آزمون مرحله‌ی اول پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم کنید و نقطهٔ وسط آن را I بنامید. پاره‌خط BI را ادامه دهید تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید

$$S_{ABC} = ۱۲S_{AID}$$

(منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است).

۲. ثابت کنید حاصلجمع هیچ k عدد صحیح متوالی و مثبت را نمی‌توان به صورت ۲^n نوشت. (k و n اعداد صحیح و مثبت و $k \neq ۱$ است)

۳. همهٔ چندجمله‌ایهای $P(x)$ را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد.

$$xP(x-۱) = (x-۱۲)P(x)$$

۴. مثلث ABC مفروض است.

الف) ثابت کنید عدهٔ بیشماری مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به طوری که مثلث ABC در آنها محاط باشد (یعنی هریک از رئوس A، B و C روی یکی از اضلاع مثلث ساخته شده قرار گیرد).

ب) از میان مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده مثلثی را تعیین کنید که محیط و مساحت آن ماکزیمم باشد.

۵. چندجمله‌ای ناصفر $f(x)$ را چنان تعیین کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$f(۲x) = f'(x)f''(x)$$

۶. اعداد صحیح و مثبت n، $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n را طوری تعیین کنید که

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۱۳۶۶$$

و حاصلضرب $a_۱ a_۲ \cdots a_n$ ماکزیمم باشد.

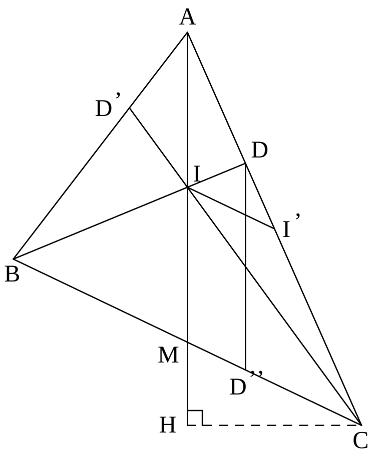
حل مسائل آزمون مرحله‌ی اول پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. مساحت مثلث AMC برابر $\frac{1}{2}$ مساحت ABC است و مساحت مثلث AIC نیز برابر $\frac{1}{2}$ مساحت AMC است (زیرا قاعدهٔ آن $AI = \frac{1}{2}AM$؛ و CH ارتفاع مشترک آنهاست). پس مساحت AIC برابر $\frac{1}{4}$ مساحت ABC است. حال ثابت می‌کنیم که مساحت AID برابر $\frac{1}{3}$ مساحت AIC است. این دو مثلث دارای ارتفاع مشترک هستند. بنابراین، باید ثابت کنیم $AC = 3AD$ یا $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$. برای این منظور، از I موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در I' قطع کند. چون I وسط AM است، پس $\frac{II'}{MC} = \frac{1}{2}$ یا $\frac{II'}{BC} = \frac{1}{4}$. از تشابه دو مثلث DII' و DBC، داریم

$$\frac{DI}{DB} = \frac{II'}{BC} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{DB}{DI} = \frac{4}{1} \Longrightarrow \frac{DB}{BI} = \frac{4}{3} \qquad (1)$$



از D خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا BC را در D'' قطع کند. دو مثلث AMC و $DD''C$ متشابهند،

پس

$$\frac{DC}{AC} = DD''AM = \frac{DD''}{2IM} = \frac{1}{2} \times \frac{DD''}{IM} \tag{2}$$

اما دو مثلث BDD'' و BIM متشابهند. پس بنابر (۱)،

$$\frac{DD''}{IM} = \frac{BD}{BI} \Longrightarrow \frac{DD''}{IM} = \frac{4}{3} \tag{1}$$

بنابر (۱) و (۲)، داریم

$$\frac{DC}{AC} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

به عبارت دیگر

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC-DC}{AC} = 1 - \frac{DC}{AC} = \frac{1}{3} \Longrightarrow AC = 3AD$$

۲. فرض کنید، p، $p+1$، $\cdots$و $p+k-1$، k عدد صحیح مثبت و متوالی باشند و

$$p+(p+1)+\cdots+(p+k-1) = 2^n$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} kp+(1+2+3+\cdots+k-1) &= 2^n \\ kp+\frac{(k-1)k}{2} &= 2^n \\ k\left(p+k-12\right) &= 2^n \end{aligned} \tag{1}$$

دو حالت را بررسی می‌کنیم.

الف) اگر k فرد باشد، $p+\frac{k-1}{2}$ عددی صحیح است و بنابراین تساوی (۱) غیر ممکن است چون 2^n عامل فردی مانند k ندارد (k بزرگتر از واحد است).

ب) اگر k زوج باشد، داریم $k=2l$، پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$2l\left(p+\frac{2l-1}{2}\right) = 2^n$$

یعنی

$$l\left(2(p+l)-1\right) = 2^n$$

چون $2(p+l)-1$ فرد است، پس 2^n باید دارای عامل اول فرد باشد که غیر ممکن است؛ پس حکم برقرار است.

۳. فرض کنیم $P(x)=P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که $P(x)$ بر x بخشپذیر است. بنابراین $P_n(x)=xP_{n-1}(x)$ (P_{n-1} یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ است). در نتیجه،

$$P_n(x-1) = (x-1)P_{n-1}(x-1)$$

یا

$$xP_n(x-۱) = x(x-۱)\,P_{n-۱}(x-۱)$$
$$(x-۱۲)\,P_n(x) = x(x-۱)\,P_{n-۱}(x-۱)$$

بنابراین، $P_n(x)$ بر $x-۱$ بخشپذیر است. پس داریم

$$P_n(x) = x(x-۱)\,P_{n-۲}(x)$$
$$P_n(x-۱) = (x-۱)(x-۲)\,P_{n-۲}(x-۱)$$
$$xP_n(x-۱) = x(x-۱)(x-۲)\,P_{n-۲}(x-۱)$$
$$(x-۱۲)P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)P_{n-۲}(x-۱)$$

بنابراین $P_n(x)$ بر $x-۲$ بخشپذیر است و می‌توان نوشت

$$P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)\,P_{n-۳}(x)$$

با ادامه دادن این روش خواهیم داشت

$$P(x) = P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)(x-۳)\cdots(x-۱۱)\,P_{n-۱۲}(x) \qquad (۱)$$

با تبدیل x به $x-۱$ داریم

$$P_n(x-۱) = (x-۱)(x-۲)(x-۳)\cdots(x-۱۲)\,P_{n-۱۲}(x-۱)$$

یا

$$(x-۱۲)\,P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۱۱)(x-۱۲)\,P_{n-۱۲}(x-۱)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) خواهیم داشت

$$(x-۱۲)x(x-۱)(x-۲)(x-۳)\cdots(x-۱۱)\,P_{n-۱۲}(x) = x(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۱۱)(x-۱۲)\,P_{n-۱۲}(x-۱)$$

در نتیجه، $P_{n-۱۲}(x) = P_{n-۱۲}(x-۱)$. می‌گیریم $Q(x) = P_{n-۱۲}(x)$؛ داریم

$$Q(x-۱) = Q(x)$$

که $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-۱۲$ است. اگر $Q(x) = Q_۰(x) = c$ (یعنی $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ صفر و برابر با یک مقدار ثابت باشد)، آنگاه رابطهٔ $Q(x) = Q(x-۱)$ برقرار است.

حال ثابت می‌کنیم که $Q(x) = c$ تنها حالتی است که رابطهٔ $Q(x) = Q(x-۱)$ می‌تواند برقرار باشد. اگر

$$Q(x) = Q_k(x) = a_۰x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_{k-۱}x + a_k$$

که در آن $k \geqslant ۱$ و $a_۰ \neq ۰$، آنگاه از $Q(x) = Q(x-۱)$ نتیجه می‌شود

$$a_۰(x-۱)^k + a_۱(x-۱)^{k-۱} + \cdots + a_k = a_۰x^k + a_۱a^{k-۱} + \cdots + a_k$$

با مساوی قرار دادن ضریب $x^{k-۱}$ در دو طرف تساوی، خواهیم داشت

$$ka_۰ + a_۱ = a_۱ \Longrightarrow a_۰ = ۰$$

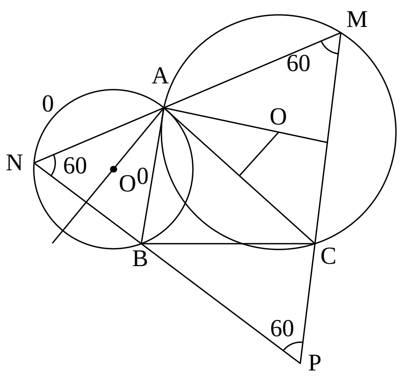
و این متناقض با $a_۰ \neq ۰$ است. پس $k = ۰$ و بنابراین، $Q(x) = c$. در نتیجه،

$$P(x) = cx(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۱۱)$$

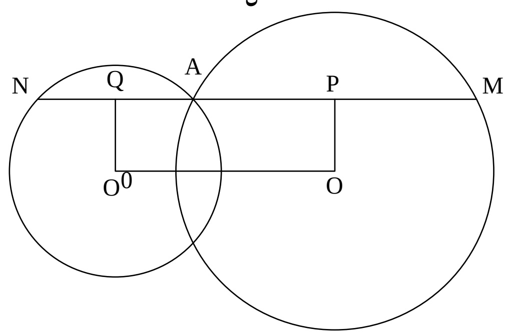
یعنی $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۱۲ است.

۴. کمان درخورهای ۶۰° را بر AC و AB رسم می‌کنیم و آنها را دوایر γ و γ' می‌نامیم. هر خطی که از A رسم شود تا γ و γ' را در M و N قطع کند و آنگاه خطوط MC و NB همدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کنند، مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱). در نتیجه بینهایت مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان بر ABC محیط کرد. حال برای اینکه مساحت یا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع ماکزیمم شود کافی است ضلع آن ماکزیمم شود. پس برای حل این قسمت کافی است از نقطهٔ A خطی رسم کنیم به طوری که MN ماکزیمم شود. ثابت می‌کنیم هرگاه از A خطی به موازات OO' (خط‌المرکزین دو دایرهٔ γ و γ') رسم کنیم این خاصیت را خواهد داشت.

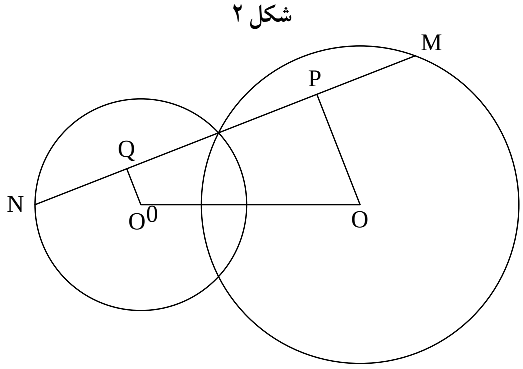
حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

اگر MN موازی OO' باشد، آنگاه واضح است که $MN = ۲OO'$ (شکل ۲).

ولی اگر MN موازی OO' نباشد، $MN < ۲OO'$ (شکل ۳). زیرا اگر از O و O' به MN عمود کنیم و پاهای عمود را P و Q بنامیم، خواهیم داشت

$$\frac{MN}{۲} = PQ < OO' \Longrightarrow MN < ۲OO'$$

۵. فرض می‌کنیم

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

در این صورت، درجه‌های $f(x)$، $f'(x)$ و $f''(x)$ به ترتیب n، $n-1$ و $n-2$ هستند. باید داشته باشیم

$$f(2x) = f'(x)f''(x)$$

پس $n = (n-1) + (n-2)$ و $n = 3$. همچنین

$$\forall x, \quad 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$$

از اتحاد فوق دستگاه معادلات زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} 8a = 18a^2 \\ 4b = 6ab + 12ab \\ 2c = 4b^2 + 6ac \\ d = 2bc \end{cases}$$

پس از حل، $f(x) = \frac{4}{9}x^3$.

۶. هریک از a_iها را می‌توان کوچکتر از ۴ گرفت زیرا $a_i = (a_i - 2) + 2$ و اگر $a_i \geqslant 4$، $2(a_i - 2) \geqslant a_i$ و اگر به جای a_i دو عدد $(a_i - 2)$ و ۲ را قرار دهیم، حاصلضرب بزرگتر خواهد شد. حال ادعا می‌کنیم که در بین a_iها بیش از دوتا عدد ۲ نمی‌توانیم داشته باشیم زیرا

$$3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2, \quad 2 + 2 + 2 = 3 + 3$$

پس به جای هر سه‌تا عدد ۲ می‌توان اعداد ۳ و ۳ را انتخاب کرد. در نتیجه با توجه به تساوی

$$1366 = 3 \times 454 + 2 + 2$$

خواهیم داشت

$$n = 456, \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_{454} = 3, \quad a_{455} = a_{456} = 2$$

یعنی ماکزیمم حاصلضرب، $2^2 \times 3^{454}$ خواهد بود.