آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

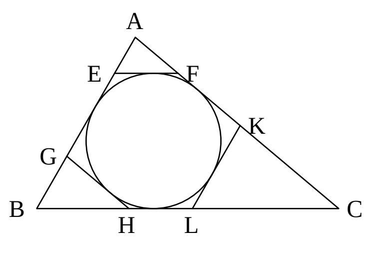
۱. اعداد زوج متوالی ۲، ۴، ۶، ۸، ... را آنقدر ضرب می‌کنیم تا حاصل بر ۱۳۷۵ بخش‌پذیر شود. بزرگترین عدد زوج به کار رفته در کدام‌یک از روابط زیر صدق می‌کند؟
الف) بین ۱ تا ۱۱ ب) بین ۱۱ تا ۲۱ ج) بین ۲۱ تا ۳۱
د) بین ۳۱ تا ۴۱ ه) چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

۲. اگر $9x + 5y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، برای اینکه لزوماً $10x + ky$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر شود، k را برابر کدام‌یک از مقادیر زیر انتخاب کنیم؟
الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۱۰

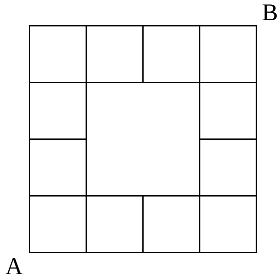
۳. مربع $ABCD$ در صفحه مفروض است. سه خط موازی L_1، L_2 و L_3 را به‌ترتیب از سه رأس A، B و C رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که فاصله‌ی L_1 با L_2 برابر ۵ و فاصله‌ی L_2 با L_3 برابر ۷ باشد. مطلوب است مساحت مربع.
الف) ۷۰ ب) $\sqrt{۳۵}$ ج) ۳۵ د) $\sqrt{۷۴}$ ه) ۷۴

۴. تعداد سه‌تاییهای مرتب (x, y, z) از اعداد صحیح که در معادلات $x + y^2 - z = 124$ و $x^2 + y - z = 100$ صدق می‌کنند عبارت است از:
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۵. مثلث ABC و دایره‌ی محاطی آن به شعاع r مفروض است. سه مماس EF، GH و KL را به‌ترتیب موازی BC، AC و AB رسم کرده‌ایم. اگر r_a، r_b و r_c به‌ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای AEF، BGH و CKL باشند، آنگاه کدام‌یک از روابط زیر همواره صحیح است؟
الف) $r - r_a < r_a + r_b$ ب) $r - r_a > r_b + r_c$
ج) $r - r_a = r_b + r_c$ د) $r - r_a = r_b - r_c$
ه) هیچ‌کدام از این روابط همواره برقرار نیست.



۶. در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم روی خطوط رسم شده از A به B برویم به‌طوری‌که کوتاهترین مسیر ممکن را پیموده باشیم؟
الف) ۱۸ ب) ۳۴ ج) ۲۶ د) ۲۸ ه) ۳۲



۷. عدد طبیعی b را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی a به‌دست می‌آید مقلوب a می‌نامیم (مثلاً مقلوب ۱۳۷۵ عدد ۵۷۳۱ است). مطلوب است تعداد اعداد بین ۱ تا ۹۹۹۹۹، که مقلوبشان با خودشان برابر است.
الف) ۱۰۹۸ ب) ۱۲۲۰ ج) ۹۷۶ د) ۱۵۴۲ ه) ۱۰۰۸

۸. فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a \neq ۰$. اگر a و $۴a + ۳b + ۲c$ دارای یک علامت باشند، کدام‌یک از نتیجه‌گیریهای زیر برای معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ درست است؟
الف) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(۱, ۴)$ قرار گیرند.
ب) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(۱, ۲)$ قرار گیرند.
ج) معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است.
د) دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامتهای متفاوتی هستند.
ه) هر دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامت یکسانی هستند.

۹. دنباله‌های $a_n = \sqrt{۱۲۳ + n^۲}$ و $b_n = n + ۳$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ داده شده‌اند. فرض کنید که r کوچکترین عدد صحیحی باشد که $a_r < b_r$ و s نیز بزرگترین عدد صحیحی باشد که $a_s > b_s + ۱$. در این‌صورت $r + s$ برابر است با:
الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ ه) ۳۸

۱۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ مفروض است. نیمساز زاویه‌ی B ضلع AC را در D قطع می‌کند و داریم $BC = BD + AD$. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر است با:
الف) ۱۰۰° ب) ۱۰۸° ج) ۱۱۰° د) ۱۱۵° ه) ۱۲۰°

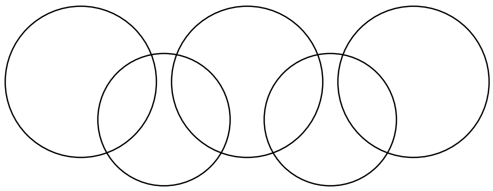
۱۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ میانه‌ی BM عمود بر نیمساز CDاست. در این‌صورت $\sin C$ برابر با کدام‌یک از مقادیر زیر است؟
الف) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ د) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ه) $\frac{۱}{۴}$

۱۲. فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح و مثبت باشند به‌طوری‌که $a < ۲b$ و باقیمانده‌ی تقسیم a بر b برابر $۲r$، باقیمانده‌ی تقسیم a بر c برابر r، و باقیمانده‌ی تقسیم b بر c نیز برابر r است. در این‌صورت کوچکترین عدد از میان اعداد زیر که بر c بخش‌پذیر باشد کدام است؟
الف) $(a+b)$ ب) $\frac{(a+b)}{۲}$ ج) $\frac{(a+b)}{۳}$ د) $۲(a+b)$ ه) $۳(a+b)$

۱۳. ۵ دایره مطابق شکل، ۹ ناحیه (متناهی) در صفحه به‌وجود آورده‌اند. اعداد از ۱ تا ۹ را به این نواحی طوری نسبت می‌دهیم که مجموع اعداد هر دایره با مجموع اعداد دایره‌های دیگر مساوی باشد. بیشترین مقداری که

این مقدار مساوی می‌تواند داشته باشد، عبارت است از:

الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۱۴ د) ۱۵ ه) ۱۶



۱۴. اگر $S = \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(100^3+1)}$ کدام‌یک از مقادیر زیر به S نزدیکتر است؟

الف) ۰٫۶ ب) ۰٫۶۷ ج) ۰٫۶۶۷ د) ۰٫۶۶۶۷ ه) ۰٫۶۶۶۶۷

۱۵. به‌ازای کدام مقدار n معادله‌ی $\frac{1}{n} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای جواب منحصربه‌فردی است؟

الف) ۱۰۲۴ ب) ۲۱۱۹ ج) ۲۲۱۹ د) ۲۶۵۱ ه) هیچکدام

۱۶. یک صفحه‌ی شطرنجی 25×25 را درنظر گرفته اعداد ۱ تا 25^2 را به ترتیبِ زیر در خانه‌های آن قرار می‌دهیم. اعداد ۱، ۲، ... و ۲۵ را از چپ به راست در سطر اول، ۲۶، ۲۷، ... و ۵۰ را از چپ به راست در سطر دوم، و بقیه را به همین ترتیب در سطرهای بعدی مربع قرار می‌دهیم. حال اگر ۲۵ خانه را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند در آن صورت مجموع اعداد این خانه‌ها چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد؟

الف) فقط می‌تواند برابر $\binom{25}{2}$ باشد.

ب) هر مقدار بین $\binom{25}{2}$ و $\binom{25}{3}$ می‌تواند باشد.

ج) فقط می‌تواند $\frac{1}{2}(25^3+25)$ باشد.

د) هر مقدار بین $\binom{25}{2}$ و $\frac{1}{2}(25^3+25)$ می‌تواند باشد.

ه) هر مقدار بین 25^2 و $\frac{1}{2}(25^3+25^2)$ می‌تواند باشد.

۱۷. چندجمله‌ای $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$، که a_iها اعداد صحیح هستند، مفروض است. اگر داشته باشیم $P(1) = P(2) = 0$، در آن صورت دقیق‌ترین حکمی که در مورد ضرایب P می‌توان بیان کرد کدام است؟

الف) ضریب جمله‌ی ثابت (یعنی a_0) کوچکتر یا مساوی ۲ است.

ب) اختلاف بین تعداد ضرایب مثبت و ضرایب منفی حداکثر یک است.

ج) مجموع ضرایب توانهای فرد قرینه‌ی مجموع ضرایب توانهای زوج است.

د) حداقل یک ضریب کوچکتر یا مساوی -2 وجود دارد.

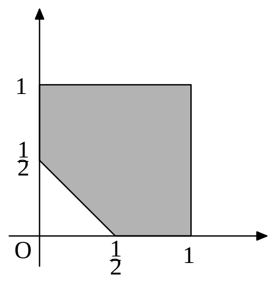
ه) هیچ‌کدام از حکمهای بالا در مورد تمامی $P(x)$ها صدق نمی‌کنند.

۱۸. مربع $S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ را درنظر بگیرید و به‌ازای هر $t \in [0,1]$، C_t را مجموعه‌ی نقاطی از S درنظر بگیرید که بالای خط واصل بین نقاط $(0, 1-t)$ و $(t, 0)$ هستند ($C_{\frac{1}{2}}$ در شکل نشان داده شده است). اگر A اشتراک تمام C_tها، $0 \le t \le 1$، باشد یعنی $A = \{x \mid x \in C_t, \forall t \in [0,1]\}$. در آن صورت A برابر کدام‌یک از مجموعه‌های زیر است؟

الف) $S \cap \{(x,y) \mid x+y \ge 1\}$ ب) $S \cap \{(x,y) \mid x+\sqrt{y} \ge 1\}$

ج) $S \cap \{(x,y) \mid \sqrt{x}+y \ge 1\}$ د) $S \cap \{(x,y) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \ge 1\}$

ه) $S \cap \{(x,y) \mid \sqrt{x+y} \ge 1\}$



۱۹. فرض کنید که P_1، P_2، ... و P_{10} ده عدد طبیعی زوج و متمایز باشند. برای هر دنباله‌ی دلخواه a_1، a_2، ... و a_{1375} که a_iها از اعداد P_1 تا P_{10} باشند کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

الف) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مربع کامل است.

ب) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مکعب کامل است.

ج)تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مربع کامل است.

د) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مکعب کامل است.

ه) الف و ب هر دو درست است.

۲۰. فرض کنید ۱۳۷۵ بزرگترین عدد صحیحی است که 2^{1375}، عدد طبیعی n را می‌شمارد. در آن صورت بزرگترین مقدار k به‌طوری‌که 2^k عدد $A = 1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^{4n-1}$ را بشمارد برابر است با:

الف) ۱۳۷۴ ب) ۱۳۷۵ ج) ۱۳۷۶ د) ۱۳۷۷ ه) ۱۳۷۸

۲۱. فرض کنید f و g دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و با درجه‌ی بزرگتر یا مساوی ۲ باشند. اگر داشته باشیم:

$$f(x^2) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) g\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

در این‌صورت از بین نتیجه‌گیریهای زیر، کدام‌یک دقیق‌تر است؟

الف) به‌ازای هر $n \geq 2$ چنین چندجمله‌ایهایی وجود دارند به‌طوری که f از درجه‌ی n است.

ب) چنین چندجمله‌ایهایی وجود ندارند.

ج) $f(x)$ ریشه‌ای در $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ دارد.

د) $g(x)$ ریشه‌ای در $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ دارد.

ه) $g(x)$ برای هر x بزرگتر از صفر است.

۲۲. در مثلث مفروض ABC، D را پای نیمساز رأس A، و E را قرینه‌ی D نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع BC می‌گیریم. حال اگر F را روی BC به قسمی انتخاب کنیم که $\angle BAF = \angle EAC$ در آن‌صورت $\frac{BF}{FC}$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{c}{b}$ ب) $\frac{c^2}{b^2}$ ج) $\frac{c^3}{b^3}$ د) $\frac{c}{c+b}$ ه) $\frac{c^2}{(b+c)^2}$

۲۳. در مثلث ABC نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاعهای مثلث است. اگر $AH = BC$، آنگاه زاویه‌ی A چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

الف) 30° و 45° ب) 60° و 75° ج) 60° د) 45° ه) 45° و 60°

۲۴. اگر $S=\{۱,۲,۳,\ldots,۹۹\}$، آنگاه بزرگترین زیرمجموعه‌ی آن با این خاصیت که هیچ عضو آن دو برابر دیگری نباشد چند عضو دارد؟

الف) ۵۵ ب) ۶۲ ج) ۶۶ د) ۷۱ ه) ۷۷

۲۵. در مورد تعداد دنباله‌های $n_۱$، $n_۲$، $n_۳$، $\ldots$ از اعداد طبیعی با این خاصیت که برای هر k داشته باشیم $n_{k+۱}>n_{n_k}$ چه می‌توان گفت؟

الف) بینهایت دنباله با این خاصیت وجود دارد.
ب) تعداد زوجی از این دنباله‌ها وجود دارد.
ج) دقیقاً ۵ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
د) دقیقاً ۳ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
ه) دقیقاً یک دنباله با این خاصیت وجود دارد.

۲۶. برای عدد طبیعی n، بسط n در مبنای ۲ را درنظر گرفته و $f(n)$ را برابر تعداد رقمهای صفر در آن درنظر می‌گیریم (به عنوان مثال $f(۴)=۲$ و $f(۶)=۱$). اگر فرض کنیم که $S=۲^{f(۱)}+۲^{f(۲)}+\cdots+۲^{f(۲۵۵)}$ آنگاه مقدار S برابر خواهد بود با:

الف) ۳۲۸۰ ب) ۱۰۹۰ ج) ۱۰۸۶ د) ۳۲۷۶ ه) ۶۵۶۰

۲۷. در حاصل‌ضرب $\prod_{۱\leq i<j\leq ۹}(x_i-x_j)$ ضریب جمله‌ی $x_۱^۴x_۲^۴\ldots x_۹^۴$ برابر است با:

الف) صفر ب) $\binom{۹}{۴}$ ج) $-\binom{۹}{۴}$ د) $۹\times\binom{۹}{۲}\times\binom{۹}{۳}$ ه) $-۹\times\binom{۹}{۲}\times\binom{۹}{۳}$

۲۸. تعداد زوجی بردار واحد از یک نقطه از صفحه رسم شده‌اند به‌طوری‌که یک در میان قرمز و آبی هستند. فرض کنید $\vec{R}$ مجموع بردارهای قرمز و $\vec{B}$ مجموع بردارهای آبی باشد. در این‌صورت دقیق‌ترین حکمی که می‌توان گفت چیست؟

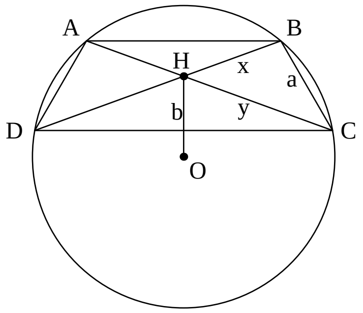
الف) $|\vec{R}-\vec{B}|\leq ۲$ ب) $|\vec{R}-\vec{B}|\leq ۱+\sqrt{۲}$
ج) $|\vec{R}-\vec{B}|\leq ۱+\sqrt{۳}$ د) $|\vec{R}-\vec{B}|\leq \frac{۲\pi}{۳}$
ه) $|\vec{R}-\vec{B}|\leq \pi-۱$

۲۹. ۲۵ نقطه به‌طور دلخواه روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند. مطلوب است حداقل تعداد کمانهای کوچکتر یا مساوی ۱۲۰° که توسط این نقاط درست می‌شود.

الف) ۱۰۰ ب) ۱۲۰ ج) ۱۳۲ د) ۱۴۴ ه) ۱۴۹

۳۰. در شکل زیر $ABCD$ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محاط در دایره‌ی واحد است. فرض کنید $x<y$. در این‌صورت $y-x$ برابر است با:

الف) $(ab)^۲$ ب) $a\sqrt{b}$ ج) ab د) $b\sqrt{a}$ ه) $\sqrt{ab}$



راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

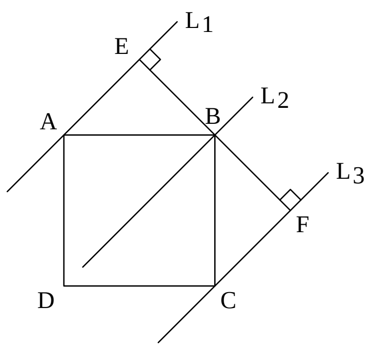
زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که $5^3 \times 11 = 1375$. چون بین اعداد زوج فقط مضربهای ۱۰ عامل ۵ دارند، پس بزرگترین عدد به‌کار رفته ۳۰ است.

۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.
چون $9x + 5y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس $2x + 6y$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است. پس $5(2x + 6y)$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است و بنابراین، $k \overset{11}{\equiv} 30$. پس $k = 8$.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
از B خطی عمود بر خطهای موازی رسم کنید تا L_1 را در E و L_3 را در F قطع کند.



در این‌صورت، مثلث AEB با مثلث BFC همنهشت است. پس $AE = BF = 5$. بنابراین،

$$AB^2 = AE^2 + BF^2 = 5^2 + 7^2 = 74$$

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
با کم کردن دو معادله از یکدیگر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 24 &= x + y^2 - x^2 - y \\ &= (y - x)(y + x - 1) \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $y-x$ زوج باشد، $(y+x-۱)$ فرد است و اگر $y-x$ فرد باشد، $(y+x-۱)$ زوج است. پس فقط حالتهای زیر امکان دارد:

$$\begin{cases} y-x=۱ \\ y+x-۱=۲۴ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y-x=۳ \\ y+x-۱=۸ \end{cases}$$

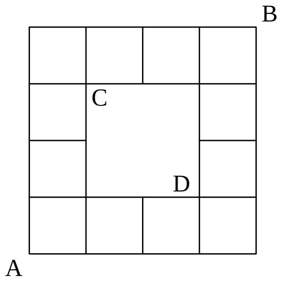
بنابراین، $(x,y,z)=(۱۲,۱۳,۵۷)$ یا $(x,y,z)=(۳,۶,-۸۵)$.

۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
به‌سادگی می‌توان دید که مثلثهای AEF ، BGH و CKL با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبتهای تشابه نیز اعداد $\frac{p-a}{p}$، $\frac{p-b}{p}$ و $\frac{p-c}{p}$ هستند. چون

$$\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}=۱$$

پس $r_a+r_b+r_c=r$ و از آنجا $r-r_a=r_b+r_c$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
برای رفتن از A به B اگر از C بگذریم تعداد راههای ممکن ۱۶ (۴×۴) است (از A به C چهار راه و از C به B نیز چهار راه).



به‌همین ترتیب، اگر از D نیز بگذریم ۱۶ راه وجود دارد. امّا دو مسیر نیز وجود دارند که از هیچ‌کدام از D و C نمی‌گذرند (روی مرز مربع بزرگتر). پس تعداد کل حالتها ۳۴ حالت است.

۷. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
n_k را تعداد عددهای k رقمی می‌گیریم که با مقلوب خود برابرند. برای اینکه n عددی k رقمی باشد که با مقلوب خود برابر است، رقم یکان آن نباید صفر باشد. اکنون توجه کنید که

اگر $k=۱$ آنگاه $n_۱=۹$

اگر $k=۲l+۱,\ l\geq ۱$ آنگاه $n_k=۹\times ۱۰^{l}$

اگر $k=۲l,\ l\geq ۱$ آنگاه $n_k=۹\times ۱۰^{l-۱}$

پس

$$n_۱+n_۲+n_۳+n_۴+n_۵=۹+۹+۹۰+۹۰+۹۰۰=۱۰۹۸$$

۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید معادله دو ریشه‌ی حقیقی مانند $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$
\begin{aligned}
۰ &\leq \frac{۴a+۳b+۲c}{a} \\
&= ۴+۳\frac{b}{a}+۲\frac{c}{a} \\
&= ۲x_۱x_۲-۳(x_۱+x_۲)+۴ \\
&= (x_۱-۱)(x_۲-۲)+(x_۱-۲)(x_۲-۱)
\end{aligned}
$$

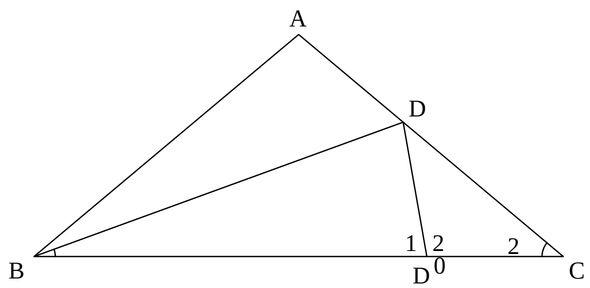
پس هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(۱,۲)$ باشند.

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
با حل نامعادله‌های $\sqrt{۱۲۳+r^۲} < r+۳$ و $\sqrt{۱۲۳+s^۲} > s+۴$ می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که $r=۲۰$ و $s=۱۳$. پس $r+s=۳۳$.

۱۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
چون BD نیمساز زاویه‌ی B است می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{DC}{AD}=\frac{BC}{AB}$$

اگر D' را روی BC چنان انتخاب کنیم که $BD=BD'$،



آنگاه $AD=D'C$ و رابطه‌ی بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{DC}{BC}=\frac{D'C}{AC}$$

و چون دو مثلث $DD'C$ و ABC در زاویه C نیز مشترک‌اند پس با هم متشابه‌اند. بنابراین، مثلث $DD'C$ متساوی‌الساقین است. پس، اگر زاویه‌ی C برابر ۲α باشد، چون $\angle DD'C$ زاویه‌ی خارجی مثلث $DD'C$ است نتیجه می‌شود $\angle DD'C=۴\alpha$. همچنین چون مثلث $BD'D$ متساوی‌الساقین است می‌توانیم بنویسیم

$$۱۸۰^\circ=\alpha+۴\alpha+۴\alpha=۹\alpha$$

و درنتیجه $\alpha=۲۰^\circ$. بنابراین،

$$\angle A=۱۸۰^\circ-۴\alpha=۱۰۰^\circ$$

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.
اگر نقطه‌ی تقاطع BM و CD را E بنامیم، روشن است که مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی EBC و EMC همنهشت‌اند. پس $BC = MC$ و درنتیجه، $AC = ۲BC$.
اگر $\angle C$ برابر با α باشد، $\angle A = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$ و بنابراین،

$$\sin A = ۲ \sin\alpha \cos\alpha$$

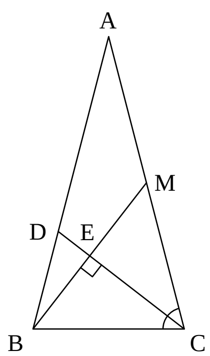
پس از قضیه سینوسها

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{BC}{AC}$$

نتیجه می‌شود،

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۱}{۲}$$

و بنابراین، $\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$ یا $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$.



۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که می‌توانیم بنویسیم

$$a = mc + r, \quad b = nc + r, \quad a = lb + ۲r$$

که m، n و l عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. چون $a < ۲b$، نتیجه می‌شود $l = ۰$ یا $l = ۱$.
اگر $l = ۰$، نتیجه می‌شود $a = ۲r$ و درنتیجه $mc = r$. اما $۰ \leq r < c$. پس $m = ۰$ بنابراین، $r = ۰$. پس $a = ۰$ که تناقض است. اگر $l = ۱$، نتیجه می‌شود $a = b + ۲r$ و درنتیجه، $b = a - ۲r$.
بنابراین،

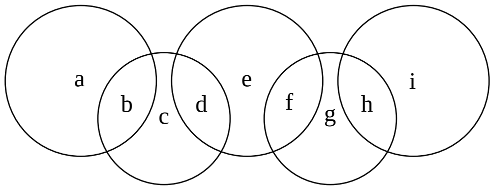
$$\frac{a+b}{۲} = \frac{a + a - ۲r}{۲} = a - r = mc$$

یعنی $\frac{a+b}{۲}$ بر c بخش‌پذیر است. اما $\frac{a+b}{۳}$ لزوماً بر c بخش‌پذیر نیست. در واقع از

$$\frac{a+b}{۳} = \frac{۲a - ۲r}{۳} = \frac{۲(a-r)}{۳} = \frac{۲mc}{۳}$$

نتیجه می‌شود که اگر $\frac{a+b}{۳}$ بر c بخش‌پذیر باشد، m باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. پس لزوماً $a \geq ۳c$ و $b \geq ۳c$. اما مثال $a = ۱۵$، $b = ۹$ و $c = ۶$ نشان می‌دهد که این روابط لزوماً برقرار نیستند.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض می‌کنیم اعداد مطابق شکل قرار داده شده باشند و مقدار مشترک را N می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$N = a + b = h + i$$

بنابراین،

$$۲N \leq ۶ + ۹ + ۷ + ۸ = ۲ \times ۳۰$$

و درنتیجه، $N \leq ۱۵$. امّا اگر $N = ۱۵$، آنگاه

$$\{a, b, h, i\} = \{۹, ۸, ۷, ۶\}$$

و درنتیجه با استفاده از دایره‌ی وسط،

$$N = d + e + f \leq ۵ + ۴ + ۳ = ۱۲$$

که تناقض است. پس $N \leq ۱۴$. مقادیر زیر نشان می‌دهد که $N = ۱۴$ ممکن است.

$$a = ۵,\ b = ۹,\ c = ۲,\ d = ۳,\ e = ۴,\ f = ۷,\ g = ۱,\ h = ۶,\ i = ۸$$

۱۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که

$$S = \frac{(۲-۱)\left(۲^۲+۲+۱\right)(۳-۱)\left(۳^۳+۳+۱\right)\cdots(۱۰۰-۱)\left(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱\right)}{(۲+۱)(۲^۲-۲+۲)(۳+۱)(۳^۳-۳+۱)\cdots(۱۰۰+۱)(۱۰۰^۲-۱۰۰+۱)}$$

اما چون

$$((n + ۲) - ۱) = n + ۱$$

و

$$(n + ۱)^۲ - (n + ۱) + ۱ = n^۲ + n + ۱$$

نتیجه می‌شود

$$S = \frac{(۲ - ۱)(۳ - ۱)(۱۰۰^۲ + ۱۰۰ + ۱)}{(۲^۲ - ۲ + ۱)(۹۹ + ۱)(۱۰۰ + ۱)} = \frac{۱۰۱۰۱}{۱۵۱۵۰} \simeq ۰/۶۶۶۷۳$$

۱۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
ثابت می‌کنیم معادله‌ی

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{n}$$

در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب منحصربه‌فرد دارد اگر و فقط اگر n عددی اول باشد. فرض کنید p عددی اول باشد. در این‌صورت معادله‌ی

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{p}$$

را می‌توانیم به‌صورت

$$x = \frac{yp}{y+p}$$

بنویسیم. در این‌صورت،

$$yp = x(y+p)$$

پس $x(y+p)$ عامل p دارد. اما اگر $x = kp$، آنگاه $y = k(y+p)$ که ناممکن است. پس $y+p = kp$. پس $y = p(k-۱)$. بنابراین،

$$x = \frac{p^۲(k-۱)}{pk} = \frac{p(k-۱)}{k}$$

اما چون $k > ۱$، نتیجه می‌شود $k = p$. بنابراین $y = p(p-۱)$ و $x = p-۱$ جواب منحصربه‌فرد معادله است.

از طرف دیگر، اگر $p > ۱$، $q > ۱$ و $n = pq$، آنگاه معادله دارای دو جواب متمایز

$$x = n-۱, \quad y = n(n-۱)$$

و

$$x = p(q-۱), \quad y = pq(q-۱)$$

است. توجه کنید هیچ‌کدام از اعداد داده شده اول نیست.

۱۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که اعداد $i + ۲۵j$ $(j = ۰, ۱, \dots, ۲۴)$ را در ستون i ام چیده‌ایم. حال اگر اعداد را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند، ۲۵ عدد به‌صورت $i + ۲۵j$ با i و jهای متمایز داریم. پس مجموع این عددها برابر است با

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۲۵ + (۰ \times ۲۵ + ۱ \times ۲۵ + \cdots + ۲۴ \times ۲۵)$$

که عبارت فوق برابر است با

$$\frac{۲۵(۲۵+۱)}{۲} + ۲۵ \times \frac{۲۴(۲۴+۱)}{۲} = \frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)$$

۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.
روشن است که $P(x)$ بر $x - ۲$ بخش‌پذیر است. فرض کنید

$$h(x) = \frac{P(x)}{x-۲} = b_{n-۱}x^{n-۱} + b_{n-۲}x^{n-۲} + \cdots + b_۰$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که اگر $۰ \leq k \leq n$، آنگاه

$$b_k - ۲b_{k+۱} = a_{k+۱}$$

و $a_0 = -2b_0$. توجه کنید که $h(1) = -P(1) = 0$. پس

$$b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_0 = 0$$

همه‌ی ضرایب b_i نمی‌توانند هم‌علامت باشند. پس دست‌کم یکی از این ضرایب بزرگتر از یا مساوی با ۱ است. اگر $b_0 \geq 1$، آنگاه $a_0 \leq -2$. اگر $b_0 < 1$، فرض کنید k کوچکترین عدد طبیعی باشد که $b_k \geq 1$،

$$b_j \leq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1$$

در این‌صورت،

$$a_k = b_{k-1} - 2k_k \leq -2$$

پس دست‌کم یکی از ضرایب $P(x)$ کوچکتر از یا مساوی با -2 است.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که اگر $t = 0$ و $t = 1$، آنگاه از $(x, y) \in C_t$ نتیجه می‌شود،

$$yt + (1-t)x \geq (1-t)t, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

و درنتیجه،

$$y \geq \frac{t-1}{t}x + 1 - t = 1 + x - \frac{x}{t} - t$$

توجه کنید که در مجموعه‌ی S، به‌ازای $t \in (0, 1)$،

$$\frac{x}{t} + t \leq 2\sqrt{x}$$

بنابراین،

$$y \geq 1 + x - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2$$

و درنتیجه، $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1$. چون $C_0 = C_1 = S$، نتیجه می‌شود

$$A \subseteq S \cap \{(x, y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1\}$$

از طرف دیگر، به آسانی می‌توانید دید که

$$S \cap \{(x, y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1\} \subseteq A$$

درنتیجه

$$S \cap \{(x, y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1\} = A$$

۱۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
بردار $x_j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_{10}^j\right)$ را به‌ازای $1 \leq j \leq 1375$ چنین تعریف می‌کنیم: اگر توان P_i در حاصل‌ضرب $a_1 a_2 \ldots a_j$ برابر r باشد و $r \overset{2}{\equiv} s$ که $s \in \{0, 1\}$، قرار می‌دهیم $\alpha_j^j = s$. روشن است که α_i^j ($1 \leq i \leq 10$، $1 \leq j \leq 1375$) یا ۰ است یا ۱.

پس تعداد بردارهای x_j متمایز حداکثر 2^{10}، یعنی ۱۰۲۴ است. پس بین x_1، x_2، ...، x_{1375} دست‌کم دو بردار مانند x_l و x_k $(k < l)$ برابرند. پس به‌ازای $1 \leq i \leq 10$، اگر تعداد P_i بین a_1، a_2، ...، a_l زوج باشد تعداد P_i ها بین a_1، a_2، ...، a_k و بنابراین a_{k+1}، a_{k+2}، ...، a_l نیز زوج است. اگر تعداد P_i ها بین a_1، a_2، ...، a_l فرد باشد، تعداد P_i بین a_1، a_2، ...، a_k نیز فرد و بنابراین بین a_{k+1}، a_{k+2}، ...، a_l زوج است. پس $a_{k+1} a_{k+1} \ldots a_l$ مربع کامل است.

۲۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید $O(n)$ نشان‌دهنده‌ی بزرگترین عدد صحیح k باشد که $۲^k|n$. توجه کنید که

$$A = \frac{۹^{۴n} - ۱}{۸}$$

و همچنین،

$$۹^{۲^{t+۱}\cdot s} - ۱ = \left(۹^{۲^t\cdot s} - ۱\right)\left(۹^{۲^{t\cdots}} + ۱\right)$$

چون $۹^{۲^t\cdot s} + ۱$ عددی به‌صورت $۴k + ۲$ است، نتیجه می‌شود

$$O\left(۹^{۲^{t+۱}\cdot s} - ۱\right) = O\left(۹^{۲^t\cdot s} - ۱\right) + ۱$$

حال اگر s عدد فردی باشد،

$$O\left(۹^s - ۱\right) = ۳$$

و بنابراین،

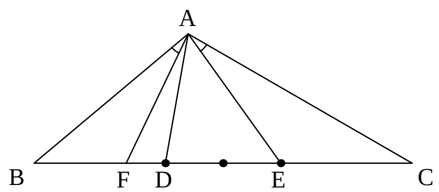
$$O\left(\frac{۹^{۲^{۱۳۷۵+۲}\cdot s} - ۱}{۸}\right) = ۱۳۷۷$$

۲۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
دقت کنید که برای هر عدد حقیقی x داریم،

$$x^۲ - \left(x - \frac{۱}{۲}\right) = \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۴}$$

پس $x^۲ > x - \frac{۱}{۲}$ و با توجه به این که اگر $f\left(x - \frac{۱}{۲}\right) = ۰$، آنگاه $f\left(x^۲\right) = ۰$ نتیجه می‌شود که اگر f یک ریشه داشته باشد بینهایت ریشه برای آن پیدا می‌شود. بنابراین f ریشه ندارد و درنتیجه، $g(x)$ همواره مثبت است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $\angle BAF = \alpha$.



در مثلث ABF می‌توانیم بنویسیم،

$$\frac{BF}{AF} = \frac{\sin\alpha}{\sin B}$$

در مثلث AEC می‌توانیم بنویسیم،

$$\frac{EC}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin C}$$

پس

$$\frac{BF}{EC}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{c}{b} \qquad (۱)$$

همچنین، در مثلث ABE نیز به‌طور مشابه داریم،

$$\frac{BE}{AE}=\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin B}$$

و در مثلث ACF می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{FC}{AF}=\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin C}$$

پس

$$\frac{BE}{FC}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{c}{b} \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{BE}{EC}=\frac{c^۲}{b^۲}$$

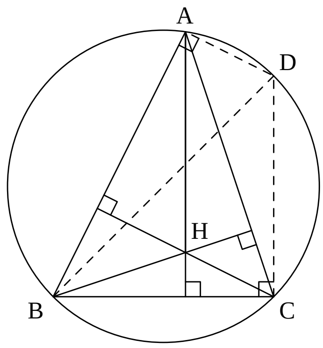
اما چون $BD=EC$ و $BE=CD$، خواهیم داشت،

$$\frac{BE}{EC}=\frac{CD}{BD}=\frac{b}{c}$$

و بنابراین،

$$\frac{BF}{FC}=\frac{c^۳}{b^۳}$$

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.
در نقطه‌ی C خطی بر BC عمود می‌کنیم تا دایره‌ی محیطی مثلث را در D قطع کند.



روشن است که BD قطر دایره است و بنابراین، $\angle BAD=۹۰^\circ$.

پس، $CH\|DA$ و $CD\|AH$. یعنی چهار ضلعی $AHCD$ متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه، $AH=CD$ همچنین، $BC=AH$ و بنابراین، در مثلث BCD زاویه‌ی BDC برابر ۴۵° است. چون $\angle BAC=\angle BDC$، نتیجه می‌گیریم که زاویه‌ی BDC برابر ۴۵°.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰۰ را درنظر بگیرید. به‌ازای هر یک از این عددها مانند j، حداکثر یکی از دو عدد j و $۲j$ می‌توانند در مجموعه‌ی مورد نظر قرار داشته باشند، پس از دو زیرمجموعه‌ی

$$\{۱, ۳, ۵, \ldots, ۹۹\}, \quad \{۲, ۴, ۶, \ldots, ۹۸\}$$

حداکثر $\left[\frac{۹۹}{۲}\right]$ عدد در مجموعه‌ی مورد نظر قرار دارند. به‌همین ترتیب از دو مجموعه‌ی مضارب ۴ و مضارب ۸ عددهای فرد، یعنی

$$\{۴, ۱۲, ۲۰, ۲۸, \ldots, ۹۲\}, \quad \{۸, ۲۴, ۴۰, \ldots, ۸۸\}$$

حداکثر $\left[\frac{۹۹}{۸}\right]$ عدد در مجموعه‌ی مورد نظر قرار دارند. با ادامه‌ی این استدلال نتیجه می‌شود که حداکثر تعداد عضوهای مجموعه‌ی مورد نظر برابر است با

$$\left[\frac{۹۹}{۲}\right] + \left[\frac{۹۹}{۸}\right] \left[\frac{۹۹}{۳۲}\right] + \left[\frac{۹۹}{۶۴}\right] = ۶۶$$

۲۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
نشان می‌دهیم هر دنباله‌ای با خاصیت بیان شده اکیداً صعودی است. در این‌صورت روشن است که $n_k \geq k$ و از رابطه‌ی $n_{k+۱} > n_{n_k}$ نتیجه می‌شود که $k + ۱ > n_k$. درنتیجه، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $n_k = k$. برای اثبات اینکه $\{n_k\}$ دنباله‌ای صعودی است توجه می‌کنیم که $n_۱$ از همه‌ی اعضای دنباله اکیداً کوچکتر است زیرا اگر عضو مینیمم دنباله α باشد و به‌ازای $k > ۱$ داشته باشیم $n_k = \alpha$، آنگاه $\alpha > n_{n_{k-۱}}$ که تناقض است. حال اگر $n_۱$ را از دنباله حذف کنیم و دنباله‌ی جدید

$$n_۲, n_۳, \ldots$$

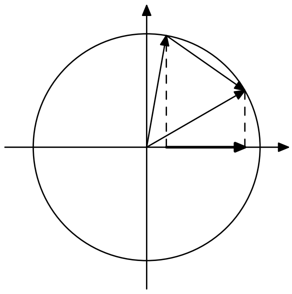
را درنظر بگیریم این دنباله نیز این خاصیت را دارد. بنابراین $n_۲$ کوچکترین عضو آن است. به این ترتیب نتیجه می‌شود که $\{n_k\}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی است.

۲۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned} S &= \textstyle\sum_{t=۰}^{۷} ۲^t \sum_{i=۱}^{۸} \binom{i-۱}{t} \\ &= \textstyle\sum_{t=۰}^{۷} \sum_{i=۱}^{۸} ۲^t \binom{i-۱}{t} \\ &= \textstyle\sum_{i=۱}^{۸} \sum_{t=۰}^{۷} ۲^t \binom{i-۱}{t} \\ &= \textstyle\sum_{i=۱}^{۸} ۳^{i-۱} \\ &= \frac{۳^۸-۱}{۲} \\ &= ۳۲۸۰ \end{aligned}$$

۲۷. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر جایگشتی که جای x_i و x_j را عوض می‌کند روی $\{x_i\}$ عمل کند $\prod_{۱\leq i<j\leq ۹} (x_i - x_j)$ قرینه می‌شود. اما اثر این جایگشت روی جملات بسط حاصل‌ضرب، جمله‌ی $x_۱^۴ + x_۲^۴ + \cdots + x_۹^۴$ را ثابت نگاه می‌دارد. پس ضریب این جمله جمله‌ی صفر است. (در واقع همین استدلال نشان می‌دهد که درجمله‌های با ضریب ناصفر، هیچ دو توانی برابر نیستند).

۲۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر بردارها را یک‌درمیان (مطابق شکل) از هم کم کنیم $|\vec{R}-\vec{B}|$ برابر مجموع بردارهای به‌دست آمده خواهد بود. امّا این بردارها پشت سر هم و مجزا هستند لذا مجموع آنها در واقع نقطه‌ای از دایره را به نقطه‌ای در درون یا روی دایره انتقال می‌دهد پس طول بردار $\vec{R}-\vec{B}$ کمتر از یا مساوی با قطر دایره، یعنی ۲ است.



۲۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید x نقطه‌ای باشد که کمترین تعداد نقاط در فاصله‌ی کمتر یا مساوی ۱۲۰° از آن قرار دارند (مثلاً k نقطه). هر کدام از این k نقطه خود k نقطه‌ی دیگر در فاصله‌ی کمتر یا مساوی ۱۲۰° دارند. همچنین، هر دو نقطه از $۲۴-k$ نقطه‌ی دیگر نیز در فاصله‌ای کمتر از ۱۲۰° از هم قرار دارند. پس تعداد کمانهای کمتر یا مساوی ۱۲۰° حداقل برابر است با

$$\binom{k+۱}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}=\frac{k^۲}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}+k$$

که کمترین مقدار آن به‌ازای $k=۱۲$ یا $k=۱۳$ برابر ۱۴۴ است. (۱۲ نقطه نزدیک یک قطب و ۱۳ نقطه نزدیک قطب دیگر، ۱۴۴ را به‌دست می‌دهند.)

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که

$$\angle BHC=\frac{\angle BC+\angle AD}{۲}=\angle BC$$

و چون $\angle BOC=\widehat{BC}$ پس $OHBC$ محاطی است و با استفاده از قضیه بطلمیوس داریم $y-x=ab$.