک کره به وسیله‌ی ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند کره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

(الف) 2^9 (ب) 2^8 (ج) ۷۶ (د) ۸۱ (ه) ۷۴

۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای ABH و ACH به ترتیب برابر ۱ و ۳ باشند آنگاه شعاع دایره محاطی مثلث ABC برابر است با:

(الف) ۵ (ب) $\sqrt{10}$ (ج) $2\sqrt{2}$ (د) $4\sqrt{5}$ (ه) ۳

۲۱. فرض کنید $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، و به ازای $0 \leq x \leq 1$ داشته باشیم، $|f(x)| \leq 1$. در این صورت ماکزیمم مقدار $2a + b$ چه می‌تواند باشد؟

(الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰

۲۲. مجموع تمام اعداد مثبت x را بیابید به طوری که عبارت $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$ به ازای آنها عددی صحیح شود.

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

$$\begin{array}{lll} \sqrt{5} \text{ (ج)} & \sqrt[3]{4} \text{ (ب)} & \sqrt{2} \text{ (الف)} \\ \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3}} \text{ (ه)} & \sqrt{5} \left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right) \text{ (د)} & \end{array}$$

۲۳. حداقل چند نقطه باید در صفحه در نظر گرفت به طوری که هر نقطه‌ی صفحه لااقل از یکی از این نقاط فاصله‌اش گنگ باشد.

(الف) ۲ نقطه (ب) ۳ نقطه (ج) ۴ نقطه (د) ۵ نقطه
(ه) با تعدادی متناهی نقطه نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۴. فرض کنید $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 3}$. در این صورت مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \dots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

(الف) ۷ (ب) ۸۰۵ (ج) ۶۰۵ (د) ۴۰۵ (ه) ۵۰۵

۲۵. تعداد تمام اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ را بیابید به طوری که مجموع اعدادی طبیعی باشند که در رقمهای آنها هر یک از اعداد ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار آمده باشد. (مثال: $۰ + ۱ + ۵۲ + ۳ + ۴ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۹۰$)

(الف) ۷ (ب) ۱۱ (ج) ۱۵ (د) ۱۹ (ه) ۲۳

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید که $a = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$ در این صورت روشن است که

$$\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}}{\sqrt{4 + \sqrt{15}}} = \frac{1}{a}$$

پس صورت مسأله به معادله‌ی $a^x + a^{-x} = 8$ تبدیل می‌شود. بنابراین،

$$a^x - 8 + a^{-x} = 0 \Rightarrow (a^x)^2 - 8a^x + 1 = 0 \Rightarrow a^x = 4 \pm \sqrt{15}$$

که دارای جوابهای $x = 1$ و $x = -1$ است.

راه حل دوم: از طرف دیگر، فرض کنید $a^{-x} + a^x = a^{-y} + a^y$. محاسبه‌ی ساده‌ای نشان می‌دهد که $0 = (a^x - a^y)(a^x a^y - 1)$. پس یا $x = y$ یا $x = -y$. پس معادله جواب دیگری ندارد.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

باید باقیمانده‌ی تقسیم عدد $23^{23} - 17^{17}$ را بر 10 پیدا کنیم. توجه کنید که $23 \equiv 3 \pmod{10}$ و $23^2 \equiv -1 \pmod{10}$. پس

$$23^{23} \equiv (-1)^{11} \times 3 \equiv -3$$

همچنین، $17 \equiv -3 \pmod{10}$ و $17^2 \equiv -1 \pmod{10}$. پس

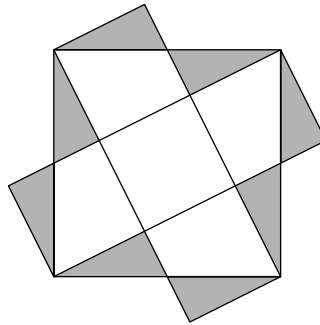
$$17^{17} \equiv (-1)^8 \times -3 \equiv -3$$

پس $0 \equiv -3 + 3 \pmod{10}$ و بنابراین، رقم سمت راست a صفر است.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر به شکل زیر دقت کنید، خواهید دید که همه‌ی مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی نشان داده شده با هم برابرند.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور



همچنین اگر در مربع اصلی به‌جای مثلثهای درونی مثلثهای بیرونی را جایگزین کنیم به پنج مربع که هر یک با مربع کوچکتر هم‌نهشت‌اند می‌رسیم. پس اگر مساحت مربع کوچک برابر S باشد، آنگاه $5S = 1$ و بنابراین $S = \frac{1}{5}$.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که اگر اعداد ۲، ۳، ... و ۳۷ را حذف کنیم، در مجموعه‌ی باقی‌مانده هیچ عضوی حاصل‌ضرب دو عضو دیگر نخواهد بود زیرا به‌ازای هر دو عضو مجموعه‌ی باقی‌مانده مانند a و b چون $a, b \geq 28$ پس $ab \geq 28^2 > 1375$.

از طرف دیگر نشان می‌دهیم که گزینه (الف) نادرست است. ابتدا توجه کنید که اگر a عددی طبیعی باشد و $2 \leq a \leq 37$ ، آنگاه از بین a و a^2 دست کم یکی باید حذف شود. حال اگر همه‌ی زوجهای (a, a^2) را که $2 \leq a \leq 37$ مربع کامل نیست در نظر بگیریم، از هر زوج مرتب دست کم یک مولفه باید حذف شود و اعداد حذف شده دوبه‌دو متمایزند. چون تعداد اعدادی مانند a با خاصیت بالا برابر ۳۲ است، پس دست کم ۳۲ عضو باید حذف شوند.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید $S = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، برابر عدد $\overline{aaa} = 111a$ شود. با توجه به این که $111 = 3 \times 37$ ، پس $37 | n(n+1)$ و چون ۳۷ عددی اول است، n یا $n+1$ باید بر ۳۷ بخش پذیر باشد. اما چون $\frac{n(n+1)}{2} < 1000$ پس $n < 50$. پس $n = 36$ یا $n = 37$ و n یک بررسی ساده نشان می‌دهد که تنها $n = 36$ قابل قبول است.

۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

ابتدا توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ($\angle C = 90^\circ$) ویژگی مورد نظر برقرار است. حال فرض کنید که $\angle C > 90^\circ$. در این صورت

$$\begin{aligned} AB^2 &= c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C > a^2 + b^2 \geq 2ab > 2ab \sin C \\ &= 4S = \frac{2AB \cdot CH}{2} \end{aligned}$$

پس $2CH < AB$ که خلاف فرض است.

۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ابتدا توجه کنید که انتخاب سه وزنه که وزن هر کدام ۱۰ کیلوگرم است، نشان می‌دهد که مجموع وزن وزنه‌ها می‌تواند برابر ۳۰ کیلوگرم باشد. ثابت می‌کنیم که این حداکثر ممکن است. فرض کنید $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$ وزن وزنه‌ها را نشان دهد. k را کوچکترین عدد طبیعی بگیرید که $w_1 + \dots + w_k > 10$ پس چون $w_1 + \dots + w_{k-1} \leq 10$ داریم،

$$10 < w_1 + \dots + w_k \leq 20$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

پس بنابر فرض مسأله $w_{k+1} + \dots + w_n \leq 10$ و در نتیجه،

$$w_1 + \dots + w_n \leq 20 + 10 = 30.$$

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید $a = \overline{SIX}$ و $b = \overline{NINE}$. چون $\frac{a}{b} = \frac{I}{3}$ و همچنین می‌دانیم که $b < 2000$ پس $N = 1$. پس $I \neq 1$. حال بازه‌های $[1210, 1219]$ ، $[1310, 1319]$ ، \dots ، $[1510, 1519]$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به گزینه‌ها، b در یکی از این بازه‌ها قرار دارد. اگر مثلاً $1210 \leq b \leq 1219$ ، آنگاه با توجه به $a = \frac{I}{3}b$ داریم $812 \leq a \leq 806$ و چون هیچ یک از اعضای این بازه رقم دهگان‌شان ۲ نیست، پس از اینجا جوابی پیدا نمی‌شود. اگر $1310 \leq b \leq 1319$ ، به‌طور مشابه جوابی پیدا نمی‌شود. اما اگر $1410 \leq b \leq 1419$ نتیجه می‌شود که $946 \leq a \leq 940$.

از اینجا مثلاً جوابهای $a = 942$ ، $b = 1413$ به‌دست می‌آید. پس $I = 4$.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

توجه کنید که رابطه‌ی داده شده معادل است با

$$x + \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y} = \sqrt{y^2+1} - y$$

پس،

$$x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}$$

$$(x+y)^2 = y^2+1+x^2+1 - \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} = 1 - xy$$

$$(x^2+1)(y^2+1) = 1 + x^2y^2 - 2xy$$

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = 1 + x^2y^2 - 2xy$$

در نتیجه، داریم $x^2 + y^2 + 2xy = 0$ یعنی $x + y = 0$. برعکس اگر $y = -x$ ، عبارت

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right) \left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$$

برابر

$$\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

خواهد بود که عبارت فوق نیز برابر ۱ است.

۱۰. این مسأله نادرست است.

ثابت می‌کنیم گزینه‌های (الف) و (ب) درست‌اند در حالی که گزینه‌ی (ج) نادرست است. توجه کنید که تابع $f_\alpha(x) = x^\alpha$ به‌ازای $x > 0$ ، بسته به اینکه α مثبت یا منفی باشد، تابعی صعودی یا نزولی است. پس اگر $a \geq b$ ، $f_{a-b}(x)$ صعودی است و در نتیجه،

$$\frac{a^a b^b}{b^a a^b} = f_{a-b}\left(\frac{a}{b}\right) \geq f(1) = 1$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

و اگر $b \leq a$ ، $f_{a-b}(x)$ نزولی است و در نتیجه،

$$\frac{a^a b^b}{b^a a^b} = f_{a-b}\left(\frac{a}{b}\right) \geq f(1) = 1$$

و در هر حال گزینه‌ی (الف) درست است. در گزینه (ب) فرض کنید $b \leq a$. در این صورت،

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = f_\alpha(a) b^{1-\alpha} \leq f_\alpha(b) b^{1-\alpha} = b^\alpha b^{1-\alpha} = b < a + b$$

اگر $a \geq b$ ، باز هم با استدلال مشابهی می‌توانید نشان دهید که $a^\alpha b^{1-\alpha} > a + b$ و در هر حال، گزینه‌ی (ب) درست است.

اما گزینه‌ی (ج) نادرست است. فرض کنید $a = b$. در این صورت حکم این گزینه تبدیل می‌شود به

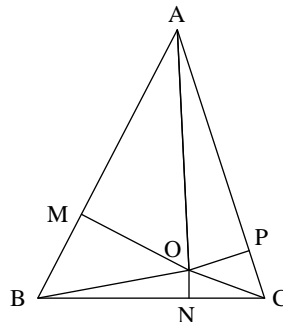
$$a^{ra} \geq (a^r)^{\frac{ra+1}{r}}$$

یا

$$a^{ra} \geq a^a a^{\frac{1}{r}}$$

که هم‌ارز است با $a^a \geq a^{\frac{1}{r}}$ اما اگر $1 < a < \frac{1}{r}$ آنگاه، چون $a < 1$ و $\frac{1}{r} > 0$ نتیجه می‌شود $a^a < a^{\frac{1}{r}}$ و بنابراین $a^a < a^{\frac{1}{r}}$

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.



بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$\begin{aligned} AM^x + OM^x &= OA^x = AP^x + OP^x \\ CP^x + OP^x &= OC^x = CN^x + ON^x \\ BN^x + ON^x &= OB^x = BM^x + OM^x \end{aligned}$$

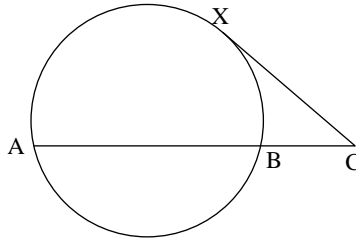
اگر این سه رابطه را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$AM^x + CP^x + BN^x = AP^x + CN^x + BM^x$$

اگر مقادیر داده شده را در رابطه‌ی بالا جایگذاری کنیم مقدار $AP = 2\sqrt{3}$ به دست می‌آید.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
اگر X نقطه‌ی تماس یکی از مماسها با دایره باشد،



بنابر قضیه‌ی قوت نقطه،

$$CX^2 = CA \cdot CB$$

پس CX مقداری ثابت است. بنابراین X روی یک دایره تغییر می‌کند. از طرف دیگر، اگر X نقطه‌ای باشد که $CX^2 = CA \cdot CB$ و X روی خط AB نباشد دایره‌ای از سه نقطه A ، B و X می‌گذرد و خط CX بر این دایره مماس است. اما اگر X روی خط AB باشد، به روشنی چنین دایره‌ای وجود ندارد پس مکان هندسی X دایره‌ای است به مرکز C و شعاع $CA \cdot CB$ که دو نقطه‌ی تقاطع آن با خط AB حذف شده‌اند.

۱۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
روشن است که $(x, y) = (3, 2)$ و $(x, y) = (1, 1)$ جوابهای مسأله‌اند. ادعا می‌کنیم که مسأله جواب دیگری ندارد. اگر $x \geq 3$ ، آنگاه

$$3^y = 3^x + 1 \stackrel{\Delta}{\equiv} 1$$

پس y باید زوج باشد. در واقع اگر $y = 2z + 1$ آن‌گاه

$$3^y = 3^{2z+1} = 9^z \times 3 \stackrel{\Delta}{\equiv} 3$$

پس فرض کنید $y = 2z$. در نتیجه،

$$3^x = 3^{2z} - 1 = (3^z - 1)(3^z + 1)$$

پس $3^z - 1$ و $3^z + 1$ دو توان ۲ هستند که اختلاف آنها ۲ است. پس $3^z = 3$ و بنابراین، $z = 1$. نتیجه می‌شود $(x, y) = (3, 2)$. پس تنها جوابهای معادله $(x, y) = (1, 1)$ و $(x, y) = (3, 2)$ هستند.

۱۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
قانون سینوسها را در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BDA} = \frac{\sin 2x}{\sin 2x}$$

پس بنابر فرض مسأله،

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2x} = \sqrt{2}$$

به آسانی نتیجه می‌شود که تنها جواب این معادله $x = 15^\circ$ است.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b را d فرض کنید. چون

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$$

عددی طبیعی است، پس عبارت $a^2 + b^2 + a + b$ بر ab بخش‌پذیر است. پس $(a+b)^2 + a + b$ نیز بر ab بخش‌پذیر است. یعنی عبارت $(a+b)(a+b+1)$ را می‌شمارد. دقت کنید که چون ab بر d^2 بخش‌پذیر است، پس

$$d^2 \mid (a+b)(a+b+1)$$

اما $a+b+1$ به صورت $dk+1$ است و بنابراین، نسبت به d اول است. پس $d^2 \mid a+b$ یعنی $d \leq \sqrt{a+b}$ که گزینه‌ی (الف) یعنی $d \leq \sqrt{a+b}$ را نتیجه می‌دهد. انتخاب $a=3$ و $b=6$ نشان می‌دهد که گزینه‌های (د) و (ه) نادرست‌اند. همچنین روشن است که به‌ازای هر $a, b \geq 0$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}} \leq \sqrt{\frac{3(a^2+b^2)}{a+b}}$$

۱۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر $\alpha = x+2$ ، آنگاه

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 13\alpha = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 13(x+2) = x^3 + x + 10$$

پس $x^3 + x = -9$. همچنین اگر $\beta = y+2$ ، با محاسبه‌ی مشابهی نتیجه می‌شود $y^3 + y = 9$. اما می‌دانیم که تابع $f(t) = t^3 + t$ تابعی اکیداً صعودی و فرد است. پس چون $f(x) = -f(y)$ نتیجه می‌شود $x+y=0$ و بنابراین،

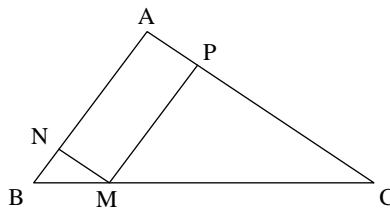
$$\alpha + \beta = x + y + 4 = 4$$

۱۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

فرض کنید a عددی متعال و سه رقمی باشد. (توجه کنید که هر عدد متعال دو رقمی به صورت $a = \overline{xx}$ است و بنابراین $a+1$ متعال نیست). مجموع رقمهای هر عدد متعال زوج است. پس برای اینکه $a+1$ هم متعال باشد، رقم سمت راست a باید ۹ باشد. فرض کنید $a = \overline{xy9}$ ، روشن است که باید رابطه‌ی $x+y=9$ برقرار باشد. پس تنها عددهای متعال سه رقمی $189, 279, 369, 459, 549, 639, 729$ و 849 و 909 هستند. اما اگر a یکی از چهار عدد $189, 279, 369$ یا 459 باشد $a+1$ متعال نیست. پس کوچکترین عدد متعال مانند a که $a+1$ هم متعال باشد 549 است.

۱۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید $x = \frac{BM}{BC}$ ، در این صورت، $1-x = \frac{CM}{BC}$. مساحت شکل \triangle را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم.



راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

فرض کنید خطهای رسم شده از M ضلعهای AB و AC را به ترتیب در N و P قطع کنند. در این صورت،

$$\begin{aligned} [BMN] &= x^2 [ABC] \\ [CMP] &= (1-x)^2 [ABC] \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} (x^2 + (1-x)^2) [ABC] &= ([BMN] + [CMP]) \\ &= \left(1 - \frac{5}{18}\right) [ABC] \end{aligned}$$

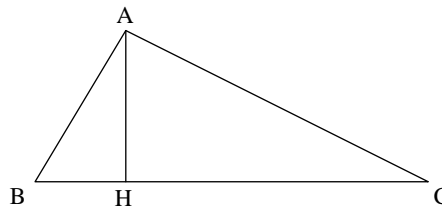
نتیجه می‌شود $0 = 2x^2 - 2x + \frac{5}{18}$. جوابهای این معادله $x = \frac{1}{6}$ و $x = \frac{5}{6}$ هستند. پس M ضلع BC را به نسبت ۱ به ۵ تقسیم می‌کند.

۱۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

فرض کنید که a_n تعداد ناحیه‌هایی را نشان دهد که توسط n صفحه که هیچ سه‌تایی از آنها در یک قطر کره مشترک نیستند، در کره به‌وجود می‌آید. روشن است که $a_1 = 2$ و $a_2 = 4$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $a_{n+1} = a_n + 2n$. فرض کنید که صفحه‌های $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ کره را به a_n ناحیه قسمت کرده باشند. اشتراک صفحه‌ی π_{n+1} با هر یک از این صفحه‌ها یک خط است که قطری از کره را در بر دارد. و بنابر فرض مسأله، این n خط که آنها را d_1, d_2, \dots, d_n می‌نامیم دوبه‌دو متمایزند. روشن است که به‌ازای هر یک از این خطها دو ناحیه‌ی جدید به‌وجود می‌آید. پس $2n$ ناحیه‌ی جدید افزوده می‌شوند و بنابراین، $a_{n+1} = a_n + 2n$. اکنون به استقرا روی n می‌توان ثابت کرد که $a_n = n^2 - n + 2$. پس $a_9 = 74$.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اضلاع مثلث قائم الزاویه را با a ، b و c نشان می‌دهیم.



روشن است که مثلثهای ABH و ACH با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها نیز به ترتیب برابر $\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ است. پس اگر شعاع دایره‌های محاطی آنها را به ترتیب با r_1 و r_2 نشان دهیم، آنگاه

$$r_1 = \frac{c}{a}r, \quad r_2 = \frac{b}{a}r$$

پس،

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}r^2 = r^2$$

در نتیجه، $r = \sqrt{10}$ یا $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

۲۱. گزینه (ج) صحیح است.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

توجه کنید که

$$|f(0)| = |c| \leq 1$$

$$\left|f\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + c\right| \leq 1$$

$$|f(1)| = |a + b + c| \leq 1$$

پس،

$$\begin{aligned} & \left|c - 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + c\right) + 3(a + b + c)\right| \\ &= \left|f(0) - 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 3f(1)\right| \\ &\leq |f(0)| + 4\left|f\left(\frac{1}{4}\right)\right| + 3|f(1)| \\ &\leq 8 \end{aligned}$$

اما

$$\left|c - 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + c\right) + 3(a + b + c)\right| = |2a + b|$$

پس $|2a + b| < 8$. پس ۸ کران بالایی برای $|2a + b|$ است و مثال

$$f(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

نشان می‌دهد که ۸ ماکزیمم مقدار $2a + b$ است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است. فرض کنید $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$. ادعا می‌کنیم که بازای هر عدد حقیقی مانند x ، $f(x) \leq 2\sqrt{2}$. برای اثبات کافی است ماکزیمم f را پیدا کنیم. معادله‌ی $f'(x) = 0$ تبدیل می‌شود به،

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2+x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\sqrt{2-x})^{-\frac{1}{2}} = 0$$

که دارای جواب $x = 0$ است و چون $f(0) = 2\sqrt{2}$ نتیجه می‌شود که ماکزیمم f مقدار $2\sqrt{2}$ است. اکنون چون $2\sqrt{2} < 3$ ، کافی است جواب معادله‌های

$$(\sqrt{2+x})^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2-x})^{\frac{1}{2}} = n$$

را به‌ازای $n = 1$ و $n = 2$ پیدا کنیم. اگر قرار دهیم $y^2 = x + 2$ ، نتیجه می‌شود $2 - x = 4 - y^2$ و بنابراین،

$$y + (4 - y^2)^{\frac{1}{2}} = n$$

یا

$$4 - y^2 = (n - y)^2$$

$$= n^2 - 2ny + y^2$$

پس $0 = 4 - 2ny + n^2 - 2ny + y^2$. جوابهای این معادله عبارت‌اند از

$$y = \frac{2n^2 \pm \sqrt{4n^4 - 4n(n^2 - 4)}}{2n}$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

است. به‌ازای $n = 1$ ، جواب مثبت معادله $y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ است و به‌ازای $n = 2$ معادله‌ی

$$x = y^2 - 2 = \sqrt{5}$$

دو جواب مثبت مانند y_1 و y_2 دارد به‌طوری‌که $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 2$ و $y_1 y_2 = \frac{1}{4}$. به آسانی می‌توان ثابت کرد که $y_1^2 + y_2^2 = 0$ و بنابراین $x_1 + x_2 = 0$.

۲۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است. سه نقطه‌ی $P = (0, 0)$ ، $Q = (1, 0)$ و $R = (\sqrt{2}, 0)$ را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هیچ نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله‌ی آن از هر سه نقطه‌ی P و Q و R عددی گویا باشد. فرض کنید $X = (x, y)$ چنین نقطه‌ای باشد. اگر

$$a = x^2 + y^2,$$

$$\begin{aligned} b &= (x-1)^2 + y^2 \\ &= a + 1 - 2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= (x - \sqrt{2})^2 + y^2 \\ &= a + \sqrt{2} - 2x\sqrt{2} \end{aligned}$$

آنگاه a ، b و c باید اعدادی گویا باشند. پس $1 - 2x$ و $\sqrt{2} - 2x\sqrt{2}$ اعدادی گویا هستند. از اینجا نتیجه می‌شود که x گویاست. اما در این صورت $\sqrt{2} - 2x\sqrt{2}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد. پس سه نقطه‌ی P ، Q و R دارای خاصیت مورد نظر مسأله‌اند.

توجه کنید که هیچ دو نقطه‌ای مانند A و B نمی‌توانند منظور ما را برآورده کنند. فرض کنید R عددی گویا بزرگتر از نصف فاصله‌ی A و B باشد. در این صورت دایره‌های به شعاع R و به مرکزهای A و B یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. فاصله‌ی P از A و B گویاست.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است. توجه کنید که

$$f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4}{4 + 2 \times 4^x} = \frac{2}{4^x + 2}$$

پس،

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x + 2}{4^x + 2} = 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 2S &= \left[f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{13}{14}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{13}{14}\right) + f\left(\frac{1}{14}\right) \right] \\ &= \underbrace{1 + \dots + 1}_{13 \text{ بار}} \\ &= 13 \end{aligned}$$

پس $S = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

توجه کنید که اگر a عددی با خاصیت مورد نظر مسأله باشد، a به پیمانه‌ی ۹ با عدد $۴۵ = ۹ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۱$ همنهشت است. پس a بر ۹ بخش‌پذیر است. همچنین $۹۹ \leq a \leq ۴۵$. پس حداکثر ۷ مقدار برای a وجود دارد. به‌سادگی می‌توان دید که همه‌ی اعداد ۴۵، ۵۴، ... و ۹۹ خاصیت مورد نظر را دارند. پس دقیقاً ۷ مقدار برای a وجود دارد.