آزمون مرحله‌ی اول دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

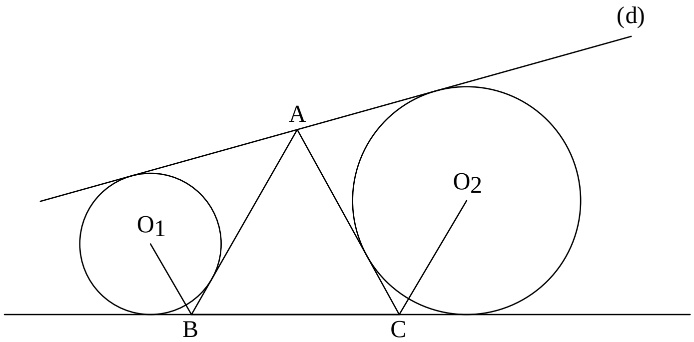
زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. همهٔ جوابهای درست معادلهٔ $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}=\frac{3}{4}$ را به‌دست آورید.

۲. اگر X یک مجموعهٔ n عضوی باشد آنگاه ثابت کنید تعداد زوجهای (A,B) که A و B زیرمجموعه‌های X هستند و $A \subsetneq B$، برابر است با $3^n - 2^n$.

۳. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. از نقطهٔ A در بیرون مثلث، خطی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره‌ای باشند که مطابق شکل به ترتیب بر AB، BC و (d) و همچنین بر AC، BC و (d) مماسند، آنگاه ثابت کنید که O_1B+O_2C مقداری است ثابت.



۴. در معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3+bx+c=0$ ضرایب همگی اعداد گویا هستند و می‌دانیم که یکی از ریشه‌های آن با حاصلضرب دو ریشهٔ دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه، عددی گویاست.

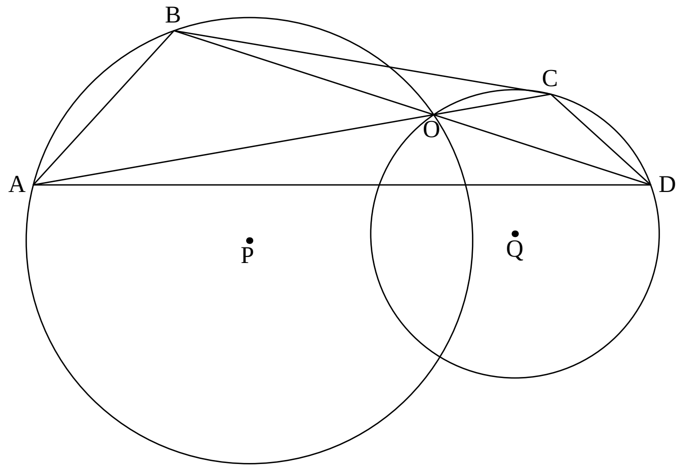
۵. همهٔ اعداد اول فرد p را پیدا کنید به گونه‌ای که

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

مربع کامل گردد.

آزمون مرحله‌ی اول دهمین دوره المپیاد ریاضی

۶. در چهارضلعی گوژ $ABCD$، نقطهٔ O محل برخورد قطرهاست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند آنگاه ثابت کنید که $PQ \geqslant \frac{AB+CD}{۴}$.



راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱.

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}=\frac{3}{4}\Longrightarrow 4mn\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}\right)=3mn$$
$$\Longrightarrow 4n+4m-\frac{4}{n}=3mn$$

چون طرفین معادلهٔ فوق باید صحیح باشند، پس $\frac{4}{n}$ باید عدد صحیحی باشد. پس $n=\{\pm 1$ یا ± 2 یا $\pm 4\}$.

$$n=1\Longrightarrow \frac{1}{m}+1-\frac{1}{m}=\frac{3}{4}$$ امکان ندارد.

$$n=-1\Longrightarrow \frac{1}{m}-1-\frac{1}{m}=\frac{3}{4}$$ امکان ندارد.

$$n=2\Longrightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4m}=\frac{3}{4}\Longrightarrow m=3$$

$$n=-2\Longrightarrow \frac{1}{m}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4m}=\frac{3}{4}\Longrightarrow m=\frac{15}{8}$$ امکان ندارد.

$$n=4\Longrightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16m}=\frac{3}{4}\Longrightarrow m=\frac{15}{8}$$ امکان ندارد.

$$n=-4\Longrightarrow \frac{1}{m}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16m}=\frac{3}{4}\Longrightarrow m=\frac{15}{16}$$ امکان ندارد.

پس تنها جواب مسأله هنگامی است که $n=2$ و $m=3$ باشد.

۲. حالتی را در نظر می‌گیریم که مجموعهٔ B، i عضوی باشد. در این حالت تعداد حالات مختلف انتخاب B برابر است با $\binom{n}{i}$ و تعداد حالات مختلف انتخاب A برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های محض B یعنی 2^i-1. پس تعداد حالات مختلف انتخاب زوج مرتب (A,B) برابر است با $\binom{n}{i}(2^i-1)$. B می‌تواند ۰، ۱، ... و یا m عضوی باشد. پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2^i-1)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

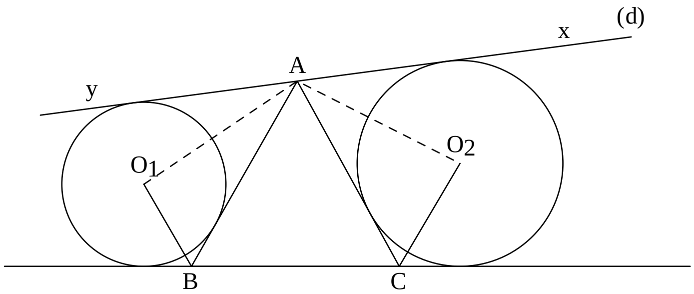
و بنابر بسط دوجمله‌ای خیام می‌دانیم که

$$۳^n = (۲ + ۱)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} ۲^i, \quad ۲^n = (۱ + ۱)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}$$

پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\text{تعداد کل حالات} = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} ۲^i - \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} = ۳^n - ۲^n$$

۳. نقطهٔ M را روی BC به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\angle BAM = \angle O_۱ AB$ باشد.



در این صورت

$$\angle O_۲ AC = \frac{۱}{۲} \angle CAx = \frac{۱}{۲}(۱۲۰^\circ - \angle BAy) = ۶۰^\circ - \angle O_۱ AB$$
$$\angle MAC = ۶۰^\circ - \angle BAM$$

بنابراین $\angle O_۲ AC = \angle MAC$ است.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle O_۱ AB = \triangle ABM \Longrightarrow O_۱ B = BM \\ \triangle O_۲ AC = \triangle ACM \Longrightarrow O_۲ C = MC \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$O_۱ B + O_۲ C = BM + CM = BC$$

پس مجموع $O_۱ B + O_۲ C$ برابر باطول ضلع مثلث AB است.

۴. فرض می‌کنیم که ریشه‌های این معادله برابر با $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ باشند و داشته باشیم $x_۱ = x_۲ x_۳$. در این صورت، بنابر رابطه‌های بین ضرایب و ریشه‌ها داریم

$$\begin{cases} x_۱ x_۲ x_۳ = -\dfrac{c}{a} \\ x_۱ x_۲ + x_۲ x_۳ + x_۳ x_۱ = \dfrac{b}{a} \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases}$$

پس

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{c}{a} \Longrightarrow x_1 \times x_1 = -\frac{c}{a}$$
$$\Longrightarrow x_1^2 = -\frac{c}{a} \qquad (1)$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{b}{a} \Longrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_3 x_1 = \frac{b}{a}$$
$$\Longrightarrow x_1(1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{a}$$

از طرفی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 + x_3 = -x_1$$
$$\Longrightarrow x_1(1 - x_1) = \frac{b}{a}$$
$$\Longrightarrow x_1 - x_1^2 = \frac{b}{a} \qquad (2)$$
$$(1),(2) \Longrightarrow x_1 - \left(-\frac{c}{a}\right) = \frac{b}{a} \Longrightarrow x_1 = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

چون a و b و c اعدادی گویا هستند، x_1 هم گویا می‌شود.

۵.

$$2^{p-1} - 1 = pk^2$$

چون p فرد است، پس می‌توان نوشت $p = 2m + 1$. بنابراین،

$$2^{2m} - 1 = pk^2 \Longrightarrow (2^m - 1)(2^m + 1) = pk^2$$

$2^m - 1$ و $2^m + 1$ دو عدد فرد متوالی هستند. بنابراین نسبت به هم اولند و چون حاصلضرب آنها برابر با pk^2 است، پس یکی از آنها باید به‌صورت مجذور کامل و دیگری باید به‌صورت حاصلضرب p در یک مجذور کامل باشد یعنی دو حالت زیر پیش می‌آید.

$$\begin{cases} 2^m - 1 = x^2, \; 2^m + 1 = py^2 \\ 2^m - 1 = px^2, \; 2^m + 1 = y^2 \end{cases}$$

در حالت اول چون $2^m - 1$ عددی فرد است، پس x باید فرد باشد. یعنی $x = 2n + 1$. پس

$$2^m - 1 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$
$$\Longrightarrow 2^m = 4n^2 + 4n + 2 = 2(2n^2 + 2n + 1)$$
$$\Longrightarrow 2^{m-1} = 2(n^2 + n) + 1$$

طرف راست این عبارت فرد است؛ بنابراین طرف چپ هم باید فرد باشد؛ ولی تنها توانی از ۲ که عددی فرد است $2^0 = 1$ است. پس باید $m - 1 = 0$ باشد در نتیجه، $m = 1$ و $p = 3$. در حالت دوم هم

به‌طور مشابه می‌توانیم بگوییم که y عددی فرد است پس می‌توانیم بنویسیم $y = ۲n + ۱$. پس

$$
\begin{aligned}
۲^m + ۱ = y^۲ = (۲n+۱)^۲ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ \\
&\Longrightarrow ۲^m = ۴(n^۲ + n) \\
&\Longrightarrow ۲^{m-۲} = n(n+۱)
\end{aligned}
$$

یکی از دو عدد n و $n + ۱$ فرد است؛ ولی می‌دانیم که $۲^{m-۲}$ هیچ عامل فردی جز ۱ ندارد؛ پس باید $n = ۱$ باشد. پس

$$n = ۱ \Longrightarrow ۲^{m-۲} = ۲ \Longrightarrow m = ۳ \Longrightarrow p = ۷$$

پس تنها جوابهای مسأله عبارتند از ۳ و ۷.

۶. از P و Q دو عمود بر BD رسم می‌کنیم و پای عمودها را H و H' می‌نامیم. می‌توان گفت

$$PQ \geqslant HH' = OH + OH' = \frac{۱}{۲}OD + \frac{۱}{۲}OB \qquad (۱)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$PQ \geqslant \frac{۱}{۲}OA + \frac{۱}{۲}OC \qquad (۲)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$۲PQ \geqslant \frac{۱}{۲}(OA + OB + OC + OD)$$

ولی در مثلثهای OAB و OCD می‌دانیم که $OA + OB \geqslant AB$ و $OC + OD \geqslant CD$. بنابراین،

$$۲PQ \geqslant \frac{۱}{۲}(AB + CD) \Longrightarrow PQ \geqslant \frac{۱}{۴}(AB + CD)$$