

آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. اگر تفاضل مکعبات دو عدد صحیح و متوالی، توان دوم یک عدد باشد، نشان دهید این عدد برابر حاصلجمع توان دوم دو عدد صحیح و متوالی است.

۲. نقطه P را درون مثلث ABC اختیار می‌کنیم، خطوط راست BP و CP اضلاع روبرو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحتها و هم محیطهای دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند، آنگاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویه A قرار دارد.

۳. تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که برای هر $c \in \mathbb{R}$ معادله $f(x) = c$ دقیقاً سه جواب داشته باشد.

۴. ثابت کنید معادله $3x^2 + 1 = 4y^3$ در اعداد گویا فقط دارای جوابهای $x = \pm 1$ و $y = 1$ است.

۵. مثلث ABC و دایره محیطی آن را در نظر می‌گیریم. از نقاط A, B و C خطوط دلخواهی رسم می‌کنیم تا اضلاع و کمانهای روبرو را به ترتیب در M و M' و N ، N' و P و P' قطع کنند. ثابت کنید اگر حاصل عبارت

$$T = \frac{AM'}{MM'} + \frac{BN}{NN'} + \frac{CP'}{PP'}$$

مینیمم شود، آنگاه سه خط مزبور هم‌رسند. سپس نشان دهید $T \geq 12$.

۶. فرض کنید خانواده $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ که از n مجموعه متمایز ناتهی تشکیل شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از \mathcal{A} دوباره عضوی از \mathcal{A} باشد. اگر

$$|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_n|$$

که $|A_i|$ تعداد اعضای مجموعه A_i است؛ و $|A_1| \leq 2$ ، نشان دهید عضوی مانند x وجود دارد که عضو حداقل $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ تا از این مجموعه‌ها است. ($\lceil a \rceil$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a).

راه حل آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. برای $n \in \mathbb{Z}$ فرض کنید $n^3 - (n+1)^3 = k^2$. در نتیجه k عددی فرد است ($k = 2m+1$)، ولی داریم

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1 = k^2 \\ 4(3n^2 + 3n + 1) - 1 &= 3(4n^2 + 4n + 1) = 3(2n+1)^2 \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$4(3n^2 + 3n + 1) - 1 = 4(2m+1)^2 - 1 = (4m+1)(4m+3)$$

$4m+3$ و $4m+1$ نسبت به هم اولند، پس یکی از آنها مربع کامل است ولی $4m+3$ هیچ‌گاه مربع کامل نیست، پس $4m+1 = (2t+1)^2$. یعنی $4m+1 = t^2 + (t+1)^2$.

۲. فرض کنیم دو مثلث PB_1C و PCB_1 دو مثلی باشند که دارای مساحتها و محیطهای مساوی هستند، یعنی $S = S'$ و $2p = 2p'$. می‌دانیم که

$$\left. \begin{aligned} S &= pr \\ S' &= p'r' \end{aligned} \right\} \implies pr = p'r' \implies r = r'$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه PMI و PNJ برابرند در نتیجه $PM = PN$ است.

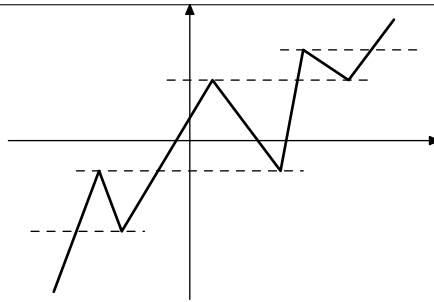
ولی $PM = p - BC_1$ و $PN = p' - CB_1$ و یا $p - BC_1 = p' - CB_1$ و یا $BC_1 = CB_1$. از طرف دیگر

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BC_1 \cdot h \\ S' &= \frac{1}{2} CB_1 \cdot h' \end{aligned} \right\} \implies h = h'$$

یعنی نقطه P از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است. یعنی P روی نیمساز $\angle A$ واقع است.

۳. بدیهی است که باید خط $y = c$ نمودار تابع $y = f(x)$ را دقیقاً در سه نقطه قطع کند.

راه حل آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد ریاضی



به همین ترتیب $y = f(x)$ را می‌توان از هر دو طرف ادامه داد.

۴. با تبدیل $u = \frac{x-1}{3}$ نتیجه می‌شود

$$u^2 + u + 1 = 3y^3 \implies (2+u)^3 + (1-u)^3 = (3y)^3$$

که آخرین قضیه فرما در حالت $n = 3$ است و فقط جوابهای بدیهی $u = 1$ و $u = -2$ وجود دارد. پس

$$\left. \begin{array}{l} u = 1 \\ u = -2 \end{array} \right\} \implies x = \pm 1, y = 1$$

۵. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$T = \frac{AM}{MM'} + \frac{BN}{NN'} + \frac{CP}{PP'} + 3$$

پس T مینیمم است هرگاه

$$\frac{AM}{MM'} + \frac{BN}{NN'} + \frac{CP}{PP'}$$

مینیمم شود. حال اگر Q پای عمود از M' به BC ، M'' وسط کمان BC ، Q' پای عمود از M'' به BC و H پای ارتفاع وارد از A به BC باشد، داریم

$$\frac{AM}{MM'} = \frac{AH}{M'Q} \geq \frac{AH}{M''Q'} = \frac{AD}{DM''}$$

پس نتیجه می‌گیریم که T وقتی مینیمم است که خطوط فوق‌الذکر نیمسازهای مثلث باشند. اما وقتی این خطوط نیمسازها باشند (یعنی در واقع از اینجا به بعد M پای نیمساز است)، داریم

$$\frac{AM}{MM'} = \frac{AM^2}{MM' \times AM} = \frac{AM^2}{BM \times MC} = \frac{AM^2 (b+c)^2}{a^2 bc}$$

و می‌دانیم

$$AM^2 = bc - BM \times MC = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{AM}{MM'} = \left(\frac{b+c}{a} \right)^2 - 1$$

راه حل آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد ریاضی

به همین ترتیب

$$\frac{BN}{NN'} = \left(\frac{a+c}{b}\right)^2 - 1 \quad \text{و} \quad \frac{CP}{PP'} = \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 1$$

پس

$$\begin{aligned} T &= \frac{(b+c)^2}{a^2} + \frac{(a+c)^2}{b^2} + \frac{(a+b)^2}{c^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}{a^2b^2c^2}} \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{4ab \times 4ac \times 4bc}{a^2b^2c^2}} = 12 \end{aligned}$$

۶. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $|A_1| = 1$. فرض کنید $A_1 = \{a\}$ ، تمام مجموعه‌هایی را که شامل عضو a هستند، با S_a و بقیه را با S'_a نشان می‌دهیم. نشان خواهیم داد که $|S_a| > |S'_a|$. به ازای هر $A_i \in S'_a$ می‌توان یک مجموعه S_a پیدا کرد $(A_i \cup \{a\})$ و غیر از آنها، A_1 نیز در S_a است.
ب) $|A_1| = 2$. فرض کنید $A = \{a, b\}$ و

مجموعه‌هایی که شامل b و a هستند S_{ab}

مجموعه‌هایی که فقط شامل a هستند S_a

مجموعه‌هایی که فقط شامل b هستند S_b

مجموعه‌هایی که شامل هیچ‌یک از a و b نیستند S'_{ab}

به هر $A_i \in S'_{ab}$ مجموعه $A_i \cup \{a, b\}$ در S_{ab} را متناظر می‌کنیم، پس

$$|S_{ab}| \geq |S'_{ab}|$$

پس اگر مثلاً $|S_a| \geq |S_b|$ باشد آنگاه

$$|S_{ab}| + |S_a| \geq |S_b| + |S'_{ab}|$$

در نتیجه تعداد آنهایی که شامل a هستند یعنی $|S_{ab}| + |S_a|$ بزرگتر یا مساوی نصف تعداد کل است.