آزمون مرحله‌ی اول دومین دوره مسابقات ریاضی کشور (بعضی از استانها)

زمان برگزاری: ۱۳۶۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

الف) استان آذربایجان شرقی

۱. توابع f و g با ضابطه‌های

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^4+3} \quad \text{و} \quad g(x)=\sqrt[4]{-2x+1}$$

تعریف شده‌اند. دامنه تعریف تابع $(f\circ g)^{-1}$ را به‌دست آورید.

۲. بین دو رابطهٔ زیر θ را حذف کنید و نشان دهید $x^2+y^2=1$.

$$\begin{cases} 2x=y\,\mathrm{tg}\theta+\sin\theta \\ 2y=x\,\mathrm{cotg}\theta+\cos\theta \end{cases}$$

۳. دایرهٔ (C) و دو نقطهٔ A و B در خارج آن مفروضند. نقطهٔ M را روی محیط این دایره طوری انتخاب کنید که MA^2+MB^2 کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۴. اگر $A=ax+by$ بر $x-y$ بخشپذیر باشد ثابت کنید که $B=(a+b)(x+y)$ نیز بر $x-y$ بخشپذیر است ($a,b,x,y\in\mathbb{N}$ و $x>y$).

۵. اگر a، b، c، $a+b-c$، $a+c-b$ و $b+c-a$ همگی مثبت فرض شوند ثابت کنید که

$$abc\geqslant(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

۶. روی محور yها نقطه‌ای تعیین کنید که اگر از این نقطه دو قائم بر منحنی تابع $y=\frac{-4}{x^2}$ رسم کنیم بر هم عمود باشند.

۷. حاصل عبارت

$$P=\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{4}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{8}\right)\cdots\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2^m}\right)$$

را حساب کرده و حد آن را وقتی که $m\to+\infty$ به‌دست آورید.

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

۸. اگر U یک ایده‌آلِ حلقهٔ تعویض‌پذیر و یکدار R باشد و $1 \in U$، اولاً ثابت کنید $U = R$ و ثانیاً اگر F یک میدان باشد با استفاده از قسمت قبل ثابت کنید ایده‌آلهای میدان F فقط $\{0\}$ و F هستند.

۹. خط D به معادلهٔ $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ محور xها را در A و محور yها را در B قطع می‌کند. معادلهٔ دایرهٔ محاطی خارجی مثلث OAB را که نظیر ضلع OA است پیدا کنید (O مبدأ محورهای مختصات است).

۱۰. صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروضند ($AB \not\parallel P$). نقطهٔ M را روی صفحه چنان انتخاب کنید که مثلث MAB متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۱. با ترازوی نامتعادلی کالایی را توزین می‌کنند دفعهٔ اول در کفهٔ A یک کیلو گرم وزنه و در کفهٔ B آنقدر کالا قرار می‌دهند تا تعادل ترازو برقرار شود؛ دفعهٔ دوم عکس عمل فوق را انجام می‌دهند. معلوم کنید که در دوبار توزین مجموع کالای وزن شده بیشتر یا کمتر یا مساوی دو کیلوگرم است.

ب) استان چهارمحال و بختیاری

۱. معادلهٔ زیر را حل کنید. (x مجهول و $a \neq 0$ فرض شود.)

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{x-1} + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

۲. اگر a_1، a_2، … و a_n جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

۳. کثیرالجمله [چندجمله‌ای] $f(x)$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$f\big(f'(x)\big) = 27x^6 - 27x^4 + 6x^2 + 2$$

۴. نمودار رابطهٔ

$$\frac{y}{|x|} + 1 = |xy| + y|y|$$

را رسم کنید.

۵. معادلهٔ

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}$$

را حل کنید.

۶. از رابطهٔ $\log_a 16 + \log_{\sqrt{2}} a = 9$ مقدار a را حساب کنید.

۷. الف) اگر V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی و V_1، V_2، … و V_n مستقل خطی باشند، ثابت کنید هر بردار این فضا را فقط به یک صورت می‌توان به صورت ترکیب خطی V_1، V_2، … و V_n نوشت.

ب) اگر $(A,*)$ یک گروه باشد و برای هر دو عنصر a و b از آن داشته باشیم $(a*b)^2 = a^2 * b^2$ ثابت کنید این گروه آبلی است.

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

۸. دو دایره از مرکزهای یکدیگر می‌گذرند. از نقطهٔ K محل برخورد آنها خطی می‌گذرانیم که دایره‌ها را در M و N قطع کند و در این نقاط مماسهایی بر دایره‌ها رسم می‌کنیم. زاویهٔ بین این مماسها را تعیین کنید.

۹. اگر داشته باشیم

$$A = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}}}_{\text{رادیکال } n}$$

الف) A را بر حسب n و α حساب کنید.

ب) مطلوب است

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

۱۰. فاصلهٔ شهر A از شهر B، ۲۴۰ کیلومتر است. اتوبوسی با سرعت متوسط ۶۰ کیلومتر در ساعت از شهر A به طرف شهر B و همزمان با آن اتومبیلی با سرعت متوسط a کیلومتر در ساعت از شهر B به شهر A حرکت می‌کنند. اتومبیل بعد از ملاقات با اتوبوس نیم ساعت دیگر به راه خود ادامه داده و سپس به طرف شهر B بر می‌گردد. حساب کنید a را به شرطی که اتومبیل و اتوبوس با هم به شهر B برسند.

ج) استان خوزستان

۱. زاویهٔ قائمهٔ مفروضی طوری تغییر می‌کند که اضلاع زاویهٔ قائمه همواره بر دو دایرهٔ ثابت مماس هستند. مکان هندسی وسط خط واصل بین دو نقطهٔ تماس را به‌دست آورید.

۲. بر خط d به معادلات

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

صفحه‌ای بگذرانید که با صفحهٔ xOy زاویهٔ 30° بسازد.

۳. تابع f به معادلهٔ

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

مفروض است. مستقیماً و با استفاده از تعریف حد ثابت کنید f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

۴. ثابت کنید که هرگاه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

۵. اگر $(S,+,\times)$ یک میدان باشد ثابت کنید $(S-\{e\},\times)$ یک گروه جابجایی است (e عضو بی‌اثر S نسبت به عمل $+$ است).

۶. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$$

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

۷. اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید که

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}$$

۸. تابع

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

مفروض است. ثابت کنید که f یک‌به‌یک و پوشاست.

۹. شخصی دارای a دوست است. به چند روش می‌تواند یک یا تعداد بیشتری از دوستان خود را به شام دعوت کند؟

۱۰. مطلوب است محاسبهٔ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(2i-1)x}{\cos^2 ix \cdot \cos^2 (i-1)x}$$

د) استان باختران

جبر و آنالیز

۱. دامنه و برد توابع $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{1+\sin^2 x} \right\rfloor$ و $g(x) = \log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ را مشخص کنید.

۲. توابع $y_1 = \sqrt[3]{x+1}$ و $y_2 = \sqrt[3]{m^2x-1}$ مفروضند. m را به قسمی تعیین کنید که توابع معکوس آنها مجانب هم باشند.

۳. پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x-|x|}{\lfloor x \rfloor}$ را در $[1,2)$ بررسی کرده، نمودار آن را در فاصلهٔ $[-2,0)$ رسم کنید.

۴. به‌ازای چه مقدار از m نقطهٔ $A(1,1)$ مرکز تقارن تابع $y = \frac{x^2+x-1}{mx+n}$ خواهد بود؟

۵. اولاً ثابت کنید $y = x^3 - 6x^2 + 12x$ در $\mathbb{R}$ معکوس‌پذیر است. ثانیاً ضابطهٔ تابع معکوس آن را به‌دست آورید.

ریاضیات جدید

۶. رقم سمت راست عدد $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ را پیدا کنید.

۷. ثابت کنید

$$9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv 0 \pmod{73}$$

۸. ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant 2$،

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}3\alpha + \cdots + \operatorname{tg}(n-1)\alpha \operatorname{tg}n\alpha = \frac{\operatorname{tg}n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - n$$

۹. اگر R یک حلقه و $a \in R$ وارونپذیر باشد، ثابت کنید $a \neq 0$ و a مقسوم‌علیه صفر نیست.

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

هندسه

۱۰. چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک خط راست واقعند. بر این خط دو نقطهٔ P و Q را چنان تعیین کنید که هم نسبت به Aو B و هم نسبت به Cو D مزدوج توافقی باشند.

۱۱. نقاط Aو B در یک طرف خط Δ واقع هستند. نقطهٔ M را روی خط Δ چنان تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطهٔ Aو B مینیمم باشد.

۱۲. مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که وسط وترهایی از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$ باشند و از مبدأ مختصات بگذرند.