

آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

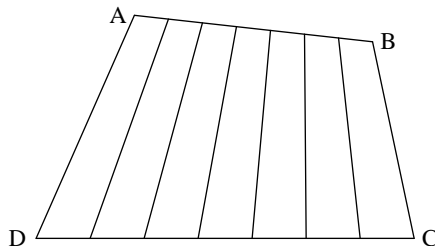
زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. نشان دهید اگر a, b, c طولهای اضلاع یک مثلث باشند، داریم

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca)$$

۲. در چهارضلعی $ABCD$ (شکل زیر) ضلع AB را به هفت قسمت مساوی و ضلع CD را نیز به هفت قسمت مساوی تقسیم [کرده] و نقاط تقسیم را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا هفت چهارضلعی کوچک به‌دست آید.



ثابت کنید دست کم یکی از چهارضلعیهای کوچک مساحتی برابر $\frac{1}{7}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ دارد.

۳. ثابت کنید معادله

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^t xyz$$

که در آن x, y, z و t اعداد طبیعی هستند، جواب ندارد.

۴. اگر d_1, d_2 و d_3 فواصل یک نقطه در درون مثلث قائم‌الزاویه از سه ضلع آن و a طول وتر مثلث باشد، نشان دهید

$$\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} < \sqrt{2a}$$

آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی

۵. n نقطه در روی صفحه مفروض است به طوری که فاصله بین هر دو نقطه از آنها بزرگتر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید تعداد جفت‌هایی از این نقاط که فاصله آنها دقیقاً مساوی یک باشد از $3n$ تجاوز نمی‌کند.

۶. روی محیط دایره‌ای به شعاع یک متر نقطه دلخواه A_0 را انتخاب و در جهت مثبت دایره مثلثاتی نقاط A_1, A_2, A_3, \dots را طوری انتخاب می‌کنیم که متر $A_0A_1 = 1$ ، متر $A_1A_2 = \frac{1}{3}$ ، \dots ، متر $A_{n-1}A_n = \frac{1}{n}$ و \dots (تعداد نقاط نامتناهی است).

الف) نشان دهید هیچ دو نقطه A_i و A_j ($i \neq j$) بر هم منطبق نیستند.

ب) نشان دهید اقل‌اً یک کمان یک میلیمتری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقاط A_i واقع بر آن بینهایت است.

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. داریم

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{4}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0$$

و این همواره برقرار است. بنابراین،

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$$

برای اثبات قسمت دوم نامساوی می‌نویسیم

$$4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2 =$$

$$a(b+c-a) + b(c+a-b) + c(a+b+c)$$

چون در مثلثی به اضلاع a ، b و c داریم

$$b+c > a \implies b+c-a > 0$$

$$c+a > b \implies c+a-b > 0$$

$$a+b > c \implies a+b-c > 0$$

بنابراین،

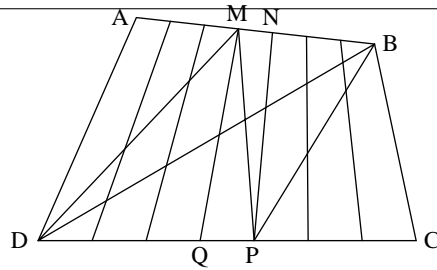
$$(a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca)$$

۲. داریم

$$\left. \begin{aligned} S_{MPN} &= \frac{1}{4} S_{MBP} \\ S_{MPQ} &= \frac{1}{4} S_{MPD} \end{aligned} \right\} \implies S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{MBPD}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{BDP} &= \frac{4}{9} S_{BDC} \\ S_{DMB} &= \frac{4}{9} S_{DBA} \end{aligned} \right\} \implies S_{MBPD} = \frac{4}{9} S_{ABCD}$$

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هفتمین المپیاد ریاضی

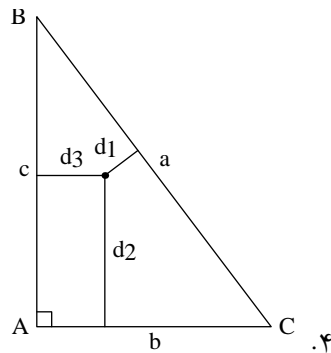


در نتیجه، $S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. در حالت خاص، اگر AB موازی CD باشد مساحت هر هفت چهارضلعی کوچک با یکدیگر % مساوی و برابر با $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ است.

۳. فرض کنیم $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ جوابی از این معادله باشد. واضح است که x, y, z باید زوج باشند. زیرا اگر فقط یکی از آنها و یا همه فرد باشند، آنگاه سمت چپ معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 2^t xyz$ عدد فرد و سمت راست زوج خواهد بود که غیر ممکن است. و اگر فقط دوتای آنها فرد باشند آنگاه سمت چپ معادله بر ۴ قابل قسمت نیست ولی سمت راست بر ۴ قابل قسمت است (z زوج است). در نتیجه،

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 2^{t+1} \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{y}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)$$

با همان استدلال بالا، نتیجه می‌شود که $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$ نیز زوج هستند. پس به همین ترتیب برای هر $k \in \mathbb{N}$ باید $\frac{x}{2^k}$ عدد صحیح باشد که غیر ممکن است.



داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} &= \sqrt{ad_1} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{bd_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{cd_3} \cdot \sqrt{\frac{1}{c}} \\ &\leq \sqrt{ad_1 + bd_2 + cd_3} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \end{aligned}$$

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هفتمین المپیاد ریاضی

(بنابر نامساوی کوشی). اما $ad_1 + bd_2 + cd_3 = 2S = bc$ پس

$$\sum_{i=1}^3 \sqrt{d_i} \leq \sqrt{bc} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ac}{abc}}$$

چون

$$ab+bc+ac < a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2$$

پس

$$\sum_{i=1}^3 \sqrt{d_i} < \sqrt{bc} \cdot \sqrt{\frac{2a^2}{abc}}$$

در نتیجه، $\sum_{i=1}^3 \sqrt{d_i} < \sqrt{2a}$.

۵. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر نقطه مانند A حداکثر شش نقطه وجود دارد که فاصله آنها با A مساوی یک باشد. زیرا تمام نقاطی که فاصله آنها با A مساوی یک است روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع یک واقع هستند و هر دو نقطه روی این دایره که فاصله‌شان حداقل یک باشد باید در دو سرکمانی به اندازه حداقل ۶۰ درجه واقع باشند. در نتیجه بیشتر از شش نقطه ممکن نیست.

به این ترتیب برای هر نقطه بیش از شش جفت که دارای خاصیت فوق باشد نمی‌توان تشکیل داد و چون تعداد نقطه‌ها n است پس کلاً $6n$ جفت به دست می‌آید اما جفت (A, B) با جفت (B, A) فرقی ندارد پس $\frac{6n}{2} = 3n$ جفت به دست می‌آید. یعنی بیش از $3n$ جفت با این خاصیت نخواهیم داشت.

۶. الف) اگر دو نقطه A_i و A_j به فرض $i > j$ بر هم منطبق باشند خواهیم داشت

$$\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \dots + \frac{1}{j} = 2k\pi$$

طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است پس تساوی نمی‌تواند برقرار باشد.

ب) چون هیچ دو نقطه‌ای بر هم منطبق نیستند و تعدادشان نامتناهی است اقلماً در یک کمان یک میلیمتری باید تعدادشان نامتناهی باشد زیرا تعداد فواصل یک میلیمتری که می‌توان روی این دایره جدا کرد، متناهی است.

