# آزمون مرحله‌ی اول نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت کنید بینهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آنها کمترین مقدار ممکن (مثبت) باشد.

۲. همهٔ اعداد طبیعی $a$، $b$ و $c$ بزرگتر از یک را بیابید که حاصلضرب هر دو عدد از آنها به علاوهٔ یک، مضرب سومی گردد.

۳. اگر برای تابع حقیقی غیر ثابت $f$ داشته باشیم

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-۲f(xy)$$

آنگاه $f(۱۳۷۰)$ را به‌دست آورید.

۴. خط $(L)$ دو خط $(m)$ و $(n)$ را به ترتیب در نقاط $A$ و $B$ قطع می‌کند. از نقطهٔ $P$ واقع بر $(L)$ خطی رسم کنید که $(m)$ و $(n)$ را به ترتیب در نقاط $A'$ و $B'$ قطع کند، به طوری که $\frac{AA'}{BB'}=K$.

۵. اگر $x \geqslant y \geqslant z > ۰$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$، ثابت کنید که

$$\frac{x^۲y}{z}+\frac{y^۲z}{x}+\frac{z^۲x}{y}\geqslant x^۲+y^۲+z^۲$$

۶. ۵۵ عدد دلخواه از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید که همواره می‌توان دو عدد بین اعداد انتخاب‌شده یافت به طوری که تفاضل آنها ۱۰ باشد.

# راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. **روش اول.** اگر $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ و $C(x_3,y_3)$ مختصات سه رأس مثلث باشند، می‌دانیم مساحت مثلث $ABC$ برابر است با

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

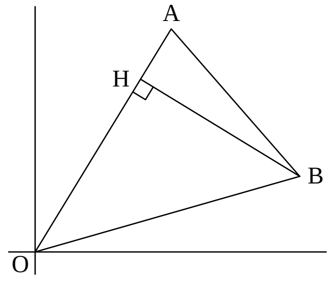
که منظور از $|A|$ قدرمطلق دترمینان ماتریس $A$ است. در نتیجه، کمترین مقدار ممکن $S$ عدد $\frac{1}{2}$ است. حال نشان می‌دهیم بینهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت همهٔ آنها $\frac{1}{2}$ است. اگر قرار دهیم $A(m,n)$ و $\gcd(m,n)=1$[1]؛ و $r$ و $s$ اعداد طبیعی باشند به طوری که $ms-nr=1$، آنگاه با قرار دادن $B(r,s)$ مثلث $AOB$ دارای مساحت $\frac{1}{2}$ خواهد بود، زیرا

$$BH=\frac{|ms-nr|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad OA=\sqrt{m^2+n^2}$$

پس

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot BH=\frac{1}{2}$$

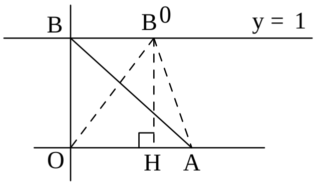
در نتیجه، برای هر زوج $(m,n)$ که $\gcd(m,n)=1$ باشد مثلثی با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آن $\frac{1}{2}$ است.




[1] بزرگترین مقسوم علیه مشترک $m$ و $n$

# راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی

**روش دوم.** مثلث قائم‌الزاویهٔ $AOB$ را که در آن $OA = OB = ۱$ و $\angle AOB = \frac{\pi}{۲}$ در نظر می‌گیریم. حال اگر روی خط $y = ۱$ نقاطی با طول صحیح اختیار کنیم، این نقاط با $O$ و $A$ مثلثهایی می‌سازند که مساحت همه آنها $\frac{۱}{۲}$ است.




.۲

$$\begin{cases} ab + ۱ = kc \\ ac + ۱ = k'b \\ bc + ۱ = k''a \end{cases} \qquad (۱)$$

حالا

$$\begin{aligned}(ab+۱)(ac+۱)(bc+۱) &= kk'k''abc \\ &\Longrightarrow mabc + ab + ac + bc + ۱ = kk'k''abc \\ &\Longrightarrow ab + bc + ca + ۱ = nabc \\ &\Longrightarrow \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{abc} = n\end{aligned}$$

اگر $a > ۳$، $b > ۳$ و $c > ۳$، آنگاه

$$\text{طرف اول} \leqslant \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶۴} < ۱$$

پس اقلاً یکی از عددها باید کوچکتر یا مساوی ۳ باشد مثلاً اگر $a = ۲$، آنگاه،

$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲bc} = n > ۰$$

اگر $c > ۴$ و $b > ۴$ باشد طرف اول کوچکتر از ۱ می‌شود پس یکی از آنها کوچکتر یا مساوی ۴ است. مثلاً $b \leqslant ۴$. ضمناً از رابطه‌های (۱) نتیجه می‌گیریم که $a$، $b$ و $c$ دوبه‌دو نسبت به هم اولند. پس $b = ۳$ و

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۶c} = n \Longrightarrow \frac{۷}{۶c} &= n - \frac{۵}{۶} \\ \Longrightarrow ۷ &= c(۶n - ۵)\end{aligned}$$

$c$ عدد ۷ را می‌شمارد پس $c = ۷$ و مجموعهٔ $\{۲,۳,۷\}$ به‌دست می‌آید. اگر $a = ۳$ را در نظر بگیریم

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۳bc} = n \geqslant ۰$$

در اینجا نیز اگر $b > ۴$ و $c > ۴$ باشد طرف اول کوچکتر از ۱ می‌شود پس یکی از آنها کوچکتر یا مساوی ۴ است مثلاً $b \leqslant ۴$. و چون $a$ و $b$ نسبت به هم اولند پس $b = ۲$ یا $b = ۴$. از $b = ۲$ مجدداً جواب قبلی به‌دست می‌آید و از $b = ۴$ داریم

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{۱۲c}=n$$

پس

$$\frac{۱۳}{۱۲c}+\frac{۷}{۱۲}=n$$

چون $a = ۳$ و $b = ۴$ پس $c$ باید نسبت به ۲ و ۳ اول باشد، پس $c$ حداقل مساوی ۵ است و با این فرض طرف اول تساوی کوچکتر از ۱ می‌شود که غیر ممکن است. پس تنها جواب مسأله $\{۲,۳,۷\}$ است.

۳.

$$f(a+b)=f(a)+f(b)-۲f(ab)$$
$$f(۰)=f(۰+۰)=f(۰)+f(۰)-۲f(۰)=۰$$

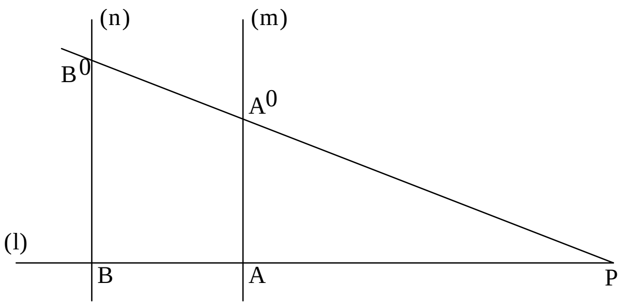
پس $f(۰)=۰$.

$$f(n+۱)=f(n)+f(۱)-۲f(n)=f(۱)-f(n)$$

پس

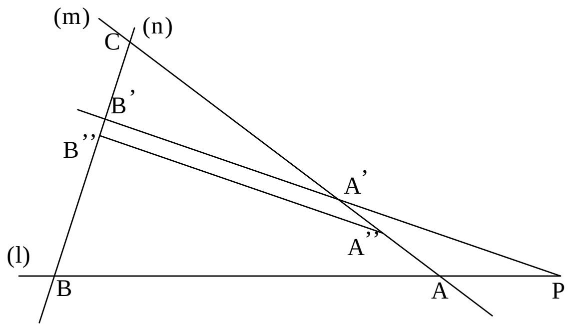
$$\begin{aligned}
&f(۱)=f(۱)\\
&f(۲)=f(۱)-f(۱)=۰\\
&f(۳)=f(۱)-f(۲)=f(۱)\\
&f(۴)=f(۱)-f(۳)=۰
\end{aligned}$$

و با استقرا می‌توان ثابت کرد $f(۲n)=۰$ و $f(۲n+۱)=f(۱)$، در نتیجه $f(۱۳۷۰)=۰$.




۴.

واضح است اگر $(n) \parallel (m)$ باشد آنگاه مسأله وقتی دارای جواب است که $K=\frac{PA}{PB}$. در این حالت هر خطی که از $P$ بگذرد و $(m)$ و $(n)$ را قطع کند جواب مسأله است. در حالتی که $K \neq \frac{PA}{PB}$ مسأله جواب ندارد.




حال فرض می‌کنیم که $(m)$ و $(n)$ متقاطع باشند و $(m) \cap (n) = \{c\}$. در مثلث $ABC$ بنابر قضیهٔ منلائوس داریم

$$\frac{A'A}{A'C} \times \frac{B'C}{B'B} \times \frac{PB}{PA} = ۱$$

و یا

$$\frac{B'C}{A'C} = \frac{PA}{PB} \times \frac{۱}{K} = K'$$

پس کافی است نقاط $B''$ و $A''$ را به ترتیب روی $CB$ و $CA$ به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{B''C}{A''C} = K'$ باشد و آنگاه از $P$ خطی به موازات $A''B''$ رسم کنیم. در این حالت مسأله یک جواب دارد.

۵. باید ثابت کنیم که

$$x^۲\left(\frac{y}{z}\right) + y^۲\left(\frac{z}{x} - ۱\right) + z^۲\left(\frac{x}{y} - ۱\right) > ۰$$

اگر $a = \frac{y}{z} - ۱$، $b = \frac{z}{x} - ۱$ و $c = \frac{x}{y} - ۱$ بنابر نامساوی حسابی‌ـهندسی داریم

$$a + b + c \geqslant ۰$$

حال ثابت می‌کنیم که

$$ax^۲ + by^۲ + cz^۲ \geqslant ۰$$

چون $c \geqslant -a - b$ بنابراین،

$$ax^۲ + by^۲ + cz^۲ \geqslant ax^۲ + by^۲ - az^۲ - bz^۲$$

حال نشان می‌دهیم که

$$ax^۲ + by^۲ - az^۲ - bz^۲ \geqslant ۰$$
$$a(x^۲ - z^۲) + b(y^۲ - z^۲) \geqslant ۰$$
$$\frac{y-z}{z}(x^۲ - z^۲) + \frac{z-x}{x}(y^۲ - z^۲) \geqslant ۰$$
$$\frac{x+z}{z} - \frac{y+z}{x} \geqslant ۰$$

(در مرحلهٔ آخر $(x-z)(y-z)$ را از طرفین ساده کرده‌ایم.) چون $x+z \geqslant y+z$ و $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{z}$ بنابراین،

$$\frac{x+z}{z} \geqslant \frac{y+z}{x}$$

یعنی $\frac{x+z}{z} - \frac{y+z}{x} \geqslant ۰$ . پس

$$ax^۲ + by^۲ + cz^۲ \geqslant ۰$$

۶. اگر در مجموعهٔ

$$\{a, a+۱, \ldots, a+۲n-۱\}$$

$n+۱$ عدد انتخاب کنیم، تفاضل دوتای آنها $n$ است. برای اثبات زوجهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$(a, a+n), (a+۱, a+n+۱), \ldots, (a+n-۱, a+۲n-۱)$$

و اصل لانه کبوتری را به کار می‌بریم. حال اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به ۵ دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}, \quad \{۲۱, ۲۲, \ldots, ۴۰\}, \quad \{۴۱, ۴۲, \ldots, ۶۰\}$$
$$\{۶۱, ۶۲, \ldots, ۸۰\}, \quad \{۸۱, ۸۲, \ldots, ۱۰۰\}$$

واضح است که از میان ۵۱ عدد باید یازده‌تای آنها از یکی از این دسته‌ها انتخاب شوند و با آنچه که در بالا گفتیم اثبات تمام است.