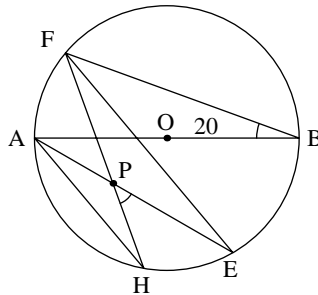


آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

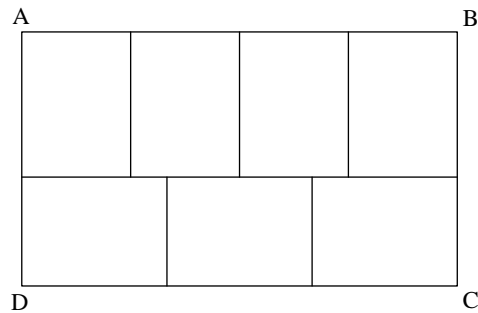
۱. در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $\angle FBA = 20^\circ$ ، در این صورت زاویه‌ی HPE برابر است با:
- (الف) 20° (ب) 25° (ج) 30° (د) 35° (ه) 40°



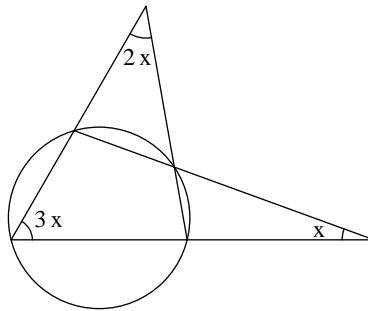
۲. باقیمانده‌ی تقسیم $5^{22} + 7$ بر ۸ برابر است با:
- (الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴
۳. اگر $r^2 - r - 1 = 0$ ، آنگاه در مورد $(r - 4)(r + 2)(r + 1)$ کدام یک از جملات زیر درست است؟
- (الف) عددی صحیح است. (ب) مثبت و گنگ است.
(ج) منفی و گنگ است. (د) گویا اما غیر صحیح است.
(ه) غیر حقیقی است.

۴. مستطیل $ABCD$ مانند شکل به هفت مستطیل مساوی کوچکتر تقسیم شده است. اگر مساحت $ABCD$ برابر ۳۳۶ سانتیمتر مربع باشد، در آن صورت محیط $ABCD$ بر حسب سانتیمتر برابر کدام یک از اعداد زیر است؟
- (الف) ۷۶ (ب) ۸۶ (ج) ۹۶ (د) ۱۰۶ (ه) ۱۱۶

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



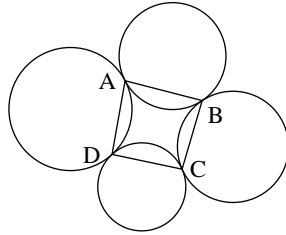
۵. در شکل زاویه‌ی x برابر است با:
- (الف) $x = 10^\circ$ (ب) $x = 15^\circ$ (ج) $x = 18^\circ$ (د) $x = 20^\circ$ (ه) $x = 25^\circ$



۶. در یک امتحان تستی با ۲۰ سؤال هر جواب صحیح ۷ نمره‌ی مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره‌ی منفی دارد (به سؤالی‌های بدون جواب هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد. اگر نمره‌ی دانش‌آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش‌آموز به چند سؤال جواب نداده است؟
- (الف) ۲ (ب) ۵ (ج) ۷ (د) ۹ (ه) ۱۳
۷. در یک چهارضلعی محدب کدام یک از نقاط زیر دارای این خاصیت است که مجموع فواصل آن از چهار رأس چهارضلعی حداقل مقدار ممکن را دارد؟
- (الف) مرکز ثقل چهارضلعی (ب) یکی از رأسهای چهارضلعی
 (ج) نقطه‌ای بیرون چهارضلعی (د) محل برخورد قطرهای چهارضلعی
 (ه) محل برخورد پاره‌خطهایی که اوساط اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کنند.
۸. کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که بتوان آن را هم به صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی (اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند).
- (الف) ۴۵ (ب) ۵۵ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۳۵ (ه) ۴۹۵
۹. به‌ازای کدام مقدار n ، معادله‌ی $n = x + y + xy$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب ندارد؟
- (الف) $n = 100$ (ب) $n = 105$ (ج) $n = 110$ (د) $n = 115$ (ه) $n = 120$

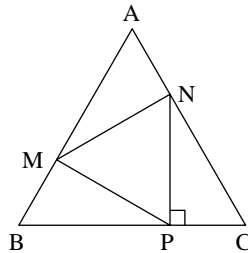
آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۰. چهار دایره‌ی C_1, C_2, C_3, C_4 و C_4 مطابق شکل در نقاط A, B, C, D بر هم مماس هستند. کدام یک از احکام زیر در مورد چهارضلعی $ABCD$ همواره درست است؟
 الف) $ABCD$ محیطی است. ب) $ABCD$ محاطی است.
 ج) $ABCD$ دوزنقه است. د) قطرهای $ABCD$ بر هم عمودند.
 ه) قطرهای $ABCD$ همدیگر را نصف می‌کنند.



۱۱. فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بوده و $\frac{F(k)}{G(k)}$ به‌ازای $k = 1, 2, 3, \dots$ عددی صحیح باشد. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟
 الف) $\frac{F(\frac{1}{n})}{G(\frac{1}{n})}$ به‌ازای هر عدد طبیعی n ، عددی صحیح است.
 ب) F بر G بخش پذیر است.
 ج) $\frac{F'(k)}{G'(k)}$ به‌ازای هر عدد صحیح k ، صحیح است.
 د) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(k)}{G(k)} = \infty$
 ه) درجه‌ی $G(x)$ صفر یا یک است.

۱۲. مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط شده است به طوری که $NP \perp BC$. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC برابر است با:
 الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ د) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ه) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



۱۳. اگر چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ بر $x^2 + tx + 1$ بخش پذیر باشد آنگاه، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) $a^2 - 2c \geq b$ ب) $a + c > 3$ ج) $a^2 - c \geq ab$ د) $a^2 + c^2 = ab$
 ه) $a^2 - c^2 = ab$

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۴. فرض کنید در مجموع زیر هر حرف انگلیسی نماینده‌ی عددی یک رقمی است:

$$\begin{array}{r} S \ U \ A \ V \ E \\ S \ A \ G \ E \\ + \ S \ A \ G \ E \\ \hline ۴ \ ۶ \ ۹ \ ۳ \ ۳ \end{array}$$

در این صورت U کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۱۵. چهاروجهی $ABCD$ داده شده است. چند صفحه می‌توان یافت که از چهار رأس این چهاروجهی به یک فاصله باشد؟

الف) یک صفحه ب) چهار صفحه ج) هفت صفحه
د) حداکثر شش صفحه ه) $\binom{4}{1} + \binom{4}{1}$ صفحه

۱۶. اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه‌ی

$$c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$

برقرار باشد، زاویه‌ی C برابر است با:

الف) دقیقاً 30° ب) دقیقاً 60° ج) دقیقاً 120°
د) 60° یا 120° ه) 30° یا 120°

۱۷. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که مجموع

$$1! + 2! + \dots + n!$$

مربع کامل باشد؟

الف) تعداد نامتناهی n ب) فقط برای دو مقدار n
ج) فقط برای سه مقدار n د) فقط برای چهار مقدار n
ه) فقط برای پنج مقدار n

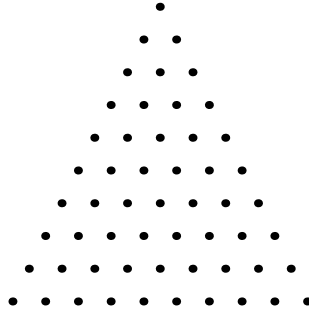
۱۸. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه [مانند M] را بیابید به طوری که دو چهارضلعی $AMCD$ و $ABCM$ دارای مساحت‌های یکسان باشند.

الف) یک پاره‌خط است. ب) کمائی از دایره است.
ج) خطی عمود بر BD است. د) خطی موازی AC است.
ه) خطی است که با یکی از اضلاع موازی است.

۱۹. در شکل، یک شبکه‌ی منظم مثلثی از نقاط شامل $\frac{10 \times 11}{2}$ نقطه را مشاهده می‌کنید به طوری که هر ضلع آن شامل ۱۰ نقطه است. حداقل تعداد خطوطی را بیابید که از تمام این نقاط می‌گذرند.

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. فرض کنید «ناحیه اول»، آن نقاطی از صفحه باشند که مختصات آنها مثبت‌اند. ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور x در نظر می‌گیریم و آنها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور y وصل می‌کنیم. از ۴۰۰ خط پدید آمده فرض کنید در ناحیه‌ی اول هیچ سه‌تایی از یک نقطه نگذرند. تعداد نقاط تقاطع این خطوط را در ناحیه‌ی اول بیابید.

- الف) ۷۹۸۰۰ (ب) ۴۰۰۰۰ (ج) ۳۶۱۰۰ (د) ۴۲۰۰۰ (ه) ۳۸۰۰۰

۲۱. فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, 16\}$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. سه‌تایی $\{a, b, c\}$ را «اولیه» گوئیم هرگاه هر دو عضو نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه‌تایی اولیه نباشد آنگاه ماکزیمم تعداد اعضای A برابر است با:

- الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۳

۲۲. اگر در مثلث ABC داشته باشیم

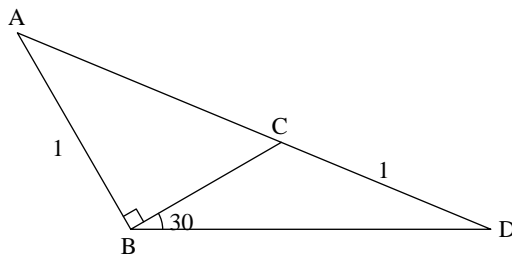
$$\angle B = 2\angle C \quad a = \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

آنگاه λ در کدام یک از فواصل زیر قرار می‌گیرد؟

- الف) $0 < \lambda \leq 1$ (ب) $\frac{1}{3} < \lambda \leq 1$ (ج) $0 < \lambda < \frac{2}{3}$ (د) $1 \leq \lambda < 2$ (ه) $\frac{1}{3} \leq \lambda < \frac{2}{3}$

۲۳. در شکل فرض کنید $AB = CD = 1$. در این صورت طول AC برابر است با:

- الف) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\sqrt[3]{3}$ (ه) $\sqrt[3]{2}$



۲۴. اگر رابطه‌ی

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^n + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)^n + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^n = 1$$

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

- برای $n = 1$ صحیح باشد، آنگاه
الف) برای تمام n ‌های زوج صحیح است.
ب) برای تمام n ‌های فرد صحیح است.
ج) برای $n = 3k$ صحیح است.
د) برای $n = 3k + 1$ صحیح است.
ه) برای $n = 3k + 2$ صحیح است.

۲۵. می‌دانیم بین اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰، چهار عدد طبیعی موجودند به طوری که هر یک با مجموع مکعبات رقم‌هایشان برابرند و سه تا از آنها عبارت‌اند از ۴۰۷، ۳۷۱ و ۱۵۳. عدد چهارم را دقیقاً به دست آورید و بگویید در کدام یک از فاصله‌های زیر قرار دارد.

- الف) $[300, 400]$ ب) $[400, 500]$ ج) $[500, 600]$
د) $[600, 700]$ ه) $[700, 800]$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned}\angle HPE &= \angle PAH + \angle PHA \\ &= \angle EFH + \angle PHA \\ &= \angle FHA + \angle PHA \\ &= 2\angle FHA \\ &= 2\angle FBA \\ &= 40^\circ\end{aligned}$$

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
چون $1 \stackrel{\Delta}{=} 5^2$ ، پس $1 \stackrel{\Delta}{=} 5^{22}$ و بنابراین، $7 + 5^{22}$ بر ۸ بخش پذیر است.

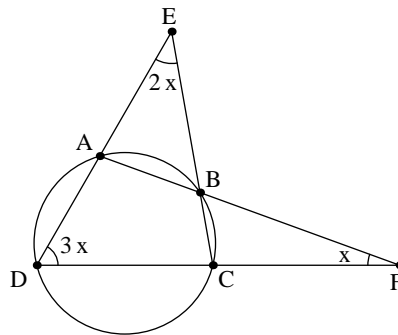
۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
با توجه به فرض،

$$\begin{aligned}(r+1)(r+2)(r-4) &= (r^2+3r+2)(r-4) \\ &= (r+10+3r+2)(r-4) \\ &= 4(r+3)(r-4) \\ &= 4(r^2-r-12) \\ &= 4(r+10-r-12) \\ &= -8\end{aligned}$$

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
طول مستطیل کوچک را با x و عرض آن را با y نشان دهید. در این صورت $3x = 4y$ ؛ اما چون مساحت مستطیل $ABCD$ برابر ۳۳۶ است، پس مساحت مستطیل کوچکتر برابر $48 = \frac{336}{7}$ است. پس $xy = 48$ ، یا $\frac{3}{4}y \cdot y = 48$. در نتیجه، $x = 6$ و $y = 8$ پس محیط مستطیل برابر ۷۶ خواهد بود.

۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



با توجه به شکل،

$$\begin{aligned}\angle ECD &= 180^\circ - \angle ECF = 180^\circ - 5x \\ \angle DAB &= 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - 4x \\ \angle ABC &= \angle BAE + \angle AEB = 6x\end{aligned}$$

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ مجموع زوایه‌های روبه‌رو برابر 180° است. پس،

$$180^\circ - 4x + 180^\circ - 5x = 6x + 3x$$

و در نتیجه، $x = 20^\circ$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر x تعداد جوابهای مثبت و y تعداد جوابهای منفی باشد، آنگاه $7x - 2y = 87$ و $x + y \leq 20$. توجه کنید که x و y صحیح و نامنفی‌اند. به‌سادگی می‌توان دید که $x = 13$ و $y = 2$ تنها جواب مسأله است پس دانش‌آموز با این شرایط، به ۵ سوال پاسخ نداده است.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

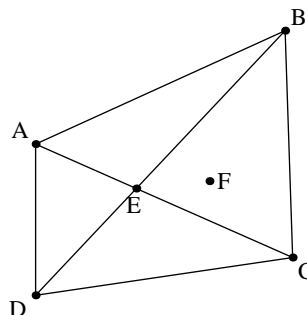
چهار ضلعی محدب $ABCD$ و نقطه‌ی F را در صفحه‌ی آن در نظر بگیرید. محل برخورد قطرهای چهارضلعی را E بنامید. در این صورت، روشن است که

$$FA + FC \geq AC, \quad FB + FD \geq BD$$

بنابراین،

$$FA + FB + FC + FD \geq AC + BD$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $F = E$.



راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید عدد مورد نظر هم برابر با

$$n + (n + 1) + \dots + (n + 8) = 9n + 36$$

و هم برابر با

$$m + (m + 1) + \dots + (m + 9) = 10m + 45$$

باشد n و m عددهای طبیعی‌اند. در این صورت،

$$9n + 36 = 10m + 45$$

یا

$$9n - 10m = 9$$

یا

$$10m = 9(n - 1)$$

پس $10 \mid 10m$ ، اما $9 \nmid 9$. پس m مضربی از ۹ است. پس عدد مطلوب برابر است با

$$10 \times 9 + 45 = 135$$

۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
از فرض نتیجه می‌شود که

$$n + 1 = (x + 1)(y + 1)$$

پس اگر $n + 1$ عددی اول نباشد، معادله جواب دارد. بین گزینه‌های داده شده فقط در گزینه‌ی (الف)، $n + 1 = 101$ عددی اول است.

۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
روشن است که،

$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= \frac{1}{4} (\widehat{AB} + \widehat{AD}) + \frac{1}{4} (\widehat{BC} + \widehat{CD}) \\ &= \frac{1}{4} (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}) \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{4} (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA})$$

پس،

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \implies \angle A + \angle C = 180^\circ$$

پس چهار ضلعی محاطی است.

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
چند جمله‌ایمانند $A(x)$ وجود دارد که

$$F(x) = G(x)A(x) + B(x), \quad \deg B < \deg G$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

فرض کنید $B(x)$ متحد با صفر نباشد. در این صورت،

$$\frac{F(x)}{G(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{G(x)}$$

چون درجه‌ی B از درجه‌ی G کمتر است، وقتی x به بینهایت میل می‌کند $\frac{B(x)}{G(x)}$ به صفر میل می‌کند. پس برای اعداد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ، این کسر عددی صحیح نمی‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان دهیم، به سادگی می‌توان ثابت کرد که مثلثهای NCP ، AMN و MBP متساوی‌اند و $NP = 2PC = \frac{1}{3}BC$.

$$\frac{[MPC]}{[ABC]} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

بنابراین،

$$[AMN] + [MBP] + [NPC] = \frac{6}{9} [ABC]$$

پس،

$$[MNP] = \frac{1}{3} [ABC]$$

۱۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

به روش معمول چندجمله‌ای، $ax^2 + bx + c$ را بر $x^2 + tx + 1$ تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$ax^2 + bx + c = (ax - at)(x^2 + tx + 1) + (at^2 + b - a)x + (at + c)$$

چون بنا بر فرض، $(at^2 + b - a)x + (at + c) = 0$ ، پس،

$$at^2 + b - a = 0, \quad at + c = 0$$

از رابطه‌ی دوم نتیجه می‌شود $t = \frac{-c}{a}$ و سپس از رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود

$$a \left(\frac{-c}{a} \right)^2 = a - b$$

و در نتیجه، $c^2 = a^2 - ab$.

۱۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید S یا ۳ است یا ۴. اگر $S = 4$ ،

$$U + S + S = U + 8$$

و چون رقم یکان این مجموع ۶ است، $U = 8$ که به تناقض $S = 3$ منجر می‌شود. پس $S = 3$ در این صورت،

$$U + S + S = U + 6$$

پس U فقط می‌تواند ۸ یا ۹ باشد تا «نقلی» حاصل از موضع صدگان برابر با ۱۰ شود و ۸ بین گزینه‌ها نیست.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به آسانی می‌توانید ثابت کنید که فقط دو دسته صفحه با شرایط مطلوب وجود دارند:

الف) سه رأس در یک طرف و یک رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر سه رأسی از چهار وجهی که انتخاب کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد. پس تعداد این صفحات برابر است با

$$\binom{4}{3} = 4$$

ب) دو رأس در یک طرف و دو رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر دو رأسی از چهار وجهی که انتخاب می‌کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد. پس تعداد این صفحه‌ها برابر است با

$$\frac{1}{2} \binom{4}{2} = 3$$

بنابراین تعداد کل صفحه‌هایی که از چهار رأس به یک فاصله‌اند $4 + 3 = 7$ است.

۱۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

توجه کنید که

$$\begin{aligned} c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 \\ &= (c^2 - (a^2 + b^2))^2 - (a^2 + b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 \\ &= (c^2 - (a^2 + b^2 - ab))(c^2 - (a^2 + b^2 + ab)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab \quad \text{یا} \quad c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

پس بنابر قضیه‌ی کسینوسها، $\cos C = \pm \frac{1}{2}$. بنابراین، $C = 60^\circ$ یا $C = 120^\circ$.

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

این عدد به‌ازای $n = 1$ و $n = 3$ مربع کامل است. و به‌ازای $n = 2$ و $n = 4$ مربع کامل نیست. به‌ازای $n \geq 5$ رقم یکان این عدد ۳ است و در نتیجه مربع کامل نیست.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

در اینجا باید مساحت را به‌عنوان مساحت جهت‌دار تعبیر کنیم و می‌دانیم که اگر σ مساحت جهت‌دار $PQRS$ را نشان دهد، آن‌گاه $\vec{PR} \times \vec{QS} = \sigma \vec{n}$ که بردار عمود بر صفحه است. پس \vec{M} دارای خاصیت مسأله است اگر و تنها اگر $\vec{AC} \times \vec{MD} = \vec{AC} \times \vec{BM}$ و یا معادلاً $\vec{AC} \times \vec{MN} = 0$ که N وسط پاره‌خط BD است. پس مکان M خطی به موازات AC است.

۱۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با ۱۰ خط به آسانی می‌توان همه‌ی نقطه‌ها را پوشاند. این کار با کمتر از ۱۰ خط ممکن نیست. توجه کنید که هر خط حداکثر ۱۰ نقطه را می‌پوشاند. وقتی یک خط رسم شود، هر خط دیگر حداکثر ۹ نقطه‌ی دیگر را می‌پوشاند و با استدلال مشابه دیده می‌شود که i خط حداکثر

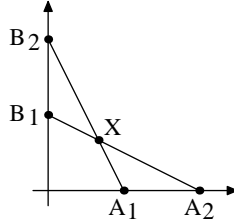
$$10 + 9 + \dots + (11 - i)$$

نقطه را می‌پوشاند. چون تعداد نقطه‌ها ۵۵ است، $i \geq 10$.

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با انتخاب دو نقطه روی محور x ها و دو نقطه روی محور y ها دقیقاً یک نقطه‌ی تقاطع به دست می‌آید.



با توجه به فرض مسأله، نقطه‌های تقاطع به دست آمده دوه‌دو متمایزند. پس مجموعاً $20^2 = 36100$ نقطه‌ی تقاطع به دست می‌آید.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

مجموعه‌ی $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$ دارای خاصیت مسأله است. هیچ مجموعه‌ی ۱۲ عضوی با خاصیت مورد نظر وجود ندارد. توجه کنید که در مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۶ هفت عدد غیر مرکب وجود دارد (شش عدد اول و عدد ۱). هر مجموعه‌ی ۱۲ عضوی باید شامل دست کم سه تا از این هفت عدد باشد بنابراین دارای سه عدد دوه‌دو نسبت به هم اول است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

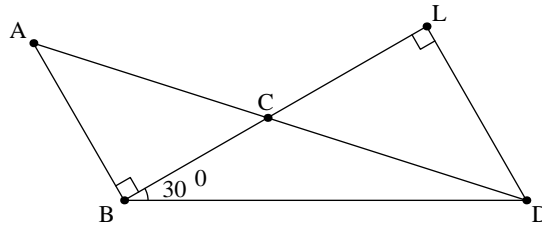
قرار دهید $x = \cos C$ در این صورت، چون $C < 90^\circ$ ، پس $0 < x < 1$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{a}{b} &= \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2C} = \frac{2 \sin C - 4 \sin^2 C}{2 \sin C \cos C} \\ &= \frac{2 - 4 \sin^2 C}{2 \cos C} = \frac{2 - 4(1 - x^2)}{2x} = \frac{4x^2 - 1}{2x} \\ &= 2x - \frac{1}{2x} < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

و در ضمن وقتی $x \rightarrow 1$ و یا $x \rightarrow 0$ ، مقدار λ به $\frac{2}{3}$ نزدیک می‌شود.

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

قرار می‌دهیم، $BD = x$. در شکل زیر دو مثلث ABC و CDL متشابه‌اند.



چون زاویه B برابر 30° است پس داریم $LD = \frac{x}{2}$ و در نتیجه $AC = \frac{x}{x}$. حال بنابر قانون کسینوسها در مثلث ABD داریم

$$1 + x^2 - 2x \cos 120^\circ = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

پس،

$$x^4 + x^3 = 4(x + 1)$$

$$AC = \frac{2}{x} = \sqrt[3]{2} \text{ و } x = \sqrt[3]{4}$$

۲۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر فرض،

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$$

پس

$$ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 - (a^3 + b^3 + c^3) = 2abc$$

و در نتیجه،

$$(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) = 0$$

پس یکی از سه حالت $a + b = c$ ، $a + c = b$ یا $b + c = a$ اتفاق می‌افتد. فرض کنید $a + b = c$. در این صورت از سه کسر فوق دو تا برابر ۱+ و یکی برابر ۱- خواهد شد. پس برای تمام n های فرد تساوی برقرار است.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

توجه کنید که $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$. پس

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

بنابراین، عدد دیگر ۳۷۰ است و در بازه‌ی $[300, 400]$ قرار دارد.