آزمون مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $x^{۳}+x^{۲}+۲x-۱=۰$ باشد آنگاه دو ریشهٔ دیگر معادله را به صورت کثیرالجمله‌ای]چندجمله‌ای[با ضرایب گویا بر حسب α به‌دست آورید.

۲. در مثلث غیر مشخص ABC که هر سه زاویهٔ آن حاده هستند ارتفاعات AD، BE و CF را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را به ترتیب در P، Q و R قطع کنند. اگر h طول بزرگترین ارتفاع و s طول کوچکترین پاره‌خط از بین پاره‌خطهای AP، BQ و CR باشد ثابت کنید

$$\frac{h}{s} > \frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۳. دو تابع حقیقی f و g بر]روی[$\mathbb{R}$ را وابسته گوییم هرگاه تابع حقیقی دوسویی h (یک‌به‌یک و پوشا)]روی[$\mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $h\circ f = g\circ h$ ($f\circ g$ ترکیب توابع f و g است).

الف) نشان دهید اگر f و g وابسته و g و φ نیز وابسته باشند آنگاه f و φ نیز وابسته‌اند.

ب) مطلوب است شرط لازم و کافی بر حسب a و b برای اینکه دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=x^{۲}-ax+b$ وابسته باشند.

۴. معادلهٔ سیالهٔ زیر را حل کنید (m، n، p و q ارقام هستند):

$$(m-۹)^{۲}\times m! + (n-۸)^{۲}\times n! + ۵۰\times p! + ۴۹\times q! = \sqrt{\overline{mnpq}}$$

۵. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ ($۰<a<b$) تعریف شده و در رابطهٔ

$$\forall x,y\in[a,b],\quad x\neq y \Rightarrow |f(x)-f(y)|<|x-y|$$

صدق کند؛ و داریم $f(a)=f(b)=۰$. ثابت کنید

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |f(x)-f(y)|<\frac{a+b}{۲}$$

۶. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AC>BD$، از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید

$$AB\cdot AE + AD\cdot AF = AC^{۲}$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. می‌دانیم $P(x) = x^۳ + x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ ریشهٔ گویا ندارد (چرا؟) پس $P(x)$ روی اعداد گویا تجزیه نمی‌شود. یعنی α نمی‌تواند ریشهٔ چندجمله‌ای دیگری از درجهٔ کمتر از ۳ باشد و $P(x)$ تنها چندجمله‌ای درجهٔ سوم تحویل‌ناپذیر روی اعداد گویاست که $P(\alpha) = ۰$. حال چندجمله‌ایِ $P(x-۱) = x^۳ - ۲x^۲ - x + ۱$ را در نظر می‌گیریم. ریشه‌های $P(x-۱) = ۰$ عبارتند از $\alpha + ۱$، $\beta + ۱$ و $\gamma + ۱$، که α، β و γ ریشه‌های $P(x) = ۰$ هستند. اما،

$$\beta \cdot \gamma = \frac{۱}{\alpha}, \quad (\beta + ۱)(\gamma + ۱) = -\frac{۱}{\alpha + ۱}$$

پس

$$\beta + \gamma = (\beta + ۱)(\gamma + ۱) - \beta\gamma - ۱ = -\frac{۱}{\alpha + ۱} - \frac{۱}{\alpha} - ۱$$

یعنی

$$\begin{cases} \beta + \gamma = \dfrac{-\alpha^۲ - ۳\alpha - ۱}{\alpha(\alpha + ۱)} \\ \beta \cdot \gamma = \dfrac{۱}{\alpha} \end{cases}$$

در نتیجه،

$$\gamma = -\frac{\alpha + ۱}{\alpha}, \quad \beta = -\frac{۱}{\alpha + ۱}$$

حال قرار می‌دهیم

$$\beta = -\frac{۱}{\alpha + ۱} = A\alpha^۲ + B\alpha + C$$

ضرایب A، B و C را تعیین می‌کنیم، خواهیم داشت

$$A\alpha^۳ + (A + B)\alpha^۲ + (B + C)\alpha + C + ۱ = ۰$$

داریم $\alpha^۳ = ۱ + ۲\alpha - \alpha^۲$ که با قرار دادن آن در رابطهٔ اخیر به‌دست می‌آوریم

$$B\alpha^۲ + (B + C + ۲A)\alpha + (A + C + ۱) = ۰$$

$$\left.\begin{array}{r} B = ۰ \\ B + C + ۲A = ۰ \\ A + C + ۱ = ۰ \end{array}\right\} \Longrightarrow A = ۱ \quad \text{و} \quad C = -۲$$

بنابراین،

$$\beta = \alpha^۲ + ۰ \times \alpha - ۲ = \alpha^۲ - ۲$$

و چون $\alpha + \beta + \gamma = -۱$، به‌دست می‌آید

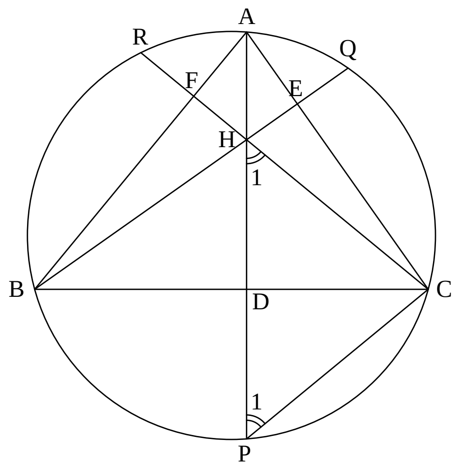
$$\gamma = -۱ - \alpha - \alpha^۲ + ۲ = -\alpha^۲ - \alpha + ۱$$

۲. می‌دانیم که قرینهٔ محل تلاقی سه ارتفاع، H، نسبت به هر یک از اضع، روی دایرهٔ محیطی است. پس

$$\frac{AP}{AD} = ۱ + \frac{DP}{AD} = ۱ + \frac{HD}{AD}$$

در نتیجه،

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = ۳ + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{FC}$$



اما،

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{FC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = ۱$$

پس

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = ۴$$

و با توجه به نامساوی $\frac{x+y+z}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{xyz}$ $(x, y, z \geqslant ۰)$ داریم

$$\frac{AP}{AD} \times \frac{BQ}{BE} \times \frac{CR}{CF} \leqslant \frac{۶۴}{۲۷}$$

پس

$$\frac{s^۳}{h^۳} \leqslant \frac{۶۴}{۲۷} \Longrightarrow \frac{h}{s} \geqslant \frac{۳}{۴} > \frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۳. الف) توجه می‌کنیم که f و g وابسته‌اند هرگاه $f = h^{-۱} \circ g \circ h$. پس اگر $g = \psi^{-۱} \circ \varphi \circ \psi$ (h و ψ یک‌به‌یک و پوشا هستند)، آنگاه

$$f = h^{-۱}(\psi^{-۱}\varphi\psi)\,h = (\psi h)^{-۱}\varphi(\psi h)$$

و ψh نیز یک‌به‌یک و پوشاست. پس φ و f نیز وابسته‌اند.

ب) از تساوی $h\big(f(x)\big) = g\big(h(x)\big)$ داریم

$$h(x^۲) = h(x)^۲ - ah(x) + b \qquad (۱)$$

اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم خواهیم داشت

$$h(x^۲) = h(-x)^۲ - ah(-x) + b \qquad (۲)$$

حال اگر دو تساوی (۱) و (۲) را از هم کم کنیم خواهیم داشت

$$\big(h(x) - h(-x)\big)\big(h(x) + h(-x) - a\big) = ۰$$

چون h یک‌به‌یک است پس برای هر $x \neq ۰$، $h(x) - h(-x) \neq ۰$؛ بنابراین، برای هر x غیر صفر، $h(x) + h(-x) - a = ۰$. چون h تابعی پوشاست پس $x_۰$ موجود است به طوری که $h(x_۰) = \frac{a}{۲}$ و در نتیجه، $h(-x_۰) = \frac{a}{۲}$ ($x_۰ = ۰$ مشکلی برای ما ایجاد نمی‌کند). و چون h تابعی یک‌به‌یک است پس $x_۰ = ۰$ یعنی $h(۰) = \frac{a}{۲}$. حال در تساوی

$$h(x^۲) = h(x)^۲ - ah(x) + b$$

به جای x صفر می‌گذاریم، خواهیم داشت

$$\frac{a}{۲} = \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۲} + b$$

یعنی

$$a^۲ + ۲a = ۴b$$

این شرط کافی است زیرا توجه می‌کنیم که برای تابع یک‌به‌یک و پوشای

$$h(x) = x + \frac{a}{۲}$$

خواهیم داشت $h \circ f = g \circ h$.

۴. می‌دانیم $۹۹ \leqslant [\sqrt{\overline{mnpq}}]$؛ بنابراین،

$$(m-۹)^۲ \times m! + (n-۸)^۲ \times n! + ۵۰ \times p! + ۴۹ \times q! \leqslant ۹۹$$

حداقل مقدار $p!$ و $q!$ یک است پس کمترین مقدار $۵۰ \times p! + ۴۹ \times q!$، ۹۹ است. پس

$$(m-۹)^۲ \times m! + (n-۸)^۲ \times n! = ۰$$
$$(m-۹)^۲ \times m! = ۰ \Longrightarrow m = ۹$$
$$(n-۸)^۲ \times n! = ۰ \Longrightarrow n = ۸$$

و

$$۵۰ \times p! + ۴۹ \times q! \leqslant ۹۹ \qquad (۱)$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که $p! = ۱$ و $q! = ۱$. پس

$$\begin{cases} p = ۰ \\ p = ۱ \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} q = ۰ \\ q = ۱ \end{cases}$$

تنها جواب $p = ۰$ و $q = ۱$ در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند. بنابراین،

$$\overline{mnpq} = ۹۹^۲ = ۹۸۰۱$$

۵. اگر $x = y$ باشد حکم واضح است. اگر x دلخواه و $y = a$ یا $y = b$، داریم

$$\begin{cases} \left|f(x) - f(a)\right| < |x-a| = x - a < x \\ \left|f(x) - f(b)\right| < |x-b| = b - x \end{cases}$$

پس

$$\left|f(x)\right| < \frac{b}{۲} < \frac{a+b}{۲}\left|f(x) - f(b)\right| < \frac{a+b}{۲}\left|f(x) - f(a)\right| < \frac{a+b}{۲}$$

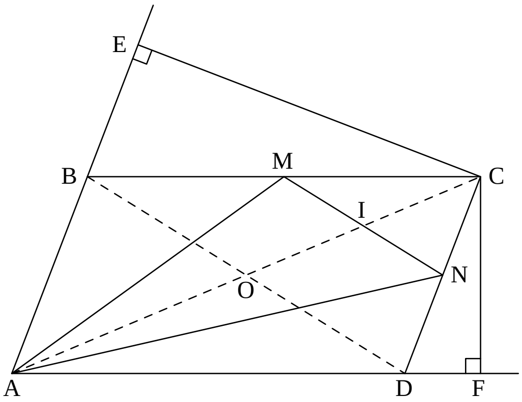
و اگر $x, y \in (a, b)$، کافی است فرض کنیم $|x-y| < \frac{a+b}{۲}$ (در غیر اینصورت حکم ثابت می‌شود)، داریم

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(y)\right| &\leqslant \left|f(x)\right| + \left|f(y)\right| \\ &< x + (b - y) \\ &= b - (y - x) \end{aligned}$$

می‌توان فرض کرد $x < y$، پس

$$|f(x) - f(y)| < b - \frac{a+b}{۲} = \frac{b-a}{۲} < \frac{b+a}{۲}$$

.۶



در دایره‌ای به قطر BC (که مرکزش M است) داریم (P_M^A یعنی قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ با مرکز M)

$$P_M^A = AB \cdot AE = AM^2 - \frac{BC^2}{4}$$

در دایره‌ای به قطر CD (که مرکزش N است) داریم

$$P_N^A = AD \cdot AF = AN^2 - \frac{CD^2}{4}$$

I را محل تقاطع MN و AC و O را محل تقاطع BD و AC می‌گیریم. طرفین رابطه‌های بالا را جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&AB \cdot AE + AD \cdot AF \\
&= (AM^2 + AN^2) - \frac{1}{4}(BC^2 + CD^2) \\
&= \frac{1}{2}MN^2 + 2AI^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}BD^2 + 2CO^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}AC\right)^2 - \frac{1}{8}BD^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}BD^2 + \frac{18}{16}AC^2 - \frac{1}{8}BD^2 - \frac{1}{8}AC^2 \\
&= \frac{9}{8}AC^2 - \frac{1}{8}AC^2
\end{aligned}$$

پس

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$