آزمون مرحله‌ی اول هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

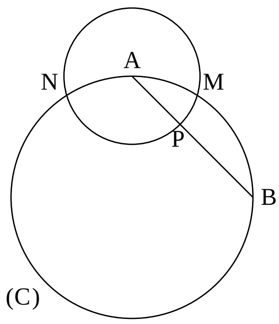
۱. اگر A_1، A_2، ...، A_n و ... مجموعه‌های دلخواه باشند، مجموعه‌های B_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$B_n = \begin{cases} A_1 & n = 1 \text{ اگر} \\ A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i & n \geqslant 2 \text{ اگر} \end{cases}$$

الف) ثابت کنید $B_n \cap B_m = \varnothing$ $(n \neq m)$.

ب) ثابت کنید $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

۲. وتر AB از دایرهٔ (C) را در نظر می‌گیریم. دایرهٔ دیگری به مرکز A و به شعاع کوچکتر از طول AB رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را در نقاط M و N و وتر AB را در نقطهٔ P قطع کند، ثابت کنید عمودمنصف BP از وسط کمان $\widehat{MB}$ می‌گذرد.



۳. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n \geqslant 5$، $n!$ بر کلیهٔ اعداد ۱، ۲، ... و k بخشپذیر است به شرط اینکه $k+1$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از n باشد. (می‌دانیم که برای $n \geqslant 2$ بین n و $2n$]حداقل[یک عدد اول وجود دارد).

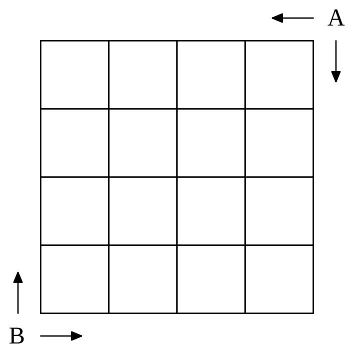
آزمون مرحله‌ی اول هشتمین دوره المپیاد ریاضی

۴. همهٔ اعداد حقیقی x، y و z را تعیین کنید که در رابطه‌های زیر صادق باشند:

$$x(۱+y) = y(۱+z) = z(۱+x)$$

۵. ثابت کنید در هر مثلث، خطوطی که اوساط اضلاع را به اوساط ارتفاعهای متناظر وصل می‌کنند، متقاربند]همرسند[.
آیا می‌توان به جای ارتفاعها، هر سه خط متقارب]همرس[را در نظر گرفت؟ چگونه؟ ثابت کنید.

۶. در شبکهٔ ۴×۴ شکل زیر متحرکی از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت می‌کند به طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. همچنین متحرک دیگری از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ A در حرکت است به طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید. اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت نمایند، احتمال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید.



۷. از تساوی زیر $f(x)$ را تعیین کنید.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-۱, ۰, ۱\}, \quad f\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right) + f\left(-\frac{۱}{x}\right) + f\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right) = x$$

۸. اگر $a_۱ \geqslant a_۲ \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant ۰$، $b_i > ۰$ و به‌ازای هر k $(۱ \leqslant k \leqslant n)$،

$$\sum_{j=۱}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=۱}^{k} b_j$$

ثابت کنید که

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \leqslant \sum_{i=۱}^{n} b_i^۲$$

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. فرض کنید $m < n$. داریم

$$B_n = A_n \cap A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_m \cap \ldots \cap A'_{n-1}$$

بدیهی است که $B_m \cap B_n = \varnothing$، $B_n \subseteq A_n$ و در نتیجه $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. حال اگر $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، فرض کنید n کوچکترین عدد طبیعی باشد که $x \in A_n$، پس $x \in A'_k$، $k = 1, 2, \ldots, n-1$، پس $x \in B_n$. از آنجا $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و بنابراین،

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

۲. نیمساز زاویهٔ MAP عمودمنصف پاره‌خط MP است. که از وسط کمان MB می‌گذرد. حال در مثلث MNB نیمساز زاویه $\angle MNB$ و عمود منصف ضلع MB یکدیگر را بر دایرهٔ محیطی مثلث MNB قطع می‌کنند، که وسط قوس MB است. پس عمودمنصفهای دو ضلع MP و MB از مثلث MPB یکدیگر را در وسط قوس MB قطع می‌کنند. در نتیجه عمودمنصف ضلع سوم BC نیز از این نقطه می‌گذرد.

۳. واضح است که برای $j = 1, 2, \ldots, n$ داریم $j \mid n!$. حال برای هر $n < j < k+1$، j مرکب است، یعنی اعداد طبیعی $a, b \geqslant 2$ یافت می‌شوند که $j = ab$. چون بین اعداد n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد پس $j < 2n$. ولی اگر $a > n$، چون $b \geqslant 2$ آنگاه $j = ab > 2n$ و به طریق مشابه برای b، پس $a \leqslant n$ و $b \leqslant n$. حال اگر $a \neq b$، آنگاه a و b دو عدد مختلف از اعداد ۱، ۲، ... و n هستند؛ پس $j = ab \mid n!$. اما اگر هیچ دو عدد متفاوتی مانند a و b وجود نداشته باشند که $j = ab$، در این صورت $j = p^2$ که p اول است. اگر $p \geqslant 4$ آنگاه $j = p^2 \geqslant 4p$، یعنی $4p \leqslant j < 2n$. پس $2p < n$. یعنی هم p و هم $2p$ جزء اعداد ۱، ۲، ... و n هستند. پس $j = p^2 \mid n!$. اگر $p = 3$ آنگاه $j = 9$ و در نتیجه $k + 1 = 11$. چون بین n و $k+1$ هیچ عددی اول نیست، پس n فقط می‌تواند به‌صورت ۷ یا ۸ باشد که در آن صورت $j = 9 \mid 7!$ و $j = 9 \mid 8!$ و چون $n \geqslant 5$ پس $p^2 = j > 5$، یعنی $p > 2$. بنابراین، حالت دیگری امکانپذیر نیست یعنی برای هر j، $j \mid n!$ و اگر $n = k$ حکم واضح است.

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی

۴. اگر $y=-۱$ باشد نتیجه می‌شود $x=-۱$ و $z=-۱$. فرض کنیم $y\neq -۱$. داریم

$$
\begin{aligned}
x=\frac{y(۱+z)}{۱+y} &\Longrightarrow y(۱+z)=z\left(۱+\frac{y(۱+z)}{۱+y}\right)\\
&\Longrightarrow (y-z)(۱+y+yz)=۰\\
&\Longrightarrow y-z=۰ \ \text{یا}\ ۱+y+yz=۰
\end{aligned}
$$

اگر $y=z$، داریم $x=y=z$ و اگر $۱+y+yz=۰$ خواهیم داشت $y(۱+z)=-۱$.

$$۱+z=\frac{-۱}{y}\Longrightarrow z=\frac{-۱}{y}-۱$$

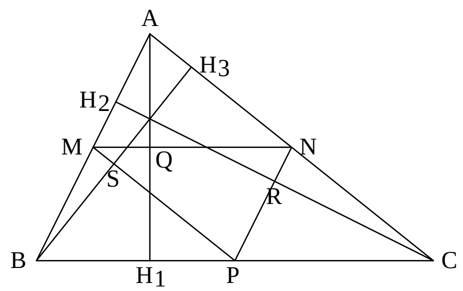
که با فرض $y=\beta$، $\beta\in\mathbb{R}$، $\beta\neq -۱$ و $\beta\neq ۰$ نتیجه می‌شود

$$۱+x+\beta x=۰\Longrightarrow x=\frac{-۱}{۱+\beta}$$

$$y=\beta \ \text{و}\ x=\frac{-۱}{۱+\beta}\ \text{و}\ z=\frac{-۱}{\beta}-۱$$

در صورتی که $y=۰$ باشد، به سادگی ثابت می‌شود که $x=z=۰$.

۵. با توجه به شکل



$$\frac{QM}{QN}=\frac{BH_۱}{H_۱C}$$

$$\frac{RN}{RP}=\frac{AH_۲}{H_۲B}$$

$$\frac{SP}{SM}=\frac{CH_۳}{H_۳A}$$

با ضرب طرفین تساوی در یکدیگر و با توجه به این که ارتفاعها متقاربند، بنابر قضیهٔ سوا حاصلضربهای طرف دوم یک و از آنجا بنابر عکس قضیهٔ سوا خطوط NS، PQ و MR همرسند.

در حالت کلی اگر به جای ارتفاعها سه خطّ همرس در نظر بگیریم، کافی است به جای $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$محل تلاقی خطوط سه‌گانه را با اضلاع مثلث، جایگزین کنیم.

۶. این دو متحرک فقط روی قطر عمود بر AB می‌توانند به هم برخورد کنند. تعداد حرکتهای ممکن $۱۶ \times ۱۶ = ۲۵۶$ است. حالات مساعد به موارد زیر امکانپذیر است.

الف) B چهار مرحلهٔ متوالیِ افقی و A چهار مرحلهٔ عمودی را انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۴} \times \binom{۴}{۰} = ۱$$

ب) B سه مرحلهٔ افقی و یک مرحلهٔ عمودی و A سه مرحلهٔ عمودی و یک مرحلهٔ افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۳} = ۱۶$$

ج) B دو مرحلهٔ افقی و دو مرحلهٔ عمودی و A دو مرحلهٔ عمودی و دو مرحلهٔ افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۴}{۲} = ۳۶$$

د) B یک مرحلهٔ افقی و سه مرحلهٔ عمودی و A یک مرحلهٔ عمودی و سه مرحلهٔ افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۳} \times \binom{۴}{۱} = ۱۶$$

ه) B هر چهار مرحله را عمودی و A هر چهار مرحله را افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۰} \times \binom{۴}{۴} = ۱$$

پس

$$p = \frac{۱ + ۱۶ + ۳۶ + ۱۶ + ۱}{۲۵۶} = \frac{۷۰}{۲۵۶}$$

۷. با فرض $y = \frac{x-۱}{x+۱}$ داریم $x = \frac{۱+y}{۱-y}$ و $\frac{y-۱}{y+۱} = -\frac{۱}{x}$، $-\frac{۱}{y} = \frac{۱+x}{۱-x}$ و از آنجا

$$f(y) + f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right) + f\left(-\frac{۱}{y}\right) = \frac{۱+y}{۱-y} \qquad (۱)$$

با فرض $y = \frac{۱+x}{۱-x}$ داریم $x = \frac{y-۱}{y+۱}$، $-\frac{۱}{x} = \frac{۱+y}{۱-y}$ و $-\frac{۱}{y} = \frac{x-۱}{x+۱}$ و از آنجا

$$f\left(-\frac{۱}{y}\right) + f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right) + f(y) = \frac{y-۱}{y+۱} \qquad (۲)$$

و با فرض $y = -\frac{۱}{x}$ داریم $x = -\frac{۱}{y}$، $\frac{x-۱}{x+۱} = \frac{۱+y}{۱-y}$ و $\frac{۱+x}{۱-x} = \frac{y-۱}{y+۱}$ و از آنجا

$$f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right) + f(y) + f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right) = -\frac{۱}{y} \qquad (۳)$$

با جمع معادلات (۱)، (۲) و (۳) داریم

$$\begin{aligned}
3f(y)+2f\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+2f\left(\frac{1+y}{1-y}\right)+2f\left(-\frac{1}{y}\right) &= \frac{4y}{1-y^2}-\frac{1}{y}\\
\Longrightarrow 3f(y)+2y &= \frac{5y^2-1}{y(1-y^2)}\\
\Longrightarrow f(y) &= \frac{2y^4+3y^2-1}{3y(1-y^2)}
\end{aligned}$$

۸. فرض کنیم که $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0$ و قرار دهیم

$$\forall k \leqslant n, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i)$$

آنگاه $b_1 - a_1 = S_1$، $b_2 - a_2 = S_2 - S_1$، ... و $b_n - a_n = S_n - S_{n-1}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)a_i &= S_1a_1+(S_2-S_1)a_2+\cdots+(S_n-S_{n-1})a_n\\
&= S_1(a_1-a_2)+S_2(a_2-a_3)+\cdots+S_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+S_na_n\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

یعنی $\sum_{i=1}^{n} b_ia_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. به همین شکل $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)b_i \geqslant 0$ و در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$