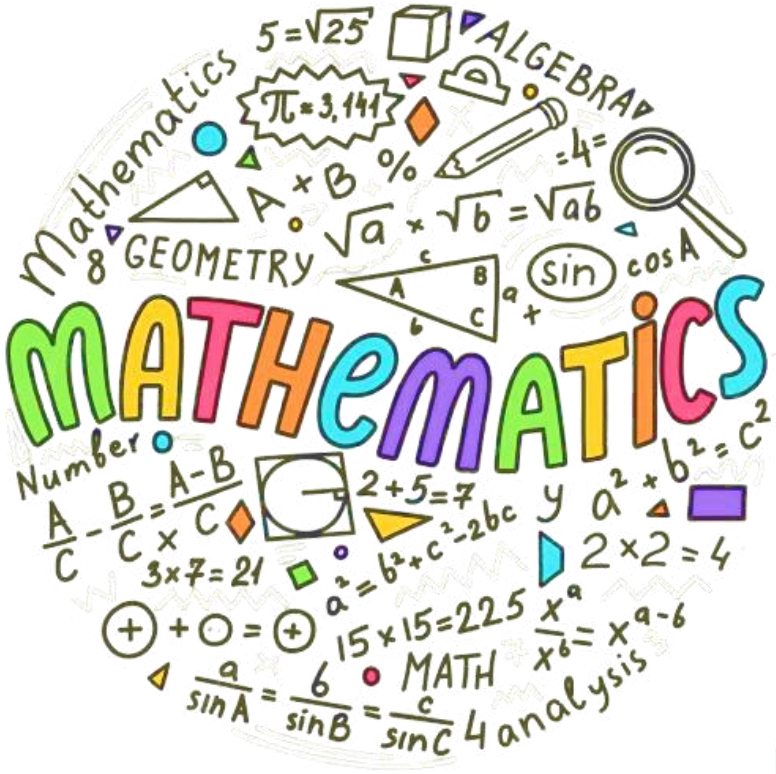
بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دفترچه سوالات مرحله اول المپیاد ریاضی از ابتدا تاکنون

(همراه با پاسخنامه تشریحی)



amoozz.ir

@sampaadia

دوره‌های جامع، جمع‌بندی، حل سوالات مرحله اول المپیاد ریاضی با اساتید المپیادی و برجسته



دکتر روح الله مهکام، طلای کشوری المپیاد ریاضی



شایان غلامی، نقره جهانی المپیاد ریاضی



دکتر علی پرتوفرد، برنز کشوری المپیاد ریاضی



امیرعباس محمدی، برنز جهانی المپیاد ریاضی



مهندس سینا رضایی زارعی، برنز جهانی المپیاد ریاضی



مهندس امیرحسین افشارراد، رتبه ۷ کنکور سراسری



رادین زاهدی، طلای جهانی المپیاد ریاضی



دکتر مسعود شفائی ابر، نقره جهانی المپیاد ریاضی

برای هدایت به صفحه دسترسی به دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی بر روی این متن کلیک کنید

سایر دوره های مرتبط:

- دوره حل و بررسی سوالات مرحله اول المپیاد ریاضی ایران
- دوره جمع بندی مرحله اول المپیاد ریاضی

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ اوّل سال ۱۴۰۲

چهل و دومین دورهٔ المپیاد ریاضی

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات		مدّت آزمون
پنج‌گزینه‌ای	پاسخ‌کوتاه	۲۱۰ دقیقه
۹	۱۶	

نام: نام‌خانوادگی: شمارهٔ صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱-کد دفترچهٔ سؤالات شما یک است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید، در غیر این‌صورت پاسخ‌نامهٔ شما تصحیح نخواهدشد.

۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطّلع کنید.

۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخّصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطّلع کنید. ضمناً مشخّصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.

۴-برگهٔ پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵-دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.

۶-سؤالات به دو شکل پاسخ‌کوتاه و پنج‌گزینه‌ای هستند، پاسخ درست به هر سوال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد.

۷-شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستانی از بین دانش‌آموزان پایهٔ دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند، به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان پایه دهم، به صورت آزمایشی و کسب تجربه، در آزمون مرحلهٔ دوم پذیرفته خواهند شد.

۸- وبگاه کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

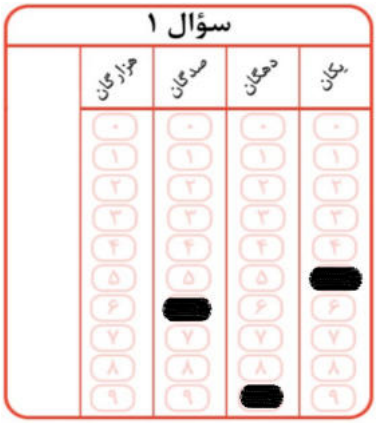
کلّیهٔ حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.
آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.ir

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

دانش‌آموز عزیز، سوال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سوال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سوال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سوالات پاسخ‌کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سوال مشابه و دارای چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یکی از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سوال‌های پاسخ‌کوتاه عددی نامنفی و کوچک‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید، به عنوان مثال اگر پاسخ ۶۹۵ باشد، شما باید در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبرو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سوال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.
هم‌چنین در انتهای برخی سوالات پاسخ‌کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده‌است که با علامت 🔔 نمایش داده‌خواهدشد. این‌بخش خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفا به دلیل جلوگیری از اشتباهات محاسباتی احتمالی است. توجه کنید تمام شکل‌های کشیده‌شده در سوالات نادقیق هستند.

۱. کمیته المپیاد ریاضی هفت عضو دارد. برای تصویب یک طرح بین اعضا رأی‌گیری صورت می‌گیرد. اگر هر کدام از اعضا به احتمال یکسان به یک طرح رأی مثبت و منفی بدهند و برای تصویب طرح نیاز به حداقل دوسوم رای مثبت باشد، احتمال تصویب یک طرح چقدر است؟

۱) $\frac{۲۹}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$ ۵) $\frac{۵}{۶۴}$

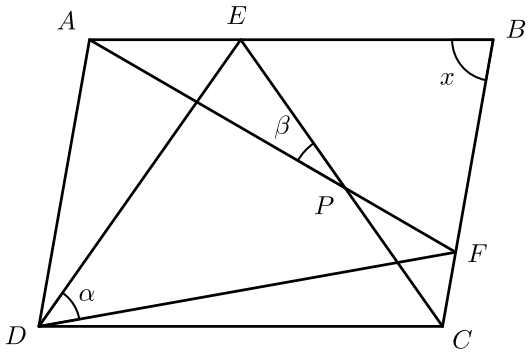
۲. معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(((x-۱)^۳-۲)^۳-۳)^۳=۴$$

۳. چند عدد طبیعی چهار رقمی $\overline{abba}$ یافت می‌شود که دقیقاً چهار مقسوم‌علیه طبیعی داشته باشد و مجموع ارقام آن برابر ۲۰ باشد.
🔔 پاسخ عددی زوج است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۴. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. α برابر با ۵۰ درجه و β برابر با ۲۰ درجه هستند. اگر $AF = FD$ و $DE = EC$ باشند، x چند درجه است؟



۵. می‌خواهیم وجوه درونی و بیرونی یک هرم منتظم با قاعده مثلث را با هشت رنگ، رنگ کنیم طوری که هر رنگ دقیقاً یک بار استفاده شود. این کار به چند طریق ممکن است؟(دو رنگ‌آمیزی که با یک دوران به هم تبدیل شوند را یکسان در نظر می‌گیریم.)

🔔 جمع ارقام جواب ۱۲ است.

۶. مردم سرزمین شکرستان بسیار گیج هستند اما مهارت بالایی در نظریه اعداد دارند. هر فرد در شکرستان یک کد ملی ده رقمی دارد. این مردم هنگام پر کردن فرم‌ها در وارد کردن کد ملی خود ممکن است مرتکب دو اشتباه شوند:

دو رقم متوالی را جابجا وارد کنند مثلاً ۱۲۳۴ به جای ۱۲۴۳.

یکی از ارقام را یک واحد کم یا زیاد وارد کنند مثلاً ۱۲۲ به جای ۱۲۳.

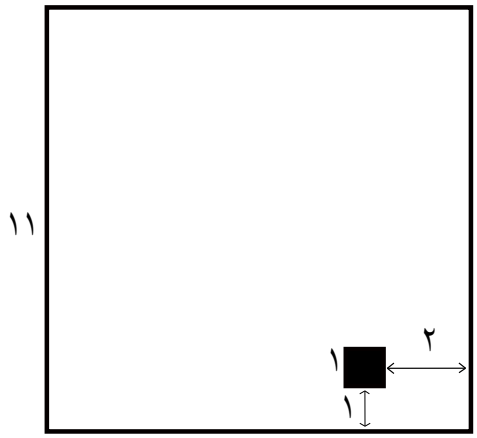
شهروندان در هر بار پرکردن فرم حداکثر یکی از این اشتباه‌ها را انجام می‌دهند و آن هم فقط در یکی از ارقام. دولت شکرستان می‌خواهد باقی‌مانده همه کد ملی‌ها را بر یک عدد طبیعی N ثابت بگذارد طوری که شهروندان در صورت اشتباه در وارد کردن کد بلافاصله با نگاه کردن به عدد نوشته شده به اشتباه خود پی ببرند. کوچک‌ترین N ای که برای این مقصود کافی است را بیابید.

۷. فرض کنید $-\pi < a, b, c < \pi$ اعدادی متمایز باشند طوری که a, b, c و $\sin a, \sin b, \sin c$ تصاعدهایی حسابی باشند. مقدار $(\sin a)^۲ + (\sin b)^۲ + (\sin c)^۲$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(۰, ۲)$ ۲) $(۱, ۲)$ ۳) $(۲, ۳)$ ۴) $(۰, ۱)$ ۵) هیچ‌کدام

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۸. شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که می‌توان داخل مربع زیر رسم کرد طوری که محیط دایره، اشتراکی با درون مربع سیاه نداشته باشد چند است؟



۹. اگر x, y, z اعدادی حقیقی و مثبت باشند که

$$x^{\log(x)} \times y^{\log(y)} \times z^{\log(z)} = ۶ \quad , \quad x^{\log(yz)} \times y^{\log(xz)} \times z^{\log(xy)} = ۲$$

حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای xyz کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱ ۵) هیچ‌کدام

۱۰. علی و رضا یک بازی انجام می‌دهند. علی یک عدد کم‌تر از ۱۰۰۰ را در ذهن خود در نظر می‌گیرد و رضا می‌خواهد این عدد را حدس بزند. به این منظور رضا می‌تواند تعدادی سوال بپرسد: در هر سوال، رضا یک عدد بین ۱۰ و ۲۰ را به علی می‌گوید و علی کوچکترین مضرب مشترک عدد در ذهن خود و این عدد را به رضا می‌گوید. فرض کنید رضا بی‌نهایت باهوش است، او به چند سوال نیاز دارد تا بتواند با اطمینان عدد علی را بفهمد؟

۱۱. امیرحسین، بابک، داریوش و پارسا روی هم ۲۰ سکه یکسان دارند. آن‌ها می‌خواهند این ۲۰ سکه را طوری بین خود تقسیم کنند که تعداد سکه‌های هیچ‌کس بیش‌تر از دو برابر سکه‌های دیگری نشود. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

🔔 جواب عددی اول است.

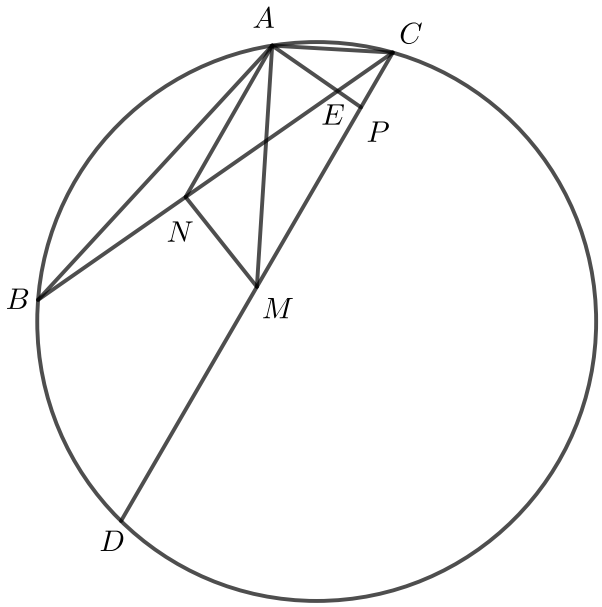
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۲. سه کلاه با مدل‌های متفاوت و چهار جعبه با مدل‌های متفاوت در اختیار داریم. یک رنگ‌آمیزی از کلاه‌ها و جعبه‌ها با دو رنگ آبی و قرمز را «خوب» می‌نامیم، اگر هم در رنگ‌آمیزی کلاه‌ها و هم در رنگ‌آمیزی جعبه‌ها از هر دو رنگ استفاده شود. می‌خواهیم کلاه‌ها را درون جعبه‌ها بگذاریم. یک روش قراردهی کلاه‌ها در جعبه‌ها را نسبت به یک رنگ‌آمیزی «مجاز» می‌نامیم اگر هر کلاه قرمز درون یک جعبه قرمز و هر کلاه آبی درون یک جعبه آبی قرار گیرد.(ممکن است درون یک جعبه بیش از یک کلاه قرار گیرد یا خالی بماند.)

همه رنگ‌آمیزی‌های خوب ممکن را در نظر می‌گیریم و تعداد راه‌های مجاز قراردهی کلاه‌ها را نسبت به هر کدام از این رنگ‌آمیزی‌ها روی یک تخته می‌نویسیم. بزرگ‌ترین عدد نوشته‌شده روی تخته چند است؟

۱۳. در شکل زیر زاویه $\angle ACB$ برابر با ۳۵ درجه و زاویه $\angle BCD$ برابر با ۲۵ درجه و زاویه $\angle EPC$ برابر با ۹۵ درجه هستند. اگر M و N به ترتیب وسط پاره‌خط‌های DC و BE باشند، اختلاف زاویه‌های $\angle MAN$ و $\angle NMA$ چند درجه است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰ ۵) ۲۵



۱۴. فرض کنید $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴$ یک تصاعد هندسی با قدر نسبت q باشد، طوری که $a_۱$ عددی طبیعی، q عددی گویا و مثبت است و داریم

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۱۹$$

مجموع مقادیر ممکن $a_۱a_۴$ را بیابید.

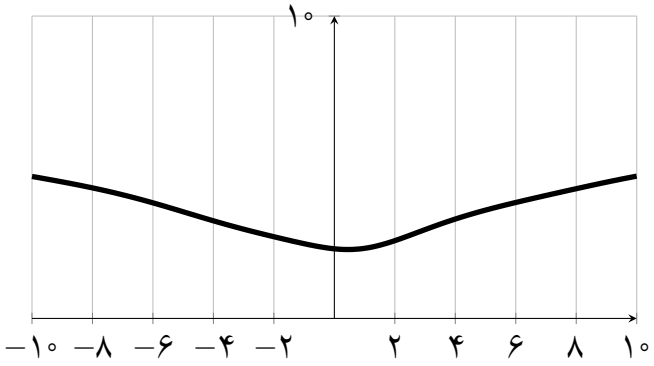
جواب عددی زوج است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۵. فرض کنید n کارت داریم که روی آن‌ها اعداد یک تا n نوشته شده است. اطلاع دقیقی از تعداد کارت‌ها نداریم اما می دانیم به احتمال یک سوم، ۷ کارت، به احتمال یک سوم ۸ کارت و به احتمال یک سوم ۹ کارت داریم. دو کارت به تصادف بیرون کشیده ایم و مشاهده کردیم مجموع این دو کارت برابر نه شده است، اکنون با چه احتمالی تعداد کارت‌ها هفت بوده است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۲۵}$ ۴) $\frac{۷}{۲۳}$ ۵) $\frac{۵}{۱۷}$

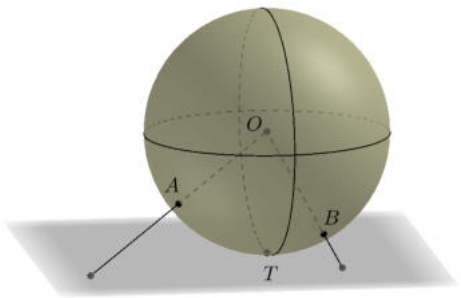
۱۶. نمودار زیر مربوط به کدام تابع است؟



۱) $\log_۲(x^۲ - ۲x - ۳)$
۲) $x^۲ - ۲x - ۳$
۳) $\log_۲((\cos x)^۲ + (\sin x)^۳ + ۹)$
۴) $\log_۲(x^۲ + (\cos x)^۳ + ۹)$
۵) $\log_۲(x^۲ - (\sin x) + ۱۰)$

۱۷. کره‌ای شیشه‌ای مانند شکل زیر در نقطه T با زمین مماس شده است. شعاع کره ۲۰ سانتی‌متر است و لامپ روشنی در مرکز کره (نقطه O) نصب شده و نقاط A و B روی سطح کره علامت خورده‌اند. اگر زاویه $\angle AOB$ برابر با ۶۰ درجه باشد و ارتفاع A و B از سطح زمین به ترتیب ۱۰ و ۵ سانتی‌متر باشند، فاصله سایه‌های دو نقطه A و B چند سانتی‌متر است؟

۱) $۲۰\sqrt{۱۰}$ ۲) ۶۰ ۳) $۲۰\sqrt{\frac{۲۶}{۳}}$ ۴) $\frac{۴۰\sqrt{۷}}{۳}$ ۵) $۲۰\sqrt{۸}$



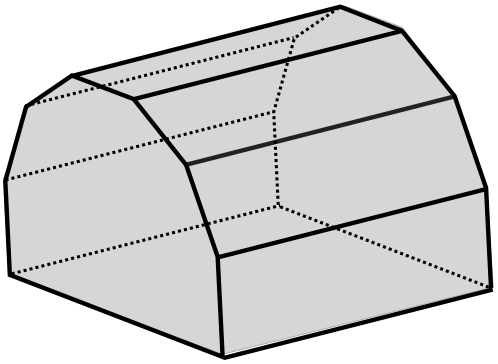
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

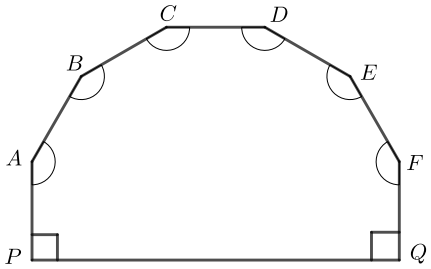
۱۸. دنباله $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ این گونه تعریف می‌شود که $a_1 = 1402$ و برای $i \geq 1$ داریم $a_{i+1} = 2a_i + 7i$. تقسیم باقی‌مانده a_{99} بر ۱۴ را بیابید.

۱۹. می‌دانیم $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه سه با ضرایب حقیقی است و $P(0) = 0, P(1) = 1, P(2) = 2$. اگر بدانیم P یک ریشه مضاعف دارد، مجموع مقادیر ممکن برای $P(3)$ را بیابید. می‌گوییم یک چندجمله‌ای ریشه مضاعف دارد اگر عدد حقیقی r یافت شود که $P(x)$ بر $(x-r)^2$ بخش‌پذیر باشد.

۲۰. سالنی با ابعاد قاعده ۵۰ متر در ۵۰ متر به شکل زیر ساخته شده است.(در شکل یک برش عمودی از سالن نیز نمایش داده شده است که تناظری بین پاره‌خط‌های این برش و وجوه سالن به دست می‌دهد.) در یکی از نقاط سقف چراغی نصب شده است. منظور از سقف اجتماع وجوه متناظر با پاره خط های AB، BC، CD، DE و EF است. اگر درب ورودی در وجه متناظر با پاره خط PA قرار داشته و ارتفاعی برابر با طول PA داشته باشد و بازگذاشته شود و نور چراغ تا فاصله ۵۰ متری بیرون درب ورودی، سطح زمین را روشن کرده باشد ارتفاع چراغ از سطح زمین چند متر است؟ (در شکل پاره خط‌های AB، BC، CD، DE، EF و FQ همگی طول برابری دارند و زاویه‌های مشخص شده نیز باهم برابرند.)

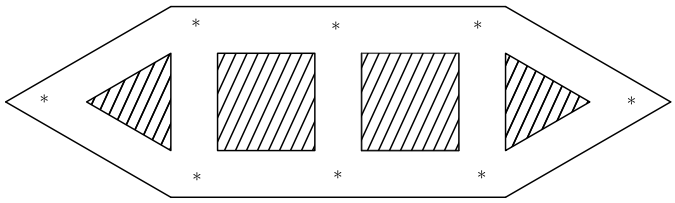
۱) ۲۴ ۲) $8\sqrt{10}$ ۳) $6\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{\frac{49}{3}}$ ۵) ۲۵





@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۱. در موزه‌ای به شکل زیر، در نقاط علامت‌خورده آثار باستانی ارزشمندی به نمایش گذاشته شده است. می‌خواهیم در بالای نقاط علامت‌خورده تعدادی دزدگیر نصب کنیم که به محض دیدن این که دزدی مشغول سرقت یکی از آثار باستانی است به صدا در می‌آیند. حداقل به چند دزدگیر نیازمندیم تا با دانستن این که کدام دزدگیرها به صدا درآمده‌اند از هر سرقتی با خبر شویم و مکان دقیق سارق نیز مشخص شود (یک دزدگیر به صدا درمی‌آید اگر در مسیر مستقیمی که بین دزدگیر و دزد قرار دارد هیچ دیواری وجود نداشته باشد. در شکل نواحی هاشور خورده دیوار هستند.)



۲۲. چند زیرمجموعه سه‌عضوی $\{a, b, c\}$ از اعداد طبیعی چهاررقمی وجود دارد به گونه‌ای که هر سه عدد

$$a^۳ + b^۳ + c^۳, a^۲ + b^۲ + c^۲, a + b + c$$

بر ۱۴۰۲ بخش‌پذیر باشند؟

مجموع ارقام جواب ۵ است.

۲۳. اگر a, b, c اعدادی حقیقی ناصفر باشند که

$$\begin{cases} \frac{۱}{ca} = ۳a + b \\ \frac{۱}{ab} = b + ۲c \\ \frac{۱}{bc} = ۲c + ۳a \end{cases}$$

آن‌گاه نزدیک‌ترین عدد صحیح به $(a + b + c)^۳$ را بیابید.

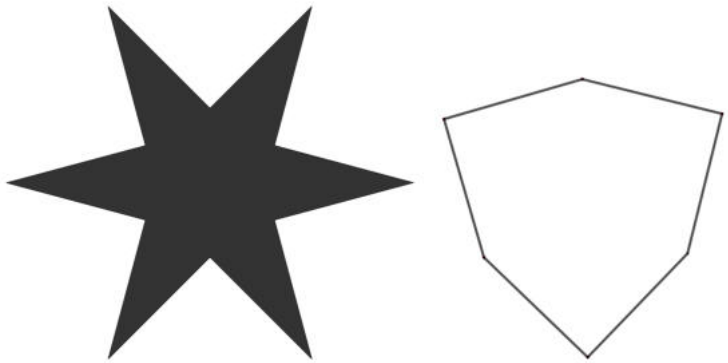
۲۴. یک ۱۴۰۲ ضلعی منتظم داریم، می‌خواهیم روی هر یک از رئوس آن یکی از ارقام ۰ یا ۱ را بنویسیم طوری که روی هیچ سه رأس متوالی، ۱۱۱,۰۰۰,۰۱۰ مشاهده نشود. تعداد رقم‌های ۱ استفاده شده چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

پاسخ مضرب ۹ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۵. تمام صفحه‌ای را با کاشی‌های به شکل زیر به طور کامل کاشی کاری کرده‌ایم. یعنی تمام نقاط صفحه، یا روی مرز دو کاشی قرار دارند و یا درون دقیقا یک کاشی هستند. کاشی سیاه رنگ یک ۱۲ ضلعی با زاویه های داخلی یک در میان ۲۷۰ و ۳۰ درجه است. همین طور کاشی سفید نیز یک ۶ ضلعی با زوایای داخلی یک در میان ۱۵۰ و ۹۰ درجه می باشد. اگر طول تمام اضلاع هر دو نوع کاشی ۲ سانتی متر باشد و یک دایره بزرگ در صفحه با شعاع بیش‌تر از ۱۰۰۰۰۰ رسم کنیم. نسبت مساحت سیاه رنگ به مساحت سفید رنگ داخل دایره به چه عددی نزدیک تر است؟

۱) $۳\sqrt{۳} - \frac{۹}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳} - \frac{۳}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳} - ۳$ ۴) $۴\sqrt{۳} - ۶$ ۵) $۸\sqrt{۳} - ۱۲$



پاسخنامه مرحله اول چهل و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی

سوال (۱). گزینه ۱

$$4 < 7 \times \frac{2}{3} < 5$$

بنابراین به حداقل پنج رای مثبت برای تصویب طرح نیاز است.

حالات مطلوب :

1.پنج نفر رای بدهند: $\binom{7}{5}$حالت

2.شش نفر رای بدهند: $\binom{7}{6}$حالت

3.هفت نفر رای بدهند: $\binom{7}{7}$حالت

مجموع حالات مطلوب: $\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 21 + 7 + 1 + 29$

کل حالات:

هر کسی ممکن است رای مثبت یا منفی دهد، بنابراین تعداد کل حالات $2^7 = 128$ تا است.

بنابراین:

$$\text{احتمال تصویب} = \frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{حالات کل}} = \frac{29}{128}$$

سوال (۲). پاسخ: ۱

با توجه به اینکه $f(x)= x^3$ برای x های حقیقی تابعی یک به یک است نتیجه می‌گیریم که:

$$1+\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{4}}} = x \leftarrow 2+\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{4}} = (x-1)^3 \leftarrow 3+ \sqrt[3]{4} =((x-1)^3 - 2)^3$$

در نتیجه اثبات می‌شود تنها یک جواب حقیقی برای x وجود دارد.

سوال (۳). پاسخ: ۲

اگر تجزیه عدد $n = \overline{abba}$ به عوامل اول به فرم $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ خواهد بود و از آنجایی که n چهار مقسوم‌علیه طبیعی دارد، پس یا توان سوم یک عدد اول است یا ضرب دو عدد اول متمایز. از طرفی a ناصفر است و مجموع ارقام n برای 20 برابر $2a + 2b$ است و درنتیجه $a + b = 10$. داریم

$$n = \overline{abba} = 1001a + 110b = 11(10b + 91a) = 11(10(a + b) + 81a) = 11(100 + 81a)$$

بنابرین یا $100 + 81a = 11^2$ و یا $100 + 81a$ اول است. حالت ابتدایی بنابر صحیح بودن a غیرممکن است. a بین $\{1, \dots, 9\}$ است. مقدار $100 + 81a$ به ازای $a = 2, 4, 6, 8$ مضرب دو، به ازای $a = 3$ مضرب هفت، به ازای $a = 5$ مضرب پنج و به ازای $a = 7$ مضرب 23 است و تنها به ازای $a = 1, 9$ اول است، پس تنها جواب‌های مسئله 1991 و 9119 هستند.

سوال (۴). پاسخ: ۷۵

فرض کنید که خطوط EC و AF در نقطه P متقاطع باشند و اندازه زاویه $\angle FDC$ برابر با α باشد. در این صورت از آنجایی که $ED = EC$ است ؛ $\angle BEQ = \angle BEC = ECD = 50 + \alpha$ خواهد بود و در نتیجه از آنجایی که $\angle EQA = 20$ است ، $\angle EAF = \alpha + 30$ خواهد بود و داریم:

$$FA = FD \Rightarrow \angle FAD = \angle BAD - \angle BAF = 150 - x - \alpha = \angle FDA = \angle ADC - \angle FDC = x - \alpha \Rightarrow x = 75$$

سوال (۵). پاسخ: ۳۳۶۰

ما در اصل هر حالت رنگ‌آمیزی هرم را ۱۲ بار می‌شماریم. پس باید تعداد کل رنگ‌آمیزی‌ها را بر ۱۲ تقسیم کنیم (یکی از ۴ وجه را ثابت نگه دارید؛ بقیه وجه ها ۳ حالت برای دوران دارند):

$$\frac{8!}{12} = 3360$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سوال (۶). پاسخ: ۱۱

ابتدا ثابت می‌کنیم عدد 11 مطلوب خواهد بود.

برهان خلف: 11 در یکی از دو عملیات مطلوب نخواهد بود.

ارقام عدد مورد نظر را از چپ به راست a_1 تا a_{10} نام‌گذاری می‌کنیم. (عدد اولیه را x و عدد تولید شده را y می‌نامیم.)

عملیات‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$x = y \ (mod\ 11) \Rightarrow x - y = 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Rightarrow \left(a_i * 10^{10-i} + a_{i+1} * 10^{10-(i+1)}\right) - \left(a_{i+1} * 10^{10-i} + a_i * 10^{10-(i+1)}\right) = 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Rightarrow (a_i - a_{i+1})\left(10^{10-i} - 10^{10-(i+1)}\right) = 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Rightarrow a_i = a_{i+1} \ (mod\ 11)$$

حال چون این اعداد کمتر از 10 هستند پس داریم $a_i = a_{i+1}$ که درنتیجه تغییری در کد ملی ایجاد نشده است.

$$x = y \ (mod\ 11) \Rightarrow \ x - y = 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Rightarrow a_i * 10^{10-i} - (a_i \pm 1) * 10^{10-i} = 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Rightarrow \ 10^{10-i}(\pm 1) = 0 \ (\ mod\ 11)$$

که این تناقض حاصل می‌کند. در نتیجه 11 مطلوب است و فرض خلف اشتباه بوده است.

حال اعداد کمتر از 11 را بررسی می‌کنیم:

عدد 1: هر عملیات تغییری در عدد ایجاد نمی‌کند.

عدد 2: به رقم یکان وابسته می‌شویم و عملیات های ما روی بقیه رقم‌ها تاثیری نخواهد داشت.

عدد 3: به مجموع ارقام وابسته هستیم که در نتیجه عملیات جابجایی تغییری ایجاد نمی‌کند.

عدد 4: به رقم یکان و دهگان وابسته می‌شویم و عملیات‌های ما روی بقیه رقم‌ها تاثیری نخواهد داشت.

عدد 5: به رقم یکان وابسته می‌شویم و عملیات‌های ما روی بقیه رقم‌ها تاثیری نخواهد داشت.

عدد 6: به دلایل برای 2 و 3 اگر دهگان و صدگان را عوض کنیم به مشکل برخواهیم خورد.

عدد 7: عدد یکان 7 باشد و دهگان 0 باشد و جای این دو عدد را عوض کنیم.

عدد 8: به رقم یکان و دهگان و صدگان وابسته می‌شویم و عملیات‌های ما روی بقیه رقم‌ها تاثیری نخواهد داشت.

عدد 9: مانند 3 به مجموع ارقام وابسته می‌شویم و عملیات جابجایی تغییری ایجاد نمی‌کند.

عدد10: به رقم یکان وابسته می‌شویم و عملیات‌های ما روی بقیه رقم‌ها تاثیری نخواهد داشت.

در نتیجه پاسخ مسئله 11 است.

سوال (۷). گزینه ۵

قرار می‌دهیم

$$a = \frac{\pi}{2}, b = 0, c = -\frac{\pi}{2}$$

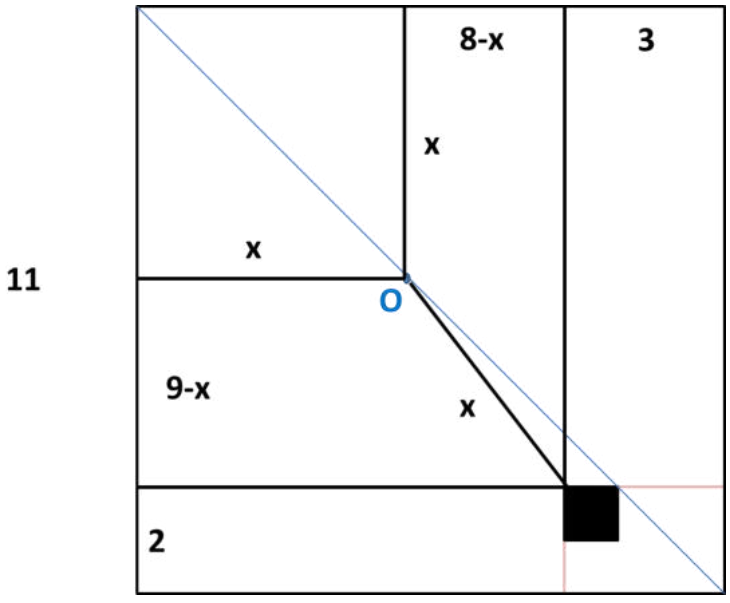
$$\sin(a) = 1, \sin(b) = 0, \sin(c) = -1$$

$$sin(a)^2 + sin\,(b)^2 + sin\,(c)^2 = 1 + 0 + 1 = 2$$

پس با با این مثال گفتیم حتما دو نیز ظاهر می‌شود اما در هیچ گزینه‌ای دو نداریم پس جواب می‌شود گزینه 5 هیچکدام.

سوال (۸). پاسخ: ۵

بزرگترین دایره بدون برخورد با مربع را در نظر می‌گیریم. اگر دایره با ضلع بالا و ضلع چپ مماس نباشد می‌توان آن را جابجا کرد و شعاع را بیشتر کرد تا مماس شود. همچنین اگر به گوشه بالا چپ مربع سیاه مماس نباشد هم می‌شود شعاع را بیشتر کرد.



بنابراین فاصله o از اضلاع و آن گوشه باید برابر باشد. طبق قضیه‌ی فیثاغورس:

$$(8-x)^2+(9-x)^2=x^2 \Rightarrow x^2-34x+145=0 \Rightarrow (x-5)(x-29)=0$$

چون شعاع از 11 کمتر است پس x=5 است و شعاع بزرگترین دایره برابر 5 است.

سوال (۹). گزینه ۴

می‌دانیم $x=10^{log(x)}$ با قرار دادن این رابطه و روابط مشابه برای y,z داریم:

$$x^{log(x)} \times y^{log(y)} \times z^{log(z)} = 6 \Rightarrow 10^{log(x)^2} \times 10^{log(y)^2} \times 10^{log(z)^2} = 6$$
$$\Rightarrow 10^{log(x)^2+log(y)^2+log(z)^2} = 6 \Rightarrow log(x)^2+log(y)^2+log(z)^2 = log(6)$$

$$x^{log(yz)} \times y^{log(xz)} \times z^{log(xy)} = 2$$
$$\Rightarrow 10^{log(yz)log(x)} \times 10^{log(xz)log(y)} \times 10^{log(xy)log(z)} = 2$$
$$\Rightarrow 10^{2log(x)log(y)+2log(x)log(z)+2log(y)log(z)} = 2$$
$$\Rightarrow 2log(x)log(y)+2log(x)log(z)+2log(y)log(z) = log(2)$$

با جمع دو رابطه بالا داریم:

$$log(x)^2+log(y)^2+log(z)^2+2log(x)log(y)+2log(x)log(z)+2log(y)log(z)$$
$$= log(12) \Rightarrow \big(log(x)+log(y)+log(z)\big)^2 = log(12)$$

$$log(xyz) = \pm\sqrt{log(12)}$$

با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتم و پوشایی آن اگر:

$$log(t) = \sqrt{log(12)} \Rightarrow log\left(\frac{1}{t}\right) = -\sqrt{log(12)}$$

پس xyz یا برابر t است یا $\frac{1}{t}$ پس حاصل‌ضرب تمام مقادیر ممکن 1 می‌شود.

سوال (۱۰). پاسخ: ۲

رضا نمی‌تواند با یک حدس جواب را بفهمد چرا که فرض کنید عدد m را بگوید و جواب علی برابر 23m باشد، آنگاه رضا نمی‌فهمد عدد مورد نظر 23m است یا 23 .

همچنین اگر رضا ابتدا 13 و سپس عدد 17 را انتخاب کند عدد مورد نظر را پیدا می‌کند. چرا که اگر عدد علی

$$n = 13^a \times 17^b \times k$$

باشد که a, b, k اعداد صحیح نامنفی اند و k نسبت به 13 و 17 اول است، آنگاه رضا با انتخاب 13 b, k را می فهمد و با انتخاب 17، a, k را می‌فهمد. (فرض کنید رضا در جواب 13 عدد s را دریافت کند، آنگاه اگر عوامل 13 آن را کنار بگذارد تا عددی به فرم $k' \times 17^{b'}$ به دست بیاورد آنگاه , b=b' k=k' است) پس رضا با 2 سوال به عدد می‌رسد.

سوال (۱۱). پاسخ: ۴۷

ابتدا فرض کنید کمترین تعداد سکه در بین این چهار نفر α باشد. داریم تعداد سکه‌های بقیه کمتر مساوی 2α است پس : $\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 7\alpha \geq 20$ که نتیجه می‌دهد α حداقل 3 است.

اگر $\alpha = 3$ باشد:

حداکثر و تنها مقدار ممکن 6 است که نتیجه می‌دهد تنها نحوه پخش ممکن سکه حالت $(6,6,5,3)$ است که به $\frac{4!}{2!} = 12$ طریق می‌توان آن را انجام داد.

اگر $\alpha = 4$ باشد:

حداکثر مقدار اگر 8 باشد: تنها حالت ممکن $(8,4,4,4)$ است که به 4 طریق می‌توان آن را بین چهار نفر پخش کرد.

حداکثر مقدار اگر 7 باشد: تنها حالت ممکن $(7,5,4,4)$ است که به $\frac{4!}{2!} = 12$ طریق میتوان آن را بین چهار نفر پخش کرد.

حداکثر مقدار اگر 6 باشد: حالات ممکن $(6,6,4,4)$ و $(6,5,5,4)$ هستند که به ترتیب به $\frac{4!}{2!\times 2!} = 6$ و $\frac{4!}{2!} = 12$ طریق می‌توان آنها را بین چهار نفر پخش کرد.

اگر $\alpha = 5$ باشد:

به وضوح تنها حالت ممکن $(5,5,5,5)$ است که تنها به یک طریق می‌توان آن را بین چهار نفر پخش کرد.

پس: $12 + 4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 47$.

سوال (۱۲). پاسخ: ۹

اگر فرض کنیم تعداد کلاه های قرمز A و تعداد جعبه های قرمز B باشد دو شرط زیر را طبق تعریف خوب بودن داریم

$$0 < A < 3, \qquad 0 < B < 4$$

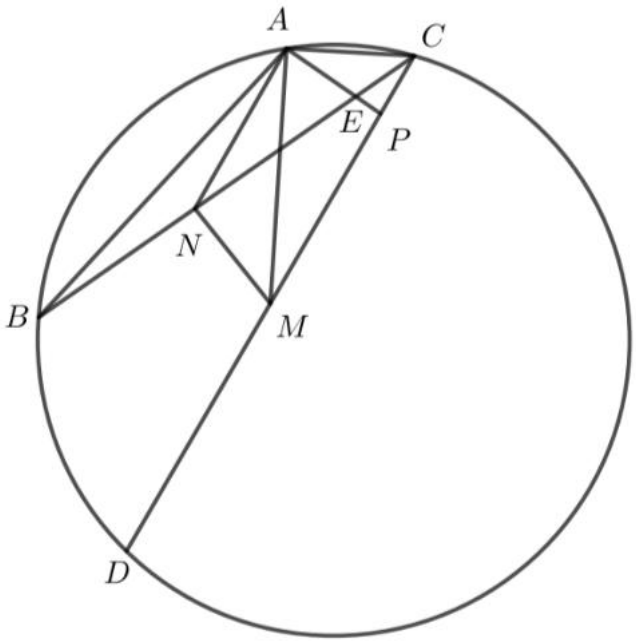
حال چون تعداد راه‌های قرار دادن A کلاه داخل B جعبه B^A است داریم که تعداد قراردهی مجاز عبارت زیر است

$$. \ (4-B)^{(3-A)}B^A$$

حال صرفا 6 حالت برای (A,B) داریم که صرفا برای آن‌ها عبارت مقابل را حساب کنیم. اگر دقت کنیم در این 6 جفت حاصل عبارت برای (A,B) و (3-A , 4-B) برابر است پس صرفا برای 3 حالت حساب می‌کنیم و بیشینه مقدار را حساب می‌کنیم که 9 است .

سوال (۱۳). گزینه ۲

ابتدا ثابت میکنیم دو مثلث AEB و DAC متشابه هستند:



طبق زاویه های گفته شده می دانیم زاویه $CEP = AEN = 180 - (95 + 25) = 60$ همچنین $ACP = ACB + BCD = 25 + 35 = 60$ پس داریم: $AEN = ACP$ از طرفی هم داریم $ABC = ADC$ پس طبق حالت دو زاویه، دو مثلث ذکر شده متشابه هستند.

حال چون AN و AM هر دو میانه در این دو مثلث هستند پس طبق تشابه داریم $MAC = NAE$ که در نتیجه: $MAP + 25 = MAP + NAM$ که در نتیجه $NAM = 25$. همچنین طبق میانه‌های گفته شده داریم که $AMC = ANC$ پس چهارضلعی ANMC محاطی خواهد بود.

پس $NMA = NCA = 35$ که در نتیجه تفاضل دو زاویه مذکور برابر 10=25-35 خواهد بود. در نتیجه گزینه 2 جواب است.

سوال (۱۴). پاسخ: ۷۸

فرض کنید که (زیرا عددی گویا و مثبت است):

$$q = \frac{m}{n}, \qquad (m,n) = 1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = a_1\left(1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right) = a_1\left(\frac{n^2 + mn + m^2}{n^2}\right) = 19 \Rightarrow$$

$$a_1(n^2 + mn + m^2) = 19n^2 \Rightarrow$$

$$n^2 + mn + m^2 | 19n^2, (n^2 + mn + m^2, n^2) = 1 \Rightarrow$$

$$n^2 + mn + m^2 = 19 \text{ یا } 1$$

دقت کنید آخرین عبارت نمی‌تواند برابر با ۱ شود چون که جمع سه عدد طبیعی است پس حداقل ۳ است!

$$n^2 + mn + m^2 = 19, a_1 = n^2 \Rightarrow a_1 a_4 = n^4\left(\frac{m^3}{n^3}\right) = m^3 n \qquad (*)$$

حالا به سادگی طبق نکته زیر با بررسی ۴ حالت (فرض کنید یکی بزرگتر است؛ ولی برای جواب‌های نهایی جای دو متغییر را عوض کنید!):

$$n^2 \le m^2 < 19 \Rightarrow n \le m < 5 \Rightarrow (m,n) = (2,3), (3,2)$$

حالا برای هر دو حالت مقدار عبارت $(*)$ را حساب کنید و با هم جمع کنید:

$$2^3 \times 3 + 2 \times 3^3 = 78$$

سوال (۱۵). گزینه ۳

فرض کنید A_7 پیشامد این است که ۷ کارت داشته باشیم و B پیشامد این است که مجموع دو کارت انتخاب شده برابر با ۹ باشد.

سوال از ما $P(A_7|B)$ را خواسته است. ($P(A_7|B)$ برابر احتمال A_7 به شرط B است یعنی با دانستن اینکه B رخ داده است با چه احتمالی A_7 رخ می‌دهد.) می‌دانیم: $P(A_7|B) = \frac{P(A_7 \cap B)}{P(B)}$ حال مقادیر هر کدام از احتمال‌های مورد نیاز را به ترتیب محاسبه می‌کنیم.

$P(A_7 \cap B)$ احتمال این است که ۷ کارت داشته باشیم و مجموع دو کارت انتخاب شده برابر ۹ باشد. به احتمال $\frac{۱}{۳}$ تعداد کارت‌های ما برابر ۷ خواهد بود و وقتی ۷ کارت داریم تنها ۳ زوج از $\binom{۷}{۲}$ زوج کارت ممکن وجود دارند که مجموعشان برابر ۹ است . (۲+۷ و ۳+۶ و ۴+۵) پس احتمال رخ دادن $A_7 \cap B$ برابر $\frac{۳}{\binom{۷}{۲}} \times \frac{۱}{۳}$.(به طور دقیق‌تر می‌دانیم $P(B|A_7) = \frac{P(A_7 \cap B)}{P(A_7)}$ که نتیجه می‌دهد

$P(A_7 \cap B) = P(A_7) \times P(B|A_7)$ و $P(A_7) = \frac{1}{3}$ و $P(B|A_7) = \frac{۳}{\binom{۷}{۲}}$ که نتیجه خواسته شده را میدهد.)

حال باید $P(B)$ را محاسبه کنیم. چون رویدادهای اینکه ۷، ۸ یا ۹ کارت داشته باشیم فضای حالات را افراز می‌کنند اگر پیشامدهای داشتن ۸ و ۹ کارت را به ترتیب A_8 و A_9 بنامیم داریم

$$P(B) = P(B \cap A_7) + P(B \cap A_8) + P(B \cap A_9)$$

که اگر هر کدام از سه احتمال مورد نیاز را با شیوه ای که $P(A_7 \cap B)$ را محاسبه کردیم، محاسبه کنیم به دست می‌آید که

$P(B \cap A_7) . P(B \cap A_8) . P(B \cap A_9)$ به ترتیب برابر با $\frac{۴}{\binom{۹}{۲}} \times \frac{۱}{۳} . \frac{۴}{\binom{۸}{۲}} \times \frac{۱}{۳} . \frac{۳}{\binom{۷}{۲}} \times \frac{۱}{۳}$ هستند. که با جایگذاری در رابطه قبل $P(B)$ به دست می‌آید.

حال که هم $P(A_7 \cap B)$ و هم $P(B)$ را محاسبه کردیم کافیست این مقادیر را در رابطه اولیه جایگذاری کنیم که پس از جایگذاری پاسخ $\frac{۹}{۲۵}$ به دست می‌آید.

سوال (۱۶). گزینه ۵

مقدار گزینه یک به ازای $x = 0$ حقیقی نیست، مقدار گزینه دو به ازای همین مقدار مثبت نیست، تابع گزینه سه متناوب با دوره تناوب 2π است و تابع گزینه چهار نسبت به محور y قرینه است، در نتیجه چهار گزینه اول رد می‌شوند و جواب صحیح گزینه پنج است.

سوال (۱۷). گزینه ۴

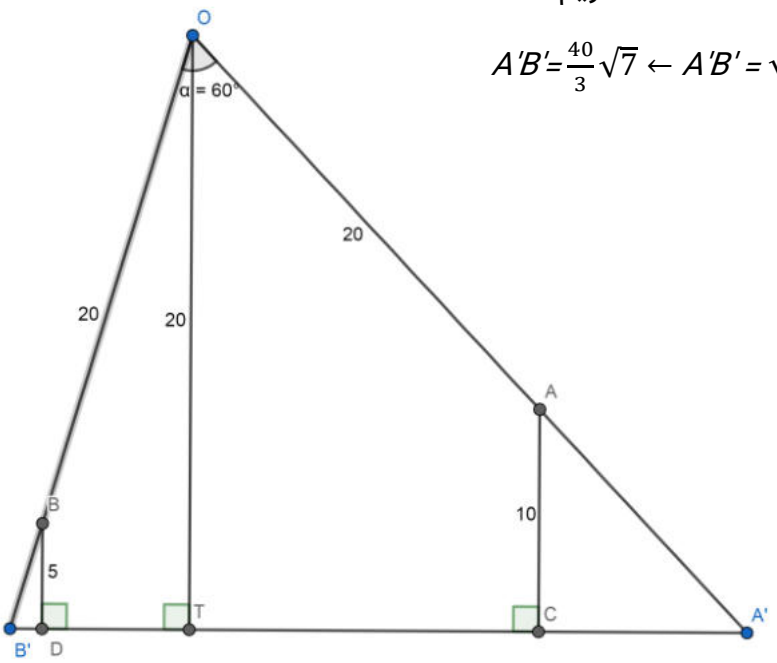
با استفاده از قضیه تالس در مثلث 'OTA از آنجایی که OT موازی AC است داریم:

$$OA' = 40 \Rightarrow 20 = AA' \Rightarrow 2AA' = 20 + AA' \Rightarrow \frac{10}{20} = \frac{AC}{20+AC} \Rightarrow \frac{AC}{OT} = \frac{AA'}{OA'}$$

به شکل مشابه با استفاده از قضیه تالس در مثلث OTB' نتیجه میگیریم که $OB' = \frac{80}{3}$

با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث $A'OB'$ داریم:

$$A'B' = \frac{40}{3}\sqrt{7} \leftarrow A'B' = \sqrt{OB'^2 + OA'^2 - 2OB'.OA' \cos 60}$$



سوال (۱۸). پاسخ: ۸

$$a_{i+1} = 2a_i + 7i \equiv 2a_i (mod\ 7)$$

ابتدا باقیمانده تقسیم a_{99} بر هفت را حساب می‌کنیم:

$$a_{99} \equiv 2a_{98} \equiv 2^2 a_{97} \equiv \cdots \equiv 2^{98} a_1 \equiv 2^{98} \times 1402 \equiv 2^{99}\ (mod\ 7)$$

از طرفی

$$2^{99} \equiv (2^3)^{33} \equiv 1^{33} \equiv 1\ (mod\ 7)$$

بنابراین:

$$a_{99} \equiv 1\ (mod\ 7)$$

حال باقیمانده تقسیم a_{99} بر دو را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{i+1} = 2a_i + 7i \equiv 7i \ (mod\ 2)$$

بنابراین:

$$a_{99} \equiv 7 \times 98 \equiv 0 \ (mod\ 2)$$

و از آنجا که باقیمانده تقسیم a_{99} بر هفت برابر با یک و باقیمانده تقسیم a_{99} بر دو برابر با صفر است، باقیمانده تقسیم a_{99} بر 14 باید برابر با 8 باشد.

سوال (۱۹). پاسخ: ۲۷

حالت اول: ریشه مضاعف بر روی 0 باشد:

$$P(x) = ax^2(\ x - r\ )$$

$$P(1) = a(1 - r) = 1,\ \ P(2) = 4a(2 - r) = 2 \Rightarrow 2a(2 - r) = 1 \Rightarrow 2a(2 - r)\ = a(1 - r)$$
$$\Rightarrow 2(2 - r) = (1 - r) \Rightarrow r = 3$$

$$r = 3, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow P(3) = 0$$

حالت دوم: ریشه مضاعف بر روی صفر نباشد:

$$P(x) = ax(x - r)^2$$

$$P(1) = a(1 - r)^2 = 1,\ \ P(2) = 2a(2 - r)^2 = 2 \Rightarrow a(2 - r) = 1$$

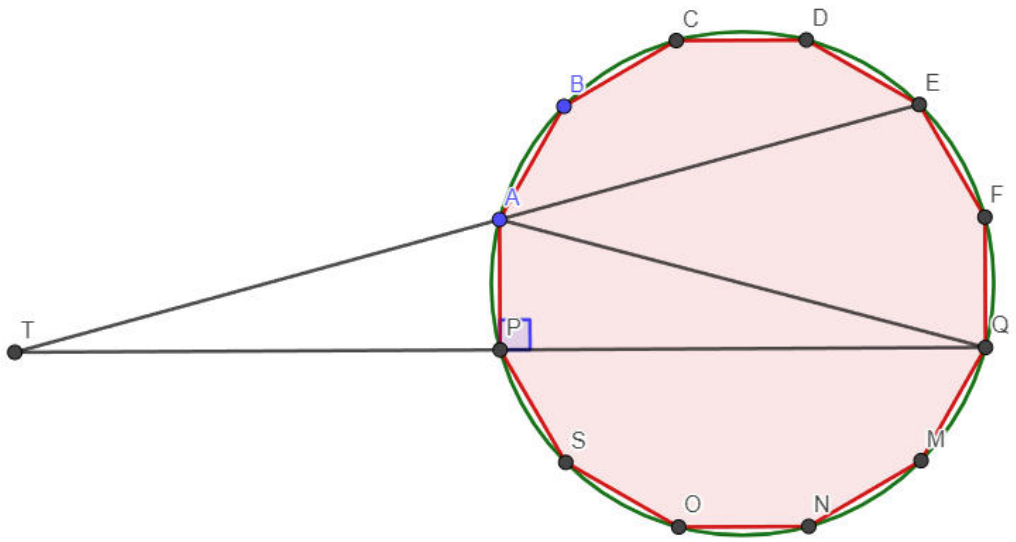
$$a(1 - r)^2 = a(2 - r)^2 \Rightarrow (1 - r)^2 = (2 - r)^2$$

به این معناست که یا $(1 - r) = (2 - r)$ که تناقض است یا داریم که $(1 - r) = -(2 - r)$ که به ما می‌دهد r=1.5 و a = 4. حال اگر در چندجمله‌ای 3 بگذاریم

$$.P(3) = 27 \Rightarrow 27 + 0 = 27$$

سوال (۲۰). گزینه ۵

دقت کنید که شکل داده شده راس های یک چندضلعی منتظم است که اگر آن را کامل کنیم یک 12 ضلعی منتظم به دست می آید.



فرض کنید T به گونه‌ای باشد که:

$$TP = TQ = 50$$

در این صورت دو مثلث TAP,QAP به حالت دو ضلع و زاویه بین همنهشت هستند. پس داریم:

$$\angle TAP = \angle QAP$$

دقت کنید هر کمان کوچک از دایره برابر 30 درجه است. پس:

$$\angle TAP = \angle QAP = 75$$

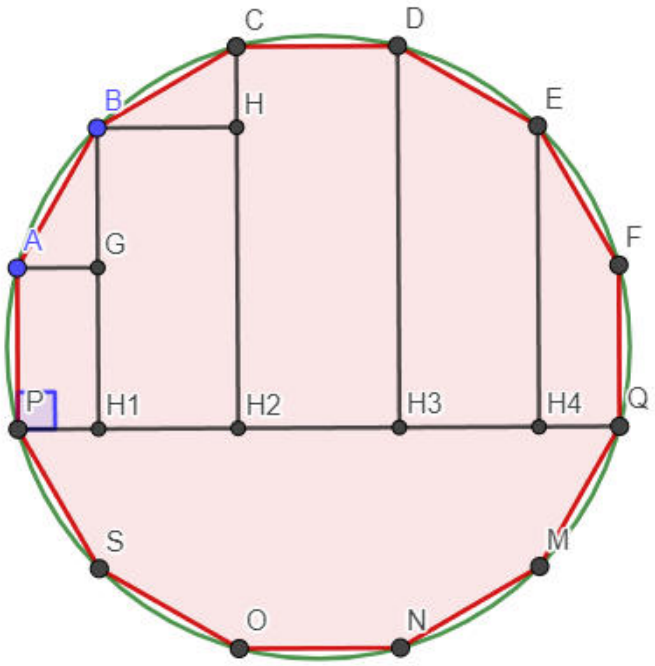
همچنین:

$$\angle EAQ = 30$$

پس:

$$\angle EAT = 75 + 75 + 30 = 180$$

پس A,T,E همخط هستند. پس ارتفاع چراغ برابر ارتفاع E است.



فرض کنید طول ضلع 12 ضلعی منتظم x باشد.

$$\angle PAB = 150$$

$$\angle GAB = 150 - 90 = 60$$

$$\angle GBA = 180 - 90 - 60 = 30$$

$$\angle HBC = 150 - 90 - 30 = 30$$

طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$QH4 = PH1 = AG = x\cos G\,AB = \frac{x}{2}$$

$$H3H4 = H1H2 = BH = x\cos H\,BC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$H2H3 = x$$

پس:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = 50$$

پس:

$$x = \frac{50}{\sqrt{3} + 2}$$

$$EH4 = BH1 = H1G + BG$$

$$H1G = x$$

$$BG = x \sin G\,AB = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

پس:

$$EH4 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = \frac{\sqrt{3}+2}{2}x = 25$$

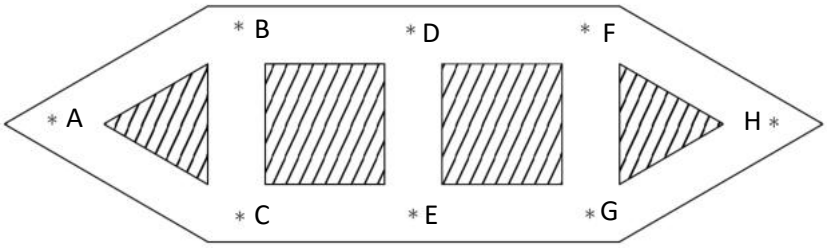
پس پاسخ سوال برابر 25، گزینه 5 است.

سوال (۲۱). پاسخ: ۴

اگر k دزدگیر داشته باشیم حداکثر $2^k - 1$ زیرمجموعه ناتهی دارند. همچنین می‌دانیم هر زیرمجموعه ناتهی از دزدگیرها باید متناظر حداکثر یک اثر باستانی باشند تا مکان دقیق سارق مشخص شود. پس

$$2^k - 1 \geq 8 \rightarrow k \geq 4$$

مثال برای 4 دزدگیر به این صورت است که دزدگیرها را در بالای آثار باستانی B, C, F, G قرار می‌دهیم.



در این صورت

- مجموعه $\{B, C\}$ اثر باستانی A را مشخص می کند،
- مجموعه $\{B, C, F\}$ اثر باستانی B را مشخص می کند،
- مجموعه $\{B, C, G\}$ اثر باستانی C را مشخص می کند،
- مجموعه $\{B, F\}$ اثر باستانی D را مشخص می کند،
- مجموعه $\{C, G\}$ اثر باستانی E را مشخص می کند،
- مجموعه $\{B, F, G\}$ اثر باستانی F را مشخص می کند،
- مجموعه $\{C, F, G\}$ اثر باستانی G را مشخص می کند،
- مجموعه $\{F, G\}$ اثر باستانی H را مشخص می کند.

پس در هر حالتی مکان دقیق دزد مشخص می شود.

سوال (۲۲). پاسخ: ۱۴۰

از آنجایی که $2 \times 701 = 1402$، کافی است این‌ها بر 2 و 701 بخش‌پذیر باشند. برای اینکه بر دو بخش‌پذیر باشند کافی است زوج تا از a, b, c فرد باشند. همچنین برای اینکه بر 701 بخش‌پذیر باشند، باید:

$$a + b + c \equiv 0 \ (mod\ 701) \Rightarrow c \equiv -(a + b) \ (mod\ 701)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \ (mod\ 701) \Rightarrow a^3 + b^3 - (a + b)^3 \equiv -3ab^2 - 3a^2b \equiv 0 \ (mod\ 701)$$

پس

$$ab(a + b) \equiv 0 \ (mod\ 701)$$

اگر $a + b \equiv 0 \ (mod\ 701)$ داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv a^2 + (-a)^2 + \big(-(a + b)\big)^2 \equiv 2a^2 \equiv 0 \ (mod\ 701) \Rightarrow a, b \equiv 0 \ (mod\ 701)$$

اگر $ab \equiv 0 \ (mod\ 701)$ می‌توان فرض کرد $a \equiv 0 \ (mod\ 701)$ و خواهیم داشت:

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0^2 + b^2 + \big(-(0 + b)\big)^2 \equiv 2b^2 \equiv 0 \ (mod\ 701) \Rightarrow b \equiv 0 \ (mod\ 701)$$

پس تنها پاسخ این مسئله به پیمانه 701 برابر $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \ (mod\ 701)$ است.

در بین اعداد 4 رقمی، سیزده عدد بخش‌پذیر بر 701 هست $(2 \times 701, 3 \times 701, \dots, 14 \times 701)$ که هفت‌تا از این‌ها زوج و شش تا فردند. لذا پاسخ مسئله می‌شود:

$$\binom{7}{3} + 7 \times \binom{6}{2} = 140$$

که عبارت اول برای وقتی است که همگی زوج باشند و عبارت دوم برای وقتی که دو تا فرد باشند.

سوال (۲۳). پاسخ: ۸

با ضرب طرفین سه رابطه داده شده در مقادیر $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ و $\frac{1}{a}$ داریم:

$$\frac{1}{abc} = 3\frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{c} + 2 = 2\frac{c}{a} + 3$$

حال اگر $z = \frac{c}{a}$ و $y = \frac{b}{c}$ و $x = \frac{a}{b}$ باشد، آنگاه $y = 3x - 1$ و $z = \frac{3x-2}{2}$ خواهد بود و از آنجایی که $xyz = 1$ است، می‌توان نوشت:

$$x(3x-1)(3x-2) = 2 \Rightarrow 9x^3 - 9x^2 + 2x - 2 = (x-1)(9x^2+2) = 0$$

بنابراین $x = 1$ و در نتیجه، $a = b = 2c$ خواهد بود. همچنین چون $\frac{1}{abc} = 4$ است، $c^3 = \frac{1}{16}$ بوده و مقدار $(a+b+c)^3$ برابر با $\frac{125}{16}$ است که نزدیک‌ترین عدد صحیح به آن، عدد 8 است.

سوال (۲۴). پاسخ: ۱۱۷

رأسی را در نظر بگیرید که روی آن عدد یک نوشته شده باشد. می‌دانیم که اعداد رئوس مجاور آن نمی‌توانند هر دو صفر یا یک باشند. پس داریم هر کجا که یک داریم می‌توانیم آن را با یکی از رئوس مجاور که آن نیز یک است جفت کنیم و دو طرف این جفت نیز به وضوح هر دو صفر اند. پس تنها فرم قابل قبول بین رئوس جفت یک‌ها هستند که بین هر دو جفت متوالی دقیقا یک یا دو رأس با عدد صفر وجود دارد.

داریم:

1- وقتی که تعداد یک‌ها (یا جفت یک‌ها) بیشینه است یعنی تعداد صفر ها کمینه است پس بین هر دو جفت یک متوالی باید تا جای ممکن یک عدد صفر قرار دهیم: $\left\lfloor \frac{1402}{3} \right\rfloor = 467$

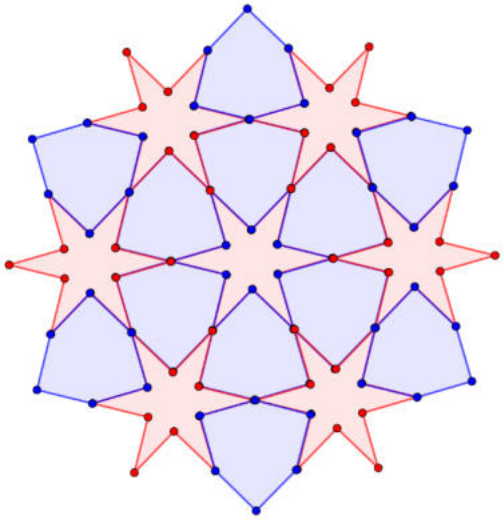
2- وقتی که تعداد یک‌ها (یا جفت یک‌ها) کمینه است یعنی تعداد صفر ها بیشینه است پس بین هر دو جفت یک متوالی باید تا جای ممکن دو عدد صفر قرار دهیم: $\left\lceil \frac{1402}{4} \right\rceil = 351$

پس داریم تعداد جفت یک‌های ممکن اعداد 351 تا 467 هستند پس: $467 - 351 + 1 = 117$

سوال (۲۵). گزینه ۳

*رنگ های سیاه و سفید در مسئله با قرمز و آبی عوض شده‌اند.

کاشی‌کاری صفحه به شکل زیر خواهد بود. (در ادامه نشان می‌دهیم چرا فقط به شکل زیر می‌تواند باشد.)

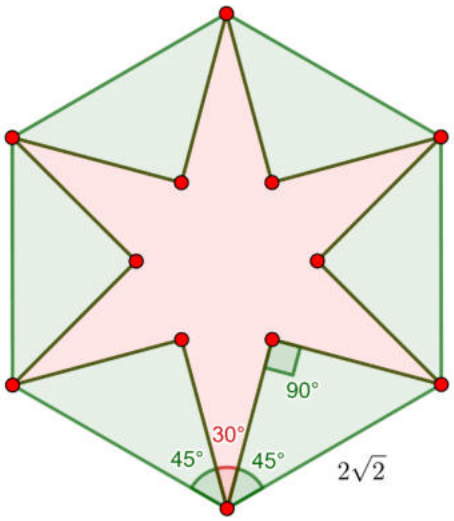


تعداد دوازده‌ضلعی‌های داخل دایره بزرگ رسم شده را R و تعداد شش‌ضلعی های داخل این دایره را B می‌نامیم. مطابق شکل به جز دوازده‌ضلعی‌هایی که روی مرز دایره قرار دارند هر دوازده‌ضلعی با دقیقا ۶ شش‌ضلعی مجاور است و به جز شش‌ضلعی‌هایی که روی مرز دایره قرار دارند نیز هر شش‌ضلعی با دقیقا ۳ دوازده‌ضلعی مجاور است. در نتیجه با صرف نظر از کاشی‌هایی که روی مرز قرار دارند طبق تعداد مجاورت‌های گفته شده می‌توان نوشت : 6R = 3B که نتیجه می‌دهد 2R = B و R/B = 1/2 . (چون شعاع دایره مرسوم بسیار زیاد است نسبت تعداد کاشی‌هایی که روی مرز دایره قرار دارند به تعداد کاشی‌هایی که داخل دایره هستند بسیار کم است پس می‌توان از کاشی‌های روی مرز صرف نظر کرد.)

حال اگر S_r و S_b مساحت یک کاشی دوازده‌ضلعی و یک کاشی شش‌ضلعی باشد داریم:

$$\frac{\text{مساحت قرمز}}{\text{مساحت آبی}} = \frac{R \times S_r}{B \times S_b} = \frac{1}{2} \times \frac{S_r}{S_b}$$

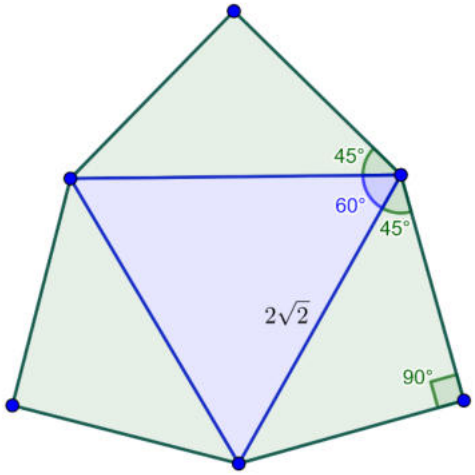
حال کافیست S_r و S_b را محاسبه کنیم.



برای محاسبه‌ی مساحت دوازده‌ضلعی کافیست مطابق شکل شش‌مثلث قائم‌الزاویه‌ی سبز رنگ را به آن اضافه کنیم تا یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع $2\sqrt{2}$ به دست آید. از آنجایی که مساحت هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه برابر ۲ است پس مساحت دوازده‌ضلعی برابر با

$$\frac{\left(6\times(2\sqrt{2})^{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}-(6\times 2)=12\sqrt{3}-12$$

است.



برای محاسبه مساحت شش‌ضلعی نیز کافیست مانند شکل آن را به ۳ مثلث قائم‌الزاویه و ۱ مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم کنیم. با توجه به اینکه ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $2\sqrt{2}$ است مساحت کل شش‌ضلعی برابر خواهد بود با :

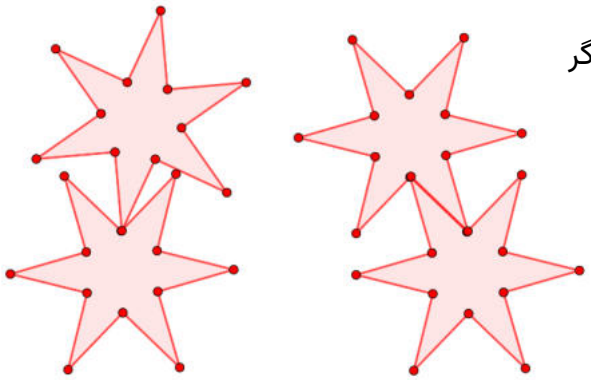
$$\frac{\left((2\sqrt{2})^{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}+(3\times 2)=2\sqrt{3}+6$$

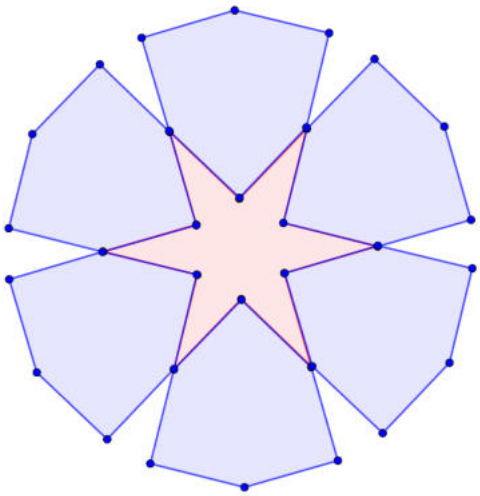
پس پاسخ نهایی مسئله برابر است با :

$$\frac{1}{2}\times\frac{12\sqrt{3}-12}{2\sqrt{3}+6}=\frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{4\sqrt{3}-6}{2}=2\sqrt{3}-3$$

حال نشان می‌دهیم چرا کاشی‌کاری مسئله تنها به شکل گفته شده ممکن است.

یک دوازده‌ضلعی را داخل صفحه در نظر بگیرید. این دوازده‌ضلعی ۶ حفره با زاویه‌ی ۹۰ درجه دارد که باید پر شوند. اگر یک دوازده‌ضلعی دیگر داخل یکی از این حفره‌ها قرار بگیرد شکلی مانند شکل‌های زیر ایجاد می‌شود که به وضوح کاشی‌کاری را خراب میکند. پس داخل هر کدام از این حفره‌ها باید کاشی شش‌ضلعی قرار بگیرد. پس از قرار گیری این شش‌ضلعی‌ها به شکلی مانند زیر میرسیم :





شکل ساخته شده ۶ حفره دارد که هر کدام باید با گوشه‌ای از یک دوازده‌ضلعی پر شوند که پس از پر شدن آنها شکلی مانند شکل زیر ساخته می‌شود. با ادامه دادن این روند به کاشی‌کاری گفته شده میرسیم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ اوّل سال ۱۴۰۱

چهل و یکمین دورهٔ المپیاد ریاضی

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات		مدّت آزمون
پنج‌گزینه‌ای	پاسخ‌کوتاه	
۹	۱۶	۲۱۰ دقیقه

نام: نام‌خانوادگی: شمارهٔ صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱-کد دفترچهٔ سؤالات شما یک است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید، در غیر این‌صورت پاسخ‌نامهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطّلع کنید.

۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخّصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطّلع کنید. ضمناً مشخّصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.

۴-برگهٔ پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵-دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.

۶-سؤالات به دو شکل پاسخ‌کوتاه و پنج‌گزینه‌ای هستند، پاسخ درست به هر سوال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد.

۷-شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستانی از بین دانش‌آموزان پایهٔ دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند، به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان پایه دهم، به صورت آزمایشی و کسب تجربه، در آزمون مرحلهٔ دوم پذیرفته خواهند شد.

۸- وبگاه کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

کلّیهٔ حقوق این سؤالات برای سازمان ملّی پرورش استعدادهای درخشان محفوظ است.
آدرس سایت اینترنتی: sampad.medu.ir

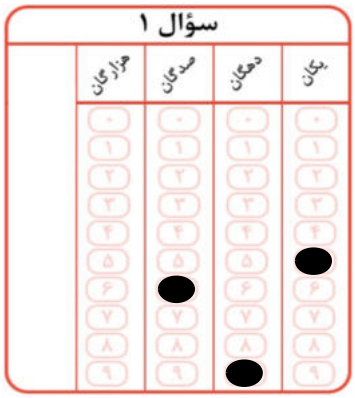
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵/۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سوالاتِ پاسخ‌کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.

۱. عدد ۱۲۶۰۰۰ دارای چند مقسوم علیه مربع کامل است؟

: جواب عددی زوج است.

۲. برای تابع $f(x)$ می‌دانیم

$$f(x)=\begin{cases}۲^{۲x}-\log_{۲}\left(x+۳\right), x\geq ۵\\ f(x+۱)-۴, x<۵\end{cases}$$

مقدار عددی $f(۰)$ چند است؟

کد سؤالات: ۱

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

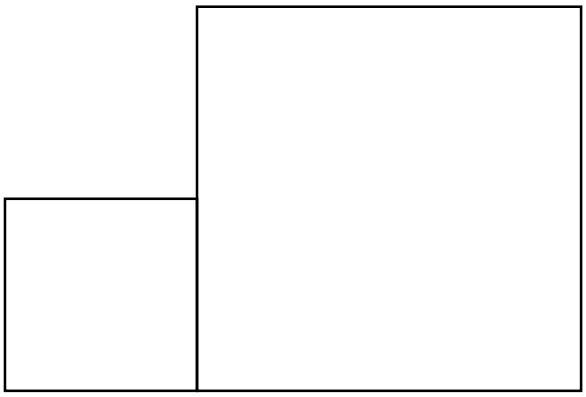
ریاضی کشور

۳. در یک جدول ۵×۵ مانند شکل زیر تعدادی عدد قرار دارد. می‌خواهیم این جدول را با تعدادی مستطیل بپوشانیم به‌طوری‌که اضلاع آن‌ها منطبق بر خطوط عمودی و افقی جدول باشد. همچنین هر عدد دقیقا در یک مستطیل قرار گیرد و عدد درون هر مستطیل برابر با مساحت آن باشد. مستطیل‌ها می‌توانند هم‌پوشانی داشته باشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۵				۶
	۶			
		۳		۲
	۴			

: باقیمانده تقسیم جواب بر ۳ برابر ۱ است.

۴. مانند شکل زیر دو مربع با طول اضلاع ۴۰ و ۲۰ سانتیمتر در کنار هم رسم کرده‌ایم. میله‌ای به طول ۱۰ سانتیمتر را کاملا به رنگ آغشته کرده و در صفحه طوری حرکت می‌دهیم که دو سر میله در دو مربع مختلف باشد. اگر ضخامت میله را ناچیز در نظر بگیریم، با حرکت دادن میله حداکثر چند سانتیمتر مربع از دو مربع رنگی خواهد شد؟

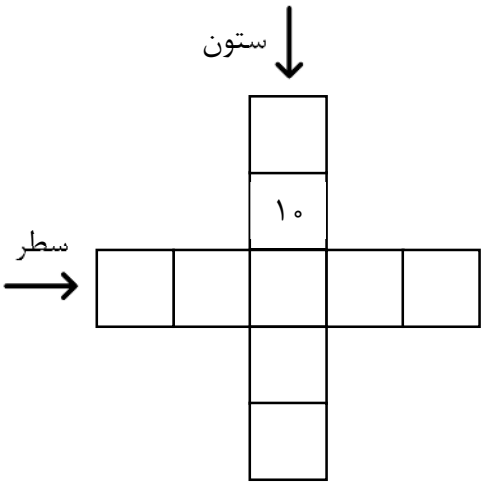


۱) $۲۰۰ + ۲۵\pi$
۲) $۳۰۰ + ۲۵\pi$
۳) ۴۰۰
۴) $۴۰۰ + ۲۵\pi$
۵) ۵۰۰

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۵. مانند شکل زیر عدد ۱۰ در یکی از خانه‌ها نوشته شده است. می‌خواهیم همه اعداد ۲،۳، ... و ۹ را در سایر خانه‌های شکل طوری بنویسیم که حاصل‌ضرب اعداد سطر برابر با حاصل‌ضرب اعداد ستون مشخص شده باشند. حاصل‌جمع اعداد ستون مشخص شده، می‌تواند برابر کدامیک از گزینه‌های زیر باشد؟



۱) ۲۷
۲) ۲۸
۳) ۲۹
۴) ۳۰
۵) ۳۱

۶. چند سه‌تایی مرتب (a,b,c) از اعداد حقیقی داریم که دوبه‌دو متمایز باشند و داشته باشیم

$$a+[b]=b+[c]=c+[a]$$

توضیح: منظور از $[x]$ جزء صحیح عدد x است.

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹ ۵) بی‌نهایت

۷. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های A، B و C را از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴\}$ انتخاب کرد به‌طوری‌که داشته باشیم $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$

: رقم دهگان جواب ۹ است.

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۸. دوایر $W_۱$ و $W_۲$ درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بر یکدیگر مماس خارج اند. دایره $W_۱$ بر اضلاع AC و BC و دایره $W_۲$ بر اضلاع AB و BC مماس است. اگر شعاع $W_۱$ و $W_۲$ به ترتیب برابر ۳ و ۱ بوده و طول ضلع مثلث ABC به صورت $\sqrt{n}$ باشد، مقدار n چقدر است؟

: جواب عددی طبیعی است.

۹. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی داریم که $۰ < x,y < ۱$ و همچنین هر دو عدد $۲x-y$ و $۳x+۲y$ صحیح باشند؟

: جواب عددی یک رقمی است.

۱۰. هرگاه برای اعداد حقیقی a,b بدانیم $a > b > ۱$ و $\log_b a + \log_a b = \frac{۵}{۲}$ و همچنین $a^b = b^a$. مقدار عددی $a+b$ چند است؟

: جواب عددی زوج است.

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۱. فاطمه می‌خواهد به صورت زیر با رسم کردن ۵ مربع به ضلع واحد در کنار هم، شکلی در صفحه بدست آورد. او ابتدا یک مربع رسم می‌کند. سپس در هر مرحله مربع جدید را طوری رسم می‌کند که اولاً بر هیچ‌یک از مربع‌های رسم‌شده منطبق نبوده و ثانیاً حداقل با یکی از آن‌ها، حداقل یک ضلع مشترک داشته باشد. دو شکل را مختلف گوییم اگر نتوان آن‌ها را با دوران و انتقال به هم تبدیل کرد. فاطمه در نهایت می‌تواند به چند شکل مختلف برسد؟

: باقیمانده تقسیم جواب بر ۴ برابر ۲ است.

۱۲. نقطه P روی کمان BC از دایره محیطی هشت‌ضلعی منتظم $ABCDEFGH$ طوری انتخاب شده است که $PC = ۱$ و $PE = ۴\sqrt{۲}$. طول شعاع دایره محیطی این هشت‌ضلعی منتظم کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۲}$ ۵) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$

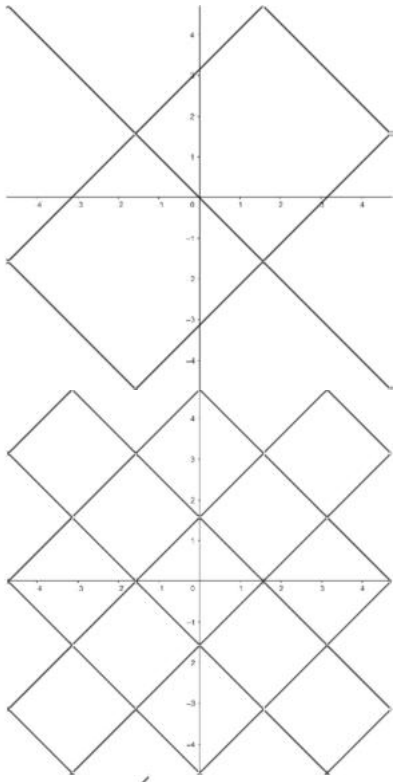
۱۳. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) از اعداد طبیعی وجود دارد که داشته باشیم

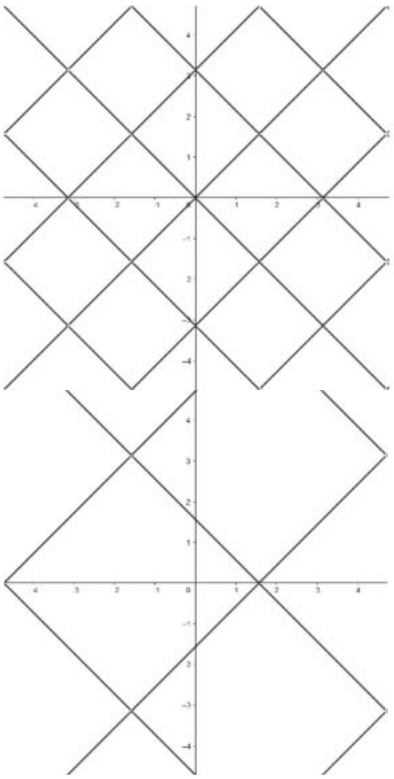
$$۹(xy + yz + zx) = ۸xyz$$

: جواب بر ۳ بخشپذیر است.

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

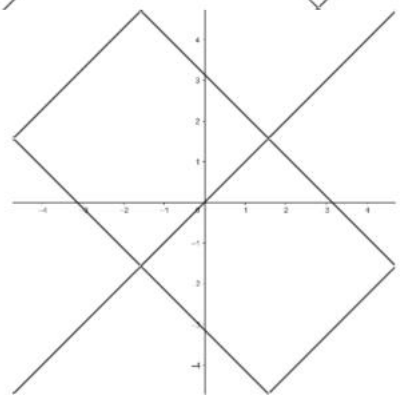
۱۴. کدامیک از گزینه‌های زیر بخشی از نمودار معادله $\sin(x) = \sin(y)$ است؟

۱)


۲)


۳)

۴)

۵)


۱۵. می‌خواهیم دقیقا ۷۵ درصد خانه‌های یک جدول ۸×۸ را سیاه کنیم طوری که اگر یک خانه به رنگ سیاه درآمده باشد، همه خانه‌های هم‌سطر یا همه خانه‌های هم ستون و یا هر دوی آن‌ها سیاه باشند. به چند روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

۱) ۱۷۰۸ ۲) ۴۹۵۶ ۳) ۵۶۹۳ ۴) ۹۸۵۶ ۵) ۱۱۳۸۶

کد سؤالات: ۱

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۶. مربع $ABCD$ به ضلع ۳ مفروض است. دایره‌ای بر ضلع AB مماس بوده و امتداد CD از طرف C را در E و از طرف D را در F قطع کرده است. محل برخورد ضلع BC و دایره را K می‌نامیم. اگر $CE = ۲$ و $DF = ۱$ باشد، طول DK چند است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۱۵}$ ۵) $\sqrt{۱۳}$

۱۷. به زیرمجموعه چهار عضوی مانند $\{a,b,c,d\}$ از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ عجیب می‌گوییم اگر بتوان اعضا را طوری مرتب کرد که حاصل $a-b+c-d$ بر ۷ بخشپذیر باشد. چند زیرمجموعه عجیب داریم؟

۱۸. تعریف می‌کنیم $f(x) = \frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{x^۴}$. برای چند عدد صحیح a نابرابری زیر برقرار است.

$$f(a-۲) < f(۲a+۱)$$

۱۹. ۱۴۰۱ نفر در یک صف ایستاده‌اند. هر کسی یا دروغگو بوده و همیشه دروغ می‌گوید، یا راستگو بوده و همیشه راست می‌گوید. به ترتیب از همه افراد پرسیده‌ایم که چند نفر دروغگو در پشت سرش ایستاده است. مجموعه جواب‌های دریافتی $\{۰,۱,۲,\ldots,۱۴۰۰\}$ شده است. تعداد افراد دروغگو در صف چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

کد سؤالات: ۱

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۰. در هرم $OABCD$ با راس O، قاعده $ABCD$ یک لوزی است. می‌دانیم $OA = OC = ۸$ و نیز $OB = OD = ۵$ است. اگر محیط قاعده هرم بزرگترین عدد طبیعی و زوج ممکن باشد، مساحت جانبی هرم کدام است؟

۱) $۲۰\sqrt{۱۱}$ ۲) $۲۲\sqrt{۱۱}$ ۳) $۲۴\sqrt{۱۱}$ ۴) $۲۶\sqrt{۱۱}$ ۵) $۲۸\sqrt{۱۱}$

۲۱. تعریف می‌کنیم $f(n) = n(n+۱)(n+۲)(n+۳)+۱$. چند عدد طبیعی $n < ۱۰۰۰$ وجود دارد که برای هرکدام از آن‌ها $f(n)$ بر ۲۵ بخشپذیر باشد؟

: جواب عددی زوج است.

۲۲. مجموعه $\{۱, x, x^۲, \ldots, x^{۱۰}\}$ چند زیرمجموعه ناتهی دارد به‌طوری‌که جمع اعضای آن چندجمله‌ای مانند $f(x)$ باشد که دقیقا برای دو عدد صحیح و متمایز a, b داشته باشیم:

$$f(a) = f(b) = ۰$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهل و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۳. در بازی رومیزی "کمکارتا" سه نوع کارت شاپرک، حلزون و قورباغه داریم. از هر کدام از این انواع، ۱۰ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰ موجود است. آرشام و آرتین می‌خواهند این بازی را انجام دهند. به هر کدام از آن‌ها به‌صورت تصادفی یک کارت از هر نوع داده می‌شود به‌طوری که هرکس فقط کارت‌های خود را ببیند. بازیکنی برنده می‌شود که جمع اعداد کارت‌هایش کمتر باشد. اگر آرشام کارت‌های حلزون با شماره ۱، شاپرک با شماره ۶ و قورباغه با شماره ۴ را داشته باشد، چقدر احتمال دارد برنده بازی شود؟

۱) $\frac{۱۱}{۸۱}$ ۲) $\frac{۱۱۸}{۷۲۹}$ ۳) $\frac{۷۰}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱۸۸}{۲۴۳}$ ۵) $\frac{۶۱۱}{۷۲۹}$

۲۴. می‌خواهیم دو دایره درون یک مربع به ضلع واحد قرار دهیم طوری‌که درون دایره‌ها با هم اشتراک نداشته ولی دایره‌ها می‌توانند نقطه‌های مرزی مشترک داشته باشند. همچنین دایره‌ها می‌توانند به اضلاع مربع مماس باشند. چندتا از گزاره‌های زیر درست اند؟

گزاره ۱: همواره جمع محیط دو دایره کمتر از محیط مربع است.

گزاره ۲: می‌توان دو دایره را طوری قرار داد که جمع محیط‌شان بیشتر از نصف محیط مربع شود.

گزاره ۳: اگر دو دایره طوری باشند که جمع محیط‌شان بیشترین مقدار ممکن در بین حالت‌ها شود، حتما شعاع برابر دارند.

گزاره ۴: اگر دو دایره طوری باشند که جمع محیط‌شان بیشترین مقدار ممکن در بین حالت‌ها شود، حتما مرکز هر دو دایره روی قطرهای مربع قرار گرفته است.

۲۵. در هر خانه از یک جدول ۴×۴ عددی طبیعی نوشته‌ایم. دو عدد را همسایه گوییم اگر خانه‌های آن‌ها دقیقا در یک ضلع مشترک باشند. در این جدول هر عدد مقسوم علیه حاصل‌ضرب همسایه‌های خود است. حداکثر چند عدد اول متمایز در خانه‌ها وجود دارد؟

سعادتمند باشید.

کد سؤالات: ۱

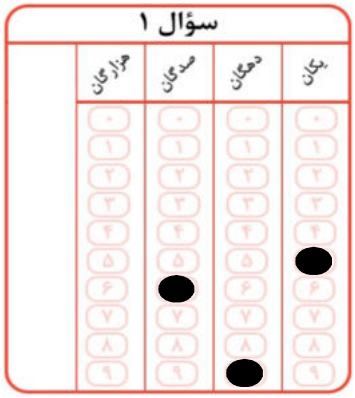
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سوالاتِ پاسخ‌کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.

۱. معادله زیر چند جواب در اعداد حقیقی دارد؟

$$[x]+[-x]=-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$$

توضیح: منظور از $[x]$ جزء صحیح عدد x است.

: جواب عددی زوج است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

۲. یک ۱۴۰۰ضلعی محدب، حداکثر چند زاویه حاده می‌تواند داشته باشد؟

: جواب عددی فرد است.

۳. حداکثر چند عدد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰ می‌توان انتخاب کرد که حاصل جمع هر دوتای نه لزوما متمایز آن‌ها بر ۳ بخشپذیر نباشد؟

: جواب ارقام تکراری دارد.

۴. در قرعه‌کشی وام یک صندوق قرض‌الحسنه خانگی بین علی، رضا و محمد به صورت زیر عمل می‌شود. ابتدا حروف اسم هر فرد روی کاغذهای مجزا نوشته می‌شود. مثلا حرف ع یک بار و حرف م دوبار نوشته می‌شود. سپس این ۱۰ کاغذ داخل یک گلدان ریخته می‌شود. هربار یک کاغذ از گلدان بیرون آورده می‌شود. اگر با بعضی از حروفی که تا بحال از گلدان بیرون آورده‌ایم بتوان اسم یک فرد را تشکیل داد، آن فرد برنده شده و در غیر این صورت یک حرف دیگر از گلدان بیرون می‌آوریم. مثلا اگر تاکنون حروف ح، ل، ا، ع و ی بیرون آمده باشد، علی برنده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) قرعه کشی عادلانه است و همه شانس مساوی برای برنده شدن دارند.
۲) شانس برنده شدن علی بین ۵۰ تا ۶۰ درصد است.
۳) شانس برنده شدن رضا از یک سوم کمتر است.
۴) شانس برنده شدن رضا و علی مساوی است.
۵) گزینه‌های ۱ و ۴ درست اند.

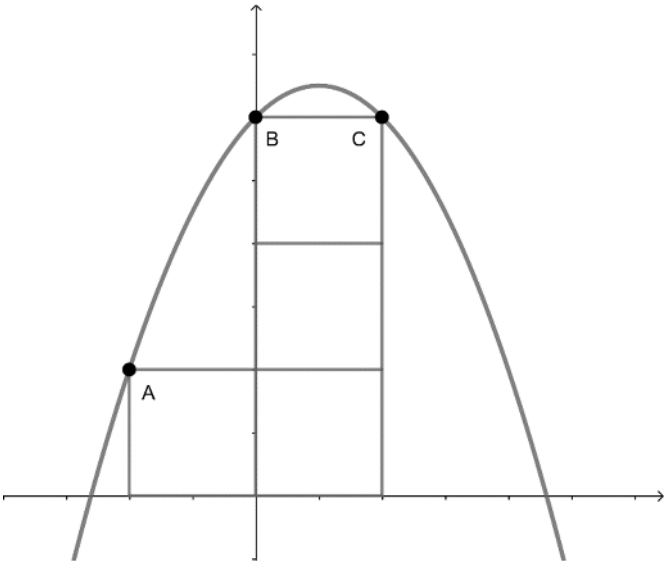
کد سؤالات: ۱

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۵. چهار مربع به ضلع ۲ مانند شکل کنار یکدیگر قرار دارند. یک سهمی از نقاط A ، B و C عبور کرده و محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله نقاط تقاطع چند است؟



۱) ۷
۲) $2\sqrt{13}$
۳) $5\sqrt{2}$
۴) $3\sqrt{7}$
۵) ۸

۶. برای مثلث ABC می‌دانیم $AB > AC > BC$. مثلث را حول یکی از اضلاع آن ۳۶۰ درجه دوران می‌دهیم تا شکلی سه‌بعدی ایجاد شود. بیشترین حجم بدست آمده از دوران حول کدام ضلع پدید می‌آید؟

۱) AB ۲) AC ۳) BC ۴) نمی‌توان تعیین کرد. ۵) برای هر سه ضلع یکسان است.

۷. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های A، B و C را از مجموعه $\{1,2,3,\ldots,10\}$ انتخاب کرد به‌طوری‌که داشته باشیم $A \subseteq (B \cap C)$

۱) 5^{10} ۲) 10^5 ۳) 4^{10} ۴) 10^4 ۵) 3^{10}

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۸. چند عدد طبیعی ۵ رقمی وجود دارد که باقیمانده تقسیم آن‌ها بر هر سه عدد ۴ و ۵ و ۱۸ برابر ۳ باشد؟

: باقیمانده جواب بر ۷ برابر ۳ است.

۹. توابع $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به این صورت تعریف می‌شوند که $f(x) = |x + ۱| - ۴$ و $g(x) = f(f(x))$. در این‌صورت معادله $f(x) = g(x)$ چند جواب در اعداد حقیقی دارد؟

۱۰. مثلث ABC زاویه منفرجه ندارد. همچنین می‌دانیم $\angle ABC = ۳ \times \angle ACB$. عمودمنصف ضلع BC نیمساز داخلی زاویه $\angle ABC$ را در نقطه P قطع می‌کند. حداکثر مقدار زاویه $\angle PCA$ چند درجه است؟

: جواب عددی طبیعی و فرد است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۱. اگر دو عدد طبیعی a و b حداقل سه مقسوم‌علیه مشترک داشته باشند و مقسوم‌علیه‌های مشترک آن‌ها به ترتیب $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k$ باشد، تعریف می‌کنیم: $D(a,b) = d_3$. به طور مثال $D(40,60) = 4$ زیرا مقسوم علیه‌های مشترک دو عدد ۴۰ و ۶۰ به ترتیب اعداد $1 < 2 < 4 < 5 < 10 < 20$ می‌باشند. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟ (در هر گزینه فرض کنید a و b دو عدد طبیعی دلخواه با حداقل سه مقسوم علیه مشترک اند)

۱) $D(2a,2b)$ همواره عددی زوج است.

۲) $D(10!+20,20!+10) = 4$

۳) $D(a^2,b^2)$ همواره مربع کامل است.

۴) $D(2^{100}-1,3^{100}-1) = 7$

۵) $D(a,b)$ حداکثر یک عامل اول دارد.

۱۲. به چند طریق می‌توان هر خانه از یک جدول 4×4 را سیاه یا سفید کرد به‌طوری‌که هر خانه دقیقا با دو خانه غیر همرنگ با خود، ضلع مشترک داشته باشد؟

۱۳. اگر $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ به‌طوری‌که $abc = 10^{11}$ و همچنین

$$\log(a)\log(bc) + \log(b)\log(ac) + \log(c)\log(ab) = 40$$

حاصل $\left(\log(a)\right)^2 + \left(\log(b)\right)^2 + \left(\log(c)\right)^2$ را بیابید.

: جواب عددی طبیعی و بر ۳ بخشپذیر است.

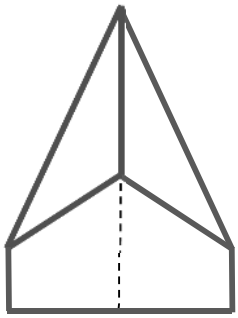
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

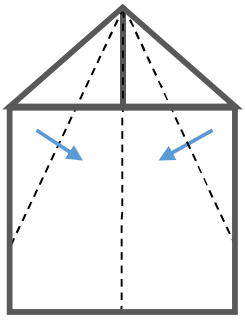
ریاضی کشور

۱۴. کاغذی با ابعاد ۶ در ۸ سانتی متر را مانند شکل چند بار تا میزنیم.

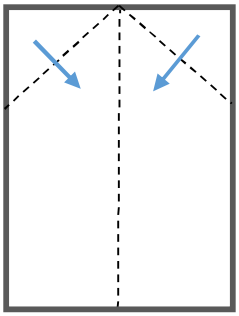
سه



دو



یک



مساحت شکل سه چند سانتی متر مربع است؟

۱) $۳۹-۹\sqrt{۲}$ ۲) $۳۸-۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۷-۷\sqrt{۲}$ ۴) $۳۶-۶\sqrt{۲}$ ۵) $۳۵-۵\sqrt{۲}$

۱۵. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a,b,c) از اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ را بیابید به‌طوری‌که رقم یکان حاصل $a\times b\times c$ برابر با ۳ باشد.

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۵۰۰۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۱۵۰۰۰ ۵) ۱۶۰۰۰

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۶. ۱۶ لامپ خاموش در خانه‌های یک جدول ۴×۴ قرار دارند. برای هر مربع ۲×۲ از این جدول کلیدی وجود دارد که فشردن آن باعث تغییر وضعیت ۴ لامپ داخل این مربع شده و لامپ دیگری را تغییر وضعیت نمی‌دهد. با فشردن هر تعداد دلخواه از این کلیدها چند الگوی مختلف از لامپ‌های این جدول می‌توانیم بدست آوریم؟

: در بین ارقام جواب، یک رقم ۲ وجود دارد.

۱۷. سه بانک جدید در شکرستان باز شده‌اند. بانک اول، انتهای هر سال به اندازه ۲۰ درصد موجودی حساب، به آن سود واریز می‌کند. بانک دوم، انتهای هر ۵ سال موجودی حساب را دو برابر می‌کند. بانک سوم انتهای سال nام به مقدار $\frac{۵}{۲} \times n$ درصد موجودی حساب، به آن اضافه می‌کند. امید می‌خواهد پول خود را برای ۲۰ سال در یکی از بانک‌ها پس‌انداز کرده و به سودهایش هم دست نزند. سرمایه‌گذاری در کدام بانک سود بیشتری خواهد داشت؟

۱) بانک اول ۲) بانک دوم ۳) بانک سوم ۴) فرقی ندارد. ۵) بستگی به پول اولیه امید دارد.

۱۸. عدد $n \geq ۳$ را جالب گویند اگر بتوان n نقطه متمایز روی محیط یک مربع انتخاب کرد که راس‌های یک nضلعی منتظم را تشکیل دهند. مجموع همه اعداد جالب چند است؟

۱۹. چند عدد طبیعی n داریم به‌طوری‌که اعداد $a, b \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند که

$$۲^n + n^a = ۳۲n^b$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۰. در یک ساختمان ۸ طبقه هیچ طبقه‌ای خالی از سکنه نیست. دو ساکن از این ساختمان را همسایه می‌نامیم اگر در یک طبقه یا دو طبقه مجاور سکونت داشته باشند. می‌دانیم هر ساکن از این ساختمان با ۶ یا ۱۰ نفر دیگر همسایه است. اگر تعداد ساکنان این ساختمان برابر n باشد، برای n چند مقدار قابل قبول وجود دارد؟

۲۱. هرگاه $x \in \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ و $y \in \left(۰, \frac{\pi}{۶}\right)$ و بدانیم $\tan(x) = \cot(y)$ و

$\cos(\pi \times \cos(x)) = \sin(\pi \times \sin(y))$. مقدار عددی $\frac{۱}{\cos(x)}$ چند است؟

: جواب عددی طبیعی است.

۲۲. مربعی به ضلع یک داده شده است. نقطه‌ای مانند G درون این مربع را "متعادل" می‌گوییم اگر سه نقطه A، B و C درون یا روی محیط این مربع باشند که تشکیل مثلثی به مساحت $\frac{۱}{۲}$ دهند و مرکز ثقل آن مثلث بر G منطبق باشد. مجموعه همه نقطه‌های متعادل چه شکلی تشکیل می‌دهند؟ (منظور از مرکز ثقل در یک مثلث محل برخورد سه میانه است)

۱) نقاط روی محیط مربعی با اضلاع موازی اضلاع مربع اصلی
۲) نقاط روی محیط و یا درون مربعی با اضلاع موازی اضلاع مربع اصلی
۳) نقاط روی محیط مربعی با اضلاع موازی قطرهای مربع اصلی
۴) نقاط روی محیط و یا درون مربعی با اضلاع موازی قطرهای مربع اصلی
۵) نقاط روی محیط دایره‌ای به مرکز محل برخورد قطرهای مربع اصلی

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول چهلمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۳. ابتدا یک عدد طبیعی روی تخته نوشته شده است. در مرحله بعد ابتدا آن را در کوچکترین عدد طبیعی ممکن ضرب می‌کنیم تا مربع کامل شود و سپس جذر آن را بجای عدد اولیه روی تخته می‌نویسیم. به همین ترتیب روی عدد جدید همین عمل را تکرار می‌کنیم و اعداد جدیدی را جایگزین اعداد قبلی می‌کنیم. تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که با حداکثر چهار بار انجام عمل بالا روی آن‌ها به عدد ۱۰ برسیم چند است؟ برای مثال اگر ابتدا عدد ۲۴ نوشته شده باشد، به جای آن عدد ۱۲ نوشته می‌شود زیرا کوچک‌ترین عدد مربع کامل مضرب ۲۴ برابر ۱۴۴ است و جذر آن برابر ۱۲ می‌شود.

۲۴. تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم تا سه عدد a، b و c حاصل شود. در چند حالت با سه پاره‌خط با طول این سه عدد، می‌توان یک مثلث ساخت؟

۲۵. عدد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. رقم دوم سمت راست ممیز در عدد A چند است؟

$$A = \frac{۲۰۲}{۱۰۰^۳} + \frac{۲۰۴}{۱۰۱^۳} + \frac{۲۰۶}{۱۰۲^۳} + \ldots + \frac{۴۰۲}{۲۰۰^۳}$$

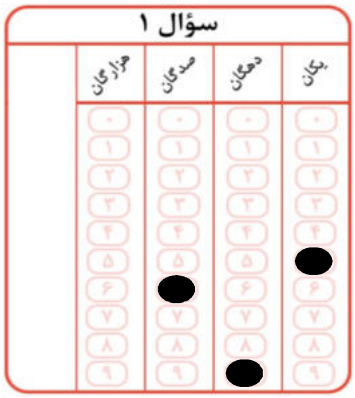
سعادتمند باشید.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و نهمین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵/۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سوالاتِ پاسخ‌کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت 🔔 نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.

۱. دو عدد طبیعی را زوج خوش‌بخت گوییم هرگاه تعداد ارقام آن‌ها برابر و ترتیب ارقام آن‌ها کاملا عکس یکدیگر باشد (مثلا ۲۳۱ و ۱۳۲ زوج خوش‌بخت است). چند زوج خوشبخت سه‌رقمی وجود دارد که اختلاف آن‌ها ۷ برابر عددی طبیعی است؟

🔔 : باقیمانده تقسیم جواب بر ۸ برابر ۴ است.

۲. معادله زیر چند جواب در اعداد حقیقی مثبت دارد؟

$$x^{[x]} = x + [x]$$

توضیح: منظور از $[x]$ جزء صحیح عدد x است.

🔔 : جواب عددی فرد است.

کد سؤالات: ۱

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و نهمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۳. در مستطیل $ABCD$ می‌دانیم $AB = ۳$ و $BC = ۲$ است. دایره‌ای به اضلاع AB، BC و CD مماس است. از نقطه D مماسی غیر از ضلع CD بر دایره رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه P قطع کند. طول DP کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰}-۱$ ۵) $\frac{۵}{۲}$

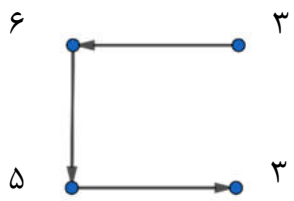
۴. خانه‌های یک جدول ۶×۶ همانند شکل زیر با ۴ رنگ رنگامیزی شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۶ خانه از این جدول را انتخاب کرد بطوری‌که ۳ تا از آن‌ها از یک رنگ و ۳ تا از رنگ دیگری باشند و در ضمن هیچ دوتا در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند؟

۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴

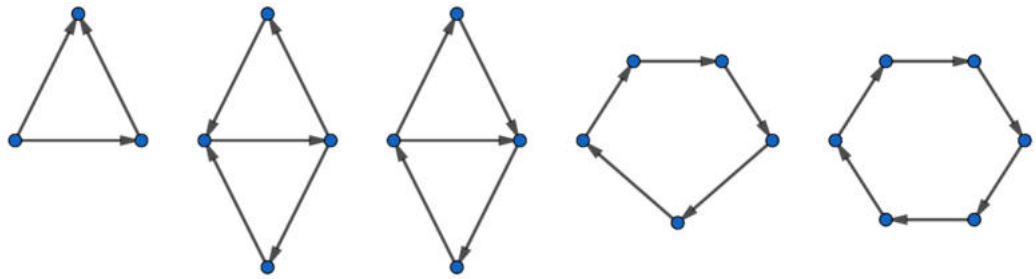
آزمون مرحلهٔ اول سی و نهمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۵. می‌خواهیم برای اشکالی مانند شکل زیر، روی هریک از رئوس شکل، اعدادی بین $۱,۲,\ldots,۶$ را بنویسیم طوری‌که برای هر پیکان که از رأس با عدد x خارج و به رأس با عدد y وارد شده باشد، $۵x+y$ مضرب ۷ باشد. مانند اعدادی که روی رئوس شکل زیر است:



مثلا در بالاترین پیکان $۲۱ = ۶ + ۳ \times ۵$ مضرب ۷ است. در چند شکل از اشکال زیر می‌توان این کار را انجام داد؟



۶. چند چهارتایی مرتب (a,b,c,d) از اعداد صحیح در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند؟

$$a+b=c^۲+d^۲, c+d=a^۲+b^۲$$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰ ۵) بی‌نهایت

۷. مساحت چندضلعی‌ای که طول همه اضلاع آن برابر یک سانتی‌متر است و زوایای داخلی آن به صورت یکی در میان برابر ۹۰ و ۲۲۵ درجه است، چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) $۸+۲\sqrt{۲}$ ۲) $۶+۴\sqrt{۲}$ ۳) $۸+۴\sqrt{۲}$ ۴) $۶+۶\sqrt{۲}$ ۵) ۱۶

کد سؤالات: ۱

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و نهمین المپیاد ریاضی کشور ☺



۸. در یک کیسه ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی وجود دارد. مهدیار در ابتدا با یک چشم‌بند، چشم‌های خود را به‌طور کامل می‌بندد. سپس در گام اول یکی از توپ‌ها را از کیسه به بیرون می‌اندازد. در گام دوم ۵ توپ را از کیسه خارج کرده و به کیسه دوم منتقل می‌کند. در گام سوم یک توپ را از کیسه دوم به بیرون می‌اندازد. در گام چهارم از کیسه دوم ۲ توپ خارج کرده و به کیسه سوم منتقل می‌کند. سپس یک توپ را از کیسه سوم خارج می‌کند. احتمال اینکه توپ خارج شده قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$ ۵) $\frac{۴}{۵}$

۹. مجموع ارقام یک عدد طبیعی برابر ۱۸ است. کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲۴ ۵) ۳۶

۱۰. علی و رضا هرکدام یک دنباله حسابی ۳جمله‌ای از اعداد حقیقی و مثبت انتخاب کرده و روی برگه خود، از چپ به راست می‌نویسند. سپس هر دو برگه‌ها را کنار هم قرار داده و جملات دنباله‌ها را نظیر به نظیر باهم مقایسه می‌کنند و نتیجه را به صورت دنباله‌ای از حروف "ب"، "ک" و "م" روی تخته، از چپ به راست می‌نویسند. اینگونه که اگر جمله iام دنباله علی از جمله iام دنباله رضا بزرگتر بود حرف "ب"، اگر کوچکتر بود حرف "ک" و اگر مساوی بود حرف "م" را به عنوان جمله iام دنباله نتیجه، روی تخته می‌نویسند. به عنوان مثال اگر دنباله علی ۲۳۴ و دنباله رضا ۱۴۷ باشد، دنباله نتیجه ک ک ب خواهد بود. چه تعداد از دنباله‌های حروف زیر نمی‌تواند به عنوان نتیجه روی تخته نوشته شده باشد؟

ب ک م ک ک م م ب م ک م ب

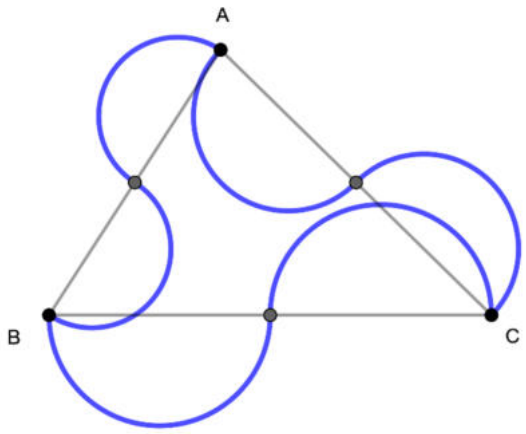
م ب ک ک م ک ک ب ب ب ب ک

کد سؤالات: ۱

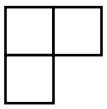
آزمون مرحلهٔ اول سی و نهمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۱. می‌خواهیم مساحت برکه دوستی را محاسبه کنیم. محیط برکه دوستی، مانند شکل، از شش نیم‌دایره تشکیل شده که از رئوس و اوساط اضلاع مثلث ABC عبور می‌کند. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵۰، ۶۰ و ۷۰ متر باشد، مساحت برکه دوستی چند متر مربع است؟



۱) ۱۵۰۰ ۲) ۳۰۰۰ ۳) $۳۰۰\sqrt{۶}$ ۴) $۶۰۰\sqrt{۶}$ ۵) ۳۶۰π

۱۲. به چند طریق می‌توان ۶ خانه از یک جدول ۵×۳ را حذف کرد بطوری‌که در خانه‌های باقیمانده شکلی مانند  و دوران‌های آن، یافت نشود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰ ۵) ۲۲

۱۳. n عددی طبیعی است. می‌دانیم n دارای حداقل سه مقسوم‌علیه مثبت است و همچنین اگر $d_۱ < d_۲ < \ldots < d_k$ مقسوم‌علیه‌های آن باشند، داریم $d_{k-۱} - d_{k-۲} = ۱۳۹۹$. بزرگترین مقدار ممکن برای n چند است؟

: رقم دهگان جواب برابر ۹ است.

۱۴. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند؟

$$\begin{cases} ۲y^۲ + ۲y + ۴x = x^۲ + xy + ۴ \\ y^۲ + ۲x^۲ + ۲y = ۵x + ۳xy + ۳ \end{cases}$$

کد سؤالات: ۱

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و نهمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

۱۵. دایره $W_۱$ به مرکز O و شعاع ۴ سانتی‌متر بر دایره $W_۲$ در نقطه S مماس داخل است. وتر AB از دایره $W_۲$ در نقطه M بر $W_۱$ مماس است. می‌دانیم مثلث OAB متساوی‌الساقین است. اگر زاویه AOB برابر ۱۲۰ درجه باشد، شعاع دایره $W_۲$ چند سانتی‌متر است؟

: جواب عددی طبیعی است.

۱۶. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه ۱۰ عضوی از مجموعه $S = \{۱,۲,...,۱۰۰\}$ انتخاب کنیم بگونه‌ای که بتوانیم با شروع از این مجموعه‌های انتخاب شده و اعمال اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها به هر زیرمجموعه دلخواه از S برسیم. حداقل چند زیرمجموعه باید انتخاب کنیم؟

: جواب مضرب ۴ است.

سعادتمند باشید.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملّی پرورش استعدادهای درخشان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ اوّل

سی‌وهشتمین دورهٔ المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۸

صبح -ساعت: ۰۹:۰۰

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات		مدّت آزمون(دقیقه)
پنج‌گزینه‌ای	پاسخ‌کوتاه	
۹	۱۶	۲۱۰

نام: نام خانوادگی: شمارهٔ صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- کد دفترچهٔ سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامهٔ شما تصحیح نخواهد شد. توجّه داشته باشید کد دفترچهٔ سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.

۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید.

۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخّصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید. ضمناً مشخّصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.

۴- برگهٔ پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵- سوالات به دو شکل پاسخ‌کوتاه و پنج‌گزینه‌ای هستند پاسخ درست به هر سوال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.

۶- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین‌حساب و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتّی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.

۷- شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.

۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچهٔ سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.)

۹- وبگاه کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

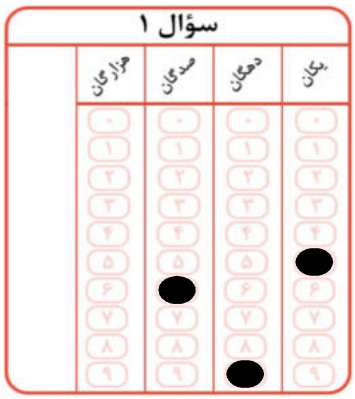
کلّیهٔ حقوق این سؤالات برای سازمان ملّی پرورش استعدادهای درخشان محفوظ است.
آدرس سایت اینترنتی : www.ysc.sampad.medu.ir

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵/۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

ضمنا امسال در انتهای برخی از سوالاتِ پاسخ‌کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت 🔔 نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی بوده و به‌روند حل هیچ کمکی نخواهد کرد.

۰. (سؤال شمارهٔ صفر!) کد دفترچهٔ شما چند است؟ آن را در صفحهٔ اول پاسخ‌نامهٔ خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ‌نامه توضیح داده شده است.

۱. چند عدد طبیعی حداکثر شش رقمی با ارقام ۰ و ۱ وجود دارد که مضرب ۱۱ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸ ۵) ۱۹

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲. تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر را بیابید.

$$(x^۲ + ۵x + ۵)^{(x^۲ - ۱۰x + ۲۱)} = ۱$$

: جواب عددی اول است.

۳. $ABCD$ مربعی به ضلع $\sqrt{۲}$ است. دایره t به شعاع ۲ که مرکز آن (نقطه O) روی خط CD قرار دارد (D بین C و O است) از راس D مربع گذشته است. k دایره‌ای گذرا از راس A می‌باشد که مرکز آن، روی امتداد پاره‌خط CA از طرف A قرار دارد و در نقطه P بر دایره t مماس شده است، به‌طوری‌که نقاط P، A و B در یک طرف خط CD قرار دارند. شعاع دایره k چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲} - ۱$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲} - ۱}{۲}$ ۵) $۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴. مدرسه‌ای در شکرستان، ۱۲ دانش‌آموز دارد. برخی از این دانش‌آموزان با هم تعدادی انجمن تشکیل داده‌اند. می‌دانیم یک شخص می‌تواند در بیش از یک انجمن عضویت داشته باشد. برخی از انجمن‌ها ۳ عضوی، و بقیه انجمن‌ها ۴ عضوی هستند. می‌دانیم که هر دو دانش‌آموزی، دقیقا در یکی از این انجمن‌ها، با هم عضو هستند. اگر تعداد انجمن‌های این مدرسه، ۱۳تا باشد، چند تا از این انجمن‌ها ۳ عضوی هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

۵. عدد طبیعی a را «جالب» می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی x, y (نه لزوماً متمایز) وجود داشته باشند که $a = x^۲y^۳$. عدد $۹!$ چند مقسوم علیه جالب دارد؟

: مجموع ارقام جواب بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

محل انجام محاسبات:

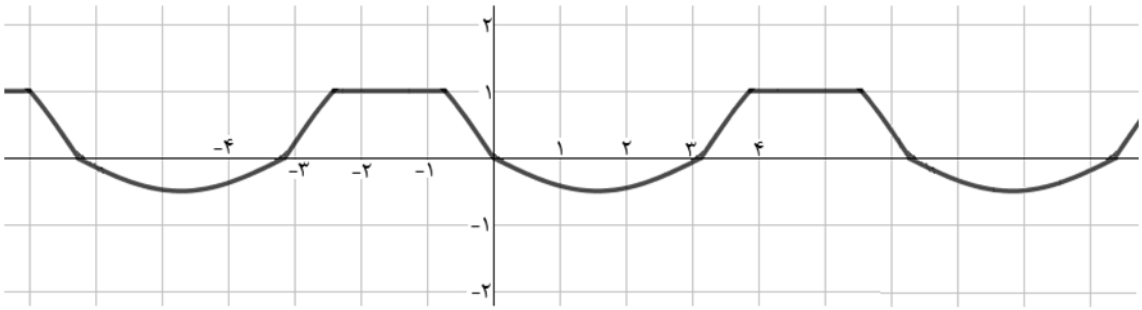
کد سؤالات: ۱

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

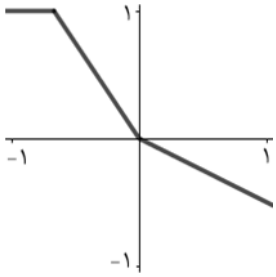
آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

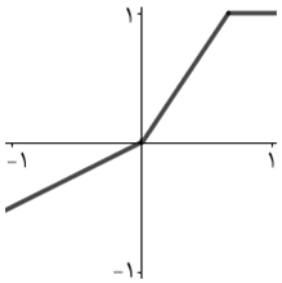
ریاضی کشور

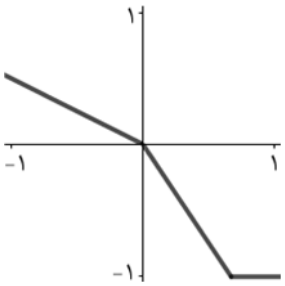
۶. برای تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، می‌دانیم نمودار $f(\sin(x))$ به شکل زیر است.

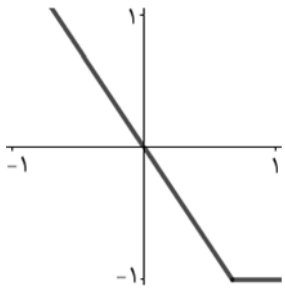


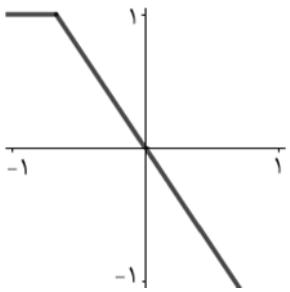
کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند بخشی از نمودار تابع $f(x)$ باشد.

۱)


۲)


۳)


۴)


۵)


۷. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ زاویه BAD حاده است. نیمساز زاویه BAD پاره‌خط DC را در E قطع می‌کند. اگر $ABED$ یک چهارضلعی محاطی باشد و دایره محیطی آن بر ضلع BC مماس شود، اندازه زاویه AED چند درجه است؟

: جواب عددی طبیعی و بر ۴ بخش‌پذیر است.

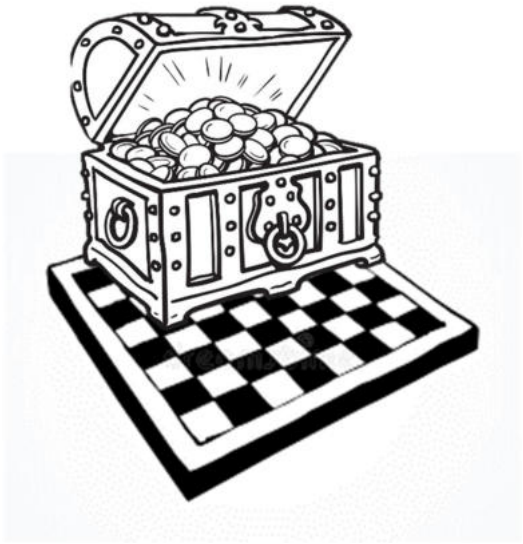
آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۸. علی اعداد ۱ تا ۱۳۹۸ را به ترتیب دلخواه خود در یک ردیف می‌نویسد. وی در هر مرحله دو عدد متوالی را پاک کرده و بین آن‌ها اختلافشان را می‌نویسد. مشخص است که پس از ۱۳۹۷ مرحله تنها یک عدد بر روی تخته باقی می‌ماند. این عدد حداکثر برابر چند می‌تواند باشد؟

۹. یک عدد طبیعی سه رقمی را «منظم» می‌نامیم هرگاه اولاً از سه رقم متمایز و ناصفر تشکیل شده باشد و ثانیاً با در نظر گرفتن هر دو رقم متوالی‌اش، رقم سمت راستی بر رقم سمت چپی بخش‌پذیر باشد. به عنوان مثال عدد ۱۲۶ یک عدد منظم است. چند عدد منظم سه‌رقمی وجود دارد؟

: باقی‌مانده تقسیم جواب بر ۴ برابر ۳ است.



۱۰. پادشاه شهر فلک‌الافلاک می‌خواهد به مخترع بازی شطرنج به دلخواه او جایزه دهد. مخترع از پادشاه می‌خواهد در هر خانه سیاه که در سطر و ستون i ام و j ام واقع است، تعداد $i \times j$ سکه نقره قرار دهد، و در انتها جمع سکه‌ها جایزه او شود. با توجه به اینکه صفحه شطرنج ۸×۸ بوده و خانه واقع در سطر و ستون ۱ ام سیاه است، جایزه مخترع شطرنج چند سکه نقره می‌شود.

: جواب دو رقم یکسان دارد.

۱۱. نقطه G مرکز ثقل مثلث ABC (محل برخورد میانه‌های مثلث) است. از G خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در K قطع کند. نقطه M وسط ضلع AB است و محل برخورد خطوط AK و CM را F می‌نامیم. اگر مساحت مثلث KFM برابر با سه سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث ABC چند سانتی‌متر مربع است؟

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

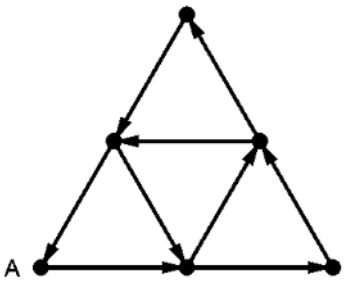
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۲. شهر مصلس‌ها از تعدادی میدان و خیابان‌های یک‌طرفه به شکل روبه‌رو تشکیل شده است. جهت هریک از خیابان‌های این شهر مطابق جهت مشخص شده بر روی شکل است. برای طی کردن هر کدام از این خیابان‌ها، یک لیتر بنزین لازم است. سپهر می‌خواهد با ماشین شخصی خود که ۹ لیتر بنزین دارد در خیابان‌های این شهر با شروع از A به گردش بپردازد. وی به چند طریق می‌تواند این کار را نجام دهد؟ (در طول مسیر ممکن است از شهر و یا خیابان تکراری گذر کند.)



: اختلاف رقم دهگان و یکان جواب کمتر و یا مساوی ۱ است.

۱۳. تعداد سه‌تایی های مرتب x, y, z از اعداد صحیح $0 \le x \le y \le z \le 1000$ را بیابید به‌طوری که عدد طبیعی n موجود باشد که

$$(x+y+z)(x+1)(y+1)(z+1) = 2^n$$

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ ۵) ۱۲

۱۴. ضریب x^{60} در چندجمله‌ای زیر چند است؟

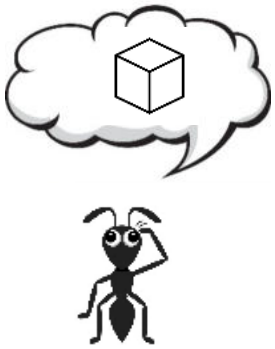
$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\dots(x^{15}-1)$$

محل انجام محاسبات:

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور



۱۵. لانه مورچه‌ای در وسط یکی از یال‌های مکعبی به ضلع واحد قرار دارد. وسط هر کدام از یال‌های دیگر مکعب (به غیر از مکان لانه) تکه‌ای نان قرار دارد. اگر مورچه بخواهد با حرکت روی سطح جانبی مکعب، همه نان‌ها را برداشته و در نهایت به لانه خود بازگردد، طول کوتاه‌ترین مسیری که با انجام این فرآیند طی می‌کند، چقدر است؟

۱) $۲+۵\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۱۲\sqrt{۲}$ ۴) $۱+۴\sqrt{۲}$ ۵) ۱۲

۱۶. ۱۲ لامپ و ۱۲ کلید با شماره ۱ تا ۱۲ داریم. با زدن کلید شماره k، همه لامپ‌هایی که شماره آن‌ها کمتر یا مساوی k است، تغییر وضعیت می‌دهند. در ابتدا تمامی لامپ‌ها خاموش هستند. به چند طریق می‌توان زیر مجموعه‌ای ۷ عضوی از کلیدها را انتخاب کرد، به‌طوری که با زدن آن‌ها دقیقا ۷ لامپ روشن شود؟

: جواب دو رقم یکسان دارد.

۱۷. تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی از مجموعه اعداد حقیقی را بیابید که هرطور آن‌ها را به دو دسته دو عضوی افراز کنیم، حاصل‌ضرب اعضای یک دسته با حاصل‌جمع اعضای دسته دیگر برابر باشد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲۴ ۵) بی‌نهایت

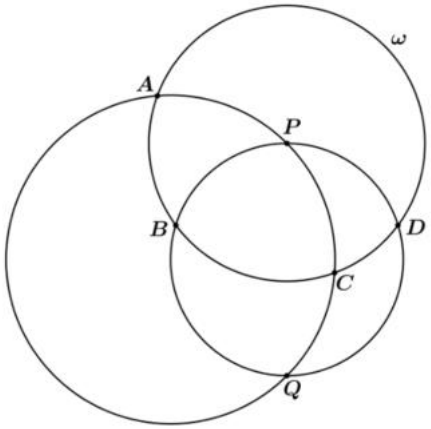
محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

۱۸. آلیس در سرزمین عجایب توسط ریاضی‌دانی بدجنس در کلاسی زندانی شده است. آلیس باید به مدت یک هفته روی یک معمای ریاضی کار کند و در انتها جواب را به ریاضی‌دان بگوید و تنها در صورتی آزاد می‌شود که پاسخ او درست باشد.کلاس بزرگی که آلیس در آن محبوس شده تخته بسیار بزرگی دارد که در ابتدا روی آن اعداد $۲,۳,۴,\ldots,۱۰۰۰$ به‌ترتیب نوشته شده است. آلیس باید در روز i ام عدد i ام نوشته شده روی تخته مانند a را در نظر بگیرد، سپس هر عدد روی تخته مانند b را بر ب.م.م آن عدد و a تقسیم کرده و حاصل را به جای b روی تخته بنویسد (مثلاً در انتهای روز اول اعداد تخته به صورت $۱,۳,۲,۵,۳,\ldots,۹۹۹,۵۰۰$ در می‌آیند). جواب معما تعداد یک‌های نوشته شده روی تخته در انتهای روز هفتم است. (مثلاً در انتهای روز اول یک عدد ۱ روی تخته وجود دارد). اگر شما پیش آلیس بودید آیا می‌توانستید به سرعت جواب نهایی را محاسبه کرده و آلیس را نجات دهید؟ اگر چنین است جواب را در پاسخ‌نامه وارد نمایید.

۱۹. در شکل مقابل، دو دایره در نقاط P و Q متقاطع هستند. دایره ω به مرکز P می‌باشد که دو دایره دیگر را در نقاط A، B، C و D قطع می‌کند. اگر زاویه BQC برابر با ۵۰ درجه و زاویه CQD برابر با ۲۰ درجه باشد، اندازه زاویه ADC چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)



: جواب عددی طبیعی و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۴ برابر ۳ است.

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۰. امید بر روی راس‌های یک ۱۳۹۸ ضلعی منتظم اعداد ۱،۰ و ۱- را نوشته است (ممکن است از برخی از این اعداد استفاده نشود.) به‌طوری که عدد هر کدام از راس‌ها میانگین عدد دو راس مجاور، یا مجموع عدد دو راس مجاور آن است (ممکن است برخی از راس‌ها میانگین، و برخی دیگر مجموع دو راس مجاور آن باشند). مجموع اعداد همه راس‌های این ۱۳۹۸ ضلعی چند حالت مختلف، می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۳۹۵ ۲) ۱۳۹۷ ۳) ۱۳۹۹ ۴) ۲۷۹۵ ۵) ۲۷۹۷

۲۱. تعداد اعداد طبیعی سه رقمی را بیابید که دو رقم سمت راست مربعشان با دو رقم سمت راست خودشان نظیر به نظیر برابر باشد. (مانند ۲۲۵ که دو رقم سمت راستش با دو رقم سمت راست $۲۲۵^۲ = ۵۰۶۲۵$ برابر است.)

۲۲. برای عدد حقیقی x، کم‌ترین مقدار عبارت زیر چند است؟

$$\sqrt{x^۲ + ۴x + ۸} + \sqrt{x^۲ - ۶x + ۱۰}$$

۱) $۲ + \sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳۴}$ ۴) $\sqrt{۵} + \sqrt{۱۳}$ ۵) $\sqrt{۸} + \sqrt{۱۰}$

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هشتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۳. دایره $\omega_۱$ به مرکز O مفروض است. وتر AB از دایره $\omega_۱$ به گونه‌ای انتخاب شده که دایره $\omega_۲$ به قطر AB، از O بگذرد. نقطه C روی خط AB طوری قرار دارد که زاویه BCO برابر با ۳۰ درجه است (B بین نقاط C و A قرار دارد). پاره‌خط OC دایره $\omega_۲$ را برای بار دوم در K قطع کرده است. نقطه D روی دایره $\omega_۱$ قرار دارد به‌گونه‌ای‌که CD بر دایره $\omega_۱$ مماس است و نقاط D و O در یک طرف خط AB قرار دارند. اگر طول پاره‌خط DK برابر با $۳\sqrt{۲}$ باشد، طول پاره‌خط CD چقدر است؟

۲۴. در هر یک از خانه‌های یک جدول ۴×۳ یک نفر نشسته است. هر کدام از این افراد یا راستگو است و همیشه راست می‌گوید و یا دروغگو است که همیشه دروغ می‌گوید. در یک لحظه هر کدام از این ۱۲ نفر گفتند: « تعداد افراد راستگو در سطر من با تعداد افراد راستگو در ستون من برابر است. » حداکثر چند نفر از این افراد می‌توانند دروغگو باشند؟

۲۵. دستگاه زیر چند دسته جواب حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a+b+c=۱ \\ a^۳=bc\left(۱+a\right) \\ b^۳=ac\left(۱+b\right) \\ c^۳=ab\left(۱+c\right) \end{cases}$$

سعادتمند باشید.

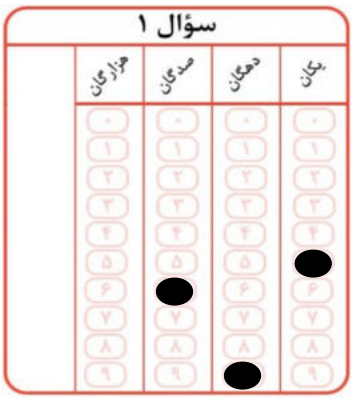
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

ضمنا امسال در انتهای برخی از سوالاتِ کوتاه‌پاسخ بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده‌شده‌است، که‌با علامت 🔔 نمایش داده‌خواهدشد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی بوده و به‌روند حل هیچ کمکی نخواهد کرد.

۰. (سؤال شمارهٔ صفر!) کد دفترچهٔ شما چند است؟ آن را در صفحهٔ اول پاسخ‌نامهٔ خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ‌نامه توضیح داده‌شده‌است.

۱. دامنه تابع زیر، شامل چند عدد صحیح است؟

$$f(x)=\sqrt[۴]{-۱+\sqrt[۳]{-۱+\sqrt{\frac{۱۲}{x^{۲}-۲x}}}}$$

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱ جمعه ۱۳۹۷/۱۱/۵

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

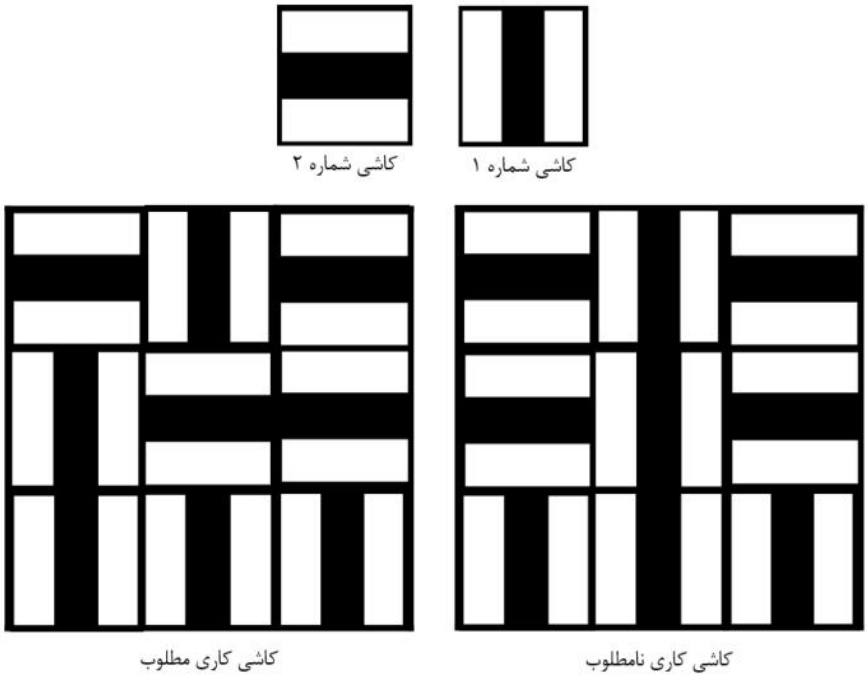
آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲. ۱۳۹۷ عدد حقیقی داریم‌که تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند. اگر تعداد اعداد گویا بین این ۱۳۹۷ عدد را n بنامیم، تعداد مقادیر ممکن برای n چند حالت مختلف دارد؟

۳. مجموع ارقام عدد $\overbrace{۶۶\ldots۶}^{۹۷} \times \overbrace{۹۹\ldots۹}^{۹۷}$ چند است؟ (رقم دهگان جواب برابر با ۷ است.)

۴. می‌خواهیم یک جدول ۳ × ۳ را به کمک دو نوع کاشی زیر، کاشی‌کاری کنیم. به طوری‌که یک مسیر سیاه از یک ضلع جدول به ضلع مقابل آن پدید نیاید. چند حالت کاشی‌کاری مطلوب داریم؟



۱) ۳۳۸ ۲) ۱۷۴ ۳) ۱۶۹ ۴) ۳۴۳ ۵) ۵۱۲

محل انجام محاسبات:

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

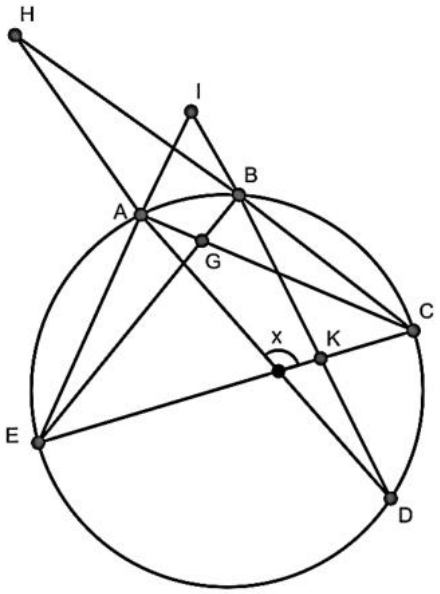
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۵. چند عدد طبیعی دورقمی داریم‌که رقم صفر نداشته باشد و بر هر دو رقم خود بخش‌پذیر باشد؟

۶. در شکل زیر محل تلاقی EB با AC را G می‌نامیم. زاویه بین تلاقی امتداد پاره‌خط‌های AE و BD برابر ۷۰ درجه و زاویه بین تلاقی امتداد پاره‌خط‌های DA و CB برابر با ۱۰ درجه است. اگر زوایای $\widehat{AGB}$ و $\widehat{BKE}$ به ترتیب برابر ۹۵ و ۷۰ درجه باشند، مقدار x را بیابید.(شکل دقیق نمی‌باشد.)



۷. در چند جایگشت $a_۱, a_۲, \dots, a_{۱۳}$ از اعداد ۱ تا ۱۳، شرایط زیر برقرار است؟ (جواب مربع کامل است.)

$$a_۱, a_۲ < a_۳$$
$$a_۴, a_۵ < a_۶$$
$$a_۳, a_۶ < a_۷$$
$$a_۷ < a_۸, a_۹$$
$$a_۸ < a_{۱۰}, a_{۱۱}$$
$$a_۹ < a_{۱۲}, a_{۱۳}$$

محل انجام محاسبات:

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۸. در مثلث ABC، نقطه M را روی ضلع AC طوری در نظر بگیرید که $CM = ۲AM$. نیمساز زاویه داخلی $\widehat{A}$ ، پاره‌خط BC را در نقطه D قطع می‌کند. فرض کنید AD بر خط BM عمود است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث BMD است؟

۹. معادله زیر در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ (جزء صحیح عدد x را با $[x]$ نمایش می‌دهند.)

$$[x](x - ۱) = ۲|x|$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) بی نهایت

۱۰. n عدد طبیعی داریم‌که اختلاف هردوتایی از آن‌ها یک عدد اول است. حداکثر مقدار n چند می‌تواند باشد؟

۱۱. رئوس یک پنج‌ضلعی (محدب یا مقعر) با مساحت ۷، روی نقاطی با مختصاتِ صحیح در صفحه مختصات قرار دارد. حداکثر چند نقطه با مختصات صحیح می‌تواند درون این چندضلعی باشد؟ (نقاط روی مرز جزء نقاط درونی حساب نمی‌شود.)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

۱۲. از مجموعه $\{۱,۲, \dots ,۷۶۵\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ‌کدام مربع کامل نبوده و جمع هیچ دوتایی از آن‌ها برابر ۷۶۵ نباشد؟ (🔔 حاصل جمع ارقام جواب، ۱۲ است.)

۱۳. برای چند مقدار a از مجموعه $\{-\frac{۵}{۵}, -\frac{۴}{۵}, \dots , \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۵}\}$، تابع $f(x) = ax - [x]$ یک‌به‌یک است؟

محل انجام محاسبات:

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

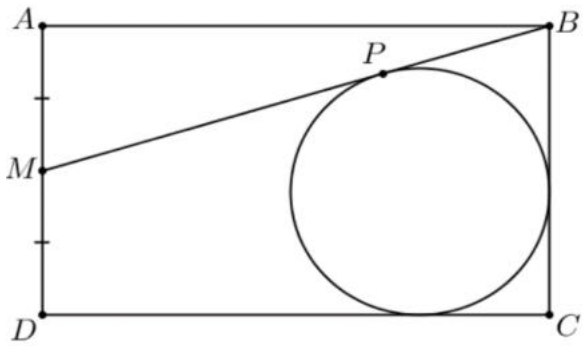
آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۴. اگر $S(n)$ مجموع ارقام عدد n، و $P(n)$ حاصل‌ضرب ارقام n باشد، چند عدد طبیعی مختلف n می‌توان یافت به‌طوری‌که:

$$S(n) + P(n) = n$$

۱۵. در مستطیل شکل روبه‌رو، M وسط ضلع AD است. دایره‌ای داخل مستطیل درنظر بگیرید به طوری که بر پاره‌خط‌های BC، DC و MB مماس باشد و محل تماس آن با پاره‌خط MB را P بنامید. اگر $MP = AD$ باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟ (شکل دقیق نمی‌باشد.)



۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$ ۵) ۳

۱۶. در یک عملیات امنیتی، ۵ نفر دستگیر شده‌اند. تعدادی از آن ها مجرم و تعدادی بی‌گناه‌اند. می‌دانیم افراد مجرم همواره دروغ گفته و افراد بی‌گناه همواره راست می‌گویند. اگر این ۵ نفر جملات زیر را گفته باشند دقیقا چند مجرم داریم؟



- نفر اول: حداقل دو نفر از ما بی‌گناه است.
- نفر دوم: حداقل دو نفر از ما مجرم است.
- نفر سوم: همه بی‌گناه هستند.
- نفر چهارم: دقیقا یک نفر از ما مجرم است.
- نفر پنجم: دقیقا یک نفر از ما بی‌گناه است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

محل انجام محاسبات:

کد سؤالات: ۱ جمعه ۱۳۹۷/۱۱/۵

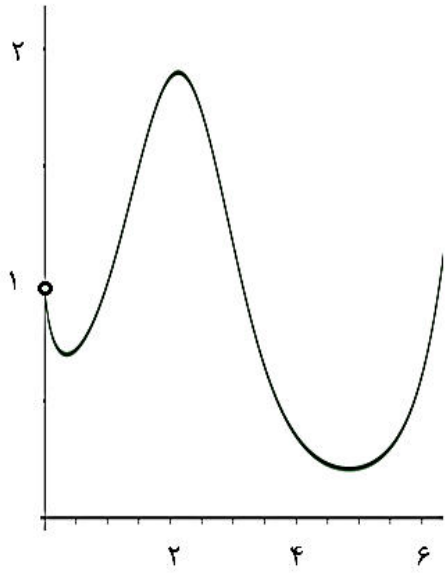
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۷. شکل روبه‌رو مربوط به بخشی از نمودار کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟



۱) x^x ۲) $(\cos(x))^x$

۳) $(\sin(x))^x$ ۴) $(\sin(x))^{\sin x}$

۵) $x^{\sin(x)}$

۱۸. در مثلث قائم الزاویه ABC، زاویه B قائمه بوده و نقاط M و N به ترتیب بر روی پاره‌خط‌های AC و AB به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که MN بر AC عمود باشد. محل تلاقی امتداد MN با امتداد ضلع BC را P می‌نامیم. می‌دانیم که PN برابر MN است. فرض کنید O وسط ضلع AC باشد. اگر طول MN و ON به ترتیب برابر ۲۰ و ۲۱ سانتی‌متر باشد، طول وتر مثلث قائم الزاویه ABC را بیابید. (جواب سوال عدد طبیعی است.)

۱۹. چند دنباله از اعداد طبیعی مانند $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وجود دارد به طوری‌که دارای هردو ویژگی زیر باشد؟

- $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$
- $a_3 = 54000$

محل انجام محاسبات:

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۰. در کلاس ترکیبیات، آوا همه زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۱۳۹۷\}$را بر روی تخته نوشت. وی در ادامه به جای هر زیرمجموعه میانگین اعضای آن را قرار می دهد. میانگین اعداد نوشته شده بر روی تخته چند است؟

۲۱. چند زوج مرتب حقیقی (a,b) وجود دارد به طوری‌که:

$$\begin{cases}(a+b)^۳ = ۲(a-b)\\ ۳(a-b)^۲ = ۴ab\end{cases}$$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌نهایت

۲۲. درون مثلث متساوی الساقین ABC، $(AB=AC)$ نقطه P مفروض است. پای عمودهای P بر اضلاع AB، AC و BC را به ترتیب X، Yو Z می‌نامیم.می‌دانیم مقدار زاویه $\widehat{BAC}$ و $\widehat{XZY}$ به ترتیب ۴۰ و ۷۰ درجه می‌باشند. اگر$PX = ۲PY = ۴$ باشد، طولPZ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $۲\sqrt{۲}$

۲۳. دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شکرستان تعدادی استاد داردکه به‌ترتیب حروف الفبا به آن‌ها شماره-های ۱، ۲، ۳ و ... داده‌شده‌است. رئیس دانشکده از اساتید خواسته که برای خود کدی شامل چهار عدد اول درست کنند. استاد شماره n باید اعداد $n+۱$، $n+۲$، $n+۳$ و $n+۴$ را درنظرگرفته و سپس به‌جای هریک از این چهار عدد، یکی از عوامل اول آن را به دلخواه بنویسد. برای مثال اگر شماره استادی ۵۳ باشد، باید اعداد ۵۴، ۵۵، ۵۶ و ۵۷ را درنظرگرفته و می‌تواند این کد را انتخاب کند: ۳، ۵، ۷ و ۳ (او انتخاب‌های دیگری نیز دارد). می‌دانیم که اساتید به هرشکلی که کد خود را انتخاب کنند، کد هیچ دو استادی برابر نخواهدشد. این دانشکده حداکثر چند استاد دارد؟

محل انجام محاسبات:

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و هفتمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۴. برای اعداد حقیقی a و b می‌دانیم $a \in [۰,۳]$ و $b \in [۱,۲]$. حداقل و حداکثر مقدار عبارت $a^۲ - ab + b^۲$ را به ترتیب، m و M می‌نامیم. مقدار جزءصحیح $[۴(M-m)]$ چند خواهد بود؟

۲۵. چند تابع صعودی $f: \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \to \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ داریم، به طوری که برای هر $۱ \le i \le ۶$ داشته باشیم:

$$|f(i) - i| \le ۱$$

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۶۴ ۳) ۸۹ ۴) ۳۲۴ ۵) ۱۲۸

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

۱. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ... و ۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۱۰

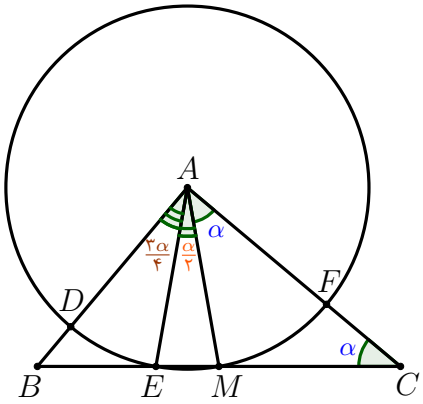
پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

تنها عددی که می‌تواند مجاور ۵ باشد ۱ است پس ۵ باید راست‌ترین یا چپ‌ترین عدد ردیف باشد. بنابر تقارن فرض می‌کنیم ۵ راست‌ترین باشد و در انتها تعداد حالات را دو برابر می‌کنیم، پس دو عدد راست ردیف ۱, ۵ هستند. از آن‌جا که عدد ۳ تنها می‌تواند مجاور ۱ و ۶ باشد برای مکان آن دو حالت وجود دارد. حالت اول این است که مجاور یک باشد در این‌صورت به راحتی بدست می‌آید که اعداد ردیف باید به شکل ۴, ۲, ۶, ۳, ۱, ۵ باشند. حالت دوم این است که چپ‌ترین عدد ردیف باشد و در این حالت نیز به سادگی نتیجه می‌شود اعداد ردیف باید به شکل ۳, ۶, ۲, ۴, ۱, ۵ باشند. پس جواب نهایی برابر می‌شود با $۲ \times ۲ = ۴$. ■

۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با فرض $\angle BAC = ۹۰^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطهٔ E و M قطع کند که نقطهٔ E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و هم‌چنین نسبت طول کمان‌های $\widehat{DE}$ به $\widehat{EM}$ به $\widehat{MF}$ برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدر مطلق تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث ABC چقدر است؟

۱) ۷۰° ۲) ۵۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰° ۵) ۱۰°

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.



از آن‌جا که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است بدست می‌آید $AM = MC$ پس $\angle MAC = \alpha$. هم‌چنین طبق شرط سوال می‌توان نوشت

$$\angle EAM = \frac{۱}{۲}\angle MAF = \frac{۱}{۲}\alpha, \quad \angle DAE = \frac{۳}{۴}\angle MAF = \frac{۳}{۴}\alpha$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

در نتیجه

$$۹۰^\circ = \angle MAF + \angle MAE + \angle EAD = \frac{۳}{۴}\alpha + \frac{۱}{۲}\alpha + \alpha = \frac{۹}{۴}\alpha \Longrightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

پس $\angle B = ۵۰^\circ$ و جواب مسئله ۱۰° می‌شود. ■

۳. جناب‌خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌رقمی است و جناب‌خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به‌علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کمتر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفتهٔ اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود.)



۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

از آن‌جا که رقم‌های رمز باید متفاوت باشند بزرگ‌ترین عددی که برای رمز می‌تواند استفاده شود از ارقام ۷، ۸ و ۹ تشکیل شده است. دقت کنید که پس از هر هفته مجموع ارقام رمز حداقل یک واحد اضافه می‌شود پس جناب‌خان حداکثر

$$۹ + ۸ + ۷ - (۱ + ۴ + ۰) = ۱۹$$

هفتهٔ دیگر می‌تواند رمز انتخاب کند که با احتساب هفتهٔ اول می‌شود ۲۰ هفته. حالا مثالی برای ۲۰ هفته ارائه می‌دهیم:

$$۱۴۰, ۱۵۰, \ldots, ۱۹۰, ۲۹۰, \ldots, ۸۹۰, ۸۹۱, \ldots, ۸۹۷.$$

■

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m, n) = ۱$:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n+۱}$$

که منظور از (m, n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ تابع f درست است؟

۱) تابع f یک‌به‌یک است.
۲) تابع f یک‌نوا (صعودی یا نزولی) است.
۳) برد تابع f همه اعداد گویا است.
۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$
۵) همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

واضح است که برای هر n طبیعی، $(n, n+1) = 1$. در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $m = n+1$ که نتیجه می‌دهد $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$ پس تابع یک‌به‌یک نیست و گزینهٔ اول رد می‌شود. اگر جفت‌های $(2,1)$، $(5,3)$ و $(1,1)$ را به جای (m,n) قرار دهیم، می‌توان نوشت $1 < \frac{5}{3} < 2$ اما $f(2) < f\left(\frac{5}{3}\right) > f(1)$ در نتیجه تابع یک‌نوا هم نیست و گزینهٔ دوم نیز رد می‌شود. برای رد کردن گزینهٔ چهارم کافی‌ست به این توجه کنیم که $f(-1) = \frac{-1}{2} > -1$. حالا درستی گزینهٔ سوم را اثبات می‌کنیم. عدد گویای دلخواه $\frac{a}{b}$ را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $b \in \mathbb{N}$. واضح است که 1 و -1 در برد f هستند پس فرض می‌کنیم حداقل یکی از دو عدد $|a|$ و b از یک بیشتر هستند. نشان می‌دهیم $(a^3, a^2b - 1) = 1$. فرض کنید p عامل اول مشترکی از دو عدد باشد. می‌توان نوشت

$$p \mid a^3 \Longrightarrow p \mid a \Longrightarrow p \mid a^2b \Longrightarrow p \mid 1$$

که تناقض است. پس می‌توانیم قرار دهیم $m = a^3$ و $n = a^2b - 1$ (دقت کنید طبق فرض‌هایی که برای a و b وضع کرده‌ایم n عددی طبیعی است) و نتیجه می‌شود $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b}$ پس f پوشا است. ■

۵. چند عدد سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

قرار می‌دهیم $\overline{abc} = x^2$ هم‌چنین عدد حاصل را نیز y^2 تعریف می‌کنیم که x, y اعدادی طبیعی هستند. می‌توان نوشت

$$x^2 + 123 = y^2 \Longrightarrow 123 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$$

می‌دانیم $123 = 3 \times 41$ پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $y + x = 123$ و $y - x = 1$ که واضح است در این حالت y^2 سه رقمی نمی‌شود. حالت دوم $y + x = 41$ و $y - x = 3$ که جواب $\overline{abc} = 361$ را به‌دست می‌دهد پس مسئله تنها یک جواب دارد. ■

۶. با استفاده از همهٔ ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۳۴۵ ۲) ۱۹۸ ۳) ۹۱۲ ۴) ۳۹۸ ۵) ۳۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

کم‌ترین مقدار ممکن برای صدگان A، ۳ است زیرا ارقام متمایزند و صدگان دو عدد دیگر حداقل ۱ و ۲ است. هم‌چنین اگر صدگان A برابر با ۳ باشد ارقام ۱ و ۲ برای صدگان دو عدد دیگر استفاده شده‌اند در نتیجه حداقل A می‌تواند ۳۴۵ باشد، که اگر سه عدد ۱۶۷، ۲۸۹ و ۳۴۵ باشند این اتفاق رخ می‌دهد. ■

۷. برای $A, B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, B \in B\}$. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ ($\mathbb{Q}'$ نماد مجموعهٔ اعداد گنگ است.)

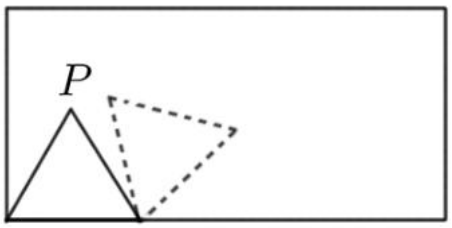
- $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\{\sqrt{۲}, ۵\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$
- $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک ۵) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

واضح است که گزارهٔ ۳ صحیح نیست زیرا صفر در مجموعهٔ سمت چپ وجود دارد اما عددی گنگ نیست. حالا درستی سه گزارهٔ دیگر را نشان می‌دهیم. ابتدا درستی گزارهٔ ۴ را نشان می‌دهیم و به راحتی از آن درستی گزارهٔ ۱ نیز نتیجه می‌شود (زیرا $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \subset \mathbb{Q}'$) فرض کنید q عددی گویا و ناصفر باشد. می‌توان به سادگی نشان داد که $\frac{q}{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است پس همهٔ اعداد گویای ناصفر تولید می‌شوند. حالا فرض کنید q' عددی گنگ باشد. اگر هر دو عدد $\frac{q'}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{q'}{\sqrt{۳}}$ گویا باشند نسبت آن‌ها نیز گویا است اما به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ گویا نیست پس حداقل یکی از آن‌ها گنگ است و در نتیجه همهٔ اعداد گنگ نیز تولید می‌شوند. به طور مشابه می‌توان درستی گزارهٔ ۲ را نیز نشان داد. ■

۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل ۴ × ۲، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟



۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۵) ۲π

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

اگر P راس چرخش نباشد، در طول اضلاع به اندازهٔ کمان ۱۲۰° و در گوشهٔ مستطیل به اندازهٔ کمان ۳۰° از یک دایره به شعاع ۱ حرکت می‌کند. پس مجموع کمان‌هایی که P حرکت می‌کند برابر می‌شود با

$$۱۲۰^\circ + ۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۳۰^\circ + ۰^\circ + ۳۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۳۰^\circ + ۰^\circ + ۳۰^\circ = ۶۰۰^\circ$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

پس مجموع حرکت P برابر می‌شود با

$$\frac{۶۰۰}{۳۶۰} \times ۲\pi = \frac{۱۰\pi}{۳}$$

■

۹. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) وجود دارد که x, y, z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۲ ۵) ۱۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

روی مقادیر مختلف z حالت‌بندی می‌کنیم. واضح است که برای $z = ۵, ۷$ هیچ جفتی نمی‌توانیم انتخاب کنیم. اگر $z = ۱$ باشد طبق اصل ضرب برای دو عدد دیگر $۸ \times ۷ = ۵۶$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۲$، از آن‌جا که ۵ رقم فرد داریم $۵ \times ۴ = ۲۰$ حالت وجود دارد که $x \times y$ فرد شود پس طبق اصل متمم $۵۶ - ۲۰ = ۳۶$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۳$، مشابه حالت قبل نتیجه می‌شود که $۵۶ - ۳۰ = ۲۶$ حالت وجود دارد. اگر $z = ۴$، در صورتی که هیچ‌کدام از x, y برابر با ۸ نباشند تنها دو حالت $(۲, ۶), (۶, ۲)$ وجود دارد و اگر یکی از آن‌ها ۸ باشد ۷×۲ حالت وجود دارد و در مجموع تعداد حالات $۱۶ = ۲ + ۱۴$ می‌شود. اگر $z = ۶$، یکی از x, y باید مضربی از ۲ باشد و دیگری مضربی از ۳ پس $۱۲ = ۲ \times ۳ \times ۲$ حالت وجود دارد. برای $z = ۸$ و $z = ۹$ نیز واضح است که به ترتیب ۴ و ۲ حالت وجود دارد. نهایتا تعداد حالات کل برابر است با

$$۵۶ + ۳۶ + ۲۶ + ۱۶ + ۱۲ + ۴ + ۲ = ۱۵۲.$$

■

۱۰. اعداد ۱، ۲، ... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همهٔ مقسوم علیه‌های آن را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همهٔ اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۱ ۳) ۶۹۸ ۴) ۷۰۱ ۵) ۷۰۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

دقت کنید که هر عدد کوچک‌تر از ۶۹۸ مضربی از ۶۹۸ تا ۱۳۹۵ دارد زیرا اگر $x < ۶۹۸$ آن‌گاه عدد طبیعی n وجود دارد که $۲^n x \leq ۱۳۹۵$ (زیرا $۶۹۸ \times ۲ = ۱۳۹۶$) پس زمانی که همهٔ اعداد بزرگ‌تر از ۶۹۸ خط بخورند تنها امکان دارد ۶۹۸ و مقسوم علیه‌های آن باقی‌مانده باشند. واضح است که ۶۹۸ خط

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

نخورده است هم‌چنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که سه مقسوم علیه دیگر آن مضرب دیگری بزرگتر از ۶۹۸ دارند و قبلا خط خورده‌اند پس آخرین عددی که خط می‌خورد ۶۹۸ است. ■

۱۱. عمل $*$ را در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x+y}{۱-xy}$$

اگر a, b, c ریشه‌های $x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵$ باشند، مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) -۸ ۴) $\frac{۸}{۳}$ ۵) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

می‌توان نوشت

$$a * (b * c) = a * \frac{b+c}{۱-bc} = \frac{a + \frac{b+c}{۱-bc}}{۱ - \frac{a(b+c)}{۱-bc}} = \frac{a+b+c-abc}{۱-(ab+bc+ca)}$$

از طرف دیگر نیز داریم

$$x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵ = (x-a)(x-b)(x-c) = x^۳ - (a+b+c)x^۲ + (ab+bc+ca)x - abc$$

پس $a+b+c = ۳$، $ab+bc+ca = -۲$ و $abc = -۵$ و با قرار دادن این روابط در تساوی اول پاسخ بدست می‌آید که برابر با $\frac{۸}{۳}$ است. ■

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b,c) = b(c,a) = c(a,b) = ۲^۶ \times ۳^۸ \times ۵^{۱۰}$$

(منظور از (a, b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

۱) ۳۲۴۰ ۲) ۲۰۸۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۱۶۲۰ ۵) ۷۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

دقت کنید که عوامل اول a, b, c تنها می‌توانند $۲, ۳, ۵$ باشند. فرض کنید توان ۲ در a, b, c به ترتیب α, β, γ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $\alpha \le \beta \le \gamma$. می‌توان نوشت

$$\beta + \min\{\alpha, \gamma\} = \gamma + \min\{\alpha, \beta\} \Longrightarrow \beta + \alpha = \gamma + \alpha \Longrightarrow \beta = \gamma$$

از طرف دیگر نیز داریم $\alpha + \beta = ۶$. این معادله جواب‌های

$$(\alpha, \beta) = (۰, ۶), (۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳)$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

را دارد (از آن‌جا که $\alpha \le \beta$). برای هر کدام از سه جواب اول ۳ حالت برای توان‌های ۲ در a, b, c وجود دارد زیرا α می‌تواند توان دوی هر یک از سه عدد باشد و توان دوی ۲ عدد دیگر به طور یکتا مشخص می‌شود اما در جواب چهارم تنها ۱ حالت وجود دارد. پس مجموعا ۱۰ حالت متفاوت برای توان‌های ۲ وجود دارد. به طور مشابه می‌توانیم ببینیم که برای توان‌های ۳ و ۵ به ترتیب ۱۳ و ۱۶ حالت وجود دارد و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر با $۱۰ \times ۱۳ \times ۱۶ = ۲۰۸۰$ می‌شود. ■

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳ عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۷۴۸۴۴۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

جایگاه‌های ردیف پایین را با ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم و برای $۱ \le i \le ۶$ جایگاه بالای شماره i را با $i + ۶$. مسئله به این تبدیل می‌شود که چند حالت برای قرار دادن اعداد ۱ تا ۱۲ پشت سر هم وجود دارد به‌طوری که برای هر $۱ \le i \le ۶$، i قبل از $i + ۶$ آمده باشد. طبق تقارن به ازای هر شرط نصف حالات کل حذف می‌شود پس تعداد حالات برابر است با

$$\frac{۱۲!}{۲^۶} = ۷۴۸۴۴۰۰.$$

■

۱۴. a, b, c اعدادی دوبه‌دو متمایزند. می‌دانیم سه معادلهٔ درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^۲ + bx + c = ۰, \quad bx^۲ + cx + a = ۰, \quad cx^۲ + ax + b = ۰$$

مقدار آن ریشهٔ مشترک چند است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱ ۵) به‌طور یک‌تا تعیین نمی‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

با جمع کردن سه معادله با هم بدست می‌آید

$$(a + b + c)(x^۲ + x + ۱) = ۰$$

از آن‌جا که پرانتز دوم ریشه حقیقی ندارد نتیجه می‌شود $a + b + c = ۰$. حالا می‌توان نوشت

$$۰ = ax^۲ + bx - a - b = a(x - ۱)(x + ۱) + b(x - ۱) = (x - ۱)(ax + a + b)$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

پس $x=1$ یا $x=-\frac{a+b}{a}$. به طور مشابه از معادله دوم نیز بدست می‌آید $x=1$ یا $x=-\frac{a+b}{b}$ و از آن‌جا که a,b متمایزند تنها حالت ممکن $x=1$ است. ■

۱۵. ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبهٔ دیگر برابر باشد. در حداقل و حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

۱) ۵۰ و ۹۰ ۲) ۵۰ و ۱۰۰ ۳) ۸۰ و ۹۰ ۴) ۸۰ و ۱۰۰ ۵) ۹۰ و ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

اگر فقط ۱ جعبه داشته باشیم واضح است که در ۱۰۰ درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است. هر جعبه‌ای که حداقل نصف سیب‌هایش لکه‌دار هستند را خراب می‌نامیم. فرض می‌کنیم هر جعبه دارای n سیب باشد، آن‌گاه برای خراب کردن هر جعبه حداقل $\frac{n}{2}$ سیب لکه‌دار نیاز است در نتیجه حداکثر $\frac{100}{\frac{n}{2}}$ جعبه خراب داریم. از طرف دیگر تعداد جعبه‌ها $\frac{1000}{n}$ است پس حداکثر

$$\frac{\frac{100}{\frac{n}{2}}}{\frac{1000}{n}}=20\%$$

جعبه‌ها خراب است و حداقل در ٪۸۰ جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است. ■

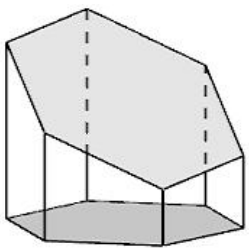
۱۶. چند زوج مرتب (m,n) از اعداد طبیعی داریم که $[1,2,\dots,m]=1395\times[1,2,\dots,n]$.
(منظور از نماد $[1,2,\dots,m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1,2,\dots,m$ است.)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

تعریف می‌کنیم $N=[1,2,\dots,n]$, $M=[1,2,\dots,m]$. دقت کنید که N برابر با حاصل ضرب بزرگ‌ترین توان‌ها از عوامل اول اعداد کوچک‌تر یا مساوی n است. از آن‌جا که $1395 \mid 9$ باید داشته باشیم $m>3n$. پس بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در M بیش‌تر از بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در N است که تناقض است. پس مسئله جوابی ندارد. ■

۱۷. یک منشور قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصلهٔ رئوس این سطح مقطع تا قاعدهٔ پایین به ترتیب برابر ۲، ۳، x، y، ۱۱ و z باشد، $x+y+z$ چقدر است؟



۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴ ۵) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

☺

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

لم. در ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ که $\angle DAB = \angle ABC = ۹۰^\circ$ می‌توان نوشت

$$CD^۲ = (AD - BC)^۲ + AB^۲.$$

اثبات. به عهدهٔ خواننده!
دقت کنید که در ۶ ضلعی که توسط صفحه ایجاد می‌شود هر دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی هستند. پس اگر ذوزنقه‌های قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو به هم را در نظر بگیریم طبق لم اختلاف قاعده‌های آن‌ها برابر است. از همین نکته می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$y - ۱۱ = ۳ - ۲ \Longrightarrow y = ۱۲$$

و از طرف دیگر

$$z - ۱۱ = ۳ - x \Longrightarrow x + z = ۱۴ \Longrightarrow x + y + z = ۲۶.$$

■



۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به‌سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آنکه تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۵۰۰۰۰۰ ۵) ۵۲۴۲۸۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

واضح است که بعد از هر روز تعداد افرادی که شایعه را می‌دانند دو برابر می‌شود پس بعد از ۲۰ روز این تعداد از مرز یک میلیون نفر می‌گذرد. حالا نفر i–امی که آقای خالی‌بند شایعه را به او گفته است در طی این ۲۰ روز به $i - ۱$ نفر دیگر گفته است در نتیجه جواب برابر است با

$$۲۰ + ۱۹ + \cdots + ۱ = ۲۱۰.$$

■

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x, y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} x^۲ - ۳xy + ۲y^۲ + x - y = ۰ \\ ۲x^۲ - ۲xy - ۳y^۲ - ۲x + ۵y = ۰ \end{cases}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

تساوی اول را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$۰ = (x-y)^۲ + (x-y) - y(x-y) = (x - ۲y + ۱))(x-y)$$

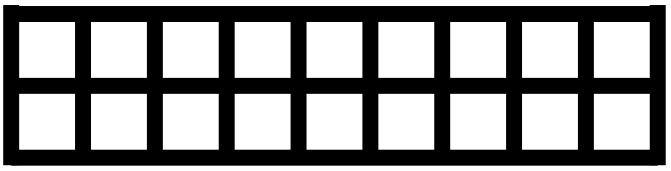
پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $x = y$ که با گذاردن آن در تساوی دوم به‌دست می‌آید

$$۰ = ۲x^۲ - ۲x^۲ - ۳x^۲ - ۲x + ۵x = -۳x^۲ + ۳x \Longrightarrow x = ۰, ۱$$

پس به دو جواب $x = y = ۱$ و $x = y = ۰$ می‌رسیم. حالت دوم $x = ۲y - ۱$ که باز هم با گذاردن آن در تساوی دوم به‌دست می‌آید

$$۰ = ۲(۲y-۱)^۲ - ۲(۲y-۱)y - ۳y^۲ - ۲(۲y-۱) + ۵y = y^۲ - ۵y + ۴ \Longrightarrow y = ۱,\ y = ۴$$

پس به دو جواب $x = y = ۱$ و $x = ۷, y = ۴$ می‌رسیم. در نتیجه در مجموع دو حالت سه جواب وجود دارد. ■

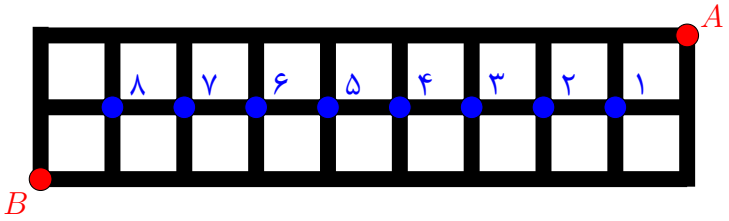


۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همهٔ تقاطع‌ها سرکشی کند به‌طوری که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟

۱) $۲^۵$ ۲) $۳^۵$ ۳) ۲×۳^۴ ۴) $۲^۴$ ۵) $۳^۶ - ۳^۵$

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

چند تقاطع را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



یک مسیر رفت از نقطه A به B داریم و یک مسیر برگشت از نقطه B به A. برای شروع حرکت دو انتخاب داریم و پس از آن با کمی بررسی متوجه می‌شویم هیچ سه تقاطع میانی نمی‌توانند به‌طور متوالی طی شوند

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

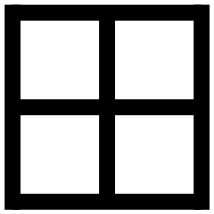
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

همچنین جفت تقاطع‌های $(۱,۲)$، $(۳,۴)$، $(۵,۶)$ و $(۷,۸)$ باید به‌طور متوالی طی شوند و اگر مشخص کنیم هر کدام از این جفت تقاطع‌ها در مسیر رفت یا برگشت طی می‌شوند مسیر به‌طور یکتا مشخص می‌شود. در نتیجه تعداد کل حالات برابر می‌شود با

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵.$$

■



۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است.) هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیشتر از تقاطع‌های دیگر است.
۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دستکم ۹ خودرو پارک شده است.
۵) گزینه‌های ۱ و ۴.

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

مجموع خودروهای مرکزی محله را x و مجموع خودروهای حاشیه‌ای را y می‌نامیم. اگر مجموع ظرفیت همه تقاطع‌ها را حساب کنیم، طبق تقارن در این مجموع ضریب تعداد خودروهای هر خیابان مرکزی مرحله برابر با $\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۱۲}$ و ضریب تعداد خودروهای هر خیابان حاشیه‌ای برابر با $\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۶}$ می‌شود در نتیجه $\frac{۷}{۱۲}x + \frac{۵}{۶}y = ۶۶$ و از طرف دیگر $x + y = ۹۰$. با حل معادله به‌دست می‌آید $x = ۳۶,\ y = ۵۴$ و این همهٔ چیزی است که ما راجع به تعداد خودروهای پارک شده می‌دانیم. در مرکز محله ۴ خیابان وجود دارد پس طبق اصل لانه کبوتری خیابانی وجود دارد که حداقل $\lceil \frac{۳۶}{۴} \rceil = ۹$ خودرو در آن پارک شده باشد پس گزینه ۴ صحیح است. اما ممکن است در هر کدام از این ۴ خیابان دقیقا ۹ خودرو پارک شده باشد پس گزینه ۳ صحیح نیست. گزینه ۲ نیز صحیح نیست زیرا ما فقط می‌دانیم مجموع خودروهای پارک شده در حاشیه محله ۵۴ است و ممکن است در یکی از خیابان‌های آن هیچ خودرویی وجود نداشته باشد. در نهایت گزینه ۱ نیز رد می‌شود زیرا ممکن است در هر یک از دو خیابان متصل به تقاطع بالا چپ ۲۷ خودرو پارک شده باشند پس ظرفیت آن تقاطع ۲۷ می‌شود اما ظرفیت تقاطع مرکزی محله هم‌واره ۹ است. ■

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور



۲۲. در مسابقهٔ قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همهٔ وزنه‌های ۱، ۲، ... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنهٔ ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آنجا قرار داده و از آن خانه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آنجا وزنهٔ ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آنکه وزنهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آنجا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

۱) ۲۰۲۸۰ ۲) ۲۰۲۰۰ ۳) ۲۰۱۸۰ ۴) ۲۰۱۰۰ ۵) ۲۰۰۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

خانه ابتدایی را با صفر نشان می‌دهیم و خانه‌های دیگر را در جهت عقربه‌های ساعت به‌ترتیب با ۱ تا ۹ شماره‌گذاری می‌کنیم. با استفاده از استقرا می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت برای هر $1 \le i \le 100$ وزنه $2i$ از خانه i به خانه $-i$ می‌رود و وزنه $2i-1$ از خانه $i-1$ به خانه i می‌رود (شماره خانه‌ها را به پیمانه ۱۰ در نظر می‌گیریم). پس وزنه $2i$ در خانه صفر بوده است اگر و تنها اگر $10 \mid i$ و از آن‌جا که $10 \mid -i$ به خانه صفر نیز برمی‌گردد. برای وزنه‌های فرد نیز می‌توان استدلال مشابهی را انجام داد و نتیجه گرفت اگر $10 \mid i-1$ وزنه $2i-1$ از خانه صفر خارج شده است و اگر $10 \mid i$ به خانه صفر وارد شده است. مجموع وزنه‌هایی که در ابتدای کار در هر خانه وجود دارد برابر است با

$$1 + 2 + \cdots + 200 = 20100.$$

حالا اختلاف وزنه‌هایی که از خانه صفر خارج یا وارد شده‌اند را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{10} (2 \times (10i) - 1) - \sum_{i=0}^{9} (2 \times (10i+1) - 1) = 199 - 1 + \sum_{i=1}^{9} -2 = 180$$

پس پاسخ برابر است با ۲۰۲۸۰. ■

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید ω_b و ω_c به‌ترتیب دو دایرهٔ گذرنده از A باشند به‌طوری که به‌ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایرهٔ مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TC و TB به‌ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC = 8$ و $AN = 6$، حاصل $NF \times NE$ کدام است؟

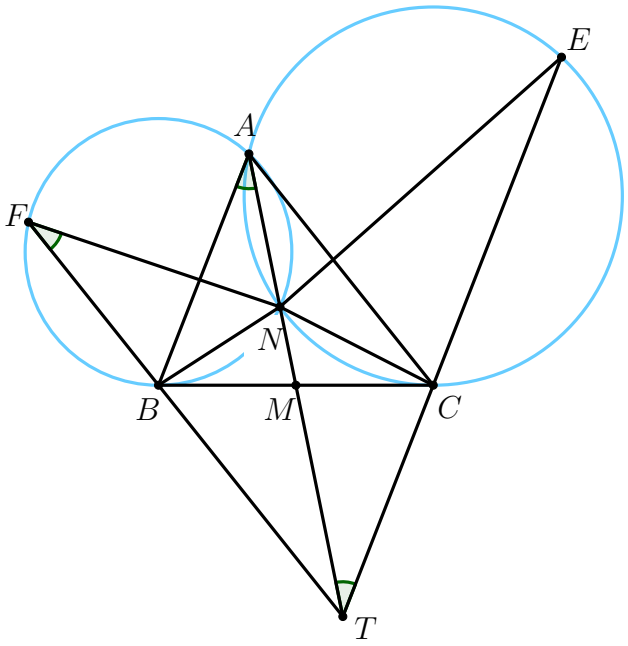
۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰ ۵) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

☺

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور



محل برخورد AN و BC را M می‌نامیم. طبق قوت M نسبت به دو دایره می‌توان نوشت

$$MB^۲ = MN \cdot MA = MC^۲ \Longrightarrow MB = MC$$

پس M وسط BC است همچنین $ACTB$ متوازی‌الاضلاع است پس AT هم از M می‌گذرد و چهار نقطه A, N, M, T روی یک خط قرار دارند. حالا می‌توان نوشت

$$\angle BFN = \angle BAN = \angle BAT = \angle CTN$$

به طور مشابه می‌توان به‌دست آورد $\angle NET = \angle NTF$ در نتیجه

$$\overset{\triangle}{TNF} \sim \overset{\triangle}{TEN} \Longrightarrow \frac{NE}{NT} = \frac{NT}{NF} \Longrightarrow NE \times NF = NT^۲$$

پس کافی‌ست طول NT را محاسبه کنیم. باز هم طبق قوت M داریم

$$۱۶ = MB^۲ = MN \cdot MA = MN(MN + ۶) \Longrightarrow (MN - ۲)(MN + ۸) = ۰ \Longrightarrow MN = ۲$$

در نهایت به‌دست می‌آید

$$TN = TM + ۲ = AM + ۲ = AN + ۴ = ۱۰ \Longrightarrow NE \times NF = NT^۲ = ۱۰۰.$$

■

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = ۲AE$، به‌علاوه F را هم قرینهٔ E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵ ۵) ۰/۶

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

لم. در مثلث ABC اگر وسط BC را M بنامیم داریم

$$AM^۲ = \frac{۱}{۴}\left(۲AB^۲ + ۲AC^۲ - BC^۲\right).$$

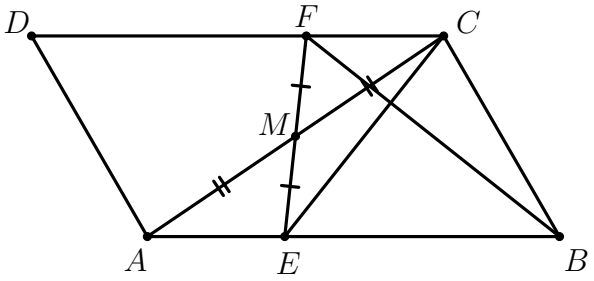
اثبات. قرینه A نسبت به M را A' می‌نامیم. واضح است که $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB\cdot AC\cos\angle A \Longrightarrow ۲AB\cdot AC\cos\angle A = AB^۲ + AC^۲ - BC^۲ \quad (۱)$$

باز هم از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABA' به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} A'A^۲ &= AB^۲ + A'B^۲ - ۲AB\cdot A'B\cos(۱۸۰^\circ - \angle A) \\ &\overset{(۱)}{=} AB^۲ + AC^۲ + \left(AB^۲ + AC^۲ - BC^۲\right) = ۲AB^۲ + ۲AC^۲ - BC^۲ \end{aligned}$$

و نهایتا از آن‌جا که $A'A = ۲AM$ حکم لم نتیجه می‌شود. □



حالا به مسئله اصلی باز می‌گردیم. قرار می‌دهیم $a = AB, b = BC$ و مرکز متوازی‌الاضلاع را M می‌نامیم. طبق فرض سوال $BF \perp CE$ و با استفاده از قضیه فیثاغورس به‌سادگی نتیجه می‌شود

$$EF^۲ - FC^۲ = BE^۲ - BC^۲ \Longrightarrow ۴EM^۲ - \frac{۱}{۹}a^۲ = \frac{۴}{۹}a^۲ - b^۲ \quad (۲)$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث‌هاس EBC و ABC و لم در مثلث AEC می‌توان نوشت

$$EC^۲ = BE^۲ + BC^۲ - ۲BC\cdot BE\cos ۶۰^\circ = \frac{۴}{۹}a^۲ + b^۲ - \frac{۲}{۳}ab \quad (۳)$$

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲BC\cdot AB\cos ۶۰^\circ = a^۲ + b^۲ - ab \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} \overset{(۳),(۴)}{\Longrightarrow} ۴EM^۲ = ۲AE^۲ + ۲EC^۲ - AC^۲ &= \frac{۲}{۹}a^۲ + \frac{۸}{۹}a^۲ + ۲b^۲ - \frac{۴}{۳}ab - a^۲ - b^۲ + ab \\ &= \frac{۱}{۹}a^۲ + b^۲ - \frac{۱}{۳}ab \end{aligned}$$

$$\overset{(۲)}{\Longrightarrow} b^۲ - \frac{۱}{۳}ab = \frac{۴}{۹}a^۲ - b^۲ \Longrightarrow ۱۸\left(\frac{b}{a}\right)^۲ - ۳\left(\frac{b}{a}\right) - ۴ = ۰$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

با حل معادله آخر نتیجه می‌شود که $\frac{b}{a} = ۰/۵۶۲۰۵\ldots$. ■

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به‌طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e:

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-a)^۲ \geq k(b-d)^۲$$

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۲ ۵) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

در تمام راه‌حل از این نکته استفاده می‌کنیم که یک چندجمله‌ای درجه دو همواره نامنفی است اگر و تنها اگر دلتای آن نامثبت باشد. در هر مرحله عبارت را به صورت یک عبارت درجه دو بر حسب یکی از متغیرها می‌نویسیم و از نکته گفته شده استفاده می‌کنیم. همه عبارات را به طرف بزرگتر تساوی می‌بریم و بر حسب c می‌نویسیم:

$$۲c^۲ - ۲c(b+d) + \big(۲a^۲ + (۲-k)b^۲ + (۲-k)d^۲ + ۲e^۲ - ۲ab - ۲de = ۲ea + ۲kbd\big) \geq ۰$$

حالا بر حسب c به عبارت بالا نگاه می‌کنیم و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\iff ۰ \geq \frac{\Delta_c}{۴} = -۴a^۲ - (۳-۲k)b^۲ - (۳-۲k)d^۲ - ۴e^۲ + ۴ab + ۴de + ۴ea - (۴k-۲)bd$$
$$\iff ۴a^۲ - ۴a(b+e) + \big((۳-۲k)b^۲ + (۳-۲k)d^۲ + ۴e^۲ - ۴de + (۴k-۲)bd\big) \geq ۰$$
$$\iff ۰ \geq \frac{\Delta_a}{۱۶} = -۳e^۲ - (۲-۲k)b^۲ - (۳-۲k)d^۲ + ۴de - (۴k-۲)bd + ۲be$$
$$\iff ۳e^۲ - ۲e(b+۲d) + \big((۲-۲k)b^۲ + (۳-۲k)d^۲ - (۴k-۲)bd\big) \geq ۰$$
$$\iff ۰ \geq \frac{\Delta_e}{۴} = -(۵-۶k)b^۲ - (۵-۶k)d^۲ + (۱۰-۱۲k)bd = -(۵-۶k)(b-d)^۲$$
$$\iff k \leq \frac{۵}{۶}$$

■

۲۶. برای زیرمجموعهٔ ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > ۰$، مجموعهٔ نقاطی که از دست‌کم یک نقطهٔ A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی r دارند را با A_r نشان می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همهٔ موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

- $(A_r)_s = (A_s)_r$.
- $A \subset B_r$ اگر و تنها اگر $B \subset A_r$.
- اگر برای هر $t > ۰$، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$.
- $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

• اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار ۵) پنج

پاسخ: گزینهٔ ۲ درست است.

ابتدا برای گزاره‌های ۲، ۳ و ۵ مثال نقض ارائه می‌دهیم سپس گزاره‌های ۱ و ۴ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از دو نقطه b, c تشکیل شده باشد که فاصله a, b برابر با r و فاصله a, c بیش‌تر از r باشد. واضح است که $A \subset B_r$ اما $c \notin A_r$ پس گزاره ۲ درست نیست. برای رد کردن گزاره ۳ فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از تمام نقاط صفحه به جز a تشکیل شده باشد. واضح است که شرط برقرار است اما $A \not\subset B$. در نهایت برای رد کردن گزاره ۵، فرض کنید مجموعه A از دو نقطه a, b و مجموعه B از دو نقطه a, c تشکیل شده باشد که فاصله a تا دو نقطه b, c بیش‌تر از r باشد و فاصله b, c برابر با r باشد. واضح است که $A \cap B = \{a\}$ پس $b \notin (A \cap B)_r$ اما $b \in A_r \cap B_r$. حالا به سراغ اثبات گزاره ۴ می‌رویم. فرض کنید x عضوی از طرف چپ تساوی باشد. پس فاصله آن با یکی از اعضای $A \cup B$ مانند y کوچک‌تر یا مساوی r است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $y \in A$. در نتیجه $x \in A_r$ پس $(A \cup B)_r \subseteq A_r \cup B_r$. به‌طور کاملا مشابه می‌توان اثبات کرد $A_r \cup B_r \subseteq (A \cup B)_r$ پس دو مجموعه با هم برابرند. برای اثبات گزاره ۱، با استفاده از گزاره ۴ فقط کافی‌ست تساوی را برای مجموعه A با یک عضو مانند a اثبات کنیم. نشان می‌دهیم $(A_r)_s$ دایره‌ای توپر به مرکز a و شعاع $r+s$ است. طبق نامساوی مثلث همه نقاط مجموعه فاصله کوچک‌تر یا مساوی $r+s$ از a دارند. هم‌چنین فرض کنید نقطه‌ای مانند b داشته باشیم که فاصله‌اش از a کوچک‌تر یا مساوی $r+s$ باشد. اگر این فاصله کوچک‌تر یا مساوی r باشد واضح است که $b \in A_r$ و حکم نتیجه می‌شود. در غیر این‌صورت یک نقطه مانند c روی ab وجود دارد که فاصله a و c برابر با r باشد در نتیجه فاصله b و c کوچک‌تر یا مساوی s است پس $b \in (A_r)_s$ و نهایتا حکم طبق تقارن نتیجه می‌شود. ■

۲۷. در مثلث ABC داریم $\angle B = ۲\angle C$. عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطهٔ F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = ۴$، شعاع دایره چه‌قدر می‌شود؟

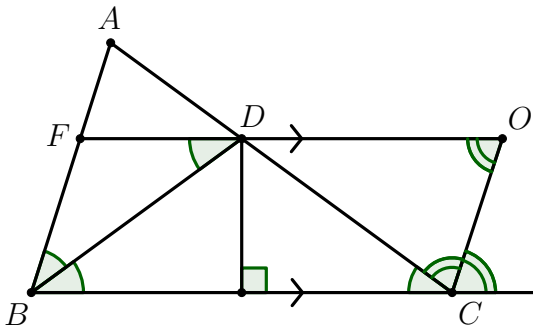
۱) $۳ - \sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۳ - \sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$ ۵) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ درست است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

☺

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور



قرار می‌دهیم $a = BC, b = AC$. طبق فرض سوال $\angle DBC = \angle C$. می‌توان نوشت

$$\angle FDB = \angle FBD = \angle B - \angle DBC = ۲\angle C - \angle DBC = \angle DBC$$

پس $FD \parallel BC$. از قضیه تالس به‌دست می‌آید

$$\frac{FD}{a} = \frac{AD}{b} = \sqrt{\frac{S_{ADF}}{S_{ACB}}} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow CD = \frac{۲}{۳}b,\ FD = \frac{۱}{۳}a \qquad (۱)$$

واضح است که

$$\overset{\triangle}{FDB} \sim \overset{\triangle}{DCB} \Longrightarrow \frac{BD}{a} = \frac{FD}{CD} \overset{(۱)}{\Longrightarrow} \frac{۴}{۹}b^۲ = \frac{۱}{۳}a^۲$$

در نتیجه $b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$. از طرف دیگر دقت کنید که O روی نیم‌ساز خارجی راس C است پس

$$\angle DCO = ۱۸۰^\circ - \angle OCB = \angle DOC \Longrightarrow DO = DC$$
$$\Longrightarrow ۴ = FO = FD + DO = \frac{۱}{۳}a + DC = \frac{۱}{۳}a + \frac{۲}{۳}b = \frac{\sqrt{۳}+۱}{۳}a$$
$$\Longrightarrow a = ۶\left(\sqrt{۳}-۱\right),\ b = ۳\left(۳-\sqrt{۳}\right)$$

در نهایت واضح است که شعاع دایره همان فاصله O از BC است و از آن‌جا که $FO \parallel BC$ این فاصله همان فاصله D از BC است. طبق قضیه فیثاغورس این فاصله برابر است با

$$\sqrt{CD^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲} = \sqrt{\frac{۴}{۹}b^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲} = \sqrt{۳\left(\sqrt{۳}-۱\right)^۲} = ۳ - \sqrt{۳}.$$

■

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x+y+z = ۲۲۲$ و $xy+yz+zx = ۱۲۳۲۱$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۵۴۷۶ ۲) ۴۱۰۷ ۳) ۲۴۱۲ ۴) ۱۶۰۲ ۵) ۱۳۶۹

پاسخ: گزینهٔ ۵ درست است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

فرض می‌کنیم $z = \max\{x, y, z\}$ پس $A = xy$. طبق مقادیر داده شده می‌توانیم به‌دست آوریم

$$(x+y+z)^۲ = ۴(xy+yz+zx) \Longrightarrow z^۲ - ۲z(x+y) + (x-y)^۲ = ۰$$
$$\Longrightarrow z = x+y \pm \sqrt{(x+y)^۲ - (x-y)^۲} = x+y \pm ۲\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)^۲$$

از آن‌جا که z از x, y بیشتر است باید داشته باشیم

$$z = x+y+۲\sqrt{xy} \Longrightarrow ۲۲۲ = x+y+z = ۲(x+y+\sqrt{xy}) \Longrightarrow x+y+\sqrt{xy} = ۱۱۱$$

طبق نامساوی حسابی-هندسی می‌توانیم بنویسیم

$$۱۱۱ = x+y+\sqrt{xy} \geq ۲\sqrt{xy} + \sqrt{xy} = ۳\sqrt{xy} \Longrightarrow xy \leq ۱۳۶۹.$$

حالت تساوی نیز زمانی رخ می‌دهد که $x = y = ۳۷$ و $z = ۱۴۸$. ■

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۹۹\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هر گاه بیش از یک عضو داشته باشد و به‌علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+b+۱$ بر ۱۰۰ نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعهٔ تقریباً جمعی وجود دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۵ ۵) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ درست است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۱۰۰ را با $x \pmod{۱۰۰}$ نشان می‌دهیم. ابتدا ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی شامل ۹۹ است. فرض کنید $a_{\max}$ و $a_{\min}$ به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو یک زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی باشند. اگر $a_{\max} \neq ۹۹$ آن‌گاه

$$a_{\max} + a_{\min} + ۱ \pmod{۱۰۰}$$

یا بیش‌تر از $a_{\max}$ است یا کم‌تر از $a_{\min}$ که تناقض است پس $a_{\max} = ۹۹$. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که تنها زیرمجموعهٔ‌های تقریبا جمعی دو عضوی یا سه عضوی مجموعه‌های زیر هستند:

$$\{x, ۹۹\} \ \forall ۰ \leq x \leq ۹۸, \quad \{x, ۹۸-x, ۹۹\} \ \forall ۰ \leq x \leq ۴۸$$

حالا فرض می‌کنیم زیرمجموعهٔ تقریبا جمعی $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_k, ۹۹\}$ را داشته باشیم که $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_k < ۹۹$ و $k \geq ۳$. به‌سادگی به‌دست می‌آید برای هر $۲ \leq i \leq k-۱$

$$a_i + a_۱ + ۱ = a_{i+۱}, \quad a_k + a_۱ + ۱ = ۹۹.$$

با جمع زدن دو طرف همهٔ این روابط به‌دست می‌آید

$$a_۲ + (k-۱)a_۱ + (k-۱) = ۹۹. \qquad (۱)$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

از طرف دیگر واضح است که $a_۲ + ۱۰۰ < a_۲ + a_k + ۱ < ۹۹$ پس تنها حالت ممکن این است که

$$a_۲ + a_k + ۱ = ۱۰۰ + a_۱$$

و با کم کردن دو طرف این تساوی از تساوی $a_k + a_۱ + ۱ = ۹۹$ به‌دست می‌آید

$$a_۱ - a_۲ = -a_۱ - ۱ \overset{(۱)}{\Longrightarrow} (k+۱)a_۱ = ۹۹ - k \Longrightarrow k+۱ \mid ۱۰۰ \ , \ a_۱ = \frac{۱۰۰}{k+۱} - ۱$$

پس تعداد اعضای مجموعه باید عاملی از ۱۰۰ باشد و در این‌صورت نیز مجموعه به‌طور یکتا مشخص می‌شود. می‌توان بررسی کرد که همهٔ مجموعه‌های به‌دست آمده تقریبا جمعی هستند و از آن‌جا که ۱۰۰، هفت عامل بزرگ‌تر از ۳ دارد، پاسخ برابر است با

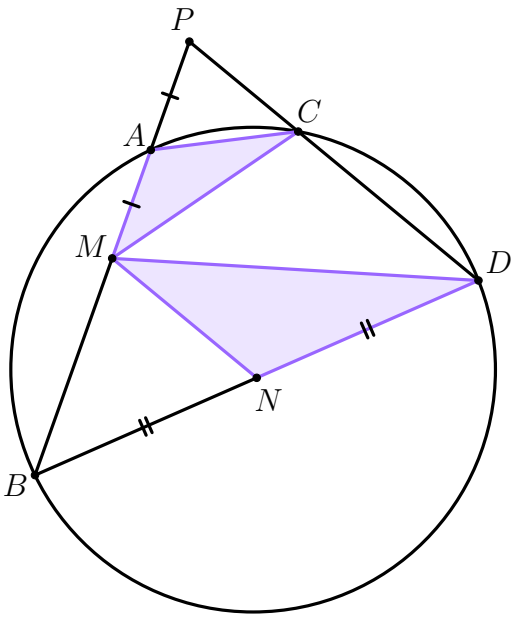
$$۹۹ + ۴۹ + ۷ = ۱۵۵.$$

■

۳۰. وترهای AB و CD از دایرهٔ ω در نقطهٔ P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = ۳AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به‌ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{۳}$ باشد، مقدار $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ درست است.



☺

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

نشان می‌دهیم $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \frac{DM}{\sqrt{DH'}}$. دقت کنید که

$$\frac{CH}{DH'} = \frac{S_{ACB}}{S_{ADB}} = \frac{AC \cdot CB \sin \angle ACB}{AD \cdot DB \sin \angle ADB} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}$$

پس کافی‌ست ثابت کنیم

$$\frac{CM^2}{DM^2} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}. \quad (1)$$

می‌توان نشان داد (برای اثبات از A و B بر CD عمود کنید)

$$\frac{1}{4} = \frac{PA}{PB} = \frac{S_{CAD}}{S_{CBD}} = \frac{AC \cdot AD \sin \angle CAD}{BC \cdot BD \sin \angle CBD} = \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} \quad (2)$$

با ضرب دو طرف روابط (۱) و (۲) باید ثابت کنیم

$$\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{CM^2}{4DM^2} \Longrightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CM}{2DM}$$

وسط BD را N می‌نامیم پس حکم معادل می‌شود با $\frac{AC}{DN} = \frac{CM}{DM}$. برای اثبات حکم معادل تشابه دو مثلث CAM و DNA را نشان می‌دهیم. واضح است که

$$\angle MND = 180^\circ - \angle CDB = \angle CAM$$

پس کافی‌ست نشان دهیم

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{ND} \Longleftrightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{PD}{BD}$$

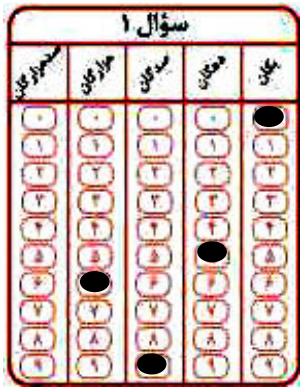
رابطه آخر بنابر تشابه دو مثلث PAC و PDB بدست می‌آید پس حکم ثابت شد. ■

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و ششمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.



جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شمارهٔ گزینهٔ درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

۰. (سؤال شمارهٔ صفر!) کد سؤالات شما چند است؟ آن را در صفحهٔ اول پاسخ‌نامهٔ خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ‌نامه توضیح داده شده است.

۱. در روستایی با هزار نفر جمعیت، دویست نفر مبتلا به نوعی بیماری شده‌اند. با انجام یک آزمایش می‌توان بیماری را تشخیص داد ولی نتیجه خطا دارد، به این معنی که فرد بیمار را به احتمال ۵ درصد سالم و فرد سالم را به احتمال ۵ درصد بیمار اعلام می‌کند. فردی را به تصادف از مردم این روستا انتخاب کرده و از او آزمایش می‌گیریم. چند درصد احتمال دارد آن فرد بیمار اعلام شود؟

۲. کارخانه‌ای محصولاتش را در بسته‌هایی مکعبی بسته‌بندی می‌کند و در انبار هر ۵۱۲ بسته را به شکل مکعبی $۸ \times ۸ \times ۸$ به هم متصل می‌کنند. در شرایطی که دمای هوا از حدی بیش‌تر شود لازم است با جدا کردن این مجموعهٔ ۵۱۲ تایی با صفحات افقی و عمودی، هر بسته دست‌کم یک وجه داشته باشد که با وجوه بسته‌های دیگر در تماس نباشد. کم‌ترین تعداد صفحه برای رسیدن به چنین وضعیتی چند تا است؟

۳. چند عدد هشت‌رقمی در مبنای چهار با ارقام ۱، ۲ و ۳ وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۴. پنج نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی هم‌خط نیستند. همهٔ پاره‌خط‌هایی که رئوسشان این نقاط است را رسم کرده‌ایم. حداقل چند نقطهٔ جدید در محل تقاطع پاره‌خط‌ها به وجود می‌آید؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۵

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و ششمین المپیاد ☺

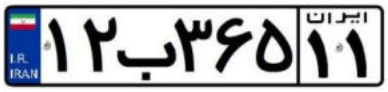
ریاضی کشور

۵. دور گود یک زورخانه ۱۲۸ صندلی، دایره‌وار، چیده شده است. تماشاچی اولی که وارد زورخانه می‌شود روی صندلی شماره یک می‌نشیند. از آن‌جا که سرماخوردگی در شهر شایع شده، هر فردی که وارد می‌شود روی صندلی‌ای می‌نشیند که فاصله‌اش با نزدیک‌ترین صندلی اشغال‌شده بیش‌ترین مقدار ممکن باشد و اگر چند صندلی با این خاصیت وجود داشت آن‌که شماره‌اش کم‌تر است را انتخاب می‌کند. نفر ۳۹م روی کدام صندلی می‌نشیند؟

۶. عددی طبیعی n، کوچک‌ترین عددی است که باقی‌ماندهٔ $3n+45$ بر ۱۰۶۰ برابر ۱۶ است. باقی‌ماندهٔ $18n+17$ بر ۱۹۲۰ چند است؟

۷. مساحت محصور بین نمودار تابع $y=[10x]+\sqrt{1-x^2}$ در بازهٔ $[0,1]$ و محور طول‌ها چه‌قدر است؟ (منظور از $[t]$، جزء صحیح عدد t است.)

۸. شمارهٔ اصلی پلاک یک خودرو متشکل از یک عدد دو رقمی در سمت چپ، یکی از حروف الفبا در وسط و یک عدد سه رقمی در سمت راست است و از رقم صفر در این دو عدد استفاده نمی‌شود. به هر پلاک، ضرب دو عدد مورد اشاره را نسبت می‌دهیم. مثلاً به پلاک زیر عدد $12\times 365=4380$ را نسبت می‌دهیم.



میانگین اعداد نسبت‌داده‌شده به تمام پلاک‌های ممکن، چند است؟

۹. قسمتی از پارک جنگلی لتیان که بین دو جاده واقع شده، آتش گرفته است. آتش با سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت گسترش می‌یابد. اگر فاصلهٔ نقطهٔ شروع آتش‌سوزی تا هر دو جاده ۱۰ کیلومتر باشد، پس از ۲ ساعت مساحت ناحیهٔ سوخته‌شده چند کیلومتر مربع است؟ (جاده‌ها را خط‌های طولانی، راست و موازی با هم بگیرید و فرض کنید آتش از جاده عبور نمی‌کند.)

۱) $200\sqrt{3}$ ۲) $100\sqrt{3}$ ۳) $400\sqrt{3}+400\frac{\pi}{3}$ ۴) $200\sqrt{3}+400\frac{\pi}{3}$ ۵) $400\sqrt{3}$

۱۰. مثلث ABC را در نظر بگیرید که $AB=AC=15$ و $BC=18$. نقاط D و E را به‌ترتیب روی CA و CB طوری بگیرید که $CD=5$ و $CE=3$. نقطهٔ F را روی نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ طوری در نظر بگیرید که $EF=8$. نقطهٔ M را وسط AB و N را نقطهٔ برخورد FM با BC بگیرید. طول CN چه‌قدر است؟

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و ششمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

۱۱. طبق ضوابط، ساختمان‌های یک کوچه نباید بیش از ۹ طبقه داشته باشند. به‌علاوه اگر تعداد طبقات دو ساختمان، با هر چه‌قدر فاصله، برابر باشد، حتماً باید ساختمانی با تعداد طبقات بیش‌تر از آن دو بین‌شان وجود داشته باشد. حداکثر چند ساختمان در یک سمت کوچه می‌توان ساخت؟



۱۲. چند سه تایی (a,b,c) از اعداد طبیعی اکیداً کم‌تر از ۵۱ داریم که $a+b+c$ بر a، b و c بخش‌پذیر باشد؟

۱۳. فردی می‌خواهد کنار دیوار باغش، ناحیه‌ای را برای نگه‌داری از مرغ و خروس‌هایش بسازد. او سه نرده به طول ده متر دارد. با استفاده از دیوار باغ، که مستقیم و طولانی است و این سه نرده، حداکثر مساحتی را که می‌تواند محصور کند چند مترمربع است؟

۱) ۱۰۰ ۲) $۵۰+۲۵\sqrt{۳}$ ۳) $۵۰+۵۰\sqrt{۲}$ ۴) $۷۵\sqrt{۳}$ ۵) ۳۰۰

۱۴. برای چند مقدار صحیح k، دستگاه معادلات زیر جوابی غیر از $a=b=c=۰$ در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a^۲+b^۲=kc(a+b) \\ b^۲+c^۲=ka(b+c) \\ c^۲+a^۲=kb(c+a) \end{cases}$$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌نهایت

۱۵. فرض کنید $a_۱,a_۲,\cdots,a_{۲۰}$ همان اعداد ۱ تا ۲۰ باشند که به ترتیبی دل‌خواه نوشته شده‌اند. عبارت $a_۱-a_۲+a_۳-\cdots+a_{۲۰}$ چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۱۶. زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی دارای این خاصیت است که برای هر دو عضو متمایز آن مثل x و y، داریم $(x+y-۱)^۲=xy+۱$. این مجموعه حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و ششمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

۱۷. دو عدد طبیعی m و n کم‌تر از ۵۰۰ هستند و $[m,n]=(m-n)^۲$. حداکثر مقدار $m+n$ چه‌قدر است؟ ($[m,n]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک m و n است.)

۱۸. سه میله با طول‌های ۱۳۹۶، ۱۴۳۹ و ۲۰۱۸ میلی‌متر روی زمین از یک سر به هم لولا شده‌اند. کم‌ترین مقدار ممکن برای شعاع دایره‌ای که از سه سر دیگر میله‌ها می‌گذرد چند میلی‌متر است؟

۱۹. فرض کنید $x\geq y\geq z$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند که

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲zx$$

حداقل مقدار $\frac{x}{z}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲ ۵) ۴

۲۰. در چهارضلعی محدب و محاطی $ABCD$ داریم $\angle B=۱۱۰^\circ$. محل برخورد AD و BC را E و محل برخورد AB و CD را F می‌نامیم. اگر عمودهای E بر AB و F بر BC یک‌دیگر را روی دایرهٔ محیطی چهارضلعی در نقطهٔ P قطع کنند. اندازهٔ زاویهٔ $\angle PDF$ چند درجه است؟

۲۱. نقطهٔ P درون یا روی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع یک قرار دارد. قرینهٔ P نسبت به AB را K، قرینهٔ K نسبت به BC را M و قرینهٔ M نسبت به AC را N می‌نامیم. حداکثر طول NP کدام گزینه است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۳ ۵) ۱

۲۲. هشت عدد کاشی مشابه ۲×۱ داریم که هر کدام از یک مربع قرمز و یک مربع آبی تشکیل شده است. به چند حالت می‌توان یک ناحیهٔ ۴×۴ را با این کاشی‌ها پوشاند طوری که هر سطر و هر ستون آن دو مربع قرمز و دو مربع آبی داشته باشد؟

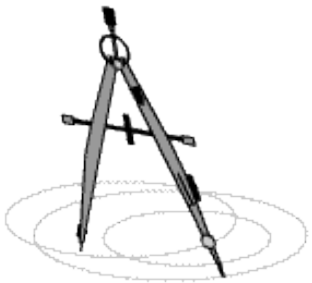
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و ششمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۲۳. پروانه پرگاری خرید و پس از باز کردن بستهٔ آن متوجه شد طول میلهٔ سوزن‌دار ۱۰ سانتی‌متر و طول میلهٔ مدادی ۱۶ سانتی‌متر است! فرض کنید برای این‌که بتوان با آن پرگار دایره کشید، باید زاویهٔ مداد با کاغذ دست‌کم ۳۰ درجه باشد ولی سوزن می‌تواند هر زاویه‌ای با صفحهٔ کاغذ داشته باشد. تفاضل شعاع بزرگ‌ترین دایره و شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که می‌توان با این پرگار کشید بر حسب سانتی‌متر به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟



۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲ ۵) ۲۰

۲۴. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$a_n = \sqrt{۱ + (۱ + \frac{۱}{n})^۲} + \sqrt{۱ + (۱ - \frac{۱}{n})^۲}$$

حاصل عبارت زیر چه‌قدر است؟

$$\frac{۴}{a_۱} + \frac{۴}{a_۲} + \cdots + \frac{۴}{a_{۹۶}}$$

۱) $\sqrt{۱۸۲۴۱}$ ۲) $\sqrt{۱۸۶۲۵} - ۱$ ۳) $\sqrt{۱۸۶۲۵}$ ۴) $\sqrt{۱۹۰۱۳} - ۱$ ۵) $\sqrt{۱۹۰۱۳}$

۲۵. دانش‌مندان سیاره‌ای کوچک به شعاع ۳۰ کیلومتر کشف کرده‌اند که تمام سطح آن را آب فرا گرفته است. شهابی کروی‌شکل به این سیاره برخورد می‌کند و کاملاً در آب فرو می‌رود و ارتفاع آب روی سطح سیاره یک سانتی‌متر افزایش پیدا می‌کند. شعاع شهاب چند متر بوده است؟

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲،... و۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۱۰

۲. مثلث قائم‌الزاویه ABC با فرض $\angle BAC = ۹۰^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطهٔ E و M قطع کند که نقطهٔ E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و هم‌چنین نسبت طول کمان‌های $\overset{\frown}{DE}$ به $\overset{\frown}{EM}$ به $\overset{\frown}{MF}$ برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدرمطلق تقاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث ABC چه‌قدر است؟

۱) ۷۰° ۲) ۵۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰° ۵) ۱۰°

۳. جناب‌خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌رقمی است و جناب‌خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به‌علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کم‌تر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفتهٔ اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود.)



۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m,n) = ۱$:

$$f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n+۱}$$

که منظور از (m,n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ تابع f درست است؟

۱) تابع f یک‌به‌یک است.
۲) تابع f یک‌نوا (صعودی یا نزولی) است.
۳) برد تابع f تمام اعداد گویا است.
۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$.
۵) همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۵. چند عدد سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

۶. با استفاده از همهٔ ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

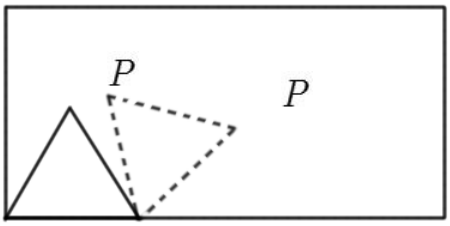
۱) ۳۴۵ ۲) ۱۹۸ ۳) ۹۱۲ ۴) ۳۹۸ ۵) ۳۱۲

۷. برای $A,B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ ($\mathbb{Q}'$ نماد مجموعهٔ اعداد گنگ است.)

- $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\{\sqrt{۲}, ۵\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$
- $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک ۵) صفر

۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل ۴×۲، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟



۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۵) ۲π

۹. چند سه‌تایی مرتب (x,y,z) وجود دارد که x,y,z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۲ ۵) ۱۵۶

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

۱۰. اعداد ۱، ۲،... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همهٔ مقسوم علیه‌های آن را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگ‌ترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همهٔ اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۱ ۳) ۶۹۸ ۴) ۷۰۱ ۵) ۷۰۳

۱۱. عمل $*$ را در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x+y}{۱-xy}$$

اگر a,b,c ریشه‌های $x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵ = ۰$ باشند، مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) -۸ ۴) $\frac{۸}{۳}$ ۵) -۲

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a,b,c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b,c) = b(c,a) = c(a,b) = ۲^۶ \times ۳^۸ \times ۵^{۱۰}$$

(منظور از (a,b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

۱) ۳۲۴۰ ۲) ۲۰۸۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۱۶۲۰ ۵) ۷۲۰

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳، عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۷۴۸۴۴۰۰

۱۴. a,b,c اعدادی دو به دو متمایزند. می‌دانیم سه معادلهٔ درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^۲ + bx + c = ۰, \quad bx^۲ + cx + a = ۰, \quad cx^۲ + ax + b = ۰$$

مقدار آن ریشهٔ مشترک چند است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱ ۵) به‌طور یک‌تا تعیین نمی‌شود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور ☺

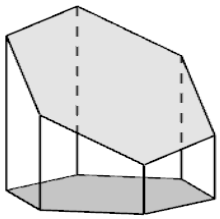
۱۵. ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبهٔ دیگر برابر باشد. در حداقل و حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

۱) ۵۰ و ۹۰ ۲) ۵۰ و ۱۰۰ ۳) ۸۰ و ۹۰ ۴) ۸۰ و ۱۰۰ ۵) ۹۰ و ۱۰۰

۱۶. چند زوج مرتب (m,n) از اعداد طبیعی داریم که $[۱,۲,\dots,n] = ۱۳۹۵ \times [۱,۲,\dots,m]$.
(منظور از نماد $[۱,۲,\dots,m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $۱,۲,\dots,m$ است.)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

۱۷. یک منشور قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصلهٔ رئوس این سطح مقطع تا قاعدهٔ پایین به‌ترتیب برابر ۲، ۳، x، y، ۱۱ و z باشد $x+y+z$ چه‌قدر است؟



۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰
۴) ۲۴ ۵) ۲۶

۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به‌سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آن‌که تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۵۰۰۰۰۰ ۵) ۵۲۴۲۸۸

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x,y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

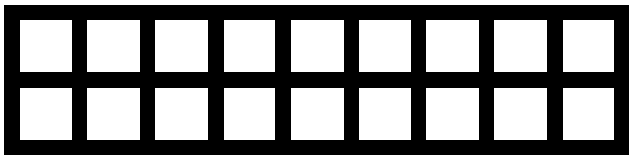
$$\begin{cases} x^۲ - ۳xy + ۲y^۲ + x - y = ۰ \\ ۲x^۲ - ۲xy - ۳y^۲ - ۲x + ۵y = ۰ \end{cases}$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۶

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

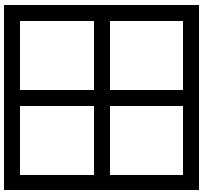
آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همهٔ تقاطع‌ها سرکشی کند به‌طوری که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟



۱) $۲^۵$ ۲) $۳^۵$ ۳) ۲×۳^۴ ۴) $۲^۴$ ۵) $۳^۶ - ۳^۵$

۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است.) هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟



۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیش‌تر از تقاطع‌های دیگر است.
۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دست‌کم ۹ خودرو پارک شده است.
۵) گزینه‌های ۱ و ۴.

۲۲. در مسابقهٔ قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همهٔ وزنه‌های ۱، ۲،... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنهٔ ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آن‌جا قرار داده و از آن خانه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آن‌جا وزنهٔ ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آن‌که وزنهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آن‌جا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟



۱) ۲۰۲۸۰ ۲) ۲۰۲۰۰ ۳) ۲۰۱۸۰ ۴) ۲۰۱۰۰ ۵) ۲۰۰۸۰

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ☺
ریاضی کشور

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید w_b و w_c به‌ترتیب دو دایرهٔ گذرنده از A باشند به طوری که به‌ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایرهٔ مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TC و TB به‌ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC = ۸$ و $AN = ۶$، حاصل $NF \times NE$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰ ۵) ۲۰۰

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = ۲AE$، به‌علاوه F را هم قرینهٔ E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵ ۵) ۰/۶

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e:

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-a)^۲ \geq k(b-d)^۲$$

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۲ ۵) $\frac{۵}{۶}$

۲۶. برای زیرمجموعهٔ ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > ۰$، مجموعهٔ نقاطی که از دست‌کم یک نقطهٔ A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی r دارند را با A_r نمایش می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همهٔ موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

- $(A_r)_s = (A_s)_r$.
- $A \subset B_r$ اگر و تنها اگر $B \subset A_r$.
- اگر برای هر $t > ۰$، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$.
- $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$.
- اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار ۵) پنج

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۷. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = ۲\hat{C}$. عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطهٔ F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = ۴$، شعاع دایره چه‌قدر می‌شود؟

۱) $۳ - \sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۳ - \sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$ ۵) $۲\sqrt{۶}$

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x + y + z = ۲۲۲$ و $xy + yz + zx = ۱۲۳۲۱$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۵۴۷۶ ۲) ۴۱۰۷ ۳) ۲۴۱۲ ۴) ۱۶۰۲ ۵) ۱۳۶۹

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۹۹\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هرگاه بیش از یک عضو داشته باشد و به‌علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a + b + ۱$ بر ۱۰۰ نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعهٔ تقریباً جمعی وجود دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۵ ۵) ۲۰۰

۳۰. وترهای AB و CD از دایرهٔ W، در نقطهٔ P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = ۳AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به‌ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{۳}$ باشد، مقدار $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

قابل توجه دانش‌آموزان سال دهمی: کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی در تلاش است، به عنوان جایزه‌ای علمی، تعدادی مدرسهٔ کوتاه تابستانی برای رتبه‌های برتر دانش‌آموزان سال دهم برگزار کند که هم با ریاضیات زیبا و هم با هنر حل مسأله بیش‌تر آشنا شوند. جامعهٔ هدف اصلی این برنامه دانش‌آموزانی هستند که نمرات آن‌ها نزدیک مرز قبولی در مرحلهٔ دوم است ولی مدارس محل تحصیل آن‌ها در سال‌های گذشته موفقیت کم‌تری در المپیاد ریاضی داشته تا بدین‌وسیله المپیاد ریاضی گسترش یافته و اثرگذاری بیش‌تری در رشد ریاضیات کشور پیدا کند. امیدواریم در صورت فراهم شدن شرایط، بتوانیم اولین دورهٔ این مدارس کوتاه را در تابستان سال ۱۳۹۶ اجرا کنیم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

معاونت دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ اوّل

سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۵

ساعت: ۰۹:۰۰ صبح

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات	مدّت آزمون
۳۰	۲۱۰ دقیقه

نام: نام خانوادگی: شمارهٔ صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- کد دفترچهٔ سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامهٔ شما تصحیح نخواهد شد. توجّه داشته باشید کد دفترچهٔ سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.

۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید.

۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخّصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید. ضمناً مشخّصات خواسته‌شده در پایین پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.

۴- برگهٔ پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به‌علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.

۶- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین‌حساب و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتّی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.

۷- شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و سوّم متوسّطه انتخاب می‌شوند.

۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچهٔ سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.)

۹- نشانی وب‌گاه کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران www.mathysc.ir است.

کلّیهٔ حقوق این سؤالات برای مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.

نشانی پای‌گاه اینترنتی: www.ysc.sampad.medu.ir

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور ☺

۱. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲،... و ۶ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۱۰

۲. مثلث قائم‌الزاویه ABC با فرض $\angle BAC = ۹۰^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D، ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطهٔ E و M قطع کند که نقطهٔ E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و هم‌چنین نسبت طول کمان‌های $\overset{\frown}{DE}$ به $\overset{\frown}{EM}$ به $\overset{\frown}{MF}$ برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدرمطلق تقاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث ABC چه‌قدر است؟

۱) ۷۰° ۲) ۵۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰° ۵) ۱۰°

۳. جناب‌خان می‌خواهد برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصندوق یک عدد سه‌رقمی است و جناب‌خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به‌علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کم‌تر نباشد. مثلاً اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصندوق ۱۴۰ باشد، او حداکثر بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصندوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفتهٔ اول، رمز همان ۱۴۰ خواهد بود.)



۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ با شرط $(m,n) = ۱$:

$$f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n+۱}$$

که منظور از (m,n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ تابع f درست است؟

۱) تابع f یک‌به‌یک است.
۲) تابع f یک‌نوا (صعودی یا نزولی) است.
۳) برد تابع f تمام اعداد گویا است.
۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$.
۵) همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور ☺

۵. چند عدد سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

۶. با استفاده از همهٔ ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کم‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

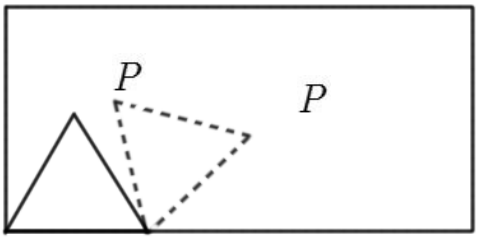
۱) ۳۴۵ ۲) ۱۹۸ ۳) ۹۱۲ ۴) ۳۹۸ ۵) ۳۱۲

۷. برای $A,B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ ($\mathbb{Q}'$ نماد مجموعهٔ اعداد گنگ است.)

- $\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\{\sqrt{۲}, ۵\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$
- $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$
- $\{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{۰\}$

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک ۵) صفر

۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل ۴×۲، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟



۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) $\frac{۷\pi}{۳}$ ۵) ۲π

۹. چند سه‌تایی مرتب (x,y,z) وجود دارد که x,y,z ارقام ناصفر و متمایزی باشند و $x \times y$ بر z بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۲ ۵) ۱۵۶

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۰. اعداد ۱، ۲،... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همهٔ مقسوم علیه‌های آن را به‌ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگ‌ترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همهٔ اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۱ ۳) ۶۹۸ ۴) ۷۰۱ ۵) ۷۰۳

۱۱. عمل $*$ را در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x+y}{۱-xy}$$

اگر a,b,c ریشه‌های $x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۵ = ۰$ باشند، مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) -۸ ۴) $\frac{۸}{۳}$ ۵) -۲

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a,b,c) از اعداد طبیعی را بیابید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b,c) = b(c,a) = c(a,b) = ۲^۶ \times ۳^۸ \times ۵^{۱۰}$$

(منظور از (a,b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

۱) ۳۲۴۰ ۲) ۲۰۸۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۱۶۲۰ ۵) ۷۲۰

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳، عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسأله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است.)

۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۷۴۸۴۴۰۰

۱۴. a,b,c اعدادی دو به دو متمایزند. می‌دانیم سه معادلهٔ درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^۲ + bx + c = ۰, \quad bx^۲ + cx + a = ۰, \quad cx^۲ + ax + b = ۰$$

مقدار آن ریشهٔ مشترک چند است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱ ۵) به‌طور یک‌تا تعیین نمی‌شود.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

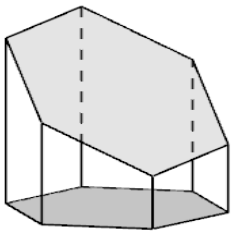
آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور

۱۵. ۱۰۰۰ عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبهٔ دیگر برابر باشد. در حداقل و حداکثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

۱) ۵۰ و ۹۰ ۲) ۵۰ و ۱۰۰ ۳) ۸۰ و ۹۰ ۴) ۸۰ و ۱۰۰ ۵) ۹۰ و ۱۰۰

۱۶. چند زوج مرتب (m,n) از اعداد طبیعی داریم که $[1,2,\ldots,n] \times ۱۳۹۵ = [1,2,\ldots,m]$.
(منظور از نماد $[1,2,\ldots,m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1,2,\ldots,m$ است.)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار



۱۷. یک منشور قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصلهٔ رئوس این سطح مقطع تا قاعدهٔ پایین به‌ترتیب برابر ۲، ۳، x، y، ۱۱ و z باشد $x+y+z$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰
۴) ۲۴ ۵) ۲۶



۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به‌سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آن‌که تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۵۰۰۰۰۰ ۵) ۵۲۴۲۸۸

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x,y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} x^۲ - ۳xy + ۲y^۲ + x - y = ۰ \\ ۲x^۲ - ۲xy - ۳y^۲ - ۲x + ۵y = ۰ \end{cases}$$

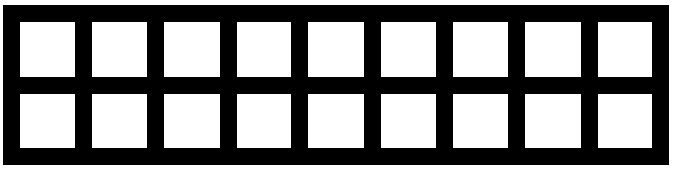
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۶

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

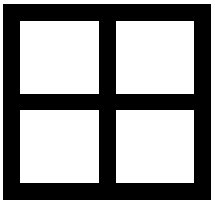
آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل روبه‌رو است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی. پلیسی می‌خواهد به همهٔ تقاطع‌ها سرکشی کند به‌طوری که از تقاطع راست-بالا شروع کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتها به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟



۱) $۲^۵$ ۲) $۳^۵$ ۳) ۲×۳^۴ ۴) $۲^۴$ ۵) $۳^۶-۳^۵$

۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبه‌رو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است.) هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟



۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیش‌تر از تقاطع‌های دیگر است.
۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۶ خودرو پارک شده است.
۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیهٔ محله واقع است، دست‌کم ۸ خودرو پارک شده است.
۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دست‌کم ۹ خودرو پارک شده است.
۵) گزینه‌های ۱ و ۴.

۲۲. در مسابقهٔ قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همهٔ وزنه‌های ۱، ۲،... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنهٔ ۱ کیلوگرمی را برداشته و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آن‌جا قرار داده و از آن خانه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی را برداشته و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آن‌جا وزنهٔ ۳ کیلوگرمی را برداشته ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آن‌که وزنهٔ ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آن‌جا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟



۱) ۲۰۲۸۰ ۲) ۲۰۲۰۰ ۳) ۲۰۱۸۰ ۴) ۲۰۱۰۰ ۵) ۲۰۰۸۰

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید w_b و w_c به‌ترتیب دو دایرهٔ گذرنده از A باشند به طوری که به‌ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایرهٔ مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TC و TB به‌ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $BC = ۸$ و $AN = ۶$، حاصل $NF \times NE$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰ ۵) ۲۰۰

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که $BE = ۲AE$، به‌علاوه F را هم قرینهٔ E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر BF و CE بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵ ۵) ۰/۶

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e:

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-a)^۲ \geq k(b-d)^۲$$

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۲ ۵) $\frac{۵}{۶}$

۲۶. برای زیرمجموعهٔ ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی $r > ۰$، مجموعهٔ نقاطی که از دست‌کم یک نقطهٔ A فاصله‌ای کم‌تر یا مساوی r دارند را با A_r نمایش می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همهٔ موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند.)

- $(A_r)_s = (A_s)_r$.
- $A \subset B_r$ اگر و تنها اگر $B \subset A_r$.
- اگر برای هر $t > ۰$، $A_t \subset B_t$ آن‌گاه $A \subset B$.
- $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$.
- اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار ۵) پنج

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و پنجمین دورهٔ المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۷. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = ۲\hat{C}$. عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ D با ضلع AC برخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطهٔ F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = ۴$، شعاع دایره چه‌قدر می‌شود؟

۱) $۳ - \sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۳ - \sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$ ۵) $۲\sqrt{۶}$

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $x + y + z = ۲۲۲$ و $xy + yz + zx = ۱۲۳۲۱$. اگر $A = \min\{xy, yz, zx\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۱) ۵۴۷۶ ۲) ۴۱۰۷ ۳) ۲۴۱۲ ۴) ۱۶۰۲ ۵) ۱۳۶۹

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{۰,۱,۲,\ldots,۹۹\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هرگاه بیش از یک عضو داشته باشد و به‌علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a + b + ۱$ بر ۱۰۰ نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعهٔ تقریباً جمعی وجود دارد؟

۱) ۴۹ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۵ ۵) ۲۰۰

۳۰. وترهای AB و CD از دایرهٔ W، در نقطهٔ P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و P است و C بین D و P است. می‌دانیم $AB = ۳AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به‌ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M می‌نامیم. اگر $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \sqrt{۳}$ باشد، مقدار $\frac{DM}{\sqrt{DH'}}$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

قابل توجه دانش‌آموزان سال دهمی: کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی در تلاش است، به عنوان جایزه‌ای علمی، تعدادی مدرسهٔ کوتاه تابستانی برای رتبه‌های برتر دانش‌آموزان سال دهم برگزار کند که با ریاضیات زیبا و هنر حل مسأله بیش‌تر آشنا شوند. جامعهٔ هدف اصلی این برنامه، دانش‌آموزانی هستند که نمرات آن‌ها نزدیک مرز قبولی در مرحلهٔ دوم است ولی مدارس محل تحصیل آن‌ها در سال‌های گذشته موفقیت کم‌تری در المپیاد ریاضی داشته‌اند تا بدین‌وسیله المپیاد ریاضی گسترش یافته و اثرگذاری بیش‌تری در رشد ریاضیات کشور پیدا کند. امیدواریم در صورت فراهم شدن شرایط، بتوانیم اولین دورهٔ این مدارس کوتاه را در تابستان سال ۱۳۹۶ اجرا کنیم.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

کلید اولیه آزمون المپیاد ریاضی
مرحله اول کد ۱
تاریخ برگزاری ۹۵/۱۱/۷

لطفا در این کادر چیزی ننویسید.

مطابق توضیحات دفترچه تکمیل شود.

کد دفترچه ۲

لطفا گزینه را به صورت کامل و فقط با مداد مشکی نرم پر کنید. صحیح غلط

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۴	۴	۱	۱	۳	۳
۵	۲	۳	۴	۵	۲	۳	۴	۵	۴

۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۵	۲	۴	۴	۴	۳	۲	۴	۳	۲

۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۵	۳	۴	۵	۵	۴	۴	۳	۳	۲

۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

محل امضاء

اینجانب ..... فرزند ..... با کد ملی .....

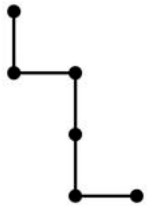
مطابقت اطلاعات مندرج در پاسخ برگ را با مشخصات خود تایید می نمایم.

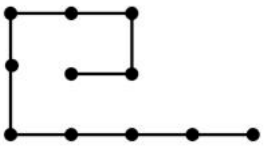
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

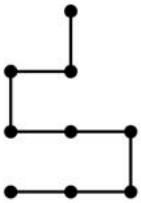
آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

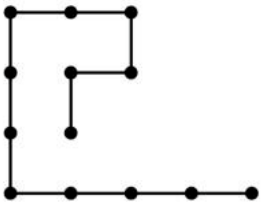
☺

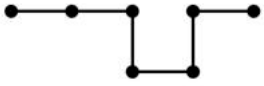
۱. با کنار هم قرار دادن دو نسخهٔ مشابه از کدام نوع سیم، می‌توان یک چندضلعی بسته ساخت که خودش را قطع نکند و همهٔ اضلاعش افقی و یا عمودی باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵) 

۲. در مثلث ABC زاویهٔ $\angle BAC = ۶۰^\circ$ است. نقطهٔ E درون ضلع AC و نقطهٔ D روی امتداد ضلع BC از این مثلث به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که C بین B و D قرار دارد و به علاوه $AB = DE$. اگر $\angle DEC = ۳۰^\circ$ باشد، نسبت $\frac{BC}{CD}$ چند است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۵) $\sqrt{۳}$

۳. اعداد حقیقی a، b، c و d در تساوی‌های $ab = ۲$، $b+c = ۳$، $cd = ۴$ و $d+a = ۵$ صدق می‌کنند. چند مقدار ممکن برای a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۴. سه جفت پیچ و مهرهٔ کوچک، متوسط و بزرگ داریم که نمی‌دانیم کدام پیچ برای کدام مهره است. هر بار می‌توانیم یک پیچ و یک مهره را با هم امتحان کنیم. کم‌ترین تعداد امتحان‌های مورد نیاز برای این که در هر صورت مهرهٔ نظیر هر پیچ را بیابیم، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۵. به یک هفته در سال «جالب» می‌گوییم اگر دوشنبهٔ آن هفته، روز دوم، دوازدهم یا بیست و دوم ماه باشد. در فصل پاییز چند هفته ممکن است جالب باشد؟

بهمن ۹۴

شنبه	۳	۱۰	۱۷	۲۴
یکشنبه	۴	۱۱	۱۸	۲۵
دوشنبه	۵	۱۲	۱۹	۲۶
سه‌شنبه	۶	۱۳	۲۰	۲۷
چهارشنبه	۷	۱۴	۲۱	۲۸
پنجشنبه	۱ ۸	۱۵	۲۲	۲۹
جمعه	۲ ۹	۱۶	۲۳	۳۰

۱) یک یا دو هفته
۲) یک یا سه هفته
۳) صفر یا سه هفته
۴) صفر، یک یا دو هفته
۵) در هر حالتی دقیقاً دو هفته

۶. گلدانی به شکل مخروطی ناقصی با ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و قطر دهانه و کف به ترتیب ۱۵ و ۱۰ سانتی‌متر روی زمین قرار گرفته است. توپی به شعاع ۷ سانتی‌متر را در این گلدان می‌اندازیم. ارتفاع بالاترین نقطهٔ توپ از سطح زمین (بر حسب سانتی‌متر) به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟



۱) ۲۱ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷ ۵) ۲۹

۷. a و b دو عدد حقیقی هستند که $a^۲ + b^۲ = ۸$. حداکثر مقدار $۲(a+b) - ab$ چند است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۸}$ ۴) ۶ ۵) ۸

۸. در یک هتل ۱۳ اتاق وجود دارد که شمارهٔ اتاق‌ها از ۱ تا ۱۳ روی درب اتاق و روی کلید هر اتاق درج شده است، ولی کلید هر اتاق یکتا نیست و همهٔ کلیدهایی که تفاضل شمارهٔ نوشته شده روی آن‌ها و شمارهٔ اتاق بر ۳ بخش‌پذیر باشد، درب اتاق را باز می‌کنند. به چند طریق می‌توان کلیدها را به اتاق‌ها نسبت داد تا درب همهٔ اتاق‌ها قابل باز شدن باشند؟

۱) $۵! \times (۴!)^۲$ ۲) $۴! \times (۵!)^۲$ ۳) $\frac{۵! \times (۴!)^۲}{۳!}$ ۴) $\frac{۴! \times (۵!)^۲}{۳!}$ ۵) $۱۳!$

۹. مقدار سینوس زاویهٔ $۱۱^{۱۰۰}$ درجه به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۱- ۲) ۰/۵- ۳) صفر ۴) ۰/۵ ۵) ۱

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

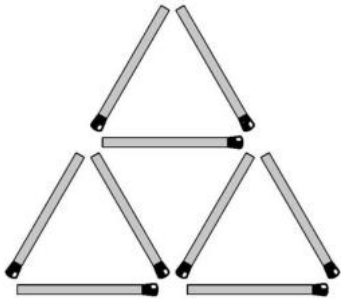
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱۰. در ذوزنقهٔ $ABCD$ ($AB \parallel CD$) نقطه‌های P، Q، R، S و T را به ترتیب وسط‌های AB، BC، CD، AC و BD هستند. می‌دانیم نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت مثلث PST برابر $\frac{۱۳۹۵}{۱۳۹۴}$ است. نسبت دو قاعدهٔ این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳۹۴}$ ۲) $\sqrt{۱۳۹۵}$ ۳) ۶۹۷ ۴) ۱۳۹۵ ۵) ۲۷۸۹

۱۱. به چند طریق می‌توان ۳ چوب‌کبریت از ۹ چوب‌کبریت موجود در شکل روبه‌رو را حذف کرد که هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟



۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷ ۵) ۸۰

۱۲. یک مستطیل با اضلاع ۳۰ و ۴۰ را با رسم خطوطی موازی اضلاع به شبکه‌ای ۴۰×۳۰ از مربع‌های واحد تبدیل کرده‌ایم. یکی از قطرهای مستطیل اولیه را در نظر بگیرید. دایرهٔ محاطی چند تا از مربع‌های واحد شبکه‌بندی به این قطر مماس هستند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۸ ۵) ۴۰

۱۳. طول جهش‌های یک قورباغه می‌تواند هر یک از اعداد $۱, ۵, ۵^۲, ۵^۳, \ldots$ باشد. این قورباغه روی نقطهٔ صفر از محور اعداد صحیح نشسته و در هر مرحله می‌تواند به سمت راست یا چپ جهش کند. اگر این قورباغه نتواند دو جهش با طول مساوی انجام دهد، به چند تا از اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۱۳۹۴\}$ می‌تواند برود؟

۱) ۶۳ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۲۱ ۵) ۲۴۳

۱۴. چند چهارتایی مرتب (a, b, c, d) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق کند؟

$$\begin{cases} a^۳ + bc = d^۳ \\ b^۳ + cd = a^۳ \\ c^۳ + da = b^۳ \\ d^۳ + ab = c^۳ \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲۵
۴) ۴۹ ۵) بی‌نهایت

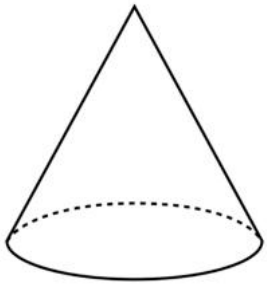
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

☺

۱۵. نقطهٔ P در جسم A را «خاص» گوییم، اگر نقطه‌های متمایز X و Y در A وجود نداشته باشند که P نقطهٔ وسط پاره‌خط XY باشد. کدام گزینه در مورد نقاط خاص یک مخروط توپر با قاعدهٔ دایره صحیح است؟



۱) مخروط تنها یک نقطهٔ خاص دارد.
۲) هر خطی که وجه دایره‌ای مخروط را قطع کند، حتماً شامل یک نقطهٔ خاص مخروط است.
۳) هر صفحه‌ای که مخروط را قطع کند، حتماً شامل نقطه‌ای خاص از مخروط است.
۴) همهٔ نقطه‌های سطح جانبی مخروط، خاص هستند.
۵) یک و فقط یک کره در فضا وجود دارد که همهٔ نقاط خاص مخروط روی سطح آن قرار بگیرند.

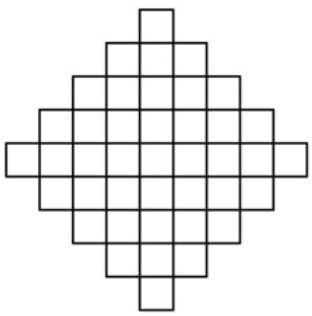
۱۶. علی فرمولی برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۲ کشف کرده است که با کمک آن می‌تواند مقدار چندجمله‌ای درجهٔ دویی را در نقطهٔ ۳ بر حسب مقدار آن در نقاط صفر و ۱ و ۲ به دست آورد. فرمول علی برای چندجمله‌ای P به شکل زیر است:

$$P(۳) = aP(۰) + bP(۱) + cP(۲),$$

که در آن a، b و c سه عدد ثابت هستند. این سه عدد را پیدا کنید و مشخص کنید که مقدار $a - b + c$ چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

۱۷. به چند طریق می‌توان در شکل روبه‌رو ۸ خانه را انتخاب کرد که هیچ دو تایی از آن‌ها هم‌سطر و یا هم‌ستون نباشند؟



۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲ ۵) ۶۴

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

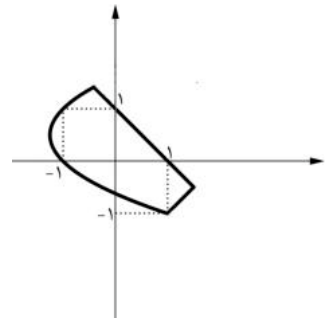
آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱۸. حداکثر چند عدد از میان اعداد $\{۱,۲,\ldots,۱۳۹۴\}$ می‌توان انتخاب کرد که حاصل‌ضرب هر ۵ تا از آن‌ها مضرب ۱۴ باشد؟

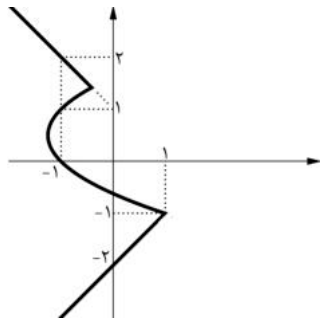
۱) ۹۹ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۷ ۴) ۱۱۱ ۵) ۱۱۴

۱۹. کدام گزینه مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند (x,y) در صفحه را با این خاصیت نمایش می‌دهد که بیش‌ترین مقدار در بین سه عبارت $x-y-۱$، $x+y$ و $y^۲-x-y$ برابر یک است؟

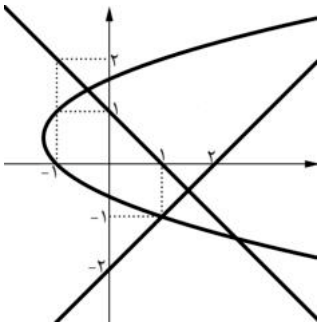
۱)



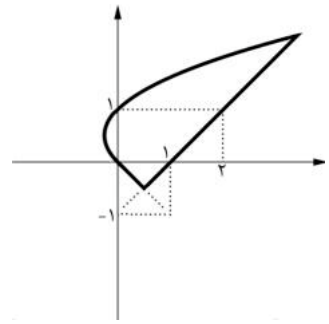
۲)



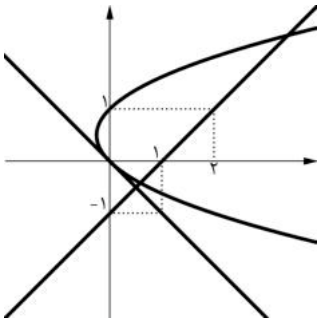
۳)



۴)



۵)



۲۰. در ابتدای روز اول یک ویروس موذی وارد بدن شده است. در انتهای هر روز، هر ویروس موذی که k روز عمر کرده باشد، k ویروس موذی جدید تولید می‌کند و خودش نیز به زندگی ادامه می‌دهد. در انتهای روز ششم چند ویروس موذی متولد می‌شود؟

۱) ۸۹ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۴۴ ۵) ۲۴۳

۲۱. به چند طریق می‌توان عدد $۱۵۰^۷$ را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی (بیش از یک عدد) نوشت که در آن ترتیب اعداد مهم نباشد؟

۱) صفر ۲) ۵۹ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۷۹ ۵) ۲۳۹

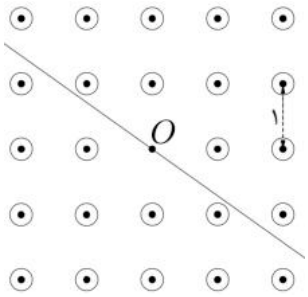
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۲. به چند طریق می‌توان یک جدول ۷×۱ را با کاشی‌های ۲×۱ پر کرد، طوری که هر خانه توسط حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی پر شده باشد؟

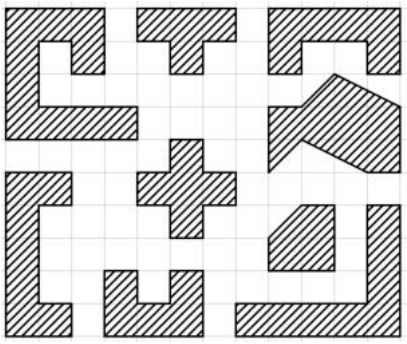
۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ ۵) ۱۹

۲۳. می‌خواهیم در تمام نقاط یک شبکهٔ منظم ۵×۵، غیر از نقطهٔ مرکزی، ستون‌هایی استوانه‌ای و برابر نصب کنیم، به‌نحوی که نقطهٔ مرکزی از بیرون دیده نشود؛ یعنی در نقشهٔ مسطحی که می‌بینید، هر خط گذرنده از نقطهٔ مرکزی دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند. در صورتی که فاصلهٔ بین نقاط مجاور یک متر باشد، کم‌ترین مقدار لازم برای شعاع مقطع ستون‌ها چند متر است؟



۱) $\sqrt{\frac{۱}{۱۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۱}{۵}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۴}{۱۷}}$ ۵) $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$

۲۴. می‌گوییم با یک چندضلعی می‌توان صفحه را کاشی‌کاری کرد، هرگاه بتوان نامتناهی شکل هم‌نهشت با آن چندضلعی را در صفحه کنار هم قرار داد به گونه‌ای که کل صفحه را بپوشانند و ضمناً به جز احتمالاً در اضلاع هم‌پوشانی نداشته باشند. با چند تا از اشکال روبه‌رو نمی‌توان صفحه را کاشی‌کاری کرد؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲
۴) ۳ ۵) ۴

۲۵. اعداد $\sqrt[۳]{۷^{۷}}$، $\sqrt[۵]{۵^{۵}}$ و $\sqrt[۷]{۳^{۷}}$ را به ترتیب با A، B و C نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

۱) $A < B < C$ ۲) $B < C < A$ ۳) $C < B < A$ ۴) $A < C < B$ ۵) $C < A < B$

۲۶. چند دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۵}$ از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰\}$ داریم به گونه‌ای که برای هر $۱ \le i, j \le ۱۵$ که $i + j \le ۱۵$، داشته باشیم: $a_{i+j} > a_i + a_j$ ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۹ ۵) ۱۵

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۷. حاصل‌ضرب اعضای مجموعهٔ A را با $f(A)$ نشان می‌دهیم. اگر $A_۱$، $A_۲$، . . . و $A_{۱۰۲۳}$ تمام زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ باشد، باقی‌ماندهٔ

$$f(A_۱) + f(A_۲) + \cdots + f(A_{۱۰۲۳})$$

بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۱۲

۲۸. دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از اعداد حقیقی برای هر $n \geq ۰$، در رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$x_{n+۱} = x_n^۲ + x_n y_n + y_n^۲, \qquad y_{n+۱} = x_n^۲ - x_n y_n + y_n^۲.$$

اگر $x_۰$ و $y_۰$ اعدادی مثبت باشند و $x_۰ + y_۰ = ۲$ ، در مورد $S = x_۸ + y_۸$ کدام درست است؟

۱) $S < ۲^{۵۰}$ ۲) $۲^{۵۰} \leq S < ۲^{۲۰۰}$ ۳) $۲^{۲۰۰} \leq S < ۲^{۸۰۰}$ ۴) $۲^{۸۰۰} \leq S < ۲^{۲۰۰۰}$ ۵) $۲^{۲۰۰۰} \leq S$

۲۹. نقطهٔ D روی خط BC از مثلث ABC با $\angle BAC = ۴۰^\circ$ مفروض است. از B و D به ترتیب بر BC و AB عمود می‌کنیم تا یک‌دیگر را در E قطع کنند. به طور مشابه از C و D به ترتیب عمودهایی بر BC و AC رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در F قطع کنند. پای عمود وارد از D بر EF را K می‌نامیم. می‌دانیم K روی خط AB قرار دارد و منطبق بر B نیست. زاویهٔ $\angle ACK$ چند درجه است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰ ۵) ۱۴۰

۳۰. یک فرمول سه‌متغیره با متغیرهای x, y, z را «جالب» می‌گوییم، هرگاه در آن فقط از ترکیب توابع مینیمم و ماکسیمم استفاده شده باشد. مثل سه فرمول زیر:

$$\min(\max(x, z), y),\ \min(x, x),\ \max(x, \min(x, y)).$$

دو فرمول را متفاوت می‌گوییم، اگر یک مقداردهی برای متغیرهای x, y, z وجود داشته باشد که دو فرمول مقادیر مختلفی را برای آن‌ها محاسبه کنند. مثلاً دو فرمول $\min(x, x)$ و $\max(x, \min(x, y))$ متفاوت نیستند. چند فرمول متفاوت داریم؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۸ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶ ۵) بی‌نهایت

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

بسمه تعالی

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۲۹ بهمن ۱۳۹۴ در سراسر کشور برگزار شد. دفترچهٔ پیش رو مجموعهٔ سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که توسط وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

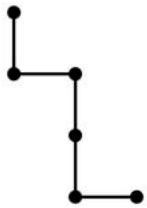
زمان: ۲۱۰ دقیقه
تعداد سؤالات: ۳۰

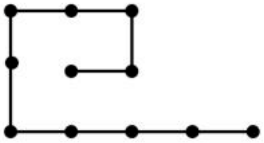
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

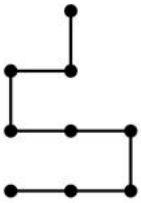
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

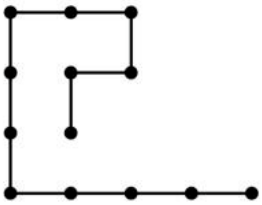
سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

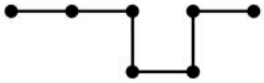
۱. با کنار هم قرار دادن دو نسخهٔ مشابه از کدام نوع سیم، می‌توان یک چندضلعی بسته ساخت که خودش را قطع نکند و همهٔ اضلاعش افقی و یا عمودی باشد؟

۱)


۲)


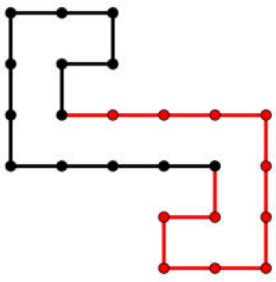
۳)


۴)


۵)


راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

با توجه به شکل زیر می‌توان با استفاده از دو نسخهٔ مشابه از سیم گزینهٔ ۴، یک چندضلعی بستهٔ غیرمتقاطع ساخت:



به سادگی می‌توان دید که این کار برای دیگر گزینه‌ها غیرممکن است.

۲. در مثلث ABC زاویهٔ $\angle BAC = ۶۰^\circ$ است. نقطهٔ E درون ضلع AC و نقطهٔ D روی امتداد ضلع BC از این مثلث به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که C بین B و D قرار دارد و به علاوه

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

$AB = DE$. اگر $\angle DEC = ۳۰^\circ$ باشد، نسبت $\frac{BC}{CD}$ چند است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۵) $\sqrt{۳}$

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

در مثلث‌های ABC و CDE قانون سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}, \qquad (۱)$$

$$\frac{DE}{\sin \angle ACD} = \frac{CD}{\sin \angle CED}. \qquad (۲)$$

از آن‌جا که $\angle ACD = ۱۸۰^\circ - \angle ACB$، پس $\sin \angle ACB = \sin \angle ACD$ و از طرفی $AB = DE$. پس طرف‌های چپ دو عبارت (۱) و (۲) با هم برابرند. پس

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{CD}{\sin \angle CED},$$

و در نتیجه

$$\frac{BC}{CD} = \frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}.$$

۳. اعداد حقیقی a، b، c و d در تساوی‌های $ab = ۲$، $b + c = ۳$، $cd = ۴$ و $d + a = ۵$ صدق می‌کنند. چند مقدار ممکن برای a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

با استفاده از تساوی‌های دوم و چهارم می‌توانیم c و d را بر حسب a و b بنویسیم: $c = ۳ - b$ و $d = ۵ - a$. با جایگذاری این روابط در دو معادلهٔ دیگر داریم:

$$ab = ۲, \quad (۳ - b)(۵ - a) = ۴ \Longrightarrow ۱۵ - (۳a + ۵b) + ab = ۴.$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

با جایگذاری مقدار ab در رابطهٔ دوم به دو رابطهٔ معادل زیر می‌رسیم:

$$ab = ۲, \quad ۳a + ۵b = ۱۳ \iff b = \frac{۱۳}{۵} - \frac{۳a}{۵} \implies (\frac{۱۳}{۵} - \frac{۳a}{۵})a = ۲ \iff ۳a^۲ - ۱۳a + ۱۰ = ۰.$$

در نتیجه a ریشهٔ چندجمله‌ای $۳x^۲ - ۱۳x + ۱۰$ است. دلتای این چندجمله‌ای برابر با ۴۹ و مثبت است، پس دو ریشهٔ متمایز $x_۱, x_۲$ دارد. حال مقادیر ممکن برای a برابر با $x_۱$ و $x_۲$ است و در نتیجه دو مقدار ممکن برای a وجود دارد.

۴. سه جفت پیچ و مهرهٔ کوچک، متوسط و بزرگ داریم که نمی‌دانیم کدام پیچ برای کدام مهره است. هر بار می‌توانیم یک پیچ و یک مهره را با هم امتحان کنیم. کم‌ترین تعداد امتحان‌های مورد نیاز برای این که در هر صورت مهرهٔ نظیر هر پیچ را بیابیم، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

روشی ارائه می‌دهیم که با حداکثر سه بار امتحان کردن می‌توان مهرهٔ نظیر هر پیچ را یافت. به این صورت که ابتدا یکی از مهره‌ها را بر می‌داریم و آن را با دو تا از پیچ‌ها امتحان می‌کنیم. حال یا این مهره نظیر یکی از این دو پیچ است که پیچ متناظر با آن را یافته‌ایم و یا این که متناظر با هیچ کدام از این دو پیچ نیست و بنابراین حتماً متناظر با پیچ سوم خواهد بود. پس با حداکثر دو بار امتحان کردن پیچ نظیر این مهره را یافته‌ایم. حال یکی دیگر از مهره‌ها را بر می‌داریم و آن را با یکی از دو پیچ باقی‌مانده امتحان می‌کنیم. اگر این دو نظیر هم بودند که پیچ و مهرهٔ باقی‌مانده هم متناظر با هم هستند و اگر این دو نظیر هم نبودند، این مهره با پیچ سوم متناظر است و پیچ و مهرهٔ مانده هم نظیر هم هستند. پس در هر صورت با این روش در حداکثر سه حرکت می‌توان پیچ و مهره‌ها را متناظر کرد. از طرف دیگر ادعا می‌کنیم که با دو حرکت لزوماً نمی‌توان پیچ و مهره‌ها را متناظر کرد. اگر در این دو امتحان ما یک پیچ (به طور مشابه یک مهره) مشترک باشند، در مورد دو پیچ دیگر اطلاعاتی به دست نمی‌آوریم. اگر هم در این دو امتحان دو پیچ مختلف را با دو مهرهٔ مختلف مقایسه کنیم و برای مثال در یک امتحان مهره بزرگ‌تر و در دیگری پیچ بزرگ‌تر باشد، نمی‌توانیم مطمئن شویم که کدام مهره مربوط به کدام پیچ است. (می‌توان حالت‌های متفاوتی را مثال زد که همین نتیجه را در مقایسه کردن به دست دهند.)

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۵. به یک هفته در سال «جالب» می‌گوییم اگر دوشنبهٔ آن هفته، روز دوم، دوازدهم یا بیست و دوم ماه باشد. در فصل پاییز چند هفته ممکن است جالب باشد؟

۱) یک یا دو هفته
۲) یک یا سه هفته
۳) صفر یا سه هفته
۴) صفر، یک یا دو هفته
۵) در هر حالتی دقیقاً دو هفته

بهمن ۹۴

شنبه	۳	۱۰	۱۷	۲۴
یکشنبه	۴	۱۱	۱۸	۲۵
دوشنبه	۵	۱۲	۱۹	۲۶
سه‌شنبه	۶	۱۳	۲۰	۲۷
چهارشنبه	۷	۱۴	۲۱	۲۸
پنجشنبه	۱ ۸	۱۵	۲۲	۲۹
جمعه	۲ ۹	۱۶	۲۳	۳۰

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

هر یک از ماه‌های پاییز ۳۰ روز دارند، بنابراین اگر روزهای پاییز را به ترتیب از ۱ تا ۹۰ شماره‌گذاری کنیم، روزهای دوم، دوازدهم و بیست‌ودوم ماه‌ها، روزهای

$$۲, ۱۲, ۲۲, ۳۲, ۴۲, ۵۲, ۶۲, ۷۲, ۸۲$$

هستند که باقیماندهٔ این اعداد بر ۷ به صورت زیر است:

$$۲, ۵, ۱, ۴, ۰, ۳, ۶, ۲, ۵$$

حال این‌که یک روز پاییز چه روزی از هفته باشد، به باقیماندهٔ شمارهٔ آن روز بر ۷ و اینکه روز اول پاییز چه روزی از هفته است، وابسته است. یعنی اگر روز اول پاییز روز n-ام هفته باشد (شنبه روز اول هفته است)، روز k-ام پاییز روز باقیماندهٔ $(n+k-۱)$-ام هفته است. (اگر باقیمانده ۰ باشد، یعنی جمعه) پس روز k-ام دوشنبه است اگر باقیماندهٔ $n+k-۱$ بر ۷ برابر ۳ باشد و یا به عبارت دیگر باقیماندهٔ k و $n-۴$ بر ۷ یکسان باشد. حال توجه کنید که باقیماندهٔ روزهای دوم، دوازدهم و بیست‌ودوم ماه‌های پاییز هر عدد ۰ تا ۶ را یک یا ۲ بار می‌گیرد، پس بسته به این‌که باقیماندهٔ $n-۴$ بر ۷ چه عددی باشد، تعداد هفته‌های جالب ۱ یا ۲ است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

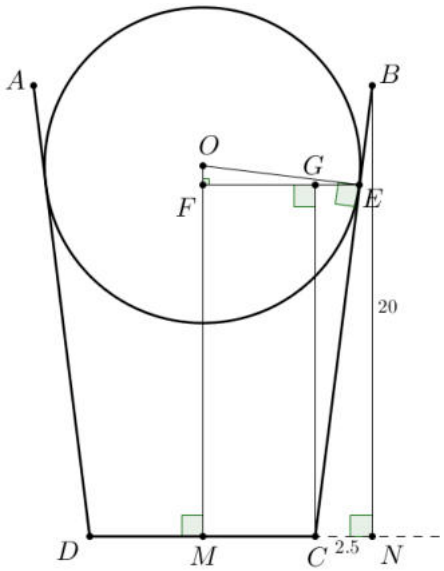


۶. گلدانی به شکل مخروطی ناقصی با ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و قطر دهانه و کف به ترتیب ۱۵ و ۱۰ سانتی‌متر روی زمین قرار گرفته است. توپی به شعاع ۷ سانتی‌متر را در این گلدان می‌اندازیم. ارتفاع بالاترین نقطهٔ توپ از سطح زمین (بر حسب سانتی‌متر) به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷ ۵) ۲۹

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

از آنجا که قطر توپ از قطر دهانهٔ گلدان کوچک‌تر است، پس حتماً توپ با سطح داخلی گلدان تماس پیدا می‌کند. شکل زیر، تصویر جانبی گلدان و توپ را نشان می‌دهد.



O را مرکز توپ و M را وسط CD بگیرید و N را پای عمود از B بر امتداد CD بگیرید. داریم

$$\sin \angle BCN = \frac{BN}{BC} = \frac{۲۰}{\sqrt{۲۰^۲ + ۲/۵^۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۶۵}}$$

چون چهارضلعی $OMCE$ محاطی است، داریم

$$\angle FOE = \angle BCN$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

پس

$$FE = ۷\sin\angle FOE = ۷\sin\angle BCN = ۷\frac{BN}{CN} = \frac{۵۶}{\sqrt{۶۵}}$$

و مشابهاً

$$OF = ۷\cos\angle FOE = ۷\cos\angle BCN = \frac{۷}{\sqrt{۶۵}} \qquad (۳)$$

اکنون از C بر FE عمود می‌کنیم تا آن را در G قطع کند. داریم

$$GE = FE - FG = FE - MC = \frac{۵۶}{\sqrt{۶۵}} - ۵$$

اکنون با توجه به تشابه مثلث‌های GEC و BCN داریم

$$\frac{GC}{GE} = \frac{۲۰}{۲٫۵} = ۸$$

بنابراین

$$GC = ۸(\frac{۵۶}{\sqrt{۶۵}} - ۵) \qquad (۴)$$

پس ارتفاع بالاترین نقطهٔ توپ برابر است با

$$PM = ۷ + OM = ۷ + OF + FM = ۷ + OF + GC$$

که بنابر روابط (۳) و (۴) به دست می‌آوریم:

$$PM = ۷ + \frac{۷}{\sqrt{۶۵}} + ۸(\frac{۵۶}{\sqrt{۶۵}} - ۵) = \frac{۴۵۵}{\sqrt{۶۵}} - ۳۳$$

که حاصل آن عددی بین ۲۲ و ۲۳ است.

۷. a و b دو عدد حقیقی هستند که $a^۲ + b^۲ = ۸$. حداکثر مقدار $۲(a+b) - ab$ چند است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۸}$ ۴) ۶ ۵) ۸

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

$$(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab = ۸ + ۲ab \Longrightarrow ab = \frac{۱}{۲}(a+b)^۲ - ۴.$$

حال اگر $a+b$ را با x نشان دهیم، داریم:

$$۲(a+b) - ab = ۲x - \frac{x^۲}{۲} + ۴.$$

اما توجه کنید که $a^۲ + b^۲ = ۸$ معادلهٔ نقاط یک دایره به شعاع $۲\sqrt{۲}$ به مرکز مبدأ است، بنابراین با توجه به شکل دایره، ماکزیمم و مینیمم $a+b$ روی آن برابر با $۲ \times ۲\pm$ است. در نتیجه جواب مسأله برابر با ماکزیمم چندجمله‌ای $-\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۴$ روی بازهٔ $[-۴, ۴]$ است.

اما نمودار این چندجمله‌ای، یک سهمی رو به پایین است که ماکزیمم آن در نقطهٔ ۲ رخ می‌دهد که در بازهٔ $[-۴, ۴]$ هم قرار دارد. (ماکزیمم چندجمله‌ای $cx^۲ + dx + e$ در صورتی که c منفی باشد، در $x = -\frac{d}{۲c}$ است) بنابراین برای به دست آوردن جواب، باید $-\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۴$ را در $x = ۲$ حساب کنیم که حاصل عدد ۶ است.

۸. در یک هتل ۱۳ اتاق وجود دارد که شمارهٔ اتاق‌ها از ۱ تا ۱۳ روی درب اتاق و روی کلید هر اتاق درج شده است، ولی کلید هر اتاق یکتا نیست و همهٔ کلیدهایی که تفاضل شمارهٔ نوشته شده روی آن‌ها و شمارهٔ اتاق بر ۳ بخش‌پذیر باشد، درب اتاق را باز می‌کنند. به چند طریق می‌توان کلیدها را به اتاق‌ها نسبت داد تا درب همهٔ اتاق‌ها قابل باز شدن باشند؟

۱) $۵! \times (۴!)^۲$ ۲) $۴! \times (۵!)^۲$ ۳) $\frac{۵! \times (۴!)^۲}{۳!}$ ۴) $\frac{۴! \times (۵!)^۲}{۳!}$ ۵) $۱۳!$

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که تفاضل دو عدد درصورتی بر ۳ بخش‌پذیر است که آن‌دو باقیماندهٔ یکسانی بر ۳ داشته باشند. در میان اعداد ۱ تا ۱۳ هم ۴ عدد باقیماندهٔ ۰، ۵ عدد باقیماندهٔ ۱ و ۴ عدد باقیماندهٔ ۲ بر ۳ دارند.

درنتیجه اگر بخواهیم به هر اتاق کلیدی نسبت دهیم که در اتاق را باز کند، به اتاق‌هایی که باقیماندهٔ ۰ بر ۳ دارند، جایگشتی از کلیدهای با باقیماندهٔ ۳ را باید متناظر کنیم (۴! حالت)، به اتاق‌های با باقیماندهٔ ۱، کلیدهای با باقیماندهٔ ۱ (۵! حالت) و به اتاق‌های

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

با باقیماندهٔ ۲، کلیدهای با باقیماندهٔ ۲ (!۴ حالت). پس با توجه به مستقل بودن این انتخاب‌ها و اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر با حاصل‌ضرب این اعداد یعنی $۴!^۲ \times ۵!$ است.

۹. مقدار سینوس زاویهٔ $۱۱^{۱۰۰}$ درجه به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) -۱ ۲) $-۰/۵$ ۳) صفر ۴) $۰/۵$ ۵) ۱

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

می‌دانیم که اگر $x \overset{۳۶۰}{\equiv} y$، آن‌گاه $\sin x = \sin y$. اکنون داریم

$$۱۱^{۱۰۰} \overset{۳۶۰}{\equiv} ۱۱ \times (۱۱^۳)^{۳۳} = ۱۱ \times (۱۳۳۱)^{۳۳}$$

$$\overset{۳۶۰}{\equiv} ۱۱ \times (۲۵۱)^{۳۳} = ۱۱ \times ۲۵۱ \times (۲۵۱)^{۳۲}$$

$$= ۲۷۶۱ \times (۶۳۰۰۱)^{۱۶} \overset{۳۶۰}{\equiv} ۲۴۰ \times ۱^{۱۶} = ۲۴۰,$$

پس

$$\sin(۱۱^{۱۰۰}) = \sin(۲۴۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \approx -۰/۸۶.$$

۱۰. در ذوزنقهٔ $ABCD$ ($AB \parallel CD$) نقطه‌های P، Q، R، S و T را به ترتیب وسط‌های AB، BC، CD، AC و BD هستند. می‌دانیم نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت مثلث PST برابر $\frac{۱۳۹۵}{۱۳۹۴}$ است. نسبت دو قاعدهٔ این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳۹۴}$ ۲) $\sqrt{۱۳۹۵}$ ۳) ۶۹۷ ۴) ۱۳۹۵ ۵) ۲۷۸۹

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

ابتدا سعی می‌کنیم که مساحت هر کدام از دو مثلث PQR و PST را بر حسب اجزای ذوزنقهٔ $ABCD$ محاسبه کنیم. برای این منظور ارتفاع ذوزنقه را با h نمایش می‌دهیم.

در مورد مثلث PQR داریم:

$$S_{PQR} = S_{PBCR} - S_{PQB} - S_{QCR}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

حال چون مثلث BPQ و BAC با نسبت $\frac{۱}{۲}$ متشابه هستند، $S_{BPQ} = \frac{۱}{۴}S_{BAC} = \frac{۱}{۸}AB.h$ و به طریق مشابه $S_{QRC} = \frac{۱}{۸}CD.h$. در مورد ذوزنقهٔ $PBCR$ هم داریم $S_{PBCR} = \frac{۱}{۲}(PB+CR)h = \frac{۱}{۴}(AB+CD)h$ پس:

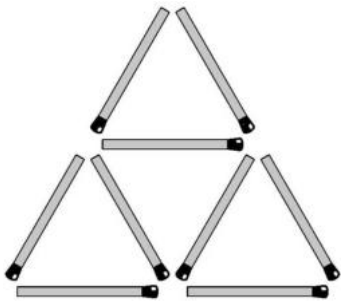
$$S_{PQR} = \frac{۱}{۴}(AB+CD)h - \frac{۱}{۸}AB.h - \frac{۱}{۸}CD.h = \frac{۱}{۸}(AB+CD)h$$

در مورد مثلث PST می‌دانیم که ارتفاع آن برابر $\frac{h}{۲}$ است و قاعدهٔ آن $ST = QS - QT$. با استفاده از قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که $QS = \frac{۱}{۲}CD$ و $QT = \frac{۱}{۲}AB$. پس:

$$S_{PST} = \frac{۱}{۲}(\frac{CD}{۲} - \frac{AB}{۲})\frac{h}{۲} = \frac{۱}{۸}(CD-AB)h$$

پس نسبت مساحت این دو مثلث برابر $\frac{CD+AB}{CD-AB}$ است که طبق فرض مسئله برابر $\frac{۱۳۹۵}{۱۳۹۴}$ شده است. این فرض با یک محاسبهٔ سرراست نتیجه می‌دهد که نسبت $\frac{CD}{AB}$ برابر ۲۷۸۹ خواهد بود.

۱۱. به چند طریق می‌توان ۳ چوب‌کبریت از ۹ چوب‌کبریت موجود در شکل روبه‌رو را حذف کرد که هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟



۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷ ۵) ۸۰

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که در شکل ۵ مثلث وجود دارد: یک مثلث بزرگ که شامل چوب‌کبریت‌های دور شکل است و چهار مثلث کوچک متشکل از ۳ چوب‌کبریت که یکی در بالا، دیگری در پایین و راست، دیگری در پایین و چپ (مثلث‌های کناری) و آخری در وسط شکل قرار دارد. حال ۳ مثلث کناری هیچ چوب‌کبریت مشترکی ندارند و اگر بخواهیم بعد از حذف ۳ چوب‌کبریت مثلثی باقی نماند، باید از هر کدام از آنها یک چوب‌کبریت حذف کنیم. چوب کبریتی که برای حذف کردن از هر کدام از این مثلث‌ها انتخاب می‌کنیم، ۳ حالت دارد و بنابراین به ۲۷ طریق می‌توانیم ۳ چوب‌کبریت از شکل حذف کنیم که این مثلث‌ها باقی نمانند.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

اما توجه کنید که در بعضی از این حالت‌ها مثلث بزرگ و مثلث وسط باقی می‌مانند: اگر بعد از حذف ۳ چوب‌کبریت مثلث بزرگ باقی بماند، باید هر سه چوب‌کبریت از مثلث وسط انتخاب شده باشند که فقط یک حالت دارد. همین‌طور اگر از بعد از حذف ۳ چوب‌کبریت به روش بالا، مثلث وسط باقی مانده باشد، باید از هر یک از مثلث‌های کناری چوب‌کبریتی را حذف کرده باشیم که دور شکل قرار دارد. (که برای هر کدام دقیقاً ۲ تاست) پس تعداد حالاتی که این اتفاق رخ می‌دهد، ۸ حالت است. پس باید در کل ۹ حالت را از ۲۷ حالت قبل حذف کنیم و جواب نهایی برابر ۱۸ است.

۱۲. یک مستطیل با اضلاع ۳۰ و ۴۰ را با رسم خطوطی موازی اضلاع به شبکه‌ای ۴۰×۳۰ از مربع‌های واحد تبدیل کرده‌ایم. یکی از قطرهای مستطیل اولیه را در نظر بگیرید. دایرهٔ محاطی چند تا از مربع‌های واحد شبکه‌بندی به این قطر مماس هستند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۸ ۵) ۴۰

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

فرض کنید مستطیل را به گونه‌ای در صفحه قرار داده‌ایم که رأس پایین چپ آن بر مبدأ مختصات منطبق شده، اضلاع آن موازی محورها بوده و ضلع بزرگ‌تر آن روی محور x باشد. حال معادلهٔ خط شامل قطری که مبدأ را به ضلع روبه‌رویش متصل می‌کند به صورت $y = \frac{۳۰}{۴۰}x$ است. اگر دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۲}$ (شعاع همهٔ دایره‌های محاطی برابر $\frac{۱}{۲}$ است) بر این خط مماس باشند، مرکز دایره در فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از این خط قرار دارد. یعنی مرکز همهٔ دایره‌های مماس به این قطر (با شعاع $\frac{۱}{۲}$) روی دو خط موازی با فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از این قطر قرار دارند. معادلهٔ این دو خط به صورت $y = \frac{۳}{۴}x \pm \frac{۵}{۸}$ است.

مرکز دایره‌های محیطی مربع‌های شبکه‌بندی، همان مرکز مربع‌ها هستند. به این نقطه‌ها در ادامهٔ راه‌حل نقطه‌های مرکزی می‌گوییم. به دلیل تقارن شکل نسبت به وسط قطر، تعداد نقطه‌های مرکزی روی این دو خط با هم برابر است و بنابراین کافی است تنها تعداد نقطه‌های روی یکی از خط‌ها را محاسبه کنیم. نقطه‌های مرکزی به شکل $(m+\frac{۱}{۲}, n+\frac{۱}{۲})$ هستند که $۰ \le m < ۴۰$ و $۰ \le n < ۳۰$.

نقطهٔ $(m+\frac{۱}{۲}, n+\frac{۱}{۲})$ روی خط $y = \frac{۳}{۴}x + \frac{۵}{۸}$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $m = \frac{۳n+۲}{۴}$. پس $۴ \mid ۳n+۲$ و این یعنی n به فرم $۴k+۲$ است که $۰ \le k \le ۹$. از آن‌جا که در همهٔ موارد $m = \frac{۳n+۲}{۴} = ۳k+۲$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

بین ۰ و ۳۰ قرار دارد، تعداد نقطه‌های مطلوب روی این خط برابر ۱۰ و بنابراین تعداد کل نقطه‌های مرکزی که از قطر فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ دارند، برابر ۲۰ است.

۱۳. طول جهش‌های یک قورباغه می‌تواند هر یک از اعداد $1, 5, 5^2, 5^3, \ldots$ باشد. این قورباغه روی نقطهٔ صفر از محور اعداد صحیح نشسته و در هر مرحله می‌تواند به سمت راست یا چپ جهش کند. اگر این قورباغه نتواند دو جهش با طول مساوی انجام دهد، به چند تا از اعداد $\{1, 2, \ldots, 1394\}$ می‌تواند برود؟

۱) ۶۳ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۲۱ ۵) ۲۴۳

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

ابتدا توجه کنید برای هر k، حاصل‌جمع توان‌های ۵ کمتر از 5^k برابر است با:

$$1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{k-1} = \frac{5^k - 1}{4} < 5^k,$$

و در نتیجه اگر قورباغه تعدادی پرش داشته باشد و طول بزرگترین پرشش 5^k باشد، اگر این پرش به سمت راست باشد، مکان نهایی قورباغه در اعداد مثبت است و اگر این پرش به سمت چپ باشد، مکان نهایی قورباغه در اعداد منفی است. علت آن هم این است که جمع طول همهٔ پرش‌های دیگر از طول بزرگترین پرش کمتر است.

از طرف دیگر توجه کنید که:

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 781 < 1394 < 2344 = 5^5 - (1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4),$$

پس اگر قورباغه نهایتاً در یک عدد مثبت کمتر یا مساوی ۱۳۹۴ باشد، طول بزرگترین پرشش حداکثر 5^4 است و این پرش هم به سمت راست است. پس مکان نهایی قورباغه به صورت:

$$5^a + (0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1)5^{a-1} + \cdots + (0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1)5 + (0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1),$$

است که a حداکثر برابر ۴ است. به راحتی می‌توان دید که یک عدد حداکثر یک نمایش به صورت بالا دارد. (مثلاً با در نظر گرفتن باقیمانده بر ۵ می‌توان فهمید که ضریب ۱ کدام یک از ۰ یا ۱ یا ۱- بوده و بعد با کم کردن مقدار این جمله از عدد و تقسیم بر ۵، ضریب ۵ در نمایش بالا را به دست آورد و ...)

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

تعداد اعدادی که نمایشی به صورت بالا دارند، برای هر مقدار a برابر با 3^a است (تعداد حالات انتخاب ۰ یا ۱ یا ۱- از هر پرانتز) و در نتیجه اگر این مقدار را برای هر $a \le 4$ (و $a = 0$) جمع بزنیم، $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$ به دست می‌آید.

۱۴. چند چهارتایی مرتب (a,b,c,d) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق کند؟

$$\begin{cases} a^3 + bc = d^3 \\ b^3 + cd = a^3 \\ c^3 + da = b^3 \\ d^3 + ab = c^3 \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲۵
۴) ۴۹ ۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

اگر همهٔ معادلات را با هم جمع بزنیم، خواهیم داشت:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + ab + bc + cd + da = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \Longrightarrow (a+c)(b+d) = 0.$$

بنابراین یکی از $a+c$ و $b+d$ برابر صفر است.

در حالت اول $c = -a$ و اگر این رابطه را در معادلات اول و چهارم جایگذاری کنیم، داریم:

$$\begin{cases} a^3 - ab = d^3 \\ d^3 + ab = -a^3 \end{cases} \Longrightarrow d^3 + ab = a^3 = -a^3 \Longrightarrow a = 0, c = 0.$$

بعد از جایگذاری صفر به جای a و c در معادلات اول و دوم هم خواهیم داشت، $b = d = 0$.

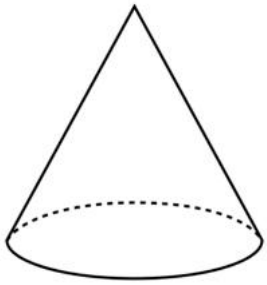
حالت دوم $b + d = 0$ هم تنها به جواب $a = b = c = d = 0$ منجر می‌شود. پس این دستگاه معادلات فقط یک جواب دارد.

۱۵. نقطهٔ P در جسم A را «خاص» گوییم، اگر نقطه‌های متمایز X و Y در A وجود نداشته باشند که P نقطهٔ وسط پاره‌خط XY باشد. کدام گزینه در مورد نقاط خاص یک مخروط توپر با قاعدهٔ دایره صحیح است؟

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور



۱) مخروط تنها یک نقطهٔ خاص دارد.
۲) هر خطی که وجه دایره‌ای مخروط را قطع کند، حتماً شامل یک نقطهٔ خاص مخروط است.
۳) هر صفحه‌ای که مخروط را قطع کند، حتماً شامل نقطه‌ای خاص از مخروط است.
۴) همهٔ نقطه‌های سطح جانبی مخروط، خاص هستند.
۵) یک و فقط یک کره در فضا وجود دارد که همهٔ نقاط خاص مخروط روی سطح آن قرار بگیرند.

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

با توجه این که مخروط جسمی محدب است (اگر دو نقطه در مخروط باشند، پاره‌خط واصل بین آن‌ها نیز به طور کامل در مخروط قرار دارد) اشتراک هر خط با مخروط یک پاره‌خط و یا یک نقطه است. با توجه به این نکته ادعا می‌کنیم که نقطه‌های خاص دقیقاً نقطه‌هایی مثل P هستند که بتوان برای آن‌ها خطی مثل l یافت که نقطهٔ P نقطهٔ مرزی پاره‌خط اشتراک l با مخروط نباشد. زیرا اگر چنین خطی پیدا شد می‌توان روی همان پاره‌خط (اشتراک خط و مخروط) دو نقطهٔ متمایز یافت که P وسط آن‌ها باشد. بالعکس، اگر دو نقطهٔ متمایز یافت شد که P نقطهٔ میانی آن‌ها باشد، نقطهٔ P نقطهٔ مرزی اشتراک خط گذرا از این دو نقطه و مخروط نیست.
حال ادعا می‌کنیم نقطه‌های خاص مخروط دقیقاً نقطهٔ رأس به علاوهٔ همهٔ نقطه‌های مرزی وجه دایره‌ای مخروط هستند.
در مورد هر کدام از نقطه‌های این مجموعه مثل P می‌توان صفحه‌ای به نام $\pi(P)$ یافت که مخروط در یک طرف صفحه نقطه‌ای ندارد و به علاوه اشتراک $\pi(P)$ با مخروط در یک پاره‌خط یا یک نقطه است که P نقطهٔ مرزی این پاره‌خط اشتراک است (در مورد رأس مخروط صفحه‌ای موازی قاعده و در مورد نقطه‌های مرزی وجه دایره‌ای صفحه‌ای را بگیرید که از آن نقطه و رأس مخروط می‌گذرد و دایره را تنها در P قطع می‌کند).
حال خطی گذرا از P مانند l را در نظر بگیرید. اگر این خط به تمامی در $\pi(P)$ قرار دارد، یا تنها در تک‌نقطهٔ P با مخروط اشتراک دارد و یا شامل پاره‌خط واصل بین p و رأس

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

مخروط است که P نقطهٔ مرزی آن است. اگر هم l از $\pi(P)$ عبور کند، چون مخروط در یک طرف صفحه نقطه‌ای ندارد، مجدداً نقطهٔ P نقطهٔ مرزی پاره‌خط اشتراک خواهد شد. پس همهٔ این نقطه‌ها خاص هستند.
ادعا می‌کنیم که هیچ یک از نقطه‌های دیگر نمی‌توانند خاص باشند.

- اگر P رأس مخروط یا در وجه دایره‌ای نباشد، خط واصل بین رأس مخروط و P، مخروط را در یک پاره‌خط قطع می‌کند که یک سر آن نقطهٔ رأس و سر دیگر آن نقطه‌ای از دایرهٔ قاعده است، پس P نمی‌تواند نقطهٔ مرزی این پاره‌خط باشد و لذا عادی است! (خاص نیست.)
- اگر P نقطه‌ای درون (و نه روی مرز) دایرهٔ قاعده باشد، خط دل‌خواهی در صفحهٔ شامل دایره در نظر بگیرید که از P عبور کند. به وضوح این خط مخروط را در یک وتر از دایره قطع می‌کند که نقطه‌های مرزی آن روی مرز دایره هستند و لذا در این حالت هم P نمی‌تواند نقطهٔ مرزی باشد و بنابراین نقطه‌ای خاص نیست.

حال با توجه به آن چه که در مورد نقطه‌های خاص فهمیدیم به سراغ گزینه‌ها می‌رویم.

- گزینهٔ ۱. دیدیم که نقطه‌های خاص بیش از یکی است. پس این گزینه غلط است.
- گزینهٔ ۲. خطی عمود بر وجه دایره‌ای بگیرید که از رأس مخروط عبور نکند. به وضوح چنین خطی نمی‌تواند از نقطه‌های مرزی دایره که سایر نقاط خاص ما بودند بگذرد، پس شامل نقطه‌ای خاص نیست. بنابراین این گزینه هم غلط است.
- گزینهٔ ۳. صفحه‌ای موازی وجه دایره‌ای مخروط بگیرید که از رأس عبور نکند. به وضوح این صفحه هم شامل هیچ یک از نقطه‌های خاص نیست و بنابراین این گزینه نمی‌تواند درست باشد.
- گزینهٔ ۴. دیدیم که همهٔ نقطه‌های سطح جانبی خاص نیستند و بنابراین این گزینه هم نمی‌تواند درست باشد.
- گزینهٔ ۵. مرکز چنین کره‌ای باید روی خط عمود بر وجه دایره‌ای در مرکز دایره باشد،

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

چون باید از همهٔ نقطه‌های دایره به یک فاصله باشد. از طرف دیگر اگر یکی از نقطه‌های دایره را به دل‌خواه در نظر گرفته و صفحهٔ عمود منصف این نقطه و رأس مخروط را در نظر بگیریم، چون رأس مخروط خارج از صفحهٔ وجه دایره‌ای است، این صفحهٔ عمود منصف موازی خط عمود بر دایره نیست و بنابراین با آن دقیقاً در یک نقطه اشتراک دارد. این نقطهٔ اشتراک مرکز کره‌ای است که از وجه دایره‌ای و رأس مخروط می‌گذرد. پس چنین کره‌ای وجود دارد و چون مرکز و در نتیجه شعاع آن به طور یک‌تا تعیین می‌شود، چنین کره‌ای یک‌تا است. پس گزینهٔ ۵، گزینهٔ درست است.

۱۶. علی فرمولی برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۲ کشف کرده است که با کمک آن می‌تواند مقدار چندجمله‌ای درجهٔ دویی را در نقطهٔ ۳ بر حسب مقدار آن در نقاط صفر و ۱ و ۲ به دست آورد. فرمول علی برای چندجمله‌ای P به شکل زیر است:

$$P(۳) = aP(۰) + bP(۱) + cP(۲),$$

که در آن a، b و c سه عدد ثابت هستند. این سه عدد را پیدا کنید و مشخص کنید که مقدار $a - b + c$ چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

فرض کنید $P(x) = px^۲ + qx + r$ باشد. پس علی a، b و c را به گونه‌ای یافته است که برای هر p، q و r:

$$\underbrace{۹p + ۳q + r}_{P(۳)} = a(\underbrace{r}_{P(۰)}) + b(\underbrace{p + q + r}_{P(۱)}) + c(\underbrace{۴p + ۲q + r}_{P(۲)})$$
$$\Rightarrow \quad ۹p + ۳q + r = p(b + ۴c) + q(b + ۲c) + r(a + b + c)$$

و چون p و q و r دل‌خواه هستند، باید ضرایب آن‌ها در دو طرف تساوی برابر باشند:

$$\begin{cases} b + ۴c = ۹, \\ b + ۲c = ۳, \\ a + b + c = ۱, \end{cases}$$

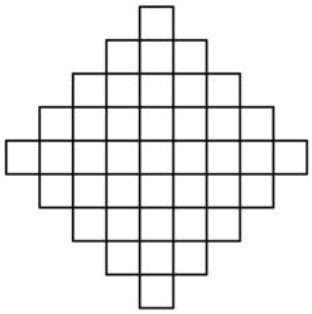
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

با استفاده از دو رابطهٔ اول و دوم نتیجه می‌شود که $c = ۳$ و $b = -۳$ و با قرار دادن این دو در رابطهٔ سوم $a = ۱$ به دست می‌آید. پس $a - b + c = ۷$ و گزینهٔ (۵) صحیح است.

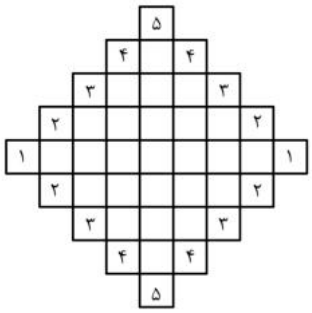
۱۷. به چند طریق می‌توان در شکل روبه‌رو ۸ خانه را انتخاب کرد که هیچ دو تایی از آن‌ها هم‌سطر و یا هم‌ستون نباشند؟



۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲ ۵) ۶۴

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

ابتدا توجه کنید که چون می‌خواهیم ۸ خانه با خاصیت مورد نظر انتخاب کنیم و ۹ ستون داریم. دقیقاً باید یکی از ستون‌ها خالی باشند.



حال به دو خانهٔ با شمارهٔ ۱ در شکل روبه‌رو توجه کنید، چون هر کدام از این خانه‌ها یک ستون هستند، با توجه به نکتهٔ بالا باید حداقل یکی از این دو خانه انتخاب شوند و از سوی دیگر چون هم‌سطر هستند، حداکثر یکی از این دو خانه می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین دقیقاً یک خانه از بین دو خانهٔ ۱ انتخاب می‌شود و هیچ از خانه‌های سطر میانی غیر از این خانه انتخاب نمی‌شود و ضمناً همهٔ ستون‌های دیگر خانهٔ انتخاب‌شده دارند. توجه کنید که برای انتخاب این یک خانه دو حالت داریم.

حال به خانه‌های با شمارهٔ ۲ توجه کنید. چون این خانه‌ها، تنها خانه‌های مجاز دو ستون را شامل هستند باید دقیقاً دو تا از این چهار خانه انتخاب شوند. که برای انتخاب دو خانه که هم‌سطر و هم‌ستون نباشند، دو حالت داریم. با انتخاب این دو خانه دیگر هیچ خانه‌ای از سه سطر میانی انتخاب نخواهد شد.

مشابه بالا باید از بین خانه‌های با شمارهٔ ۳ و ۴، هر کدام دو خانه انتخاب کرد که هم‌سطر و هم‌ستون نباشند که برای هر شماره انتخاب به دو طریق امکان‌پذیر است.

در نهایت باید از بین دو خانهٔ با شمارهٔ ۵، یکی را انتخاب کرد که این هم به دو طریق

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

امکان دارد.
پس در کل برای انتخاب ۸ خانه با خاصیت مطلوب، ۳۲ = 2^5 طریق ممکن وجود دارد.

۱۸. حداکثر چند عدد از میان اعداد $\{1, 2, \ldots, 1394\}$ می‌توان انتخاب کرد که حاصل‌ضرب هر ۵ تا از آن‌ها مضرب ۱۴ باشد؟

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۷ ۴) ۱۱۱ ۵) ۱۱۴

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد ۱ تا ۱۳۹۴ باشد که حاصل‌ضرب اعضای هر زیرمجموعهٔ ۵ تایی از آن بر ۱۴ بخش‌پذیر است. همچنین فرض کنید تعداد اعضای A که بر ۱۴ بخش‌پذیرند، a تا، تعداد اعضایی که بر ۲ بخش‌پذیر و بر ۷ بخش‌پذیر نیستند، b تا، تعداد اعضایی که بر ۷ بخش‌پذیر و بر ۲ بخش‌پذیر نیستند، c تا و باقی اعضا d تا باشند. حال خاصیت A ایجاب می‌کند که در هر زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از آن، یک عضو موجود باشد که بر ۲ بخش‌پذیر است و همچنین یک عضو که بر ۷ بخش‌پذیر است. در نتیجه تعداد اعضایی که بر ۲ بخش‌پذیر نیستند، (یعنی $c+d$) حداکثر ۴ است و همین‌طور تعداد اعضایی که بر ۷ بخش‌پذیر نیستند (یعنی $b+d$) هم حداکثر ۴ است. پس:

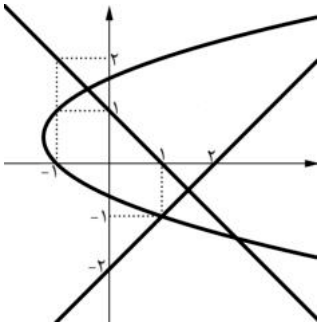
$$\text{تعداد اعضای } A = a+b+c+d \le a+(b+d)+(c+d) \le a+8.$$

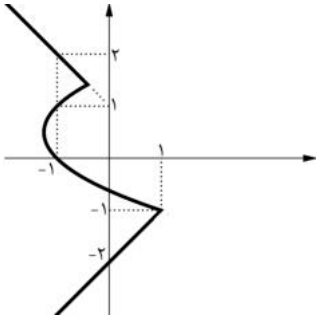
از طرف دیگر در اعداد ۱ تا ۱۳۹۴، ۹۹ عدد بر ۱۴ بخش‌پذیرند و در نتیجه $a \le 99$. پس تعداد اعضای A حداکثر برابر ۱۰۷ است. برای ساختن یک مثال ۱۰۷ عضوی که در شرط مسأله صدق کند، می‌توان مجموعهٔ همهٔ اعداد بخش‌پذیر بر ۱۴ را به همراه ۴ عدد دیگر بخش‌پذیر بر ۲ و ۴ عدد دیگر بخش‌پذیر بر ۷ در $\{1, 2, \ldots, 1394\}$ را در نظر گرفت.

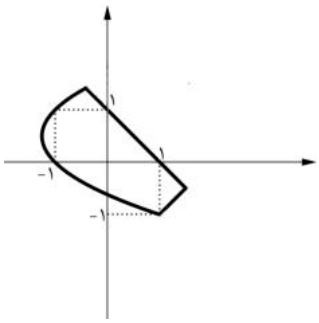
۱۹. کدام گزینه مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند (x, y) در صفحه را با این خاصیت نمایش می‌دهد که بیش‌ترین مقدار در بین سه عبارت $x-y-1$، $x+y$ و y^2-x-y برابر یک است؟

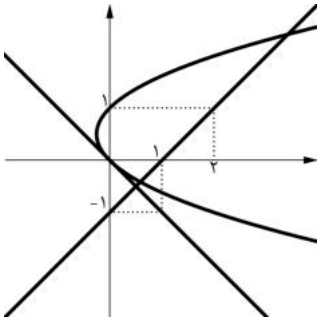
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

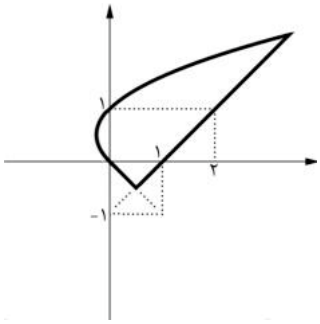
سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور


۳)


۲)

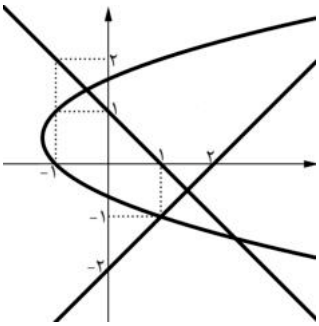

۱)


۵)


۴)

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

شکل جواب مسئله بخشی از اجتماع سه منحنی $x+y=1$، $x-y-1=1$ و $y^2-x-y=1$ است. یعنی قسمتی از منحنی شکل زیر:



حال باید بررسی کنیم که در نقاط این شکل کدام‌یک از سه عبارت $x+y$، $x-y-1$ و y^2-x-y بیشینه است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

- نقطه‌هایی که در آن‌ها $x+y=۱$ و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left.\begin{array}{c} y^۲-x-y\le ۱ \Leftrightarrow y^۲\le ۲ \Leftrightarrow y\in[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}] \\ x-y-۱\le ۱ \Leftrightarrow ۲y+۱\ge ۰ \Leftrightarrow y\ge \frac{-۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-۱}{۲}\le y\le \sqrt{۲}$$

پس قسمتی از خط $x+y=۱$ که $\frac{-۱}{۲}\le y\le \sqrt{۲}$ جزئی از ناحیهٔ مورد نظر هست.

- نقطه‌هایی که در آن‌ها $y^۲-x-y=۱$ و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left.\begin{array}{c} x+y\le ۱ \Leftrightarrow y^۲-۱\le ۱ \Leftrightarrow y\in[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}] \\ x-y-۱\le ۱ \Leftrightarrow y^۲-۲y-۳\le ۰ \Leftrightarrow y\in[-۱,۳] \end{array}\right\} \Rightarrow -۱\le y\le \sqrt{۲}$$

پس قسمتی از سهمی $y^۲-x-y=۱$ که $-۱\le y\le \sqrt{۲}$ قسمتی از ناحیهٔ مورد نظر ماست.

- نقطه‌هایی که در آن‌ها $x-y-۱=۱$ و این عبارت در بین سه عبارت بیشینه است.

$$\left.\begin{array}{c} y^۲-x-y\le ۱ \Leftrightarrow y^۲-۲y-۳\le ۰ \Leftrightarrow y\in[-۱,۳] \\ x+y\le ۱ \Leftrightarrow x+y\ge x-y-۱ \Leftrightarrow y\le \frac{-۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow -۱\le y\le \frac{-۱}{۲}$$

پس قسمتی از خط $x-y-۱=۱$ که در آن $-۱\le y\le \frac{-۱}{۲}$، قسمتی از این ناحیه است.

و در کل ناحیهٔ مورد نظر اجتماع این سه قسمت است که متناظر با نمودار موجود در گزینهٔ (۱) است.

۲۰. در ابتدای روز اول یک ویروس موذی وارد بدن شده است. در انتهای هر روز، هر ویروس موذی که k روز عمر کرده باشد، k ویروس موذی جدید تولید می‌کند و خودش نیز به زندگی ادامه می‌دهد. در انتهای روز ششم چند ویروس موذی متولد می‌شود؟

۱) ۸۹ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۴۴ ۵) ۲۴۳

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

فرض کنید a_n تعداد ویروس‌هایی باشد که در انتهای روز n-ام متولد می‌شوند. در این‌صورت دنبالهٔ (a_n)در رابطهٔ بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} + \cdots + (n-۱)a_۱ + n.$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

زیرا تعداد ویروس‌هایی که در انتهای روز n-ام متولد می‌شوند، برابر با تعداد ویروس‌هایی است که یک روز عمر کرده‌اند (یعنی $a_{n-۱}$) به اضافهٔ دو برابر ویروس‌هایی که دو روز عمر کرده‌اند (یعنی $۲a_{n-۲}$) و همین‌طور تا $n-۱$ برابر ویروس‌هایی که $n-۱$ روز عمر کرده‌اند، (یعنی $(n-۱)a_۱$) به اضافهٔ n ویروسی که از ویروس اولیه متولد می‌شوند. پس با نوشتن جملات ابتدایی a_n ها به دست می‌آید:

$$a_۱ = ۱,$$
$$a_۲ = ۱ + ۲ = ۳,$$
$$a_۳ = ۳ + ۲ \times ۱ + ۳ = ۸,$$
$$a_۴ = ۸ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۱ + ۴ = ۲۱,$$
$$a_۵ = ۲۱ + ۲ \times ۸ + ۳ \times ۳ + ۴ \times ۱ + ۵ = ۵۵,$$
$$a_۶ = ۵۵ + ۲ \times ۲۱ + ۳ \times ۸ + ۴ \times ۳ + ۵ \times ۱ + ۶ = ۱۴۴.$$

که پاسخ ۱۴۴ را به دست می‌آورد.

البته می‌توان رابطهٔ بازگشتی ساده‌تری هم برای دنبالهٔ (a_n) به دست آورد که محاسبهٔ مقادیر آن را سریع‌تر می‌کند. روش کار به این صورت است: اگر رابطهٔ بازگشتی را برای n و $n-۱$ بنویسیم و از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود: ($n > ۱$)

$$a_n - a_{n-۱} = a_{n-۱} + a_{n-۲} + \cdots + a_۱ + ۱, \Longrightarrow$$
$$a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲} + \cdots + a_۱ + ۱.$$

حال اگر $n > ۲$ و رابطهٔ بالا را هم برای $n-۱$ بنویسیم و از رابطهٔ متناظر برای n کم کنیم، داریم: ($n > ۲$)

$$a_n - a_{n-۱} = ۲a_{n-۱} - a_{n-۲} \Longrightarrow a_n = ۳a_{n-۱} - a_{n-۲}.$$

رابطهٔ بالا به همراه دو مقدار اولیهٔ $a_۱ = ۱, a_۲ = ۳$ توصیفی ساده‌تر از دنبالهٔ بازگشتی (a_n) است.

۲۱. به چند طریق می‌توان عدد $۱۵۰^۷$ را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی (بیش از یک عدد) نوشت که در آن ترتیب اعداد مهم نباشد؟

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۱) صفر ۲) ۵۹ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۷۹ ۵) ۲۳۹

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

فرض کنیم $۱۵۰^۷$ را به صورت حاصل‌جمعی از اعداد m تا $m+n$ نوشته باشیم که $m,n \geq ۱$. در این‌صورت:

$$۱۵۰^۷ = m + (m+۱) + \cdots + (m+n) = \frac{(۲m+n)(n+۱)}{۲} \Longrightarrow$$
$$۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴} = (n+۱)(۲m+n).$$

بنابراین اگر بنویسیم $a = n+۱$ و $b = ۲m+n$، a و b زوجیت متفاوت دارند و $b > a > ۱$ و $ab = ۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴}$. برای شمارش تعداد حالات a,b کافیست تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد $۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴}$ (غیر از ۱) را بشماریم، زیرا هر مقسوم‌علیه فرد در مقسوم‌علیه زوج مکملش برابر $۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴}$ است و هر کدام که بزرگتر بود را می‌توان b و دیگری را a در نظر گرفت، البته باید حالت $a = ۱$ را هم حذف کنیم. علاوه بر این واضح است که برای هر زوج a,b با شرایط ذکر شده، دقیقاً یک زوج m,n به صورت بالا وجود دارد.

تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد $۲^۸ \times ۳^۷ \times ۵^{۱۴}$ برابر با تعداد مقسوم‌علیه‌های $۳^۷ \times ۵^{۱۴}$ است، یعنی $۱۲۰ = (۱+۱۴)(۱+۷)$. پس جواب مسأله $۱۱۹ = ۱ - ۱۲۰$ است.

۲۲. به چند طریق می‌توان یک جدول ۷×۱ را با کاشی‌های ۲×۱ پر کرد، طوری که هر خانه توسط حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی پر شده باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ ۵) ۱۹

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

فرض کنیم a_n تعداد راه‌های پر کردن یک جدول $n \times ۱$ با دومینوها (کاشی‌های ۲×۱) باشد که در هر خانه حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی قرار داشته باشد. علاوه بر این b_n را تعداد راه‌های پر کردن یک جدول $n \times ۱$ با دومینوها در نظر بگیرید که در هر خانه غیر از خانهٔ اول، حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی باشد و در خانهٔ اول حداقل صفر و حداکثر یک کاشی باشد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

حال برای $n > ۱$، رابطهٔ زیر را برای a_n داریم:

$$a_n = a_{n-۲} + b_{n-۱},$$

زیرا اگر یکی از حالاتی که در شمارش a_n ظاهر می‌شود در نظر بگیرید، یا در خانهٔ اول دو دومینو قرار دارد که در این‌صورت این دومینوها با خانهٔ دوم مشترکند و هیچ دومینوی دیگر در این دو خانه قرار ندارد. پس تعداد حالات برابر با تعداد حالات پر کردن بقیهٔ خانه‌ها یعنی یک جدول $(n-۲) \times ۱$ با شرط مسأله است. اما اگر در خانهٔ اول فقط یک دومینو باشد، پس از حذف این دومینو و خانهٔ اول، در جدول $(n-۱) \times ۱$ باقیمانده، در هر خانه غیر از خانهٔ اول، بین ۱ تا دو دومینو قرار دارد و در خانهٔ اول، بین ۰ تا ۱ دومینو. پس تعداد حالاتی که در خانهٔ اول جدول اصلی دقیقاً یک دومینو قرار داشته باشد، برابر $b_{n-۱}$ است. با استدلالی کاملاً مشابه و حالت‌بندی روی تعداد دومینوهای خانهٔ اول جدول، می‌توان رابطهٔ بازگشتی زیر را برای b_n به دست آورد:

$$b_n = a_{n-۱} + b_{n-۱}.$$

بنابراین با استفاده از رابطهٔ بازگشتی اول برای هر $n > ۱$ داریم:

$$b_n = a_{n+۱} - a_{n-۱},$$

و اگر این رابطه را برای n و $n-۱$ در رابطهٔ بازگشتی دوم جایگذاری کنیم، به دست می‌آید:

$$a_{n+۱} - a_{n-۱} = a_{n-۱} + a_n - a_{n-۲} \Longrightarrow a_{n+۱} = a_n + ۲a_{n-۱} - a_{n-۲}.$$

پس برای محاسبهٔ مقادیر دنبالهٔ (a_n) کافیست سه مقدار اولیهٔ آن را بدانیم که با توجه به صورت سؤال به سادگی به دست می‌آیند:

$$a_۱ = ۰, a_۲ = ۲, a_۳ = ۱.$$

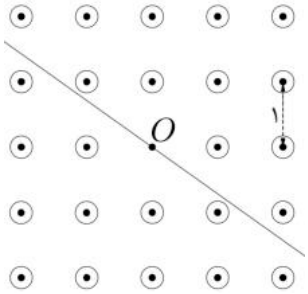
حال با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (a_n) داریم:

$$\begin{aligned} a_۴ &= ۱ + ۴ - ۰ = ۵, \\ a_۵ &= ۵ + ۲ - ۲ = ۵, \\ a_۶ &= ۵ + ۱۰ - ۱ = ۱۴, \\ a_۷ &= ۱۴ + ۱۰ - ۵ = ۱۹. \end{aligned}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۳. می‌خواهیم در تمام نقاط یک شبکهٔ منظم ۵×۵، غیر از نقطهٔ مرکزی، ستون‌هایی استوانه‌ای و برابر نصب کنیم، به‌نحوی که نقطهٔ مرکزی از بیرون دیده نشود؛ یعنی در نقشهٔ مسطحی که می‌بینید، هر خط گذرنده از نقطهٔ مرکزی دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند. در صورتی که فاصلهٔ بین نقاط مجاور یک متر باشد، کم‌ترین مقدار لازم برای شعاع مقطع ستون‌ها چند متر است؟



۱) $\sqrt{\frac{۱}{۱۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۱}{۵}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۴}{۱۷}}$ ۵) $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

برای هر خط l که از نقطهٔ مرکزی (O) می‌گذرد، $m(l)$ را فاصلهٔ خط l تا ۲۴نقطهٔ دیگر می‌گیریم. در این صورت جواب مسئله باید بزرگ‌ترین عدد در بین $m(l)$ها باشد. زیرا اگر این بزرگ‌ترین مقدار را با R نمایش دهیم، برای هر $r \geq R$ می‌توان خطی مثل l یافت که فاصلهٔ یکی از نقطه‌های غیر مرکزی تا خط l کم‌تر از r باشد و بنابراین دایرهٔ به مرکز آن نقطه و شعاع r حتماً با l اشتراک دارد. از طرف دیگر اگر $r < R$ می‌توان خط l یافت که $m(l) > r$. یعنی فاصلهٔ همهٔ نقطه‌های غیر مرکزی از l کم‌تر از r است و بنابراین دایرهٔ به مرکز هر یک از این نقاط و شعاع r با l اشتراک ندارد.

برای راحتی فرض می‌کنیم که نقطه‌ها به گونه‌ای در صفحهٔ مختصات قرار گرفتند که همه دارای مختصات صحیح هستند، نقطهٔ مرکزی در مبدأ قرار دارد و فاصلهٔ بین نقاط مجاور یک است. هم چنین برای نمایش فاصلهٔ نقطهٔ X و خط l، از نماد $d(X,l)$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به تقارن‌های شکل می‌توان برای محاسبهٔ $m(l)$ برای خطوط مختلف، خود را محدود به خطوط l کنیم که شیب آن‌ها بین صفر و یک است و تنها فاصلهٔ پنج نقطهٔ $(۱,۰)$، $(۲,۰)$، $(۱,۱)$، $(۲,۱)$ و $(۲,۲)$ را با l در نظر بگیریم.

به سادگی دیده می‌شود که برای خط l که از مبدأ می‌گذرد، فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۰)$ از خط

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

l کم‌تر از فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۰)$ از l است. پس می‌توانیم در محاسباتمان نقطهٔ $(۲,۰)$ را در نظر نگیریم. به دلیل مشابه و با مقایسهٔ فاصلهٔ نقطه‌های $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ با هر خط l، می‌بینیم که می‌توانیم نقطهٔ $(۲,۲)$ را نیز در نظر نگیریم و تنها فاصلهٔ سه نقطهٔ $A = (۱,۰)$، $B = (۱,۱)$ و $C = (۲,۱)$ را با خط l برای یافتن $m(l)$ محاسبه کنیم. نقطهٔ $(۰,۰)$ را نیز مطابق شکل با O نمایش می‌دهیم.

با یک محاسبهٔ ساده مشخص می‌شود که اگر شیب خط l (که از O می‌گذرد) برابر a باشد، فاصلهٔ سه نقطه A، B و C از l به ترتیب برابر $\frac{a}{\sqrt{۱+a^۲}}$، $\frac{۱-a}{\sqrt{۱+a^۲}}$ و $\frac{|۱-۲a|}{\sqrt{۱+a^۲}}$ است.

حال لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید M نقطهٔ وسط ضلع YZ از مثلث XYZ باشد و T نقطه‌ای روی پاره‌خط MY باشد. در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ Y از خط XT، کم‌تر از فاصلهٔ Z از این خط است و اگر T بر M منطبق شود. این دو مقدار با هم مساوی خواهند شد.

اثبات. اگر $Y_۱$ و $Z_۱$ را به ترتیب پای عمودهای وارد از Y و Z بر خط XM بگیریم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $YY_۱T$ و $ZZ_۱T$ متشابه هستند و لذا $\frac{YT}{ZT} = \frac{YY_۱}{ZZ_۱}$. بنابراین اگر T بین M و Y باشد، $YT < YM = MZ < ZT$ و لذا $YY_۱ < ZZ_۱$. هم‌چنین اگر $T = M$، $YT = ZT$ و لذا $YY_۱ = ZZ_۱$.

حال با استفاده از این لم به ادامهٔ مسئله می‌پردازیم. اگر شیب خط l کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشد،

$$d(C,l) = \frac{۱-۲a}{\sqrt{۱+a^۲}} < \frac{۱-a}{\sqrt{۱+a^۲}} = d(B,l)$$

پس $m(l)$ برابر عدد کم‌تر در بین دو عدد $d(C,l)$ و $d(A,l)$ است. حال طبق لم بالا، اگر خط l زیر میانهٔ وارد بر ضلع AC در مثلث AOC باشد، $m(l) = d(A,l)$ و اگر بالای این میانه باشد، $m(l) = d(C,l)$. حال چون زاویهٔ $\angle AOC$ حاده است، $d(A,l)$ با افزایش شیب l افزایش و $d(C,l)$ با افزایش شیب l کاهش می‌یابد. بنابراین بیش‌ترین مقدار $m(l)$ وقتی شیب l بین ۰ و $\frac{۱}{۲}$ تغییر می‌کند زمانی است که l میانهٔ ضلع AC از مثلث AOC باشد که چون شیب این خط برابر $\frac{۱}{۳}$ است، با استفاده از محاسبه‌های بالا حداکثر مقدار $m(l)$ در این بازه برابر $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ می‌شود. با استدلال مشابه در مورد وقتی که شیب l بین $\frac{۱}{۲}$ و یک تغییر می‌کند، می‌بینیم که بیشینه $m(l)$ مربوط به میانهٔ ضلع BC از مثلث OBC است و چون شیب این میانه برابر $\frac{۲}{۳}$ است، بیشینهٔ $m(l)$ در این بازه برابر $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ می‌شود. پس در کل

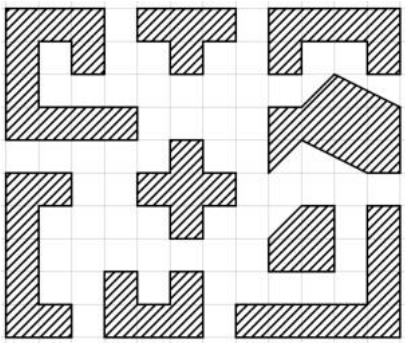
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

بیشینه مقدار $m(l)$، $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ خواهد بود و جواب مسئله همین $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ هست.

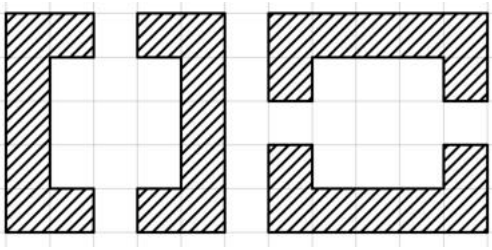
۲۴. می‌گوییم با یک چندضلعی می‌توان صفحه را کاشی‌کاری کرد، هرگاه بتوان نامتناهی شکل هم‌نهشت با آن چندضلعی را در صفحه کنار هم قرار داد به گونه‌ای که کل صفحه را بپوشانند و ضمناً به جز احتمالاً در اضلاع هم‌پوشانی نداشته باشند. با چند تا از اشکال روبه‌رو نمی‌توان صفحه را کاشی‌کاری کرد؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲
۴) ۳ ۵) ۴

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

ادعا می‌کنیم تنها کاشی‌کاری با شکل زیر امکان‌پذیر نیست و برای بقیه امکان‌پذیر است.



فرض کنید که کاشی‌کاری با این کاشی ممکن باشد. به وضوح می‌توان فرض کرد که در این کاشی‌کاری رئوس نسخه‌های مختلف چندضلعی روی نقطه‌های شبکه‌ای قرار می‌گیرد و اضلاع آن‌ها موازی محورها می‌شوند. بنابراین تنها چهار نسخهٔ بالا از این کاشی ظاهر می‌شوند که به دو نسخهٔ سمت چپ در شکل کاشی‌های عمودی و به دو نسخهٔ سمت راست کاشی‌های افقی می‌گوییم.

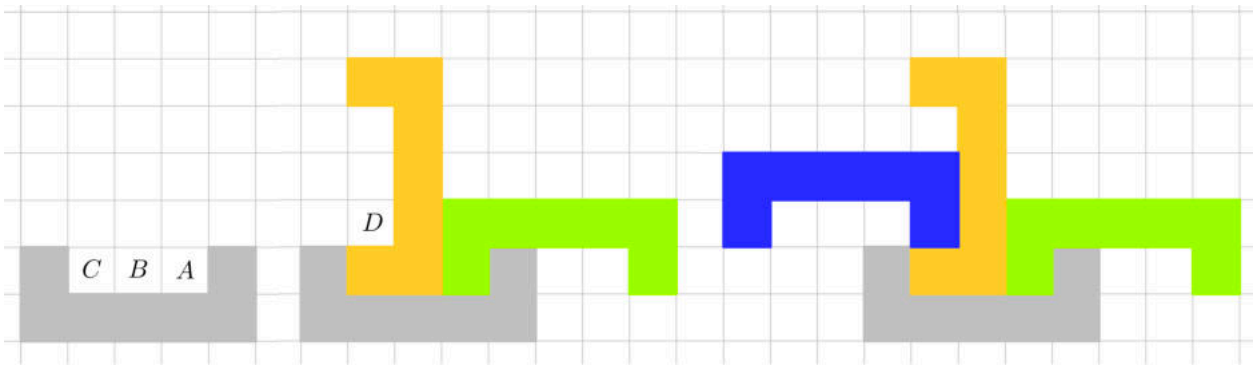
حال یک کاشی افقی از کاشی‌کاری مطابق شکل سمت چپ زیر در نظر بگیرید (با قرینه کردن و دوران فرض کنید چنین نسخه‌ای در کاشی‌کاری وجود دارد). به سادگی می‌توان چک کرد که برای پر کردن سه خانهٔ A، B و C از شکل به یک کاشی افقی و یک کاشی

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

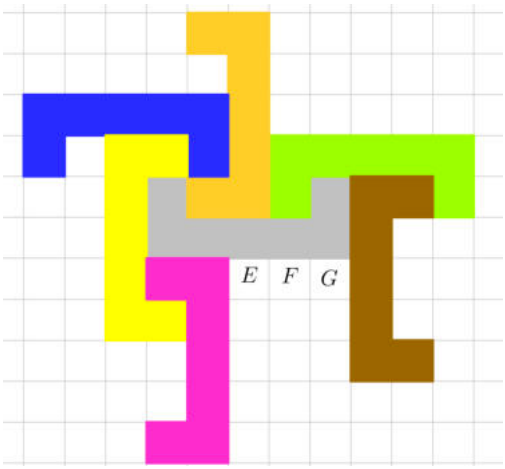
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

عمودی نیاز داریم که مطابق شکل دوم قرار گرفته باشند (یا قرینهٔ شکل نسبت به خط عمودی). با استدلال مشابه در مورد کاشی عمودی جدید می‌فهمیم که برای پوشاندن خانهٔ D باید یک کاشی افقی مطابق شکل قرار دهیم.



به همین ترتیب با قرار دادن کاشی‌های مختلف به شکل زیر می‌رسیم. در این حالت با کمی بررسی دیده می‌شود که نمی‌توان سه خانهٔ E، F و G را به هیچ شکلی پوشاند. پس کاشی‌کاری با این چندضلعی امکان‌پذیر نیست.



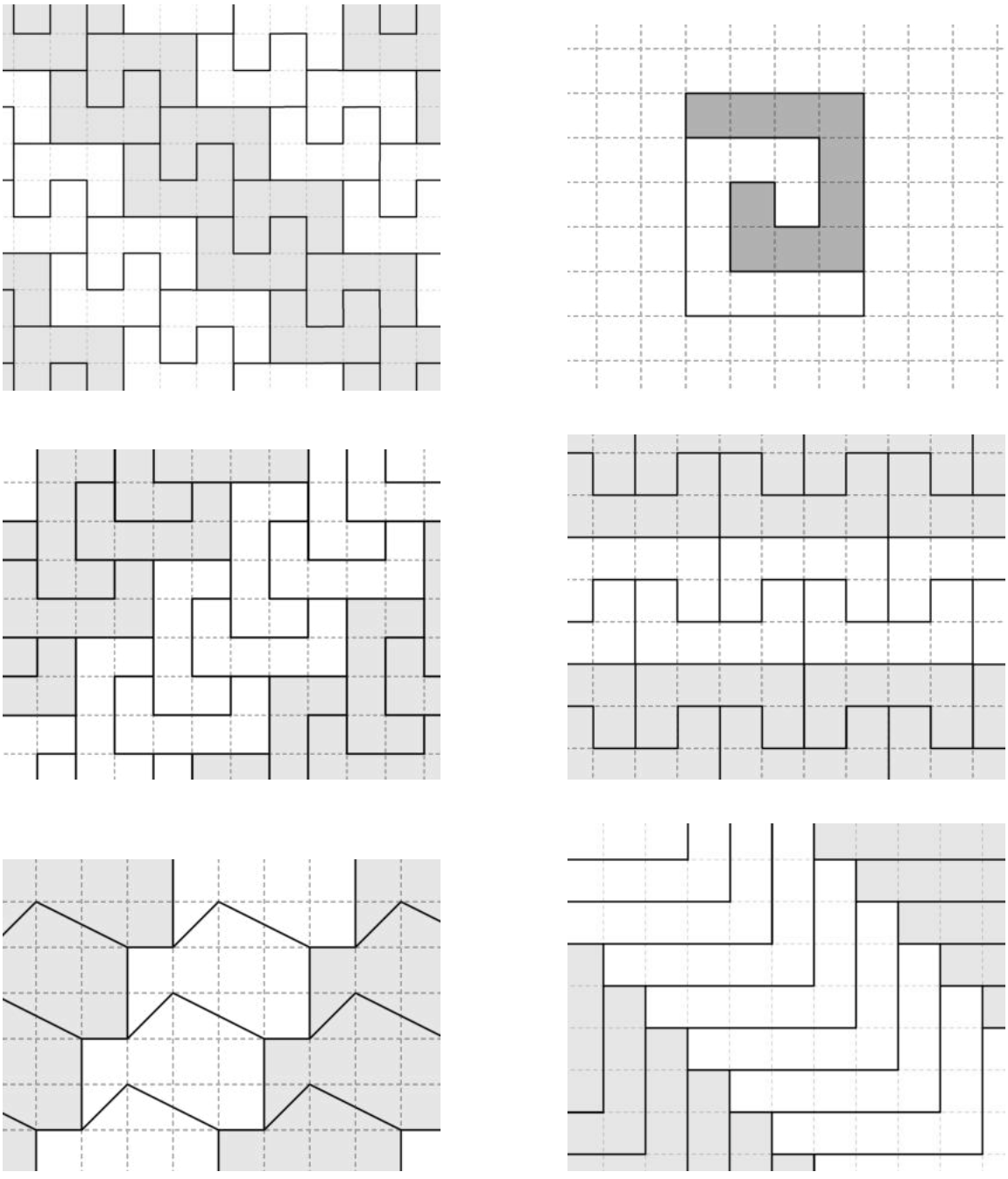
در مورد بقیهٔ کاشی‌ها، کاشی‌کاری امکان‌پذیر است که در ادامه (در مورد بعضی کاشی‌ها به دو شکل متفاوت) می‌بینید. در اکثر موارد روش کار این است که با استفاده از کاشی‌ها، ابتدا شکلی نوار یا پلکان‌مانند را بپوشانیم و سپس با کنار هم قرار دادن نوارها و یا پلکان‌ها

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

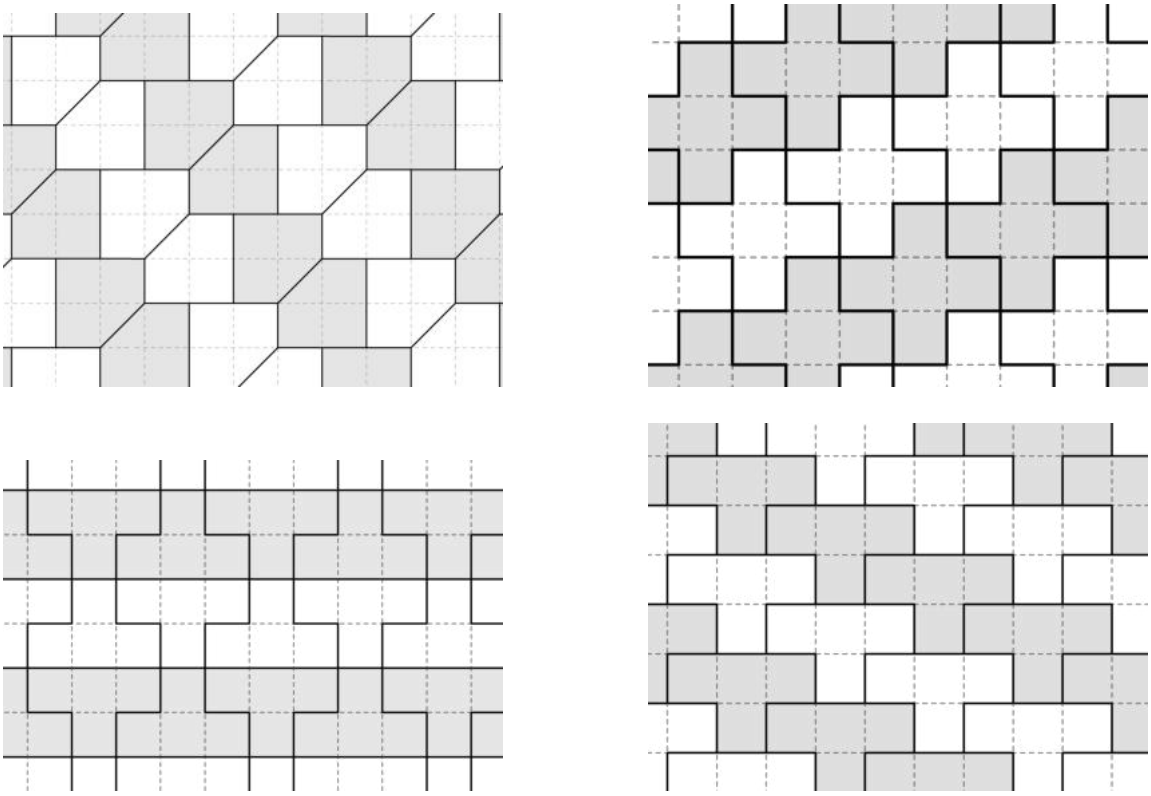
کل صفحه را بپوشانیم. مثلاً در مورد کاشی مربوط به شکل سمت راست زیر با کنار هم قرار دادن دو نسخه یک مستطیل ساخته‌ایم و با کنار هم قرار دادن این مستطیل‌ها صفحه را کاشی‌کاری می‌کنیم.



دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور



۲۵. اعداد $\sqrt[\sqrt{۷}]{۷^{\sqrt{۳}}}$، $\sqrt[\sqrt{۵}]{۵^{\sqrt{۵}}}$ و $\sqrt[\sqrt{۷}]{۳^{\sqrt{۷}}}$ را به ترتیب با A، B و C نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

۱) $A<B<C$ ۲) $B<C<A$ ۳) $C<B<A$ ۴) $A<C<B$ ۵) $C<A<B$

راه‌حل. گزینهٔ ۵ صحیح است.

اول نشان می‌دهیم $\sqrt[\sqrt{۷}]{۷^{\sqrt{۳}}} < \sqrt[\sqrt{۵}]{۵^{\sqrt{۵}}}$. دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، کافی است نشان دهیم $۷^{\sqrt{۳}} < ۵^{\sqrt{۵}}$. اکنون دو طرف را به توان $\sqrt{۵}$ می‌رسانیم. کافی است نشان دهیم $۷^{\sqrt{۱۵}} < ۵^{۵}$، یعنی $۷^{\sqrt{۱۵}} < ۳۱۲۵$. اما داریم $\sqrt{۱۵} < ۴$، پس $۷^{\sqrt{۱۵}} < ۷^{۴} = ۲۴۰۱$. پس حکم ثابت شد.

حال نشان می‌دهیم $\sqrt[\sqrt{۷}]{۳^{\sqrt{۷}}} < \sqrt[\sqrt{۷}]{۷^{\sqrt{۳}}}$. مجدداً دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، کافی است نشان دهیم $۳^{\sqrt{۷}} < ۷^{\sqrt{۳}}$. اکنون دو طرف را به توان $\sqrt{۷}$ می‌رسانیم. کافی است نشان دهیم $۳^{۷} < ۷^{\sqrt{۲۱}}$، یعنی $۷^{\sqrt{۲۱}} < ۲۱۸۷$. اما داریم $\sqrt{۲۱} < ۴$، پس $۷^{\sqrt{۲۱}} < ۷^{۴} = ۲۴۰۱$. پس حکم ثابت شد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۶. چند دنبالهٔ $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ از اعداد مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ داریم به گونه‌ای که برای هر $1 \le i, j \le 15$ که $i + j \le 15$، داشته باشیم: $a_{i+j} > a_i + a_j$ ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۹ ۵) ۱۵

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

طبق فرض مسأله داریم:

$$a_{15} \ge a_{14} + a_1 + 1 \ge a_{13} + 2a_1 + 2 \ge \dots \ge a_2 + 13a_1 + 13 \ge 15a_1 + 14.$$

از طرف دیگر، $a_{15} \le 30$ نتیجه می‌دهد $15a_1 + 14 \le 30$ پس $a_1 = 1$ و برای هر $j > 1$، $a_j \ge a_{j-1} + 2$.

حال داریم، $a_1 + 28 = 29$ و در نتیجه:

$$29 \le a_2 + 26 \le a_3 + 24 \le \dots \le a_{13} + 4 \le a_{14} + 2 \le a_{15} \le 30.$$

حال اگر در میان ۱۴ عدد بالا، k عدد برابر ۲۹ و $14 - k$ عدد برابر ۳۰ شود، داریم:

$$a_i = \begin{cases} 2i - 1 & i \le k + 1 \\ 2i & i > k + 1 \end{cases}$$

اگر k کمتر از ۶ باشد، شرط سؤال نقض می‌شود، چون که:

$$k < 6 \Longrightarrow k + 1 < 7, 14 \Longrightarrow a_7 = 14, a_{14} = 28,$$

و این با شرط $a_{14} > a_7 + a_7$ در تناقض است.

از طرف دیگر، ثابت می‌کنیم $6 \le k \le 14$ شرط $a_{i+j} > a_i + a_j$ را برآورده می‌کند: چون اگر k حداقل ۶ باشد و $i + j$ حداکثر ۱۵، هر دوی i و j نمی‌توانند از $k + 1$ بیشتر باشند، چون در غیر این‌صورت:

$$i, j \ge k + 2 \ge 8 \Longrightarrow i + j \ge 16.$$

پس حداقل یکی از i و j مثلاً i از $k + 1$ بیشتر نیست و در نتیجه $a_i = 2i - 1$. حال با توجه به حالت‌بندی بالا یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$\begin{cases} j \le k + 1 \Longrightarrow a_j = 2j - 1, a_{i+j} \ge 2(i + j) - 1 & \Longrightarrow a_{i+j} > a_i + a_j \\ j > k + 1 \Longrightarrow i + j > k + 1 \Longrightarrow a_j = 2j, a_{i+j} = 2(i + j) & \Longrightarrow a_{i+j} > a_i + a_j \end{cases}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

پس در همهٔ حالات $۶ \le k \le ۱۴$ شرط مسأله برقرار است و تعداد دنباله‌های ممکن برابر با تعداد حالات k، یعنی ۹ حالت است.

۲۷. حاصل‌ضرب اعضای مجموعهٔ A را با $f(A)$ نشان می‌دهیم. اگر $A_۱$، $A_۲$، . . . و $A_{۱۰۲۳}$ تمام زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ باشد، باقی‌ماندهٔ

$$f(A_۱) + f(A_۲) + \cdots + f(A_{۱۰۲۳})$$

بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۱۲

راه‌حل. گزینهٔ ۱ صحیح است.

با بسط کامل عبارت

$$(۱ + ۱)(۱ + ۲)(۱ + ۳)\cdots(۱ + ۱۰)$$

متوجه می‌شویم که هر یک از جملات به صورت حاصل‌ضربی به این صورت است که از هر یک از پرانتزهای به صورت $(۱ + i)$ یکی از دو عدد ۱ و i را انتخاب کنیم و همهٔ اعداد انتخاب‌شده را در هم ضرب کنیم. اما توجه کنید که ۱ در ضرب به صورت خنثی عمل می‌کند و در نتیجه حاصل‌ضرب نهایی برابر با حاصل‌ضرب همهٔ اعداد غیر از ۱ هستند که از پرانتزها انتخاب شده‌اند. پس حاصل‌ضرب نهایی را می‌توانیم این‌طور توصیف کنیم که برای همهٔ زیرمجموعه‌های $\{۱, \ldots, ۱۰\}$، حاصل‌ضرب اعضای آن را محاسبه می‌کنیم و همهٔ این اعداد را با هم جمع می‌زنیم. حال با توجه به اینکه یکی از این مجموعه‌ها تهی است، داریم:

$$۱۱! = (۱ + ۱)(۱ + ۲)\cdots(۱ + ۱۰) = f(A_۱) + \cdots + f(A_{۱۰۲۳}) + ۱.$$

در نتیجه جواب مسأله باقیماندهٔ $۱۱! - ۱$ بر ۱۳ است. حال بنابر قضیهٔ ویلسون (برای هر عدد اول p، باقیماندهٔ $(p-۱)! - ۱$ بر p برابر $p - ۱$ است) داریم:

$$۱۲! \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \Longrightarrow ۱۱! \times ۱۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \Longrightarrow ۱۱! \overset{۱۳}{\equiv} ۱,$$

پس باقیماندهٔ $۱۱! - ۱$ بر ۱۳ برابر با صفر است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۸. دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از اعداد حقیقی برای هر $n \geq ۰$، در رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$x_{n+۱} = x_n^۲ + x_n y_n + y_n^۲, \qquad y_{n+۱} = x_n^۲ - x_n y_n + y_n^۲.$$

اگر $x_۰$ و $y_۰$ اعدادی مثبت باشند و $x_۰ + y_۰ = ۲$ ، در مورد $S = x_۸ + y_۸$ کدام درست است؟

۱) $S < ۲^{۵۰}$ ۲) $۲^{۵۰} \leq S < ۲^{۲۰۰}$ ۳) $۲^{۲۰۰} \leq S < ۲^{۸۰۰}$ ۴) $۲^{۸۰۰} \leq S < ۲^{۲۰۰۰}$ ۵) $۲^{۲۰۰۰} \leq S$

راه‌حل. گزینهٔ ۳ صحیح است.

ابتدا دقت کنید که برای هر $n \geq ۰$،

$$x_n^۲ \pm x_n y_n + y_n^۲ = \frac{۱}{۲}\big((x_n \pm y_n)^۲ + x_n^۲ + y_n^۲\big) \geq ۰$$

پس برای هر $n \geq ۱$، x_n و y_n نامنفی هستند. حال اگر $x_n + y_n$ را با s_n نمایش دهیم، داریم:

$$s_n^۲ = (x_n + y_n)^۲ \leq ۲(x_n^۲ + y_n^۲) = s_{n+۱} \leq ۲(x_n + y_n)^۲ = ۲s_n^۲$$

که نابرابری سمت راست نتیجهٔ نامنفی بودن x_n و y_n و نابرابری سمت چپ نتیجهٔ نابرابری حسابی-هندسی است. حال با توجه به این نابرابری‌ها برای $n = ۰, ۱, \ldots, ۷$ نتیجه می‌گیریم:

$$۲^{۲۵۶} = s_۰^{۲^۸} \leq s_۸ \leq s_۰^{۲^۸} ۲^{۱+۲+\cdots+۲^۷} = ۲^{۵۱۱}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲۹. نقطهٔ D روی خط BC از مثلث ABC با $\angle BAC = ۴۰^\circ$ مفروض است. از B و D به ترتیب بر BC و AB عمود می‌کنیم تا یک‌دیگر را در E قطع کنند. به طور مشابه از C و D به ترتیب عمودهایی بر BC و AC رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در F قطع کنند. پای عمود وارد از D بر EF را K می‌نامیم. می‌دانیم K روی خط AB قرار دارد و منطبق بر B نیست. زاویهٔ $\angle ACK$ چند درجه است؟

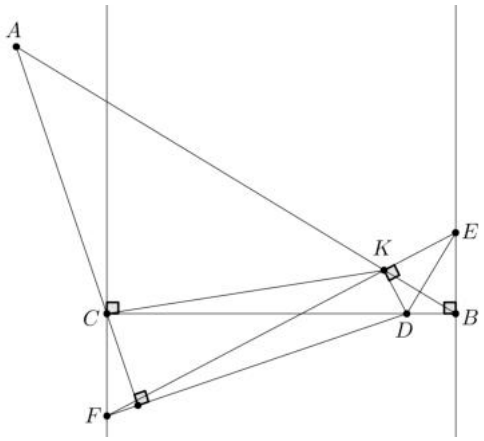
۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰ ۵) ۱۴۰

راه‌حل. گزینهٔ ۴ صحیح است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ما در این‌جا تنها حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطهٔ K روی ضلع AB و نه امتداد آن قرار دارد. جواب در حالت دیگر هم کاملاً مشابه است. در این حالت $\angle ACK = \angle CKB - ۴۰^\circ$.
پس سعی می‌کنیم مقدار زاویهٔ $\angle CKB = \angle CKD + \angle BKD$ را بیابیم.



از آن‌جا که $\angle DKF = \angle DCF = ۹۰^\circ$ و $\angle DKE + \angle DBF = ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$، دو چهارضلعی $CKDF$ و $DKEB$ محاطی هستند. پس:

$$\angle CKD = ۱۸۰^\circ - \angle CFD = ۹۰^\circ + (\angle ACB - ۹۰^\circ) = \angle ACB$$

$$\angle BKD = \angle BED = \angle ABC$$

در تساوی‌های بالا از اینکه $AC \perp DF$ و $AB \perp DE$ استفاده شد. پس در نهایت داریم

$$\angle CKB = \angle CKD + \angle BKD = \angle ACB + \angle ABC$$

$$= ۱۸۰^\circ - \angle BAC = ۱۴۰^\circ \Rightarrow ACK = ۱۰۰^\circ$$

اگر نقطهٔ K در امتداد پاره‌خط AB می‌بود، زاویهٔ $\angle ACK$ برابر $\angle BAC = ۴۰^\circ$ به دست می‌آمد و در این حالت چون $\angle ACK = ۱۸۰^\circ - \angle BAC - \angle CKB$ جواب مجدداً برابر ۱۰۰° بود.

توضیح. اگر فرآیند مسئله را با شروع از نقطه‌های مختلف D روی BC انجام دهیم، مکان هندسی نقطهٔ K قرینهٔ دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به BC خواهد بود. اثبات این مطلب کاملاً شبیه بالاست. در واقع دقت در استدلال فوق نشان می‌دهد که در پیدا کردن ارتباط $\angle CKB$ و $\angle BAC$ از این که K روی AB قرار دارد استفاده نکرده‌ایم.

۳۰. یک فرمول سه‌متغیره با متغیرهای x, y, z را «جالب» می‌گوییم، هرگاه در آن فقط از ترکیب توابع مینیمم و ماکسیمم استفاده شده باشد. مثل سه فرمول زیر:

$$\min(\max(x,z),y),\ \min(x,x),\ \max(x,\min(x,y)).$$

دو فرمول را متفاوت می‌گوییم، اگر یک مقداردهی برای متغیرهای x, y, z وجود داشته باشد که دو فرمول مقادیر مختلفی را برای آن‌ها محاسبه کنند. مثلاً دو فرمول $\min(x,x)$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

و $\max(x, \min(x, y))$ متفاوت نیستند. چند فرمول متفاوت داریم؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۸ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶ ۵) بی‌نهایت

راه‌حل. گزینهٔ ۲ صحیح است.

نکتهٔ اساسی راه‌حل، این است که برای هر سه عدد دلخواه a, b, c،

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(b, c)).$$

(این اتحاد را می‌توانید به راحتی با در نظر گرفتن همهٔ ترتیب‌های ممکن a, b, c ثابت کنید.) این اتحاد یادآور خاصیت پخشی ضرب روی جمع است:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

به عبارت دیگر، دو عمل $\min$ و $\max$ در تمامی خواص جابجایی (مثل $\min(a, b) = \min(b, a)$) و پخشی نسبت به هم، که برای دو عمل ضرب و جمع برقرار است، صدق می‌کنند.

این دو خاصیت جمع و ضرب به ما کمک می‌کردند تا هر فرمول پیچیده بر حسب جمع و ضرب تعدادی متغیر را، بدون اینکه مقدارش تغییر کند، «بسط» دهیم: یعنی به صورت حاصل‌جمعی از تعدادی حاصل‌ضرب بنویسیم. پس با توجه به وجود خواص مشابه برای توابع مینیمم و ماکزیمم، هر فرمولی (مانند $F(x, y, z)$) را که با استفاده از این‌دو تابع از سه متغیر x, y, z ساخته شده باشد، می‌توان ساده‌سازی کرد تا نهایتاً به صورت زیر درآید:

$$F(x, y, z) = \max(\min(-, -, \ldots, -), \ldots, \min(-, -, \ldots, -)),$$

که در هر یک از جاهای خالی، یکی از متغیرها قرار دارد.

حال به دو نکتهٔ اساسی دیگر در مورد توابع مینیمم و ماکزیمم توجه کنید:

اول اینکه، اگر در جاهای خالی $\min(-, -, \ldots, -)$ یک متغیر بیش از یک بار آمده باشد، می‌توان بدون اینکه فرمول تغییری کند، تکرارهای آن را حذف کرد. بنابراین فقط مجموعهٔ متغیرهایی که در داخل مینیمم ظاهر می‌شوند، مهم است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$F(x, y, z) = \max(\min(A_1), \ldots, \min(A_k)),$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه‌حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

که هر یک از A_iها زیرمجموعه‌ای از $\{x, y, z\}$ است.

نکتهٔ دوم این است که اگر در فرمول بالا A_i شامل A_j باشد ($i \neq j$)، به وضوح مینیمم اعضای A_i کمتر یا مساوی مینیمم اعضای A_j است و در نتیجه مقدار آن در محاسبهٔ ماکزیمم بی‌تأثیر است. پس می‌توان $\min(A_i)$ را از فرمول حذف کرد. اگر این کار را برای هر دو مجموعهٔ شامل یکدیگر در فرمول انجام دهیم، نهایتاً به جایی می‌رسیم که هیچ کدام از مجموعه‌ها شامل یکدیگر نیستند.

پس اگر عبارت نهایی به صورت زیر باشد:

$$F(x, y, z) = \max(\min(B_1), \ldots, \min(B_n)),$$

هر یک از B_i ها زیرمجموعه‌های ناتهی از $\{x, y, z\}$ هستند و هیچ کدام شامل دیگری نیست. البته در این نمایش ترتیب B_iها اهمیتی ندارد، اما می‌توان نشان داد که اگر دو فرمول به صورت بالا (و دارای شرایط ذکرشده برای B_i ها) متحد باشند، مجموعه‌های B_i در آن‌دو یکسان است و در نتیجه هر فرمول نمایش یکتایی به صورت بالا (در حد جایگشتی روی B_i ها) دارد. (این نکته را می‌توانید با مقدارگذاری‌های متغیرهای x, y, z از مجموعهٔ $\{0, 1\}$ نشان دهید.)

حال برای یک خانواده مانند $\{B_1, \ldots, B_n\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی $\{x, y, z\}$ که هیچ کدام شامل دیگری نباشد، به راحتی می‌توان دید که $n \leq 3$. برای شمارش همهٔ این خانواده‌ها هم روی n حالت بندی کنید:

- $n = 1$، در این‌صورت B_1 یک زیرمجموعهٔ ناتهی از یک مجموعهٔ ۳ عضوی است که ۷ حالت دارد.
- $n = 2$، در این‌صورت یا B_1 و B_2 هر دو تک‌عضوی هستند (۳ حالت) یا هر دو، دوعضوی (۳ حالت) و یا یکی تک‌عضوی و دیگری مجموعهٔ مکملش (۳ حالت).
- $n = 3$، در این‌صورت یا هر سهٔ B_i ها تک‌عضوی هستند، (یک حالت) و یا هر سه دوعضوی (یک حالت).

پس تعداد کل فرمول‌های جالب برابر با تعداد خانواده‌های با خاصیت بالاست که بنابر شمارش بالا برابر $1 + 1 + 3 \times 3 + 7$ مساوی ۱۸ حالت است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

☺

۱. در آزادراه زنجان-تبریز از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ صبح ۲۳۷۰ خودرو از عوارضی عبور کرده‌اند که همهٔ آن‌ها تک‌سرنشین یا دو سرنشین بوده‌اند. این خودروها در مجموع ۱۸۳۲۰ لیتر بنزین در مسیر مصرف کرده‌اند. می‌دانیم هر خودروی تک‌سرنشین، ۷ لیتر و هر خودروی دوسرنشین، ۸ لیتر بنزین در این مسیر مصرف کرده است. تعداد کل خودروهای تک‌سرنشین چند تاست؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۱۰۵۰ ۵) ۱۱۸۵

۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$، نقاط X و Y روی پاره‌خط AC طوری قرار گرفته‌اند که X بین A و Y قرار دارد و به علاوه $BY = AX = BX$. اگر $\angle YBC = ۱۰^\circ$، زاویهٔ $\angle BAC$ چند درجه است؟

۱) $\frac{۹۵}{۳}$ ۲) ۳۸ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱ ۵) $\frac{۱۸۵}{۴}$

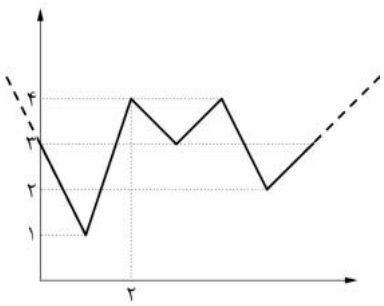
۳. x و y دو عدد حقیقی هستند که $۲^{x+۱} = ۱۸$ و $۳^{-y} = ۲$. مقدار xy چقدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

۴. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۳۹۳ مثل a وجود دارد که $\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{a \text{ بار}}$ مربع کامل باشد؟

۱) ۳۷ ۲) ۶۹۶ ۳) ۷۱۵ ۴) ۷۳۳ ۵) ۷۳۴

۵. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در پایین می‌بینید. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی صعودی است که برای هر عدد حقیقی x، $g(x) \le f(x)$. حداکثر مقدار $g(۲)$ کدام است؟



۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳
۵) ۴

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۶. در شهر نیستان قیمت نی‌ها با افزایش طول نی زیاد می‌شود. تاجری در شکرستان قصد وارد کردن نی از نیستان را دارد. در شکرستان لیوان‌ها به شکل مخروط ناقص با ارتفاع ۱۶ سانتی‌متر، قطر دهانهٔ ۱۰ سانتی‌متر و قطر انتهای ۶ سانتی‌متر هستند. تاجر قصد دارد کم‌ترین پول را خرج کند ولی با توجه به قوانین شکرستان به هیچ وجه نی نباید کاملاً داخل لیوان قرار گیرد. اندازهٔ نی‌هایی که او می‌خرد چقدر است؟ (از قطر نی صرف نظر می‌کنیم، یعنی نی را یک پاره‌خط فرض می‌کنیم.)

۱) $2\sqrt{73}$ ۲) $2\sqrt{89}$ ۳) $8\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{87}$ ۵) $10\sqrt{3}$

۷. مجموعهٔ $\{1,2,\dots,10\}$ چند زیرمجموعهٔ ناتهی دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶ ۵) ۱۰۲۴

۸. کشور شکرستان از سه استان نمکستان، فلفلستان و سماقستان تشکیل شده‌است که به ترتیب ۱۰، n و $2n$ شهر دارند. می‌دانیم تعداد شهروندان در شهرهای مختلف این کشور یک‌سان است و جمعیت کل کشور n^2+n+1 نفر است. عدد n در کدام یک از محدوده‌های زیر قرار دارد؟

۱) ۱ تا ۱۰ ۲) ۱۱ تا ۲۰ ۳) ۲۱ تا ۳۰ ۴) ۳۱ تا ۴۰ ۵) ۴۱ تا ۵۰

۹. $ABCD$ ذوزنقه‌ای است که در آن $AB\|CD$ و $CD=3AB$. نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع BC و CD هستند و مساحت ذوزنقه ۳۲ است. مساحت مثلث AMN چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵ ۵) ۱۶

۱۰. برای چند مقدار صحیح n دو چندجمله‌ای x^3+nx-1 و x^3+x-n^2 ریشهٔ حقیقی مشترک دارند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌نهایت

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

☺

۱۱. حداکثر چند مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد که طول اضلاع آن‌ها از بین اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ و ...، $۲^{۱۰}$ باشند؟ (طول اضلاع می‌توانند با هم برابر باشند.)

۱) ۵۵ ۲) ۶۶ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰ ۵) ۱۶۵

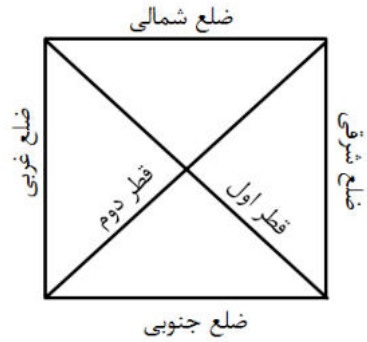
۱۲. برای عدد طبیعی n چندجمله‌ای $P_n(x)$ را برابر $(x+n)^۲$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم $P_{۱۳۹۳}(P_{۱۳۹۲}(\dots(P_۱(x))\dots))$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $۲^{۱۳۹۳}$ است. ضریب $x^{۲^{۱۳۹۳}-۱}$ در این چندجمله‌ای برابر کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲^{۱۳۹۲}$ ۳) $۲^{۱۳۹۲}+۱$ ۴) $۲^{۱۳۹۳}-۱$ ۵) $۲^{۱۳۹۳}$

۱۳. فرض کنید $A=\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ و $B=\{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$. تعداد توابع $f:A\to B$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی m و n که $۲\le m,n\le ۱۰$ و $mn\le ۱۰$، رابطهٔ $f(mn)=mf(n)$ برقرار باشد.

۱) $۱۰^۲$ ۲) $۱۰^۳$ ۳) $۱۰^۴$ ۴) $۱۰^۵$ ۵) ۲×۱۰^۵

۱۴. پادشاه شکرستان که قصری به شکل مربع دارد، به تازگی کتیبه‌ای به خط نمکی مربوط به یکی از اجدادش پیدا کرده که ریاضی‌دان بوده است. پس از ترجمهٔ کتیبه توسط زبان‌شناسان مشخص شد که در نقطه‌های مختلفی از شهر، گنج‌هایی وجود دارد. ترجمهٔ کتیبه را در زیر می‌بینید.



گنج‌ها در نقطه‌هایی از شهر پنهان گشته‌اند که اگر هر کدام از آن‌ها را به ترتیب نسبت به ضلع شمالی، ضلع جنوبی، ضلع شرقی، ضلع غربی، قطر اول و در نهایت قطر دوم قصر قرینه کنیم به جای اول بازگردد.

چند گنج در شهر پنهان شده است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۸

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. مهندس شش‌دیواری قصد دارد نقشه‌ی خانه‌ای با شش دیوار را طراحی کند. او می‌خواهد سه تا از دیوارها در امتداد شمالی-جنوبی و با طول‌های ۲، ۴ و ۶ متر باشند و سه تا از دیوارها نیز در امتداد شرقی-غربی و با طول‌های ۴، ۶ و ۱۰ متر باشند. او چند نقشه‌ی مختلف با این ویژگی‌ها می‌تواند بکشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰ ۵) ۲۴

۱۶. می‌دانیم عددی طبیعی در مبنای دو، ۳۰ رقمی است. در مورد تعداد ارقام این عدد در مبنای سه چه می‌توان گفت؟

۱) حتماً ۱۸ رقمی است.
۲) حتماً ۱۹ رقمی است.
۳) حتماً ۲۰ رقمی است.
۴) برای بعضی اعداد ۱۸ رقمی و برای بعضی ۱۹ رقمی است.
۵) برای بعضی اعداد ۱۹ رقمی و برای بعضی ۲۰ رقمی است.

۱۷. عدد صحیح n را «نه چندان بزرگ» می‌گوییم هرگاه برای هر دو عدد مثبت x و y که $(x+1)(y+1) = 2$، داشته باشیم $xy + \frac{1}{xy} \geq n$. بزرگ‌ترین عدد نه چندان بزرگ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

۱۸. رئوس یک پنج‌ضلعی محدب را به ترتیب ساعت‌گرد A, B, C, D, E می‌نامیم. می‌دانیم $\angle BAE = 2\angle DAC = 93^\circ$ و $\angle BCA = \angle CDA$ و $\angle EDA = \angle DCA$. اگر $AD = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2$ آن‌گاه مقدار $\frac{AE}{AB}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{3}\sin 93^\circ$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $3\sin 93^\circ$ ۵) ۳

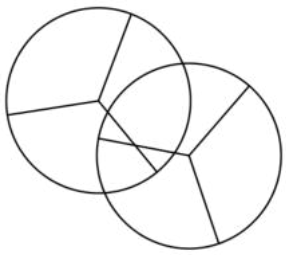
۱۹. x و y دو عدد حقیقی هستند که $\sin(x) + \cos(y) = 1$. بیش‌ترین مقدار $\sin(y) + \cos(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۵) ۲

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. دو صفحهٔ پلاستیکی شفاف و رنگی به شکل دو دایرهٔ برابر داریم که هر کدام از آن‌ها توسط سه شعاع با زاویه‌های ۱۲۰°، به سه قسمت برابر تقسیم شده‌اند. قسمت‌ها دارای رنگ‌های متفاوت هستند. هرگاه دو رنگ روی هم قرار گیرند، رنگی جدید ایجاد می‌شود و رنگ‌های ترکیبی ایجاد شده نیز با یک‌دیگر متفاوت‌اند. مثلاً در شکل رو به رو ۱۰ رنگ مختلف به وجود آمده است.
حداکثر تعداد رنگ‌های مختلفی که در یک وضعیت قرار گرفتن صفحه‌ها می‌تواند به وجود بیاید چند تاست؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴ ۵) ۱۵

۲۱. یک زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی را «منظم» گوییم اگر میانگین اعضای آن عددی طبیعی باشد و آن را «فوق منظم» گوییم اگر همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی آن منظم باشند. تعداد زیرمجموعه‌های فوق منظم پنج عضوی از مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,67\}$ چند است؟

۱) ۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۹ ۵) ۴۷

۲۲. شش نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌خط نیستند. در بین زوایایی که این نقاط تشکیل می‌دهند، حداکثر چند زاویه در بازهٔ $(90, 180)$ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰ ۵) ۲۴

۲۳. نقطهٔ P روی کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل A نیست) قرار دارد. می‌دانیم $AB = 2$، $AC = 3$ و $BC = 4$. نقاط M و N روی خط BC قرار دارند به طوری که B بین C و M است و C بین N و B است. می‌دانیم MA و PN بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس هستند و $MA = PN$. AP خط BC را در نقطهٔ T قطع می‌کند. اندازهٔ PT چقدر است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{5\sqrt{13}}{7}$ ۴) $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ ۵) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. عدد طبیعی M را خوب می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی نه لزوماً متمایز $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ یافت شوند به طوری که $M = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ و خواص زیر برقرار باشد.

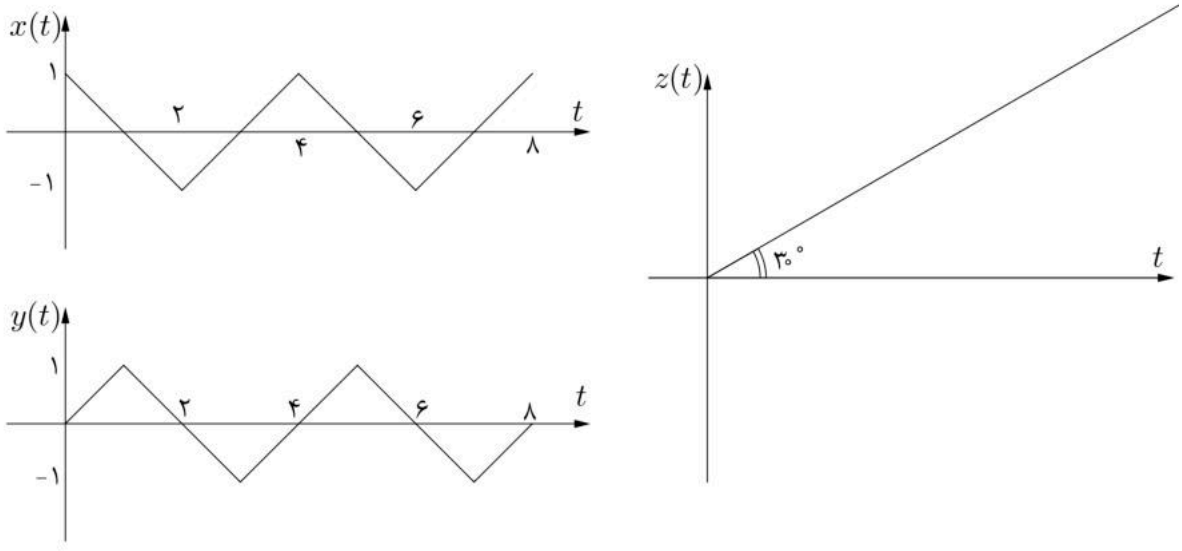
(آ) M بر توان سوم هیچ عدد طبیعی بزرگ‌تر از یکی بخش‌پذیر نیست.

(ب) اگر $1 \leq i \leq n$ آن‌گاه $a_{i-1}a_{i+1}$ بر a_i بخش‌پذیر است. $(a_0 = a_n$ و $a_{n+1} = a_1)$

چند عدد خوب کوچک‌تر از ۲۰۱۵ داریم؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۹ ۴) ۴۴ ۵) ۷۲

۲۵. متحرکی در فضا به گونه‌ای حرکت می‌کند که در لحظهٔ t در نقطهٔ $(x(t), y(t), z(t))$ قرار دارد. اگر نمودارهای $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ بر حسب t به شکل‌های زیر باشند، مسافتی که این متحرک از $t = 0$ تا $t = 8$ طی می‌کند برابر کدام گزینه است؟



۱) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ۲) $4\sqrt{\frac{7}{3}}$ ۳) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۴) $8\sqrt{\frac{7}{3}}$ ۵) $16\sqrt{\frac{2}{3}}$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۶. «پشیزها» موجوداتی میکروسکوپی هستند که اندازه‌های مختلفی دارند. هرگاه دو پشیز با اندازه‌های x و y در مجاورت هم قرار بگیرند، می‌توانند با صرف انرژی‌ای برابر $|x-y|$ به هم بچسبند و یک پشیز با اندازه‌ی $x+y$ ایجاد کنند.
اگر ۱۰۲۵ پشیز با اندازه‌ی ۱ روی یک خط ردیف شده باشند، کم‌ترین انرژی‌ای که باید در مجموع صرف کنند تا تبدیل به یک پشیز با اندازه‌ی ۱۰۲۵ شوند، چه‌قدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۳۱ ۵) ۳۲

۲۷. $A_۱A_۲\cdots A_۹$ یک ۹ ضلعی منتظم است و نقطه‌های K، M و N درون آن به گونه‌ای هستند که $A_۱A_۲A_۴K$ متوازی‌الاضلاع و $A_۶A_۷M$ و $A_۸A_۹N$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع هستند. زاویهٔ $\angle MKN$ چه‌قدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵ ۵) ۶۰

۲۸. فرض کنید A مجموعهٔ نقاط با مختصات صحیح در صفحه باشد و تابع $f:A\to\{۰,۱,۲\}$ دارای این خاصیت است که برای هر x و y صحیح،

$$f(x,y)-f(x+۱,y)-f(x-۱,y)-f(x,y+۱)-f(x,y-۱)$$

بر ۳ بخش‌پذیر است. کدام گزاره صحیح است؟

۱) f باید تابعی ثابت باشد.
۲) مجموعه‌ای متناهی وجود ندارد که با دانستن f در آن مجموعه، تابع f به صورت یک‌تا تعیین شود.
۳) اگر مجموعهٔ نقاطی که f در آن‌ها مقدار ۱ را اتخاذ می‌کند، مشخص باشد (فرض کنید این مجموعه ناتهی است) تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.
۴) اگر مقدار f را روی نقاطی که هر دو مؤلفهٔ آن‌ها زوج است بدانیم، تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.
۵) گزینه‌های ۲ و ۳

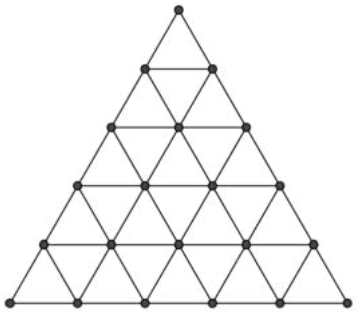
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۹. مثلثی که طول هر سه ضلعش عددی در بازهٔ $[1,2]$، و اندازهٔ همهٔ زاویه‌هایش در بازهٔ $[45,90]$ درجه است، را «معتدل» می‌گوییم. اختلاف مساحت دو مثلث معتدل حداکثر چه‌قدر است؟

۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ۲) $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{12-3\sqrt{2}}{8}$ ۵) هیچ‌کدام

۳۰. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۵ را به شکل روبه‌رو به مثلث‌هایی به ضلع یک تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از رئوس این شبکه‌بندی، برداری دل‌خواه به طول یک و موازی با یکی از اضلاع مثلث نسبت می‌دهیم. مجموع همه‌ی این بردارها چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۱۲۶ ۲) ۷۲۶ ۳) ۲۷۷۴ ۴) ۱۳۸۷ ۵) ۳۶۳

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۳۰ بهمن ۱۳۹۳ و با شرکت ۱۷۶۲۷ نفر از دانش‌آموزان پایه‌های اول، دوم و سوم دبیرستان در سراسر کشور برگزار گردید. دفترچه‌ی پیش رو مجموعه‌ی سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که توسط وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

زمان: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤالات: ۳۰

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

---

۱. در آزادراه زنجان-تبریز از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ صبح ۲۳۷۰ خودرو از عوارضی عبور کرده‌اند که همهٔ آن‌ها تک‌سرنشین یا دو سرنشین بوده‌اند. این خودروها در مجموع ۱۸۳۲۰ لیتر بنزین در مسیر مصرف کرده‌اند. می‌دانیم هر خودروی تک‌سرنشین، ۷ لیتر و هر خودروی دوسرنشین، ۸ لیتر بنزین در این مسیر مصرف کرده است. تعداد کل خودروهای تک‌سرنشین چند تاست؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۱۰۵۰ ۵) ۱۱۸۵

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

فرض کنید تعداد خودروهای تک سرنشین و دو سرنشین را به ترتیب با x و y نشان دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x+y = ۲۳۷۰ \\ ۷x+۸y = ۱۸۳۲۰ \end{cases} \Rightarrow ۷x+۸(۲۳۷۰-x) = ۱۸۳۲۰ \Rightarrow ۱۸۹۶۰-x = ۱۳۳۲۰ \Rightarrow x = ۶۴۰$$

۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$، نقاط X و Y روی پاره‌خط AC طوری قرار گرفته‌اند که X بین A و Y قرار دارد و به علاوه $BY = AX = BX$. اگر $\angle YBC = ۱۰^\circ$، زاویهٔ $\angle BAC$ چند درجه است؟

۱) $\frac{۹۵}{۳}$ ۲) ۳۸ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱ ۵) $\frac{۱۸۵}{۴}$

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

همانند شکل زیر فرض کنید $\angle BAX = \alpha$. می‌دانیم $AX = BX$ پس زاویه‌ی $\angle ABX = \alpha$ می شود از طرفی زاویه‌ی BXC زاویه‌ی خارجی مثلث ABX است پس $\angle BXC = ۲\alpha$

طبق فرض مسئله می‌دانیم $BX = BY$ پس زاویه‌ی $\angle BYA = ۲\alpha$ است.

در مثلث ABC می‌دانیم:

$$\angle BAX = \alpha, AB = AC \Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$$

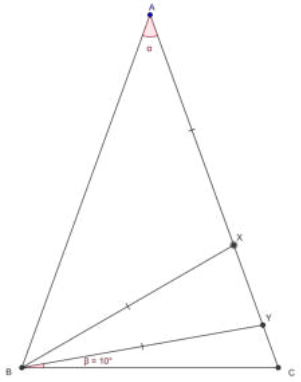
در مثلث BYC زاویه‌ی BYA زاویه‌ی خارجی است پس خواهیم داشت:

$$\angle YBC + \angle YCB = \angle BYA \Rightarrow ۱۰^\circ = \angle YBC = ۲\alpha - (۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۱

۳. x و y دو عدد حقیقی هستند که $۲^{x+۱} = ۱۸$ و $۳^{-y} = ۲$. مقدار xy چقدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

راه حل:

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

چون $۲^{x+۱} = ۱۸$، نتیجه می‌گیریم که $۲^{x} = ۹$، پس

$$۲^{x} = ۹ \Rightarrow ۲^{xy} = ۹^{y} = (۳^{y})^{۲} = \frac{۱}{۴} = ۲^{-۲} \Rightarrow xy = -۲$$

می‌توان با لگاریتم گرفتن از دو رابطه‌ی بالا راه‌حل مشابهی برای مسئله ارائه کرد.

۴. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۳۹۳ مثل a وجود دارد که $\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{a\text{ بار}}$ مربع کامل باشد؟

۱) ۳۷ ۲) ۶۹۶ ۳) ۷۱۵ ۴) ۷۳۳ ۵) ۷۳۴

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت (۱): a عددی زوج است. در این حالت، عدد مذکور حتماً مربع کامل است زیرا برابر است با a به توان عددی زوج.
تعداد اعداد زوج کوچک‌تر از ۱۳۹۳ برابر است با ۶۹۶.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

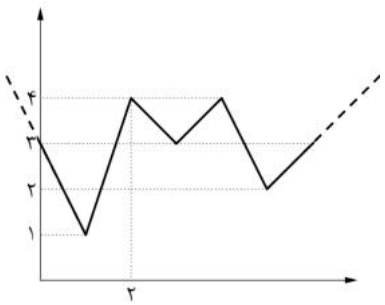
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

حالت (۲): a عددی فرد است. در این حالت، عدد مذکور برابر است با a به توان عددی فرد، پس تنها در صورتی مربع کامل است که خودِ a مربع کامل باشد. تعداد اعداد فرد مربع کامل کوچک‌تر از ۱۳۹۳ برابر است با ۱۹.

بنابراین تعداد a های با خاصیت مورد نظر، برابر است با ۱۹ + ۶۹۶ = ۷۱۵.

۵. نمودار تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در پایین می‌بینید. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی صعودی است که برای هر عدد حقیقی x، $g(x) \le f(x)$. حداکثر مقدار $g(۲)$ کدام است؟



۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۵) ۴

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

با توجه به صعودی بودن تابع g، برای هر $x \ge ۲$، باید $g(x) \ge g(۲)$ و بنابراین $f(x) \ge g(۲)$. اما دقت کنید که کم‌ترین مقدار f برای xهای بیش‌تر یا مساوی مربوط به $x = ۵$ است که مقدار $f(x)$ برابر ۲ می‌باشد. این موضوع نتیجه می‌دهد که حداکثر مقدار $g(۲)$ برابر ۲ است. ضمناً به وضوح تابع صعودی زیر هم همه‌ی شرط‌های مسئله را برآورده می‌کند:

$$g(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۲ \\ ۲ & ۲ \le x \le ۵ \\ f(x) & ۵ \le x \end{cases}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

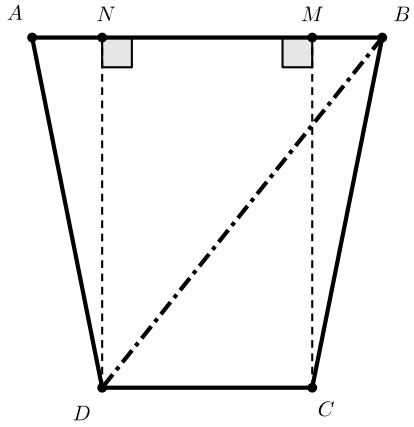


۶. در شهر نیستان قیمت نی‌ها با افزایش طول نی زیاد می‌شود. تاجری در شکرستان قصد وارد کردن نی از نیستان را دارد. در شکرستان لیوان‌ها به شکل مخروط ناقص با ارتفاع ۱۶ سانتی‌متر، قطر دهانهٔ ۱۰ سانتی‌متر و قطر انتهای ۶ سانتی‌متر هستند. تاجر قصد دارد کم‌ترین پول را خرج کند ولی با توجه به قوانین شکرستان به هیچ وجه نی نباید کاملاً داخل لیوان قرار گیرد. اندازهٔ نی‌هایی که او می‌خرد چقدر است؟ (از قطر نی صرف نظر می‌کنیم، یعنی نی را یک پاره‌خط فرض می‌کنیم.)

۱) $۲\sqrt{۷۳}$ ۲) $۲\sqrt{۸۹}$ ۳) $۸\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۸۷}$ ۵) $۱۰\sqrt{۳}$

راه حل:

گزینهٔ (۳) صحیح است.



در شکل بالا مقطعی از لیوان رسم شده است. در این شکل AB دهانه و CD انتهای لیوان است. نی‌هایی که تاجر می‌خرد از طرفی باید کم‌ترین طول را داشته باشند، و از طرف دیگر نباید به طور کامل در لیوان قرار بگیرند. در نتیجه این نی‌ها باید مانند پاره‌خط BD روی لبهٔ لیوان قرار بگیرند.

$$AN + MB = AB - MN = AB - CD = ۱۰ - ۶ = ۴$$

پس طبق تقارن شکل حول محور عمودی داریم $AN = MB = ۲$. برای محاسبهٔ BD از قضیهٔ فیثاغورس استفاده

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

می‌کنیم.

$$BD^۲ = BN^۲ + ND^۲ = (۲ + ۶)^۲ + ۱۶^۲ = ۸\sqrt{۵}$$

۷. مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ چند زیرمجموعهٔ ناتهی دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶ ۵) ۱۰۲۴

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

برای انتخاب یک زیرمجموعه از $\{۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$ که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ است، ابتدا کوچکترین عضو را انتخاب می‌کنیم. این کار ۴ حالت دارد چرا که کوچکترین عضو می‌تواند یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، یا ۴ باشد. فرض کنید کوچکترین عضو را m بنامیم. پس بزگترین عضو برابر $m + ۶$ خواهد بود. برای انتخاب دیگر اعضای زیرمجموعه، ۳۲ حالت داریم چرا که دیگر اعضا، زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\{m + ۱, m + ۲, m + ۳, m + ۴, m + ۵\}$ هستند. پس در کل ۱۲۸ = ۳۲ × ۴ حالت برای انتخاب این‌گونه مجموعه‌ها داریم.

۸. کشور شکرستان از سه استان نمکستان، فلفلستان و سماقستان تشکیل شده‌است که به ترتیب ۱۰، n و $۲n$ شهر دارند. می‌دانیم تعداد شهروندان در شهرهای مختلف این کشور یک‌سان است و جمعیت کل کشور $n^۲ + n + ۱$ نفر است. عدد n در کدام یک از محدوده‌های زیر قرار دارد؟

۱) ۱ تا ۱۰ ۲) ۱۱ تا ۲۰ ۳) ۲۱ تا ۳۰ ۴) ۳۱ تا ۴۰ ۵) ۴۱ تا ۵۰

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

فرض کنید جمعیت هر شهر k نفر باشد. پس باید

$$n^۲ + n + ۱ = (۳n + ۱۰)k$$

بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} ۳n + ۱۰ | n^۲ + n + ۱ \Rightarrow ۳n + ۱۰ | ۳n^۲ + ۳n + ۳ \\ \qquad\qquad\qquad\quad ۳n + ۱۰ | ۳n^۲ + ۱۰n \end{array}\right\} \Rightarrow ۳n + ۱۰ | ۷n - ۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow ۳n + ۱۰ | ۲۱n - ۹ \\ ۳n + ۱۰ | ۲۱n + ۷۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳n + ۱۰ | ۷۹$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

و چون ۷۹ عددی اول است و $۳n + ۱۰ > ۱$ پس باید $۳n + ۱۰ = ۷۹$ و در نتیجه $n = ۲۳$.

۹. $ABCD$ ذوزنقه‌ای است که در آن $AB \| CD$ و $CD = ۳AB$. نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع BC و CD هستند و مساحت ذوزنقه ۳۲ است. مساحت مثلث AMN چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵ ۵) ۱۶

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر مساحت مثلث ABC را برابر $S_۱$ و مساحت مثلث ACD را برابر $S_۲$ قرار دهیم و طبق فرض مسئله می‌دانیم $S_۱ + S_۲ = ۳۲$ است.

مساحت مثلث ABM نصف مساحت مثلث ABC است زیرا دارای ارتفاع یکسان هستند ولی قائده‌ی مثلث ABM نصف قائده‌ی ABC است پس مساحتش برابر $\frac{S_۱}{۲}$ است به طور مشابه مساحت مثلث AND نصف ACD است پس برابر $\frac{S_۲}{۲}$ است.

جمع مساحت‌های مثلث‌های ABD و BCD برابر کل ذوزنقه و برابر ۳۲ است ولی مساحت مثلث BCD سه برابر مساحت مثلث ABD است زیرا دارای ارتفاع یکسان هستند ولی قائده‌ی مثلث BCD که ضلع CD باشد سه برابر قائده‌ی مثلث ABD یعنی AB است. پس مساحت مثلث BCD برابر ۲۴ است. در مثلث BCD داریم:

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD} = \frac{۱}{۲}$$

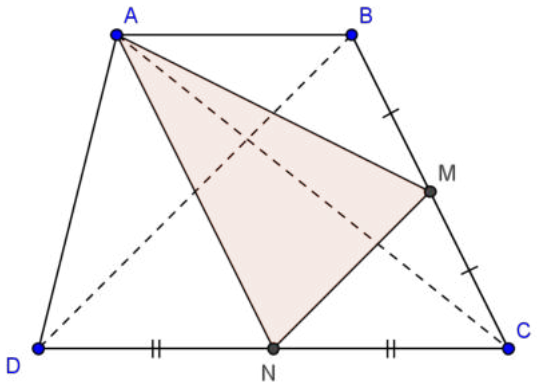
پس با استفاده از قضیه تالس مثلث CMN با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ با مثلث CBD متشابه است پس مساحت مثلث CMD ربع مساحت مثلث CBD است که برابر ۶ می‌شود.

جمع مساحت مثلث‌های ABM ، AND و CMN برابر با $۲۲ = ۶ + ۱۶ = ۶ + \frac{S_۱ + S_۲}{۲}$ است پس مساحت باقی مانده از مساحت کل همان مساحت مثلث AMN است که برابر $۱۰ = ۲۲ - ۳۲$ می‌شود.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۲

۱۰. برای چند مقدار صحیح n دو چندجمله‌ای $x^۳ + nx - ۱$ و $x^۳ + x - n^۲$ ریشهٔ حقیقی مشترک دارند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌نهایت

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر $x_۰$ ریشه‌ی حقیقی مشترک دو چندجمله‌ای $x^۳ + nx - ۱$ و $x^۳ + x - n^۲$ باشد، باید ریشه‌ی تفاضل آن‌ها نیز باشد، یعنی

$$(x_۰ - n^۲) - (nx_۰ - ۱) = x_۰(۱ - n) + (۱ - n)(۱ + n) = (۱ - n)(x_۰ + n + ۱) = ۰$$

پس یا $n = ۱$ و یا $x_۰ = -n - ۱$. اگر $n = ۱$ باشد، این دو چندجمله‌ای یک‌سان هستند و همه‌ی ریشه‌های آن‌ها یکی است. ضمناً چون چندجمله‌ای درجه سوم حتماً ریشه‌ی حقیقی دارد، این دو ریشه‌ی حقیقی مشترک خواهند داشت.
اما اگر $x_۰ = -n - ۱$

$$(-n - ۱)^۳ + (-n - ۱) - n^۲ = ۰ \Rightarrow n^۳ + ۴n^۲ + ۴n + ۲ = ۰$$

چون n صحیح است، با توجه به رابطه‌ی بالا باید زوج باشد، یعنی عدد صحیح m باشد که $n = ۲m$. با جای‌گزین کردن این رابطه در بالا به دست می‌آید که:

$$۸m^۳ + ۱۶m^۲ + ۸m + ۲ = ۰ \Rightarrow ۴m^۳ + ۸m^۲ + ۴m + ۱ = ۰$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

که تساوی آخر به دلیل زوج بودن سمت راست و فرد بودن سمت چپ امکان ندارد. پس در این حالت دو معادله ریشه‌ی مشترکی ندارند.

۱۱. حداکثر چند مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد که طول اضلاع آن‌ها از بین اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ و . . . ، $۲^{۱۰}$ باشند؟ (طول اضلاع می‌توانند با هم برابر باشند.)

۱) ۵۵ ۲) ۶۶ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰ ۵) ۱۶۵

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

توجه کنید که اعداد داده شده توان‌های دو هستند و نیز شرط لازم و کافی برای اینکه بتوان با سه طول داده شده مثلث ساخت این است که در نامساوی مثلث صدق کنند یعنی جمع دو طول کمتر بیش از بیشترین طول باشد. اکنون فرض کنید سه طول مورد نظر ۲^x و ۲^y و ۲^z باشند که $x \geq y \geq z$ در این صورت اگر $x > y$ خواهیم داشت:

$$۲^z + ۲^y \leq ۲^y + ۲^y = ۲^{y+۱} \leq ۲^x$$

بنابراین سه طول داده شده تشکیل مثلث نمی‌دهند پس باید $x = y$ باشد یعنی مثلث‌ها فقط می‌توانند متساوی الساقین باشند و به علاوه z می‌تواند هرکدام از اعداد ۰ تا x باشد که هرکدام مثلثی جدید می‌شود. یعنی $x + ۱$ مثلث با طول بزرگترین ضلع ۲^x داریم و $۰ \leq x \leq ۱۰$. پس در کل

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۱ = ۶۶$$

مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد.

۱۲. برای عدد طبیعی n چندجمله‌ای $P_n(x)$ را برابر $(x + n)^۲$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم

$$P_{۱۳۹۳}\left(P_{۱۳۹۲}\left(\ldots\left(P_۱(x)\right)\ldots\right)\right)$$

یک چندجمله‌ای از درجهٔ $۲^{۱۳۹۳}$ است. ضریب $x^{۲^{۱۳۹۳}-۱}$ در این چندجمله‌ای برابر کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۲^{۱۳۹۲}$ ۳) $۲^{۱۳۹۲} + ۱$ ۴) $۲^{۱۳۹۳} - ۱$ ۵) $۲^{۱۳۹۳}$

راه حل:

گزینه‌ی (۵) صحیح است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

به استقرا روی n نشان می‌دهیم که $Q_n(x) = P_n(P_{n-1}(\cdots(P_1(x))\cdots))$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی 2^n است که ضریب جملات x^{2^n} و x^{2^n-1} در آن به ترتیب ۱ و 2^n هستند.

در مورد $P_1(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ که همه‌ی نکات فوق درست هستند. حالت فرض کنید که احکام بالا تا n درست باشد یعنی:

$$Q_n(x) = x^{2^n} + 2^n x^{2^n-1} + \cdots$$

حال

$$Q_{n+1}(x) = P_{n+1}(Q_n(x)) = (x^{2^n} + 2^n x^{2^n-1} + \cdots + n)^2 = x^{2^{n+1}} + 2(x^{2^n})(2^n x^{2^n-1}) + \cdots$$

دقت کنید که مابقی جملات نمی‌توانند منجر به جمله‌های با درجه‌ی 2^n و یا $2^n - 1$ شوند.

پس عدد خواسته شده در صورت مسئله برابر 2^{1393} خواهد بود.

۱۳. فرض کنید $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ و $B = \{1, 2, \ldots, 100\}$. تعداد توابع $f : A \to B$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی m و n که $2 \le m, n \le 10$ و $mn \le 10$، رابطهٔ $f(mn) = mf(n)$ برقرار باشد.

۱) 10^2 ۲) 10^3 ۳) 10^4 ۴) 10^5 ۵) 2×10^5

راه حل:

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

همه‌ی زوج‌های مرتب (m, n) که در شرایط $2 \le m, n \le 10$ و $mn \le 10$ صدق می‌کنند عبارتند از

$$(2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (4,2), (5,2)$$

که بنابر خاصیت تابع f، این روابط را به دست می‌آوریم

$$f(6) = 2f(3), f(8) = 2f(4), f(10) = 2f(5), f(6) = 3f(2),$$

$$f(9) = 3f(3), f(8) = 4f(2), f(10) = 5f(2)$$

با توجه به روابط بالا، اگر مقدار $f(2)$ را مشخص کنیم، مقادیر $f(n)$ به ازای $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ مشخص می‌شود. در واقع اگر قرار دهیم $f(2) = a$، به دست می‌آوریم.

$$f(3) = 3a/2, f(4) = 2a, f(5) = 5a/2, f(6) = 3a, f(8) = 4a, f(9) = 9a/2, f(10) = 5a$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

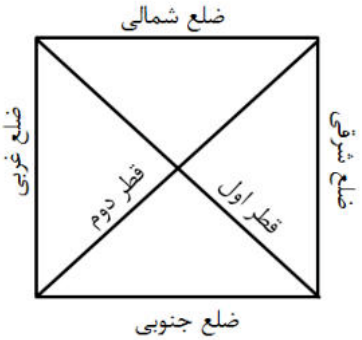
سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

و در نتیجه a عددی طبیعی و زوج است و از آن‌جا که همه‌ی اعداد بالا باید عضو مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ باشند، باید $a \leq ۲۰$.

برعکس، اگر $f(۲)$ هر عدد طبیعی زوج و کوچکتر یا مساوی ۲۰ باشد و مقادیر $f(n)$ را برای $n = ۳, ۴, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۰$ طبق روابط بالا تعیین کنیم و سپس مقدار $f(۱)$ و $f(۷)$ را نیز به دلخواه از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ انتخاب کنیم، تابع حاصل در شرایط مسأله صدق می‌کند. پس برای $f(۲)$، ۱۰ انتخاب وجود دارد و برای $f(۱)$ و $f(۷)$ نیز هر کدام ۱۰۰ انتخاب وجود دارد. بنابراین تعداد توابع مطلوب برابر است با

$$۱۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۱۰^۵$$

۱۴. پادشاه شکرستان که قصری به شکل مربع دارد، به تازگی کتیبه‌ای به خط نمکی مربوط به یکی از اجدادش پیدا کرده که ریاضی‌دان بوده است. پس از ترجمهٔ کتیبه توسط زبان‌شناسان مشخص شد که در نقطه‌های مختلفی از شهر، گنج‌هایی وجود دارد. ترجمهٔ کتیبه را در زیر می‌بینید.



گنج‌ها در نقطه‌هایی از شهر پنهان گشته‌اند که اگر هر کدام از آن‌ها را به ترتیب نسبت به ضلع شمالی، ضلع جنوبی، ضلع شرقی، ضلع غربی، قطر اول و در نهایت قطر دوم قصر قرینه کنیم به جای اول بازگردد.

چند گنج در شهر پنهان شده است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۸

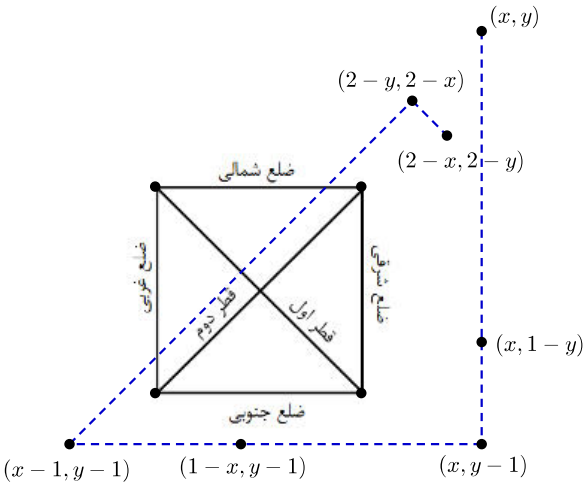
راه حل:

گزینهٔ (۲) صحیح است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



فرض کنید راس‌های مربع در نقاط $(۰, ۰)$، $(۱, ۰)$، $(۰, ۱)$ و $(۱, ۱)$ واقع باشند. در شکل روبرو با شروع از نقطهٔ دل‌خواه (x, y) مختصات نقاط به دست آمده بعد از هر تقارن را مشخص کرده‌ایم. برای این‌که نقطهٔ آخر بر نقطهٔ اول منطبق شود باید داشته باشیم $۲ - x = x$ و $۲ - y = y$. پس دقیقاً یک نقطه با این خاصیت وجود دارد.

۱۵. مهندس شش‌دیواری قصد دارد نقشه‌ی خانه‌ای با شش دیوار را طراحی کند. او می‌خواهد سه تا از دیوارها در امتداد شمالی-جنوبی و با طول‌های ۲، ۴ و ۶ متر باشند و سه تا از دیوارها نیز در امتداد شرقی-غربی و با طول‌های ۴، ۶ و ۱۰ متر باشند. او چند نقشه‌ی مختلف با این ویژگی‌ها می‌تواند بکشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰ ۵) ۲۴

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

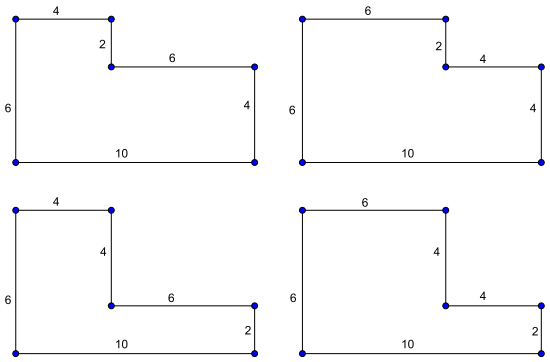
در نقشه‌ی ساختمان، ابتدا دیوار با طول ۱۰ را ثابت در نظر می‌گیریم. از آنجایی که دیوارها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، دو دیوار افقی با طول‌های ۴ و ۶، هر دو یا در بالا و یا در پایین دیوار با طول ۱۰ هستند. فرض کنید دیوارهای افقی با طول‌های ۴ و ۶، هر دو در بالای دیوار با طول ۱۰ باشند. پس به خاطر تقارن موجود، در نهایت تعداد حالات را در ۲ ضرب خواهیم کرد. به همین ترتیب دیوارهای عمودی به طول‌های ۲ و ۴، هر دو یا در چپ و یا در راست دیوار عمودی به طول ۶ قرار دارند. باز هم فرض می‌کنیم این دو دیوار سمت راست دیوار عمودی به طول ۶ قرار داشته باشند و جواب این حالت را نیز در ۲ ضرب خواهیم کرد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

با این مفروضات برای چیدن دو دیوار افقی به طول‌های ۴ و ۶، و دو دیوار عمودی به طول‌های ۲ و ۴، با توجه به این که دیوار افقی با طول ۴ بالاتر باشد یا دیوار افقی با طول ۶ و این که دیوار عمودی با طول ۲ راست‌تر باشد یا دیوار عمودی با طول ۴، چهار حالت مختلف معتبر خواهیم داشت که در شکل زیر مشخص‌اند.



پس در کل ۱۶ = ۴ × ۲ × ۲ حالت خواهیم داشت.

۱۶. می‌دانیم عددی طبیعی در مبنای دو، ۳۰ رقمی است. در مورد تعداد ارقام این عدد در مبنای سه چه می‌توان گفت؟

۱) حتماً ۱۸ رقمی است.

۲) حتماً ۱۹ رقمی است.

۳) حتماً ۲۰ رقمی است.

۴) برای بعضی اعداد ۱۸ رقمی و برای بعضی ۱۹ رقمی است.

۵) برای بعضی اعداد ۱۹ رقمی و برای بعضی ۲۰ رقمی است. **راه حل:**

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

از آنجایی که این عدد در مبنای دو، ۳۰ رقمی است، پس حداقل $۲^{۲۹}$ و حداکثر $۲^{۳۰} - ۱$ است.

داریم

$$۲^{۲۹} = ۲^{۲۴} \times ۲^{۵} = (۲^{۸})^{۳} \times ۲^{۵} = (۲۵۶)^{۳} \times ۳۲ > (۲۴۳)^{۳} \times ۲۷ = ۳^{۱۵} \times ۳^{۳} = ۳^{۱۸}$$

پس $۲^{۲۹}$ حداقل در مبنای ۳ حداقل ۱۹ رقمی است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} ۲^{۳۰} = ۲^{۱۱} \times ۲^{۱۱} \times ۲^{۸} = ۲۰۴۸ \times ۲۰۴۸ \times ۲۵۶ \\ = (۲۰۴۸ \times \sqrt{۱٫۱}) \times (۲۰۴۸ \times \sqrt{۱٫۱}) \times \frac{۲۵۶}{۱٫۱} \\ < (۲۰۴۸ \times ۱٫۰۵) \times (۲۰۴۸ \times ۱٫۰۵) \times \frac{۲۵۶}{۱٫۱} \\ < ۲۱۶۰ \times ۲۱۶۰ \times ۲۴۰ < ۲۱۸۷ \times ۲۱۸۷ \times ۲۴۳ \\ = ۳^{۷} \times ۳^{۷} \times ۳^{۵} = ۳^{۱۹} \end{aligned} \quad (۱)$$

پس $۲^{۳۰} - ۱$ از $۳^{۱۹} - ۱$ کمتر بوده و در نتیجه این عدد حداکثر ۱۹ رقمی است.

پس هر عدد که در مبنای دو، ۳۰ رقمی است، در بازه‌ی $[۲^{۲۹}, ۲^{۳۰} - ۱]$ قرار داشته و با توجه به آنچه گفته‌شد، ۱۹ رقم دارد.

۱۷. عدد صحیح n را «نه چندان بزرگ» می‌گوییم هرگاه برای هر دو عدد مثبت x و y که $(x+۱)(y+۱) = ۲$، داشته باشیم $xy + \frac{۱}{xy} \geq n$. بزرگ‌ترین عدد نه چندان بزرگ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

راه حل:

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

برای هر دو عدد حقیقی x و y می‌دانیم که $(x-y)^{۲} \geq ۰$ و این یعنی $(x+y)^{۲} \geq ۴xy$. حال اگر x و y در رابطه‌ی $(x+۱)(y+۱) = ۲$ صدق کنند داریم:

$$xy + x + y = ۱ \Rightarrow (۱ - xy)^{۲} \geq ۴xy \Rightarrow (xy)^{۲} + ۱ \geq ۶xy \Rightarrow xy + \frac{۱}{xy} \geq ۶$$

از طرف دیگر برای این که در این نابرابر تساوی اتفاق بیفتد باید $x = y$ باشد که شرط $(x+۱)(y+۱) = ۲$ نتیجه می‌دهد که $x = y = \sqrt{۲} - ۱$ در این حالت:

$$xy + \frac{۱}{xy} = (\sqrt{۲} - ۱)^{۲} + \frac{۱}{(\sqrt{۲} - ۱)^{۲}} = ۳ - ۲\sqrt{۲} + ۳ + \sqrt{۲} = ۶$$

۱۸. رئوس یک پنج‌ضلعی محدب را به ترتیب ساعت‌گرد A, B, C, D, E می‌نامیم. می‌دانیم $\angle BAE = ۲\angle DAC$ و $\angle BCA = \angle CDA$ و $\angle EDA = \angle DCA$. اگر $AD = ۲\sqrt{۳}$ و $AC = ۲$ آن‌گاه مقدار $\frac{AE}{AB}$ برابر کدام گزینه است؟

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱) $\frac{۱}{۴}\sin ۹۳^\circ$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۴) $۳\sin ۹۳^\circ$ ۵) ۳

راه حل:

گزینه‌ی (۵) صحیح است.

مطابق فرض مسئله می‌دانیم

$$\angle EAB = ۲\angle DAC \Rightarrow \angle EAD + \angle CAB = \angle DAC$$

نقطه‌ی X را مطابق شکل روی ضلع DC طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\angle XAC = \angle EAD$$

$$\angle DAX = \angle CAB$$

دو مثلث XAC و EAD متشابه هستند زیرا

$$\angle ACX = \angle ADE, \angle EAD = \angle XAC$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{AX} = \frac{AD}{AC}(۱)$$

همچنین دو مثلث XAD و BAC متشابه هستند زیرا

$$\angle ADX = \angle ACB, \angle DAX = \angle CAB$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AD}{AC}(۲)$$

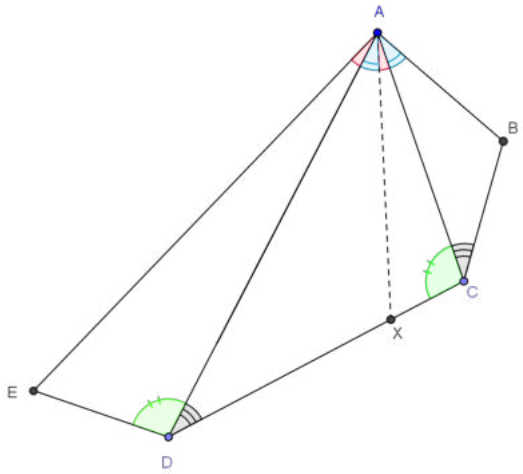
در نهایت اگر رابطه‌ی اول را در رابطه‌ی دوم ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{AB} = (\frac{AD}{AC})^۲ = ۳$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۳

۱۹. x و y دو عدد حقیقی هستند که $\sin(x)+\cos(y)=۱$. بیش‌ترین مقدار $\sin(y)+\cos(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۵) ۲

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\begin{aligned} ۱+(\sin(y)+\cos(x))^۲ &= (\sin(x)+\cos(y))^۲+(\sin(y)+\cos(x))^۲ \\ &= \sin^۲(x)+\cos^۲(x)+\sin^۲(y)+\cos^۲(y) \\ &\quad +۲(\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)) \\ &= ۲+۲\sin(x+y) \\ &\le ۴ \end{aligned}$$

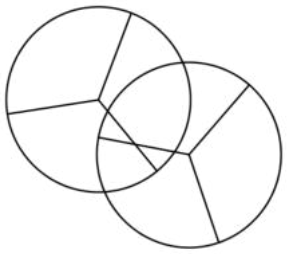
پس $|\sin(y)+\cos(x)|\le\sqrt{۳}$. یعنی حداکثر مقدار ممکن برای $\sin(y)+\cos(x)$ همین $\sqrt{۳}$ است. از سوی دیگر برای تساوی اگر $x=\frac{\pi}{۶}$ و $y=\frac{\pi}{۳}$ باشد، داریم

$$\sin(x)+\cos(y)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱,\quad \sin(y)+\cos(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. دو صفحهٔ پلاستیکی شفاف و رنگی به شکل دو دایرهٔ برابر داریم که هر کدام از آن‌ها توسط سه شعاع با زاویه‌های ۱۲۰°، به سه قسمت برابر تقسیم شده‌اند. قسمت‌ها دارای رنگ‌های متفاوت هستند. هرگاه دو رنگ روی هم قرار گیرند، رنگی جدید ایجاد می‌شود و رنگ‌های ترکیبی ایجاد شده نیز با یک‌دیگر متفاوت‌اند. مثلاً در شکل رو به رو ۱۰ رنگ مختلف به وجود آمده است.

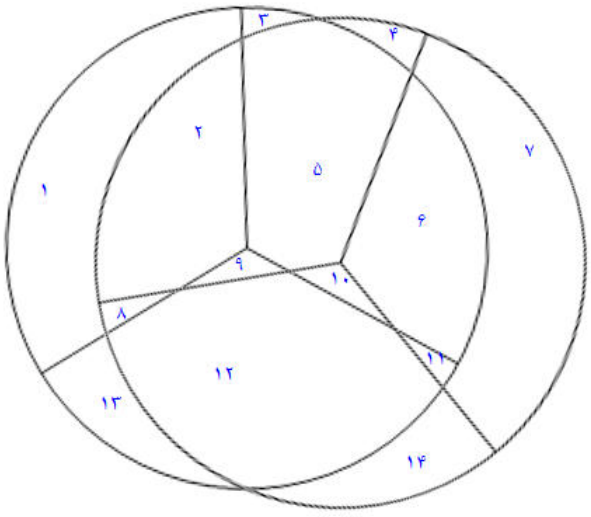
حداکثر تعداد رنگ‌های مختلفی که در یک وضعیت قرار گرفتن صفحه‌ها می‌تواند به وجود بیاید چند تاست؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴ ۵) ۱۵

راه حل:

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

در ابتدا ۶ رنگ داریم و برای ایجاد هر رنگ جدید باید یک رنگ از یک صفحه بر روی رنگی از صفحه‌ی دیگر قرار گیرد و چون هر صفحه ای سه رنگ دارد این کار به ۳ × ۳ طریق ممکن است. بنابراین حداکثر ۹ رنگ جدید ایجاد می‌شود. پس نمی‌توان بیش از ۱۵ رنگ به وجود آورد. به علاوه در شکل زیر مثالی که در آن ۱۴ رنگ به وجود آمده را مشاهده می‌کنید:



شکل ۱

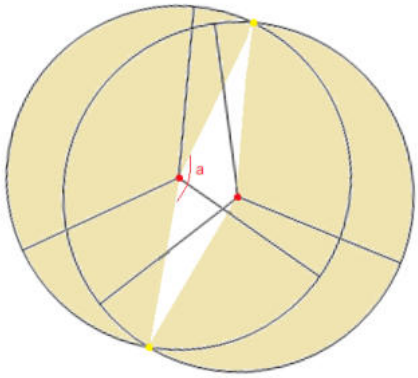
در ادامه ثابت می‌کنیم چرا به وجود آوردن ۱۵ رنگ نیز غیر ممکن است. توجه کنید که اگر مراکز دو صفحه روی هم

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

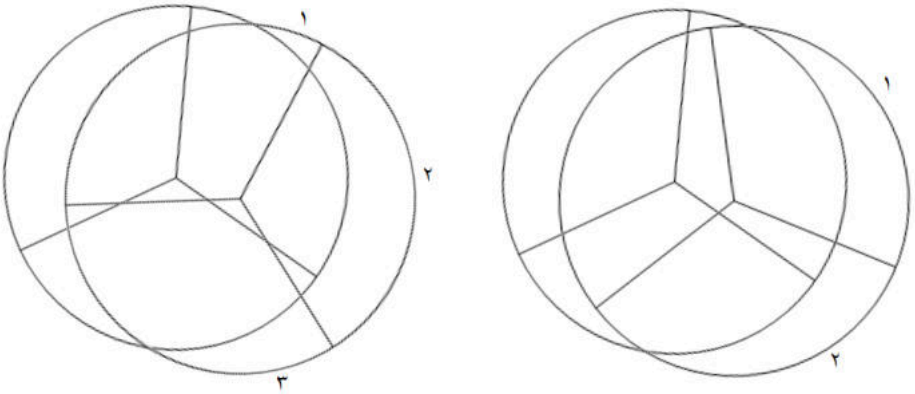
قرار گیرد رنگ های ابتدایی از بین می‌روند و اگر دو دایره هم‌دیگر را قطع نکنند ۶ رنگ خواهیم داشت. بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم دو دایره در دو نقطه متقاطع اند پس روی هرکدام از دو دایره دو کمان تشکیل می‌شود که یکی درون دایره‌ی دیگر است و یکی بیرون آن و می‌دانیم طول کمان بیرونی بیشتر از کمان درونی است.



شکل ۲

در واقع همان‌طور که در شکل بالا مشاهده می‌کنید مراکز دوصفحه و دونقطه‌ی تقاطع تشکیل یک لوزی می‌دهند و اندازه‌ی کمان درونی که برابر با زاویه‌ی a در شکل فوق است کمتر از نیم‌صفحه خواهد بود .

حال توجه کنید که هر دایره به سه کمان ۱۲۰ درجه تقسیم شده که هر کمان به یک رنگ است بنابراین چون کمان‌های بیرونی بیش از نیم‌صفحه اند نمی‌توانند یک رنگ باشند پس دو یا سه رنگ دارند. که در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



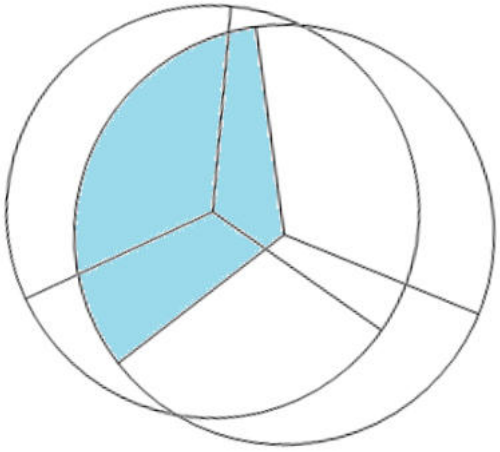
شکل ۳

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

وقتی کمان بیرونی یکی از دایره‌ها دو رنگ داشته باشد به این معنی است که یکی از قسمت‌های آن به طور کامل درون دایره‌ی دیگر قرار دارد - مانند قسمتی که در شکل ۵ به رنگ آبی است - درنتیجه رنگ اولیه‌ی آن به وجود نمی‌آید پس در این حالت نمی‌تواند ۱۵ رنگ به وجود آید.



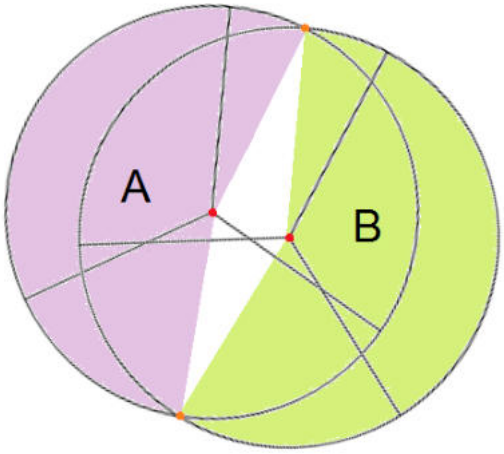
شکل ۴

بنابراین تنها بررسی حالتی می‌ماند که کمان بیرونی هر دو دایره سه رنگ داشته باشند. در این حالت چون کمان های بیرونی سه رنگ دارند و طول هر کمان رنگی ۱۲۰ درجه است یک قسمت رنگی از هر دو دایره خواهد بود که مرز بیرونی آن به طور کامل در کمان بیرونی آن دایره قرار گیرد. اکنون ناحیه‌های شکل را به ترتیب زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۵

حال بنا بر گفته‌های بالا یک قسمت رنگی به تمامی در ناحیه‌ی A و یک قسمت رنگی دیگر به تمامی در ناحیه‌ی B قراردارند و در نتیجه رنگ حاصل از روی هم قرار گرفتن آن دو به وجود نمی‌آید. بنابراین ثابت می‌شود حداکثر ۱۴ رنگ قابل تولید است.

۲۱. یک زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی را «منظم» گوییم اگر میانگین اعضای آن عددی طبیعی باشد و آن را «فوق منظم» گوییم اگر همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی آن منظم باشند. تعداد زیرمجموعه‌های فوق منظم پنج عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۶۷\}$ چند است؟

۱) ۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۹ ۵) ۴۷

راه حل:

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مجموعه‌ی مورد نظر را $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵\}$ در نظر می‌گیریم. منظم بودن زیرمجموعه‌های A معادل با شرایط زیر است:

(آ) برای هر i, j متمایز، $|a_i + a_j$.۲

(ب) برای هر i, j, k متمایز، $|a_i + a_j + a_k$.۳

(ج) برای هر i, j, k, l متمایز، $|a_i + a_j + a_k + a_l$.۴

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

(د) $۵|a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵$

شرط (آ) معادل است با این‌که همه‌ی a_iها دارای زوجیت یکسان باشند. شرط (ب) معادل است با این‌که همه‌ی a_i به پیمانه‌ی ۳ همنهشت باشند، زیرا اگر i, j, k, k' متمایز باشند، بنابر شرط (ب)،

$$\left.\begin{array}{l} ۳|a_i + a_j + a_k \\ ۳|a_i + a_j + a_{k'} \end{array}\right\} \Rightarrow a_k \overset{۳}{\equiv} a_{k'}$$

مشابهاً شرط (ج) معادل است با این‌که همه‌ی a_i به پیمانه‌ی ۴ همنهشت باشند. بنابراین شرط (ج)، شرط (آ) را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر، شرط‌های (ب) و (ج) در کنار هم، معادل با این هستند که همه‌ی a_i به پیمانه‌ی ۱۲ همنهشت باشند.

پس مجموعه‌ی پنج عضوی A فوق منظم است، اگر و تنها اگر همه‌ی اعضای آن به پیمانه‌ی ۱۲ همنهشت باشند و جمع اعضای آن بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

اکنون توجه کنید که هر عدد طبیعی a را می‌توان به صورت $۱۲b + t$ نمایش داد که b عددی صحیح و نامنفی است و $۱ \le t \le ۱۲$. پس a_iها را به شکل $a_i = ۱۲b_i + t_i$ نمایش می‌دهیم. از آن‌جا که a_iها باید به پیمانه‌ی ۱۲ همنهشت باشند، پس t_iها با هم برابرند. پس می‌توان نوشت $a_i = ۱۲b_i + t$.

اکنون داریم

$$a_۱ + \cdots + a_۵ = ۱۲(b_۱ + \cdots + b_۵) + ۵t$$

بنابراین شرط این‌که مجموع a_iها بر ۵ بخش‌پذیر باشد، معادل با این است که مجموع b_iها بر ۵ بخش‌پذیر باشد. اما از آن‌جا که $a_i \le ۶۷$ پس $b_i = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$. همچنین چون a_iها متمایزند، پس b_iها نیز باید متمایز باشند. به راحتی می‌توان دید که تنها دو زیرمجموعه‌ی پنج‌عضوی از $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ وجود دارد که مجموع اعضای آن‌ها بر پنج بخش‌پذیر است. که عبارت‌اند از:

$$\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}, \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$$

در حالت اول، a_iها عبارتند از $\{t, ۱۲ + t, ۲۴ + t, ۳۶ + t, ۴۸ + t\}$ که t هر یک از اعداد ۱، ۲، . . . ، ۱۲ می‌تواند باشد. پس در این حالت ۱۲ زیرمجموعه‌ی فوق منظم پیدا کردیم.

در حالت دوم، ها عبارتند از $\{۱۲ + t, ۲۴ + t, ۳۶ + t, ۴۸ + t, ۶۰ + t\}$، که در این حالت برای این‌که $۶۰ + t \le ۶۷$ لازم است که $t \le ۷$. پس در این حالت برای t هفت حالت ۱، ۲، . . . ، ۷ وجود دارد.

بنابراین در مجموع ۱۹ حالت وجود دارد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

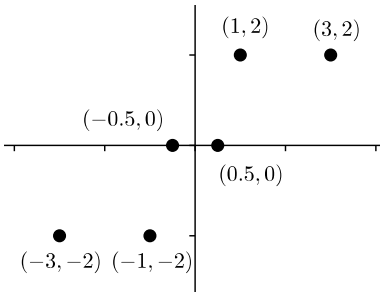
سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۲. شش نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌خط نیستند. در بین زوایایی که این نقاط تشکیل می‌دهند، حداکثر چند زاویه در بازهٔ $(۹۰, ۱۸۰)$ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰ ۵) ۲۴

راه حل:

گزینهٔ (۴) صحیح است.



با این نقاط $\binom{۶}{۳}$ مثلث می‌توان ساخت و در هر مثلث حداکثر یک زاویهٔ منفرجه خواهیم داشت. پس در کل حداکثر $\binom{۶}{۳} = ۲۰$ زاویه در بازهٔ $(۹۰, ۱۸۰)$ خواهیم داشت. شکل بالا مثالی از این تعداد زاویه است.

۲۳. نقطهٔ P روی کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل A نیست) قرار دارد. می‌دانیم $AB = ۲$، $AC = ۳$ و $BC = ۴$. نقاط M و N روی خط BC قرار دارند به طوری که B بین C و M است و C بین N و B است. می‌دانیم MA و PN بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس هستند و $MA = PN$. AP خط BC را در نقطهٔ T قطع می‌کند. اندازهٔ PT چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۷}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}$ ۵) $\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۵}$

راه حل:

گزینه‌ی (۵) صحیح است.

خطوط NP و MA بر دایره مماس هستند پس قوت نقطه‌ی N نسبت به دایره برابر با

$$NP^۲ = NC.NB$$

است و قوت نقطه‌ی M نسبت به دایره برابر با

$$MA^۲ = MB.MC$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

طبق فرض مسئله می‌دانیم $NP^۲ = MA^۲$ پس خواهیم داشت:

$$MA^۲ = MB.MC = MB^۲ + ۴MB = (MB + ۲)^۲ - ۴$$

$$NP^۲ = NC.NB = NC^۲ + ۴NC = (NC + ۲)^۲ - ۴$$

$$\Rightarrow (MB + ۲)^۲ = (NC + ۲)^۲ \Rightarrow (MB - NC).(MB + NC + ۴) = ۰ \Rightarrow MB = NC$$

طبق قضیه‌ی سینوسها در مثلث ABT خواهیم داشت:

$$\frac{MA}{sin(ATM)} = \frac{MT}{sin(MAT)}$$

طبق قضیه‌ی سینوسها در مثلث NPT خواهیم داشت:

$$\frac{PN}{sin(PTN)} = \frac{NT}{sin(TPN)}$$

زاویه‌ی ظلی NPA برابر نصف کمان ACP و زاویه‌ی ظلی MAP برابر نصف کمان ABP است پس دو زاویه‌ی TPN و MAT مکمل یکدیگر و $sin(TPN) = sin(MAT)$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{MA.sin(MAT)}{sin(ATM)} = \frac{PN.sin(TPN)}{sin(PTN)}$$

$$\Rightarrow MT = NT \Rightarrow BT = CT$$

برای بدست آوردن طول PT ابتدا طول AT یعنی میانه مثلث را محاسبه می‌کنیم.

طول میانه‌ی مثلث با استفاده از رابطه‌ی زیر که در انتها اثبات خواهیم کرد محاسبه می‌شود.

$$AT^۲ = \frac{b^۲}{۲} + \frac{c^۲}{۲} - \frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow AT = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

قوت نقطه‌ی T نسبت به دایره برابر است با:

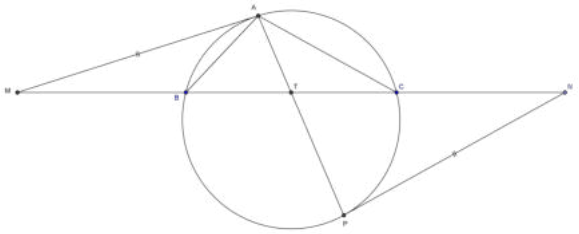
$$BT.TC = AT.TP$$

$$\Rightarrow TP = \frac{BT.TC}{AT} = \frac{۴\sqrt{۱۰}}{۵}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۴

بدست آوردن طول میانه یک مثلث : همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC و N وسط AC قرار دارد.

با استفاده از قضیه‌ی کسینوسها در مثلث MNC خواهیم داشت:

$$-۲.MN.NC.cos(MNC) = MC^۲ - MN^۲ - NC^۲ (۱)$$

و با استفاده از قضیه‌ی کسینوسها در مثلث ANM خواهیم داشت:

$$-۲.MN.AN.cos(۱۸۰^\circ - MNC) = AM^۲ - MN^۲ - AN^۲$$

$$\Rightarrow -۲.MN.NC.cos(MNC) = -AM^۲ + MN^۲ + AN^۲ (۲)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱ و ۲ داریم:

$$MC^۲ - MN^۲ - NC^۲ = -AM^۲ + MN^۲ + AN^۲$$

$$\Rightarrow AM^۲ = ۲AN^۲ + ۲MN^۲ - MC^۲$$

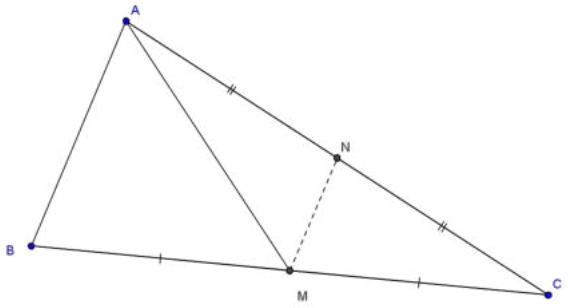
از طرفی طبق قضیه‌ی تالس MN برابر نصف AB و موازی آن است.پس

$$AM^۲ = ۲(\frac{AC}{۲})^۲ + ۲(\frac{AB}{۲})^۲ - (\frac{BC}{۲})^۲$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۱-۴

۲۴. عدد طبیعی M را خوب می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی نه لزوماً متمایز $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geq 3$) یافت شوند به طوری که $M = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ و خواص زیر برقرار باشد.

(آ) M بر توان سوم هیچ عدد طبیعی بزرگ‌تر از یکی بخش‌پذیر نیست.

(ب) اگر $1 \leq i \leq n$ آن‌گاه $a_{i-1}a_{i+1}$ بر a_i بخش‌پذیر است. ($a_0 = a_n$ و $a_{n+1} = a_1$)

چند عدد خوب کوچک‌تر از ۲۰۱۵ داریم؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۹ ۴) ۴۴ ۵) ۷۲

راه حل:

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

ادعا می‌کنیم عدد طبیعی M خوب است اگر و تنها اگر این عدد مربع کامل باشد.

اثبات: ابتدا فرض کنید عدد طبیعی M خوب باشد. در اینصورت اعداد $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ($n \geq 3$) وجود دارند که برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_{i-1}a_{i+1}$ بر a_i بخشپذیر باشد. حال فرض کنید در M، عامل اول p وجود داشته باشد. پس چون $M = a_1a_2\cdots a_n$، a_j وجود دارد که بر p بخشپذیر باشد.از طرفی چون $a_{j-1}a_{j+1}$ بر a_j بخشپذیر است، پس حداقل یکی از اعداد a_{j-1} یا a_{j+1} بر p بخشپذیر هستند. پس $M = a_1a_2\cdots a_n$ حداقل بر p^2 بخشپذیر است. با توجه به فرض سوال، M نمی‌تواند بر p^3 بخشپذیر باشد. پس برای هر عامل اول p در M، M دقیقاً بر p^2 بخش‌پذیر است. پس توان همه‌ی عوامل اول M، دقیقاً برابر ۲ است.

از طرف دیگر فرض کنید توان هر عامل اول M برابر ۲ باشد. پس عدد طبیعی r وجود دارد که $M = r^2$. حال دنباله معرفی شده در زیر خواص مورد نظر صورت سوال را داشته و در نتیجه M عدد خوبی خواهد بود.

$$n = 3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = r \quad a_3 = r$$

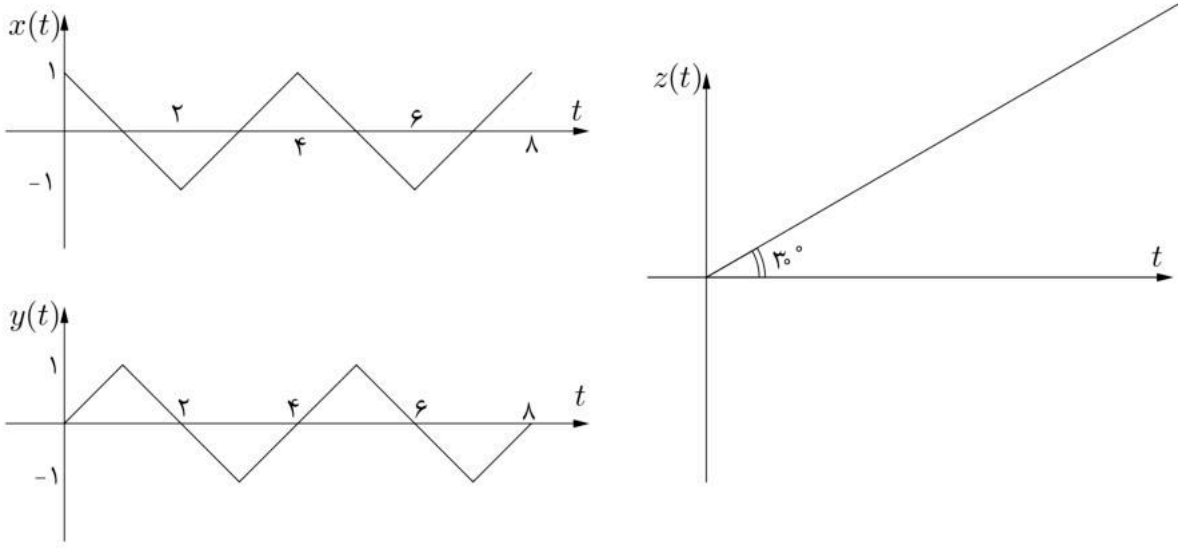
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

به حل مسأله باز می‌گردیم. با توجه به ادعا، باید تعداد اعداد کوچکتر از ۲۰۱۵ را بیابیم که مربع کامل هستند و توان هر عامل اول آن‌ها دقیقاً ۲ است. با توجه به این که ۱۹۳۶ = ۴۴ × ۴۴ و ۲۰۲۵ = ۴۵ × ۴۵ پس اعدد خوب مورد نظر دقیقاً k^2هایی هستند که $1 \le k \le 44$ و k از هیچ عامل اولی بیش از یکی ندارد، که با یک بررسی ساده مشخص می‌شود این اعداد عبارت‌اند از $1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 6^2, 7^2, 10^2, 11^2, 13^2, 14^2, 15^2, 17^2, 19^2, 21^2, 22^2, 23^2,$
$26^2, 29^2, 30^2, 31^2, 33^2, 34^2, 35^2, 37^2, 38^2, 39^2, 41^2, 42^2, 43^2$ که تعداد آن‌ها ۲۹ تاست.

۲۵. متحرکی در فضا به گونه‌ای حرکت می‌کند که در لحظهٔ t در نقطهٔ $(x(t), y(t), z(t))$ قرار دارد. اگر نمودارهای $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ بر حسب t به شکل‌های زیر باشند، مسافتی که این متحرک از $t = 0$ تا $t = 8$ طی می‌کند برابر کدام گزینه است؟



۱) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ۲) $4\sqrt{\frac{7}{3}}$ ۳) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۴) $8\sqrt{\frac{7}{3}}$ ۵) $16\sqrt{\frac{2}{3}}$

راه حل:

گزینه‌ی (۴) صحیح است.

اگر به مسیر حرکت این متحرک کمی فکر کنیم، خواهیم فهمید که در هر کدام از بازه‌های $[0,1]$، $[1,2]$، ... و $[7,8]$ که سه مؤلفه‌ی حرکت آن به صورت خط در آمده است، خود متحرک هم در فضا روی پاره‌خط‌هایی حرکت می‌کرده است. پس کافی است که طول هر کدام از این پاره‌خط‌ها را یافته و با هم جمع کنیم.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

از طرف دیگر با توجه به شباهت حرکت متحرک در هر کدام از بازه‌ها طول این ۸ پاره‌خط با هم برابر است، پس کافی است طول یکی از آن‌ها مثلاً پاره‌خط مربوط به بازه‌ی اول را یافته و در ۸ ضرب کنیم.
متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ در نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$ و در لحظه‌ی $t = ۱$ در نقطه‌ی $(۰, ۱, \frac{\sqrt{۳}}{۳})$ قرار دارد. بنابراین طول طی شده در بازه‌ی $[۰, ۱]$ برابر است با:

$$\sqrt{(۱-۰)^۲ + (۰-۱)^۲ + (۰-\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

پس کل مسافت طی شده از $t = ۰$ تا $t = ۸$ برابر $۸\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ خواهد بود.

۲۶. «پشیزها» موجوداتی میکروسکوپی هستند که اندازه‌های مختلفی دارند. هرگاه دو پشیز با اندازه‌های x و y در مجاورت هم قرار بگیرند، می‌توانند با صرف انرژی‌ای برابر $|x-y|$ به هم بچسبند و یک پشیز با اندازه‌ی $x+y$ ایجاد کنند.
اگر ۱۰۲۵ پشیز با اندازه‌ی ۱ روی یک خط ردیف شده باشند، کم‌ترین انرژی‌ای که باید در مجموع صرف کنند تا تبدیل به یک پشیز با اندازه‌ی ۱۰۲۵ شوند، چه‌قدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۳۱ ۵) ۳۲

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

ابتدا نشان می‌دهیم با صرف انرژی ۱۰ می‌توان پشیز با اندازه ۱۰۲۵ به دست آورد. برای این کار در ۱۰ گام پشیزها را به هم می‌چسبانیم به طوری که در هر گام تنها یک واحد انرژی مصرف گردد.

در گام ۰، دو پشیز نخست را به هم می‌چسبانیم تا یک پشیز به طول ۲، و ۱۰۲۳ پشیز به طول ۱ داشته باشیم. (بدون صرف انرژی)

در گام ۱، ۱۰۲۴ پشیز باقیمانده را دوبدو به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۳ و ۵۱۱ پشیز به طول ۲ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

در گام ۲، ۵۱۲ پشیز باقیمانده را دوبدو به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۵ و ۲۵۵ پشیز به طول ۴ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

به همین صورت در گام j $(۹ \le j \le ۱)$ ، $۲^{۱۱-j}$ پشیز باقیمانده را دوبدو به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول $۲^j + ۱$ و $۲^{۱۰-j} - ۱$ پشیز به طول ۲^j خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

در گام ۱۰ (آخر)، ۲ پشیز باقیمانده (یکی به طول ۵۱۳ و دیگری به طول ۵۱۲) را به یکدیگر می‌چسبانیم. با این کار یک پشیز به طول ۱۰۲۵ خواهیم داشت. (یک واحد صرف انرژی)

حال نشان می‌دهیم این راه بهینه است؛ یعنی برای دستیابی به پشیز با طول ۱۰۲۵، صرف حداقل ۱۰ واحد انرژی لازم است.

ادعا: برای هر عدد طبیعی n که $۲^i < n < ۲^{i+۱}$، صرف i واحد انرژی برای به دست آوردن یک پشیز به طول n لازم است.

اثبات: حکم را به استقرای قوی روی n اثبات می‌کنیم.

پایه: حکم برای $n = ۳, n = ۵, ۶, ۷$ به سادگی قابل بررسی و صحیح است.

گام: فرض کنید $۲^i < n < ۲^{i+۱}$، در اینصورت برا به دست آوردن پشیز به طول n، باید دو پشیز به یکدیگر چسبیده باشند. پس فرض کنید این دو پشیز طول‌های x, y داشته باشند. پس $x + y = n$ بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم $x \geq y$. در اینصورت دو حالت داریم:

حالت ۱، $x = y$: در این حالت با توجه به این که $۲^i < n < ۲^{i+۱}$، پس $۲^{i-۱} < x = y < ۲^i$، پس در این حالت با توجه به فرض استقرا، صرف $۲(i-۱)$ انرژی لازم است. با توجه به این که $i \geq ۳$، این مقدار از i کمتر نخواهد بود.

حالت ۲، $x > y$ و $x \neq ۲^i$: در حالت خواهیم داشت:

$$۲^i < n = x + y < ۲x < ۲n < ۲^{i+۲}$$

پس $۲^{i-۱} < x < ۲^{i+۱}$ پس با توجه به فرض استقرا، برای تولید پشیز به طول x نیاز به حداقل $i-۱$ واحد انرژی داریم. از طرفی چون $x \neq y$، پس برای تولید پشیز به طول $n = x + y$ با به هم چسباندن دو پشیز به طول‌های x, y، نیاز به حداقل یک واحد انرژی داریم. پس در این حالت نیز صرف حداقل i واحد انرژی نیاز خواهد بود.

حالت ۳، $x > y$ و $x = ۲^i$: در این حالت اگر $y > ۲^{i-۱}$، در اینصورت با توجه به فرض استقرا برای تولید پشیز به طول y، حداقل $i-۱$ واحد انرژی و برای چسباندن دو پشیز x, y حداقل یک واحد انرژی نیاز است که این مانند قبل حکم را نتیجه می‌دهد. امّا اگر $y \leq ۲^{i-۱}$، در اینصورت برای چسباندن دو پشیز x, y، صرف $|x-y| \geq ۲^{i-۱}$ واحد انرژی لازم است. با توجه به این که $i \geq ۳$، این مقدار از i کمتر نخواهد بود.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

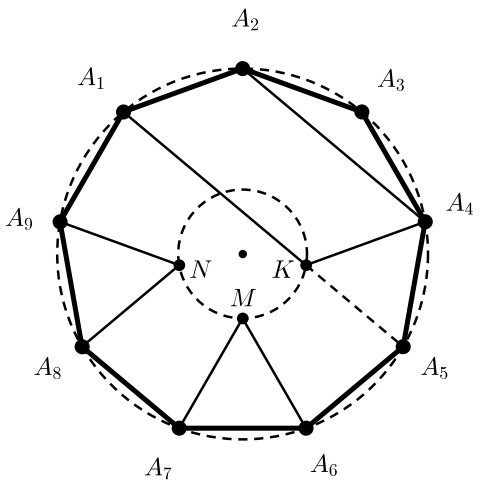
اکنون با توجه به ادعا می‌توان دید که چون $۲^{۱۱} > ۱۰۲۵ > ۲^{۱۰}$، پس صرف ۱۰ واحد انرژی برای به دست آوردن پشیز به طول ۱۰۲۵ لازم است و این اثبات ما را کامل می‌کند.

۲۷. $A_۱A_۲\cdots A_۹$ یک ۹ ضلعی منتظم است و نقطه‌های K، M و N درون آن به گونه‌ای هستند که $A_۱A_۲A_۴K$ متوازی‌الاضلاع و $A_۶A_۷M$ و $A_۸A_۹N$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع هستند. زاویهٔ $\angle MKN$ چه‌قدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵ ۵) ۶۰

راه حل:

گزینهٔ (۳) صحیح است.



راس‌های این ۹ ضلعی دایرهٔ محیطی آن را به ۹ کمان مساوی تقسیم کرده‌اند. پس هر قطعه کمان $\frac{۳۶۰}{۹} = ۴۰$ درجه است. بنابراین زاویهٔ $\angle A_۱A_۲A_۴$ (که روبه‌رو به ۶ قطعه کمان است) ۱۲۰ درجه است. زاویهٔ $\angle A_۲A_۱K$، زاویهٔ مجاور آن در متوازی‌الاضلاع، ۶۰ درجه خواهد بود. اما زاویهٔ $\angle A_۲A_۱A_۵$ هم ۶۰ درجه است، چرا که روبه‌رو به ۳ قطعه کمان است. پس

$$\angle A_۲A_۱A_۵ = \angle A_۲A_۱K = ۶۰^\circ$$

بنابراین سه نقطهٔ $A_۱$، $A_۵$ و K هم‌خط‌اند. زاویهٔ $\angle KA_۵A_۴$ (که روبه‌رو به ۳ قطعه کمان است) ۶۰ درجه است. از طرفی

$$\angle KA_۴A_۵ = \angle A_۲A_۴A_۵ - \angle A_۲A_۴K = ۱۲۰ - ۶۰ = ۶۰$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

پس مثلث $A_۴A_۵K$ هم متساوی‌الاضلاع است.

اگر شکل را ۸۰ درجه حول مرکز دایره به طور ساعت‌گرد دوران دهیم مثلث $A_۴A_۵K$ به $A_۶A_۷M$ و مثلث $A_۶A_۷M$ به $A_۸A_۹N$ تبدیل می‌شود، چرا که اضلاع ۹ ضلعی طی این دوران به هم تبدیل می‌شوند. در نتیجه با این دوران K به M و M به N تبدیل می‌شود. پس کمان MN (روی دایرهٔ کوچک‌تر) ۸۰ درجه است. زاویهٔ $\angle MKN$ (که روبه‌رو به این کمان است) ۴۰ درجه خواهد بود.

۲۸. فرض کنید A مجموعهٔ نقاط با مختصات صحیح در صفحه باشد و تابع $f : A \to \{۰, ۱, ۲\}$ دارای این خاصیت است که برای هر x و y صحیح،

$$f(x, y) - f(x + ۱, y) - f(x - ۱, y) - f(x, y + ۱) - f(x, y - ۱)$$

بر ۳ بخش‌پذیر است. کدام گزاره صحیح است؟

۱) f باید تابعی ثابت باشد.
۲) مجموعه‌ای متناهی وجود ندارد که با دانستن f در آن مجموعه، تابع f به صورت یک‌تا تعیین شود.
۳) اگر مجموعهٔ نقاطی که f در آن‌ها مقدار ۱ را اتخاذ می‌کند، مشخص باشد (فرض کنید این مجموعه ناتهی است) تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.
۴) اگر مقدار f را روی نقاطی که هر دو مؤلفهٔ آن‌ها زوج است بدانیم، تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.
۵) گزینه‌های ۲ و ۳

راه حل:

گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مجموعه‌ی نقاط با مختصات صحیح را با $\mathbb{Z}^۲$ نشان می‌دهیم.

تابعی که در شرط مسأله صدق کند را تابع خوب می‌نامیم.

گزاره‌ی (۱) غلط است. زیرا به سادگی می‌توان دید که تابع زیر یک تابع خوب است،

$f(x, y) = ۳$ باقیمانده‌ی $(x + y)$ بر ۳

گزاره‌ی (۲) درست است. برای اثبات آن، ابتدا چند تعریف ارائه می‌کنیم.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

برای هر $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ منظور از همسایه‌های (x,y)، نقاط $(x,y-1)$، $(x,y+1)$، $(x-1,y)$ و $(x+1,y)$ هستند.

اگر S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}^2$ باشد، آن‌گاه (x,y) را نقطه‌ای درونی از S می‌گوییم اگر خودش و همسایه‌هایش عضو S باشند.

اگر f تابعی از S به $\{0,1,2\}$ باشد و (x,y) نقطه‌ای درونی از S باشد، تعریف می‌کنیم

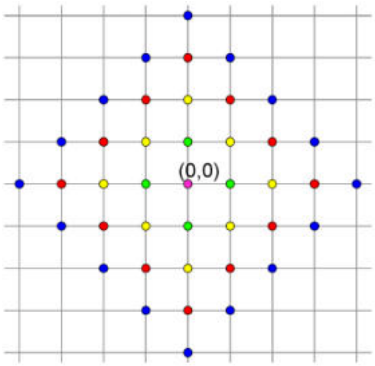
$$\Delta f(x,y) =$$

باقیمانده‌ی $(f(x,y)-f(x+1,y)-f(x-1,y)-f(x,y+1)-f(x,y-1))$ بر ۳

برای هر عدد صحیح نامنفی n، مجموعه‌های A_n و B_n را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : |x|+|y| = n\}$$

مثلاً $A_0 = \{(0,0)\}$، $A_1 = \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$. در شکل زیر، A_nها با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند.



همچنین تعریف می‌کنیم

$$B_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : |x|+|y| \le n\}$$

تابع $h : B_n \to \{0,1,2\}$ را خوب می‌نامیم اگر برای هر $(x,y) \in B_{n-1}$، $\Delta h(x,y) = 0$.

حال لم زیر را ثابت می‌کنیم.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

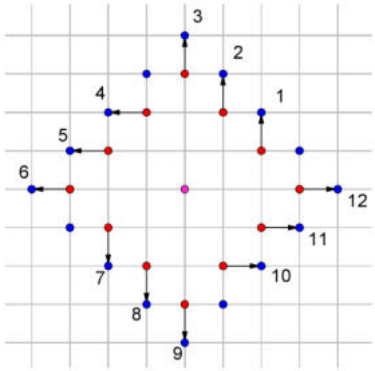
لم: فرض کنید N عددی طبیعی و $h : B_N \to \{0, 1, 2\}$ تابعی خوب باشد. در این صورت h را می‌توان به تابعی خوب روی کل $\mathbb{Z}^2$ گسترش داد.

اثبات لم:

به طور استقرایی تابع h را روی B_n برای هر $n > N$ گسترش می‌دهیم به نحوی که خوب باقی بماند.

فرض کنید h روی B_n تعریف شده باشد و خوب باشد. می‌خواهیم آن را روی B_{n+1} گسترش دهیم به طوری که خوب بماند. به این منظور کافی است آن را روی A_{n+1} تعریف کنیم به نحوی که برای $(x, y) \in A_n$ داشته باشیم $\Delta h(x, y) = 0$ (چون برای $m < n$ بنابر فرض استقرا شرط مسأله روی A_m برقرار است).

به هر کدام از اعضای A_n، طبق الگوی شکل زیر، عضوی از A_{n+1} را نسبت می‌دهیم. اعضایی از A_{n+1} که به هیچ عضوی نسبت داده نشده‌اند را عضو آزاد و بقیه را عضو وابسته می‌نامیم. مطابق شکل، اعضای وابسته‌ی A_{n+1} را به ترتیب شماره‌گذاری می‌کنیم. این شماره‌گذاری دارای این خاصیت است: «هر عضو وابسته‌ی A_{n+1}، به عضوی از A_n وابسته شده که همسایه‌ی هیچ یک از اعضای وابسته‌ی بعدی نیست.»



حال ابتدا مقدار تابع h را روی همه‌ی اعضای A_{n+1} برابر با صفر تعریف می‌کنیم. سپس با شروع از عضو وابسته‌ی شماره ۱، مقدار h را روی هر عضو وابسته به نحوی تغییر می‌دهیم که Δh روی عضوی که به آن وابسته است صفر شود. با توجه به خاصیت بیان شده در بالا، در نهایت تابع hای به دست می‌آوریم که برای هر $(x, y) \in A_n$، $\Delta h(x, y) = 0$ (توجه کنید که تغییر مقدار h روی اعضای وابسته‌ی بعدی، مقدار Δh را در نقاط قبلی تغییر نمی‌دهد.

به این ترتیب تابع h روی کل B_{n+1} تعریف می‌شود و برای هر $(x, y) \in B_n$، داریم $\Delta h(x, y,) = 0$. اکنون با بزرگ کردن n به دلخواه، یک تابع h روی کل $\mathbb{Z}^2$ به دست می‌آوریم که $\Delta h(x, y) = 0$ و اثبات لم تمام می‌شود.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

حال با استفاده از لم بالا می‌توان به راحتی درستی گزاره‌ی ۲ را ثابت کرد. زیرا فرض کنید مقدار f را روی یک مجموعه‌ی متناهی S از نقاط $\mathbb{Z}^2$ بدانیم. از آن‌جا که مجموعه‌ی S متناهی است، پس عدد طبیعی N وجود دارد که $S \subset B_{N+1}$. اکنون مقدار تابع f را روی نقاط A_{N+1} به این صورت تغییر می‌دهیم که یکی در میان آن‌ها را بعلاوه و منهای یک می‌کنیم. تابع حاصل از تغییر این مقادیر را g می‌نامیم. دقت کنید که تحدید تابع g به B_{N+1} تابعی خوب است زیرا مقدار Δg روی B_N همچنان صفر است. پس بنابر لم، تابع خوب h وجود دارد که روی B_{N+1} با g برابر است. پس f و h روی B_N و در نتیجه روی S با هم برابرند ولی در کل با هم برابر نیستند. بنابراین با دانستن f روی یک مجموعه‌ی متناهی نمی‌توان آن را به طور یکتا تعیین کرد.

گزاره‌ی (۳) غلط است، زیرا دو تابع زیر، هر دو خوب هستند و مجموعه‌ی نقاطی که مقدار ۱ را اتخاذ می‌کنند یکسان و ناتهی است ولی دو تابع با یکدیگر متفاوت‌اند.

$$f(x,y) = \text{باقیمانده‌ی } (x+y+1) \text{ بر } ۳$$

$$f(x,y) = \text{باقیمانده‌ی } (۲x+۲y+1) \text{ بر } ۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۵) نیز نادرست است. پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۲۹. مثلثی که طول هر سه ضلعش عددی در بازهٔ $[۱,۲]$، و اندازهٔ همهٔ زاویه‌هایش در بازهٔ $[۴۵,۹۰]$ درجه است، را «معتدل» می‌گوییم. اختلاف مساحت دو مثلث معتدل حداکثر چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۸-\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱۲-۳\sqrt{۲}}{۸}$ ۵) هیچ‌کدام

راه حل:

گزینه‌ی (۱) صحیح است.

فرض کنید مثلث ABC مثلثی معتدل و داری کمترین مساحت باشد و فرض کنید زاویه‌ی A بزرگترین زاویه‌ی آن باشد پس

$$AB, AC \geqslant ۱, \angle A \geqslant ۶۰^\circ \Rightarrow Sin(A) \geqslant Sin(۶۰) \geqslant \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.AB.AC.Sin(A) \geqslant \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

همچنین فرض کنید مثلث $A'B'C'$ مثلثی معتدل و داری بیشترین مساحت باشد و فرض کنید زاویه‌ی A' کوچکترین زاویه‌ی آن باشد پس

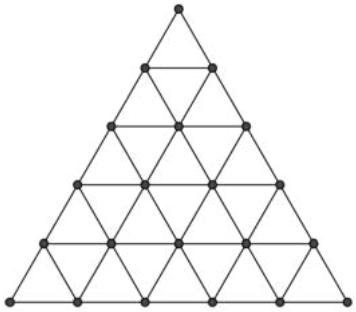
$$A'B', A'C' \leqslant ۲, \angle A' \leqslant ۶۰^\circ \Rightarrow Sin(A') \leqslant Sin(۶۰) \leqslant \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲}.A'B'.A'C'.Sin(A') \leqslant \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} - S_{ABC} \leqslant \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

به عنوان مثال مثلث با اضلاع $۲, ۲, ۲$ را مثلث با بیشترین مساحت و مثلث با اضلاع $۱, ۱, ۱$ را به عنوان کمترین مساحت در نظر بگیرید که حالت تساوی نامساوی بالا بدست می‌آید.

۳۰. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۵ را به شکل روبه‌رو به مثلث‌هایی به ضلع یک تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از رئوس این شبکه‌بندی، برداری دل‌خواه به طول یک و موازی با یکی از اضلاع مثلث نسبت می‌دهیم. مجموع همه‌ی این بردارها چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۱۲۶ ۲) ۳۶۳ ۳) ۷۲۶ ۴) ۱۳۸۷ ۵) ۲۷۷۴

راه حل:

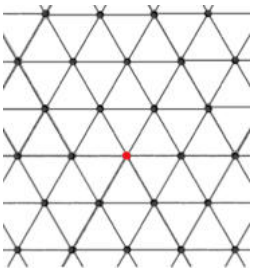
گزینه‌ی (۴) صحیح است.

برای یافتن مجموع تعدادی بردار می‌توانیم فرض کنیم متحرکی به ترتیب در راستای هرکدام از بردارها و به اندازه‌ی آن بردار حرکت می‌کند سپس برداری که ابتدای آن محل اولیه‌ی متحرک یادشده و انتهای آن محل پایانی متحرک باشد مجموع بردارهای اولیه خواهد بود. بنابراین برای یافتن پاسخ این سوال کافی است تعداد نقاط انتهایی ممکن برای متحرکی که از نقطه‌ی ثابتی شروع به حرکت می‌کند و همه‌ی بردارهای منظور شده در شکل را طی می‌کند بیابیم. توجه کنید که طول و جهت بردارها باعث می‌شود اگر متحرک از نقطه‌ی قرمز در شکل زیر شروع به حرکت کند در هر مرحله روی نقاط سیاه باقی بماند.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

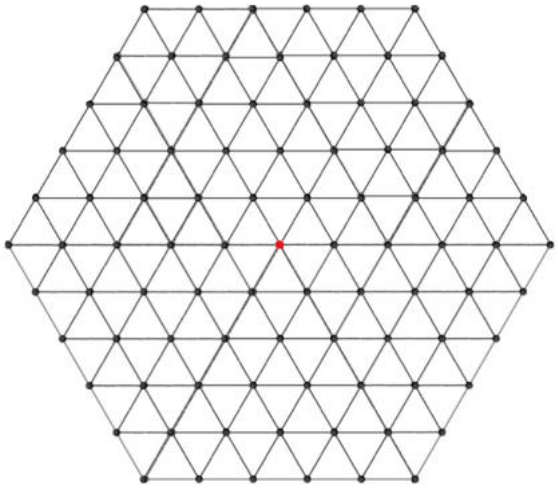
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۱

پس کافی است تعداد نقاطی که در انتها می‌تواند در آن‌ها باشد را بیابیم. به استقرا نشان می‌دهیم اگر متحرک $n > ۱$ قدم حرکت کند نقاطی که می‌تواند در نهایت درآن‌ها قرار گیرد مرز و داخل یک شش ضلعی منتظم با طول ضلع n خواهد بود. به عنوان مثال برای $n = ۵$ همه‌ی نقاط شکل زیر جواب است.



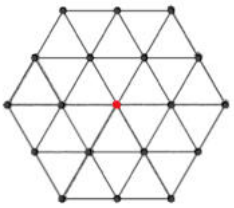
شکل ۲

پایه‌ی استقرا $n = ۲$ است. روشن است که با دو قدم می‌توان به همه‌ی نقاط شکل زیر رسید.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

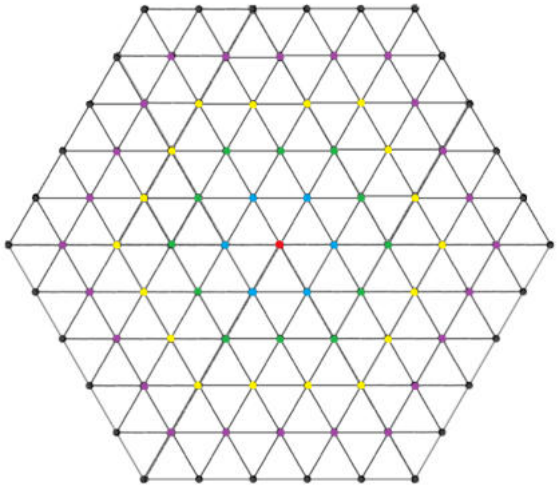
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



شکل ۳

اکنون فرض کنید حکم را برای $n = k$ می‌دانیم. توجه کنید که شکل مربوط به حالت $n = k + ۱$ یک لایه بیش از شکل قبلی است. برای مثال در شکل زیر نقاطی که در هر مرحله اضافه می‌شوند با رنگ‌های مختلف نشان داده شده اند.



شکل ۴

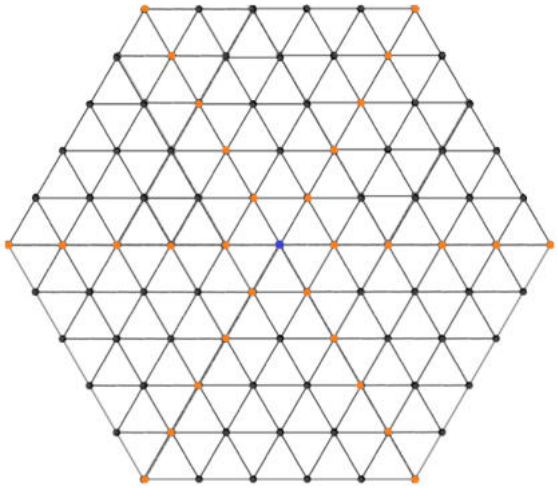
توجه کنید که طبق فرض استقرا می‌دانیم به تمامی نقاط غیر از لایه‌ی خارجی می‌توان با k قدم رسید و به علاوه هر خانه در شش‌ضلعی با طول ضلع $k + ۱$ یک خانه‌ی مجاور دارد که در شش‌ضلعی داخلی و به طول ضلع k قرار دارد بنابراین به هر خانه‌ی شکل با $k + ۱$ قدم می‌توان رسید و حکم ثابت می‌شود. از طرفی هر نقطه خارج از این شش‌ضلعی را که در نظر بگیریم هیچ مسیر با طول کمتر مساوی $k + ۱$ تا نقطه‌ی قرمز ندارد. (این حکم را هم با استقرایی مشابه می‌توان نتیجه گرفت.) پس ثابت می‌شود با $k + ۱$ قدم دقیقاً به نقاط شش‌ضلعی یادشده می‌توان رسید. حال می‌دانیم که تعداد قدم‌های متحرک ما ۲۱ است پس تعداد نقاط یک شش‌ضلعی با طول ضلع ۲۱ جواب مورد نظر ما است. توجه

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و راه حل‌های آزمون مرحلهٔ اول
سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

کنید که این شش‌ضلعی را می‌توان به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲۱ تقسیم کرد. برای مثال در شکل مربوط به شش‌ضلعی به طول ضلع ۵ این تقسیم‌بندی را مشاهده می‌کنید.



شکل ۵

می‌دانیم تعداد نقاط مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع n برابر $\frac{(n+۲)(n+۱)}{۲}$ است پس با در نظر گرفتن نقاط تکراری (نقاط نارنجی و آبی در شکل فوق) تعداد کل نقاط برای شش‌ضلعی به طول ضلع n برابر

$$\frac{۶(n+۲)(n+۱)}{۲} - ۶ \times n - ۵$$

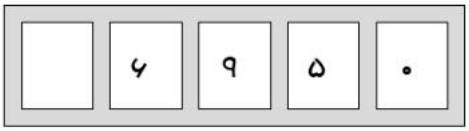
است. پس جواب ما برابر است با: ۱۳۸۷.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

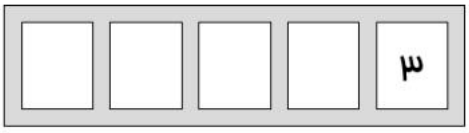
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید.
جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰/۷۳ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:



در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شمارهٔ گزینهٔ درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینهٔ شمارهٔ ۳ درست است باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:



لازم نیست کاملاً شبیه نمونهٔ بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به‌علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. سینا می‌خواهد برای دوره‌کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به‌نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایهٔ آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همهٔ کتاب‌ها را مطالعه کند؟

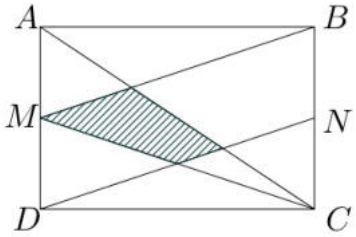
۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x+y=۶$ و $x^۲+y^۲=۴۰$. مقدار $x^۶+y^۶$ چه‌قدر است؟

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

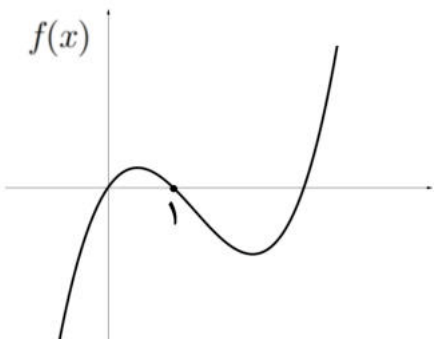
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

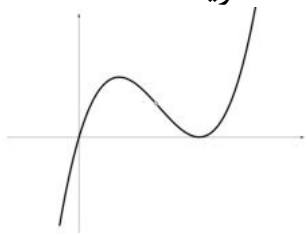
آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

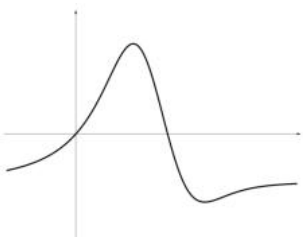
۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشورخورده است؟

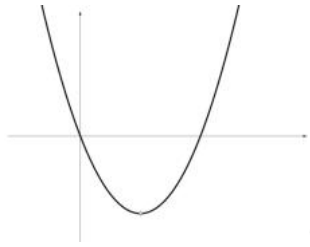


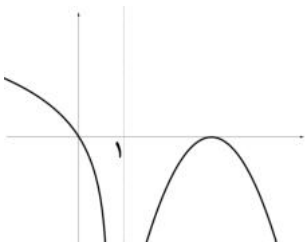
۴. فرض کنید نمودار تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به شکل رو به رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-۱}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همهٔ گزینه‌ها در نقطهٔ $x = ۱$ تعریف نشده هستند.)

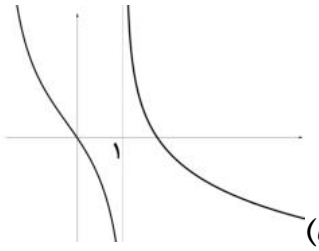


۱)


۲)


۳)


۴)


۵)


۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه حداقل سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶ ۵) بی‌نهایت

۶. در مثلث ABC نقطهٔ D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های $\widehat{BAD}$ ، $\widehat{CAD}$ و $\widehat{ABC}$ با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۵) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۷. دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \ldots$ از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۰ = ۱, \\ a_{n+۱} = ۱۳^{a_n} \quad (n \geq ۰). \end{cases}$$

رقم یکان $a_{۱۳۹۲}$ چه عددی است؟

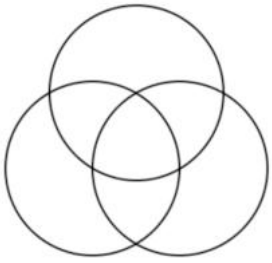
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۹

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = ۱۰۰!, \quad b = ۲^{۱۰۰}, \quad c = ۲^{۲^{۲^{۲}}}$$

۱) $a < b < c$ ۲) $b < a < c$ ۳) $c < a < b$ ۴) $b < c < a$ ۵) $a < c < b$

۹. می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیهٔ درون شکل روبه‌رو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است؟



۱۰. وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $۲^{۱۹} = ۵۲۴,۲۸۸$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژهٔ بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه به زاهدان انتخاب شده و در نقطهٔ وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

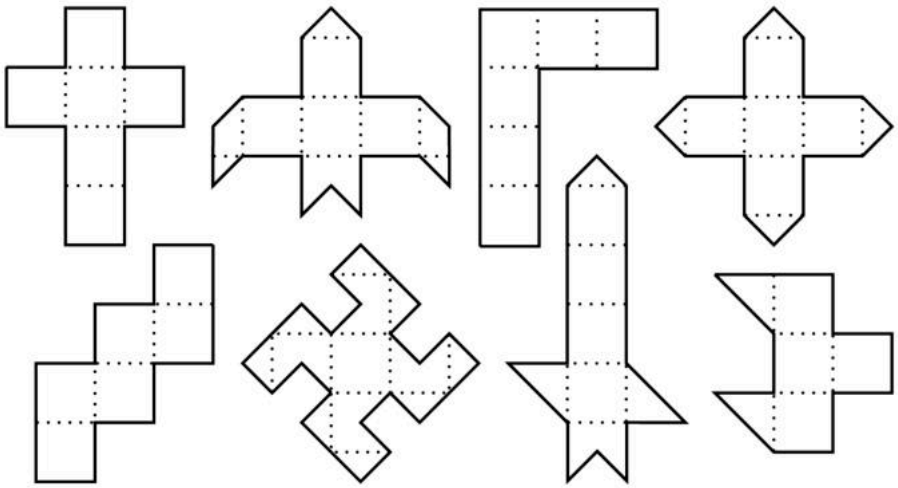
۱۱. ((ضربین‌حساب))، ماشینی است که از یک صفحهٔ نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین‌حساب بلافاصله عدد صفحهٔ نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحهٔ نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $۵^{۱۳۹۲} \times ۳^{۱۴۳۵} \times ۲^{۲۰۱۴}$ دست‌کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین‌حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین‌حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $۹ \times ۹ \times ۹ = ۷۲۹$.)

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

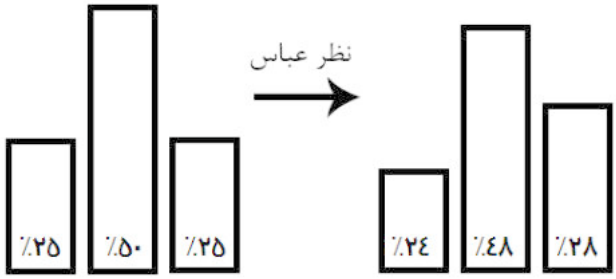
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خط‌چین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟



۱۳. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www.mathysc.ir) کیفیت آزمون مرحلهٔ اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از ((خیلی خوب بود.))، ((عالی بود.)) و ((به‌تر از این نمی‌شد.))! پیش از این که عباس نظر خود را در وب‌گاه ثبت کند، درصد این گزینه‌ها به ترتیب برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است. پس از ثبت نظر او این نسبت به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تغییر می‌کند. تعداد نظرهای ثبت شده پیش از ثبت نظر عباس چه‌قدر بوده است؟ (درصدها دقیق هستند.)



۱۴. چند زوج مرتب (p, q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^۲ - pq + q^۲ = ۳۷^۲$.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

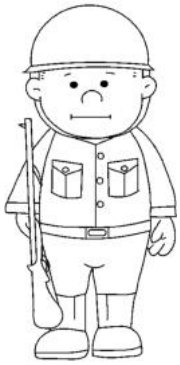
آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۵. کوچک‌ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

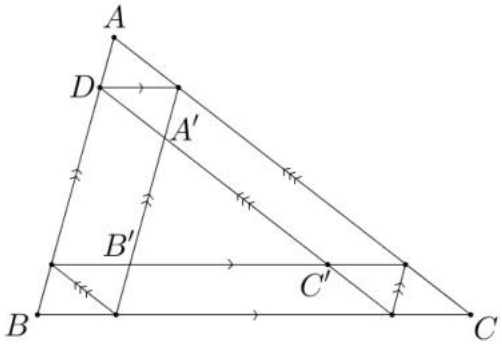
۱۶. چوپانی گوسفند گرسنهٔ خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همهٔ قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دست‌رسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟

۱) تک نقطه ۲)  ۳)  ۴)  ۵) 

۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بینند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بینند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم.)



۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟



۱۹. مجموعهٔ S را مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثل a می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

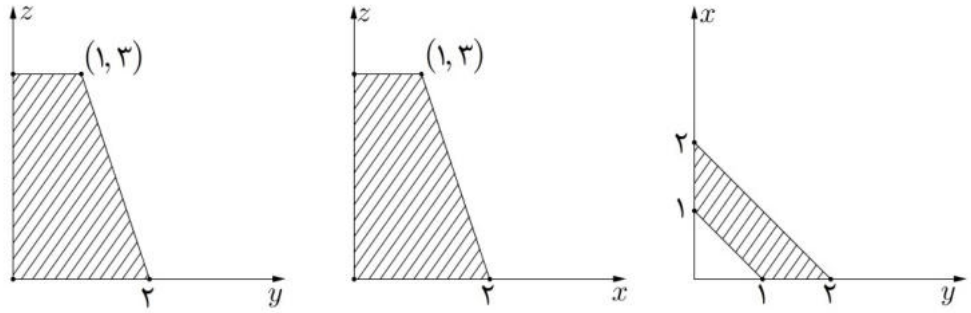
$$a(a-۱)+x(x-۱)+y(y-۱)=\frac{۳}{۲}$$

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه‌قدر است؟

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحهٔ مختصات به شکل‌های زیر است. مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چه‌قدر است؟

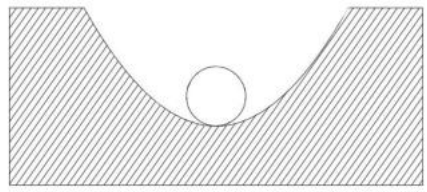


۲۱. چند چهارتایی مرتب (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy + yz + zx = t^۲ \\ yz + zt + ty = x^۲ \\ zt + tx + xz = y^۲ \\ tx + xy + yt = z^۲ \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۹
۴) ۲۵ ۵) بی‌نهایت

۲۲. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لولهٔ انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی و سطح مقطع لوله به شکل یک دایره است. (منظور از سهمی نمودار یک چندجمله‌ای درجه دوم است.) اگر عرض کانال برابر ۲ متر و عمق آن ۴ متر باشد، شعاع بزرگ‌ترین لوله‌ای که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطهٔ کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟ (نسبت اندازه‌ها در شکل صحیح نیست.)



دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

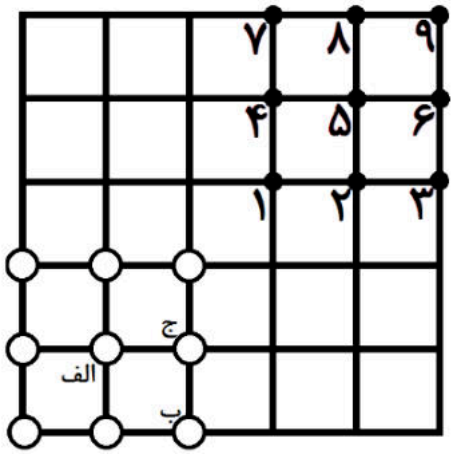
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۳. طول اضلاع AB، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسط‌های AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطهٔ D برخورد می‌کند. طول AD چه‌قدر است؟

۲۴. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایرهٔ توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایرهٔ توپر نمایش داده شده ببرد، به‌نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطهٔ ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به‌ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟





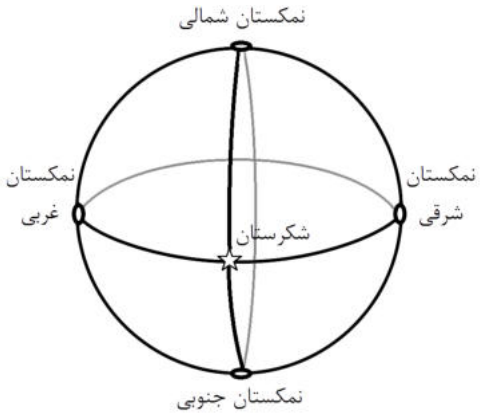
۱) ۵، ۳، ۲ ۲) ۵، ۷، ۸ ۳) ۹، ۷، ۸ ۴) ۵، ۷، ۴ ۵) نمی‌توان تعیین کرد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۲۵. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیهٔ شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیه، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ شهر همسایه به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟



به \ از	شکرستان	نمکستان شرقی	نمکستان غربی	نمکستان شمالی	نمکستان جنوبی
شکرستان	×	۳	۱	۰	۲
نمکستان شرقی	۰	×	۲	۰	۱
نمکستان غربی	۱	۰	×	۳	۰
نمکستان شمالی	۲	۰	۱	×	۱
نمکستان جنوبی	۲	۰	۰	۲	×

۱) شکرستان ۲) نمکستان شرقی ۳) نمکستان غربی
۴) نمکستان شمالی ۵) نمکستان جنوبی

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات و پاسخ‌های تشریحی آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی ایران



mathysc.ir

کمیته ی ملی المپیاد ریاضی ایران
باشگاه دانش پژوهان جوان

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است
https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

بسم الله الرحمن الرحیم

آزمون مرحله اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱ اسفند ۱۳۹۲ و با شرکت ۲۵۸۷۱ نفر از دانش‌آموزان پایه‌های اول، دوم و سوم دبیرستان به طور همزمان در سراسر کشور برگزار گردید. دفترچه‌ی پیش رو مجموعهٔ سؤالات و پاسخ‌های تشریحی این آزمون است که به همت وبگاه المپیاد ریاضی ایران تهیه و منتشر می‌گردد.

زمان: ۱۸۰ دقیقه
تعداد سؤالات: ۲۵

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱. سینا می‌خواهد برای دوره‌کردن کتاب‌های ریاضیات، ادبیات و فیزیک سه سال دبیرستان (۹ کتاب) برنامه‌ریزی کند به‌نحوی که کتاب‌های هر مبحث به ترتیب پایهٔ آن‌ها مطالعه شود (برای مثال کتاب فیزیک ۱ پیش از کتاب فیزیک ۲ مطالعه شود). او به چند ترتیب مختلف می‌تواند همهٔ کتاب‌ها را مطالعه کند؟

پاسخ: ۱۶۸۰

هر روش مطالعه معادل است با یک نحوه‌ی قرار دادن سه کلمه‌ی ریاضی، سه کلمه‌ی فیزیک و سه کلمه‌ی ادبیات در یک ردیف ۹ تایی.

بدین منظور، برای انتخاب مکان سه کلمه‌ی ریاضی، $\binom{۹}{۳}$ حالت مختلف داریم. سپس از بین ۶ جایگاه باقی‌مانده، برای انتخاب مکان سه کلمهٔ ادبیات، $\binom{۶}{۳}$ حالت مختلف داریم و بعد از آن، مکان کلمات فیزیک به طور یکتا مشخص می‌شود. پس جواب مسأله برابر است با

$$\binom{۹}{۳} \times \binom{۶}{۳} = \frac{۹!}{۶!۳!} \times \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۹!}{۳!۳!۳!} = ۱۶۸۰$$

۲. x و y دو عدد حقیقی هستند که $x+y=۶$ و $x^۲+y^۲=۴۰$. مقدار $x^۶+y^۶$ چه‌قدر است؟

پاسخ: ۶۳۵۲۰

راه حل اول. ابتدا می‌توان مقدار xy را محاسبه کرد.

$$۳۶ = (x+y)^۲ = x^۲+y^۲+۲xy = ۴۰+۲xy \Rightarrow xy = -۲$$

حال با استفاده از اتحاد مجموع مکعب‌ها داریم:

$$x^۶+y^۶ = (x^۲+y^۲)(x^۴+y^۴-x^۲y^۲) = ۴۰(x^۴+y^۴-۴)$$

می‌توان مقدار $x^۴+y^۴$ را هم به سادگی محاسبه کرد.

$$۱۶۰۰ = ۴۰^۲ = (x^۲+y^۲)^۲ = x^۴+y^۴+۲x^۲y^۲ = x^۴+y^۴+۸ \Rightarrow x^۴+y^۴ = ۱۵۹۲$$

پس در نهایت داریم:

$$x^۶+y^۶ = ۴۰(۱۵۹۲-۴) = ۴۰ \times ۱۵۸۸ = ۶۳۵۲۰$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

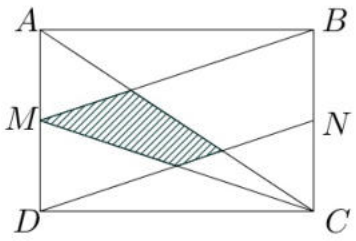
پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

راه حل دوم. طبق قسمت اول راه‌حل بالا می‌دانیم که حاصل‌ضرب x و y برابر -۲ است. بنابراین با توجه به این که مجموع آن‌ها هم برابر ۶ است، x و y دو ریشهٔ چندجمله‌ای $z^۲ - ۶z - ۲$ هستند. بنابراین

$$\{x, y\} = \{۳ + \sqrt{۹ + ۲}, ۳ - \sqrt{۹ + ۲}\} = \{۳ + \sqrt{۱۱}, ۳ - \sqrt{۱۱}\}$$

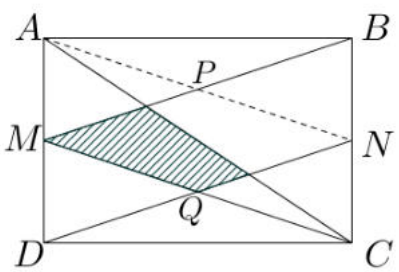
حال با به دست آمدن مقدار x و y، می‌توان مقدار $x^۶ + y^۶$ را با بسط دادن $(۳ \pm \sqrt{۱۱})^۶$ به دست آورد.

۳. در شکل روبه‌رو M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC از مستطیل $ABCD$ هستند. مساحت مستطیل چه مضربی از چهارضلعی هاشورخورده است؟



پاسخ: ۸

راه حل اول. مطابق شکل زیر اگر با پاره‌خطی نقطه‌ی A را به N وصل کنیم، با توجه به این که $AN \parallel MC$ و $MB \parallel DN$، چهارضلعی $PNQM$ یک متوازی‌الاضلاع است. مرکز این چهارضلعی وسط قطرهای آن یعنی وسط MN است که همان محل برخورد قطرهای مستطیل است. دقت کنید که خط AC از مرکز این متوازی‌الاضلاع عبور می‌کند و بنابراین مساحت آن را نصف می‌کند.



پس مساحت چهارضلعی هاشورخورده، نصف مساحت چهارضلعی $MPNQ$ است که برابر مساحت مثلث MQN است. برای به دست آوردن مساحت این مثلث دقت کنید که ارتفاع نظیر

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

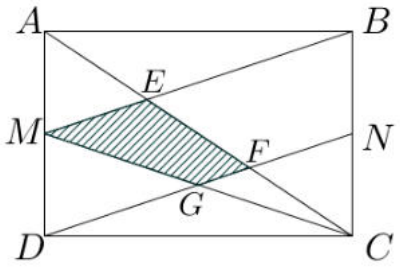
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

Q، $\frac{۱}{۴}$ طول ضلع AD و قاعده‌ی آن یعنی MN برابر طول ضلع AB است. پس در کل مساحت مستطیل ۸ برابر مساحت مثلث MNQ و بنابراین ۸ برابر مساحت چهارضلعی هاشورخورده است.

راه حل دوم. مطابق شکل زیر این بار سه رأس دیگر چهارضلعی هاشورخورده را E، F و G می‌نامیم. هم‌چنین مساحت مستطیل را با S نمایش می‌دهیم.

$$\text{مساحت } AMC = \frac{۱}{۲}AM.CD = \frac{۱}{۲} \times \frac{AD}{۲} \times DC = \frac{۱}{۴}S$$



دقت کنید که دو مثلث AEM و CEB متشابه هستند. پس نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث برابر نسبت $\frac{AM}{BC}$ است که برابر $\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی می‌دانیم مجموع طول ارتفاع‌های این دو مثلث برابر طول ضلع AB است. پس طول ارتفاع AEM برابر $\frac{۱}{۴}AB$ است و در نتیجه

$$\text{مساحت } AME = \frac{۱}{۲} \times \text{ارتفاع} \times AM = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴}AB \times \frac{۱}{۲}AD = \frac{۱}{۱۲}S$$

پس مساحت مثلث EMC که تفاضل مساحت مثلث‌های AMC و AME است، برابر $\frac{۱}{۴}S - \frac{۱}{۱۲}S = \frac{۱}{۶}S$ است.

در نهایت توجه کنید که چون مثلث‌های CFG و CEM متشابه هستند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $(\frac{CG}{CM})^۲ = \frac{۱}{۴}$ است. پس

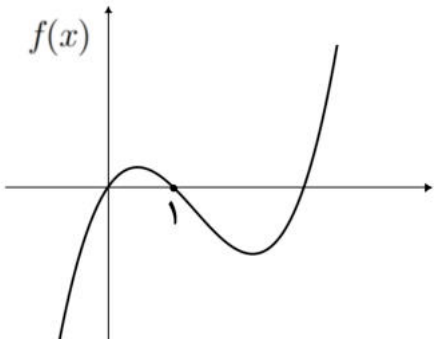
$$\text{مساحت } MEFG = \frac{۳}{۴} \times \text{مساحت } MEC = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۶}S = \frac{۱}{۸}S$$

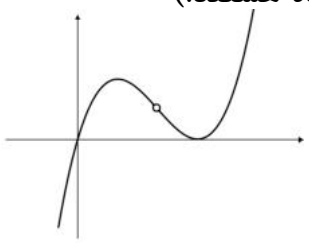
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

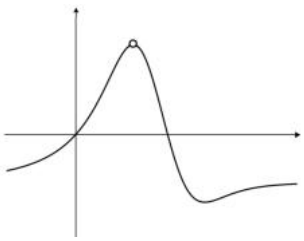
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

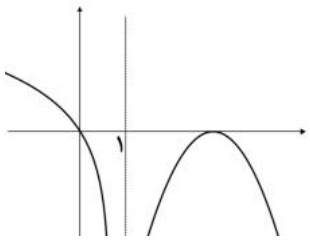
پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

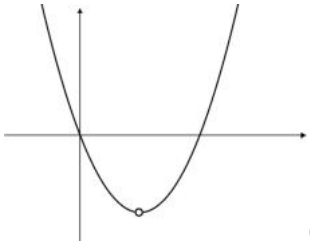
۴. فرض کنید نمودار تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به شکل روبه‌رو باشد. در این صورت نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-۱}$ شبیه کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (نمودارهای همهٔ گزینه‌ها در نقطهٔ $x = ۱$ تعریف نشده هستند.)

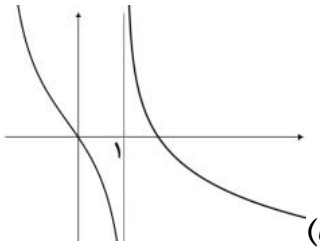


۱)


۲)


۳)


۴)


۵)


پاسخ: ۴

از آنجا که برای اعداد کمتر از صفر $f(x)$ و $x - ۱$ هر دو منفی هستند، حاصل تقسیم آن‌ها عددی مثبت خواهد شد. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نمی‌توانند نمودار تابع $\frac{f(x)}{x-۱}$ باشند. فرض کنید f به جز نقاط صفر و یک، در نقطه c صفر شده است. برای اعداد بیشتر از c، $f(x)$ و $x - ۱$ هر دو مثبت هستند. بنابراین در این محدوده نیز حاصل تقسیم آن‌ها مثبت است. به این ترتیب گزینه های ۳ و ۵ نیز نمی‌توانند جواب مسأله باشند. بنابراین جواب تنها می‌تواند گزینه ۴ باشد. اگر $f(x) = x(x-۱)(x-۲)$، آنگاه $\frac{f(x)}{x-۱} = x(x-۲)$ نموداری شبیه گزینه ۴ دارد.

۵. یک عدد طبیعی را کوچولو می‌نامیم، هرگاه دست‌کم سه مقسوم‌علیه مثبت داشته باشد و برابر مجموع کوچک‌ترین سه مقسوم‌علیه مثبتش باشد. چند عدد کوچولو وجود دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶ ۵) بی‌نهایت

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

پاسخ: ۲

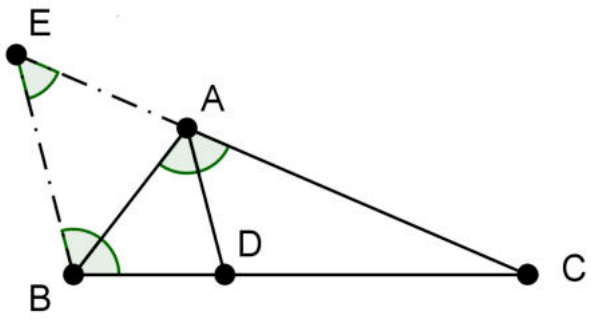
کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مثبت هر عددی یک است و دومین مقسوم‌علیه کوچک عدد اولی مثل p است. سومین مقسوم‌علیه هم عدد اول دیگری مثل q و یا $p^۲$ است. اگر n عددی کوچولو باشد، مقسوم‌علیه سوم آن نمی‌تواند $p^۲$ باشد، چون در این صورت $n = ۱ + p + p^۲$ که در این صورت n نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد.

پس $n = ۱ + p + q$ که $p < q$ دو مقسوم‌علیه اول کوچک n هستند. چون $p|n$ و $q|n$، نتیجه می‌شود، $q|۱ + p$ و $p|۱ + q$. پس $q \le ۱ + p$، از طرف دیگر $p < q$. بنابراین $q = p + ۱$ و در نتیجه p و q دو عدد اول متوالی هستند. این یعنی $p = ۲$ و $q = ۳$. در این صورت n برابر ۶ می‌شود که خاصیت مورد نظر را دارد. پس تنها همین یک عدد کوچولو را داریم و پاسخ گزینه‌ی ۲ است.

۶. در مثلث ABC نقطهٔ D روی ضلع BC به گونه‌ای قرار گرفته که زاویه‌های $\widehat{BAD}$ ، $\widehat{CAD}$ و $\widehat{ABC}$ با هم برابرند و طول پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب برابر ۱ و ۲ است. طول AB چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۵) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

پاسخ: ۳



طول AB را x می‌نامیم. از نقطه‌ی B خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AC را در E قطع کند.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

با توجه به موازی بودن BE و AD داریم:

$$\widehat{BEA} = \widehat{CAD}, \quad \widehat{EBA} = \widehat{BAD}$$

بنابراین، $\widehat{EBA} = \widehat{BEA}$ و در نتیجه مثلث ABE متساوی‌الساقین است، یعنی $EA = BA = x$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ تالس برای دو خط موازی AD و BE،

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{BD} = \frac{۲}{۱}$$

بنابراین $CA = ۲AE = ۲x$ و نیز، $CE = ۳x$.

از طرف دیگر، توجه کنید که $\widehat{CBE} = \widehat{CAB}$، پس دو مثلث CAB و CBE با همین ترتیب رئوس با یک‌دیگر متشابه‌اند. بنابراین،

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC}$$

که با توجه به روابط قبلی به دست می‌آید

$$\frac{۲x}{۳} = \frac{۳}{۳x}$$

که از آن به دست می‌آید $x^۲ = \frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $x = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$.

۷. دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \ldots$ از اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۰ = ۱, \\ a_{n+۱} = ۱۳^{a_n} \quad n \geq ۰. \end{cases}$$

رقم یکان $a_{۱۳۹۲}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۹

پاسخ: ۲

برای تعیین رقم یکان $a_{۱۳۹۲}$ کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم آن به ۱۰ را مشخص کنیم.

برای این منظور دقت کنید که برای هر عدد طبیعی n:

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

$a_{n+1} \equiv ۱۳^{a_n} \equiv ۱^{a_n} \equiv ۱$ (به پیمانه‌ی ۴)

یعنی هر a_n ای به شکل $۴b_n + ۱$ است که b_n خود یک عدد صحیح است. حال داریم

$a_{۱۳۹۲} \equiv ۱۳^{a_{۱۳۹۱}} \equiv ۳^{۴b_{۱۳۹۱}+۱} \equiv (۳^۴)^{b_{۱۳۹۱}} \times ۳ \equiv (۸۱)^{b_{۱۳۹۱}} \times ۳ \equiv ۳$ (به پیمانه‌ی ۱۰)

۸. در مورد اعداد زیر کدام گزینه درست است؟

$$a = ۱۰۰!, \quad b = ۲^{۱۰۰}, \quad c = ۲^{۲^{۲^۲}}$$

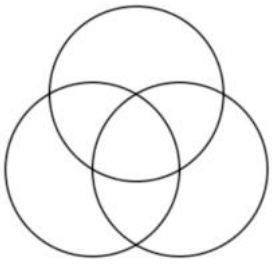
۱) $b < a < c$ ۲) $a < b < c$ ۳) $c < a < b$ ۴) $b < c < a$ ۵) $a < c < b$

پاسخ: ۱

$$b = ۲^{۱۰۰} = \overbrace{۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲}^{۱۰۰} = (\overbrace{۲ \times \cdots \times ۲}^{۹۸}) \times ۲ \times ۲ <$$
$$(۲ \times ۳ \times \cdots \times ۹۹) \times ۱۰۰ = ۱۰۰! = a$$
$$a = ۱ \times ۲ \times \cdots \times ۱۰۰ < ۱۰۰^{۱۰۰} < ۱۲۸^{۱۰۰} = ۲^{۷۰۰} < ۲^{۲^{۱۰}} < ۲^{۲^{۲^۲}} = c$$

پس $b < a < c$.

۹. می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز، هفت ناحیهٔ درون شکل روبه‌رو را رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند (ناحیه‌هایی که فقط در یک نقطه اشتراک دارند همسایه نیستند). این کار به چند طریق ممکن است؟



پاسخ: ۸۴

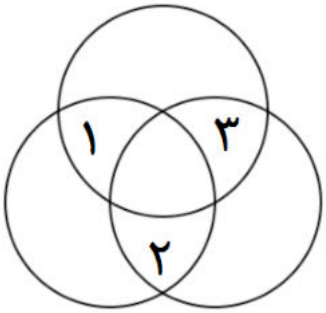
فرض می‌کنیم ناحیه‌های مشخص شده با اعداد $۱, ۲, ۳$ در شکل زیر به ترتیب دارای رنگ‌های X, Y, Z باشند. توجه کنید که تمامی رنگ‌های X, Y, Z نمی‌توانند متمایز باشند زیرا در غیر

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

این صورت ناحیه‌ی مرکزی را با هیچ رنگی نمی‌توان رنگ کرد. اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم.



حالت اول: X, Y, Z همرنگ باشند. در این حالت رنگ مشترک را می‌توان به ۳ حالت انتخاب کرد. همچنین هر یک از دیگر نواحی را می‌توان به دو صورت رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت تعداد رنگ‌آمیزی‌ها برابر $۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴۸$ است.
حالت دوم: در میان X, Y, Z از یک رنگ دوبار و از یک رنگ یک بار استفاده شده باشد. برای انتخاب ناحیه‌ی با رنگ متمایز ۳، برای انتخاب رنگ این ناحیه ۳ و برای انتخاب رنگ دیگر ۲ انتخاب داریم. پس برای مشخص نمودن رنگ ناحیه‌ی $۱, ۲, ۳$ در این حالت $۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$ روش متمایز داریم. حال توجه کنید که رنگ ناحیه‌ی مرکزی به صورت یکتا مشخص می‌شود چرا که از دو رنگ متمایز، همسایه دارد. همچنین دو تا از نواحی گوشه‌ای نیز با هر دو رنگ مجاور هستند و رنگ این نواحی نیز به صورت یکتا مشخص می‌گردد. تنها ناحیه‌ی نامشخص ناحیه‌ی گوشه‌ای است که با دو ناحیه‌ی همرنگ مجاور است و در نتیجه می‌توان آن را به دو شیوه رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت طبق اصل ضرب تعداد شیوه‌های رنگ‌آمیزی برابر $۱۸ \times ۲ = ۳۶$ است.
پس طبق اصل جمع تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی شکل برابر $۳۶ + ۴۸ = ۸۴$ است.

۱۰. وزارت راه و ترابری آزادراهی به طول $۲^{۱۹} = ۵۲۴۲۸۸$ متر بین زاهدان و مشهد احداث کرده است و قصد دارد در یک پروژهٔ بلندمدت این آزادراه را مجهز به چراغ‌های روشنایی کند. در هر روز از بین بزرگ‌ترین قطعه‌هایی از آزادراه که هیچ چراغی در آن نیست، نزدیک‌ترین قطعه

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

به زاهدان انتخاب شده و در نقطهٔ وسط آن یک چراغ نصب می‌شود. هزار و یکمین چراغی که نصب می‌شود، چند متر با مشهد فاصله دارد؟

پاسخ: ۲۳۰۴۰

اولین چراغ در وسط آزادراه احداث می‌شود. چراغ‌های دوم و سوم به ترتیب در $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۳}{۴}$ مسیر زاهدان به مشهد احداث می‌شوند. به همین شکل چراغ‌های چهارم تا هفتم بین آن‌ها و در حالت کلی برای عدد طبیعی n چراغ‌های ۲^n ام تا $۲^{n+۱} - ۱$ ام در میانه راه‌های بین چراغ‌های فعلی قرار خواهند گرفت. می‌دانیم که ۱۰۰۱ بین $۵۱۲ = ۲^۹$ و $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ است و فاصله بین چراغ های متوالی تا قبل از نصب چراغ ۵۱۲ برابر $۱۰۲۴ = \frac{۲^{۱۹}}{۲^۹}$ متر است. در نتیجه فاصله مشهد تا چراغ ۱۰۰۱ ام برابر $۲۳۰۴۰ = ۵۱۲ + ۱۰۲۴ \times (۱۰۰۱ - ۱۰۲۳)$ است.

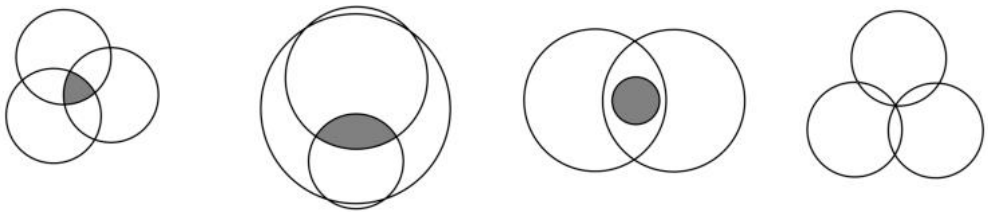
۱۱. چوپانی گوسفند گرسنهٔ خود را در چراگاهی سرسبز با سه طناب مختلف به سه درخت بسته است. گوسفند علف‌های همهٔ قسمت‌هایی از چراگاه که به آن دست‌رسی دارد را می‌خورد. ناحیه‌ای از چراگاه که گوسفند علف‌های آن را خورده است، کدام شکل نمی‌تواند باشد؟

۱) تک نقطه ۲)  ۳)  ۴)  ۵) 

پاسخ: ۵

به مرکز هر درخت، دایره‌ای به شعاع طول طنابی که به آن وصل است رسم می‌کنیم. ناحیه‌ای که گوسفند علف‌های آن را می‌خورد دقیقاً اشتراک ناحیهٔ درونی این سه دایره است. بنابراین باید تعیین کنیم که اشتراک ناحیه‌ی داخل سه دایره، کدام شکل نمی‌تواند باشد.

گزینه‌های ۱ تا ۴ می‌توانند باشند، مانند شکل‌های زیر:



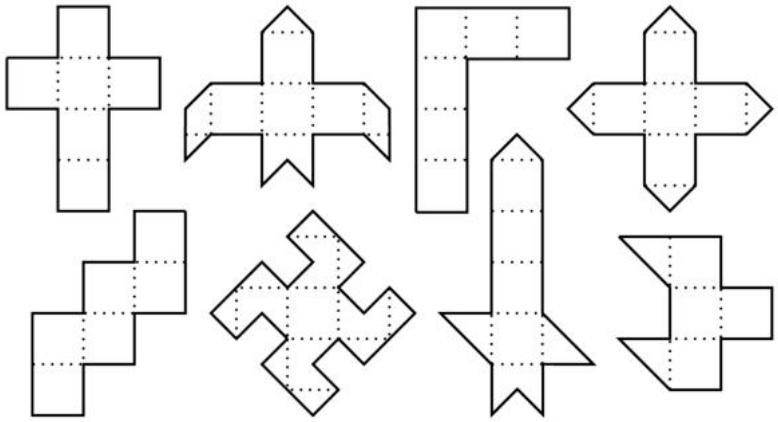
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

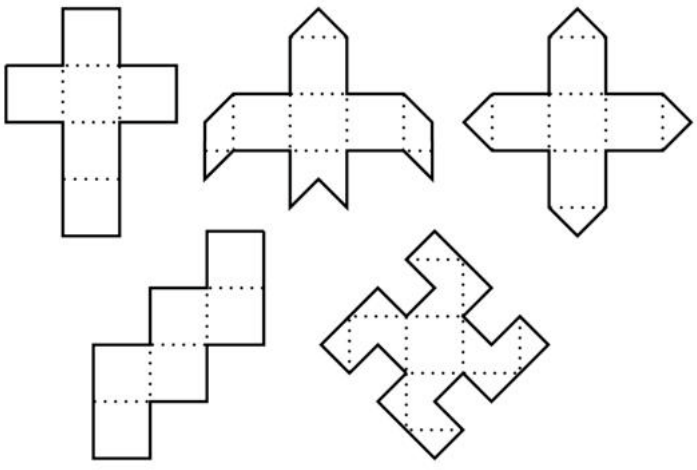
اما گزینه‌ی ۵ نمی‌تواند ناحیهٔ اشتراک سه دایره باشد. زیرا مرز آن از ۴ کمان تشکیل شده در حالی که ما تنها سه دایره داریم پس باید دوتا از کمان‌ها متعلق به یک دایره باشند اما به توجه به شکل، هیچ دوتایی متعلق به یک دایره نیستند. پس گزینه‌ی ۵ صحیح است.

۱۲. با تا کردن چند تا از شکل‌های زیر از روی خطچین‌ها می‌توان یک مکعب ساخت؟



پاسخ: ۵

با اندکی تجسم فضایی می‌توان دید که شکل‌های زیر می‌توانند باز شدهٔ یک مکعب باشند.

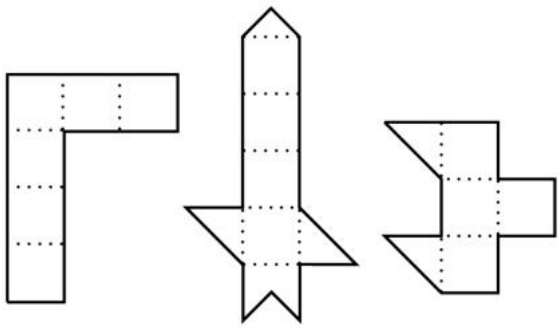


https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

اما با اشکال زیر نمی‌توان یک مکعب ساخت. شکل سمت راست پنج مربع دارد. در شکل وسط نیز مسیری موازی اضلاع به طول پنج وجود دارد. در شکل سمت چپ نیز مشاهده می‌شود که هر طور شکل را تا کنیم یک مکعب کامل به دست نمی‌آید.



۱۳. کوچک‌ترین عدد طبیعی که دارای ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت است، چند عامل اول دارد؟

پاسخ: ۶

می‌دانیم $۱۳۹۲ = ۲۹ \times ۱۶ \times ۳$ حالت‌های مختلف برای عددی با ۱۳۹۲ مقسوم‌علیه مثبت فقط چهار حالت زیر است که در آن‌ها همهٔ p_iها اعدادی اول هستند.

حالت اول: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۱۵} \times p_۳^{۲}$

حالت دوم: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۷} \times p_۳^{۲} \times p_۴^{۱}$

حالت سوم: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۳} \times p_۳^{۳} \times p_۴^{۲}$

حالت چهارم: $p_۱^{۲۸} \times p_۲^{۲} \times p_۳^{۱} \times p_۴^{۱} \times p_۵^{۱} \times p_۶^{۱}$

در هرکدام از حالت‌های بالا برای کوچک‌تر شدن عدد باید از عددهای اول کوچک به ترتیب استفاده کنیم پس کافی است عددهای زیر را باهم مقایسه کنیم و کوچک‌ترین آن‌ها را بیابیم.

$a_۱ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۱۵} \times ۵^{۲}$

$a_۲ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۲} \times ۷^{۱}$

$a_۳ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۳} \times ۵^{۳} \times ۷^{۲}$

$a_۴ = ۲^{۲۸} \times ۳^{۲} \times ۵^{۱} \times ۷^{۱} \times ۱۱^{۱} \times ۱۳^{۱}$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

حال با انجام محاسبات جواب را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{۳^۸}{۷} \Rightarrow a_۱ > a_۲$$

$$\frac{a_۴}{a_۳} = \frac{۱۱ \times ۱۳}{۳ \times ۵^۲ \times ۷} \Rightarrow a_۳ > a_۴$$

$$\frac{a_۲}{a_۴} = \frac{۳^۵ \times ۵}{۱۱ \times ۱۳} \Rightarrow a_۲ > a_۴$$

پس جواب سوال $a_۴$ است که دارای ۶ عامل اول است.

۱۴. در وب‌گاه المپیاد ریاضی ایران (www. mathysc. ir)کیفیت آزمون مرحلهٔ اول سال گذشته به نظرسنجی گذاشته شده است. گزینه‌های نظرسنجی عبارت‌اند از «خیلی خوب بود.»، «عالی بود.» و «به‌تر از این نمی‌شد.»! پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، درصد گزینه‌ها به ترتیب دقیقاً برابر ۲۵، ۵۰ و ۲۵ بوده است و پس از آن این نسبت‌ها به ۲۴، ۴۸ و ۲۸ تبدیل می‌شود. به غیر از عباس چند نفر در نظر سنجی شرکت کرده‌اند؟

پاسخ: ۲۴

فرض کنید پیش از عباس n نفر در نظر سنجی شرکت کرده‌باشند. از آنجایی که یکی از گزینه‌ها دقیقاً ۲۵ درصد از آرا را به دست آورده است، پس n باید بر ۴ بخشپذیر باشد. فرض کنید $n = ۴k$. پس از رأی عباس گزینه‌ی آخر («به‌تر از این نمی‌شد.») افزایش یافته است پس عباس به این گزینه رأی داده‌است. با توجه به صورت سوال پیش از این که عباس نظر خود را ثبت کند، k نفر به گزینه‌ی آخر رأی دادند. پس بعد از رأی عباس $k+۱$ نفر و در نتیجه $\frac{k+۱}{۴k+۱} \times ۱۰۰$ درصد از افراد این گزینه‌را انتخاب کرده‌اند. با توجه به صورت سوال این مقدار برابر ۲۸ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{k+۱}{۴k+۱} \times ۱۰۰ = ۲۸ \Rightarrow ۱۰۰k + ۱۰۰ = ۱۱۲k + ۲۸ \Rightarrow ۷۱ = ۱۲k \Rightarrow k = ۶$$

پس $n = ۴k = ۲۴$ پاسخ سوال است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۵. چند زوج مرتب (p,q) از اعداد اول وجود دارد که برای آن‌ها داشته باشیم $p^۲-pq+q^۲=۳۷^۲$.

پاسخ: ۱

به دلیل تقارن مسئله نسبت به p و q می‌توان فرض کرد $q\le p$. حال داریم:

$$p(p-q)=(۳۷-q)(۳۷+q)$$

با توجه به این که سمت چپ نامنفی است، باید سمت راست هم نامنفی باشد و در نتیجه $q\le ۳۷$. توجه کنید که چون $(۳۷-q)(۳۷+q)$ بر p بخش‌پذیر است، $p|۳۷-q$ و یا $p|۳۷+q$. اگر $p|۳۷-q$، نتیجه می‌شود که $p<۳۷$ و در نتیجه $p(p-q)<۳۷(۳۷-q)<(۳۷+q)(۳۷-q)$. پس این حالت ممکن نیست و تنها حالت $p|۳۷+q$ باقی می‌ماند. دقت کنید که اگر $p=۳۷+q$ باشد، زوجیت p و q متفاوت است، و چون $p>q$ است، $q=۲$ و $p=۳۹$ است. اما ۳۹ اول نیست. در نتیجه داریم $p\le \frac{۳۷+q}{۲}\le ۳۷$.

$$p^۲-pq+q^۲=p^۲+q(q-p)\le ۳۷^۲+۰=۳۷^۲$$

چون این نابرابری به تساوی تبدیل شده است، باید $p=۳۷$ و $q=p$ باشد. ضمناً اگر $p=q=۳۷$ باشد، این معادله برقرار است. بنابراین با توجه به اول بودن ۳۷، $(۳۷,۳۷)$ تنها جواب این معادله در اعداد اول است.

۱۶. «ضربین‌حساب» ماشینی است که از یک صفحهٔ نمایش‌گر با قابلیت نمایش اعداد خیلی بزرگ و دکمه‌هایی با شماره‌های ۱ الی ۹ تشکیل شده است. با فشار دادن هر دکمه، ضربین‌حساب بلافاصله عدد صفحهٔ نمایش‌گر را در عدد مربوط به آن دکمه ضرب می‌کند و حاصل را به جای عدد قبلی در صفحه نمایش می‌دهد. اگر ابتدا عدد ۱ روی صفحهٔ نمایش‌گر نوشته شده باشد، برای به دست آوردن عدد $۵^{۱۳۹۲}\times ۳^{۱۴۳۵}\times ۲^{۲۰۱۴}$ دست‌کم چند بار باید از دکمه‌های ضربین‌حساب استفاده کرد؟ (برای مثال می‌توان با سه بار استفاده از دکمه‌های ضربین‌حساب به ۷۲۹ دست یافت، زیرا $۹\times ۹\times ۹=۷۲۹$.)

پاسخ: ۲۷۸۱

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

عدد مورد نظر در صورت مسأله را A بنامید. ابتدا نشان می‌دهیم که با ۲۷۸۱ بار استفاده از دکمه‌ها می‌توان عدد A را نمایش داد:

۱۳۹۲ بار دکمه‌ی ۵ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{۲۰۱۳}{۳}$ بار دکمه‌ی ۸ را فشار می‌دهیم، سپس $\frac{۱۴۳۴}{۲}$ بار دکمه‌ی ۹ را فشار می‌دهیم و در نهایت یک بار دکمه‌ی ۶ را فشار می‌دهیم. عددی که به دست می‌آید برابر است با

$$۶ \times ۹^{\frac{۱۴۳۴}{۲}} \times ۸^{\frac{۲۰۱۳}{۳}} \times ۵^{۱۳۹۲}$$

که برابر با A است. به این ترتیب در مجموع $۲۷۸۱ = ۱ + \frac{۱۴۳۴}{۲} + \frac{۲۰۱۳}{۳} + ۱۳۹۲$ بار از دکمه‌های ضربین حساب استفاده کرده‌ایم.

اکنون نشان می‌دهیم با کم‌تر از این تعداد نمی‌توان این کار را انجام داد. یک روش استفاده از دکمه‌ها را بهینه می‌نامیم اگر با کم‌ترین تعداد استفاده از دکمه‌ها به عدد A برسیم. توجه کنید که ما ناگزیر هستیم که ۱۳۹۲ بار از دکمه‌ی ۵ استفاده کنیم. زیرا در بین ارقام ۱ تا ۹، تنها عددی که عامل ۵ دارد، رقم ۵ است و ما باید ۱۳۹۲ عامل ۵ را ایجاد کنیم پس باید ۱۳۹۲ بار از رقم ۵ استفاده کنیم.

ادعا می‌کنیم روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از رقم ۶ استفاده شده است، زیرا به جای هر دو بار استفاده از رقم ۶ می‌توانیم یک بار ۴ و یک بار ۹ را استفاده کنیم. به این ترتیب می‌توانیم ۶ها را دوتا دوتا با ۴ و ۹ جایگزین کنیم تا در نهایت حداکثر یک ۶ باقی بماند. از طرف دیگر روشن است که در روش بهینه، ما حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم چون اگر بیش از یک بار از ۳ استفاده کرده باشیم، می‌توانیم به جای دو تا ۳، یک بار از ۹ استفاده کنیم و به این ترتیب تعداد دکمه‌های استفاده شده را کاهش دهیم که این با بهینه بودن روش مورد نظر تناقض دارد. بنابراین حداکثر یک بار از ۳ استفاده کرده‌ایم. مشابهاً می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر یک بار از ۲ استفاده کرده‌ایم چون به جای دو بار استفاده از ۲ می‌توان یک بار از ۴ استفاده کرد. همچنین روش بهینه‌ای وجود دارد که در آن حداکثر یک بار از ۴ استفاده شده است. زیرا به جای هر دو بار استفاده از ۴ می‌توان یک بار از ۲ و یک بار از ۸ استفاده کرد. همچنین روشن است که امکان ندارد هم از ۲ و هم از ۴ استفاده کرده باشیم زیرا به جای آن‌ها می‌توان یک بار از ۸ استفاده کرد.

حال دقت کنید که عوامل ۲ از یکی از اعداد ۸ یا ۶ یا ۴ یا ۲ می‌آیند. اگر تعداد استفاده از این

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

ارقام به ترتیب $a_۸$، $a_۶$، $a_۴$ و $a_۲$ باشند، داریم

$$۲۰۱۴ = ۳a_۸ + ۲a_۴ + a_۶ + a_۲$$

زیرا در نهایت باید ۲۰۱۴ عامل ۲ به دست بیاوریم.

با توجه به اینکه باقیمانده‌ی ۲۰۱۴ بر ۳، ۱ است و $۳a_۸$ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس باید باقیمانده‌ی $۲a_۴ + a_۶ + a_۲$ نیز بر ۳ برابر با ۱ باشد، اما با توجه به توضیحات بالا، $a_۲$، $a_۴$ و $a_۶$ هرکدام صفر یا یک هستند و $a_۲$ و $a_۴$ هر دو نمی‌توانند یک باشند. با بررسی همه‌ی حالتها، به راحتی می‌توان دید که تنها حالات ممکن عبارتند از

$$a_۲ = ۱, a_۴ = a_۶ = ۰$$

$$a_۶ = ۱, a_۲ = a_۴ = ۰$$

اگر حالت اول رخ دهد، از رقم ۶ استفاده نکرده‌ایم و از طرف دیگر چون از رقم ۲ استفاده کرده‌ایم با توجه به توضیحات قبل از رقم ۳ هم استفاده نکرده‌ایم بنابراین تنها رقمی که عامل ۳ دارد رقم ۹ است ولی این غیر ممکن است زیرا هر ۹، دو عامل ۳ دارد و حال آنکه در مجموع به ۱۴۳۵ عامل ۳ نیاز داریم که عددی فرد است.

پس حالت اول غیر ممکن است و حالت دوم رخ می‌دهد. پس یک بار از ۶ استفاده کرده‌ایم و یک عامل ۲ به دست آورده‌ایم و سایر عوامل ۲ را باید از ۸ به دست بیاوریم. پس باید $\frac{۲۰۱۳}{۳}$ بار از ۸ استفاده کنیم.

حال چون یک بار از ۶ استفاده کرده‌ایم پس یک عامل ۳ به دست آورده‌ایم و ۱۴۳۴ عامل ۳ باقی می‌ماند که چون ۱۴۳۴ بر ۲ بخش‌پذیر است می‌توانیم همه‌ی آن‌ها را با استفاده از ۹ به دست آوریم. پس $\frac{۱۴۳۴}{۲}$ بار از ۹ استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب در روش بهینه، به همان تعداد ۲۷۸۱ تا استفاده از دکمه‌ها نیاز داریم.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۷. در یک پادگان ۱۱۹۶ سرباز در ۱۳ ردیف ۹۲تایی به شکل منظم ایستاده‌اند. آخرین سرباز از ردیف آخر یک سرباز را می‌بیند اگر روی خط واصل بین آن‌ها، سرباز دیگری نباشد. او چند سرباز از ردیف اول را می‌بیند؟ (سربازها را نقطه فرض می‌کنیم.)

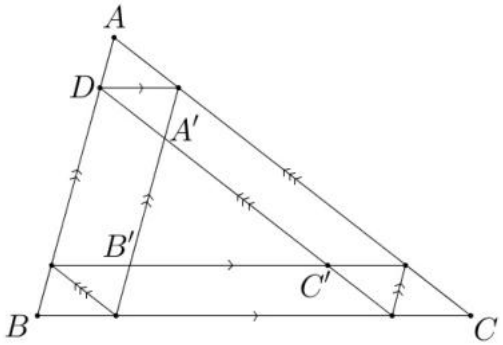


پاسخ: ۳۱

فرض کنید که این سرباز در ردیف آخر نفر سمت چپ باشد و سربازهای هر ردیف را به ترتیب از چپ به راست با شماره‌های ۰، ۱، ... و ۹۱ مشخص کنیم. به وضوح سرباز آخر، سرباز شمارهٔ ۰ از ردیف اول را نمی‌بیند. اما برای هر $i \in \{1,2,\dots,91\}$، سرباز شمارهٔ i دیده می‌شود، هرگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه i و ۱۲ برابر ۱ باشد. زیرا اگر i و ۱۲ مقسوم‌علیه مشترکی غیر از ۱ مثلاً j داشته باشند، سرباز شماره‌ی $\frac{i}{j}$ که در $\frac{12}{j}$ ردیف جلوتر از ردیف آخر ایستاده است، بین آن‌ها قرار دارد و بنابراین سرباز شمارهٔ i از ردیف اول دیده نمی‌شود.
بنابراین باید، تعداد اعدادی در $\{1,2,\dots,91\}$ را بشماریم که نسبت به ۱۲ اول هستند، یعنی معادلاً بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند. باقی‌ماندهٔ تقسیم چنین اعدادی بر ۶ برابر ۱ یا ۵ است.
باقی‌ماندهٔ تقسیم۱۶ عدد $\{1,7,\dots,91\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۱ است.
باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۵ عدد $\{5,11,\dots,89\}$ در تقسیم بر ۶ برابر ۵ است.

پس در کل $16 + 15 = 31$ عدد در این مجموعه وجود دارند که نسبت به ۱۲ اول هستند و بنابراین ۳۱ سرباز از ردیف اول دیده می‌شوند.

۱۸. مطابق شکل روبه‌رو خطوطی موازی اضلاع مثلث ABC رسم کرده‌ایم تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود، به گونه‌ای که محیطش نصف محیط ABC باشد. طول AB چند برابر طول AD است؟



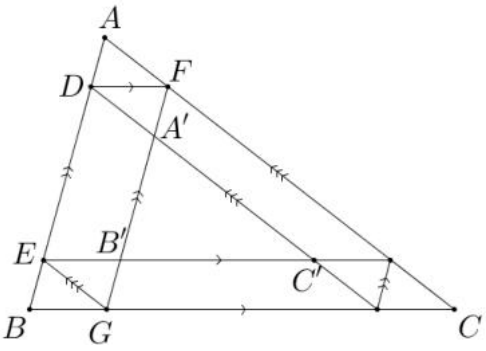
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

پاسخ: ۶

نقطه‌های E، F و G را مطابق شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



در این صورت چهارضلعی‌های $DAFA'$، $EAFG$، $EDA'G$، $BDFG$، $EDFB'$ و $BEB'G$ همگی متوازی‌الاضلاع هستند و در نتیجه $FB' = DE$ و $FB' = DE = A'G$. پس $FA' = B'G$ و این مقدار برابر طول AD و همین‌طور طول BE است.

$$AB = AD + DE + EB = DE + ۲AD = FB' + ۲AD = A'B' + ۳AD$$

با توجه به این که اضلاع ABC و $A'B'C'$ موازی هستند، این دو مثلث متشابه هستند و چون محیط ABC دو برابر $A'B'C'$ است داریم $AB = ۲A'B'$ و با توجه به بالا $A'B' = ۳AD$. پس در نهایت

$$AB = A'B' + ۳AD = ۶AD$$

پس طول AB شش برابر AD است.

۱۹. مجموعهٔ S را مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثل a می‌گیریم که برای آن‌ها اعداد حقیقی x و y موجود باشند، به گونه‌ای که

$$a(a - ۱) + x(x - ۱) + y(y - ۱) = \frac{۳}{۲}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

می‌دانیم که S یک بازه است. طول این بازه چه‌قدر است؟

پاسخ: ۳

توجه کنید که معادلهٔ صورت سوال را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

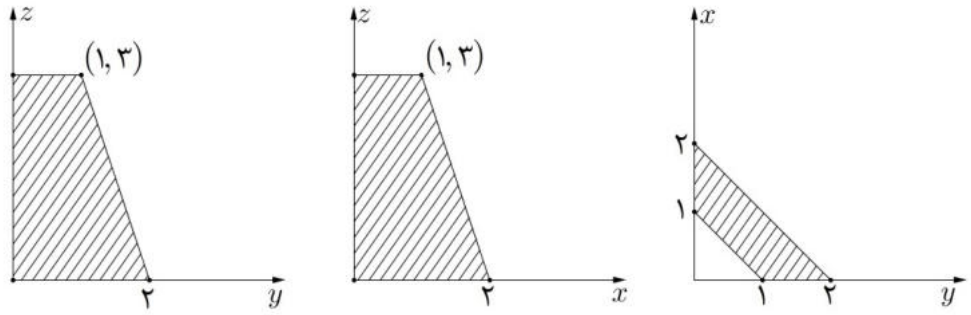
$$(a^۲ - a + \frac{۱}{۴}) + (x^۲ - x + \frac{۱}{۴}) + (y^۲ - y + \frac{۱}{۴}) = \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

و در نتیجه:

$$(a - \frac{۱}{۲})^۲ + (x - \frac{۱}{۲})^۲ + (y - \frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

حال توجه کنید که $(x - \frac{۱}{۲})^۲, (y - \frac{۱}{۲})^۲$ عباراتی نامنفی هستند پس همواره $(a - \frac{۱}{۲})^۲ \leq \frac{۹}{۴}$ پس a همواره در بازهٔ $[-۱, ۲]$ قرار دارد. همچنین به سادگی دیده می‌شود که به ازای هر a در بازهٔ $[-۱, ۲]$، با قرار دادن $x = \frac{۱}{۲}$ و با توجه به پوشا بودن $(y - \frac{۱}{۲})^۲$ روی بازه‌ی $[۰, \infty)$، معادله می‌تواند برقرار باشد. پس طول بازهٔ مورد نظر برابر ۳ است.

۲۰. تصویر عمود یک چهارضلعی مسطح در فضا روی سه صفحهٔ مختصات به شکل‌های زیر است. مجموع مربع‌های طول قطرهای این چهارضلعی چه‌قدر است؟



پاسخ: ۲۸

چون تصویر این چهارضلعی روی هریک از صفحه‌ها خود یک چهار ضلعی مسطح است، رأس‌های آن باید به رأس‌های چهارضلعی تصویر برود. به این ترتیب رأسی که تصویرش در صفحه xy به نقطه $(۱, ۰)$ می‌رود، در صفحه xz تنها می‌تواند به $(۱, ۳)$ برود و درنتیجه مختصات آن در فضا برابر $(۱, ۰, ۳)$ است. به همین شکل سه راس دیگر چهار ضلعی نقاط

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

$(۰,۱,۳)$، $(۰,۰,۲)$ و $(۰,۲,۰)$ است. بنابراین مجموع مربع‌های قطرهای این چهارضلعی برابر $۲(۱^۲+۲^۲+۳^۲)=۲۸$ است.

۲۱. چند چهارتایی مرتب (x,y,z,t) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} xy+yz+zx=t^۲ \\ yz+zt+ty=x^۲ \\ zt+tx+xz=y^۲ \\ tx+xy+yt=z^۲ \end{cases}$$

۱) ۱
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۲۵
۵) بی‌نهایت

پاسخ: ۱

با کم کردن رابطه دوم از اول داریم:

$$z(x-t)+y(x-t)=(t-x)(t+x)\Rightarrow (x-t)(x+y+z+t)=۰$$

و مشابه آن با کم کردن رابطه سوم از دوم، چهارم از سوم و اول از چهارم:

$$(y-x)(x+y+z+t)=۰,\quad (z-y)(x+y+z+t)=۰,\quad (t-x)(x+y+z+t)=۰$$

بنابراین اگر $x+y+z+t\neq ۰$، چهار عدد با هم برابر می‌شوند که با جایگذاری در معادله هر چهار متغیر برابر صفر می‌شوند.

اما اگر $x+y+z+t=۰$ آنگاه $t=-x-y-z$ و در نتیجه با جایگذاری در معادله اول:

$$xy+yz+zx=(-x-y-z)^۲=x^۲+y^۲+z^۲+۲xy+۲yz+۲zx\Rightarrow$$

$$x^۲+y^۲+z^۲+xy+yz+zx=۰\Rightarrow$$

$$(x+y)^۲+(y+z)^۲+(z+x)^۲=۰\Rightarrow x=-y,y=-z,z=-x\Rightarrow x=y=z=۰$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

و در نتیجه t هم صفر می‌شود. پس در این حالت به همان جواب $(۰, ۰, ۰, ۰)$ می‌رسیم. بنابراین این چهارتایی تنها جواب معادله است.

۲۲. تنها دزد شکرستان از دو سال پیش تحت تعقیب نظمیهٔ شکرستان قرار دارد. طبق تحقیقات نظمیه، تعداد سفرهای او بین شکرستان و ۴ نمکستان‌های شرقی، غربی، شمالی و جنوبی به صورت زیر بوده است، (برای مثال این دزد سه سفر از نمکستان شرقی به شکرستان داشته است). اکنون او در کدام شهر مخفی شده است؟

به \ از	شکرستان	ن. شرقی	ن. غربی	ن. شمالی	ن. جنوبی
شکرستان	×	۳	۱	۰	۲
ن. شرقی	۰	×	۲	۰	۱
ن. غربی	۱	۰	×	۳	۰
ن. شمالی	۲	۰	۱	×	۱
ن. جنوبی	۲	۰	۰	۲	×

۱) شکرستان
۲) نمکستان شرقی
۳) نمکستان غربی
۴) نمکستان شمالی
۵) نمکستان جنوبی

پاسخ: ۱

جدول زیر نشان می‌دهد که این دزد از هر کدام از شهرها چند بار خارج شده است و چند بار به هر کدام از شهرها وارد شده است.

نام شهر	شکرستان	ن. شمالی	ن. جنوبی	ن. غربی	ن. شرقی
تعداد خروج	۵	۵	۴	۴	۳
تعداد ورود	۶	۴	۴	۴	۳

بنابراین او از شکرستان ۵ بار خارج شده است و ۶ بار به این شهر برگشته است، بنابراین اکنون در این شهر است و پاسخ درست گزینه‌ی (۱) است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

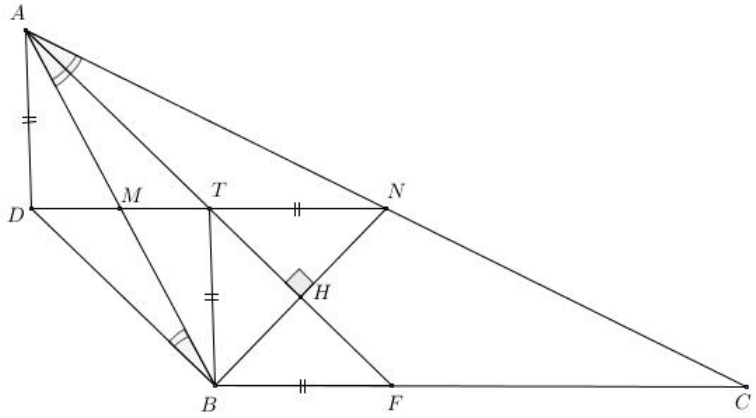
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

توضیح. هم‌چنین با استدلال مشابه می‌توان فهمید که او سفر را از نمکستان شمالی آغاز کرده است، چون ۵ بار از این شهر خارج شده و تنها ۴ بار به آن بازگشته است.

۲۳. طول اضلاع AB، AC و BC از مثلث ABC به ترتیب ۲ و ۴ و $\sqrt{7}$ است. خطی که وسط‌های AB و AC را به هم وصل می‌کند با خطی که از B موازی با نیم‌ساز A رسم می‌شود در نقطهٔ D برخورد می‌کند. طول AD چه‌قدر است؟

پاسخ: ۰



مطابق شکل زیر فرض کنید M وسط AB و N وسط AC باشد خط BN را رسم کنید چون مثلث ABN متساوی‌الساقین است پس نیم‌ساز آن ارتفاع نیز هست فرض کنید H پای ارتفاع وارد از A بر BN و T تقاطع MN با AH باشد. چهارضلعی $ADBT$ متوازی‌الاضلاع است زیرا دو مثلث AMT و BMD با هم برابر هستند در نتیجه $AD = BT$. از طرفی چون مثلث ABH با مثلث ANH هم‌نهشت است بنابرین می‌توان نتیجه گرفت $BT = TN$. پس کافی است مقدار TN را حساب کنیم، فرض کنید F محل برخورد نیم‌ساز با ضلع BC باشد، در مثلث AFC چون TN میان‌خط (خطی موازی یک ضلع که از وسط دو ضلع دیگر عبور می‌کند) است پس $TN = \frac{۱}{۲}FC$ و هم‌چنین می‌دانیم نیم‌ساز ضلع را به نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند

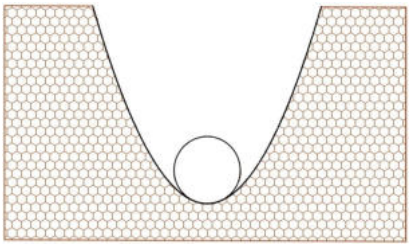
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

درنتیجه

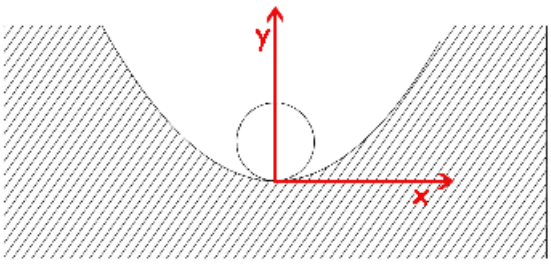
$$AD = BT = TN = \frac{۱}{۲}FC = \frac{۱}{۲}\frac{AC \times BC}{AC + AB} = \frac{\sqrt{۷}}{۳} = ۰.۸۸۱...$$

۲۴. وزارت نفت کانالی بین بوشهر و ایلام حفر کرده است و قصد دارد لولهٔ انتقال گازی را در آن قرار دهد. سطح مقطع لوله دایره و سطح مقطع کانال به شکل قسمتی از یک سهمی است. (سهمی نمودار یک چندجمله‌ای درجه دوم است.) اگر عرض و عمق کانال برابر ۱ متر باشد، قطر بزرگ‌ترین لوله‌ای که می‌توان در کانال قرار داد به طوری که با پایین‌ترین نقطهٔ کانال تماس داشته باشد، چند سانتی‌متر است؟



پاسخ: ۲۵

ابتدا فرض می‌کنیم لوله و کانال در مبدأ با یکدیگر تماس دارند و مختصات را مانند شکل معین می‌کنیم. قطر لوله در صورتی مناسب است که اگر پایین لوله (دایره) را در کف کانال (سهمی) قرار دهیم، دایره و سهمی برخورد دیگری نداشتند باشند.



معادله‌ی سهمی معرفی شده در صورت سوال برابر است با:

$$y = ۴x^۲$$

همچنین معادله‌ی دایره‌ی معرفی شده به قطر D و مماس بر سهمی در مبدأ برابر است با:

$$(y - \frac{D}{۲})^۲ + x^۲ = \frac{D^۲}{۴} \Rightarrow y^۲ - yD + \frac{D^۲}{۴} + x^۲ = \frac{D^۲}{۴} \Rightarrow y^۲ - yD + x^۲ = ۰$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

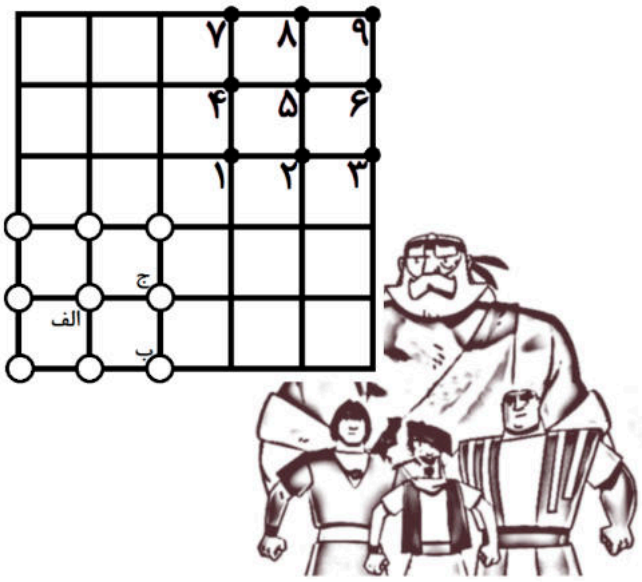
پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

با استفاده از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$y^۲ - yD + \frac{y}{۴} = ۰$$

و معادلهٔ فوق برقرار است اگر $y = ۰$ (که همان نقطهٔ تماس است و نقطه‌ی جدیدی به حساب نمی‌آید) و یا $y = D - \frac{۱}{۴}$. چنانچه $D \leq \frac{۱}{۴}$، y عددی نامثبت خواهد بود که نشان دهندهٔ عدم برخورد جدید است اما اگر $D > \frac{۱}{۴}$، در نقطه‌ی $(D - \frac{۱}{۴}, \sqrt{\frac{D}{۴} - \frac{۱}{۱۶}})$ برخورد خواهند داشت و این نشان می‌دهد که در این صورت قطر لوله مناسب نبوده است. پس حداکثر قطر لوله برابر $\frac{۱}{۴}$ متر یا همان ۲۵ سانتی‌متر است.

۲۵. پهلوان پوریای ولی از یاور خواسته که ۹ میل زورخانه را از نقاطی که با دایرهٔ توخالی نمایش داده شده به نقاطی که با دایرهٔ توپر نمایش داده شده ببرد، به‌نحوی که مجموع فواصل ۹ جفت نقطهٔ ابتدایی و انتهایی، بیش‌ترین مقدار ممکن شود. (دقت کنید که در هر نقطه یک میل قرار می‌گیرد.) در این صورت میل‌های الف و ب و ج به‌ترتیب باید به کدام نقاط منتقل شوند؟



۱) ۵، ۳، ۲
۲) ۵، ۷، ۸
۳) ۹، ۷، ۸
۴) ۵، ۷، ۴
۵) نمی‌توان تعیین کرد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

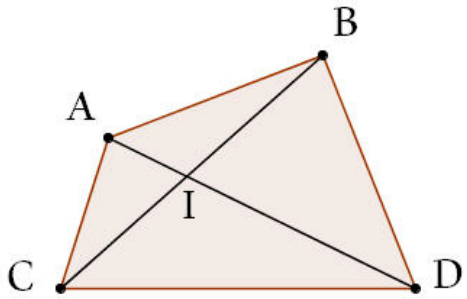
پاسخ‌نامه آزمون مرحلهٔ اول سی و دومین المپیاد ریاضی کشور ☺

پاسخ: ۵

لم: در هر چهار ضلعی محدب مجموع طول قطرها از مجموع طول دو ضلع روبرو بیشتر است.

با نوشتن نامساوی مثلث برای مثلث‌های ABI و CDI مشاهده می‌کنیم که:

$$AD + BC > AB + CD$$



ادعا می‌کنیم اگر مجموع فواصل ۹ زوج نقطه بیشترین مقدار شود، باید هر دو مسیری بین نقاط ابتدایی و انتهایی همدیگر را قطع کنند. زیرا اگر میل نقطه A به B و میل نقطه C به D برود و AB و CD برخورد نداشته باشند، طبق لم بالا با بردن میل نقطه A به D و میل نقطه C به B مسیر بیشتری طی می‌شود. حال به میل نقطه ب در صورت سوال نگاه کنید. این میل تنها به نقطه‌ای ۷ می‌تواند منتقل شود تا با تمام مسیرها برخورد داشته باشد. (اگر به این نقطه نرود با مسیری که به نقطه ۷ می‌رسد برخورد ندارد.) پس نقطه ب به نقطه ۷ می‌رود. به همین شکل شمال غربی ترین میل نیز باید به نقطه ۳ برود. به همین طریق می‌توان بررسی کرد که میل‌های نقاط ج ، بالا، پایین و سمت راست الف نیز باید به ترتیب به نقاط ۴، ۲، ۶ و ۸ بروند تا با تمام خطوط دیگر برخورد کند

اما میل‌های روی قطر مربع باقی می‌مانند. این میل‌ها به هر ترتیبی به نقط ۱، ۵ و ۹ منتقل شوند مجموع جابه جایی ثابت می‌ماند. بنابراین برای جای‌گذاری میل نقطه الف سه حالت وجود دارد و به طور یکتا مشخص نمی‌شود.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید.

جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰٫۷۳ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شمارهٔ گزینهٔ درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینهٔ شمارهٔ ۳ درست است باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه‌های بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به‌علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. مأمور آمار، یک سرشماری در شکرستان انجام داده است. فراوانی نسبی تعداد خانواده‌ها به صورت زیر است:

تعداد اعضای خانواده	۲	۳	۴	۵	۶
درصد	۱۰	۳۰	۳۰	۱۰	۲۰

چند درصد از مردم، در خانواده‌های ۲ نفری زندگی می‌کنند؟

۲. کم‌ترین مقدار $\frac{a^۲}{b}$ در مجموعهٔ زیر چند است؟

$$\left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, (a+۱)(b+۱) = ab, ۰ \leq b\right\}$$

۳. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش‌پذیر باشد؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

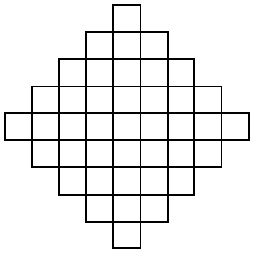
آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۴. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ طول ضلع AB برابر ۴ و طول دو ساقِ AD و BC برابر ۲ است. زاویهٔ $\angle ABC$ نیز برابر ۱۲۰° درجه است. اگر E محل برخورد دو قطر ذوزنقه باشد، نسبت $\frac{BE}{DE}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$ ۵) $\frac{۲}{۳}$

۵. تعدادی مُهر مربعی شکل با ابعاد ۱×۱، ۲×۲، ۳×۳، ۴×۴ و ۵×۵ به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک مُهر را آغشته به رنگ کرده و سپس با کوبیدن آن روی نقشهٔ روبه‌رو آن را رنگ کنیم به طوری که تمامی سطح مهر درون نقشه قرار گیرد. دست‌کم چند بار باید مُهر روی نقشه بکوبیم تا همهٔ جای نقشه رنگ شود؟ (ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



۶. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^۲y + xy^۲ = ۳۰ \\ xy + x + y = ۱۱ \end{cases}$$

۷. در لحظه‌ای که ماهوارهٔ امید در ارتفاع ۲۵۶ کیلومتری از سطح زمین قرار داشته، فاصلهٔ ماهواره تا دورترین نقطهٔ روی زمین که می‌توانسته آن را ببیند چند کیلومتر بوده است؟ (زمین را کره‌ای به شعاع ۶۳۷۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)



۸. چند چهارتایی (a,b,c,d) از اعداد طبیعی در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند؟

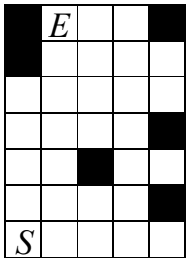
$$a^b = cd, \quad b^c = da, \quad c^d = ab, \quad d^a = bc.$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) بی‌نهایت

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور



۹. در شکل روبه‌رو، مهره‌ای ابتدا در خانهٔ S قرار دارد و در هر قدم می‌توانیم آن را در یکی از جهت‌های بالا، چپ و راست یک خانه جابه‌جا کنیم، بدون این‌که از جدول خارج شود یا وارد خانه‌های سیاه‌رنگ شود. اگر بخواهیم از هیچ خانه‌ای بیش از یک مرتبه عبور نکنیم، به چند روش مختلف می‌توان مهره را به خانهٔ E رساند؟

۱۰. حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دوتایی از آن‌ها مربع کامل باشد؟

۱۱. برای دو عدد طبیعی a و b عمل $\hat{}$ به این صورت تعریف می‌شود: $a \hat{} b = a^b$. عمل $\otimes$ نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

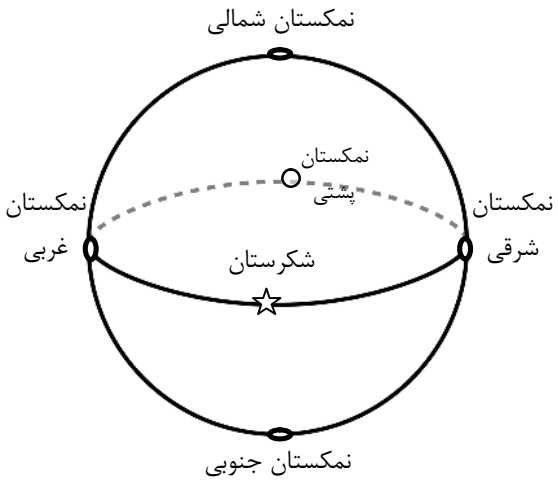
$$a \otimes b = (\cdots((a \hat{} a) \hat{} a) \hat{} \cdots \hat{} a)$$

که در عبارت سمت راست، a، b مرتبه ظاهر شده است. در این صورت $a \otimes b$ برابر است با:

۱) $a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$ ۲) b^a ۳) a^{ab} ۴) $a^{a^{b-1}}$ ۵) ab^{b^a}

۱۲. در مثلث ABC، میانه‌های نظیر رأس B و رأس C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد. طول ضلع BC چه قدر است؟

۱۳. سلطان شکرستان در نظر دارد که یک تور جهان‌گردی بین شکرستان و ۵ شهر دیگر برقرار کند: نمکستان‌های شمالی، جنوبی، شرقی، غربی و پشتی! (در شکل، نمکستان پشتی، در پشت کره است!). هر شهر تنها به ۴ شهر نزدیکِ خود خط هوایی دارد. به چند صورت می‌توان توری طراحی کرد که ابتدا و انتهای آن شکرستان باشد و از شهرهای دیگر دقیقاً یک بار بگذرد؟



۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰ ۵) ۴۸

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۴. به تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، تابعی n مقداری می‌گوییم اگر برد آن مجموعه‌ای n عضوی باشد. اگر f و g به ترتیب n و m مقداری باشند. توابع $f+g$، $f \times g$ و $f \circ g$، به ترتیب حداکثر چند مقداری هستند؟

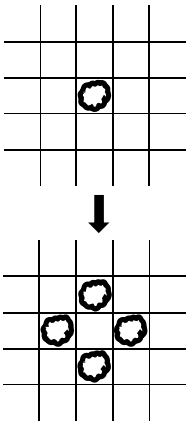
۱) mn، mn و $\min(m,n)$.
۲) mn، $m+n$ و $\max(m,n)$.
۳) $m+n$، mn و n^m.
۴) $m+n$، mn و mn.
۵) $\max(m,n)$، mn و mn.

۱۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، ($\angle A = \angle D = ۹۰^\circ$)، M وسط ضلع BC است. فرض کنید دایره به مرکز M و شعاع MB، درونِ پاره خط AD را در X و Y قطع کند. اگر $AB = ۱$ و طول پاره‌خط‌های BC، CD و DA به ترتیب p، q و r باشد. طول پاره‌خط‌های AX و AY ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر هستند؟

۱) $x^۲ + px + q$
۲) $x^۲ - rx + q$
۳) $x^۲ - px + q$
۴) $qx^۲ + rx + p$
۵) $px^۲ - qx + r$

۱۶. جمع صورت و مخرج چند تا از کسرهای $\frac{۹۰}{۹۰}, \cdots, \frac{۲}{۹۰}, \frac{۱}{۹۰}$، بعد از ساده کردن بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱۷. در خانه‌های یک شبکهٔ مربعی نامتناهی، گونه‌ای باکتری به نام «چارزا» زندگی می‌کند. در هر خانه هر تعداد چارزا می‌توانند هم‌زمان زندگی کنند. بعد از یک ساعت هر چارزا به چهار چارزا تقسیم شده و هرکدام به یکی از چهار خانهٔ مجاور می‌رود. اگر در ابتدا فقط یک چارزا وجود داشته باشد، بعد از شش ساعت چند چارزا در خانه‌ای است که با خانهٔ ابتدایی فقط یک رأس مشترک دارد؟ (به طور مثال پس از یک ساعت فقط در هر کدام از چهار خانهٔ مجاور خانهٔ آغازی، دقیقاً یک چارزا وجود خواهد داشت.)



۱۸. چند زیرمجموعهٔ چهار عضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دوبه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعهٔ $\{۲, ۸, ۹, ۳۲, ۳۶, ۱۴۴\}$ شود؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۱۹. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ این‌گونه تعریف شده است که $f(۱) = ۱$ و برای $n > ۱$ اگر تجزیهٔ n به عوامل اول به صورت $n = p_۱^{r_۱} \cdots p_k^{r_k}$ باشد، آن‌گاه $f(n) = r_۱^{p_۱} \cdots r_k^{p_k}$. کدام درست است؟ ($p_i$ها اعداد اول متمایزند و r_iها اعداد طبیعی هستند.)

۱) f پوشا است.

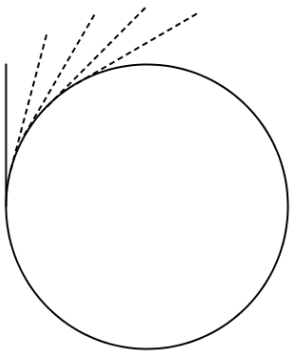
۲) f یک‌به‌یک است.

۳) اگر a و b عضو برد f باشند، آن‌گاه ab عضو برد f است.

۴) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n) \le f(mn)$.

۵) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n) \ge f(mn)$.

۲۰. چرخی به شعاع ده متر از مرکز به وسیلهٔ محوری به زمین متصل شده، طوری که می‌تواند آزادانه حول آن محور بچرخد. میله‌ای به طول ده متر به شکل مماس به چرخ متصل شده است. اگر چرخ ۶۰° بچرخد، نزدیک‌ترین گزینه به مساحت نقطه‌هایی که این میله از روی آن‌ها عبور می‌کند، (بر حسب متر مربع) کدام است؟ (شکل وضعیت میله در ابتدا، انتها و سه لحظهٔ بینی را نشان می‌دهد.)



۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰ ۵) ۶۰

۲۱. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با دو عدد حقیقی دل‌خواه $a_۱$ و $a_۲$ شروع می‌شود و جمله‌های بعدی آن از رابطهٔ $a_{n+۲} = \max\{a_{n+۱} - ۱, a_n + ۱\}$ به‌دست می‌آیند. اگر $a_{۱۰۰} = ۱۰۰$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $a_۱$ چند است؟

۲۲. احسان و حسام در جدولی ۲×۳ مطابق شکل، با هم مهره‌بازی می‌کنند. در این بازی هر کس در نوبت خودش می‌تواند یک مهره در یکی از خانه‌های خالی جدول قرار دهد یا یکی از مهره‌های موجود را به خانهٔ سمت راستش یا خانهٔ بالایش منتقل کند، البته اگر آن خانه خالی باشد. بازنده اولین کسی است که نتواند حرکتی انجام دهد. احسان برای شروع بازی در کدام‌یک از خانه‌های شماره‌گذاری‌شده، مهره را قرار دهد تا بتواند بازی را ببرد؟

	۱
۳	۲
۴	

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵) در هر کدام از این چهار حالت، حسام می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ☺

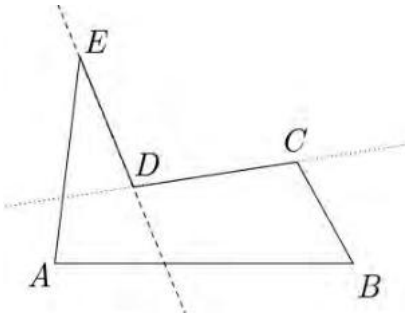
ریاضی کشور

۲۳. تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر در اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، با شرط $x \leq y$ را بیابید.

$$x^۲ + y^۲ = xy(x,y) + [x,y].$$

منظور از (x,y)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک x و y و منظور از $[x,y]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y است.

۲۴. منظور از یک ضلعِ «ناجور» در یک چندضلعی که اضلاع آن یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، ضلعی است که دو ضلعِ مجاورش در دو طرف خط شامل آن قرار دارند. مثلاً در پنج‌ضلعی روبه‌رو تنها ضلع‌های CD و DE ناجور هستند. یک ۱۳۹۱ ضلعی حداکثر چند ضلع ناجور می‌تواند داشته باشد؟



۲۵. روی سطحِ کره‌ای، ۴ دایره رسم شده است. سطح این کره حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ ۵) ۱۷

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۱

۱- پاسخ : ۵ ؛ توجه کنید که در یک خانواده‌ی n نفری، n نفر زندگی می‌کنند! پس پاسخ سؤال این‌گونه محاسبه می‌شود:

$$\frac{2\times ۱۰}{۲\times ۱۰+۳\times ۳۰+۴\times ۳۰+۵\times ۱۰+۶\times ۲۰} = \frac{۲۰}{۴۰۰} = ٪۵$$

۲- پاسخ : ۴ ؛ $(a+۱)(b+۱) = ab \Rightarrow ab + a + b + ۱ = ab \Rightarrow a = -(b+۱)$ پس اکنون داریم که

$$\frac{a^۲}{b} = \frac{(b+۱)^۲}{b} = ۲ + b + \frac{۱}{b}$$

و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم: $۲ + b + \frac{۱}{b} \geq ۲ + ۲\sqrt{b \times \frac{۱}{b}} = ۴$ و این مقدار با قرار دادن $a = -۲$ و $b = ۱$ به دست می‌آید.

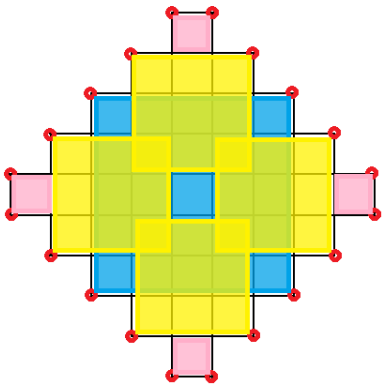
۳- پاسخ : ۲ ؛ توجه کنید که عدد ۳ تنها می‌تواند کنار عدد ۱ قرار گیرد. عدد ۱ تنها می‌تواند کنار اعداد ۳ و ۲ قرار گیرد. عدد ۲ تنها می‌تواند کنار عددهای ۴و ۱ قرار گیرد و عدد ۴ تنها می‌تواند کنار عدد ۲ قرار گیرد. با این توضیحات اعداد ۳ و ۴ نمی‌توانند به عنوان رقم دوم یا سوم قرار گیرند، پس یکی از آن‌ها در جای‌گاه اول و دیگری در جای‌گاه چهارم است. اکنون با اندکی بررسی می‌فهمیم که در کل دو عدد خوب داریم: ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳.

۴- پاسخ : ۵ ؛ عمود وارد از نقاط A و B بر خط CD را به ترتیب X و Y می‌نامیم. از آن‌جایی که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است، پس CY و DX برابر ۱ هستند. پس CD برابر ۱ + ۴ + ۱ = ۶ است. طبق قضیه‌ی تالس می‌دانیم $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ پس مقدار خواسته‌شده برابر $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶}$ است.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۵- پاسخ : ۹ ؛ گوشه‌های تیز شکل(نقاط قرمز) را در نظر بگیرید. تعداد این گوشه‌ها ۲۰ تا است و پس از پوشانده شدن شکل، این گوشه‌ها، توسط رئوس مهرها پوشانده می‌شوند. توجه کنید که به جز مهر مربعی ۵×۵ که می‌تواند ۴ تا گوشه را بپوشاند، دیگر مهرها حداکثر می‌توانند ۲ گوشه را بپوشانند. همچنین استفاده‌ی بیش از یک بار مهر ۵×۵ موجب رنگی شدن خانه‌ی بار از مهرها استفاده کنیم nجدیدی نمی‌گردد(چون تنها یک راه برای قرار دادن یک مهر ۵×۵ در جدول داریم). پس اگر حداقل ۹ است. در n بیشتر نیست. این مقدار باید حداقل ۲۰ باشد، پس $۲(n-۱)+۴$تعداد گوشه‌های پوشانده شده از شکل می‌بینیم که ۹ مهر برای این کار کافی نیز هست.



۶- پاسخ : ۴ ؛ توجه کنید که $y \neq -۱$ زیرا در غیر این صورت با توجه به عبارت دوم نتیجه می‌گیریم که $۱۱ = ۱-$. اکنون با استفاده از عبارت دوم، داریم که: $(x+۱)(y+۱) = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{y+۱} - ۱ = \frac{۱۱-y}{y+۱}$ با جای‌گذاری x در عبارت اول داریم :

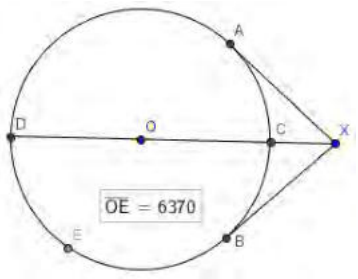
$$\left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right)^۲ y + \frac{۱۱-y}{y+۱} y^۲ = ۳۰ \Rightarrow \frac{۱۱-y}{y+۱} y \left(\frac{۱۱-y}{y+۱} + y\right) = ۳۰ \Rightarrow \left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right) y \left(\frac{۱۱+y^۲}{y+۱}\right) = ۳۰$$

$$\Rightarrow (۱۱-y)(۱۱+y^۲)y = ۳۰(y+۱)^۲ \Rightarrow ۱۲۱y - ۱۱y^۲ + ۱۱y^۳ - y^۴ = ۳۰y^۲ + ۶۰y + ۳۰$$

$$\Rightarrow y^۴ - ۱۱y^۳ + ۴۱y^۲ - ۶۱y + ۳۰ = ۰$$

ریشه‌های چندجمله‌ای به دست آمده برابر ۱، ۲، ۳ و ۵ است. پس ۴ جواب داریم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



۷- پاسخ : 1824 ؛ می‌توان صورت سؤال را مانند شکل زیر تفسیر کرد. پس از صورت سؤال داریم که : $XC = ۲۵۶ , OC = OD = ۶۳۷۰$ و سؤال از ما طول XA را می‌خواهد. طبق رابطه‌ی قوت نقطه‌ی X داریم:

$$XA^۲ = XC.XD = ۲۵۶ \times \left(۲ \times ۶۳۷۰ + ۲۵۶\right) \text{ پس } XA = ۱۸۲۴.$$

۸- پاسخ : ۲ ؛ اگر یکی از a یا b یا c یا d برابر یک باشد، تمام اعداد یک هستند و این خود یک جواب برای مسئله است. اکنون به دنبال دیگر جواب‌ها هستیم پس فرض می‌کنیم این اعداد همگی بزرگ‌تر مساوی ۲ اند. از ضرب سه رابطه داریم: $a^b b^c c^d d^a = a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$ ولی چون فرض کردیم همه‌ی چهار عدد مسئله بزرگ‌تر مساوی ۲ هستند خواهیم داشت: $a^b b^c c^d d^a \geq a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$. پس اکنون حالت تساوی رخ داده‌است و در نتیجه تمام اعداد ۲ هستند. این نیز یک جواب درست است. پس در کل ۲ جواب داریم.

۹- پاسخ : ۹۶۰ ؛ از خانه‌های سطر بالایی شروع می‌کنیم و روی هر خانه تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌ی E را با شروع حرکت از آن خانه می‌نویسیم. همین کار را برای سطرهای پایینی هم انجام می‌دهیم. اگر برای خانه‌ی X، خانه‌هایی از سطر بالایی را در نظر بگیریم که می‌توان از X به آن‌ها رفت، طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن از X به E(با شروع حرکت از خود خانه‌ی X) برابر مجموع تعداد راه‌های رسیدن از خانه‌های بالایی آن خانه به E است. پس شکل زیر به دست می‌آید و جواب ۹۶۰ است.

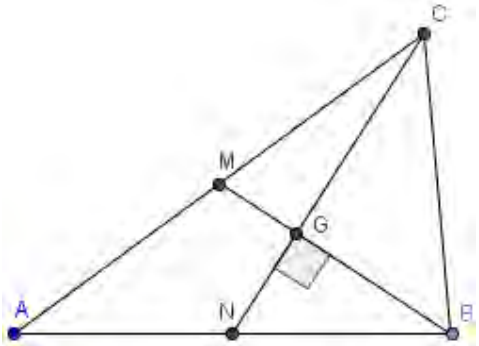
	E:۱	۱	۱	
	۳	۳	۳	۳
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸	
۹۶	۹۶		۴۸	۴۸
۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	
S:۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰

۱۰- پاسخ : ۳۷ ؛ فرض کنید که $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_n$ اعدادی باشند که ویژگی سوال را دارا هستند و فرض کنید $a_1 = Xb_1^2$. که X عددی خالی از مربع(یعنی بر هیچ مربع کاملی بخش‌پذیر نیست) است. اکنون توجه کنید که طبق ادعای سؤال می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $i \geq 2$: $a_i = X \times b_i^2$. و چون b_iها اعداد متمایز بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر مساوی $\sqrt{1391}$ هستند پس تعداد کل اعداد حداکثر $37 = \left\lfloor \sqrt{1391} \right\rfloor$ است. حال توجه کنید که ۳۷ عدد 1^2 و 2^2 و ... و 37^2 در شرایط سوال صدق می‌کنند. پس جواب سوال ۳۷ است.

۱۱- پاسخ : ۴ ؛ کافی است توجه کنید که $(x^y)^z = x^{y \times z}$ پس به سادگی و با استقرا می‌توان نشان داد که مقدار مورد نظر برابر $a^{a^{b-1}}$ است.

۱۲- پاسخ : ۱۳ ؛ با توجه به این که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت یک به دو قطع می‌کنند، دو مثلث MGN و BGC با نسبت یک به دو متشابه اند پس $MN = \frac{BC}{2}$. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

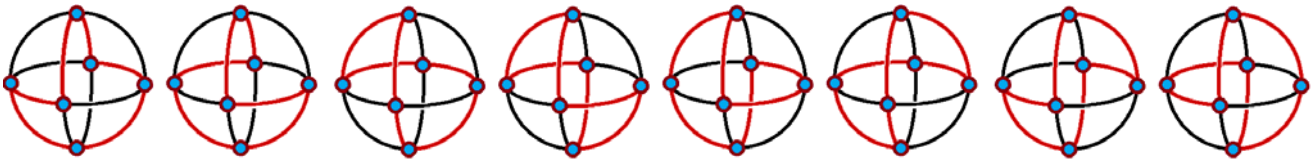
حال با جایگذاری مقادیر MC و NB داریم: $MC^2 + NB^2 = 11^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \frac{484+361}{4} = \frac{845}{4}$ پس مقدار BC^2 برابر $169 = \frac{4}{5} \times \frac{845}{4}$ خواهد بود و بنابراین BC برابر ۱۳ است.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۳- پاسخ : ۳۲ ؛ به علت تقارنِ «نمکستان»ها، تعداد راه‌های رسیدن از «شکرستان» به «نمکستان شمالی» را حساب می‌کنیم و چهار برابر این عدد جواب مسأله خواهد بود. با حالت‌بندی کاملاً ساده به این نتیجه می‌رسیم که تمام راه‌های موجود دقیقاً ۸ راه (جهت‌دار) نمایش داده شده در شکل زیر هستند. پس ۳۲ حالت داریم.

(می‌توان برحسب این‌که نمکستان پشتی شهر چندم سفر است، حالت‌بندی را انجام داد.)

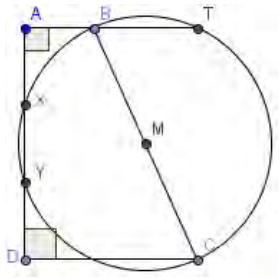


۱۴- پاسخ : ۱ ؛ فرض کنید برد f اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ و برد g اعداد $b_1, b_2, \dots, b_n$ باشند. برد حاصل‌جمع حداکثر می‌تواند اعداد $a_i + b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی، باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، nبرابر باقی‌مانده‌ی $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که mn عدد متمایز خواهیم داشت.

برد حاصل ضرب حداکثر می‌تواند اعداد $a_i \times b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی دو به توان باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، دو به توان n برابر باقی‌مانده‌ی $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. به همان سادگی می‌توان دید که این mn عدد نیز متمایز اند.

در مورد ترکیب توابع چون برد تابع f ، m عضوی است پس خروجی $f \circ g$ نیز حداکثر m عضو دارد. از طرفی چون تابع g حداکثر n خروجی دارد پس $f \circ g$ نیز نمی‌تواند بیش از n خروجی داشته باشد. پس حداکثر اعضای برد $\min\{m, n\}$ است. برای این حالت یک مثال می‌تواند این باشد که : f به اعداد ۱ تا n خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. هم‌چنین g به اعداد ۱ تا m خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که این مثال حداکثر ادعا شده را می‌دهد. پس جواب گزینه‌ی ۱ است.

۱۵- پاسخ : ۲ ؛ از رابطه‌ی قوت داریم: $AX \times AY = AB \times AT = ۱ \times DC = q$ از طرفی $AX = YD$ پس: $AX + AY = AY + YD = AD = r$ و چون $(x - AX)(x - AY) = x^۲ - (AX + AY)x + AX \times AY$ پس پاسخ سوال $x^۲ - rx + q$ است.



۱۶- پاسخ : ۳ ؛ دقت کنید که اگر تعداد عوامل ۳ در صورت و مخرج کسر متفاوت باشد، بعد از ساده کردن دقیقاً یکی از صورت و مخرج بر ۳ بخش‌پذیر است و دیگری نیست و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها نمی‌تواند بر ۳ بخشپذیر باشد. پس تنها باید کسرهایی را بررسی کنیم که صورت آن‌ها دو عامل ۳ دارد. این کسرها بعد از ساده کردن به شکل $\frac{n}{۱۰}$ در می‌آید که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست. دقت کنید که ضرب صورت و مخرج کسر در عددی که بر ۳ بخشپذیر نیست ویژگی مورد نظر را تغییر نمی‌دهد پس کافی است این کسرها بررسی شوند. با بررسی این کسرها می‌بینیم که تنها سه کسر $\frac{۲}{۱۰}$، $\frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۱۰}$ این خاصیت را دارا هستند. پس پاسخ مسئله برابر ۳ است.

۱۷- پاسخ : ۳۰۰ ؛ توجه کنید که در مرحله n، روی هر خانه، تعداد گشت‌های به طول n از مبدأ به آن خانه نوشته می‌شود. پس برای حل سوال باید تعداد گشت‌های از مبدأ به خانه‌ی (۱,۱) را حساب کنیم. این معادل شمارش تعداد دنباله‌های به طول ۶ از حروف U، R، D و L است که $R = L + ۱$ و $U = D + ۱$ و به علاوه حاصل‌جمع آن‌ها برابر شش است. توجه کنید که حروف U، R ، D و L نمایش‌گر بالا و راست و پایین و چپ هستند. پس سه حالت داریم.

حالت ۱. $L = ۰, R = ۱, D = ۲, U = ۳$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۰!۱!۲!۳!} = ۶۰$ است.

حالت ۲. $L = ۱, R = ۲, D = ۱, U = ۲$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۱!۲!۱!۲!} = ۱۸۰$ است.

حالت ۳. $L = ۲, R = ۳, D = ۱, U = ۰$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۲!۳!۰!۱!} = ۶۰$ است.

پس در کل $۶۰ + ۱۸۰ + ۶۰ = ۳۰۰$ حالت داریم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۸- پاسخ : ۲ ؛ فرض کنید اعداد ما $p < q < r < s$ باشند. داریم: $pq < pr < ps, qr < qs < rs$ پس دو حالت داریم:

حالت ۱: $pq = ۲, pr = ۸, ps = ۹, qr = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ و در نتیجه $q = ۲\sqrt{۲}$ ، $r = ۸\sqrt{۲}$ و $s = ۹\sqrt{۲}$.

حالت ۲: $pq = ۲, pr = ۸, qr = ۹, ps = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۴}{۳}$ و در نتیجه $q = \frac{۳}{۲}$ ، $r = ۶$ و $s = ۲۴$.

و توجه کنید که هر دوی این جواب‌ها درست هستند.

۱۹- پاسخ : ۳ ؛

مثال نقض برای گزینه‌ی ۱ : از آنجایی که همیشه $p_i \geq ۲$ ، f هیچ عددی نمی‌تواند ۲ باشد.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۲ : $f(۲) = ۱ = f(۳)$. پس f یک به یک نیست.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۴ : $m = ۴, n = ۸ \Rightarrow f(۴)f(۸) = ۴ \times ۹ = ۳۶ > ۲۵ = f(۳۲)$

مثال نقض برای گزینه‌ی ۵ : $m = ۲, n = ۲ \Rightarrow f(۲)f(۲) = ۱ \times ۱ = ۱ < ۴ = f(۴)$

دلیل درستی گزینه‌ی ۳ : خروجی تابع نمی‌تواند از یک عامل اول تنها یکی داشته باشد زیرا توان هر r_i، p_i است و اعداد اول(p_i ها)، بزرگتر مساوی دو هستند. حال ادعا می‌کنیم که این شرط کافی نیز هست یعنی اعداد به شکل $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}\ (r_i \geq ۲)$ دقیقا در برد هستند. اثبات ادعا: فرض کنید بخواهیم خروجی تابع عدد $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}\ (r_i \geq ۲)$ باشد. توجه کنید که هر عدد بزرگتر مساوی ۲ را می‌توان به صورت جمع مضارب نامنفی از ۲ و ۳ نوشت پس فرض کنید $r_i = ۲a_i + ۳b_i$. اکنون توجه کنید که خروجی تابع برای $۲^{p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}}\ ۳^{p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_k^{b_k}}$ برابر

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$p_k^{۲a_1+۳b_1} p_2^{۲a_2+۳b_2} \dots p_k^{۲a_k+۳b_k}$ است که این همان مقدار مورد نظر است. همچنین چون اعداد معرفی شده نسبت به ضرب بسته‌اند، گزینه‌ی ۳ درست است.

۲۰- پاسخ : ۴ ؛ اگر چرخ را ۶ بار ۶۰ درجه بچرخانیم، میله هر بار مقدار ثابتی را جارو می‌کند و در نهایت یک دور کامل می‌زند. پس از ۳۶۰ درجه چرخش، دایره‌ی بزرگی به شعاع $۱۰۰\sqrt{۲}$ ایجاد خواهد شد. درون این دایره، دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ است که خود چرخ بوده و در نتیجه جارو نمی‌شود. پس مساحت جارو شده برابر

است. حال توجه کنید که این مساحت برای ۶ بار چرخش است. پس مساحت جارو شده پس از طی ۶۰ درجه $\frac{۳۱۴}{۶}$ است و نزدیکترین عدد صحیح به این مساحت ۵۰ است.

۲۱- پاسخ : ۵۲ ؛ می‌دانیم $a_{n+۲} = \max\{a_{n+۱} - ۱, a_n + ۱\}$ پس $a_n \le a_{n+۲} - ۱$. با چند بار استفاده از این رابطه داریم: $a_۴ \le a_۶ - ۱ \le a_۸ - ۲ \le \dots \le a_{۱۰۰} - ۴۸ \le ۵۲$. پس $a_۴ = \max\{a_۳ - ۱, a_۲ + ۱\} \le ۵۳$ و چون $a_n \le a_{n+۲} - ۱$ پس $a_۱ \le a_۳ - ۱ \le ۵۲$. پس ثابت کردیم که اولین عضو دنباله کم‌تر مساوی ۵۲ است. حال برای این کران بالا مثال می‌آوریم: $a_{۲n+۱} = ۵۲ + n$ و $a_{۲n} = ۵۱ + n$.

۲۲- پاسخ : ۵ ؛ ادعا می‌کنیم که احسان هر گونه بازی کند حسام می‌تواند بازی را ببرد. برای اثبات ادعا این الگوریتم را برای حسام ارایه می‌دهیم. (این الگوریتم را می‌توان نوعی تقلید دانست.)

الگوریتم: اگر احسان مهره‌ای قرار داد، مهره‌ای کنار آن مهره قرار بده و اگر احسان مهره‌ای را بالا برد، مهره‌ای که کنار مهره‌ی حرکت داده شده بود را بالا ببر. با این الگوریتم پس از هر حرکت حسام، سطرها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی می‌شوند. پس احسان در هنگام حرکتش یا باید یک سطر را نیمه‌پر کند که حسام می‌تواند الگوریتم را اجرا کند و یا باید یک خانه از یک سطر پر را یک واحد بالا(به سطر تمام خالی بالایی) ببرد و در این حالت نیز حسام می‌تواند طبق الگوریتم حرکت خود را انجام دهد. پس برای هر حرکت احسان، حسام یک حرکت تضمین شده دارد که وضعیت بازی را مناسب برای حرکات بعدی

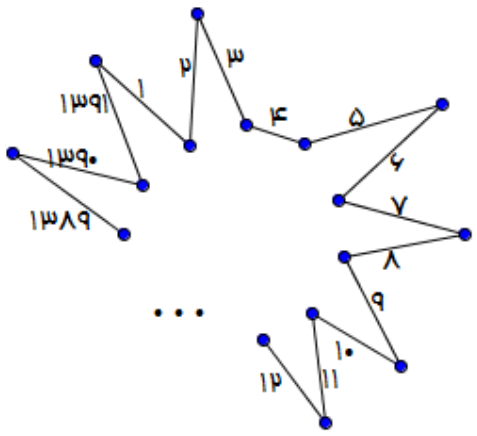
می‌کند. چون بازی بالاخره تمام می‌شود پس در نهایت کسی بدون حرکت می‌ماند. این فرد حسام نیست پس احسان است! پس حسام بازی را می‌برد.

۲۳- پاسخ : ۱۰ ؛ ب.م.م x و y را برابر d می‌گیریم. x' و y' را حاصل تقسیم x و y بر d می‌گیریم. پس داریم:

$$x^{۲} + y^{۱}$$

و چون $y \geq x \Rightarrow y' \geq x'$ پس $(dx' - y') = ۰ \Rightarrow y' = dx'$ و چون x' و y' نسبت به هم اول هستند، نتیجه می‌گیریم $x' = ۱ , y' = d$. پس جواب‌ها دقیقاً d و $d^{۲}$ ها هستند که ۱۰ تا از این جواب‌ها در بازه‌ی ۱ تا ۱۰۰ هستند.

۲۴- پاسخ : ۱۳۹۰ ؛ یک ضلع را در نظر بگیرید. دو سر این ضلع در چند ضلعی دو زاویه‌ی داخلی داریم. این ضلع «ناجور» است اگر و تنها اگر یکی از این دو زاویه بیش‌تر از ۱۸۰ درجه و یکی از این دو زاویه کم‌تر از ۱۸۰ درجه باشد. در غیر این صورت هر دو ضلع کناری در یک طرف پاره‌خط قرار می‌گیرند. اکنون ادعا می‌کنیم که نمی‌توان ۱۳۹۱ضلعیِ ناجور داشت. زیرا اگر تمام ضلع‌ها ناجور باشند، زوایا یکی در میان کم‌تر و بیش‌تر از ۱۸۰ درجه هستند و چون ۱۳۹۱ فرد است این موضوع امکان ندارد. مثال برای ۱۳۹۰ را در زیر مشاهده کنید:



۲۵- پاسخ : ۱۴ ؛ هنگامی که دایره‌ی nاُم را اضافه می‌کنیم حداکثر در $۲\left(n - ۱\right)$ نقطه با دیگر دایره‌ها برخورد دارد. از طرفی هر دایره که اضافه می‌کنیم به تعداد کمان‌هایش ناحیه‌ها را زیاد می‌کند. پس دایره‌ی اول دو ناحیه ایجاد می‌کند. دایره‌ی دوم دو ناحیه‌ی جدید اضافه می‌کند. دایره‌ی سوم حداکثر $۴ = ۲ \times ۲$ ناحیه‌ی اضافه ایجاد می‌کند و دایره‌ی چهارم

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حداکثر $۲ \times ۳ = ۶$ ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌کند. پس در کل حداکثر $۲ + ۲ + ۴ + ۶ = ۱۴$ ناحیه خواهیم داشت. توجه کنید هر گونه که ۴ دایره روی کره بگذاریم که هر دوتایی متقاطع باشند و هیچ سه تایی در یک نقطه به هم نرسند ۱۴ ناحیه خواهیم داشت.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی ☺

کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونهٔ بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمرهٔ مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمرهٔ منفی ندارد.

۱. فرض کنید a، b و c اعدادی طبیعی باشند که $ac = ۲۰۱۲$، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b برابر ۱ و کوچک‌ترین مضرب مشترک b و c برابر ۱۳۹۰ است. مقدار $a + b + c$ چند است؟

۲. اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شِکرستان هستند از طریق خط راه‌آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده‌اند. جهان‌گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می‌خواهد از همهٔ بلیط‌های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می‌تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)



۳. مجموع اعداد حقیقی نامنفی a، b و c برابر ۳۰ است. بیش‌ترین مقدار ممکن $۳ab + ۴bc$ چه‌قدر است؟

۴. به چند حالت می‌توان در عبارت $۱ \pm ۲ \pm \cdots \pm ۷$ مثبت‌ها و منفی‌ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

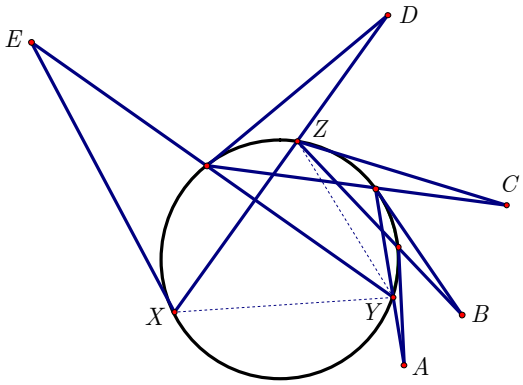
۵. در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نُه تایی مقابل هم نصب شده‌اند. فاصلهٔ بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ‌ها خاموش شده‌اند اما در فاصلهٔ کمتر از شصت متر از هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ‌های خاموش حداکثر چندتاست؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی ☺

کشور

۶. شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آن‌ها، شکل روبه‌رو حاصل شده است. اگر زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$، به‌ترتیب، برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازهٔ زاویهٔ $X\hat{Y}Z$ را بر حسب درجه بنویسید. (اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)



۷. فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت a، b و ab، به ترتیب، برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد b^2 چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۸. به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول ۴×۴ قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۹. در مثلث ABC داریم $\angle BAC = ۶۰^\circ$، $AB = ۷\sqrt{۳}$ و $AC = ۱۴\sqrt{۳}$. نقطهٔ متغیر X را روی پاره‌خط BC در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ X دو خط به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا به ترتیب AC و AB را در نقاط Y و Z قطع کنند. طول پاره‌خط BX چه‌قدر باشد تا پاره‌خط YZ کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

۱۰. چندجمله‌ای $P(x)$ برابر است با مجموع x^nهایی که $۱ \le n \le ۱۲۰$ و n بر دست‌کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. این چندجمله‌ای چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی ☺

کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج‌گزینه‌ای پاسخ دهید. در این قسمت پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.

۱. یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعدهٔ ۴×۶ روی زمین قرار دارد. نقطهٔ A روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می‌غلطانیم و این کار را در همان جهت آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطهٔ A چه مسافتی را در فضا طی کرده است؟

الف) ۳π ب) ۴π ج) ۶π د) ۸π ه) ۱۲π

۲. سه مجموعهٔ A، B و C را در نظر بگیرید. کدام‌یک از گزینه‌ها، برابر مجموعهٔ اعضایی است که دست‌کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

الف) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ ب) $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$

ج) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$ د) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$

ه) گزینه‌های ج و د هر دو صحیح هستند.

۳. به چند روش می‌توان مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۳۰\}$ را دو قسمت کرد که حاصل‌ضرب اعضای آن‌ها با یک‌دیگر برابر باشد؟

الف) این کار ممکن نیست. ب) بین ۱ و ۱۰ روش ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش

د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش ه) بیش از ۱۰۰۰ روش

۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC به زاویهٔ رأس A و طول ۱۰ ساق مفروض است. نقطهٔ دل‌خواه D در صفحه مفروض است به طوری که، نقطهٔ A داخل مثلث BCD قرار می‌گیرد. نیم‌سازهای داخلی زوایای $\angle BAD$ و $\angle CAD$ را رسم می‌کنیم تا اضلاع BD و CD را به ترتیب، در نقاط E و F قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث BCD واقع بر پاره‌خط EF باشد، طول پاره‌خط AD چه‌قدر است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۳۰ ه) بستگی به مکان D دارد.

۵. چندجمله‌ای $x^۴ - x^۲ - ۲x - ۱$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ xهایی که به ازای آن‌ها این چندجمله‌ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

الف) یک پاره‌خط ب) دو پاره‌خط ج) یک پاره‌خط و یک نیم‌خط

د) یک پاره‌خط و دو نیم‌خط ه) دو نیم‌خط

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

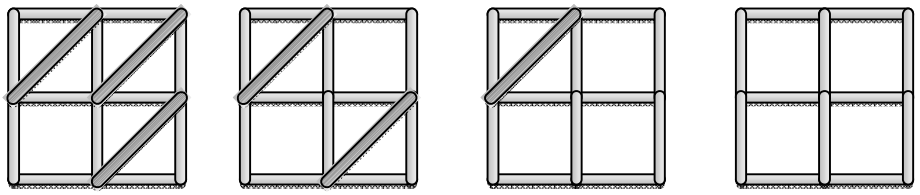
آزمون مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی ☺

کشور

۶. به چند طریق می‌توان دو عدد طبیعی a و b را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر $\frac{a+b}{a-b}$ عددی طبیعی باشد؟

الف) ۱۹ ب) ۲۴ ج) ۲۸ د) ۲۹ ه) ۳۴

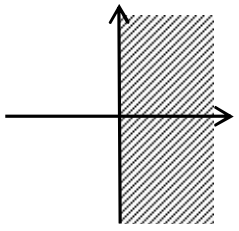
۷. فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعهٔ چوبی به طول‌های یک متر و $\sqrt{۲}$ متر چهار شکل زیر را ساخته‌ایم به طوری که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چند تا از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه چوب‌ها تغییر شکل دهند؟



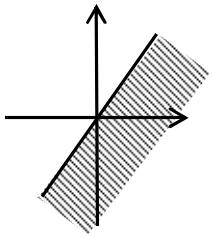
الف) هیچ‌کدام ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۸. مجموعهٔ نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل $(x^۲+y^۲, xy)$ هستند، که x و y اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکل‌ها تقریبی هستند.)

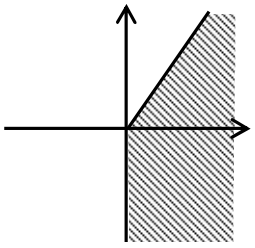
الف)



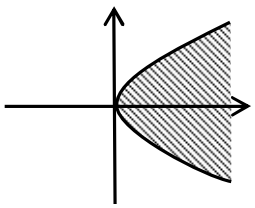
ب)



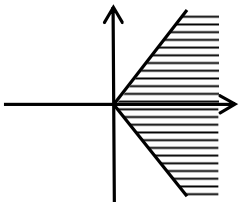
ج)



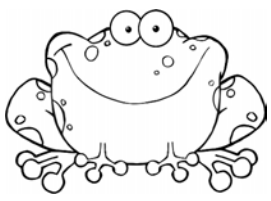
د)



ه)



۹. یک وزغ و یک ملخ در فاصلهٔ ۲ متری یک‌دیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت ملخ، روی زمین، حرکت می‌کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت وزغ می‌پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می‌خورد و می‌ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟



الف) ۸ ب) ۱۷ ج) ۱۸ د) ۲۴ ه) ۳۲

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول سی‌امین المپیاد ریاضی ☺

کشور

۱۰. فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) بی‌نهایت ه) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

۱۱. بزرگ‌ترین عدد حقیقی a که برای هر دو عدد حقیقی x و y که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰$ و $x > ۰$، داشته باشیم $ax < y$، کدام است؟

الف) $-\sqrt[۳]{۸۰}$ ب) -۴ ج) ۰ د) ۴ ه) $\sqrt[۳]{۸۰}$

۱۲. به چند طریق می‌توان سه عدد طبیعی x، y و z را انتخاب کرد که $x + y + ۲z = xyz$؟

الف) ۷ ب) ۴ ج) ۲ د) ۱ ه) ممکن نیست.



۱۳. رستوران «مرغ تخم‌طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیم‌رو، املت و تخم‌مرغ آب‌پز را ارائه می‌کند! مدیر رستوران می‌خواهد برنامهٔ هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

الف) ۷۸ ب) ۸۴ ج) ۱۲۶ د) ۱۶۸ ه) ۱۹۲

۱۴. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^۲ + y = xy^۲ \\ y^۲ + x = yx^۲ \end{cases}$$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۵. فرض کنید چهارضلعی محدب $ABCD$ محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می‌گیرند؟

الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تا، گاهی سه تا و گاهی چهار تا ب) گاهی دو تا و گاهی سه تا

ج) گاهی یکی و گاهی دو تا د) همواره دو تا ه) همواره یکی

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول سی‌اُمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۰

سؤالات کوتاه‌پاسخ بر اساس کد یک.

۱. تجزیه‌ی ۲۰۱۲ به عوامل اول به صورت $۲۰۱۲ = ۲^۲ \times ۵۰۳$ است که چون $ac = ۲۰۱۲$ پس باید دقیقاً یکی از a و c بر ۵۰۳ بخش‌پذیر باشد. حالت $۵۰۳ \Big| c$ با توجه به این که $[b,c] = ۱۳۹۰$ و این c که ۱۳۹۰ بر ۵۰۳ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد. پس $۵۰۳ \Big| a$ و لذا حالت‌های زیر را داریم.

الف. $a = ۵۰۳$ و $c = ۴$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$ بر $c = ۴$ بخش‌پذیر نیست امکان ندارد.

ب. $a = ۱۰۰۶$ و $c = ۲$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$، مقدار b برابر ۶۹۵ و یا ۱۳۹۰ است که چون a و b طبق فرض مسئله عامل مشترک ندارند تنها حالت $b = ۶۹۵$ قابل قبول است که در این حالت $a + b + c = ۱۷۰۳$.

پ. $a = ۲۰۱۲$ و $c = ۱$. از آن‌جا که $[b,c] = ۱۳۹۰$، b باید برابر ۱۳۹۰ باشد که با $(a,b) = ۱$ تناقض دارد.

بنابراین پاسخ مسئله ۱۷۰۳ است.

۲. در سفر اول مجبوریم به شکرستان برویم. در ۱۱ سفر بعدی، در سفرهای فرد به یکی از توابع شکرستان می‌رویم و در سفرهای زوج به شکرستان بازمی‌گردیم. پس تنها سفرهای فرد که شش‌تا هستند را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که دقیقاً یکی از این سفرها به سماقستان است. برای انتخاب این سفر از بین ۶ سفر ۶ حالت داریم. برای مقصد هر کدام از ۵ سفر دیگر هم ۲ گزینه‌ی نمکستان و فلفلستان وجود دارد. پس طبق اصل ضرب پاسخ مسئله $۶ \times ۲^۵ = ۱۹۲$ است.

۳. بیش‌ترین مقدار ممکن برای $۳ab + ۴bc$ برابر ۹۰۰ است. برای اثبات این حکم ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. برای هر دو عدد حقیقی x و y، $۴xy \le (x+y)^۲$.

اثبات. $(x+y)^۲ - ۴xy = (x-y)^۲ \ge ۰$.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$۳ab + ۴bc = ۴(a+c)b - ab \le ۴(a+c)b \le ((a+b)+c)^۲ = ۹۰۰$$

و تساوی زمانی است که $ab = ۰$ و $a + c = b = ۱۵$ و لذا $a = ۰$ و $b = c = ۱۵$.

۴. دقت کنید که اگر در چنین عبارتی مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر S باشد، عدد حاصل برابر $۲S - ۲۸$ خواهد بود.($۱ + ۲ + \cdots + ۷ = ۲۸$)

به علاوه دقت کنید اگر با یک ترکیب از مثبت و منفی‌ها به عددی مثبت برسیم، اگر به جای مثبت‌ها منفی و به جای منفی‌ها مثبت قرار دهیم به عددی منفی می‌رسیم و بالعکس. پس تعداد حالت‌هایی که به مثبت می‌رسیم دقیقاً برابر تعداد حالت‌هایی است که به منفی می‌رسیم. با این توضیحات باید تعداد حالت‌هایی را پیدا کنیم که به حاصل صفر می‌رسیم.

طبق توضیحات ابتدایی برای این که عدد حاصل برابر صفر شود باید مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر ۱۴ باشد. پس باید تعداد حالت‌های انتخاب چنین اعدادی را بشماریم. حال اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۷ باشد، باید مجموع اعداد دیگر برابر ۷ شود که حالت‌های ممکن $\{۱,۶\}$، $\{۲,۵\}$، $\{۳,۴\}$ و $\{۱,۲,۴\}$ است. اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۶ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۸ شود که حالت‌های ممکن $\{۵,۳\}$، $\{۱,۲,۵\}$ و $\{۱,۳,۴\}$ هستند و اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب‌شده ۵ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۹ شود که فقط حالت $\{۲,۳,۴\}$ این طور است. بنابراین در هشت حالت به حاصل صفر می‌رسیم و در غیر از این هشت حالت در نیمی از حالات به مثبت و در نیم دیگر به منفی می‌رسیم و چون تعداد کل علامت‌گذاری‌های ممکن $۲^۷$تا است، تعداد حالت‌های منجر به عدد مثبت $\frac{۲^۷-۸}{۲} = ۶۰$ است.

۵. چراغ‌ها را مطابق شکل زیر به سه دسته تقسیم می‌کنیم.



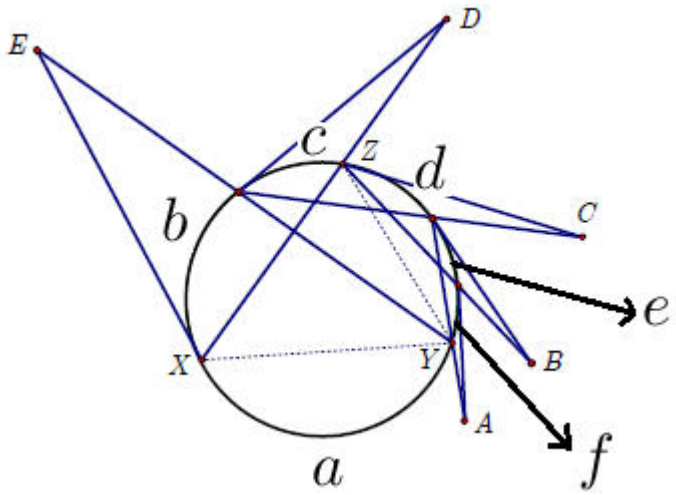
اگر در یک دسته بیش‌تر از ۴ چراغ خاموش باشد، پس یکی از دو چراغ وسطی این آن دسته خاموش است. توجه کنید از آن‌جا که این چراغ از پنج چراغ دیگرِ هم‌دسته‌اش فاصله‌ای کم‌تر از ۶۰ متر دارد، با این فرض که در هم‌سایگیِ ۶۰متریِ هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر قرار دارد تناقض دارد. پس در

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

هر دسته حداکثر چهار چراغ خاموش داریم و بنابراین در کل حداکثر ۱۲ چراغ می‌تواند خاموش باشد. شکل زیر مثالی برای ۱۲ چراغ را نمایش می‌دهد. (دایره‌های توخالی چراغ‌های خاموش هستند.)



۶. مانند شکل روبه‌رو کمان‌های را نام‌گذاری می‌کنیم. در این صورت معلومات سؤال معادل این خواهد بود که



$$e-f=۸^\circ, d-e=۱۴^\circ,$$
$$c-d=۲۰^\circ, b-c=۲۶^\circ,$$
$$a-b=۳۲^\circ$$

هم‌چنین می‌دانیم $a+b+c+d+e+f=۳۶۰^\circ$.حال همه‌ی زاویه‌ها را برحسب f می‌نویسیم و در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم.

$$f+\overbrace{(f+۸^\circ)}^{e}+\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ)}^{d}+\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ)}^{c}+$$
$$\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ+۲۶^\circ)}^{b}+\overbrace{(f+۸^\circ+۱۴^\circ+۲۰^\circ+۲۶^\circ+۳۲^\circ)}^{a}=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶f+۲۴۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow f=۲۰^\circ \Rightarrow c=۶۲^\circ, b=۸۸^\circ$$
$$\Rightarrow \angle XYZ=\frac{b+c}{۲}=\frac{۶۲^\circ+۸۸^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۷. توجه کنید که اگر تجزیه‌ی عدد طبیعی n به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول به شکل $p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن که با نماد $\mathrm{d}(n)$ نمایش می‌دهیم برابر $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$ خواهد بود.

طبق فرض‌های صورت سؤال در مورد تعداد مقسوم‌علیه‌های این اعداد، a باید به شکل $p^۲$ و b باید به شکل $q^۳$ و یا rs باشد که p، q، r و s اعداد اول هستند و $r\neq s$. بنابراین ab باید به شکل $q^۳p^۲$ و یا $rsp^۲$ باشد. حال حالت‌های زیر متصور هستند.

الف. $ab=q^۳p^۲$. اگر $p=q$، $\mathrm{d}(ab)=۶$ و اگر $p\neq q$، $d(ab)=۱۲$ که هیچ‌کدام قابل قبول نیستند.

ب. $ab=rsp^۲$. اگر r، s و p سه عدد اول متمایز باشند، $\mathrm{d}(ab)=۱۲$ که باز هم قابل‌قبول نیست. بنابراین p با یکی از r و s برابر است که می‌توان فرض کرد $p=r$. در این صورت $ab=sp^۳$ و لذا $\mathrm{d}(ab)=۸$ که حالت مورد قبول است.

بنابراین b به شکل ps است و لذا $b^۲=p^۲s^۲$ و این نتیجه می‌دهد که تعداد مقسوم‌علیه‌های $b^۲$ برابر ۹ است.

۸. برای انتخاب خانه‌ای از سطر اول که مهره در آن قرار می‌گیرد ۴ حالت داریم. با انتخاب مهره‌ی سطر اول در یکی از خانه‌های سطر دوم نمی‌توان مهره قرار داد، پس برای انتخاب خانه‌ای که مهره‌ی سطر دوم در آن قرار می‌گیرد ۳ حالت داریم. به همین ترتیب برای انتخاب خانه‌هایی از سطر سوم و چهارم که مهره در آن‌ها قرار می‌گیرد به ترتیب ۲ و۱ حالت داریم. پس پاسخ مسئله برابر است با $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$.

۹. اگر پای عمود وارد از C بر ضلع AB را H بنامیم، مثلث AHC مثلثی قائم‌الزاویه‌ای با وتر به طول $۱۴\sqrt{۳}$ است که $\angle CAH=۶۰^\circ$. پس

$$AH=AC.\cos(\angle CAH)=AC.\cos(۶۰^\circ)=۱۴\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}=۷\sqrt{۳}=AB$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

و لذا B همان نقطه‌ی H است و این یعنی مثلث ABC خود قائم‌الزاویه است $(\angle B = ۹۰^\circ)$ و طبق قضیه‌ی فیثاغورس $BC = \sqrt{۱۴^۲ \times ۳ - ۷^۲ \times ۳} = ۷\sqrt{۹} = ۲۱$.

حال طول YZ را برحسب BX محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث YZS داریم:

$$YZ^۲ = ZS^۲ + YS^۲ = BX^۲ + (YX - ZB)^۲$$

طبق قضیه‌ی تالس و از آن‌جا که $YX \parallel AB$، $\frac{YX}{AB} = \frac{CX}{BC}$ و لذا $YX = ۷\sqrt{۳}\,\frac{۲۱-BX}{۲۱} = \frac{۲۱-BX}{\sqrt{۳}}$.

از طرف دیگر با توجه به این که $\angle ZXB = ۳۰^\circ$ و $\frac{ZB}{BX} = \tan(\angle ZXB) = \tan(۳۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ به دست می‌آوریم که $ZB = \frac{BX}{\sqrt{۳}}$.

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی اخیر در عبارت مربوط به YZ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} YZ^۲ &= BX^۲ + (\frac{۲۱ - ۲BX}{\sqrt{۳}})^۲ \\ \Rightarrow ۳YZ^۲ &= ۷BX^۲ - ۸۴BX + ۴۴۱ = ۷(BX^۲ - ۱۲BX + ۳۶) + ۱۸۹ \\ \Rightarrow\ YZ^۲ &= \frac{۷}{۳}(BX - ۶)^۲ + \frac{۱۸۹}{۳} \geq \frac{۱۸۹}{۳} \end{aligned}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $YZ^۲$ برابر $\frac{۱۸۹}{۳}$ است و زمانی به این مقدار می‌رسیم که $BX = ۶$ باشد.

۱۰. اعدادی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر هستند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۶، یکی از اعداد ۰، ۲، ۳ و ۴ باشد، معادلاً به فرم $۶k$، $۶k+۲$، $۶k+۳$ و یا $۶k+۴$ باشد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{\substack{(n,۶)\neq ۱ \\ ۱\leq n\leq ۱۲۰}} x^n \\ &= \sum_{۱\leq ۶k\leq ۱۲۰} x^{۶k} + \sum_{۱\leq ۶k+۲\leq ۱۲۰} x^{۶k+۲} + \sum_{۱\leq ۶k+۳\leq ۱۲۰} x^{۶k+۳} + \sum_{۱\leq ۶k+۴\leq ۱۲۰} x^{۶k+۴} \\ &= \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۶} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۲} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۳} + \sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k+۴} \\ &= (x^۶ + x^۲ + x^۳ + x^۴)(\sum_{k=۰}^{۱۹} x^{۶k}) \\ &= x^۲(۱ + x + x^۲ + x^۴)(۱ + x^۶ + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴}) \end{aligned}$$

حال دقت کنید که همه‌ی جملات عبارت $x^۶ + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴}$ نامنفی هستند و لذا

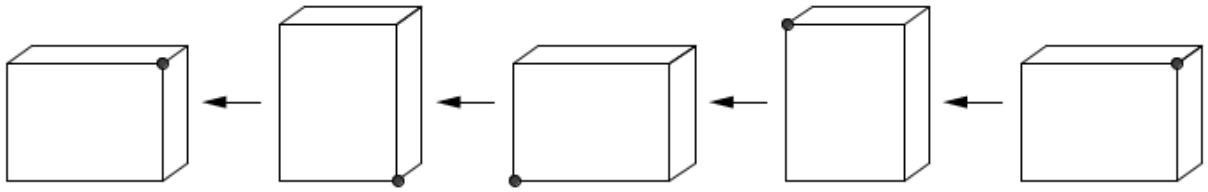
$$۱ + x^۶ + x^{۱۲} + \cdots + x^{۱۱۴} > ۰$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

و بنابراین این چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد. از طرف دیگر $۱ + x + x^۲$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است که همواره مقدار آن مثبت است و با توجه به نامنفی بودن $x^۴$، $۱ + x + x^۲ + x^۴$ هم همواره مثبت است و ریشه‌ی حقیقی ندارد. پس تنها ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ همان صفر است.

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

جسم به شکل زیر روی زمین غلطیده:



(دقت کنید که نسبت عمق مکعب که برابر ۶ است به دلیل راحتی در رسم رعایت نشده است و ضمناً نقطه‌ی پررنگ در شکل‌های بالا محل نقطه‌ی A را در هر گام مشخص می‌کند.)

در هر مرحله مکعب مستطیل حول ضلع پایین سمت چپ چرخیده است. پس

در چرخش اول نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۵ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۲\pi\times۵}{۴} = \frac{۵}{۲}\pi$ را طی کرده است.

در چرخش دوم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۴ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۲\pi\times۴}{۴} = ۲\pi$ را طی کرده است.

در چرخش سوم نقطه‌ی A، ثابت مانده و بنابراین مسافتی طی نکرده است.

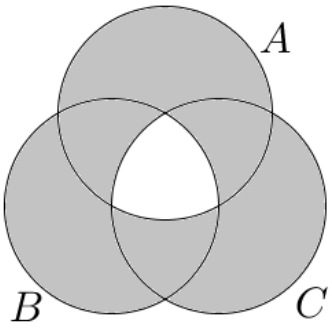
در چرخش چهارم نقطه‌ی A، ربع دایره‌ای به شعاع ۳ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{۲\pi\times۳}{۴} = \frac{۳}{۲}\pi$ را طی کرده است.

بنابراین در کل این نقطه مسافت $\frac{۵}{۲}\pi + ۲\pi + \frac{۳}{۲}\pi = ۶\pi$ را طی کرده است.

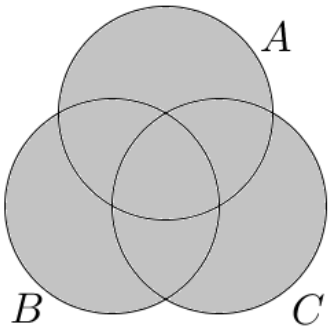
۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

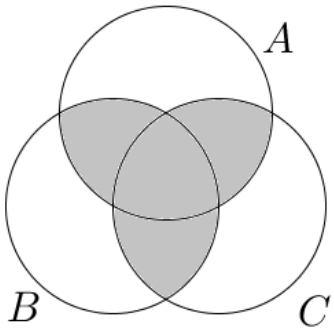
از نمودار ون برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم.



گزینه‌ی الف



گزینه‌ی ب

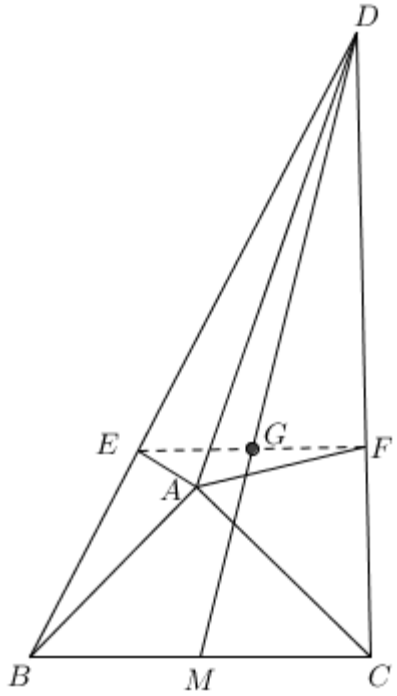


گزینه‌ی ج و د

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر حاصل‌ضرب اعداد دو دسته برابر A باشد، $۳۰! = ۳۰ \times \cdots \times ۲ \times ۱ = A^۲$. اما در $۳۰!$ تنها یک عامل ۲۳ وجود دارد، پس امکان ندارد که $۳۰!$ مربع کامل باشد. بنابراین چنین عملی ممکن نیست.

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



با توجه به این که پاره‌خط‌های AE و AF نیم‌ساز هستند، $\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{EB}$ و بنا بر قضیه‌ی تالس $EF \parallel BC$. حال چون EF از مرکز ثقل مثلث BCD می‌گذرد نتیجه می‌گیریم $\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{GM} = \frac{۲}{۱}$ (M وسط ضلع BC است.) و بنابراین $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{EB} = ۲$. پس $AD = ۲AB = ۲۰$.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$x^۴ - x^۲ - ۲x - ۱ = x^۴ - (x+۱)^۲ = (x^۲ - x - ۱)(x^۲ + x + ۱)$$

عبارت $x^۲ + x + ۱ = (x + \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}$ همواره مثبت است پس علامت چندجمله‌ای صورت سؤال با علامت چندجمله‌ای $x^۲ - x - ۱$ یک‌سان است. عبارت $x^۲ - x - ۱$ یک سهمی است که دارای دو ریشه‌ی $\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ است، پس برای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه‌ی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ریشه‌ی کوچک‌تر یعنی $(-\infty, \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}] \cup [\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, \infty)$ که اجتماع دو نیم‌خط است، مقدار چندجمله‌ای نامنفی است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

چون مقدار عبارت طبیعی شده و با توجه به این که صورت کسر مثبت است، مخرج کسر هم باید مثبت باشد و بنابراین $a > b$. از طرف دیگر دقت کنید که $a - b \mid a + b$ معادل این است که $a - b \mid ۲b$.

حال مسئله را بر حسب مقادیر مختلف b حالت‌بندی می‌کنیم.

$b = ۱$، $a - ۱ \mid ۲$ پس $a - ۱ \in \{۱, ۲\}$ و لذا $a \in \{۲, ۳\}$. دو حالت دارد.

$b = ۲$، $a - ۲ \mid ۴$ پس $a - ۲ \in \{۱, ۲, ۴\}$ و لذا $a \in \{۳, ۴, ۶\}$. سه حالت دارد.

$b = ۳$، $a - ۳ \mid ۶$ پس $a - ۳ \in \{۱, ۲, ۳, ۶\}$ و لذا $a \in \{۴, ۵, ۶, ۹\}$. چهار حالت دارد.

$b = ۴$، $a - ۴ \mid ۸$ پس $a - ۴ \in \{۱, ۲, ۴, ۸\}$ و لذا $a \in \{۵, ۶, ۸\}$. سه حالت دارد.

$b = ۵$، $a - ۵ \mid ۱۰$ پس $a - ۵ \in \{۱, ۲, ۵, ۱۰\}$ و لذا $a \in \{۶, ۷, ۱۰\}$. سه حالت دارد.

$b = ۶$، $a - ۶ \mid ۱۲$ پس $a - ۶ \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$ و لذا $a \in \{۷, ۸, ۹, ۱۰\}$. چهار حالت دارد.

$b = ۷$، $a - ۷ \mid ۱۴$ پس $a - ۷ \in \{۱, ۲, ۷, ۱۴\}$ و لذا $a \in \{۸, ۹\}$. دو حالت دارد.

$b = ۸$، $a - ۸ \mid ۱۶$ پس $a - ۸ \in \{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\}$ و لذا $a \in \{۹, ۱۰\}$. دو حالت دارد.

$b = ۹$، $a - ۹ \mid ۱۸$ پس $a - ۹ \in \{۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸\}$ و لذا $a \in \{۱۰\}$. یک حالت دارد.

$b = ۱۰$، $a - ۱۰ \mid ۲۰$ پس $a - ۱۰ \in \{۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰\}$ که چنین حالتی برای a امکان ندارد.

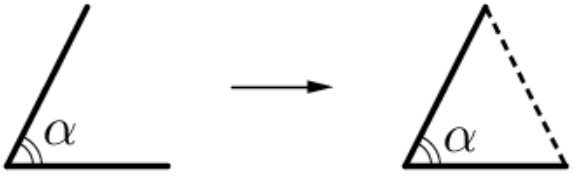
پس در کل به $۲۴ = ۱ + ۲ + ۲ + ۴ + ۳ + ۳ + ۴ + ۳ + ۲$ حالت می‌توان این دو عدد را انتخاب کرد.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

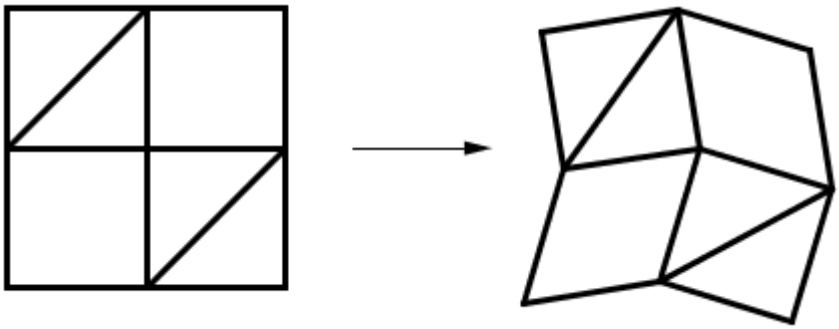
ابتدا توجه کنید که مثلث‌ها نمی‌توانند تغییر شکل بدهند و در نتیجه زوایای درون هر مثلث ثابت هستند. از طرف دیگر اگر در یک لولا زاویه‌ی لولا ثابت باشد، با استفاده از قواعد هم‌نهشتی مثلث‌ها می‌توان نشان داد

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

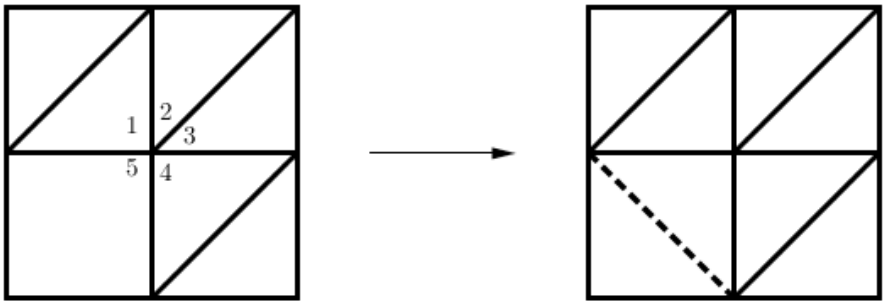
که کل لولا باید ثابت بماند، پس می‌توان ضلع مقابل لولا را اضافه کرد، طوری که در انعطاف‌پذیری شکل تغییری ایجاد نشود. یعنی در شکل زیر اگر α ثابت باشد، می‌توان چوبی در روبه‌روی این زاویه‌ی α اضافه کرد، به گونه‌ای که به صورت سمت راست در آید.



توجه کنید که سومین شکل (از سمت راست) را می‌توان با حرکت دادن به صورت زیر تغییر داد. پس سه شکل اول قابل انعطاف هستند.



اما در شکل چهارم با توجه به توضیحات بالا که مثلث‌ها ثابت هستند، زاویه‌های شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ ثابت هستند. بنابراین زاویه‌ی ۵ هم باید ثابت باشد. پس با توجه به توضیحات بالا می‌توان تکه‌چوبی را بدون تغییر در انعطاف‌پذیری به شکل اضافه کرد طوری که همه‌ی چندضلعی‌های شکل مثلث شوند و به این ترتیب شکل غیرقابل انعطاف است.



پس در کل سه تا از شکل‌ها می‌توانند تغییر کنند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۸. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به نامساوی حسابی، هندسی می‌دانیم که $a^۲ + b^۲ = \left|a\right|^۲ + \left|b\right|^۲ \geq ۲\left|ab\right|$، پس ناحیه‌ی مورد سؤال زیرمجموعه‌ی $\{(x,y) : \left|y\right| < \frac{x}{۲}\}$ است. از طرف دیگر اگر $x = \sqrt{a}.\sin\theta$ و $y = \sqrt{a}.\cos\theta$ باشد، $(x^۲ + y^۲, xy) = (a, \frac{۱}{۲}a\sin(۲\theta))$ و $\frac{۱}{۲}a\sin(۲\theta)$ برای مقادیر مختلف θ، کل بازه‌ی $[-\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}]$ را می‌پوشاند. پس در کل مجموعه‌ی مورد نظر، $\{(x,y) : \left|y\right| < \frac{x}{۲}\}$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید بعد از گذشت n ثانیه ملخ خورده شود. اگر وزغ بعد از خوردن ملخ به جای این که سرجای خود بایستد، با همان حرکت‌های ملخ خود را به جای نخستین ملخ برساند، n حرکت قبل از خوردن ملخ انجام داده و بعد از خوردن او هم n حرکت دیگر انجام داده است، پس در کل $۲n$ حرکت کرده است. بالعکس اگر وزغ با $۲n$ حرکت ۲متر را طی کند، می‌توان n حرکت اول را حرکات وزغ و n حرکت بعدی را برعکس حرکات ملخ در نظر گرفت. در واقع ما تناظری بین تعداد راه‌های خورده شدن ملخ توسط وزغ و راه طی کردن مسیر ۲ متر با تعداد زوجی حرکت توسط وزغ برقرار کرده‌ایم. پس باید تعداد زوج حرکت‌هایی را بشماریم که وزغ در آن ۲ متر به جلو می‌رود. اگر به جای ۲۵ و ۵۰ سانتی‌متر، طول حرکات را ۱ و ۲ و کل مسیر را ۸ بگیریم، باید تعداد زوج‌حرکت‌هایی را بشماریم که در آن ۸ واحد طی می‌شود. تعریف می‌کنیم:

$O_n =$ تعداد فرد حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

$E_n =$ تعداد زوج حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

با توجه به حرکات وزغ که در هر مرحله یک یا دو واحد طی می‌کند به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$E_{n+۱} = O_n + O_{n-۱}$$
$$O_{n+۱} = E_n + E_{n-۱}$$

و هدف یافتن $E_۸$ است. به کمک جدول زیر و با توجه به این که $E_۱ = ۰$ و $O_۱ = O_۲ = E_۲ = ۱$ این محاسبه را انجام می‌دهیم.

n	۱	2	3	4	5	6	7	8
O_n	1	1	1	3	4	6	11	17
E_n	0	1	2	2	4	7	10	**17**

پس پاسخ عدد ۱۷ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

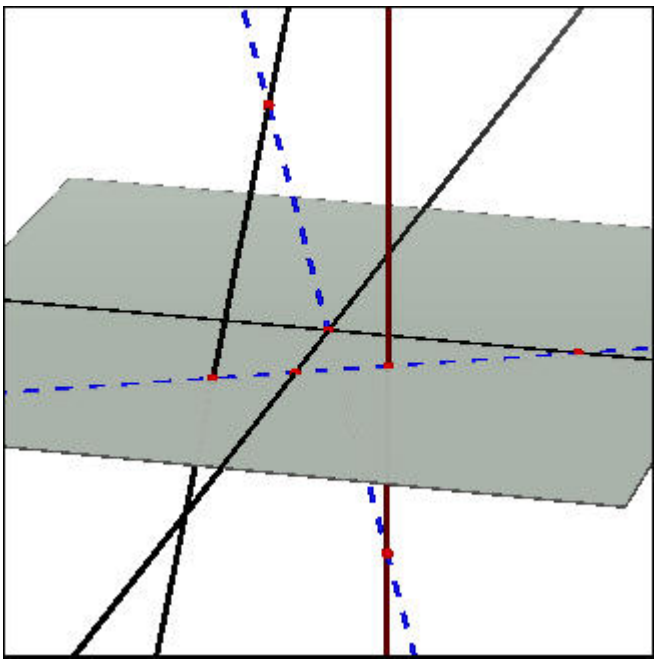
۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید l_1، l_2، l_3 و l_4 ۴ خط صورت سؤال باشند که l_1 و l_2 در نقطه‌ی P متقاطع هستند. اگر خط l هر چهار خط را قطع کند با توجه به این که l_1 و l_2 را هم قطع می‌کند یا باید از نقطه‌ی P بگذرد یا در صفحه‌ی شامل l_1 و l_2 که صفحه‌ای یک‌تاست قرار دارد.

اگر چنین خطی که از نقطه‌ی P می‌گذرد موجود باشد، خطی یک‌تاست زیرا در غیر این صورت اگر l و l' دو خط با این خاصیت باشند، با توجه به این که هر دو شامل نقطه‌ی P هستند در یک صفحه قرار می‌گیرند و چون l_3 و l_4 با هر دو خط تقاطع دارند، آن‌ها نیز باید در همین صفحه باشند که در این صورت باید با هم متقاطع یا موازی باشند که خلاف فرض ماست.

اگر چنین خطی با در صفحه‌ی شامل l_1 و l_2 باشد، از آن‌جا که اشتراک این صفحه با l_3 و l_4 حداکثر در یک نقطه است.(اگر بیش‌تر از یک نقطه اشتراک داشته باشد کل خط باید در این صفحه باشد که باعث می‌شود با l_1 و l_2 موازی و یا متقاطع شود که خلاف فرض است.) پس باید خط l از این دو نقطه بگذرد و بنابراین خط مورد نظر در این حالت هم یک‌تا است.

پس در کل حداکثر دو خط می‌توان داشت. می‌توان مطابق شکل زیر خط‌ها را با توجه توضیحات بالا به گونه‌ای طراحی کرد که دو خط متقاطع با هر چهارتای آن‌ها موجود باشند.(خطوط قطعه‌قطعه دو خط مورد نظر هستند.)



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰$ و $x > ۰$، در این صورت $y < ۰$ زیرا اگر $y \geq ۰$، $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ > ۰$ که به وضوح تناقض است.

حال دقت کنید که

$$xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰ \Rightarrow (\frac{y}{x})^۲ + ۴(\frac{y}{x}) = \frac{-۵}{x^۳} < ۰ \Rightarrow (\frac{y}{x} + ۴)(\frac{y}{x}) < ۰$$

حال چون $\frac{y}{x} < ۰$، $\frac{y}{x} + ۴ > ۰$ و معادلاً $y > -۴x$. پس $a \geq -۴$.

حال ادعا می‌کنیم $a = -۴$. برای این منظور نشان می‌دهیم برای هر $-۴ < a < ۰$ می‌توان $x \in \mathbb{R}^+$ و $y \in \mathbb{R}^-$ یافت که $xy^۲ + ۴x^۲y + ۵ = ۰ (\star)$ و ضمناً $y = ax$.

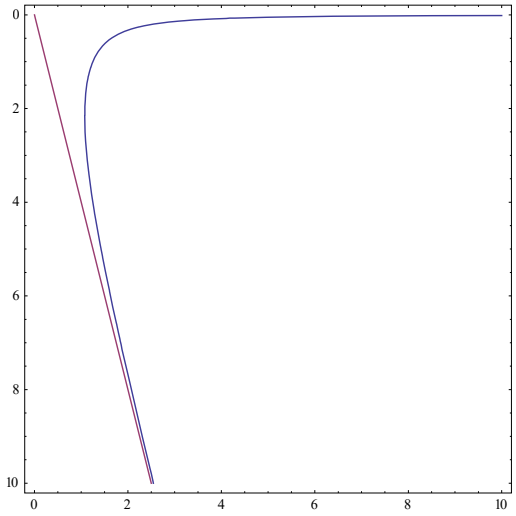
اگر $y = ax$ را در رابطه‌ی $(\star)$ جای‌گزین کنیم، داریم:

$$a^۲x^۳ + ۴ax^۳ + ۵ = ۰ \Leftrightarrow x^۳ = \frac{-۵}{a(۴ + a)} \Leftrightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{-۵}{a(۴ + a)}}$$

که چون $-۴ < a < ۰$، عدد x که در بالا به دست آمده مثبت است و زوج x و $y = ax$ در رابطه‌ی $(\star)$ صدق می‌کنند. پس بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a همان -۴ است.

توضیح: در شکل زیر مجموعه نقاطی در ناحیه‌ی چهارم مختصات که در رابطه‌ی $(\star)$ صدق می‌کنند و هم‌چنین نمودار خط $y = -۴x$ را می‌بینید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تمام نمودار در این ناحیه در بالای این خط قرار دارد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

طبق رابطه‌ی صورت سؤال $x+y=z(xy-۲)$ و چون x، y و z طبیعی و در نتیجه مثبت هستند، $xy-۲$ هم طبیعی است و به علاوه $xy-۲ \Big| x+y \ (\star)$ و لذا $xy-۲ \leq x+y$. ادعا می‌کنیم که یکی از x و y کم‌تر از ۳ است. به برهان خلف فرض کنید $x,y \geq ۳$. حال داریم:

$$xy-۲ \leq x+y \Rightarrow xy-x-y \leq ۲ \Rightarrow (x-۱)(y-۱)=xy-x-y+۱ \leq ۳$$

که رابطه‌ی آخر با توجه به این که $x-۱ \geq ۲$ و $y-۱ \geq ۲$ امکان ندارد.

حال مسئله را بر حسب x و y حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول. $x=۱$. طبق $(\star)$ باید $y-۲ \Big| y+۱$، معادلاً $y-۲ \Big| ۳$ و لذا $y-۲ \in \{-۳,-۱,۱,۳\}$. این حالت در نهایت با توجه به طبیعی بودن x، y و $xy-۲$ منجر به جواب‌های $(۱,۳,۴)$ و $(۱,۵,۲)$ می‌شود. (منظور از سه‌تایی $(۱,۵,۲)$، $x=۱$، $y=۵$ و $z=۲$ است!)

حالت دوم. $x=۲$. در این حالت طبق رابطه‌ی $(\star)$ باید $۲y-۲ \Big| y+۲$ که این نتیجه می‌دهد $۲y-۲ \Big| (۲y-۲)-۲(y+۲)$ و لذا $y-۱ \Big| ۳$. بنابراین $y-۱ \in \{-۳,-۱,۱,۳\}$. این حالت در نهایت توجه به طبیعی بودن x، y و $xy-۲$ منجر به جواب‌های $(۲,۲,۲)$ و $(۲,۴,۱)$ می‌شود.

حالت سوم. $y=۱$. کاملاً شبیه حالت اول به جواب‌های $(۳,۱,۴)$ و $(۵,۱,۲)$ منجر می‌شود. (دقت کنید که به دلیل تقارن رابطه‌ی صورت سؤال نسبت به x و y اگر (x,y,z) جواب باشد، (y,x,z) هم جواب است.)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حالت چهارم. $y = ۲$. این حالت هم مشابه حالت دوم به $(۲,۲,۲)$ و $(۴,۲,۱)$ منجر می‌شود که جواب $(۲,۲,۲)$ تکراری است. پس در کل مسئله ۷ جواب دارد.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

یک برنامه‌ریزی غذایی برای تعدادی روز در رستوران را "متنوع" می‌نامیم اگر غذای هر دو روز متوالی متفاوت باشد. حال a_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزیِ متنوع برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر نیز متفاوت باشد. به همین ترتیب b_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزیِ متنوع رستوران برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر یک‌سان باشد. با این ادبیات هدف ما در مسئله یافتن $a_۷$ است.

دقت کنید که اگر یک برنامه‌ریزی متنوع برای n روز داشته باشیم که غذای روز اول و آخر آن یک‌سان باشد، با حذف روز nاُم از برنامه به یک برنامه‌ریزی متنوع برای $n-۱$ روز می‌رسیم که غذای روز اول و آخر آن متفاوت است. یعنی $b_n = a_{n-۱}$.

از طرف دیگر $a_n + b_n$ تعداد کل روش‌های برنامه‌ریزی متنوع برای رستوران است(با این تفاوت که هیچ رابطه‌ای بین غذای روز اول و آخر نداریم). در یک برنامه‌ریزی متنوعِ n روزه، برای انتخاب غذای روز اول سه حالت داریم. بعد از انتخاب غذای روز اول، برای انتخاب غذای روزهای بعد هر کدام ۲ حالت خواهیم داشت(غذای هر روز باید با غذای روز قبلش متفاوت باشد). پس تعداد کل چنین برنامه‌ریزی‌هایی $a_n + b_n = ۳ \times ۲^{n-۱}$ است و این یعنی $۳ \times \underbrace{۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲}_{n-۱}$. حال داریم:

$$a_n + b_n = ۳ \times ۲^{n-۱} \overset{a_n = b_{n-۱}}{\Rightarrow} a_n = ۳ \times ۲^{n-۱} - a_{n-۱}$$
$$a_n = ۳ \times ۲^{n-۱} - (۳ \times ۲^{n-۲} - a_{n-۲}) = ۳ \times ۲^{n-۲} + a_{n-۲}$$

با توجه به این رابطه‌ی بازگشتی برای $a_۷$ داریم:

$$a_۷ = ۳ \times ۲^۵ + a_۵ = ۳ \times (۲^۵ + ۲^۳) + a_۳ = ۳ \times (۲^۵ + ۲^۳ + ۲^۱) + a_۱$$

که $a_۱ = ۰$(در برنامه‌ریزی برای یک روز حتماً غذای روز اول و آخر یکی می‌شود!) و در نتیجه $a_۷ = ۳ \times ۴۲ = ۱۲۶$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با جمع و تفریق کردن دو رابطه به دست می‌آوریم:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$\begin{cases} x^۲ + y = xy^۲ \\ y^۲ + x = yx^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ + (x+y)(۱ - xy) = ۰ \ (\mathrm{I}) \\ x^۲ - y^۲ + (x-y)(xy - ۱) = ۰ \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

با استفاده از (II) خواهیم داشت:

$$(x-y)(x+y+xy-۱) = ۰$$

پس $x = y$ و یا $x + y = ۱ - xy$. اگر $x + y = ۱ - xy$ با توجه به (I) باید داشته باشیم $x^۲ + y^۲ + (x+y)^۲ = ۰$ که این نتیجه می‌دهد $x = y = ۰$. پس در هر صورت $x = y$:

$$x = y \Rightarrow x + x^۲ = x^۳ \Rightarrow x(x^۲ - x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

پس دست‌گاه معادلات، ۳ جواب حقیقی دارد.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونهٔ بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمرهٔ مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمرهٔ منفی ندارد.

۱. بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳ و... $11n$ حداکثر سه مقسوم علیه اول داشته باشند چند است؟



۲. دوازده کشتی‌گیر در جام جهان‌پهلوان تختی شرکت کرده‌اند. ممکن است دو کشتی‌گیر چند بار با هم مبارزه کنند. کسی که پنج بار ببازد از دور رقابت‌ها حذف می‌شود. در این جام حداکثر چند کشتی برگزار می‌شود؟ (توجه کنید که کشتی تساوی ندارد.)

۳. نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۱۱ نفره اعدادی صحیح از صفر تا ۲۰ است. فرض کنید میانگین نمرات ۱۸ و میانهٔ نمرات ۱۹ است؛ کم‌ترین نمرهٔ کلاس حداقل چند می‌تواند باشد؟ (میانهٔ ۱۱ نمره، نمره‌ای است که پس از مرتب کردن نمرات به ترتیب نزولی، در رتبهٔ ششم قرار می‌گیرد.)



۴. قیمت سهام شرکت «نوسان‌سازان شدید» دچار نوسانات شدیدی شده است! در ابتدای ورود شرکت به بازار بورس، هر سهم آن هزار ریال قیمت‌گذاری شد. پس از یک روز، قیمت هر سهم یک ریال کاهش پیدا کرد. سپس به مدت دو روز، هر روز یک ریال افزایش یافت. سپس به مدت سه روز، هر روز یک ریال کاهش یافت و الی آخر. بعد از گذشت ۳۶۵ روز از ورود شرکت به بازار بورس قیمت هر سهم چند ریال است؟

۵. به ازای چند عدد صحیح a، معادلهٔ $x^2 + ax + 1389 = 0$ ریشه‌ای صحیح دارد؟

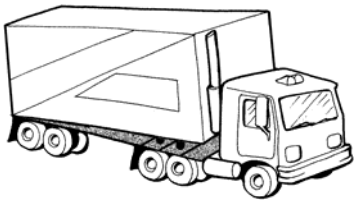
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

۶. فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد که برای m از ۲ تا ۶، $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی است. n چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۷. طول محفظهٔ کامیونی ۴ متر و عرض و ارتفاع آن ۲ متر است. مقداری آب در محفظهٔ کامیون جمع شده که در حالت افقی بودن محفظه، ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است. راننده می‌خواهد برای جلوگیری از زنگ زدن محفظه، آن را بالا بیاورد طوری که سطح تماس آب با بدنه کم‌ترین مقدار ممکن شود. سقف و در محفظه بسته است. او باید محفظه را چند درجه بالا بیاورد؟ (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)

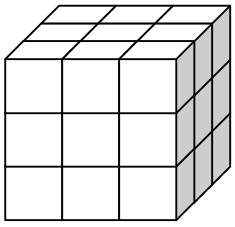


۸. کوچک‌ترین عدد n که 17^2 مقسوم‌علیه $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1\times 2\times \ldots \times n}$ باشد، چند است؟

۹. سه رادار بر روی زمین طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌های آن‌ها از هم ۶، ۸ و ۱۰ کیلومتر است. در یک لحظه، هر سه فاصلهٔ هواپیمایی تا خود را ۱۳ کیلومتر گزارش می‌کنند. ارتفاع هواپیما تا سطح زمین چند کیلومتر است؟ زمین را مسطح فرض کنید. (اگر جواب عددی اعشاری است فقط قسمت صحیح آن را بنویسید.)



۱۰. مکعبی به ضلع سه در نظر بگیرید که به مکعب‌های به ضلع یک تقسیم شده است. چند خط وجود دارد که با وجه پایینی مکعب بزرگ زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد و دست‌کم از مرکز دو تا از مکعب‌های کوچک می‌گذرد؟



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ☺

ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج‌گزینه‌ای پاسخ دهید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمرهٔ مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.

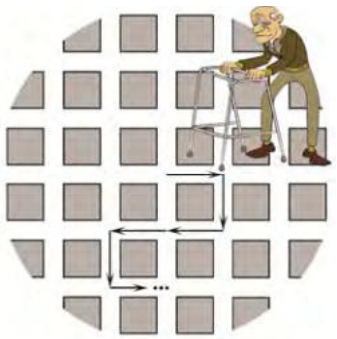
۱. در متوازی الاضلاع $ABCD$ داریم $\widehat{BAD} = ۶۰^\circ$. این متوازی الاضلاع را حول رأس A به اندازهٔ ۶۰° دوران می‌دهیم. دوران‌یافتهٔ نقاط B، C و D را به ترتیب B'، C' و D' می‌نامیم. نسبت $\frac{CC'}{AC}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۴}{۵}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$ د) $\frac{۶}{۵}$ ه) ۱

۲. به ازای چند عدد طبیعی k، عدد $\frac{۵۹۶+k}{۷۰۰-k}$ نیز طبیعی است؟

الف) ۲۴ ب) ۲۵ ج) ۳۷ د) ۴۹ ه) ۵۰

۳. آقای فراموش‌کار، ۹۲ ساله، ساعت ۷ صبح از منزل خود که در چهارراه مرکزی شهر است خارج شده و تا کنون که ساعت ۱۰ شب است به منزل برنگشته است. خیابان‌های شهر، افقی و عمودی هستند و فاصلهٔ هر دو چهارراه مجاور یک کیلومتر است. می‌دانیم که نام‌برده در هر ساعت از چهارراهی به چهارراه مجاورش می‌رود. اکنون او در چند چهارراه ممکن است باشد؟



الف) ۲۴۰ ب) ۲۵۶ ج) ۴۸۰ د) ۴۸۱ ه) ۹۶۹

۴. یک جعبهٔ شکلات یازده ردیف یازده تایی دارد. شکلات‌های موجود را هر طور قرار دهیم در بیش‌تر ردیف‌های افقی، بیش‌تر خانه‌ها خالی است. تعداد شکلات‌ها حداکثر چند تاست؟

الف) ۳۵ ب) ۳۶ ج) ۶۶ د) ۸۵ ه) ۸۶

۵. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$. نقاط P، D و E را، به ترتیب، روی اضلاع BC، AB و AC طوری انتخاب می‌کنیم که $PE \perp AC$، $PD \perp AB$ و $DE \parallel BC$. نسبت $\frac{PB}{PC}$ چند است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ه) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

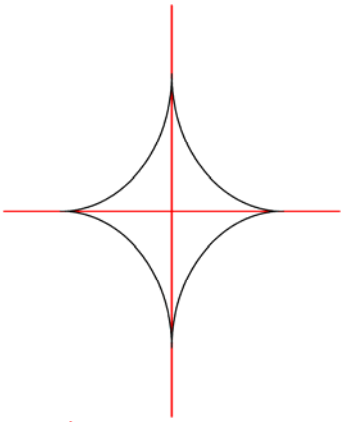
آزمون مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ☺

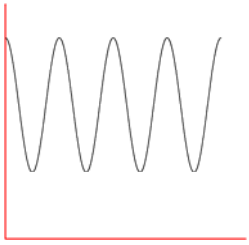
ریاضی کشور

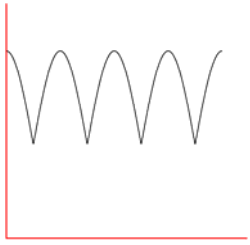
۶. q کوچک‌ترین عدد گویای مثبت است که بسط اعشاری $q^{۳}$ به شکل $۰/abcabcabc\ldots$ است که a، b و c ارقامی از بین ۰، ۱، ۲ و... ۹ هستند. $a+b+c$ چند است؟

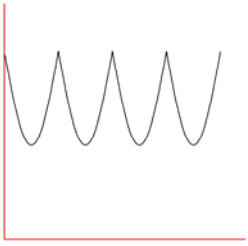
الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۷ د) ۱۸ ه) ۲۷

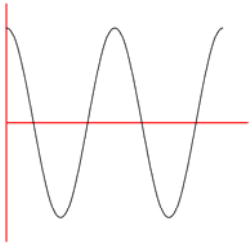
۷. متحرکی از نقطهٔ $(۱,۰)$ شروع کرده و با سرعت ثابت در جهت مثلثاتی، روی شکل روبه‌رو حرکت می‌کند. نمودارِ مجموعِ مؤلفه‌های x و y آن بر حسب زمان، شبیه کدام گزینه است؟

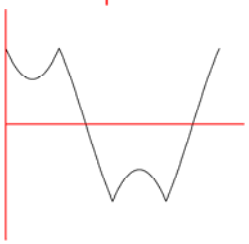


الف)


ب)


ج)


د)


ه)


۸. بزرگ‌ترین عدد حقیقی M را طوری بیابید که برای هر $a,b\in[۰,۱]$ داشته باشیم $a^{۲}+b^{۱۳۸۹}\geq Mab$.

الف) صفر ب) $۲^{-۱۳۸۶}$ ج) ۱ د) $\frac{۱۳۹۱}{۱۳۸۹}$ ه) ۲

۹. دانش‌آموزی می‌خواهد کتاب‌های ریاضی، فیزیک، ادبیات و عربی اول و دوم دبیرستان را در هشت هفته، در هر هفته یک کتاب، مرور کند. او باید کتاب سال دوم هر موضوع را زمانی مطالعه کند که کتاب سال اول آن موضوع را قبلاً خوانده باشد. این کار به چند روش ممکن است؟

الف) ۷۰ ب) ۵۷۶ ج) ۲۵۲۰ د) ۲۰۱۶۰ ه) ۴۰۳۲۰

۱۰. برای چند زوج مرتب (a,b) از اعداد طبیعی که $۱\leq a,b\leq ۱۰$، معادلهٔ $x^{۲}=ax-b$ ریشه‌ای در $[۰,۱]$ دارد؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۲۰ د) ۴۵ ه) ۶۲

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۱. عدد $۲^{۱۰}۳^{۱۱}۵^{۱۲}$ روی تخته نوشته شده است. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد (غیر از خودش) را در نظر گرفته و آن را از عدد روی تخته کم می‌کنیم و حاصل را به جای عدد روی تخته می‌نویسیم. همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم. پس از چند بار به عدد ۱ می‌رسیم؟ (مثلاً اگر در ابتدا عدد ۷ روی تخته می‌بود، پس از ۴ مرحله به عدد ۱ می‌رسیدیم: ۶، ۳، ۲ و ۱.)

الف) ۳۳ ب) ۴۵ ج) ۵۶ د) ۶۸ ه) ۸۰

۱۲. سه ساعت داریم که اولی سالم است، دومی هر ساعت، ۷ دقیقه و سومی هر ساعت ۱۱ دقیقه جلو می‌افتد. اگر ساعت‌ها در ظهر امروز به درستی تنظیم شوند بعد از گذشت چند ساعت، هر دو ساعت خراب، ۶ ساعت جلوتر از ساعت سالم را نشان می‌دهند؟

الف) ۱۸ ب) ۷۷ ج) ۱۸۰ د) ۳۶۰ ه) ۷۲۰

۱۳. فرض کنید $f(\overline{abc}) = ab + bc + ca$ که $\overline{abc}$ نمایش در مبنای ۱۰ است. دقت کنید ممکن است برخی از a، b و c صفر باشند. مثلاً $f(۲۳) = ۰ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۰ = ۶$. مجموع $f(۰) + f(۱) + \ldots + f(۹۹۹)$ چند است؟

الف) ۲۴۳ ب) ۶۹۳۰ ج) ۶۰۷۵۰ د) ۱۲۱۵۰۰ ه) ۴۹۹۵۰۰

۱۴. کاغذی مربعی به ضلع $۲۰cm$ از یکی از اضلاع به وسط یک میز بزرگ چسبیده و می‌تواند حول آن ضلع دوران بکند. دو طرف این کاغذ کاملاً جوهری شده است و به هر جایی که مالیده شود آن را جوهری می‌کند. می‌خواهیم تنها با تا کردن و خم کردن کاغذ و مالیدن و تکان دادن آن بیش‌ترین سطح ممکن از میز را رنگی کنیم. حداکثر چند سانتی‌متر مربع از میز را می‌توان رنگی کرد؟

الف) $۲۰۰\pi + ۴۰۰$ ب) $۳۰۰\pi + ۲۰۰$ ج) ۴۰۰π
د) ۶۰۰π ه) $۶۰۰\pi - ۴۰۰$

۱۵. فرض کنید H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. از H خطی به موازات ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند. نقطهٔ E را روی دایرهٔ محیطی مثلث بین A و C طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{HDB} = \widehat{EDC}$. اگر $DH = ۱$، $HB = ۳$ و $BA = ۸۹$، AE چه‌قدر است؟

الف) ۳۰ ب) $\frac{۸۹}{۳}$ ج) $\frac{۸۶}{۳}$ د) $\frac{۸۵}{۳}$ ه) $\frac{۴۵}{۲}$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۹

دفترچه کد ۱ – سوالات جواب آخر

۱. کوچکترین عدد طبیعی که چهار مقسوم‌علیه اول دارد برابر است با ۲۱۰=۷×۵×۳×۲. بنابراین $11\times n$ باید کوچکتر از ۲۱۰ باشد که نتیجه می‌دهد n باید کمتر از ۲۰ باشد. پس **پاسخ ۱۹** است.

۲. در هر کشتی یک نفر می‌بازد؛ پس تعداد باخت‌ها برابر تعداد مبارزه‌ها است. ابتدا نشان می‌دهیم تعداد کشتی‌های برگزار شده(یا همان تعداد باخت‌ها) نمی‌تواند از ۱-۱۲×۵=۵۹ بیش‌تر باشد:

اگر بیش از ۵۹ کشتی برگزار شده باشد؛ بیش از ۵۹ باخت صورت گرفته (حداقل ۶۰تا). همچنین هیچ کشتی‌گیری نمی‌تواند بیش از ۵ باخت کسب کند (با باخت پنجم حذف شده و دیگر بازی نخواهد کرد) بنابراین همه کشتی-گیرها حداقل ۵ باخت خواهند داشت (۶۰>۴+۵×۱۱) که نتیجه می‌دهد همه آن‌ها از دور رقابت‌ها حذف شده‌اند ولی این نتیجه غیر ممکن است چون در بازی آخر ۲ نفر که حذف نشده‌اند با هم مسابقه می‌دهند و حداکثر یکی از آن‌ها حذف می‌شود(چون یکی می‌برد و به باخت‌هایش اضافه نمی‌شود). با توجه به به اینکه به تناقض رسیدیم (اینکه همه کشتی‌گیرها حذف می‌شوند) تعداد بازی ها نمی‌تواند از ۵۹ بیشتر باشد.

حال با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم ممکن است ۵۹ بازی برگزار شود: برای۵۹ بازی مثالی هم وجود دارد: ابتدا در ۴ بازی کشتی‌گیر ۱۲ از ۱۱ می‌بازد و سپس کشتی‌گیر ۱۲ با هر کشتی‌گیر دیگری (۱,۲,۳,...,۱۱) ۵ بار بازی کرده و همه را می‌برد. در انتها همه کشتی‌گیرها غیر از شماره ۱۲ حذف شده‌اند و ۵×۱۱+۴=۵۹ بازی انجام شده است.

پس **پاسخ ۵۹** است.

۳. فرض کنید افراد را بر اساس نمره به صورت نزولی مرتب کرده‌ایم. داریم:

۱۹۸ = (تعداد)×(میانگین) = (مجموع کل نمره‌ها)

(مجموع نمرات ۱۰ نفر اول) - (مجموع کل نمره‌ها) = (نمره‌ی نفر آخر)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

با توجه به رابطه بالا هرچه مجموع نمرات ۱۰ نفر اول بیشتر باشد نمره نفر آخر کمتر می‌شود. پس اگر بخواهیم نمره‌ی نفر اول کمینه باشد، باید مجموع نمرات بقیه بیشینه باشد. مجموع نمرات ۵ نفر اول حداکثر ۱۰۰ است و در حالتی به دست می‌آیدکه نمره‌ی همه‌ی آن‌ها ۲۰ باشد. نمره‌ی ۵ نفر بعدی بایدکمترمساوی ۱۹ باشد (زیرا نمره‌ی نفر ۶ ام ۱۹ است) پس مجموع نمرات آن‌هاحداکثر ۹۵ است و در حالتی به دست می‌آیدکه نمره‌ی همه‌شان ۱۹ باشد. بنابراین مجموع نمرات ۱۰ نفر اول حداکثر ۱۹۵ است که با این فرض، نمره‌ی نفر آخر ۳ خواهد بود و این مقدار، حداقل نمره نفر آخر می‌باشد. **پاسخ ۳** است.

۴. دنباله‌ی متناظر با تغییرات قیمت به صورت ...,۱-,۱-,۱-,۱+,۱+,۱+,۱- است. بعد از گذشت یک روز تغییر قیمت سهام برابر ۱- ریال خواهد بود، بعد از ۱+۲ روز قیمت سهام ۱+۲- نسبت به روز اول تغییر کرده و... و بعد از n روز $\pm n$...+۳+۲+۱ ریال قیمت سهام تغییر می‌کند. توجه کنید که بعد از روزهای $\frac{n(n+1)}{۲}$,...,۶,۳,۱ علامت یک‌های دنباله‌ی تغییرات عوض می‌شود.

برای این که بفهمیم در روز ۳۶۵اُم در چه وضعیتی هستیم، معادله‌ی $\frac{n(n+1)}{۲} < ۳۶۵$ را حل کرده و به این نتیجه می‌رسیم که $n < ۲۷$. طبق گفته‌های بالا تا روز۳۵۱ (= $\frac{۲۷*۲۶}{۲}$) اُم قیمت سهام ۲۶+...-۳-۲+۱- ریال تغییر می‌کند، یعنی ۱۳+ ریال. بعد از آن تا روز ۳۶۵اُم هر روز یک ریال قیمت کاهش می‌یابر ک تعداد این روزها ۱۴=۳۵۱-۳۶۵ است. نهایتا بعد از گذشت ۳۶۵ روز قیمت هر سهم برابر ۹۹۹=۱۴-۱۳+۱۰۰۰ می‌شود. **پاسخ ۹۹۹** است.

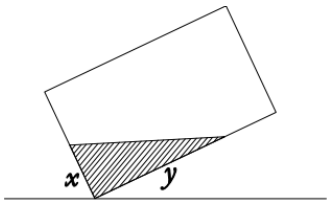
۵. ضرب ریشه‌های عبارت $x^2 + ax + ۱۳۸۹$ برابر ۱۳۸۹ است. تجزیه ۱۳۸۹ به عوامل اول به صورت ۱۳۸۹=۳×۴۶۳ است بنابر این ۱۳۸۹ را به ۴ طریق می توان به صورت ضرب دو عدد صحیح نوشت (۱۳۸۹و۱، ۱۳۸۹-و۱-، ۴۶۳و۳، ۴۶۳-و۳-). که در هر حالت a به طور یکتا (منفیِ جمع دو ریشه) تعیین می‌شود و ۴ مقدار متفاوت برای a بدست می‌آید. پس **پاسخ ۴** است.

۶. راه حل اول: کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۲ تا ۶، ۶۰ است پس عددی که ریشه ۲ تا ۶اُم آنصحیح است بایدریشه‌ی ۶۰اُمش هم صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد با این ویژگی $۲^{۶۰}$ است که ۶۱=۱+۶۰ مقسوم‌علیه دارد. پس **پاسخ ۶۱** است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل دوم: اگر تجزیه به عوامل اول عددی به صورت $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ باشد ریشه kاُم آن برابر $p_1^{\alpha_1 \div k} \dots p_n^{\alpha_n \div k}$ خواهد بود؛ پس برای طبیعی بودن ریشه kاُم باید a ، α_iها بر k بخشپذیر باشند؛ در این سوال نماها باید بر کوچکترین مضرب مشترک ۲ تا ۶ یعنی ۶۰ بخشپذیر باشند؛ کوچکترین عدد طبیعی با این ویژگی 2^{60} بوده و ۶۱ مقسوم‌علیه دارد. **پاسخ ۶۱** است.

۷. اگر فرض کنیم آب درون محفظه به صورت روبه رو درآمده باشد رابطه‌های زیر را داریم:



حجم آب: $\frac{1}{2}(x$

سطح تماس: $2x$

برای مینیمم شدن سطح تماس آب با محفظه طبق روابط بالا باید $x + y$ مینیمم شود. طبق نامساوی حسابی-هندسی داریم $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ، درحالی در این مسئله xy ثابت(۰.۸) است. تساویِ نامساوی حسابی-هندسی با فرض ثابت بودن حاصل ضرب xy وقتی حاصل می‌شود که x و y برابر باشند پس در صورت برابر بودن x و y مجموع‌شان مینیمم می‌شود و درنتیجه سطح تماس آب و محفظه مینیمم می‌شود. بنابراین زاویه سطح محفظه با افق برابر ۴۵ درجه خواهد بود لذا **پاسخ ۴۵** است.

۸. توجه کنید که کسر داده شده برابر $\binom{2n}{n}$ است لذا همواره حاصل آن عددی طبیعی خواهد بود. ابتدا نشان می‌دهیم درصورتیکه $2n < 17^2$ جواب موجود نمی‌باشد:

اگر $2n < 17^2$ هر مضرب ۱۷ در تجزیه به عوامل اول دقیقا ۱ عامل ۱۷ دارد. اگر $n = 17k + r$ $(0 \leq r < 17)$ مخرج کسر k عامل ۱۷ خواهد داشت، همچنین خواهیم داشت:

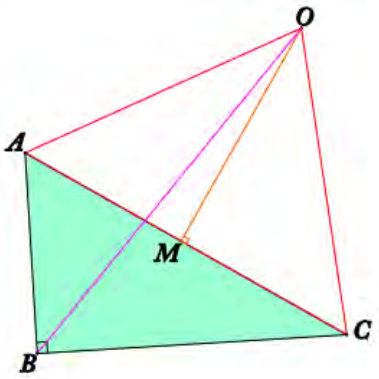
$$2n = 17(2k) + 2r \leq 17\left(2k\right) + 32 \leq 17\left(2k + 1\right) + 15$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس در صورت کسر حداکثر $k+1$ مضرب ۱۷ خواهیم داشت و درنتیجه صورت حداکثر $k+1$ عامل ۱۷ خواهد داشت ولی برای اینکه کسر داده شده بر 17^2 بخشپذیر باشد باید تعداد مضارب ۱۷ در صورت حداقل ۲تا از تعداد مضارب ۱۷ در مخرج بیشتر باشد پس ۲۸۹درصورتیکه $2n < 17^2$ خواسته سوال ممکن نخواهد بود.

تا اینجا ثابت کردیم $2n \geq 17^2 = 289$. کوچکترین عدد طبیعی n که این شرط را دارد ۱۴۵ است که با آزمایش کردن آن ($n = 145$) مشاهده می‌کنیم کسر داده شده بر 17^2 بخشپذیر است؛ پس **پاسخ ۱۴۵** است.

۹. با توجه به برقراری قضیه فیثاغورس برای فواصل رادارها، سه رادار، مثلثی قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند (A، B و C). با توجه به برابر بودن فاصله هواپیما(نقطه O) از دو راس هر ضلع مثلث، این نقطه روی صفحات عمودمنصف ضلع‌ها قرار گرفته. اشتراک این سه صفحه خطی عمود بر صفحه مثلث(زمین) در وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه(نقطه M) می‌باشد؛ پس O روی آن خط قرار دارد و شرط دیگر این است که فاصله آن از رئوس مثلث ۱۳ کیلومتر است. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OMA طول ضلع OM که همان ارتفاع هواپیما از زمین است بدست می‌آید: $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. **پاسخ ۱۲** است.



۱۰. خطوط مطلوب را به ۲ گروه تقسیم می‌کنیم:

گروه اول: خطوط موازی دو وجه مقابل از مکعب که با توجه به تقارن ۴جانبه مکعب، یک دسته از ۴ دسته آن‌ها را مشخص می‌کنیم: (شماره مکعب‌های ۱×۱ مربوط به خطوط آورده شده)

۱-۱۳ ۲-۱۴ ۳-۱۵ ۴-۱۶ ۵-۱۷ ۶-۱۸ ۱۰-۲۲ ۱۱-۲۳ ۱۲-۲۴

پس گروه اول ۹×۴=۳۶ خط دارد.

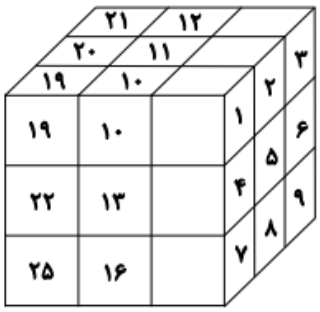
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

گروه دوم: خطوط موازی قطر اصلی مکعب. این گروه نیز با توجه به تقارن به ۴ دسته متناظر و هم‌اندازه تقسیم می‌شود که یک دسته را آورده‌ایم:

۱-۱۴ ۲-۱۵ ۴-۱۷ ۵-۱۸ ۱۰-۲۳ ۱۱-۲۴ ۱۳-۲۶

این گروه از ۷×۴=۲۸ خط تشکیل شده.

در مجموع ۲۸+۳۶ = ۶۴ خط قابل قبول وجود دارد. **پاسخ ۶۴** است.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

دفترچه کد ۱ – سوالات تستی

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

چون C′ دوران ۶۰ درجه C است، مثلث ACC′ متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه نسبت خواسته شده در سوال برابر ۱ است.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با فرض طبیعی بودن کسر $\frac{۵۹۶+k}{۷۰۰-k}$، باید $۷۰۰-k|۵۹۶+k$.

از طرف دیگر $۷۰۰-k|۷۰۰-k$.

با جمع این دو رابطه خواهی داشت: $۷۰۰-k|۱۲۹۶$ پس $۷۰۰-k$ باید مقسوم‌علیه ۱۲۹۶ باشد و هر مقسوم‌علیه‌های ۱۲۹۶ که کوچکتر از ۷۰۰ باشد یک جواب قابل قبول خواهد بود. $۱۲۹۶ = ۲^۴ \times ۳^۴$، بنابراین ۲۵مقسوم‌علیه دارد که همه آن‌ها غیر از خود ۱۲۹۶ از ۷۰۰ کوچکترند و به ازای هرکدام یک جواب داریم. پس به ازای ۲۴ مقدار طبیعی برای k کسر مورد نظر طبیعی خواهد بود.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

راه حل اول: برای دستگاه مختصات، جهت افقی(راست) را محور xها و جهت عمودی(بالا) را محور yها و مبدا مختصات را منزل آقای فراموش‌کار در نظر می‌گیریم. محل وی را با (a,b) نشان می‌دهیم. با گذشت هر ساعت مقدار یکی از a یا b یک واحد تغییر می‌کند. با توجه به اینکه ۱۵ ساعت از آغاز حرکت گذشته باید داشته باشیم: $|a|+|b| \leq ۱۵$ و همچنین $|a|+|b|$ باید فرد باشد(چون با گذشت هر ساعت مقدار آن دقیقا ۱ واحد تغییر می‌کند)

پس مجموع ممکن ۱۶ است ۱، ۳، ۵،...، ۱۵ باشد. تعداد مختصات‌های ممکن با این ویژگی‌ها عبارت است از:

۴×(۲+۴+...+۱۶)-۳۲ = ۲۵۶

(ضریب ۴ به خاطر ۴ ناحیه‌ی مختصات، اعداد داخل پرانتز تعداد راه‌های نوشتن ۱تا ۱۵ به صورت مجموع دو عدد صحیح نامنفی و ۳۲ تعدادنقاطروی محورها که دوبار شمرده شده‌اند)

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

اگر تعداد شکلات‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ تا باشد با قرار دادن ۶ شکلات در ۶ ردیف اول فرض سؤال نقض می‌شود. ادعا می کنیم ۳۵ شکلات هر طوری قرار بگیرند نمی‌توانند بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها را پر کنند؛ در هر ردیفی که بیش‌تر خانه‌هایش پر شده،حداقل ۶ شکلات قرار دارد و حداقل ۶ ردیف باید این شرایط را داشته باشند پس برای پر کردن بیش‌تر خانه‌های بیش‌تر ردیف‌ها حداقل ۶×۶=۳۶ شکلات مورد نیاز است.

۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

با توجه به این که $PE\perp AC$ و $PD\perp AB$ و $DE\parallel BC$ داریم: $\angle EDP = ۴۵^\circ$و $\angle DEP = ۶۰^\circ$ حال با توجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث PDE داریم $\frac{PE}{PD} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$. و داریم: $PC = \frac{PE}{\sin(۳۰^\circ)} = ۲PE$ و $PB = \frac{PD}{\sin(۴۵^\circ)} = \sqrt{۲}PD$. پس داریم: $\frac{PB}{PC} = \frac{\frac{PD}{\sin(۴۵^\circ)}}{\frac{PE}{\sin(۳۰^\circ)}} = \frac{PD}{PE} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم $q^۳ = \overline{۰.abcabc\ldots}$ پس $۱۰۰۰q^۳ = \overline{abc.abcabc\ldots}$ و با کم کردن این دو عبارت داریم: $999q^3 = \overline{abc}$. پس $q^۳ = \frac{\overline{abc}}{۹۹۹}$. چون q گویاست؛ هم صورت و هم مخرج $q^۳$ وقتیکه تا حد امکان ساده شود باید مکعب کامل باشند. با توجه به اینکه ۳۷ × ۳ ۳ = ۹۹۹ صورت q حداقل یک عامل ۳۷ دارد لذا کوچکترین $q^۳$ ممکن $\frac{۱}{۲۷}$ بوده که کوچکترین q را نتیجه می‌دهد. پس $q^۳ = \frac{۱}{۲۷} = \frac{۳۷}{۹۹۹}$.

نتیجه می‌شود $\overline{abc} = ۳۷$ و $a+b+c = ۱۰$.

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در ابتدا مجموع مختصات برابر ۱ است و بعد از طی کردن یک چهارم مسیر به مقدار ۱- می‌رسد و بعد از پیمودن یک چهارم دیگر این مقدار دوباره ۱- می‌شود در بعد از پیمودن یک چهارم آخر این مقدار ۱ می‌شود و سپس این مسیر دوباره تکرار می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (ه) این خاصیت را دارد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

چون b بین ۰و۱ است b^{1389}عددی بسیار کوچک است و با تقریب خوبی می‌توان از آن صرف نظر کرد و در نتیجه می‌توان صورت مسئله را به صورت روبه‌رو ساده کرد:$a^2 \geq Mab \to a \geq Mb \to M \leq \frac{a}{b}$. حال a را می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفتدر این صورت M به صفر میل می‌کند. در واقع برای هر Mبزرگ‌تر از صفر a,b ای می‌توان ارائه داد که نامساوی غلط باشد.به این صورت کهb^{1389} طوری انتخاب می‌کنیم که Mabاز کم‌تر باشد و سپس a را آنقدر کوچک می‌گیریم کهa^2 را اگر به b^{1389}اضافه کنیم به Mab نرسد.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

تعداد راه‌های مطالعه‌ی این کتاب‌ها برابر تعداد راه‌های نوشتن کلمه‌ای هشت حرفی با a,b,c,d است بطوریکه از هر حرف دقیقا دو بار استفاده شود. این عدد برابر $\frac{۸!}{۲!\times۲!\times۲!\times۲!} = ۲۵۲۰$ است. (بدون هیچ محدودیت ترتیبی ۸! روش داریم؛ به محدودیت ترتیبی هر دو کتاب روش‌ها نصف می‌شوند چون دقیقا در نصف راه‌ها یک کتاب زودتر از دیگری آمده)

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این معادله نمی‌تواند دو ریشه در بازه‌ی $[۰,۱]$ داشته باشد زیرا در غیر این صورت ضرب دو ریشه که مقدار آن برابر b خواهد بود کمتر از ۱ می‌شود که متناقض با طبیعی بودن b است. پس این معادله حداکثر یک ریشه در این بازه دارد. و این هم وقتی رخ می‌دهد که مقدار تابع $x^۲ - ax + b$ در نقطه صفر و نقطه ۱ مختلف‌العلامت باشد (یا یکی صفر باشد). مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر b و مقدار تابع در نقطه‌ی ۱ برابر $b - a + ۱$ است. حال برای bها از ۱ تا ۱۰ مقدار b مثبت است. پس باید مقدار$b - a + ۱$ نامثبت باشد. برای $b = ۱$، a ۹ حالت، برای $b = ۲$، a ۸ حالت و....برای $b = ۹$، a ۱ حالت دارد. پس در کل تعداد زوج مرتب‌ها برابر ۴۵=۹+...+۳+۲+۱ است.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

تا وقتیکه عدد زوج است بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آن نصف آن است و نتیجه‌ی عملیات ما نصف کردن عدد مورد نظر است پس در ۱۰ مرحله، عدد $۳^{۱۱} \times ۵^{۱۲}$ به دست می‌آید. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد یک سوم

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آن است و نتیجه‌ی عملیات ما دو سوم کردن عدد مورد نظر است. حال عدد زوج شده وانجام عملیات به معنای نصف کردن آن است. پس اگر عدد بر ۳ بخش پذیر باشد بعد از دو مرحله یک سوم می شود؛ در نتیجه بعد از ۲×۱۱=۲۲ مرحله به $\frac{۱}{۵}^{۱۲}$ می‌رسیم. حال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه این عدد $\frac{۱}{۵}$ آن است و نتیجه‌ی عملیات ما چهار پنجم کردن عدد است. حال عدد بر ۴ بخش پذیر شده و طی دو مرحله‌ی بعدی دو بار بر ۲ تقسیم می شود. پس اگر عدد بر ۵ بخش پذیر باشد بعد از ۳ مرحله تقسیم بر ۵ می‌شود؛ لذا بعد از ۳×۱۲=۳۶ مرحله به ۱ می‌رسیم. پس در کل ۲۲+۳۶+۱۰=۶۸ مرحله انجام می‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای اینکه دو ساعت خراب هرکدام ۶ ساعت جلو بیفتند باید رابطه‌های زیر بر قرار باشد:

$$7K \equiv 6$$

ضرب در ۶۰ شدن پیمانه‌ها و اعداد به منظور هم واحد شدن طرفین است(همه به دقیقه).که از این رابطه‌ها به دست می‌آید $K \equiv 360 \ (mod\ 720)$ که نتیجه می‌دهد کوچک‌ترین K ممکن برابر ۳۶۰ است.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

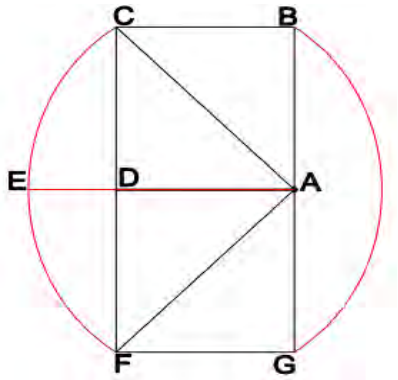
راه حل اول: اگر هر عدد را عددی سه رقمی تصور کنیم (با گذاشتن صفر به اندازه‌ی نیاز در اولش)از هر یک از ارقام ۳۰۰ بار آمده است می‌توان دید ۶۰۷۵۰۰ = ((۰ + ۱ + ⋯ ۹)) × ۹ + (۰ + ۱ + ⋯ + ۹) × ۱ + (۰ + ۱ + ⋯ + ۹) × ۰) × ۳۰۰، ۱۰ برابر مجموع مورد نظر ماست(هرجمله از جواب ده بار در این مجموع آمده است) پس حاصل ۶۰۷۵۰ خواهد بود.

راه حل دوم: مجموعه اعداد ۹۹۹،...،۰ مجموعه اعدادی است که از نوشتن ۳ رقم از ارقام ۹،...،۰ کنار هم حاصل می‌شوند. اگر تعریف کنیم $f_۱(\overline{abc}) = ab$ و $f_۲(\overline{abc}) = bc$ و $f_۳(\overline{abc}) = ca$ تابع مورد نظر سوال حاصل جمع این سه تابع است و می‌توانیم حاصل جمع این توابع را روی مجموعه اعداد داده شده جداگانه حساب کنیم. با توجه به تقارن مجموعه اعداد ۹۹۹،...،۰ نسبت به ۳ رقم(یکان، دهگان و صدگان)، محاسبه یک مجموع و ۳ برابر کردن آن کافیست (مثلا فقط برای $f_۱$):

$$\text{جواب} = ۳ \times \sum_{i=۰}^{۹}\sum_{j=۰}^{۹} i \times j \times ۱۰ = ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹}(i \times \sum_{j=۰}^{۹} j) = ۳۰ \times \sum_{i=۰}^{۹} i \times \sum_{j=۰}^{۹} j = ۳۰ \times ۴۵ \times ۴۵ = ۶۰۷۵۰$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



اگر کاغذ را چنان تا کنیم که امتداد قطر CA بر روی امتداد ضلعDA قرار گیرد آن‌گاه نقطه C بر E منطبق خواهد شد. بنابراین اگر به مرکز A کاغذ رابچرخانیم،ربع دایره ای به مرکزA و به شعاع ACو اگر به مرکز Dبچرخانیم ربع دایره‌ای به مرکز D و شعاع DB رنگ خواهد شد. تمام نقاط داخل مستطیل CBGF نیز بدون نیاز به تا کردن رنگ می‌شوند پس:

$$\text{پاسخ} = ۲\left($$

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

داریم :$\angle C = \angle HDB$. هم‌چنین داریم: $\angle C = \angle AEB$. زاویه‌ی $\angle DBH$ برابر $۹۰ - \angle C$ است.اگر AH را امتداد داده تا دایره‌ی محیطی مثلث را در A' قطع کند،می‌دانیم که A'قرینه‌ی H نسبت به BC است. در نتیجه$\angle HA'D = \angle DHA' = ۹۰ - \angle C$:

در این صورت $\angle ABE = \angle AA'E = \frac{\widehat{AE}}{۲}$.پس دو مثلث HBD و ABE با یکدیگر متشابه اند. در نتیجه داریم:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{DH}{AE} \rightarrow$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

☺

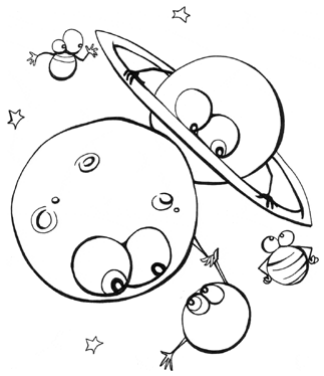
۱. دایره‌ای به شعاع واحد در نظر بگیرید. مساحت این دایره به مساحت چند مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد نزدیک‌تر است؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۲. فرض کنید حاصل‌ضرب همهٔ اعداد داخل جدول ضربِ ۱۰×۱۰ برابر n باشد. بزرگ‌ترین عدد m که $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی باشد چند است؟

الف) ۲ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۲۰ ه) ۴۰

۳. دانش‌مندان، منظومه‌ای در کهکشان راه شیری کشف کرده‌اند که دارای یک ستاره، ۹ سیاره و ۱۲۲ قمر است و هر سیارهٔ آن دست‌کم یک قمر دارد. تحقیقات نشان می‌دهد که جرم ستاره برابر $۱/۹۸ \times ۱۰^{۳۰}\ kg$ است و مجموع جرم سیاره‌ها برابر جرم ستاره و مجموع جرم قمرهای هر سیاره برابر جرم آن سیاره است. میانگین جرم اجرام این منظومه چه‌قدر است؟



الف) $۱/۵ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$ ب) $۴/۵ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$ ج) $۶/۶ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$

د) $۵/۹۴ \times ۱۰^{۲۸}\ kg$ ه) اطلاعات موجود کافی نیست.

۴. چهار میله به طول‌های ۵، ۳، ۷ و ۴ متر به همین ترتیب به هم لولا شده‌اند و ابتدای میلهٔ اول هم به انتهای میلهٔ چهارم لولا شده است. اگر میله‌ها بتوانند آزادانه در یک صفحه حول لولاهایشان بچرخند، فاصلهٔ لولای بین میله‌های ۵ متری و ۴ متری تا لولای مقابل چند متر می‌تواند باشد؟

الف) هر مقدار بین ۳ و ۸ متر ب) هر مقدار بین ۲ و ۱۱ متر

ج) هر مقدار بین ۲ و ۸ متر د) هر مقدار بین ۳ و ۱۱ متر

ه) هر مقدار بین ۲ و ۳ متر و هر مقدار بین ۸ و ۱۱ متر

۵. یک امتحان ۱۰۰ نمره‌ای از دانش‌آموزان دو کلاس الف و ب گرفته شده است. هر کلاس ۵۰ دانش‌آموز دارد. پس از اعلام نتایج، مشخص شد که میانگین نمرات کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیش‌تر است. حداکثر چند دانش‌آموز در کلاس ب هستند که نمرهٔ آن‌ها از همهٔ دانش‌آموزان کلاس الف بیش‌تر است؟

الف) ۱ ب) ۲۵ ج) ۴۹ د) ۵۰

ه) امکان ندارد دانش‌آموزی از کلاس ب، نمره‌اش از همهٔ دانش‌آموزان کلاس الف بیش‌تر باشد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۶. مهندس ناظر تونل توحید در اولین شنبه بعد از آغاز کار از پروژهٔ تونل توحید بازدید کرده است. از آن روز به بعد برنامهٔ بازدید وی از تونل به این شکل بوده است: فردای همان روز، یعنی یک‌شنبه، از پروژه مجدداً بازدید کرده و در ادامه هر بار یک روز به فاصلهٔ بین بازدیدها اضافه کرده است. صدمین بازدید در چه روزی از هفته انجام شده است؟



الف) شنبه ب) یک‌شنبه ج) دوشنبه د) سه‌شنبه ه) چهارشنبه

۷. شخصی در اصفهان زندگی می‌کند و می‌خواهد از سه شهر تبریز، مشهد مقدس و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان باز گردد به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شنبه آغاز کند، به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟ (توجه کنید که این شخص به هر ترتیبی می‌تواند به این سه شهر سفر کند.)

الف) ۳۶ ب) ۷۲ ج) ۱۰۸ د) ۱۲۰ ه) ۲۱۶

۸. چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که حاصل‌ضرب ارقامش ۹۸۰۰ باشد؟

الف) ۱۶۸۰ ب) ۵۰۴۰ ج) ۸۴۰۰ د) ۱۰۰۸۰ ه) ۱۲۰۹۶۰

۹. فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

الف) دست‌کم یکی از $a^۳$ و $a^۴ - ۱$ گنگ است. ب) دست‌کم یکی از $a^۳ - ۱$ و $a^۶$ گنگ است.

ج) دست‌کم یکی از $a^۲$، $a^۳$ و $a^۵$ گویا است. د) $a^۲$ و $a^۳ - ۱$ گنگ هستند.

ه) حداکثر یکی از $a^۳ + ۱$ و $a^۴$ گنگ است.

۱۰. تعداد اعدد طبیعی بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ که عامل اولی به غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد چند تاست؟

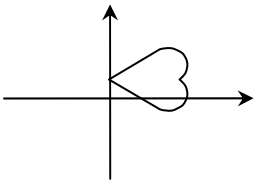
الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۴ د) ۲۰ ه) ۸۳۳

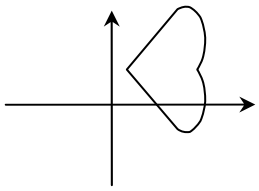
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

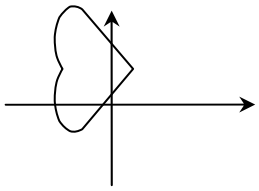
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

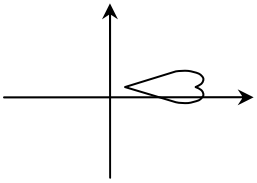
آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

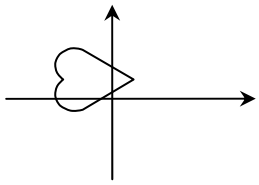
۱۱. $f(x,y)$ تابعی دومتغیره است و شکل روبه‌رو مجموعهٔ نقاط (x,y) در صفحه است که $f(x,y)=۰$. مجموعهٔ نقاط (x,y) که $f(۱-x,۲y)=۰$ کدام گزینه است؟

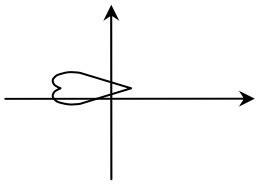


الف)


ب)


ج)


د)


ه)


۱۲. ظرفی مکعب شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر را تا نصفه پر از آب کرده‌ایم. اگر این ظرف را به‌آرامی طوری کج کنیم که یک ضلع کف روی زمین باقی بماند و کف آن با زمین زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد، چند سانتی‌متر مکعب آب بیرون می‌ریزد؟

الف) $۱۰۸-۳۶\sqrt{۳}$ ب) $۲۱۶-۱۲\sqrt{۳}$ ج) $۱۰۸-۹\sqrt{۳}$

د) $۲۱۶-۱۸\sqrt{۳}$ ه) اصلاً آبی نمی‌ریزد.

۱۳. معادلهٔ $y^۳ - ۲x^۲ = ۱۳۸۸$ در مجموعهٔ اعداد صحیح چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت

۱۴. چند عدد چهار رقمی وجود دارد که هر رقم آن از رقم سمت چپش کوچک‌تر باشد و اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کنیم، تفاضل این دو عدد ۶۱۷۴ شود؟

الف) ۱ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۱۲ ه) ۲۱

۱۵. فرض کنید مقدار تابع $f(x)=-x^۲+bx+c$ همواره کم‌تر یا مساوی ۲ باشد. اگر این تابع دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، فاصلهٔ ریشه‌های آن حداکثر چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۸ د) $\sqrt{۲}$ ه) $۲\sqrt{۲}$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۶. می‌گوییم یک عدد در مبنای a کاهشی است در صورتی که اگر آن را در مبنای a بنویسیم، هیچ رقمی از رقم سمت چپ خود بزرگ‌تر نباشد. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۲۴ وجود دارد که هم در مبنای ۲ و هم در مبنای ۴ کاهشی باشد؟

الف) ۱۰ ب) ۳۰ ج) ۳۵ د) ۴۰ ه) ۵۵

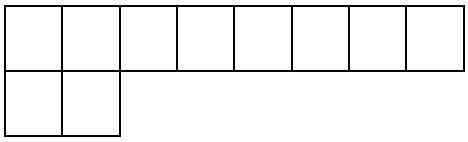
۱۷. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که $۲x+۷y$ بر $x+y$ بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۵۰ ب) ۷۸ ج) ۱۰۰ د) ۱۱۶ ه) ۲۰۰

۱۸. ضلع AB، از مثلث ABC را از طرف B به اندازهٔ خودش تا P ادامه می‌دهیم. ضلع AC را هم از طرف C به اندازهٔ دو برابر خودش تا نقطهٔ Q امتداد می‌دهیم. اگر M وسط PQ باشد، مساحت مثلث MBC چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

الف) ۱ ب) $۱/۲۵$ ج) $۱/۵$ د) $۱/۷۵$ ه) ۲

۱۹. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را، بدون تکرار، در جدول زیر بنویسیم به طوری که هر عدد هم از عدد سمت راستش و هم از عدد پایینش کوچک‌تر باشد. این کار به چند طریق ممکن است؟



الف) ۳۴ ب) ۳۵ ج) ۳۶
د) ۴۴ ه) ۴۵

۲۰. فرض کنید عدد طبیعی n روی تخته‌سیاه نوشته شده است. این عدد را پاک می‌کنیم و به جای آن عدد $n+۲^b-۲^a$ را می‌نویسیم که در آن a بزرگ‌ترین عددی است که ۲^a به n بخش‌پذیر است و b کوچک‌ترین عددی است که $n<۲^b$. اگر در ابتدا عدد ۴۲ نوشته شده باشد بعد از ۱۱۳ بار انجام این کار چه عددی روی تخته خواهد بود؟

الف) ۷×۲^{۱۱۶} ب) $۲^{۱۱۷}-۱۸۴$ ج) ۹×۲^{۱۱۷}
د) $۲^{۱۱۳}+۴۲$ ه) $۲^{۱۱۸}-۱۸۴$

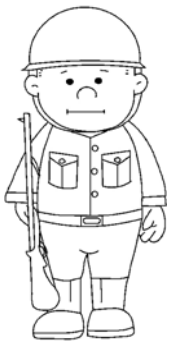
دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

۲۱. فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین باشد که AB وتر آن است. مورچه‌ای داخل مثلث است. وی ابتدا به سمت نقطهٔ A می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود. سپس به سمت نقطهٔ B می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود و این دو حرکت را متناوباً تکرار می‌کند. بعد از ۲۰ مرحله انجام این کار مورچه به کدام نقطه نزدیک‌تر است؟

الف) A ب) B ج) C د) وسط وتر AB ه) بستگی به مکان اولیهٔ مورچه دارد.



۲۲. در یک ستون ۲۵۷ سرباز ایستاده‌اند. فرمانده دستور می‌دهد که نفراتی که در مکان‌های فرد قرار گرفته‌اند به همان ترتیب از صف خارج شوند، نفرات دیگر با حفظ ترتیب جای آن‌ها را پر کنند و در نهایت نفرات از صف خارج‌شده به همان ترتیب به انتهای صف بروند. اگر فرمانده ۴۱ مرتبهٔ دیگر این دستور را تکرار کند سربازی که در نهایت نفر اول صف شده در ابتدا نفر چندم بوده است؟

الف) ۱ ب) ۱۶ ج) ۱۲۸ د) ۲۵۳ ه) ۲۵۵

۲۳. به چند صورت می‌توان یک چندجمله‌ای از درجهٔ پنج ساخت که ضرایب آن، با ترتیبی دل‌خواه، اعداد ۱، ۲، ۳ و... ۶ باشد و به‌علاوه به چندجمله‌ای $1+x+x^2$ بخش‌پذیر باشد؟ (بخش‌پذیر بودن یک چندجمله‌ای به چندجمله‌ای $1+x+x^2$ یعنی آن را بتوان به صورت ضرب چندجمله‌ای $1+x+x^2$ و یک چندجمله‌ای دیگر نوشت.)

الف) ۱ ب) ۴۸ ج) ۱۲۰ د) ۳۶۰ ه) چنین چندجمله‌ایی وجود ندارد.

۲۴. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a-\frac{1}{a}\geq 1$، داشته باشیم $a^3-\frac{1}{a^3}\geq k(a-\frac{1}{a})$.

الف) ۲ ب) $\sqrt{3}$ ج) ۴ د) $4\sqrt{3}$ ه) ۵

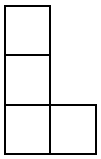
۲۵. توپی به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی سطح زمین قرار دارد. بالاترین نقطهٔ توپ را علامت می‌زنیم. پس از آن توپ را به اندازهٔ 25π سانتی‌متر به سمت شرق و سپس به اندازهٔ 25π سانتی‌متر به سمت شمال می‌غلطانیم. در نهایت ارتفاع علامت از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟

الف) $20-10\sqrt{2}$ ب) ۲۰ ج) $20+5\sqrt{2}$ د) $20+10\sqrt{2}$ ه) ۳۰

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحلهٔ اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور



۲۶. به چند طریق می‌توان جدول ۱۳۸۸×۱۳۸۸ را با اعداد ۱ تا ۶ پر کرد به طوری که اگر کاشی به شکل روبه‌رو را بر روی چهار خانه از جدول قرار دهیم، مجموع ۴ عدد زیر کاشی مضربی از ۶ باشد؟ (کاشی را می‌توان چرخاند یا پشت و رو کرد.)

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۲۰

۲۷. کدام گزینه دربارهٔ سه عدد زیر صحیح است؟ در عبارتی که برابر A است ۵۰۰ بار ۲ و ۵۰۰ بار ۴ ظاهر شده است و در عبارتی که برابر B است نیز همین طور است. در عبارتی که برابر C است ۲۰۰۰ بار ۲ ظاهر شده است.

$$A = ۴^{۲^{۲^{\cdots^{۲}}}}، \quad B = ۴^{۴^{۴^{\cdots^{۲}}}} \text{ و } \quad C = ۲^{۲^{۲^{\cdots^{۲}}}}$$

الف) $A > B > C$ ب) $B > A > C$ ج) $C > A > B$
د) $C > B > A$ ه) $B > C > A$

۲۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$، $D\widehat{A}B = ۱۱۰^\circ$، $B\widehat{C}D = ۱۲۵^\circ$ و $AB = AD = ۶$. طول قطر AC چه‌قدر است؟

الف) ۵ ب) $۵/۵$ ج) ۶ د) $۶/۵$ ه) اطلاعات کافی نیست.

۲۹. یک جورچین (پازل) ساده از ۱۰ قطعهٔ مربعی شکل تشکیل شده است که باید در یک ردیف در کنار هم قرار بگیرند تا تصویری مشخص را درست کنند. فرض کنید مکان‌های سوم و هشتم به‌درستی پر شده است و از این به بعد در هر مرحله تنها مجازیم قطعه‌ای را سر جایش قرار دهیم که دست‌کم یکی از قطعات مجاورش قبلاً جای‌گذاری شده باشد. به چند روش مختلف می‌توان ۸ قطعهٔ باقی‌مانده را سر جایشان گذاشت؟

الف) ۱۶۸۰ ب) ۳۳۶۰ ج) ۴۲۰۰ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

۳۰. حداکثر چند دایره در فضا می‌توان قرار داد به طوری که هر دو تا هم‌دیگر را در دو نقطه قطع کنند، هیچ سه تایی از یک نقطه عبور نکنند و هیچ دو تایی در یک صفحه قرار نداشته باشند؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۲ ه) بی‌نهایت

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ تشریحی سوالات مرحله اول

المپیاد ریاضی ۱۳۸۸

مخصوص شرکت کنندگان مرحله اول المپیاد کشوری ریاضی

مؤلفین

خشایار خسروی

سپهر قاضی نظامی

ماهد آب روشن

سیداحسان آزرم سا

بهمن ۱۳۸۸

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱. گزینه (ب) صحیح است.

داریم که :

مساحت مثلث به ضلع واحد و π = مساحت دایره به شعاع واحد

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

بنابراین می خواهیم n ای را بیابیم که $|\pi - n\frac{\sqrt{۳}}{۴}|$ کمینه باشد یا معادل آن $|\frac{۴\pi}{\sqrt{۳}} - n|$ کمینه باشد.
داریم که :

$$\pi \cong ۳.۱ \text{ و } \sqrt{۳} \cong ۱.۷ \Rightarrow \frac{۴\pi}{\sqrt{۳}} \cong ۷.۳$$

پس n برابر ۷ است.

۲-گزینه (د) صحیح است.

ابتدا حاصل ضرب اعداد جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ را محاسبه می کنیم. توجه کنید حاصلضرب اعداد سطر i ام برابر است با $i^{10} \times 10!$. در نتیجه حاصل ضرب کل اعداد جدول برابر است با : $(10!)^{20}$.
اکنون می خواهیم ببینیم بزرگترین m طبیعی که به ازای آن $\sqrt[m]{(10!)^{20}}$ صحیح است چیست. توجه کنید برای اینکه این امر محقق شود باید توان همه ی عوامل اول $(10!)^{20}$ بر عدد m بخش پذیر باشد. در نتیجه بزرگترین عدد طبیعی m با این خاصیت برابر با ب.م.م توان عوامل اول در $(10!)^{20}$ است. در نتیجه با توجه به اینکه :

$$(10!)^{20} = 2^{160} \times 3^{80} \times 5^{40} \times 7^{20}$$

در نتیجه بزرگترین m با خاصیت مذکور برابر است با : $(160,80,40,20) = 20$.

۳- گزینه (ب) صحیح است.

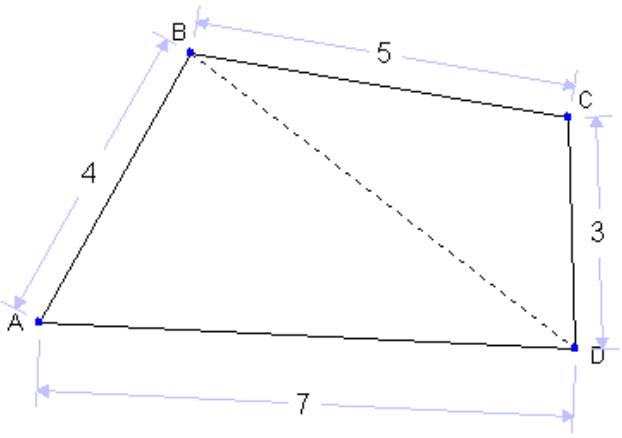
با توجه به این که هر سیاره لااقل یک قمر دارد، می توان گفت که مجموع جرم اقمار این منظومه با مجموع جرم سیارات این منظومه برابر است. از طرفی همان طور که گفتیم مجموع جرم سیارات برابر با مجموع جرم ستاره این منظومه است. پس در نتیجه می توان گفت که مجموع جرم اجرام این منظومه برابر با ۳ برابر جرم ستاره است. حال با توجه به این که ۱۳۲ جرم در این منظومه قرار دارد، می توان گفت که

$$\text{میانگین اجرام} = \frac{۳ \times ۱.۹۸ \times ۱۰^{۳۰}}{۱۳۲} = ۴.۵ \times ۱۰^{۲۸}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

۴. گزینه (الف) صحیح است.

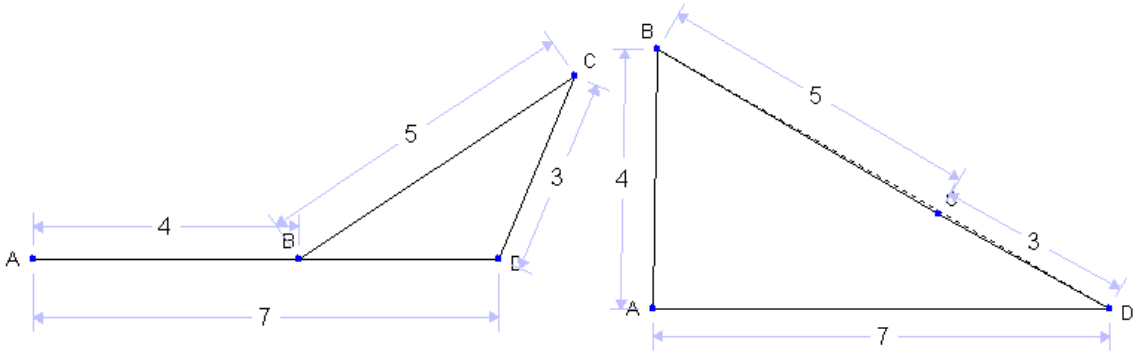
مطابق شکل:



داریم که طبق نامساوی مثلث $BA + BD \geq AD$ پس $۴ + BD \geq ۷$ یا $BD \geq ۳$

همچنین داریم که $BC + CD \geq BD$ پس $۸ \geq BD$

پس داریم که $۸ \geq BD \geq ۳$ و به سادگی می توانید تحقیق کنید که هر مقداری این میان را اتخاذ می کند.



۵- گزینه (ج) صحیح است.

با توجه به این که نمره نفر اول کلاس الف بیشتر یا مساوی میانگین نمرات این کلاس است و این میانگین از میانگین کلاس ب بیشتر است، می توان گفت که نمره نفر اول کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. در نتیجه ممکن نیست که کسی در کلاس ب نباشد که نمره اش از نفر اول کلاس الف کمتر باشد. در نتیجه حداکثر ۴۹ نفر در کلاس ب هستند که از تمامی افراد کلاس الف بیشتر است.

حال کافی است که برای ۴۹ نیز مثالی ذکر کنیم. فرض کنید ۴۹ نفر در کلاس ب نمره ۱۰۰ کسب کردند و یکی صفر شده باشد. در کلاس الف نیز همگی نمره ۹۹ را کسب کرده باشند. در نتیجه

$$\frac{۱۰۰ \times ۴۹}{۵۰} < \frac{۵۰ \times ۹۹}{۵۰}$$

در این حالت به وضوح ۴۹ نفر در کلاس ب نمره شان از تمامی افراد کلاس الف بیشتر شده است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۶. گزینه (ب) صحیح است.

شنبه ای که مهندس ناظر برای اولین بار از تونل بازدید کرده را روز صفر بنامید.پس مطابق زیر برنامه بازدیدها را می نویسیم:

اولین بازدید	روز ۰
دومین بازدید	روز ۰+۱
سومین بازدید	روز ۰+۱+۲
چهارمین بازدید	روز ۰+۱+۲+۳
.	.
.	.
.	.
صدمین بازدید	روز ۰+۱+...+۹۸+۹۹

پس صدمین بازدید در روز $۰ + ۱ + ۲ + \cdots + ۹۹ = \frac{۹۹\times۱۰۰}{۲} = ۴۹۵۰$ انجام می شود داریم که باقیمانده ۴۹۵۰ بر ۷ برابر ۱ است لذا این بازدید در یک روز بعد از شنبه یعنی یک شنبه صورت می گیرد.

۷- گزینه (ه) صحیح است.

این فرد در روز اول به یکی از ۳ شهر تبریز، مشهد مقدس یا شیراز سفر می کند. پس مسیر مسافرتش در روز اول به سه طریق مشخص می شود. این مسافرت نیز به وسیله هواپیما، قطار یا اتوبوس صورت گیرد. پس به ۳ طریق می تواندوسیله مورد نظرش را انتخاب کند. در روز دوم با دو وسیله می تواند مسافرت کند و از شهر اول به یکی از دوسهر باقیمانده می تواند سفر کند. در روز سوم با سه وسیله به شهر باقیمانده سفر می کند. در روز چهارم نیز با دو وسیله می تواند به اصفهان بازگردد. در نتیجه تعداد راه های مسافرت او بنابر اصل ضرب برابر است با:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۲۱۶$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

۸- گزینه (ج) صحیح است.

با تجزیه ۹۸۰۰ به عوامل اول خواهید یافت که $۹۸۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۷^۲$. در نتیجه با توجه به این که ارقام از ۰ تا۹ هستند، لزوما از هرکدام از ۵ و ۷ دو مرتبه استفاده می شود. حال برای ایجاد عامل $۲^۳$ سه راه وجود دارد:

الف) از یک ۸ استفاده کنیم و درنتیجه باید برای بقیه ارقام از ۱ استفاده شود. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و در آخر به ۴طریق می توان جایگاه ۸ را مشخص کرد. پس در این حالت ۱۶۸۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ب) از یک ۴ استفاده کنیم و یک ۲. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به ۴ طریق جایگاه ۴و به ۳ طریق جایگاه ۲ را مشخص می کنیم. پس در این حالت ۵۰۴۰ عدد ۸ رقمی داریم.

ج) از ۳ عدد۲ استفاده می کنیم. به $\binom{۸}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۷ ها را مشخص کرد. سپس به $\binom{۶}{۲}$ طریق می توان جایگاه ۵ها را مشخص کرد و به $\binom{۴}{۳}$ طریق می توان جایگاه ۲ ها را مشخص کرد. پس در این حالت۱۶۸۰ عدد ۸رقمی داریم.

در نتیجه در کل ۸۴۰۰ عدد ۸ رقمی با این خاصیت وجود دارد.

۹-گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا ثابت می کنیم الف همواره درست است. فرض کنید a گنگ باشد ولی a^3 و a^4-1 گویا باشند. در اینصورت a^4 هم گویا است. علاوه بر آن $a=\frac{a^4}{a^3}$ و $a^3 \neq 0$. در نتیجه تقسیم دو عبارت گویا برابر با عبارتی گنگ شده در حالی که می دانیم حاصل تقسیم دو عدد گویا عددی گویاست. این تناقض است.

راه دیگری هم برای اثبات مسئله وجود دارد و آن ارائه مثال نقض برای بقیه گزینه هاست.

برای ب کافی است $a=\sqrt[3]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای ج کافی است $a=\sqrt[30]{2}$ را در نظر بگیرید.

برای د کافی است $a=\sqrt{2}$ را در نظر بگیرید.

و برای ه کافی است $a=\sqrt[5]{2}$ را در نظر بگیرید.

پس گزینه الف صحیح است.

۱۰=گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید سوال به دنبال تعداد اعداد به فرم $2^m \times 3^n$ ای می گردد که بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ قرار دارند و نه خود اعداد. توجه کنید که برای هر n حداکثر یک m به دست می آید که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$ (اگر دو m به دست آید یعنی اینکه یک عدد و دوبرابرش در بازه (5000,10000) قرار گرفته اند که این امکان ندارد). علاوه بر این می خواهیم نشان دهیم برای هر n صحیح و نامنفی که $3^n < 10000$ باشد m ای پیدا می شود که $5000 < 2^m \times 3^n < 10000$. برای این کار ابتدا $m = 0$ را در نظر می گیریم. اگر عدد 3^n از ۵۰۰۰ بیش تر باشد که چیزی که می خواستیم یافته ایم در غیر اینصورت $m = 1$ در نظر گرفته می شود. اکنون دقت کنید که امکان ندارد که $2 \times 3^n > 10000$ زیرا در اینصورت 3^n بزرگتر از ۵۰۰۰ بوده که می دانیم اینگونه نبوده است. در نتیجه $2 \times 3^n < 10000$. اگر این عدد از ۵۰۰۰ بیش تر باشد مسئله حل است. در غیر اینصورت $m = 2$ را در نظر می گیریم و روند فوق را ادامه می دهیم. توجه کنید که این روند متوقف می شود زیرا به جایی می رسیم که $2^u \times 3^n \geq 2^u > 10000$. وقتی روند متوقف شد m را یافته ایم و این m هم یکتاست. در حقیقت ما ابتدا یک عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰ در نظر می گیریم و در هر مرحله آن را دو برابر می کنیم. این روند را آن قدر ادامه می دهیم تا اولین مرحله ای که از ۱۰۰۰۰ بیش تر شویم. اگر مرحله ی قبل از این مرحله را درنظر بگیریم حتما عددمان در این مرحله چیزی بین ۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ بوده است.

در نتیجه جواب مسئله برابر است با تعداد اعداد صحیح و نامنفی m که $3^m < 10000$ که با یک بررسی ساده می بینیم که ۹ عدد m در رابطه بالا صدق می کنند یعنی اعداد صحیح از ۰ تا ۸ . پس گزینه ب صحیح است.

۱۱-گزینه (ه) صحیح است.

فرض کنید که $1 - x = u$ و $2y = v$ باشند در اینصورت $f(u,v) = 0$ در نتیجه مجموعه جوابی که برای u,v به دست می آید همان شکلی است که در فرض مسئله داده شده است. اکنون :

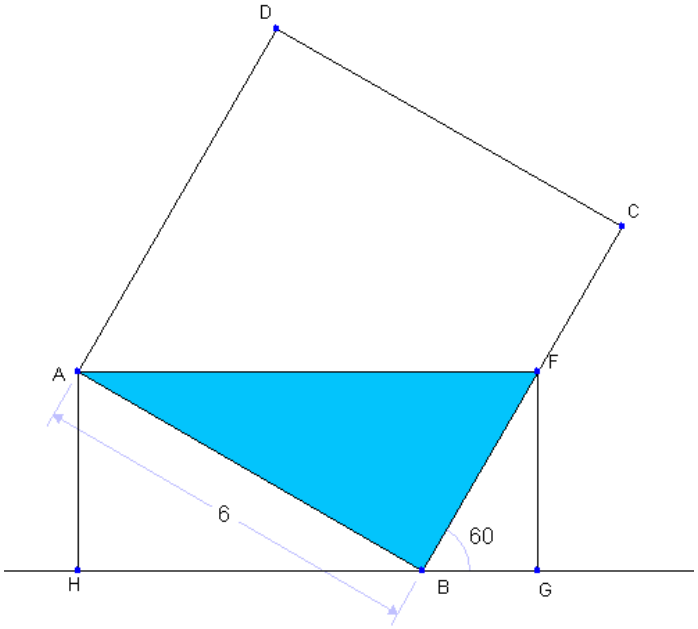
$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = \dfrac{v}{2} \end{cases}$$

در نتیجه برای به دست آوردن مجموعه نقاط خواسته شده باید ابتدا نموداری که در مسئله داده شده است را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.سپس یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. در پایان هم باید با یک

تجانس به نسبت $\frac{1}{2}$ مختص دوم همه ی نقاط را نصف کنیم (به نوعی نمودار را جمع کنیم). اگر این کارها را انجام دهیم به سادگی معلوم است که گزینه (ه) جواب مسئله است.

۱۲. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا $۱۰۸ = ۳ \times ۶ \times ۶$ سانتی متر مکعب آب درون مکعب قرار دارد.شکل زیر نمای کناری مکعب بعد از کج شدن است:



$$FG = AH = ۶\sin(۳۰^\circ) = ۳, GH = BH + BG = AH.\cot(۳۰^\circ) + FG.\tan(۳۰^\circ)$$
$$= ۳\left(\sqrt{۳} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) = ۴\sqrt{۳}$$

پس حجم آب باقی مانده برابر است با:

$$۶ \times \left(\text{مساحت مثلث } ABF\right) = ۶ \times \frac{۳ \times ۴\sqrt{۳}}{۲} = ۳۶\sqrt{۳}$$

داریم که $۱۰۸ > ۳۶\sqrt{۳}$ پس آب بیرون می ریزد و حجم آب بیرون ریخته شده برابر $۱۰۸ - ۳۶\sqrt{۳}$ است.

۱۳- گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که ۱۳۸۸ بر ۴ بخشپذیر است اما بر ۸بخشپذیر نیست. طبق معادله $y^۳ = ۲x^۲ + ۱۳۸۸$، نتیجه می گیریم $y^۳$ زوج است. پس y نیز زوج است. در نتیجه $y^۳$ بر ۸ بخشپذیر است. حال عبارت $y^۳ - ۱۳۸۸$ بر ۴ بخشپذیر است. در نتیجه لزوما $x^۲$ زوج است. پس x نیز زوج است و $۲x^۲$ بر ۸ بخشپذیر است. در نتیجه $y^۳ - ۲x^۲$ نیز بر ۸ بخشپذیر است که این گونه نیست. زیرا ۱۳۸۸ بر ۸ بخشپذیر نیست.

۱۴- گزینه (د) صحیح است.

راه اول:

فرض کنید $\overline{abcd}$ عددی چهار رقمی با این خاصیت باشد. به راحتی می توان دید که

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = ۹۹۹a + ۹۰b - ۹۰c - ۹۹۹d = ۹\big(۱۱۱(a-d) + ۱۰(b-c)\big)$$
$$= ۶۱۷۴$$
$$\Longrightarrow ۱۱۱(a-d) + ۱۰(b-c) = ۶۸۶$$

توجه کنید که

$$۶۸۶ \equiv ۱۱۱(a-d) \pmod{۱۰} \Longrightarrow ۶ \equiv a-d \pmod{۱۰}$$

پس با توجه به این که $a > d$ لزوما $a - d = ۶$ و بنابر رابطه فوق لزوما $b - c = ۲$.

پس با توجه با این تساوی ها می توان گفت که $۰ \le d \le ۳$ و $d < c < ۴ + d$ (چرا؟). پس کلا ۴ انتخاب برای d و ۳ انتخاب متناظر با آن برای c داریم. همچنین a و b به صورت یکتا با توجه به آن دو مشخص می گردند.در نتیجه به ۱۲ حالت می توان اعداد مطلوب را تولید کرد.

راه دوم:

داریم که

$$a > b > c > d$$

و

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = ۶۱۷۴$$

حال شروط برقراری رابطه بالا را بررسی می کنیم.اولا چون $a > d$ پس در محاسبه رقم یکان حاصل عبارت ده بر یک صورت می گیرد پس $۱۰ + d - a = ۴$ پس $a - d = ۶$ همین طور در این مرحله یکی از رقم c که بزرگتز صف نیز هست کم می شود.پس هنوز داریم که $۰ \le c - ۱ < b$ پس اینجا نیز باید ده بر یک بکنیم و داریم که

$۱۰ + (c - ۱) - b = ۷$ پس داریم که $b - c = ۲$ در این مرحله نیز یکی از b کم می شود ولی باز هم داریم که $b - ۱ \geq c$ پس $b - ۱ - c = ۱$ یا $b - c = ۲$ در نهایت هم داریم که برای محاسبه رقم چهارم باید a را منهای d کنیم که نتیجه می شود $a - d = ۶$ پس دو شرط $a - d = ۶$ و $b - c = ۲$ لازم و کافی هستند.

با توجه به شرط اول به سادگی به دست می آید که برای انتخاب a و d تنها ۴ حالت وجود دارد و با داشتن a و d برای انتخاب b و c تنها ۳ حالت وجود دارد.پس در کل $۴ \times ۳ = ۱۲$ حالت برای انتخاب $\overline{abcd}$ وجود دارد.

۱۵-گزینه (ه) صحیح است.

توجه کنید f یک سهمی است که ضریب درجه دوم آن منفی است پس ماکسیمم دارد. همچنین ماکسیمم آن به ازای $x = -\frac{b}{2a} = \frac{b}{2}$ رخ می دهد. از آن جایی که این مقادیر سهمی باید همواره کمتر از یا مساوی ۲ باشند پس ماکسیمم آن از ۲ نابیشتر است. پس

$$f(\frac{b}{2}) \leq 2 \Rightarrow -(\frac{b}{2}) + b(\frac{b}{2}) + c \leq 2 \Rightarrow b^2 + 4c \leq 8$$

اکنون می دانیم که فاصله ی ریشه ها برابر است با :

$$S = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{-2} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{-2} \right| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 + 4c} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

در نتیجه کافی است مثالی ارائه دهیم. توجه کنید هر دو عدد حقیقی b,c که برای آن ها $b^2 + 4c = 8$ جواب هستند و مثال مورد نظر را می توانید بسازید . پس گزینه (ه) صحیح است.

۱۶-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید از آنجایی که عدد در مبنای ۲ فقط از ۰ و ۱ تشکیل شده است در نتیجه یک عدد در این مبنا کاهشی است اگر به فرم 1111...100...000 باشد که در این عدد m بار ۱ و n بار صفر استفاده شده است. از آنجایی که ما فقط اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۲۴ را بررسی می کنیم پس اعدادی را بررسی می کنیم که برای آن ها $m+n \le 10, m \ge 1$. اکنون می خواهیم ببینیم چه تعدادی از این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند. توجه کنید برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۴ از راست شروع می کنیم و به جای ۰۰ , ۰۱ , ۱۰ و ۱۱ به ترتیب ۲,۱,۰ و ۳ قرار می دهیم. اگر تعداد ارقام در مبنای ۲ فرد بود در پایان یک عدد باقی می ماند که حتما ۱ است یا معادلا ۰۱ است که به جای آن ۱ قرار می دهیم. در نتیجه اعداد بالا را به دو قسمت تقسیم می کنیم :

- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ زوج است: توجه کنید همه ی این اعداد در مبنای ۴ هم کاهشی هستند (در واقع اگر دوتا دوتا تقسیم کنید و به فرم این اعداد در مبنای ۲ توجه کنید کاملا مشخص است) . فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد طبیعی ۲k رقمی در مبنای ۲ که به فرم 11...100...0 هستند را بشماریم. توجه کنید تعداد صفر ها در این اعداد می تواند عددی بین۰ تا ۲k-۱ باشد و با تعداد صفر ها عدد یکتا معلوم می شود. پس دقیقا ۲k تا از این اعداد داریم. در نتیجه تعداد اعداد در این قسمت دقیقا برابر است با : ۳۰=۱۰+۸+۶+۴+۲
- اعدادی که تعداد ارقامشان در مبنای ۲ فرد است: اگر به مطالبی که در بالا توضیح داده شد دقت کنید می بینید که چپ ترین رقم این اعداد در مبنای ۴ حتما ۱ است. در نتیجه رقم های دیگر این عدد همگی باید ۰ یا ۱ باشند (در مبنای ۴). اما هیچکدام از این ارقام نمی توانند ۱ باشند در واقع اگر بخواهد رقمی در مبنای ۴ غیر از این چپ ترین ۱ , ۱ باشد پس این عدد به فرم 11...100...0 در مبنای ۴ است که در آن تعداد ۱ ها حداقل ۲ است و این به این معناست که این عدد در مبنای ۲ به فرم : 1010101...01000...0 است که از آنجایی که تعداد ۱ ها در مبنای ۴ حداقل ۲ تاست پس در مبنای ۲ هم حداقل یک عبارت ۱۰۱ داریم و این با فرم اولیه ی این اعداد متناقض است. در نتیجه در بین اعدادی که در مبنای ۲ فرد رقم دارند و به فرم 11...100...0 هستند فقط اعدادی می توانند مناسب باشند که دقیقا یک عدد ۱ در نمایششان داشته باشند. علاوه بر این همه ی این اعداد هم مناسب هستند. در نتیجه از آنجایی که تعداد ارقام این اعداد حداکثر ۱۰ است پس دقیقا ۵ تا از این اعداد داریم (۱ رقمی , ۳ رقمی , ۵رقمی , ۷رقمی و ۹رقمی در مبنای ۲ و از هرکدام دقیقا یکی).

در نتیجه در کل دقیقا ۳۵=۵+۳۰ تا از این اعداد کاهشی در هر دو مبنا داریم و گزینه ج صحیح است.

۱۷- گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $(x,y)=d$ (یعنی d ب.م.م دو عدد x و y باشد) و $x=dx'$ و $y=dy'$. در نتیجه:

$$x+y|۲x+۷y \Rightarrow d(x'+y')|d(۲x'+۷y') \Rightarrow x'+y'|۲x'+۷y'$$
$$\Rightarrow x'+y'|۵y' \Rightarrow x'+y'|۵ \Rightarrow x'+y'=۵$$

توجه کنید که $(x',y')=۱ \Rightarrow (y',x'+y')=۱$ و x' و y' هر دو طبیعی هستند. در نتیجه روابط خط آخر عبارت فوق صحیح هستند. از طرفی می توان بررسی کرد که هر دو عدد طبیعی که دارای شرط فوق باشند (یعنی $(x+y=۵(x,y))$ در شرط مسئله صدق می کنند. پس کافی است تنها تعداد (x,y) را بشماریم که در شرط فوق صدق کنند و هر دو از ۱۰۱ کمتر باشند. پس ۴ حالت ممکن است:

الف- $x'=۴, y'=۱ \Rightarrow dx'=x<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۲۵$

پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۳, y'=۲ \Rightarrow dx'=x<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۳۳$

پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ج- $x'=۱, y'=۴ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۲۵$

پس به ۲۵ طریق می توان d را انتخاب کرد.

ب- $x'=۲, y'=۳ \Rightarrow dy'=y<۱۰۱ \Rightarrow ۱\le d\le ۳۳$

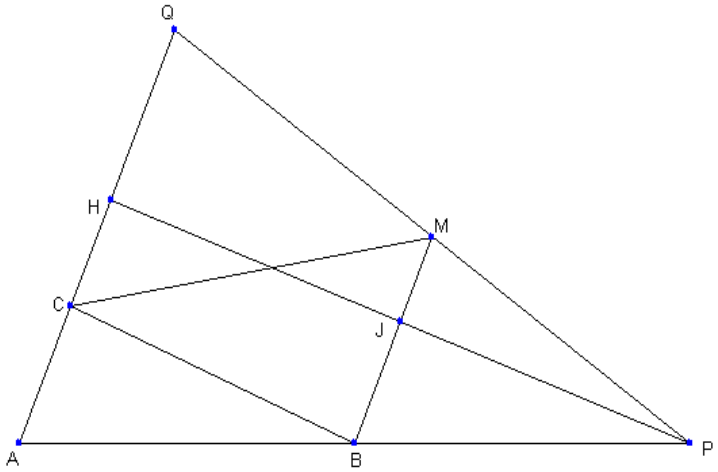
پس به ۳۳ طریق می توان d را انتخاب کرد.

در کل جواب برابر است با $۱۱۶ = ۳۳ + ۲۵ + ۳۳ + ۲۵$.

۱۸. گزینه (ج) صحیح است.

منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است.

داریم که با توجه به شرایط مساله $MB||AQ$ و همچنین فرض کنید PH بر AQ و BM عمود است. داریم که :



$$BM=\frac{۱}{۲}AQ, \frac{۱}{۲}PH=HJ \Rightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{APQ}}=\frac{HJ.BM}{PH.AQ}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{MBC}=\frac{۱}{۴}S_{APQ}$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

همچنین داریم که:

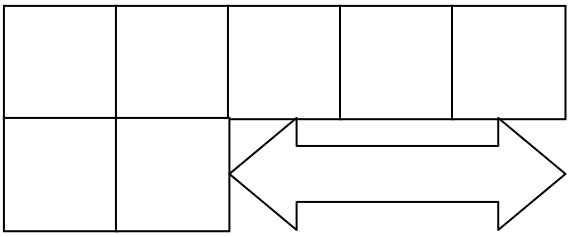
$$S_{ABC} = \frac{AC}{AQ} S_{AQB} = \frac{AC}{AQ}\frac{AB}{AP} S_{APQ} \Rightarrow S_{APQ} = ۶S_{ABC}$$

پس:

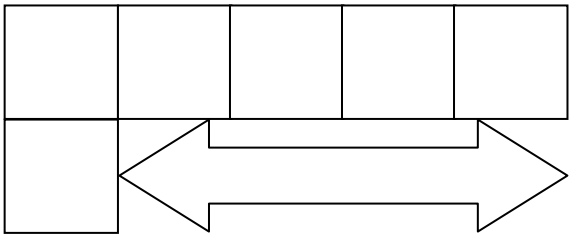
$$S_{MBC} = \frac{۱}{۴} S_{APQ} = \frac{۳}{۲} S_{ABC}$$

۱۹- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید تعداد حالاتی که می توان اعداد ۱ تا n ($n \geq ۴$) را در یک جدول مشابه شکل زیر چید(به طوری که اعداد در دو سطر و در دو ستون از کوچک به بزرگ چیده شده باشند) برابر باشد با b_n.



به راحتی بررسی می توان کرد که در شکلی مشابه زیر به $m - ۱$ طریق می توان اعداد ۱ تا m را جاسازی کرد(به طوری که اعداد در سطر و ستون به صورت صعودی چیده شده باشند).



حال به وضوح عدد n را در جدول فوق به دو صورت می توان جاسازی کرد(انتهای سطر اول و انتهای سطر دوم). حال در حالت اول بقیه جدول را می توان به $b_{n-۱}$ طریق اعداد را جایسازی کرد و در حالت دوم به $n - ۲$ طریق.پس می توان نتیجه گرفت که $b_n = b_{n-۱} + n - ۲$. حال با توجه به این که $b_۴ = ۲$، نتیجه می گیریم:

$$b_n = b_۴ + ۳ + ۴ + \cdots + (n - ۲) = ۲ + ۳ + \cdots + (n - ۲)$$
$$= \frac{(n - ۱)(n - ۲)}{۲} - ۱$$

پس $b_{۱۰} = ۳۵$.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

۲۰. گزینه (الف) صحیح است.

ابتدا عدد n را در مبنای ۲ می نویسیم و این عملیات را بررسی می کنیم.

نشان می دهیم که عملیات فوق اولین رقم ناصفر عدد در مبنای دو را ۰ می کند و یک ۱ به انتهای آن اضافه می کند.

چرا که بزرگترین ۲^a ای که $۲^a|n$ همان ضریب اولین ۱ در نمایش مبنای ۲ عدد n است و کوچکترین ۲^b که $۲^b > n$ همان ضریب رقمی است که بعد از آخرین یک عدد n در بسط مبنای ۲ ظاهر می شود:

$$n = (۰۱a_۱a_۲ \dots a_{u-۱}a_u ۱۰۰ \dots ۰)_۲$$
$$۲^a = (۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \dots ۰۰۰۱۰۰ \dots ۰)_۲$$
$$۲^b = (۱۰۰۰۰۰ \dots ۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \dots ۰)_۲$$
$$n + ۲^b - ۲^a = (۱۱a_۱a_۲ \dots a_{u-۱}a_u ۰۰۰ \dots ۰)_۲$$

بنابراین با این الگو از ۴۲ شروع می کنیم و داریم که $۴۲ = (۱۰۱۰۱۰)_۲$:

مرحله ۰	$(۱۰۱۰۱۰)_۲$
مرحله ۱	$(۱۱۰۱۰۰۰)_۲$
مرحله ۲	$(۱۱۱۰۰۰۰۰)_۲$
مرحله ۳	$(۱۱۱۰۰۰۰۰۰)_۲$
مرحله ۴	$(۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰)_۲$

همانطورکه مشاهده می شود از مرحله ۲ به بعد هر بار عدد فوق دو برابر می شود.در مرحله ۲ برابر است با $۲^۵ + ۲^۶ + ۲^۷$

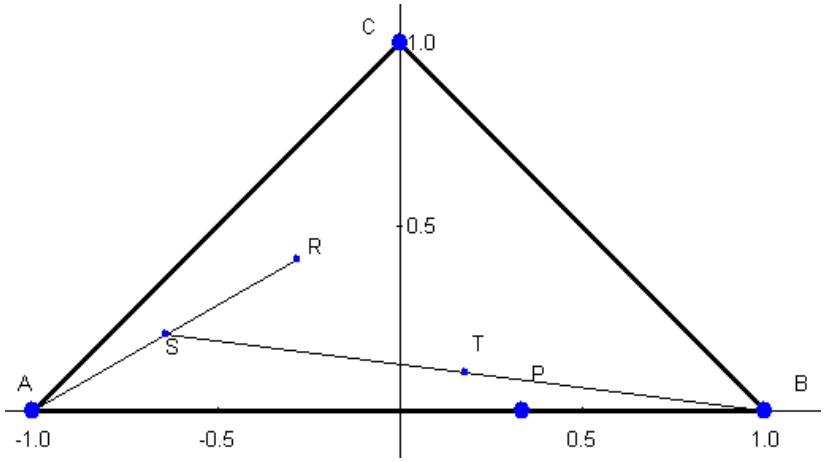
لذا در مرحله ۱۱۳ یعنی ۱۱۱ مرحله بعد به عدد $۲^{۱۱۸} + ۲^{۱۱۷} + ۲^{۱۱۶}$ یا ۷×۲^{۱۱۶} می رسیم.

۲۱. گزینه (د) صحیح است.

نشان می دهیم که در هر دو مرحله (یعنی یک مرحله با شماره زوج و بعد یک مرحله با شماره فرد) فاصله مورچه تا نقطه P روی خط AB که فاصله P تا نقطه B نصف فاصله آن از A است یک چهارم می شود.این نکته را به ۲ راه نشان می دهیم:

راه اول:

مطابق شکل مثلث را روی محور مختصات قرار دهید:



اگر مورچه ابتدا در نقطه $(x_{۲k}, y_{۲k})$ قرار داشته باشد بعد از یک مرحله به نقطه $= (x_{۲k+۱}, y_{۲k+۱})$ $(\frac{x_{۲k}-۱}{۲}, \frac{y_{۲k}}{۲})$ می رود و سپس به نقطه

$(x_{۲k+۲}, y_{۲k+۲}) = \left(\frac{x_{۲k+۱}+۱}{۲}, \frac{y_{۲k+۱}}{۲}\right) = \left(\frac{\left(\frac{x_{۲k}-۱}{۲}\right)+۱}{۲}, \frac{y_{۲k}}{۲}\right) = (\frac{x_{۲k}+۱}{۴}, \frac{y_{۲k}}{۴})$ می رود. پس می توانیم بنویسیم:

$$\left(x_{۲k+۲} - \frac{۱}{۳}, y_{۲k+۲}\right) = \left(\frac{۱}{۴}\left(x_{۲k} - \frac{۱}{۳}\right), \frac{۱}{۴}(y_{۲k})\right)$$

پس فاصله مورچه در مرحله $۲k + ۲$ از نقطه $\frac{۱}{۳}$ برابر یک چهارم فاصله مورچه تا همین نقطه در مرحله $۲k$ است.

راه دوم:

در مراحل فرد مانند این است که تجانسی به مرکز A و نسبت $\frac{۱}{۲}$ و در مراحل فرد تجانسی به مرکز B و نسبت $\frac{۱}{۲}$ می زنیم.

این تجانس ها حرکات مورچه را مشخص می کنند.می دانیم ترکیب این دو تجانس، تجانسی به نسبت $\frac{۱}{۴}$ می شود.حال کافی است مرکز آن را بیابیم.می دانیم که مرکز تجانس تنها نقطه ای است که در اثر تجانس

ثابت می ماند.می توانید به سادگی نشان دهید که نقطه P ثابت می ماند لذا مرکز تجانس است.پس مانند بالا اثبات شد که در این دو مرحله فاصله مورچه تا نقطه P یک چهارم می شود.پس به طریق دوم نیز اثبات شد.

حال داریم که فاصله مورچه در ابتدا از نقطه P کمتر از طول AB است پس بعد از ۲۰ مرحله نیز فاصله آن از P کمتر از $\frac{AB}{۴۲۰}$ می شود و به وضوح به همواره به وسط AB نزدیک تر خواهد بود.

۲۲- گزینه (د) صحیح است.

راه حل اول:

به وضوح فردی که در ابتدا، در انتهای صف حضور داشته است، تا ابد در آخر صف باقی خواهد ماند. توجه کنید که فردی که در حال حاضر نفر i صف است، پس از دستور فرمانده طبق تابع زیر جایگاهش در صف تغییر می کند:

$$\begin{cases} ۱۲۸ + \frac{i+۱}{۲} & i \text{ فرد} \\ \frac{i}{۲} & i \text{ زوج} \end{cases}$$

فردی که در نهایت پس از ۴۲ مرتبه دستور فرمانده در ابتدای صف قرار می گیرد را علی اکبر بنامید. به وضوح علی اکبر در مرحله قبل نفر دوم، در مرحله قبل آن نفر چهارم و ⋯ بوده است. به همین ترتیب می توان گفت که علی اکبر پس از ۳۴ دستور فرمانده، نفر ۲۵۶ صف بوده است. در مرحله قبل از این به راحتی می توان بررسی کرد که نفر ۲۵۵ صف بوده است. توجه کنید که $۲۵۵ = (۱۱۱۱۱۱۱۱)_۲$. در مرحله قبل از این علی اکبر در جایگاه۲۵۳ حضور داشت که $۲۵۳ = (۱۱۱۱۱۱۰۱)_۲$. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم، هر مرحله که به عقب بازگردیم، دومین یک از سمت راست (در مبنای ۲)تبدیل به صفرخواهد شد. پس می توان نتیجه گرفت که بعد از ۲۶ دستور، علی اکبر در ابتدای صف حضور داشته است. با تکرار این روند باز می توان نتیجه گرفت که بعد از دستور دهم نیز علی اکبر در جایگاه اول قرار داشته و بعد از دستور دوم درجایگاه ۲۵۶. پس بعد از دستور اول درجایگاه ۲۵۵ قرار گرفته است. در نتیجه در اول کار علی اکبر در جایگاه ۲۵۳ صف بوده است.

راه حل دوم:

باز هم مانند بالا علی اکبر را همان سربازی که در مرحله ۴۲ در ابتدای صف قرار می گیرد بنامید.

اگر a_i مکان یکی از سربازها مثلا علی اکبر در مرحله i ام باشد به سادگی می توان نشان داد که

$$a_i \equiv ۲a_{i+۱} \text{ (به پیمانه ۲۵۷)}$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس بعد از ۴۲ مرحله داریم که $a_1 \equiv ۲^{۴۲} a_{۴۲} (\text{به پیمانه } ۲۵۷)$ چون برای علی اکبر داریم $a_{۴۲} = ۱$

پس داریم که:

$$a_1 \equiv ۲^{۴۲} \equiv ۲۵۶^{۵} \times ۴ \equiv (-۱)^{۵} \times ۴ \equiv ۲۵۳ (\text{به پیمانه } ۲۵۷)$$

پس علی اکبر ابتدا در مکان ۲۵۳ بوده است.

۲۳-گزینه (ب) صحیح است.

چندجمله ای مورد نظر به فرم $a_5x^5 + a_4x^4 + ... + a_0$ است که ضرایب جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند. اکنون می خواهیم این چندجمله ای بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد. توجه کنید که : $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$. در نتیجه اگر چندجمله ای فوق بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد پس چندجمله ای $(a_5 + a_2)x^2 + (a_4 + a_1)x + (a_3 + a_0)$ هم بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است. اگر به جای عبارت حاصل باقی مانده ی آن را بر $x^2 + x + 1$ قرار دهیم آنگاه این باقی مانده باید صفر باشد. این باقی مانده برابر است با : $(a_4 + a_1 - a_5 - a_2)x + (a_3 + a_0 - a_5 - a_2)$. صفر شدن این باقی مانده یعنی اینکه:

$$a_0 + a_3 = a_1 + a_4 = a_2 + a_5 = S$$

علاوه بر آن این اعداد جایگشتی از اعداد ۱ تا ۶ هستند پس :

$$a_0 + a_1 + ... + a_6 = 1 + 2 + ... + 6 = 21$$

در نتیجه باید $S = 7$ باشد. حال برای شمردن تعداد این ۶ تایی ها بدین نحو عمل می کنیم. ابتدا a_0 را به دلخواه به ۶ حالت انتخاب می کنیم. از روی a_0 مقدار $a_3 = 7 - a_0$ به طور یکتا به دست می آید. بعد از آن از بین ۴ عدد باقی مانده a_1 را به دلخواه تعیین می کنیم پس مشابه بالا a_4 به طور یکتا معلوم می شود و در پایان از میان ۲ عدد باقی مانده به ۲ حالت a_2 را انتخاب می کنیم و a_5 به طور یکتا تعیین می شود. پس جواب مسئله برابر است با : $2 \times 4 \times 6 = 48$ و مسئله حل است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

۲۴-گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که :

$$a^3-\frac{1}{a^3}\geq k(a-\frac{1}{a})\Rightarrow(a-\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}+1)\geq k(a-\frac{1}{a})$$

اما $a-\frac{1}{a}>0$ پس با ساده کردن آن از طرفین معلوم می شود که باید بزرگترین k حقیقی را بیابیم که برای هر a مثبت با شرط $a-\frac{1}{a}\geq 1$ داشته باشیم :

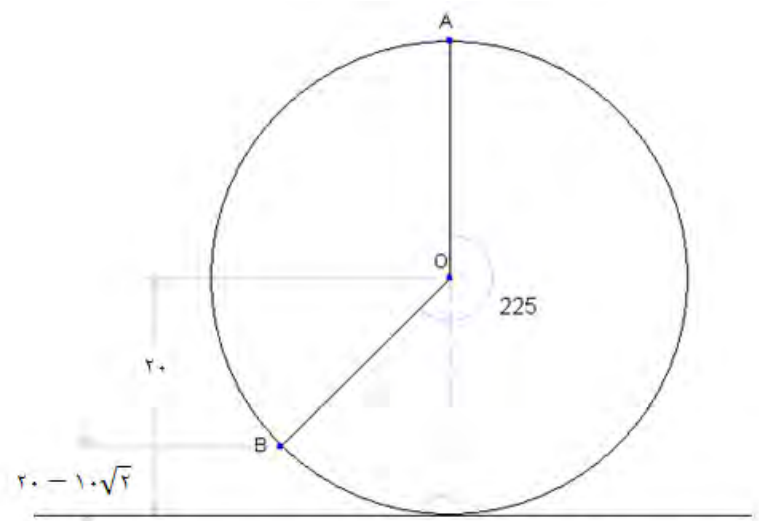
$$a^2+\frac{1}{a^2}+1\geq k\Rightarrow(a-\frac{1}{a})^2+3\geq k$$

اکنون دقت کنید که اگر عدد مثبت a به نحوی باشد که $a-\frac{1}{a}=1$ ($a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) در این صورت در رابطه بالا به دست می آوریم که $4\geq k$. برای اینکه نشان دهیم ماکزیمم k ,۴ است تنها کافی است نشان دهیم که برای هر a با شرط $a-\frac{1}{a}\geq 1$ داریم $(a-\frac{1}{a})^2+3\geq 4$ که این هم بدیهی است. پس برای ۴ هم اثبات ارائه کردیم و هم مثالی ارائه کردیم که نشان دهیم از این عدد بزرگتر نمی توان یافت. درنتیجه گزینه

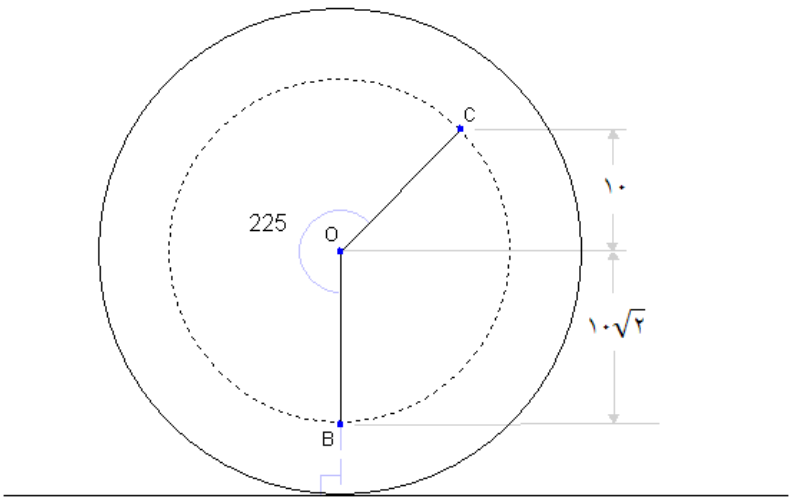
- توجه : نکته ای که باید به آن توجه کنید این است که هنگامی که به رابطه $a^2+\frac{1}{a^2}+1\geq k$ می رسید اگر از نامساوی حسابی-هندسی بهره ببرید به این نتیجه می رسید که $a^2+\frac{1}{a^2}+1\geq 3$ پس احتمالا حدس می زنید که شاید بهترین k همان ۳ باشد. البته این که در تست جواب ۳ وجود ندارد به شما کمک می کند تا احساس کنید در قسمتی اشتباه کرده اید. اما اگر در گزینه ها عدد ۳ وجود داشت توجه به این نکته که شما از فرض $a-\frac{1}{a}\geq 1$ هیچ استفاده ای نکرده اید می توانست راهنمای شما برای پیدا کردن خطا باشد.

۲۵. گزینه (ه) صحیح است.

محیط دایره عظیمه توپ برابر است با ۴۰π و توپ ۲۵π حرکت کرده است.پس در کل به اندازه $\frac{۲۵\pi}{۴۰\pi} = \frac{۵}{۸}$ دور یا ۲۲۵ چرخیده است.لذا با توجه به اینکه نقطه علامت خورده خود یک دایره عظیمه را می پیماید ارتفاع نقطه علامت خورده پس از حرکت به سمت شرق برابر $۲۰ + ۲۰\ cos(۲۲۵\ ) = ۲۰ - ۱۰\sqrt{۲}$ می شود.از اینجا به بعد در حرکت به سمت شمال هم توپ مقدار ۲۲۵ می چرخد ولی نقطه علامت خورده روی دایره ای ثابت حرکت می کند که شعاع آن برابر $۱۰\sqrt{۲} = (۲۰ - ۱۰\sqrt{۲}) - ۲۰$ است و در ابتدا نقطه مورد نظر در پایین دایره قرار دارد. با چرخش به مقدار ۲۲۵ دیگر نقطه به ارتفاع $۲۰ - ۱۰\sqrt{۲}\cos(۲۲۵\ )$ یا ۳۰ سانتی متر می رسد.در اشکال زیر نمای جانبی کره را در هر یک از این حرکات می بینید.



A محل نقطه پیش از حرکت به سمت شرق و B مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت



B محل نقطه پیش از حرکت به سمت شمال و C مختصات نقطه بلافاصله پس از اتمام حرکت

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۶- گزینه (ج) صحیح است.

در شکل زیر دو کاشی روی جدول قرار گرفته است. با توجه به این که باید مجموع اعداد روی کاشی بر ۶ بخشپذیر باشد، لزوما $A_۳$ و $A_۴$ باید برابر باشند(چرا؟). به کمک این استدلال می توان گفت که اعداد نوشته شده در دو خانه ای که فاصله عمودی یا افقی آن ها ۲ است، برابر است.

A	B	A	B	
C	D	C	D	
A	B	A	B	
C	D	C	D	

به عبارتی اگر سطر ها و ستون ها را از چپ به راست و از بالا به پایین از ۱ تا ۱۳۸۸ شماره گذاری کنیم، خانه های با سطر فرد و ستون فرد با هم برابر هستند و این مقدار را A فرض کنید. به همین ترتیب کلیه خانه های (فرد،زوج) برابر C، تمام خانه های (زوج، فرد) برابر B و تمام خانه های (زوج،زوج) برابر D هستند. همچنین با کاشی گذاری ها، می توان ثابت کرد که

$$۲B \equiv ۲C \pmod ۶ \Rightarrow B \equiv C \pmod ۳$$
$$۲A \equiv ۲D \pmod ۶ \Rightarrow A \equiv D \pmod ۳$$
$$۶|۲B + A + D \Longrightarrow ۲|A + D \Longrightarrow A \equiv D \pmod ۲$$
$$۶|۲D + B + C \Longrightarrow ۲|B + C \Longrightarrow B \equiv C \pmod ۲$$

از روابط فوق می توان نتیجه گرفت که $B = C$ و $A = D$. در نتیجه کافی است که

$$۶|۲(A + B) \Longrightarrow ۳|A + B$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

حال A می تواند به ۶ حالت انتخاب شود و B متناظر با آن در ۲ حالت انتخاب می شود. پس جواب ۶ × ۲ = ۱۲ است.

۲۷-گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید A_n, B_n عباراتی باشند که از در آنها از n تا ۲ و n تا ۴ استفاده شده باشد و C_n عبارتی باشد که در آن از $4n$ تا ۲ استفاده شده باشد :

$$A_n = 2^{4^{2^{\cdots^4}}} \qquad B_n = 4^{2^{4^{\cdots^2}}} \qquad C_n = 2^{2^{2^{\cdots^2}}}$$

اکنون هدف ما نشان دادن نامساوی $C_n > A_n > B_n$ برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ است. اگر این نامساوی را نشان دهیم از قرار دادن $n = 500$ جواب به دست می آید. این حکم را به روش استقرایی نشان می دهیم. به راحتی می توان این نامساوی را برای حالت پایه یعنی $n = 2$ چک کرد. اگر نامساوی برای n درست باشد برای $n+1$ می توان نوشت :

$$A_{n+1} = 2^{4^{A_n}} = 2^{2^{2A_n}} \qquad B_{n+1} = 4^{2B_n} = 2^{2^{B_n+1}} \qquad C_{n+1} = 2^{2^{2^{C_n}}}$$

اکنون اگر دقت کنید $2A_n > 2B_n \geq B_n + 1$ در نتیجه $2^{2^{2A_n}} > 2^{2^{B_n+1}}$ یا معادلا : $A_{n+1} > B_{n+1}$.

اکنون می خواهیم C_{n+1}, A_{n+1} را با هم مقایسه کنیم. ثابت می کنیم که : $2^{2^{C_n}} > 2A_n$ و از آن حکم را نتیجه می گیریم. توجه کنید که اگر u عددی طبیعی باشد $2^{2^u} > 2u$ صحیح است. در نتیجه :

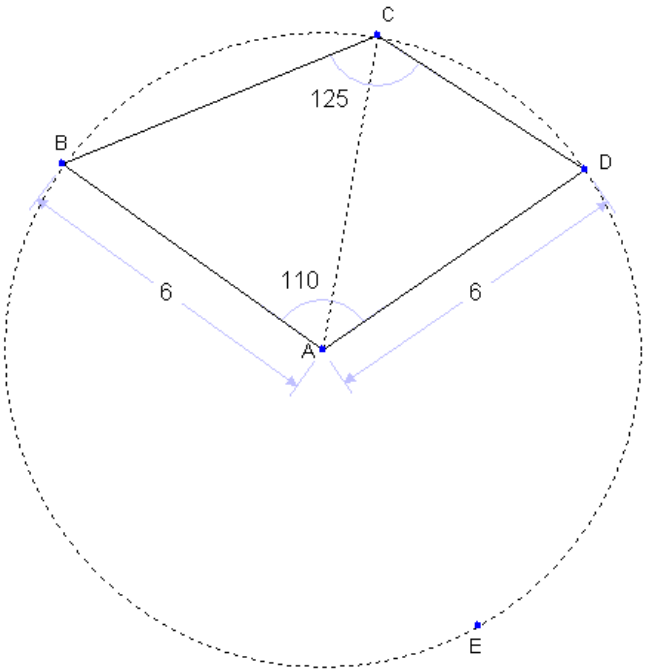
$$2^{2^{Cn}} > 2C_n > 2A_n \Rightarrow 2^{2^{2^{C_n}}} > 2^{2^{2A_n}}$$

که از آن نتیجه می شود : $C_{n+1} > A_{n+1}$.

در نتیجه چیزی که می خواستیم ثابت کنیم باستقرا ثابت شد. پس برای $n = 500$ داریم :

$C > A > B$ و در نتیجه گزینه (ج) صحیح است.

۲۸. گزینه (ج) صحیح است.

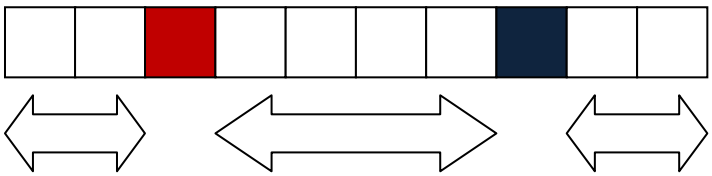


دایره به مرکز A و شعاع ۶ را اضافه می کنیم. (مطابق شکل) واضح است که B و D روی این دایره قرار دارند.نشان می دهیم که C هم روی این دایره قرار دارد. داریم که کمان BED برابر

۳۶۰ − ۱۱۰ = ۲۵۰ است و زاویه BCD هم برابر $\frac{۲۵۰}{۲}$ = ۱۲۵ است.لذا کمان BED درخور زاویه BCD است و C روی دایره قرار دارد.پس $AC = ۶$.

۲۹- گزینه (ب) صحیح است.

در هر حرکت ما قطعه جورچین را در یکی از سه ناحیه چپ، وسط و راست قرار می دهیم.



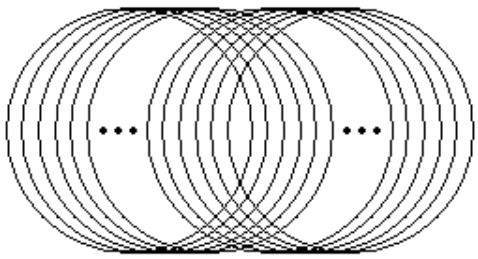
در اول تعداد روش های چیدن قطعات در ناحیه وسط را می شماریم. در ۳ مرحله ممکن است قطعات را از سمت چپ پیشروی دهیم یا از سمت راست(مثلا در مرحله اول ما می توانیم یک قطعه مجاور خانه قرمز قرار دهیم یا یک قطعه مجاور خانه آبی). قطعه آخر هم به صورت یکتا قرار خواهد گرفت. پس به ۸ طریق می توان ۴ خانه وسط را پر نمود. حال نوبت به چیدن قطعات ناحیه چپ است. در این جا دو قطعه باید قرار بگیرند که لزوما قطعه خانه ۲ زودتر از قطعه خانه ۱ پر می شود. در نتیجه برای ترکیب کردن چیدمان ناحیه چپ و وسط کافی است تعداد راه های قرار دادن دو حرکت بین ۴ حرکت خانه های وسط را شمارد. این هم بدین ترتیب است که ما می توانیم یکی از ۵ جایگاه ممکن برای قرار دادن این حرکات را به هر دو اختصاص دهیم یا دو محل مختلف اختصاص دهیم که در کل به ۱۵ طریق می توان حرکات ناحیه چپ را بین حرکات ناحیه وسط انجام داد. حال حرکات ناحیه راست را می خواهیم در بین ۶ حرکت نواحی چپ و وسط انجام دهیم. با استدلالی مشابه دو حرکت ناحیه راست

را به ۲۸ طریق می توان دو حرکت را جاسازی کرد($\binom{۷}{۲}$ + ۷). پس در کل به ۸ × ۱۵ × ۲۸ = ۳۳۶۰ طریق می توان جورچین را چید.

توجه کنید که در این سوال از تکنیک ادغام حرکات استفاده شده بود. یعنی ما حرکات لازم برای انجام کارهای مختلف را به طور مناسبی در هم می آمیزیم. به همین منظور مسئله را به سه حالت تقسیم کرده و سپس آن ها را در هم آمیختیم.

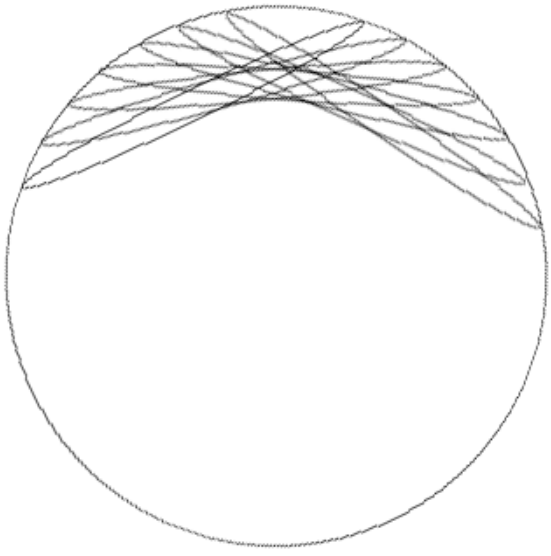
۳۰. گزینه (ه) صحیح است.

دقت کنید که اگر شرط هم صفحه بودن وجود نداشت می توانستیم بی نهایت دایره را با الگوی شکل زیر روی یک صفحه قرار دهیم:



حال مناسب است با همان الگوی بالا بی نهایت دایره را روی یک کره بچینیم. به وضوح هر سه شرط مساله را بر آورده

کرده ایم.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱. ارقام ستاره‌دار در حاصل‌ضرب روبه‌رو نامعلوم‌اند و لزوماً برابر نیستند. مجموع ارقام حاصل‌ضرب چه‌قدر است؟ (اعداد کوچک سطر بالا از ده بر یک حاصل شده‌اند.)

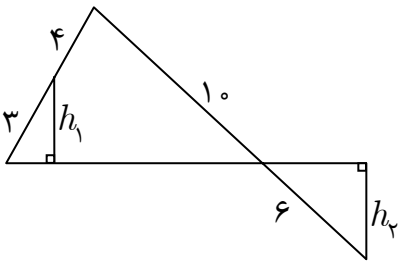
$$\begin{array}{r} ۲\,۲\,۸ \\ *\,*\,*\,* \\ \times \qquad ۹ \\ \hline ۱*\circ*\,* \end{array}$$

الف) ۵ ب) ۹ ج) ۱۸ د) ۲۷ ه) ۳۶

۲. چند سه‌تایی (a,b,c) از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک a، b و c برابر ۷۰۰۰ باشد؟

الف) ۱۰۰۸ ب) ۲۱۸۷ ج) ۵۱۰۳ د) ۵۴۸۸ ه) ۹۵۸۳

۳. در شکل روبه‌رو، نسبت $h_۲$ به $h_۱$ چه‌قدر است؟



الف) ۰/۸ ب) ۱ ج) ۱/۲

د) ۱/۴ ه) ۲

۴. طول سه میانه‌ی مثلثی، ۵، ۵ و ۸ سانتی‌متر است. کوتاه‌ترین ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟

الف) ۲ ب) $۳\sqrt{۷}$ ج) $\frac{\sqrt{۸۹}}{۳}$ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) ۴

۵. در بسط $(۱ + x^۳ + x^۶)^{۵۰}$ چند جمله با ضریب ناصفر وجود دارد؟

الف) ۵۱ ب) ۱۰۱ ج) ۱۵۱ د) ۲۰۱ ه) ۳۰۱

۶. تعداد مقسوم‌علیه‌های $۲۰۰۸ \times (۱۳۸۷! + ۱۴۳۰)$ چند برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۳۸۷! + ۱۴۳۰$ است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۲۰۰

۷. چند عدد پنج رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم آن با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد؟

الف) ۸ ب) ۱۲ ج) ۱۶ د) ۲۴ ه) ۳۶

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

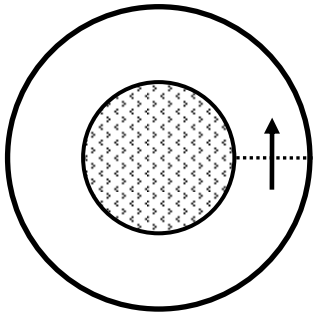
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

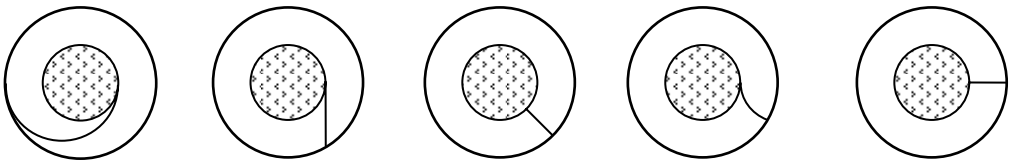
۸. ده نفر، با شماره‌های یک تا ده، به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میزی نشسته‌اند. در ابتدا هر کس ۱۰۰ مهره دارد. با شروع از نفر شماره یک، هر نفر ۲ مهره از نفر سمت راست خود می‌گیرد و ۱ مهره به نفر سمت چپ خود می‌دهد و نوبت به نفر سمت چپ منتقل می‌شود. پس از انجام ۸۷ مرحله، نفر هشتم چند مهره خواهد داشت؟

الف) ۹۸ ب) ۹۹ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۱ ه) ۱۰۲

۹. در پیست دایره‌ای روبه‌رو، دونده‌ها روی دایره‌های متحدالمرکز می‌دوند. خط شروع مسابقه و جهت حرکت در شکل مشخص شده است. نقطه‌ی پایان مسابقه روی کدام یک از خم‌های زیر باشد تا طول مسیری که دونده‌های مختلف تا رسیدن به خط پایان طی می‌کنند، با هم برابر باشد؟



الف) ب) ج) د) ه)



۱۰. برای دو عدد مثبت a و b، M و G را به ترتیب میانگین حسابی ($\frac{a+b}{۲}$) و میانگین هندسی ($\sqrt{ab}$) در نظر می‌گیریم. کوچک‌ترین عدد k را بیابید که نابرابری زیر برای هر a و b حقیقی مثبت برقرار باشد.

$$\left|M-G\right| \le k\left|a-b\right|$$

الف) $\frac{۱}{۶}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) ۱

۱۱. کاغذی مربع شکل را از روی قطر آن تا می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به دست آید. سپس مثلث را از روی محور تقارن آن تا می‌کنیم و مثلث دیگری به دست می‌آوریم و این کار را ۱۱ بار انجام می‌دهیم. سپس دو گوشه‌ی غیر قائمه‌ی مثلث حاصل را می‌بریم. اکنون اگر کاغذ را باز کنیم، چند سوراخ در آن می‌بینیم؟ (توجه کنید که در مجموع، ۱۲ بار عمل تا کردن انجام شده است.)

الف) ۸۴۱ ب) ۹۰۰ ج) ۹۶۱ د) ۱۰۲۴ ه) ۱۰۸۹

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. هرمی مربع‌القاعده در نظر بگیرید که وجوه جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. طول ضلع بزرگ‌ترین مکعبی که در این هرم جا می‌شود چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{۲}-۱$ ب) $۲-\sqrt{۳}$ ج) $۲\sqrt{۳}-۳$

د) $\sqrt{۳}-۱$ ه) $۲-\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$

۱۳. دو ماتریس A و B را هم‌توان گوییم اگر اعداد طبیعی m و n وجود داشته باشند که $A^m = B^n$. کدام گزینه نادرست است؟

الف) اگر A و B هم‌توان و B و C هم‌توان باشند، آن‌گاه A و C نیز هم‌توان‌اند.

ب) اگر A و I هم‌توان باشند، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

ه) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

۱۴. چند سه‌تایی (a,b,c) از اعداد تک‌رقمی ناصفر وجود دارد که $b \neq c$ و مجموعه‌ی ارقام دو عدد $a \times b$ و $a \times c$ یک‌سان باشند؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۲

۱۵. شانزده نقطه در یک شبکه‌ی مربعی ۴×۴ قرار گرفته‌اند. از این نقاط حداکثر چند نقطه می‌توان انتخاب کرد که هیچ سه تایی هم‌خط نباشند؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۱۶. چرخی به شعاع یک متر در ابتدای پلکانی قرار دارد که ارتفاع هر پله‌ی آن نیم متر و طول هر پله‌ی آن ۲ متر است. وقتی چرخ از دو پله بالا رفت، در ابتدای پله، چند رادیان چرخیده است؟



الف) ۵ ب) $۲+\pi$ ج) $۲+\frac{۴}{۳}\pi$ د) $۲-\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$ ه) $۴-\sqrt{۳}+\frac{۲}{۳}\pi$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۷. $x_۱, \ldots, x_{۱۰}$ جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو است. $x_۵$ چند است؟

$$\begin{cases} x_۱ + x_۳ = ۲x_۲ \\ x_۲ + x_۴ = ۲x_۳ \\ \vdots \\ x_۸ + x_{۱۰} = ۲x_۹ \\ x_۹ + x_۱ = ۲۲ \\ x_{۱۰} + x_۲ = ۲۶ \end{cases}$$

الف) ۰ ب) ۵ ج) ۹ د) ۱۱ ه) ۱۶

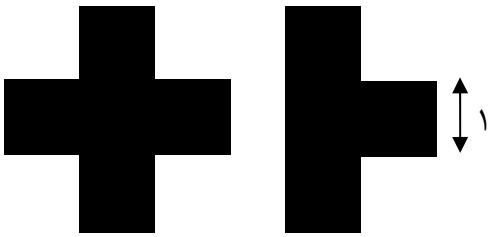
۱۸. یک جدول ۸×۸ که هر خانه‌ی آن مربعی به ضلع یک است در نظر بگیرید. مجموع مساحت همه‌ی مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها در این جدول دیده می‌شود چند است؟

الف) ۱۲۹۶ ب) ۴۰۹۶ ج) ۱۴۴۰۰ د) ۱۶۴۰۰ ه) ۲۴۳۸۴

۱۹. سه رقم سمت راست $۲۱^{۶۴}$ کدام است؟

الف) ۶۸۱ ب) ۸۸۱ ج) ۴۸۱ د) ۲۲۱ ه) ۳۸۱

۲۰. جسمی سه بعدی را بر روی صفحات $x - y$ و $y - z$ تصویر کرده‌ایم و دو شکل روبه‌رو به دست آمده است. حداکثر حجمی که جسم سه بعدی می‌تواند داشته باشد، چه‌قدر است؟



الف) ۶ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۲ ه) ۲۰

۲۱. نمودار تابع $y = x^۳$ را نسبت به خط $y + ۵x = ۰$ قرینه می‌کنیم. در مورد شکل حاصل کدام درست است؟

الف) نمودار یک تابع پوشا است.
ب) نمودار یک تابع یک به یک است.
ج) نمودار یک تابع صعودی است.
د) نمودار یک تابع نزولی است.
ه) نمودار یک تابع نیست.

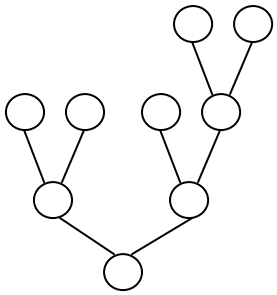
۲۲. مجموع ارقام کدام یک از اعداد زیر بیش‌تر است؟

الف) $۲۰ + ۲^{۱۰۰}$ ب) $۱۲ + ۲^{۱۰۰}$ ج) $۸ + ۲^{۱۰۰}$ د) $۴ + ۲^{۱۰۰}$ ه) $۲^{۱۰۰}$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور



۲۳. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را ، بدون تکرار، در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار داد به طوری که عدد هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کم‌تر باشد؟

الف) ۱۶ ب) ۹۶ ج) ۴۴۸ د) ۸۹۶ ه) ۳۶۲۸۸۰

۲۴. معادله‌ی $۲^{b-a} + a = b^۲$ در اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۵. مثلث به رأس‌های A ، B و C دارای این خاصیت است که فواصل رأس‌های آن تا نقطه‌ی ثابت P، به ترتیب، برابر با ۷، ۱۰ و ۱۴ است و در بین مثلث‌های با این خاصیت، بیش‌ترین مساحت را دارد. نسبت فاصله‌ی P از ضلع AB به فاصله‌ی P از ضلع BC، چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۲ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) $\frac{۷}{۱۰}$

۲۶. x و y و z جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو در بازه‌ی $(-\pi, \pi]$ هستند. $x^۲ + y^۲ + z^۲$ کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = ۰ \\ \cos x + \cos y + \cos z = ۰ \\ x + y + z = ۰ \end{cases}$$

الف) ۰ ب) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ج) $\frac{۳\pi^۲}{۴}$ د) $\frac{۸\pi^۲}{۹}$ ه) $\frac{۲۷\pi^۲}{۴}$

۲۷. زیرمجموعه‌های $A_۰, A_۱, A_۲, \ldots$ از اعداد طبیعی به صورت روبه‌رو تعریف شده‌اند. کدام یک از اعداد زیر عضو $A_{۱۰۰}$ نیست؟ (توجه کنید که $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.)

$$\begin{cases} A_۰ = \varnothing, A_۱ = \{۱\} \\ A_n = (A_{n-۱} \Delta A_{n-۲}) \cup \{n\} \end{cases}$$

الف) ۶۹ ب) ۷۰ ج) ۷۱ د) ۷۲ ه) ۷۳

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

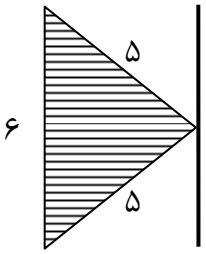
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۲۸. چراغ‌قوه‌ای داریم که به دو باتری نیاز دارد. پنج باتری در اختیار داریم که دقیقاً سه تای آن‌ها سالم است. با دست‌کم چند بار امتحان کردن می‌توانیم حتماً چراغ‌قوه را روشن کنیم؟ (آخرین باری که چراغ‌قوه روشن می‌شود نیز یک بار امتحان کردن محسوب می‌شود.)

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۹. مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده‌ی ۶ و طول ساق‌های ۵ را حول محوری که از رأس آن می‌گذرد و موازی قاعده‌ی آن است دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه‌قدر است؟



الف) ۱۲π ب) ۴۸π ج) ۶۴π د) ۷۲π ه) ۹۶π

۳۰. در یک جدول با ۷۲ سطر و ۱۴۰ ستون، مهره‌ای با این قاعده حرکت می‌کند که در هر حرکت ۳۰ واحد به سمت راست و ۲۰ واحد به سمت بالا می‌رود و وقتی به ضلع راست یا ضلع بالای جدول می‌رسد، حرکت را از ضلع مقابل ادامه می‌دهد. مثلاً اگر مهره در خانه‌ی ۱۲۰ افقی و ۷۰ عمودی باشد در حرکت بعد به خانه‌ی ۱۰ افقی و ۱۸ عمودی می‌رود. اگر این مهره از خانه‌ی گوشه‌ی پایین سمت چپ (۱ افقی و ۱ عمودی) شروع به حرکت کند، به چه نسبتی از خانه‌های جدول می‌تواند برسد؟

الف) $\frac{۱}{۸۰}$ ب) $\frac{۱}{۴۰}$ ج) $\frac{۱}{۳۰}$ د) $\frac{۱}{۲۰}$ ه) $\frac{۵}{۱۲}$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱. ارقام ستاره‌دار در حاصل‌ضرب روبه‌رو نامعلوم‌اند و لزوماً برابر نیستند. مجموع ارقام حاصل‌ضرب چه‌قدر است؟ (اعداد کوچک سطر بالا از ده بر یک حاصل شده‌اند.)

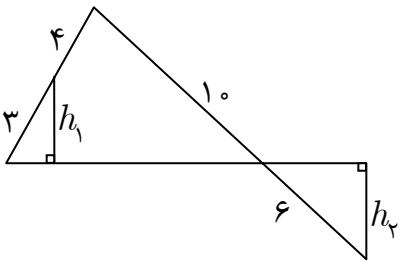
$$\begin{array}{r} ۲\,۲\,۸ \\ *\,*\,*\,* \\ \times \qquad ۹ \\ \hline ۱*\circ*\,* \end{array}$$

الف) ۵ ب) ۹ ج) ۱۸ د) ۲۷ ه) ۳۶

۲. چند سه‌تایی (a,b,c) از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک a، b و c برابر ۷۰۰۰ باشد؟

الف) ۱۰۰۸ ب) ۲۱۸۷ ج) ۵۱۰۳ د) ۵۴۸۸ ه) ۹۵۸۳

۳. در شکل روبه‌رو، نسبت $h_۲$ به $h_۱$ چه‌قدر است؟



الف) ۰/۸ ب) ۱ ج) ۱/۲

د) ۱/۴ ه) ۲

۴. طول سه میانه‌ی مثلثی، ۵، ۵ و ۸ سانتی‌متر است. کوتاه‌ترین ضلع مثلث چند سانتی‌متر است؟

الف) ۲ ب) $۳\sqrt{۷}$ ج) $\frac{\sqrt{۸۹}}{۳}$ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) ۴

۵. در بسط $(۱ + x^۳ + x^۶)^{۵۰}$ چند جمله با ضریب ناصفر وجود دارد؟

الف) ۵۱ ب) ۱۰۱ ج) ۱۵۱ د) ۲۰۱ ه) ۳۰۱

۶. تعداد مقسوم‌علیه‌های $۲۰۰۸ \times (۱۳۸۷! + ۱۴۳۰)$ چند برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۳۸۷! + ۱۴۳۰$ است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۲۰۰

۷. چند عدد پنج رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم آن با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد؟

الف) ۸ ب) ۱۲ ج) ۱۶ د) ۲۴ ه) ۳۶

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

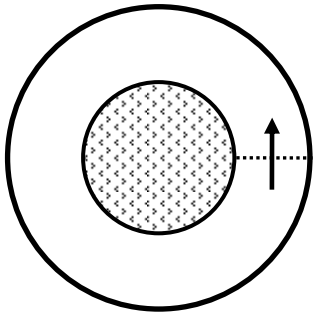
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

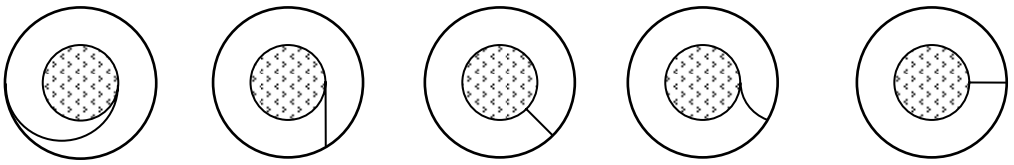
۸. ده نفر، با شماره‌های یک تا ده، به ترتیب در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میزی نشسته‌اند. در ابتدا هر کس ۱۰۰ مهره دارد. با شروع از نفر شماره یک، هر نفر ۲ مهره از نفر سمت راست خود می‌گیرد و ۱ مهره به نفر سمت چپ خود می‌دهد و نوبت به نفر سمت چپ منتقل می‌شود. پس از انجام ۸۷ مرحله، نفر هشتم چند مهره خواهد داشت؟

الف) ۹۸ ب) ۹۹ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۱ ه) ۱۰۲

۹. در پیست دایره‌ای روبه‌رو، دونده‌ها روی دایره‌های متحدالمرکز می‌دوند. خط شروع مسابقه و جهت حرکت در شکل مشخص شده است. نقطه‌ی پایان مسابقه روی کدام یک از خم‌های زیر باشد تا طول مسیری که دونده‌های مختلف تا رسیدن به خط پایان طی می‌کنند، با هم برابر باشد؟



الف) ب) ج) د) ه)



۱۰. برای دو عدد مثبت a و b، M و G را به ترتیب میانگین حسابی ($\frac{a+b}{۲}$) و میانگین هندسی ($\sqrt{ab}$) در نظر می‌گیریم. کوچک‌ترین عدد k را بیابید که نابرابری زیر برای هر a و b حقیقی مثبت برقرار باشد.

$$\left|M-G\right| \le k\left|a-b\right|$$

الف) $\frac{۱}{۶}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) ۱

۱۱. کاغذی مربع شکل را از روی قطر آن تا می‌کنیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به دست آید. سپس مثلث را از روی محور تقارن آن تا می‌کنیم و مثلث دیگری به دست می‌آوریم و این کار را ۱۱ بار انجام می‌دهیم. سپس دو گوشه‌ی غیر قائمه‌ی مثلث حاصل را می‌بریم. اکنون اگر کاغذ را باز کنیم، چند سوراخ در آن می‌بینیم؟ (توجه کنید که در مجموع، ۱۲ بار عمل تا کردن انجام شده است.)

الف) ۸۴۱ ب) ۹۰۰ ج) ۹۶۱ د) ۱۰۲۴ ه) ۱۰۸۹

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. هرمی مربع‌القاعده در نظر بگیرید که وجوه جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ هستند. طول ضلع بزرگ‌ترین مکعبی که در این هرم جا می‌شود چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{۲}-۱$ ب) $۲-\sqrt{۳}$ ج) $۲\sqrt{۳}-۳$

د) $\sqrt{۳}-۱$ ه) $۲-\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$

۱۳. دو ماتریس A و B را هم‌توان گوییم اگر اعداد طبیعی m و n وجود داشته باشند که $A^m = B^n$. کدام گزینه نادرست است؟

الف) اگر A و B هم‌توان و B و C هم‌توان باشند، آن‌گاه A و C نیز هم‌توان‌اند.

ب) اگر A و I هم‌توان باشند، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

ه) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ هم‌توان‌اند.

۱۴. چند سه‌تایی (a,b,c) از اعداد تک‌رقمی ناصفر وجود دارد که $b \neq c$ و مجموعه‌ی ارقام دو عدد $a \times b$ و $a \times c$ یک‌سان باشند؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۲

۱۵. شانزده نقطه در یک شبکه‌ی مربعی ۴×۴ قرار گرفته‌اند. از این نقاط حداکثر چند نقطه می‌توان انتخاب کرد که هیچ سه تایی هم‌خط نباشند؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۱۶. چرخی به شعاع یک متر در ابتدای پلکانی قرار دارد که ارتفاع هر پله‌ی آن نیم متر و طول هر پله‌ی آن ۲ متر است. وقتی چرخ از دو پله بالا رفت، در ابتدای پله، چند رادیان چرخیده است؟



الف) ۵ ب) $۲+\pi$ ج) $۲+\frac{۴}{۳}\pi$ د) $۲-\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$ ه) $۴-\sqrt{۳}+\frac{۲}{۳}\pi$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۷. $x_۱, \ldots, x_{۱۰}$ جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو است. $x_۵$ چند است؟

$$\begin{cases} x_۱ + x_۳ = ۲x_۲ \\ x_۲ + x_۴ = ۲x_۳ \\ \vdots \\ x_۸ + x_{۱۰} = ۲x_۹ \\ x_۹ + x_۱ = ۲۲ \\ x_{۱۰} + x_۲ = ۲۶ \end{cases}$$

الف) ۰ ب) ۵ ج) ۹ د) ۱۱ ه) ۱۶

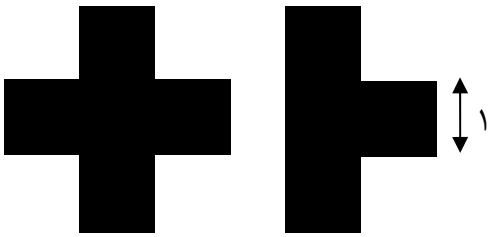
۱۸. یک جدول ۸×۸ که هر خانه‌ی آن مربعی به ضلع یک است در نظر بگیرید. مجموع مساحت همه‌ی مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها در این جدول دیده می‌شود چند است؟

الف) ۱۲۹۶ ب) ۴۰۹۶ ج) ۱۴۴۰۰ د) ۱۶۴۰۰ ه) ۲۴۳۸۴

۱۹. سه رقم سمت راست $۲۱^{۶۴}$ کدام است؟

الف) ۶۸۱ ب) ۸۸۱ ج) ۴۸۱ د) ۲۲۱ ه) ۳۸۱

۲۰. جسمی سه بعدی را بر روی صفحات $x - y$ و $y - z$ تصویر کرده‌ایم و دو شکل روبه‌رو به دست آمده است. حداکثر حجمی که جسم سه بعدی می‌تواند داشته باشد، چه‌قدر است؟



الف) ۶ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۲ ه) ۲۰

۲۱. نمودار تابع $y = x^۳$ را نسبت به خط $y + ۵x = ۰$ قرینه می‌کنیم. در مورد شکل حاصل کدام درست است؟

الف) نمودار یک تابع پوشا است.
ب) نمودار یک تابع یک به یک است.
ج) نمودار یک تابع صعودی است.
د) نمودار یک تابع نزولی است.
ه) نمودار یک تابع نیست.

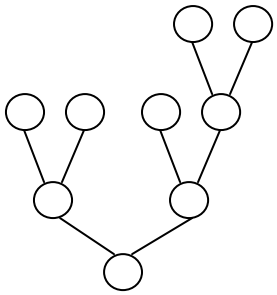
۲۲. مجموع ارقام کدام یک از اعداد زیر بیش‌تر است؟

الف) $۲۰ + ۲^{۱۰۰}$ ب) $۱۲ + ۲^{۱۰۰}$ ج) $۸ + ۲^{۱۰۰}$ د) $۴ + ۲^{۱۰۰}$ ه) $۲^{۱۰۰}$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور



۲۳. به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را ، بدون تکرار، در دایره‌های شکل روبه‌رو قرار داد به طوری که عدد هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کم‌تر باشد؟

الف) ۱۶ ب) ۹۶ ج) ۴۴۸ د) ۸۹۶ ه) ۳۶۲۸۸۰

۲۴. معادله‌ی $۲^{b-a} + a = b^۲$ در اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۵. مثلث به رأس‌های A ، B و C دارای این خاصیت است که فواصل رأس‌های آن تا نقطه‌ی ثابت P، به ترتیب، برابر با ۷، ۱۰ و ۱۴ است و در بین مثلث‌های با این خاصیت، بیش‌ترین مساحت را دارد. نسبت فاصله‌ی P از ضلع AB به فاصله‌ی P از ضلع BC، چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۲ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) $\frac{۷}{۱۰}$

۲۶. x و y و z جواب دستگاه معادله‌ی روبه‌رو در بازه‌ی $(-\pi, \pi]$ هستند. $x^۲ + y^۲ + z^۲$ کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = ۰ \\ \cos x + \cos y + \cos z = ۰ \\ x + y + z = ۰ \end{cases}$$

الف) ۰ ب) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ج) $\frac{۳\pi^۲}{۴}$ د) $\frac{۸\pi^۲}{۹}$ ه) $\frac{۲۷\pi^۲}{۴}$

۲۷. زیرمجموعه‌های $A_۰, A_۱, A_۲, \ldots$ از اعداد طبیعی به صورت روبه‌رو تعریف شده‌اند. کدام یک از اعداد زیر عضو $A_{۱۰۰}$ نیست؟ (توجه کنید که $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.)

$$\begin{cases} A_۰ = \varnothing, A_۱ = \{۱\} \\ A_n = (A_{n-۱} \Delta A_{n-۲}) \cup \{n\} \end{cases}$$

الف) ۶۹ ب) ۷۰ ج) ۷۱ د) ۷۲ ه) ۷۳

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

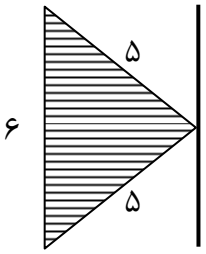
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۲۸. چراغ‌قوه‌ای داریم که به دو باتری نیاز دارد. پنج باتری در اختیار داریم که دقیقاً سه تای آن‌ها سالم است. با دست‌کم چند بار امتحان کردن می‌توانیم حتماً چراغ‌قوه را روشن کنیم؟ (آخرین باری که چراغ‌قوه روشن می‌شود نیز یک بار امتحان کردن محسوب می‌شود.)

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۹. مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده‌ی ۶ و طول ساق‌های ۵ را حول محوری که از رأس آن می‌گذرد و موازی قاعده‌ی آن است دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چه‌قدر است؟



الف) ۱۲π ب) ۴۸π ج) ۶۴π د) ۷۲π ه) ۹۶π

۳۰. در یک جدول با ۷۲ سطر و ۱۴۰ ستون، مهره‌ای با این قاعده حرکت می‌کند که در هر حرکت ۳۰ واحد به سمت راست و ۲۰ واحد به سمت بالا می‌رود و وقتی به ضلع راست یا ضلع بالای جدول می‌رسد، حرکت را از ضلع مقابل ادامه می‌دهد. مثلاً اگر مهره در خانه‌ی ۱۲۰ افقی و ۷۰ عمودی باشد در حرکت بعد به خانه‌ی ۱۰ افقی و ۱۸ عمودی می‌رود. اگر این مهره از خانه‌ی گوشه‌ی پایین سمت چپ (۱ افقی و ۱ عمودی) شروع به حرکت کند، به چه نسبتی از خانه‌های جدول می‌تواند برسد؟

الف) $\frac{۱}{۸۰}$ ب) $\frac{۱}{۴۰}$ ج) $\frac{۱}{۳۰}$ د) $\frac{۱}{۲۰}$ ه) $\frac{۵}{۱۲}$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱. همه‌ی زاویه‌های مثلثی از ۵۹ درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه درباره‌ی این مثلث همواره صحیح است؟

۱) یک زاویه‌ی منفرجه دارد. ۲) یک زاویه‌ی ۶۰ درجه دارد. ۳) قائم‌الزاویه است.

۴) متساوی‌الاضلاع است. ۵) همه‌ی زاویه‌هایش از ۶۲ درجه کوچک‌ترند.

۲. چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بیش از ۱۵ نداشته باشد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نباشد.

۱) ۶۴ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۱۸۷ ۵) ۴۰۹۶

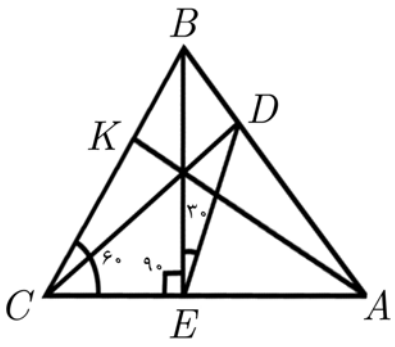
۳. معادله‌ی $||a|+۳|=|۲-|۱|$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۸ ۵) جواب ندارد.

۴. مجموع ارقام کوچک‌ترین عددی که حاصل‌ضرب ارقام آن برابر ۱۰۰۰ است، چیست؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۶ ۵) ۳۰

۵. در شکل روبه‌رو BE بر AC عمود است. اگر $\angle BED = ۳۰^\circ$ و $\angle ACB = ۶۰^\circ$ باشد، نسبت BK به BC چند است؟ (شکل دقیق نیست.)



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

۶. عددی دو رقمی در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب ارقامش را محاسبه کنید. برای عدد به‌دست‌آمده همین کار را انجام دهید و این کار را آن‌قدر تکرار کنید تا به عددی یک‌رقمی برسید. با شروع از چند عدد دورقمی به عدد ۲ می‌رسید؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۱۰

۷. تمام اعداد طبیعی ۵ رقمی که شامل ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ و بدون رقم تکراری هستند را ازکوچک به بزرگ مرتب کرده‌ایم. ۳۲۴۵۱ چندمین عدد است؟

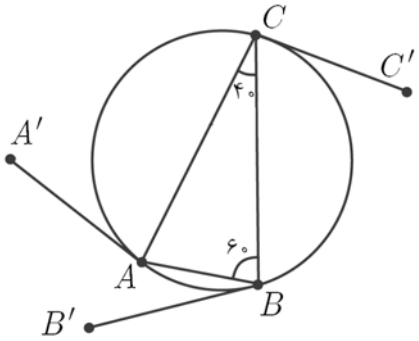
۱) ۴۶ ۲) ۴۹ ۳) ۵۲ ۴) ۵۵ ۵) ۵۸

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۸. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۰^\circ$. AA'، BB' و CC' هم‌طول و در یک جهت بر دایره محیطی ABC مماسند. زاویه‌ی $\angle B'A'C'$ چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)



۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰
۴) ۸۰ ۵) ۱۲۰

۹. عددی طبیعی را مثلثی گوییم هر گاه بتوان به ازای یک عدد طبیعی n آن را به صورت $\frac{n(n+۱)}{۲}$ نوشت. چند زوج (a,b) از اعداد مثلثی وجود دارد که $a - b = ۱۰۱$؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

۱۰. بزرگ‌ترین ضریب در بسط دوجمله‌ای $(۱+x)^{۱۰۰}$ چند رقم دارد؟

۱) کم‌تر از ۱۵ ۲) بین ۱۵ تا ۲۵ ۳) بین ۲۵ تا ۳۵ ۴) بین ۳۵ تا ۴۵ ۵) بیش‌تر از ۴۵

۱۱. یک عدد اول را «بسیار اول» گوییم اگر هر قطعه از ارقام متوالی آن نیز عددی اول به وجود آورند. اعداد بسیار اول دورقمی عبارتند از ۲۳، ۳۷، ۵۳ و ۷۳. چند عدد سه‌رقمی بسیار اول وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

۱۲. مجلس هشتم ۲۸۵ کرسی دارد. اگر سه حزب در انتخابات شرکت کنند به چند حالت ممکن است هیچ حزبی اکثریت مطلق را به دست نیاورد؟ (یعنی تعداد نمایندگان منتخب از آن حزب بیش از نصف نباشد.)

۱) ۱۰۱۵۳ ۲) ۱۰۲۰۱ ۳) ۱۱۳۲۵ ۴) ۱۱۴۰۰ ۵) ۱۱۷۱۵

۱۳. دستگاه معادلات روبه‌رو در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - ۱ = yz \\ y - ۱ = zx \\ z - ۱ = xy \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) جواب ندارد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۴. به چند طریق می‌توان ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سفید را در یک ردیف قرار داد که دقیقاً سه بلوک سیاه داشته باشد؟ یک بلوک سیاه چند مهره‌ی سیاه کنار هم است که در دو طرف آن‌ها مهره‌ی سیاه دیگری نباشد.

مثلاً آرایش روبه‌رو دو بلوک سفید و سه بلوک سیاه دارد. 

۱) ۵۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۴۰۰ ۵) ۵۴۰

۱۵. بیش‌ترین تعداد عامل ۲ در مجموع پنج عدد طبیعی که ضرب آن‌ها $۲^{۱۳۸۶}$ باشد چند است؟

۱) ۲۷۶ ۲) ۲۷۷ ۳) ۲۷۸ ۴) ۲۷۹ ۵) ۲۸۰

۱۶. نقطه‌ی A روی دایره‌ی C ثابت است و نقطه‌های M و N طوری روی دایره حرکت می‌کنند که مقدار زاویه‌ی $\angle MAN$ همواره ۳۳ درجه است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) همه‌ی خطوط MN از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند.
۲) همه‌ی خطوط MN به دایره‌ی ثابتی مماس هستند.
۳) تفاضل طول AM و AN مقداری ثابت است.
۴) نسبت طول AM و AN مقداری ثابت است.
۵) اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی مثلث AMN عددی ثابت است.

۱۷. بیش‌ترین مقدار $ab+bc+cd$ برای $a,b,c,d \geq ۰$ با شرط $a+b+c+d=۱$ چند است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$ ۵) $\frac{۳}{۱۶}$

۱۸. الاغی می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود ولی دقیقاً در وسط راه دریاچه‌ای دایره‌ای شکل به قطر دو کیلومتر قرار دارد. اگر فاصله‌ی A و B چهار کیلومتر باشد کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟



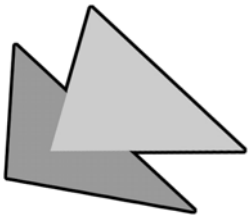
۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $۲+\pi$ ۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$ ۵) ۶

۱۹. تعداد مثلث‌های غیرهم‌نهشت که رئوسشان از بین رئوس ده‌ضلعی منتظم انتخاب شده باشند برابر است با

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹ ۵) ۱۰

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



۲۰. دو مثلث کاغذی را روی هم قرار می‌دهیم. مرز بیرونی شکلی که به وجود می‌آید چند ضلع نمی‌تواند داشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ ۵) ۱۲

۲۱. شش جعبه خالی با اندازه‌های مختلف داریم. ابعاد جعبه‌ها طوری است که درون هر جعبه می‌توان همه‌ی جعبه‌های کوچک‌تر از آن را، جدا از هم، جا داد. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را درون بزرگ‌ترین جعبه جاسازی کرد؟ (توجه کنید که می‌شود بعضی از جعبه‌ها را درون بعضی دیگر قرار داد.)

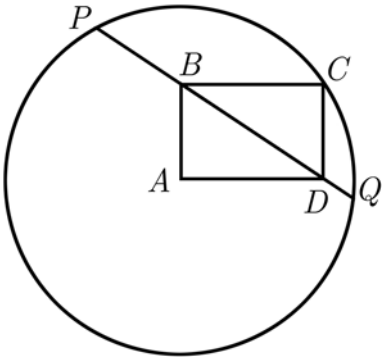
۱) ۶۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۰۰ ۵) ۲۴۰

۲۲. فرض کنید $f(x) = ax + b$. اگر $f(۰) \leq ۲$، $f(۱) \geq ۰$ و $f(۲) \leq ۴$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $f(۱۰)$ چند است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۳۶ ۵) ۴۰

۲۳. مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در مربع به ضلع یک چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۷ + ۴\sqrt{۳}}$ ۴) $۲۵\sqrt{۳} - ۴۸$ ۵) $\frac{\sqrt{۳}}{۲ + \sqrt{۳}}$



۲۴. فرض کنید $ABCD$ مستطیلی ۱×۲ باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم می‌کنیم. اگر امتداد BD دایره را در نقاط P و Q قطع کند طول PQ چقدر است؟

۱) $\sqrt{\frac{۸۴}{۵}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۳۵}{۲}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۹۲}{۵}}$
۴) $\sqrt{۶\pi}$ ۵) $\sqrt{۲۰}$

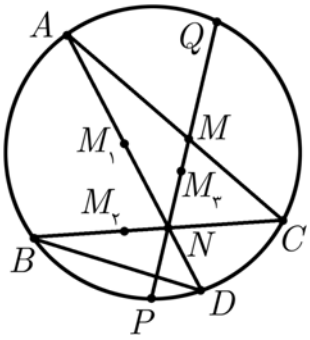
۲۵. معادله‌ی $۲^x + ۲x^۲ = y^۲$ در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶ ۵) جواب ندارد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور ☺



۲۶. در شکل روبه‌رو M_1، M_2، M_3 و M، به ترتیب، وسط AD، BC، PQ و CA هستند و $\angle ANQ = 40^\circ$. زاویه‌ی بین دو خط گذرنده از M_1M_2 و M_2M_3 چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰ ۵) ۸۰

۲۷. a عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ و x_n رقم دهگان a^n است. بسط اعشاری $0/x_1x_2x_3\ldots$

۱) به ازای هر a متناوب ساده است. ۲) به ازای هر a متناوب مرکب است.

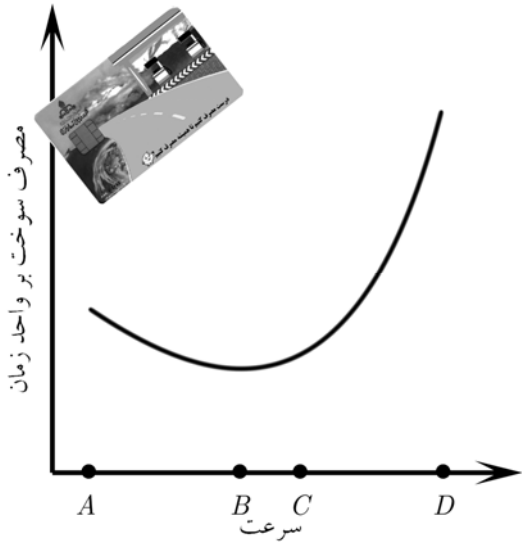
۳) به ازای هر a نامتناوب است. ۴) برای بعضی از مقادیر a متناوب و برای بعضی نامتناوب است.

۵) برای بعضی از مقادیر a متناوب ساده و برای بعضی متناوب مرکب است.

۲۸. به هر وجه و هر رأس یک مکعب عددی طبیعی نسبت داده‌ایم. می‌دانیم عدد هر رأس برابر ضرب اعداد سه وجه مجاورش است. مجموع اعداد رئوس ۲۳۱ است. مجموع اعداد وجوه چند است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۷ ۳) ۲۱ ۴) ۳۰ ۵) اطلاعات ناقص است.

۲۹. نمودار مقابل مصرف سوخت در واحد زمان یک خودرو را بر حسب سرعت آن نشان می‌دهد. اگر بخواهیم با سرعت ثابت از زنجان به قزوین برویم با چه سرعتی کل سوخت مصرف‌شده کم‌تر است؟



۱) کم‌ترین سرعت ممکن یعنی A ۲) B

۳) بیش‌ترین سرعت ممکن یعنی D ۴) C

۵) بستگی به فاصله‌ی زنجان و قزوین دارد.

۳۰. چند سه‌تایی (A,B,C) از زیرمجموعه‌های $\{1,2,3,4,5\}$ داریم که $A\cap B\subseteq C\subseteq A\cup B$ ؟

۱) ۷۵۰۰ ۲) ۷۶۵۵ ۳) ۷۶۵۶ ۴) ۷۷۰۰ ۵) ۷۷۷۶

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۶

---

۱. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است، اگر یکی از زوایا بیش‌تر یا مساوی ۶۲ درجه باشد مجموع دو زاویه دیگر کم‌تر یا مساوی ۱۱۸ درجه شده، که مستوجب این است که یکی از زوایا کم‌تر یا مساوی ۵۹ درجه شود.

۲. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

عوامل اول کوچک‌تر از ۱۵ عبارتند از ۲و۳و۵و۷و۱۱و۱۳ (شش عامل). از طرف دیگر با توجه به اینکه این اعداد نباید بر هیچ عدد مکعب کاملی بخش‌پذیر باشند، پس نمای این عوامل باید کم‌تر از ۳ باشد (۰و۱و۲). چرا که در غیر این صورت آن عامل اول به توان ۳ عددی مکعب کامل بوده که عدد مذکور را می شمارد. بدین ترتیب تعداد اعداد برابر است با $۳^۶$ یعنی ۷۲۹.

۳. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

دقت کنید از آنجا که حاصل قدر مطلق یک عدد همواره نامنفی است، پس $|a| \geq ۰$ در نتیجه $|a| + ۳ > ۰$ بنابر این $||a| + ۳| = |a| + ۳$.پس :

$$۱ = \left|۲ - \left||a| + ۳\right|\right| = |۲ - (|a| + ۳)| = \left|-۱ - |a|\right| = \left|۱ + |a|\right|$$

حال با توجه به رابطه ی $\left|۱ + |a|\right| = ۱$ و این که $|a| + ۱$ مثبت است داریم::

$$\left|۱ + |a|\right| = |a| + ۱ = ۱ \Rightarrow |a| = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

پس مسئله تنها دارای یک جواب است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۴. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۰۰۰ برابر است با $۲^{۳}\times ۵^{۳}$. بنابر این ارقام عدد مورد نظر یا ۱ یا ۲ یا ۵ هستند. اگر عدد مورد نظر دارای رقم ۱ بود، می توان آن را حذف کرد، پس به عددی کوچک‌تر با شرایط مذکور دست خواهیم یافت. پس تنها باید از رقم‌های ۲و۵ استفاده کنیم. در نتیجه با توجه به اینکه می‌خواهیم کم‌ترین ارقام را داشته باشیم (چراکه عددی که دارای رقم‌های بیش‌تر است، بزرگ‌تر است) پس ارقام عبارتند از ۵و۵و۸ که مجموعشان ۲۳ است.

۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

M, L را به ترتیب محل برخورد DE, AK و BE, CD در می‌نظر گیریم

$$\angle CBE = ۹۰ - \angle ECB = ۳۰ \Rightarrow DE||CB$$

$$BKM \sim ELM \Rightarrow \frac{EL}{BK} = \frac{ME}{MB} (I)$$

$$BCM \sim EDM \Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{DE}{BC} (II)$$

$$\text{قضیه تالس} \Rightarrow \begin{cases} \frac{EL}{CK} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{EL}{CK} (III)$$

$$\overset{I,II,III}{\Longrightarrow} \frac{EL}{BK} = \frac{EL}{CK} \Rightarrow BK = CK \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{۱}{۲}$$

۶. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

اگر در یک مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم، ارقام باید ۲و۱ باشند. پس اعداد ۱۲ و ۲۱ می‌باشند.

حال فرض کنید در دو مرحله به عدد ۲ رسیده باشیم. پس حاصل‌ضرب ارقام یا به ۱۲ رسیده یا به ۲۱.(چرا که حاصل‌ضرب ارقام هر عدد دو رقمی، خود عددی حداکثر دو رقمی است) در این حالت باید این دو عدد را به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی بنویسیم. لذا داریم:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

اعداد ۳۴ و ۴۳ به ۱۲ می‌رسند.⇒۴×۳=۱۲

اعداد ۲۶ و ۶۲ به ۱۲ می‌رسند.⇒۶×۲=۱۲

اعداد ۳۷ و ۷۳ به ۲۱ می‌رسند⇒۷×۳=۲۱

تا اینجا ۸ عدد حاصل شده است. اکنون با توجه به اینکه هیچکدام از ۶ عدد مرحله قبل را نمی‌توان به صورت ضرب ۲ عدد یک رقمی نوشت، پس حالت دیگری نمی‌ماند و کار خاتمه یافته است.

۷)گزینه ۵

۱×۲×۳×۴ یعنی ۲۴ عدد داریم که رقم اولشان ثابت باشد. به همین ترتیب ۱×۲×۳ یعنی ۶ عدد نیز داریم که ۲ رقم اولشان ثابت باشد. رقم اول از سمت چپ عدد ۳ است بنابراین ۲×۲۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم(اعدادی که رقم اولشان ۲و۱ بوده) برای رقم دوم از سمت چپ که رقم ۲ می‌باشد نیز ۶ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. پس ۵۴ عدد را پشت سر گذاشته‌ایم. از میان سه رقم باقی‌مانده هم به ترتیب ۱۴۵و۱۵۴و۴۱۵و۴۵۱ یعنی ۴ عدد دیگر باید جلو برویم. پس ۳۲۴۵۱، ۵۸ امین عدد است.

۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مرکز دایره است.O

$$\begin{cases} AA' \perp OA, BB' \perp OB \\ OA = OB \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow OAA' = OBB' \Rightarrow \begin{cases} OA' = OB'(I) \\ \angle AOA' = \angle BOB'(II) \end{cases}$$

$$\angle A'OB' = \angle A'OA + \angle AOB'(III)$$

$$\angle AOB = \angle B'OB + \angle AOB'(IV)$$

(اگر دو مثلث $A'OA$ و $B'OB$ هم پوشانی داشته باشند، علامت جمع فوق، علامت تفریق خواهد شد)

$$\overset{II,III,IV}{\Longrightarrow} \angle A'OB' = \angle AOB(V)$$

$$\overset{I}{\Rightarrow} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}(VI)$$

$$\overset{V,VI}{\Longrightarrow} AOB \sim A'OB'$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB}\ ,\frac{C'A'}{CA} = \frac{OC'}{OC}$$
$$\Rightarrow ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \angle B'A'C' = \angle BAC = ۸۰$$

۹. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$a = \frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$b = \frac{m(m+۱)}{۲}$$
$$a - b = ۱۰۱$$
$$\Rightarrow a - b = \frac{(n-m)(n+m+۱)}{۲}$$
$$\Rightarrow (n-m)(n+m+۱) = ۲۰۲ = ۲ \times ۱۰۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n-m=۱ \\ n+m+۱=۲۰۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=۱۰۱ \\ m=۱۰۰ \end{cases}$$
$$\begin{cases} n-m=۲ \\ n+m+۱=۱۰۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=۵۱ \\ m=۴۹ \end{cases}$$

پس دو دسته جواب دارد.

۱۰. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اگر n عددی طبیعی باشد،در میان $\binom{n}{n}, \dots, \binom{n}{۲}, \binom{n}{۱}, \binom{n}{۰}$، بزرگ‌ترین اعداد $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}, \binom{n}{\lceil \frac{n}{۲} \rceil}$ می باشند.

پس بزرگ‌ترین ضریب $\binom{۱۰۰}{۵۰}$ می باشد.

$$\binom{۱۰۰}{۵۰} = \frac{۱۰۰!}{۵۰!۵۰!} = \frac{۱۰۰ \times ۹۹ \times \dots \times ۱}{(۵۰ \times ۴۹ \times \dots \times ۱)^۲}$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$= ۲^{۵۰}\frac{۹۹ \times ۹۷ \times ... \times ۱}{۵۰ \times ۴۹ \times ... \times ۱} < ۲^{۵۰}\frac{۱۰۰}{۵۰} \times \frac{۹۸}{۴۹} \times ... \times \frac{۲}{۱} < ۲^{۵۰} \times ۲^{۵۰} = ۲^{۱۰۰}$$
$$= ۲ \times (۲^{۳})^{۳۳} < ۲ \times ۱۰^{۳۳} < ۱۰^{۳۴}$$

برای طرف دیگر داریم:

$$\binom{۱۰۰}{۵۰} = ۲^{۵۰}\frac{۹۹ \times ۹۷ \times ... \times ۱}{۵۰ \times ۴۹ \times ... \times ۱} = ۲^{۵۰} \times \frac{۹۹}{۴۹} \times \frac{۹۷}{۴۸} \times ... \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۱}{۵۰}$$

$$> ۲^{۵۰} \times \frac{۹۸}{۴۹} \times \frac{۹۶}{۴۸} \times ... \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۲^{۵۰} \times ۲^{۴۹} \times ۲ \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۰}$$
$$= \frac{(۲^{۱۰})^{۱۰}}{۱۰۰} > \frac{(۱۰^{۳})^{۱۰}}{۱۰۰} = ۱۰^{۲۸}$$

۱۱. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هر قطعه از آن اول است، پس هر قطعه از آن نیز باید بسیار اول باشد. پس دو رقم سمت چپ آن نیز بسیار اول است. حال در صورتیکه با ۲۳ شروع شود، رقم سوم باید ۷ باشد زیرا ۳۷ تنها عدد بسیار اولی است که با ۳ آغاز می‌شود. به همین منوال، تنها اعدادی که می‌توانند بسیار اول باشند عبارتند از: ۲۳۷و ۳۷۳و۵۳۷و۷۳۷ . خود این اعداد نیز باید اول باشند که از این اعداد تنها ۳۷۳ اول است.(دو تا بر ۳ و دیگری بر ۱۱ بخش‌پذیر است)

۱۲. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هیچ یک از احزاب بیش از نصف رای نیاورده است، پس حداکثر تعداد نمایندگان هر حزب ۱۴۲ نفر است. حال اگر از حزب اول ۱۴۲ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموعا از حزب دوم و سوم ۱۴۳ نفر رای آورده‌اند که تعداد آراء حزب دوم از ۱ تا ۱۴۲ می‌تواند باشد(آراء حزب سوم خود به خود تعیین می‌شود.).اگر از حزب اول ۱۴۱ نفر رای آورده باشند، آن‌گاه مجموع آراء دو حزب دیگر ۱۴۴ رای می‌شود و حزب دوم می‌تواند از ۲ تا ۱۴۲ باشد(زیرا اگر ۱ رای داشته باشد حزب سوم ۱۴۳ رای دارد که بیش از نصف است).به همین ترتیب هر بار تعداد حالات یکی کم‌تر می‌شود. بنابراین پاسخ برابر است با:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$۱۴۲ + ۱۴۱ + \cdots + ۱ = \frac{۱۴۲ \times ۱۴۳}{۲} = ۱۰۱۵۳$$

۱۳. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$x - ۱ = yz \Rightarrow x - yz = ۱(I)$$
$$y - ۱ = zx \Rightarrow y - zx = ۱(II)$$
$$\overset{I,II}{\Rightarrow} x - yz = y - zx \Rightarrow x + zx = y + yz \Rightarrow x(۱ + z) = y(۱ + z) \overset{z \neq -۱}{\Longrightarrow} x = y$$

به طریق مشابه اگر $x \neq -۱$ خواهیم داشت $y = z$.پس $x = y = z$.در نتیجه $x - ۱ = x^۲$ که در این حالت جواب حقیقی نداریم.اگر $x = -۱$ در نتیجه $x = y = -۱$ در نتیجه $z - ۱ = ۱$ پس $z = ۲$ که سه تایی $(-۱,-۱,۲)$ در معادله صدق می کند.حال اگر یکی از x, y, z برابر -۱ نباشد،همانند فوق تنها جواب این است که آن مجهول ۲ بوده و دوتای دیگر -۱ باشند.پس بدین ترتیب ۳ جواب زیر را داریم:

$$(-۱,-۱,۲), (-۱,۲,-۱), (۲,-۱,-۱)$$

پس اگر حداقل یکی از مجهولات مخالف -۱ باشد جواب‌ها به صورت فوق خواهند بود. تنها می‌ماند اینکه همه -۱ باشند که این به وضوح جواب نیست. پس ۳ جواب داریم.

۱۴. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

ابتدا به این توجه می‌کنیم که معادله زیر چند جواب مختلف دارد:

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = k, x_i \geq ۱$$

برای حل به این نکته دقت می‌کنیم که حل این معادله به منزله این است که k شی مشابه را به n قسمت افراز کنیم. حال فرض کنید که این k شی کنار هم قرار گرفته‌اند حال برای افراز این اشیاء ،تعداد $n - ۱$ جداکننده بین این اشیاء قرار می‌دهیم. بین این k شی، $k - ۱$ جا برای قرار دادن این جداکننده‌ها وجود دارد.پس پاسخ عبارتست از:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$\binom{k-۱}{n-۱}$$

حال می‌خواهیم این ۵ مهره‌ی سیاه به ۳ قسمت افراز کنیم که این کار را می‌توان به ۶ حالت انجام داد. اما برای قرار دادن مهره‌های سفید می‌دانیم که این مهره‌ها را در ۴ جا (قبل از قسمت اول مهره‌های سیاه، بین قسمت اول و دوم، بین قسمت دوم و سوم و بعد از قسمت سوم) می‌توان قرار داد. به طوری که حتما بین قسمت اول و دوم و قسمت دوم و سوم، حداقل یک مهره سفید قرار داشته باشد. بنابراین داریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۵; x_۱, x_۴ \geq ۰; x_۲, x_۳ \geq ۱$$

که با شرایط مطلوب ما اندکی تفاوت دارد. برای حل این مشکل ترفندی به کار می‌گیریم:

$$x'_۱ = x_۱ + ۱; x'_۴ = x_۴ + ۱$$
$$\Rightarrow x'_۱ + x_۲ + x_۳ + x'_۴ = ۷; x'_۱, x_۳ x_۲, x'_۴ \geq ۱$$

که شرایط مطلوب ماست. بنابراین پاسخ مساله عبارتست از:

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۶}{۳} = ۶ \times ۲۰ = ۱۲۰$$

۱۵. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

با توجه به اینکه عدد فقط عامل ۲ دارد، پس همه ۵ عدد توانی از ۲ هستند. داریم:

$$۲^{۲۷۶} \times ۲^{۲۷۶} \times ۲^{۲۷۷} \times ۲^{۲۷۸} \times ۲^{۲۷۹} = ۲^{۱۳۸۶}$$
$$۲^{۲۷۶} + ۲^{۲۷۶} + ۲^{۲۷۷} + ۲^{۲۷۸} + ۲^{۲۷۹} = ۲^{۲۷۶}(۱ + ۱ + ۲ + ۴ + ۸) = ۲^{۲۸۰}$$

که بیش‌ترین گزینه است.

۱۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\angle MAN = \angle M'AN' = ۳۳ \Rightarrow MN = M'N'$$

P و P' را به ترتیب وسط MN و $M'N'$ می‌نامیم و O مرکز دایره است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$\begin{cases} \angle MON = \angle M'ON' = ۶۶ \\ MO = M'O \\ NO = N'O \end{cases} \Rightarrow MON = M'ON' \Rightarrow \begin{cases} OP = OP' \\ OP \perp MN, OP' \perp M'N' \end{cases}$$

پس وترها همگی از وسط به دایره‌ای به مرکز O مماسند.

۱۷. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$c = ۱ - a - b - d \Rightarrow A = ab + bc + cd = ab + (b + d)(۱ - a - b - d)$$
$$= -ad + (b + d)(۱ - b - d)$$

از طرفی با استفاده از نابرابری حسابی هندسی داریم:

$$(b + d)(۱ - b - d) \leq \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow A = -ad + (b + d)(۱ - b - d) \leq -ad + \frac{۱}{۴} \leq \frac{۱}{۴}$$

پس A کم‌تر مساوی با $\frac{۱}{۴}$ است و به ازای $a = d = ۰, b = c = \frac{۱}{۲}$ مقدار $\frac{۱}{۴}$ را اتخاذ می کند.

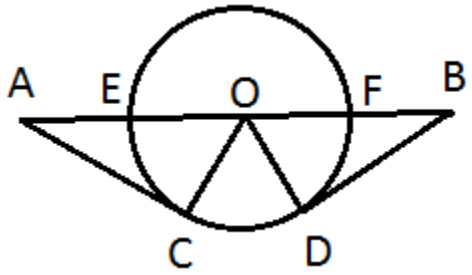
در نتیجه $\frac{۱}{۴}$ جواب مورد نظر است.

۱۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

بهترین مسیر آن است که به دریاچه مماس باشد. در این حالت داریم:

$$AB = ۴ \Rightarrow AO = ۲, OC = ۱$$
$$AC^۲ = AO^۲ - OC^۲ = ۴ - ۱ = ۳ \Rightarrow AC = \sqrt{۳}$$
$$OC = ۱, AO = ۲ \Rightarrow OC = \frac{۱}{۲}AO \Rightarrow \angle OAC = ۳۰ \Rightarrow \angle AOC = ۶۰ \Rightarrow \angle DOB = ۶۰$$
$$\Rightarrow \angle COD = ۶۰$$
$$\Rightarrow \text{کمان} DC = ۲\pi(\text{شعاع}) \times \frac{۶۰}{۳۶۰} = ۲\pi \times ۱ \times \frac{۱}{۶} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \quad \text{جواب} = ۲\sqrt{۳} + \frac{\pi}{۳}$$

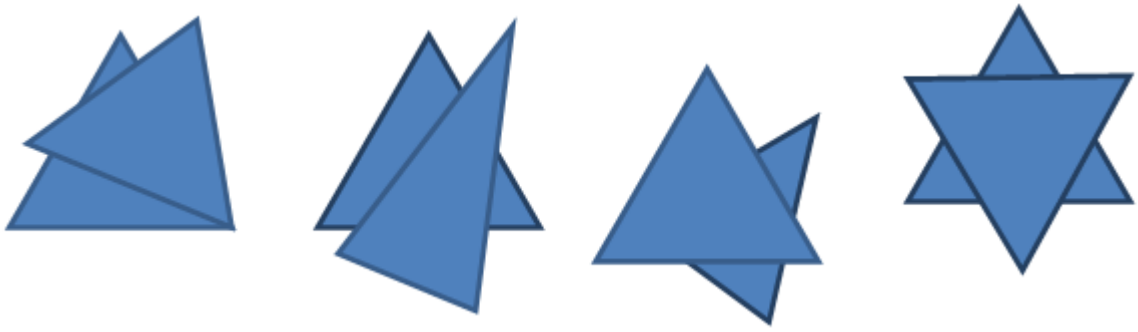
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



۱۹. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

اضلاع هر مثلث شامل وترهایی می‌شود که رئوس آن‌ها روی دایره‌اند. از طرفی می‌توان هر ضلع مثلث را با تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی که میان دو راس آن ضلع قرار دارند،مقایسه کرد. پس مثلث‌ها به صورت زیر هستند: (۸و۱و۱)،(۷و۲و۱)،(۶و۳و۱)،(۵و۴و۱)،(۶و۲و۲)،(۵و۳و۲)،(۴و۴و۲)،(۴و۳و۳) (اعداد نشان‌گر تعداد اضلاعی از ۱۰ ضلعی هستند که میان دو راس مثلث قرار گرفته‌اند.)

۲۰. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



اشکال فوق مثال‌هایی برای ۱۲،۹،۱۰و۸ ضلع می‌باشند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۱. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

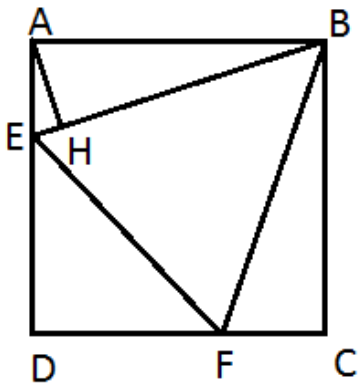
جعبه‌ها را از کوچک به بزرگ به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۶ شماره گذاری می‌کنیم. جعبه شماره ۵ به یک صورت درون جعبه۶ قرار می‌گیرد. حال برای قرار دادن جعبه ۴، دو حالت داریم، یکی درون جعبه ۵ و یکی بیرون آن. به همین ترتیب هر جعبه‌ای که اضافه می‌شود، یک فضا به فضاهای ممکن برای قرار دادن جعبه بعدی اضافه می‌کند. پس در کل ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰ حالت داریم.

۲۲. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$f(۰) \le ۲ \Rightarrow b \le ۲$$
$$f(۱) \ge ۰ \Rightarrow ۰ \le a + b (I)$$
$$f(۲) \le ۴ \Rightarrow ۲a + b \le ۴ (II)$$
$$\xrightarrow{(I),(II)} a \le ۴ \Rightarrow ۸a \le ۳۲ \xrightarrow{(II)} ۱۰a + b \le ۳۶ \Rightarrow f(۱۰) \le ۳۶$$

حالت تساوی به ازای $a = ۴$ و $b = -۴$ حاصل می‌شود.

۲۳. گزینه‌ی ۵ صحیح است.



$$\begin{cases} \angle A = \angle C = ۹۰ \\ BE = BF \\ AB = BC \end{cases} \Rightarrow ABE = CBF \Rightarrow AE = CF \Rightarrow DF = DE$$

$$\angle ABE = \angle CBF = \frac{۹۰ - ۶۰}{۲} = ۱۵ \Rightarrow AH = \frac{۱}{۴} BE$$

$$BE = BF = EF = l$$

$$DE = DF = \frac{\sqrt{۲}}{۲} l$$

$$S_{ABCD} = ۲S_{ABE} + S_{BEF} + S_{DEF}$$

$$\Rightarrow ۱ = AH.BE + \frac{\sqrt{۳}}{۴} BE^{۲} + \frac{۱}{۲} DE^{۲}$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$\Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۴}l^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}l^۲ + \frac{۱}{۴}l^۲ \Rightarrow l^۲ = \frac{۴}{۲+\sqrt{۳}}$$

$$S_{BEF} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}l^۲ \Rightarrow S_{BEF} = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}$$

۲۴. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$$AB^۲ + AD^۲ = BD^۲ \Rightarrow BD = \sqrt{۵}$$

H را پای ارتفاع Aمی گیریم

$$S_{ABCD} = AB \times AD = AH \times BD \Rightarrow AH = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$AP = AC = BD = \sqrt{۵}$$

$$AH^۲ + PH^۲ = AP^۲ \Rightarrow PH = \sqrt{\frac{۲۱}{۵}}$$

$$PQ = ۲PH \Rightarrow PQ = \sqrt{\frac{۸۴}{۵}}$$

۲۵. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$۲^x + ۲x^۲ = y^۲$$

$$x^۲, y^۲ \in \mathbb{Z} \Rightarrow ۲^x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq ۰$$

$$x = ۰ \Rightarrow ۱ + ۰ = y^۲ \Rightarrow y = \pm ۱$$

حال فرض کنید $x = ۲^k m$ که m عددی فرد است.

$$\Rightarrow ۲^{۲^k m} + ۲^{۲k+۱}m^۲ = y^۲$$

$$m = ۱ \Rightarrow ۲^{۲^k} + ۲^{۲k+۱} = y^۲$$

$$(I) ۲^k > ۲k+۱ \Rightarrow ۲^{۲k+۱}\left(۲^{۲^k - ۲k - ۱} + ۱\right) = y^۲$$

چون $۲^{۲k+۱}$ و $۲^{۲^k-۲k-۱} + ۱$ نسبت به هم اولند،پس هر دو باید مربع کامل باشند. اما $۲^{۲k+۱}$ نیست.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$(II)\ ۲^k \le ۲k+۱ \Rightarrow k \le ۲ \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \Rightarrow ۲+۲=y^۲ \Rightarrow y=\pm ۲ \\ k=۱ \Rightarrow ۴+۸=y^۲ \text{ در اعداد صحیح جواب ندارد} \\ k=۲ \Rightarrow ۱۶+۳۲=y^۲ \text{ در اعداد صحیح جواب ندارد} \end{cases}$$

$$(III)\ m \ge ۳ \Rightarrow ۲^k m \ge ۳ \times ۲^k > ۲k+۱$$

$$\Rightarrow ۲^{۲k+۱}\left(۲^{۲^k m-۲k-۱}+m^۲\right)=y^۲$$

که همانند بالا جواب نخواهد داشت(چون $۲^{۲^k m-۲k-۱}+m^۲$ فرد است). پس ۴ تا جواب داریم.

۲۶. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مرکز دایره را O می‌نامیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} OM_۱ \perp AD \\ OM_۲ \perp BC \\ OM_۳ \perp PQ \end{cases} \Rightarrow OM_۱M_۲N, OM_۱NM_۳ \text{ محاطی}$$

با توجه به این که از هر سه نقطه یک دایره می‌گذرد.

$$\Rightarrow M_۱M_۲NM_۳ \text{ محاطی} \Rightarrow \angle M_۱M_۲M_۳ = \angle M_۱NM_۳ \Rightarrow\Rightarrow \angle M_۱M_۲M_۳ = ۴۰ \blacksquare$$

۲۷. گزینه‌ی ۵ صحیح است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که این عدد حتما متناوب است. برای این کار کافیست ثابت کنیم که دو رقم اول پس از تعدادی مرحله به تکرار می‌افتد. حال برای یافتن دو رقم اول کافیست که عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم و باقی‌مانده همان دو رقم اول خواهد بود. فرض کنید ۱۰۱ مرحله گذشته باشد. با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به اینکه باقی‌مانده بر ۱۰۰ از ۰ تا ۹۹ (۱۰۰عدد) مختلف می‌تواند باشد، پس حداقل دو عدد یکسان در این ۱۰۰ عدد پیدا می‌شود. با توجه به اینکه هر بار در عدد ثابتی ضرب می‌کنیم لذا اعداد بعدی این دو نیز برابر خواهند بود و همین طور دو تای بعدیشان (منظور به هنگ ۱۰۰ آنهاست) و ... پس عدد اعشاری حتما متناوب است و با عنایت به این موضوع که این عدد اعشاری برای عدد ۲۰ متناوب مرکب و برای عدد ۱۰۰ متناوب ساده است، گزینه‌ی ۵ صحیح خواهد بود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

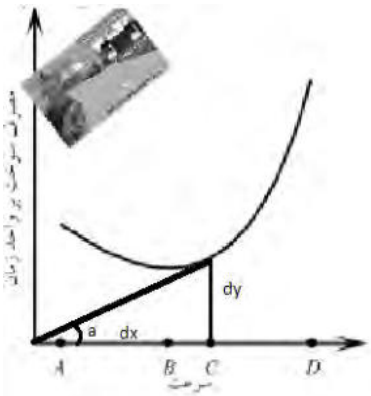
۲۸. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

دو وجه روبروی هم را در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد این وجوه یکی a و دیگری b باشد. فرض کنید اعداد چهار وجه دیگر زمانی که از وجه با عدد a به مکعب می نگیریم، به ترتیب c, d, e, f باشد.در نتیجه مجموع اعداد رئوس روی وجه a برابر خواهد بود با $a(cd + de + ef + fc)$.به طریق مشابه مجوع اعداد رئوس روی وجه با عدد b نیز $b(cd + de + ef + fc)$ خواهد بود. پس مجموع اعداد رئوس مکعب برابر است با= ۲۳۱

$$(a + b)(c + e)(d + f) = (a + b)(cd + de + ef + fc)$$

از طرفی با توجه به اینکه ۲۳۱ برابر ۱۱×۷×۳ است و اینکه مجموع اعداد دو وجه مقابل از ۱ بیش‌تر است، مجموع اعداد وجوه مقابل ۳ و ۷ و ۱۱ خواهد بود. پس مجموع اعداد وجوه مکعب برابر ۱۱+۷+۳ یعنی ۲۱ خواهد بود.

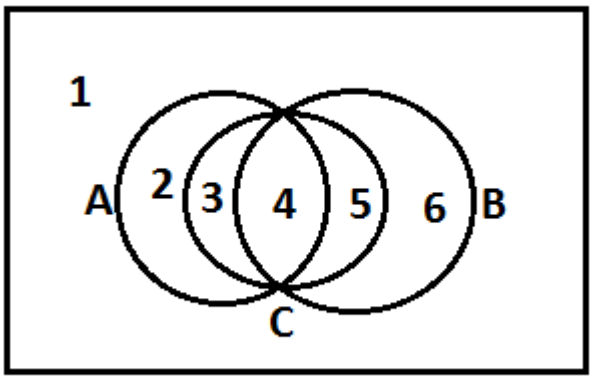
۲۹. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



با توجه به اینکه نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی(تانژانت زاویه) نشان‌گر مصرف سوخت بر مسافت است با عنایت به این موضوع که ما می‌خواهیم این مقدار به حداقل برسد(با توجه به شکل) بنابراین نقطه سوم به‌ترین نقطه می‌باشد.

$$\tan a = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{زمان}}}{\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}} = \frac{\text{مصرف سوخت}}{\text{مسافت}}$$

۳۰. گزینه‌ی ۵ صحیح است.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سه مجموعه‌ی مورد نظر به صورت ذیل می‌باشند و هر کدام از اعداد در یکی از ۶ جای اشاره شده در شکل می‌توانند باشند. پس پاسخ $۶^۵$ برابر ۷۷۷۶ خواهد بود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

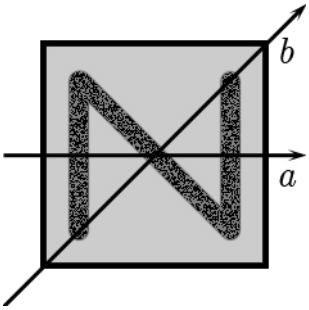
مرحله اول پانزدهمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۱) چند تا از اعداد $3\sqrt{11}$، $4\sqrt{7}$، $5\sqrt{5}$، $6\sqrt{3}$ و $7\sqrt{2}$ از ۱۰ بزرگ‌تر است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲) کارت مربعی مقابل را اول به اندازه ۱۸۰ درجه حول محور a و سپس ۱۸۰ درجه حول محور b می‌چرخانیم. کدام وضعیت به دست می‌آید؟

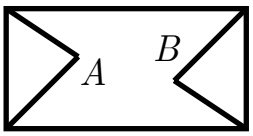


الف)  ب)  ج)  د)  ه) 

۳) کدام عدد در غربال اراتستن برای مشخص کردن اعداد اول کوچک‌تر از ۵۰۰۰ دیرتر حذف می‌شود؟

الف) ۳۲۵۶ ب) ۴۱۴۱ ج) ۳۵۵۳ د) ۳۸۰۱ ه) ۴۱۴۵

۴) در شکل مقابل، به شرطی که مجاز نباشیم از یک نقطه بیش از یک بار عبور کنیم، چند راه برای رسیدن از A به B وجود دارد؟



الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۲

۵) A، B، C و D مجموعه‌هایی هستند که در روابط روبه‌رو صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟

$$\begin{cases} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = (B \cap C) \cup D \end{cases}$$

الف) $D = \varnothing$ ب) $C = D$ ج) $A \subseteq B$

د) $A = B \cup D$ ه) $D = A \cap B$

۶) دو دونده با سرعت‌های ۵ و ۷ متر بر ثانیه دور پیست دایره‌ای به محیط ۱۰۰ متر شروع به دویدن می‌کنند. این دو تا دقیقه یازدهم، به جز لحظه اول، چند بار از کنار هم رد می‌شوند؟

الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۱۴ د) ۱۵ ه) ۱۶

۷) حاصل‌ضرب سن بچه‌های کوکب خانم ۱۶۶۴ است. سن بزرگ‌ترین بچه دو برابر سن کوچک‌ترین بچه است. کوکب خانم چند فرزند دارد؟ (سن بچه‌ها عددی صحیح است.)

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۸) چند خط در صفحه وجود دارد که یک مستطیل ۲×۵ داده شده را به دو مستطیل متشابه تقسیم کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول پانزدهمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۹) A، B، C و D چهار رقم متمایز از بین $\{۰,۱,\ldots,۹\}$ هستند و می‌دانیم که جمع روبه‌رو درست است. $A+B+C+D$ کدام است؟

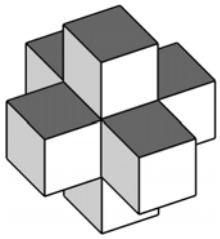
$$\begin{array}{r} BAA \\ +BA \\ \hline CDAD \end{array}$$

الف) ۷ ب) ۱۵ ج) ۱۹ د) ۲۲ ه) ۲۸

۱۰) مجموع مساحت و محیط مستطیلی ۱۴۰ شده است. مساحت آن حداکثر چه‌قدر است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۷۰ ج) ۸۰ د) ۶۰ ه) هیچ کدام

۱۱) هفت تاس را به شکل مقابل به هم چسبانده‌ایم، به نحوی که دو وجه به هم چسبیده‌شده هم‌عدد هستند. جمع اعداد وجوهی که از بیرون قابل مشاهده هستند چند است؟ (تاس مکعبی است که روی وجوهش اعداد یک تا شش نوشته شده است.)



الف) ۹۵ ب) ۱۰۲ ج) ۱۰۵ د) ۱۱۲ ه) ۱۲۶

۱۲) چند عدد چهار رقمی $\overline{abab}$ کم‌تر از ۴۰۰۰ وجود دارد که دقیقاً چهار مقسوم‌علیه داشته باشد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۱۳) فرض کنید در مستطیل $ABCD$، نقاط M و N پای عمودهای وارد از A و C بر قطر BD اند. اگر اضلاع مستطیل برابر با ۱ و ۳ باشد مساحت چهارضلعی $AMCN$ چند است؟

الف) $\frac{۸}{۵}$ ب) $\frac{۶}{\sqrt{۱۰}}$ ج) ۲ د) $\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}$ ه) $\frac{۱۲}{۵}$

۱۴) در اتاقی ۵×۵ حداکثر چند کاشی ۳×۱ می‌توان قرار داد؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۱۵) توپ فوتبال از قطعات چرمی سیاه و سفید ساخته شده است. قطعات سیاه پنج‌ضلعی منتظم و قطعات سفید شش‌ضلعی منتظم‌اند. هر پنج‌ضلعی با پنج شش‌ضلعی و هر شش‌ضلعی با سه پنج‌ضلعی و سه شش‌ضلعی احاطه شده است. دوازده قطعه سیاه در توپ به کار رفته است. توپ چند قطعه سفید دارد؟

الف) ۳۰ ب) ۲۸ ج) ۲۰ د) ۱۵ ه) ۱۰

۱۶) به چند طریق می‌توان هفت تا از اعداد ۱ تا ۹ را انتخاب کرد که جمع آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

الف) کم‌تر از ۱۰ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) بیش از ۱۲

۱۷) $۳^{۴۰}$ در مبنای ده چند رقمی است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۸ ج) ۱۹ د) ۲۰ ه) ۲۱

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

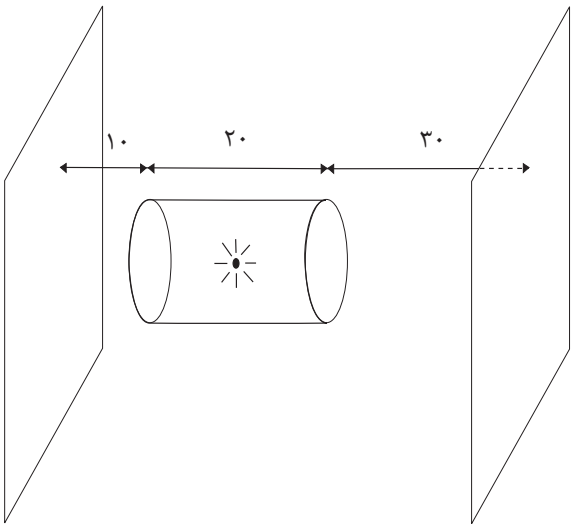
مرحله اول پانزدهمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۱۸) فاصله نقطه‌ای روی دایره محاطی یک مربع از دو ضلع نزدیک‌تر مربع برابر ۱ و ۲ است. طول ضلع مربع چند است؟ (دایره‌ای محاطی دایره‌ای است که از داخل بر اضلاع مربع مماس است.)

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۱

۱۹) در وسط لوله‌ای استوانه‌ای شکل به طول ۲۰ سانتیمتر لامپی روشن است. در دو طرف لوله دو پرده به فاصله‌های ۳۰ و ۱۰ سانتیمتر قرار گرفته‌اند. نسبت مساحت ناحیه‌های روشن روی دو پرده برابر است با:



الف) ۳ د) ۸

ب) ۴ ه) ۹

ج) ۶

۲۰) به چند راه می‌توان ۱۱ خانه جدولی ۲×۱۲ را سیاه کرد که دو خانه سیاه ضلع مشترک نداشته باشند؟

الف) ۴۲ ب) ۴۴ ج) ۴۶ د) ۴۸ ه) ۵۰

۲۱) حجم مجموعه (x, y, z)هایی در فضای سه‌بعدی که در شرایط زیر صدق کنند چه‌قدر است؟

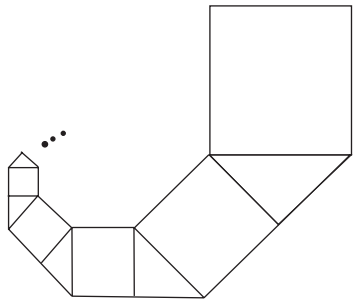
$$۰ \le x, y \le ۲ \text{ ،} ۰ \le z \le ۳ \text{ و } x + y + z \le ۴$$

الف) $\frac{۸}{۳}$ ب) $\frac{۴۷}{۶}$ ج) $\frac{۵}{۳}$ د) $\frac{۱۶}{۳}$ ه) ۴

۲۲) به چند شکل می‌توان در جدولی ۳×۳، سه مهره سفید و سه مهره سیاه طوری قرار داد که در هر سطر و در هر ستون یک مهره سفید و یک مهره سیاه وجود داشته باشد؟

الف) ۶ ب) ۱۲ ج) ۱۸ د) ۲۴ ه) ۳۶

۲۳) در شکل مقابل چهارضلعی‌ها، مربع و مثلث‌ها، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند. اگر مساحت هشتمین مربع یک باشد طول ضلع مربع اول چه‌قدر است؟



الف) ۳۲ ب) ۱۶ ج) $۸\sqrt{۲}$ د) $۴\sqrt{۲}$ ه) ۴

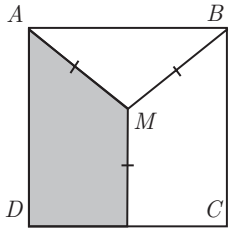
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول پانزدهمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۲۴) در شکل روبرو ضلع مربع ۱ است و نقطه M از رأس A، رأس B و ضلع DC به یک فاصله است. مساحت چهارضلعی مشخص‌شده چند است؟



الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۵}$ ج) $\frac{۱۳}{۳۰}$ د) $\frac{۱۳}{۳۲}$ ه) $\frac{۷}{۱۵}$

۲۵) در یک امتحان تستی ۳۰ سؤالی، هر پاسخ صحیح چهار نمره و هر پاسخ غلط یک نمره منفی دارد. اگر نمره یکی از شرکت‌کنندگان ۸۹ باشد او چند سؤال را بدون پاسخ رها کرده است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۶) فرض کنید $x,y,z \in [-۱,۱]$ و $x+y+z=۰$. بیش‌ترین مقدار ممکن xyz چند است؟

الف) $\frac{۱}{۲۷}$ ب) $\frac{۱}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) ۱

۲۷) از بین پاره‌خط‌های بین نقاط زیر چه تعدادی محور xها را قطع می‌کنند؟

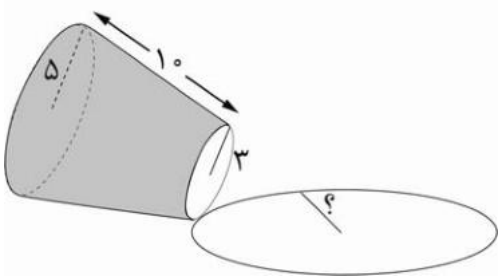
$(۱۴,۱۹)$ $(۱۹,-۳۶)$ $(۵,۲۵)$ $(-۹,۱)$ $(-۴,-۳)$ $(۳,۳۰)$ $(۲۵,-۵)$ $(۱۲,-۷)$ $(۱۰۳,۸)$ $(-۱۵,۶)$

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۱۶ د) ۲۱ ه) ۲۴

۲۸) به چند شکل می‌توان وجوه یک مکعب را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرد به طوری که از هر دو رنگ استفاده شود؟ دو رنگ‌آمیزی را که با دوران مکعب به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض کنید.

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۳۲

۲۹) مخروط ناقصی به شکل روبه‌رو روی زمین می‌غلطد و به جای اولیه‌اش بازمی‌گردد. اگر شعاع قاعده‌های مخروط، ۳ و ۵ و طول یال آن ۱۰ باشد، شعاع دایره‌ای که قاعده کوچک‌تر مخروط طی می‌کند چه‌قدر است؟



الف) ۳ ب) ۵ ج) ۱۰ د) ۱۵ ه) ۲۰

۳۰) مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ مفروض است. کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع فاصله‌های یک نقطه درون آن مثلث با اضلاع آن برابر است با:

الف) $\frac{۷}{۲}$ ب) $\frac{۱۲}{۵}$ ج) $\frac{۶}{۵}$ د) $\frac{۱۰}{۳}$ ه) ۳

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

۱) A، B و C سه رقم متمایز از بین $\{۰,۱,\ldots,۹\}$ هستند و می‌دانیم که جمع روبه‌رو درست است. $A+B+C$ کدام است؟

$$\begin{array}{r} CAAB \\ +BAA \\ \hline ACBC \end{array}$$

الف) ۷ ب) ۱۶ ج) ۱۹ د) ۲۱ ه) ۲۴

۲) چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محور xها را قطع می‌کنند؟

$$۴,۹\ ,\ -۱۱,۱۹\ ,\ ۵,۱۵\ ,\ -۹,۱\ ,\ -۱,-۳\ ,\ ۳,۲\ ,\ ۵,-۵\ ,\ ۱۲,-۷\ ,\ ۷,۸\ ,\ -۱۵,۶$$

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۱۶ د) ۲۱ ه) ۲۴

۳) مجموع مساحت و محیط مستطیلی ۱۴۰ شده است. مساحت آن حداکثر چه‌قدر است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۷۰ ج) ۸۰ د) ۶۰ ه) هیچ کدام

۴) چند عدد چهاررقمی به شکل $\overline{abab}$ وجود دارد که دقیقاً چهارده مقسوم‌علیه داشته باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) چنین عددی وجود ندارد.

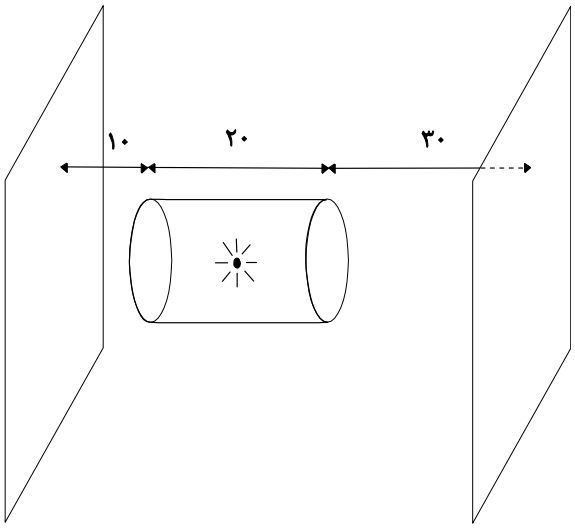
۵) چند عدد سه رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟

الف) ۶۴۸ ب) ۷۲۰ ج) ۷۲۹ د) ۸۱۰ ه) ۹۰۰

۶) چند خط در صفحه وجود دارد که یک مستطیل ۵×۲ داده‌شده را به دو مستطیل متشابه تقسیم کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۷) وسط لوله‌ای استوانه‌ای شکل به طول ۲۰ سانتی‌متر لامپی روشن است. در دو طرف لوله دو پرده به فاصله‌های ۳۰ و ۱۰ سانتی‌متر قرار گرفته است. نسبت مساحت ناحیه‌های روشن روی دو پرده چند است؟



الف) ۳ د) ۸

ب) ۴ ه) ۹

ج) ۶

۸) در یک امتحان تستی ۳۰ سؤالی، هر پاسخ صحیح چهار نمره و هر پاسخ غلط یک نمره منفی دارد. اگر نمره یکی از شرکت‌کنندگان ۸۹ باشد، او چند سؤال را بدون پاسخ رها کرده است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

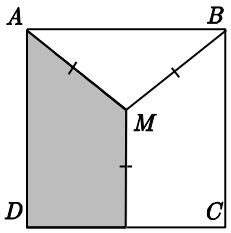
۹) حجم هشت‌وجهی‌ای که رأس‌هایش مرکزهای وجه‌های مکعبی به ضلع یک است، چند است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۶}$ د) $\frac{۱}{۸}$ ه) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۰) کدام عدد در غربال اراتستن، برای مشخص کردن اعداد اول کوچک‌تر از ۵۰۰۰، دیرتر حذف می‌شود؟

الف) ۳۲۵۶ ب) ۴۱۴۱ ج) ۳۵۵۳ د) ۳۸۰۱ ه) ۴۱۴۵

۱۱) در شکل روبه‌رو ضلع مربع $ABCD$، یک است و نقطه M از رأس A، رأس B و ضلع DC به یک فاصله است. مساحت چهارضلعی مشخص‌شده چند است؟



الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۵}$ ج) $\frac{۱۳}{۳۰}$ د) $\frac{۱۳}{۳۲}$ ه) $\frac{۷}{۱۵}$

۱۲) فرض کنید $x,y,z \in [-۱,۱]$ و $x+y+z=۰$. بیش‌ترین مقدار ممکن xyz چند است؟

الف) $\frac{۱}{۲۷}$ ب) $\frac{۱}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) ۱

۱۳) $۱-۲^{۲^{۵}}$ برابر کدام گزینه است؟

الف) ۴۲۹۴۹۶۹۲۸۵ ب) ۴۲۹۴۹۶۴۱۵۵ ج) ۴۲۹۴۹۶۳۳۳۵ د) ۴۲۹۴۹۶۸۰۱۵ ه) ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵

۱۴) به چند شکل می‌توان وجوه یک مکعب را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کرد به طوری که از هر دو رنگ استفاده شود؟ دو رنگ‌آمیزی را که با دوران مکعب به هم تبدیل می‌شوند یکی فرض کنید.

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۳۲

۱۵) مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ مفروض است. کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع فاصله‌های یک نقطه درون آن مثلث با اضلاع آن چند است؟

الف) $\frac{۷}{۲}$ ب) $\frac{۱۲}{۵}$ ج) $\frac{۶}{۵}$ د) $\frac{۱۰}{۳}$ ه) ۳

۱۶) A، B، C و D مجموعه‌هایی هستند که در روابط روبه‌رو صدق می‌کنند. کدام گزینه لزوماً درست است؟

$$\begin{cases} A \bigcup C = B \bigcup C \\ A \bigcap C = B \bigcap C \bigcup D \end{cases}$$

الف) $D=\varnothing$ ب) $C=D$ ج) $A \subseteq B$
د) $A=B \bigcup D$ ه) $D=A \bigcap B$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

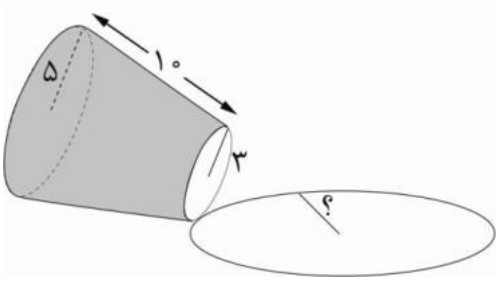
۱۷) A ماتریسی ۱۰×۱۰ است که درایه‌هایش صفر یا یک هستند. می‌دانیم $A^۲ = ۰$. ماتریس A حداکثر چند یک دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۹ د) ۲۵ ه) ۴۵

۱۸) به چند راه می‌توان ۱۱ خانه جدولی ۲×۱۲ را سیاه کرد که دو خانه سیاه، ضلع مشترک نداشته نباشند؟

الف) ۴۲ ب) ۴۴ ج) ۴۶ د) ۴۸ ه) ۵۰

۱۹) مخروط ناقصی به شکل روبه‌رو روی زمین می‌غلطد و به جای اولیه‌اش بر می‌گردد. اگر شعاع قاعده‌های مخروط، ۳ و ۵ و طول یال آن ۱۰ باشد، شعاع دایره‌ای که قاعده کوچک‌تر مخروط طی می‌کند چه‌قدر است؟



الف) ۳ ب) ۵ ج) ۱۰ د) ۱۵ ه) ۲۰

۲۰) معادله $\sin^۲(۲۴x) + \sin^۲(۳۲x) = ۰$ در بازه $[۰, \pi]$ چند جواب دارد؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

۲۱) $۳^{۴۰}$ در مبنای ده چند رقمی است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۸ ج) ۱۹ د) ۲۰ ه) ۲۱

۲۲) فاصله نقطه‌ای روی دایره محاطی یک مربع، از دو ضلع نزدیک‌تر مربع برابر ۱ و ۲ است. طول ضلع مربع چند است؟ (دایره‌ای محاطی دایره‌ای است که از داخل بر اضلاع مربع مماس است.)

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۱

۲۳) تعداد جواب‌های معادله $x^۲ + x + ۸ = y^۲$ در مجموعه اعداد طبیعی چند است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۲۴) در اتاقی ۵×۵ حداکثر چند کاشی ۳×۱ می‌توان قرار داد؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۲۵) A و B دو ماتریس هستند که $AB = B$ و $BA = A$. کدام گزینه برابر $(A + B)^۲$ است؟

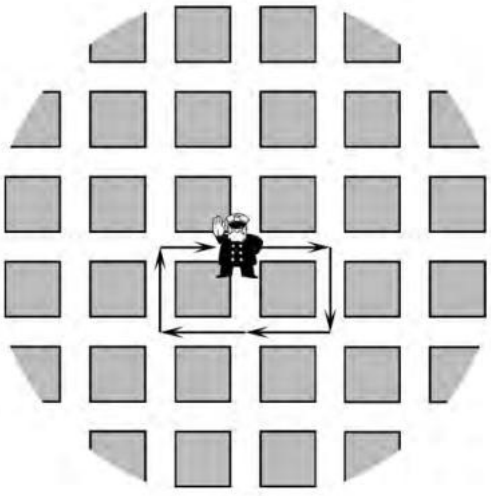
الف) $۲A^۲ + ۲A$ ب) $۴A^۲$ ج) $۴A$ د) $۲(A + B)$ ه) $A^۲ + ۲AB + B^۲$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان



۲۶) پاسبانی می‌خواهد با شروع از تقاطعی که کلانتری در نبشش واقع شده است، یک ساعت در خیابان‌ها قدم بزند و در نهایت به کلانتری برگردد. اگر خیابان‌ها به شکل یک شبکه مربعی، مانند تصویر روبه‌رو، باشد و طی کردن هر خیابان ده دقیقه طول بکشد، این کار به چند طریق ممکن است؟ پاسبان تنها سر تقاطع ممکن است مسیرش را تغییر دهد و ممکن است از جلوی کلانتری و یا از یک خیابان چند بار عبور کند.

الف) ۶۴ ب) ۳۶۰ ج) ۴۰۰

د) ۱۲۹۶ ه) ۴۰۹۶

۲۷) برای کدام عدد طبیعی n هیچ کدام از اعداد $n, ۲n, ۳n, \ldots, ۱۰۰۰n$ مربع کامل نیست؟

الف) ۱۷۸۵۰ ب) ۸۶۴۹ ج) ۳۲۹۲ د) ۲۶۰۷ ه) ۲۰۳۶

۲۸) معادله $x^{۲} = \left\lfloor x^{۳} \right\rfloor$ چند جواب دارد؟ ($[x]$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۹) یک مستطیل کاغذی به طول ۵ و عرض ۱ را به گونه‌ای تا می‌کنیم که دو سر یک قطر آن روی هم قرار گیرند. مساحت ناحیه یک‌لایه چقدر است؟

الف) ۰ ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) ۲ د) $\frac{۶}{۵}$ ه) $\frac{۱۲}{۵}$

۳۰) در مسابقات کشتی پهلوانی ۹ نفر دوبه‌دو مسابقه داده‌اند. حداکثر چند نفر بیش از ۴ مسابقه را برده‌اند؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۵

کد سوالات: ۲

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر فرض ارقام سمت چپ دو عدد $CAAB$ و $ACBC$ متفاوت هستند. پس لزوما $A = C + 1$. همچنین با توجه به ردیف‌های اول و سوم از سمت راست می‌توان گفت که $A + B = 10 + C$. از ردیف دوم (از سمت راست) هم می‌توان متوجه شد که $2 \times A + 1 = B$. حال به راحتی می‌توان این سه رقم را مشخص کرد.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر a و b طول و عرض مستطیل مفروض باشد:

$$ab + 2(a + b) = 140 \text{ و } (a + b)^2 - 4ab \geq 0 \Rightarrow$$

$$ab + 4\sqrt{ab} \leq 140 \Rightarrow \left(\sqrt{ab} + 2\right)^2 \leq 144 \Longrightarrow ab \leq 10$$

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اشعه‌های نوری نواحی دایره شکل روی پرده ایجاد می‌کنند که شعاع آن‌ها بنابر رابطه‌ی تالس، به دست خواهد آمد. در نتیجه شعاع دایره‌ی تشکیل شده در پرده‌ی سمت چپ برابر دو برابر شعاع استوانه و در پرده دیگر چهار برابر شعاع استوانه است.

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

می‌دانیم $\overline{abab} = 101 \times \overline{ab}$ و ۱۰۱ عددی اول است. پس $\overline{ab}$، ۷ مقسوم علیه دارد و بنابر رابطه‌ی تعداد مقسوم علیه‌ها(تعداد مقسوم علیه‌های عدد به شکل ${p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\cdots{p_k}^{\alpha_k}$ که $p_1, p_2, \cdots, p_k$ اعدادی اول هستند برابر است با$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$) می‌توان گفت که تنها عدد ۶۴ این خاصیت را داراست.

۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای رقم اول ۹ حالت ممکن است. برای رقم دوم هم با توجه به انتخاب رقم اول، ۹ حالت ممکن است. برای رقم سوم هم به همین ترتیب ۹ حالت ممکن است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که پاره‌خط واصل بین دو نقطه یک خط را هنگامی قطع می‌کند که آن دو نقطه در دو طرف آن خط حضور داشته باشند. در این سوال در دو طرف خط بودن بدین معنا است که یکی دارای مولفه‌ی y منفی و دیگری دارای مولفه‌ی y مثبت باشد.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

دو خط هستند که یکی طول و دیگری عرض را نصف می‌کنند. همچنین دو خط موازی عرض مستطیل(یکی در سمت چپ و دیگری در سمت راست خط نصف‌کننده‌ی طول مستطیل که طول مستطیل را به نسبت $1:4$ تقسیم می‌کنند.) وجود دارند که این خاصیت را دارند.

۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر a تعداد پاسخ‌های صحیح و b تعداد پاسخ‌های نادرست او باشد، می‌دانیم

$$a, b \in \mathbb{N} \text{ و } a + b \leq 30 \text{ و } 4a - b = 89$$

پس تنها جواب‌های ممکن $a = 23$ و $b = 3$ است.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بنابر الگوریتم غربال اراتستن، عددی که کوچک‌ترین مقسوم علیه اولش از سایر گزینه‌ها بیش‌تر باشد، دیرتر حذف می‌شود. کوچک‌ترین مقسوم علیه اول گزینه‌ها به ترتیب برابر $2, 41, 11, 3, 5$ است.

۱۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح در حالتی که دوتا از این اعداد مثبت هستند، حاصل‌ضرب منفی است. پس می‌توان فرض کرد که دو تا از این اعداد مانند x و y منفی هستند و z مثبت. حال می‌توان نشان داد که $xyz \leq \frac{z^3}{4}$.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که $2^{2^5} \equiv 256^4 \equiv 36^2 \equiv 96 (mod\ 100)$.

برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید amoozz.ir @sampaadia

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

در حالتی که دو وجه آبی باشند، تنها دو حالت متفاوت داریم. یکی اینکه دو وجه روبرو باشند و دیگری آن که دو وجه آبی مجاور باشند. به همین ترتیب نیز دو حالت برای دو وجه قرمز داریم. اگر سه وجه آبی داشته باشیم نیز دو حالت برای آن‌ها ممکن است. یکی آن که سه وجه آبی در یک رأس مشترک باشند. در این حالت سه وجه قرمز نیز در رأس روبرو به این رأس مشترک هستند. یا این که دو وجه از این سه وجه روبه روی هم باشند و سومی بین این دو قرار بگیرد. دو حالت هم مربوط به زمانی است که تنها یک وجه آبی یا تنها یک وجه قرمز داشته باشیم.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$A \cap C = (B \cap C) \cup D \Longrightarrow A = (A \cap C) \cup A \backslash C = (B \backslash C) \cup \big((B \cap C) \cup D\big) \\ = B \cup D$$

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث باشد. اضلاع این مثلث در شرط فیثاغورس برای مثلث‌های قائم‌الزاویه صدق می‌کند. پس مثلث مذکور قائم‌الزاویه است. حال نقطه‌ی P را بر ضلع به طول ۳ تصویر کنید و نام نقطه را Q بگذارید. می‌توان نشان داد که مجموع فواصل Q از سه ضلع از این مجموع برای P کم‌تر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مجموع این فواصل برای رأس قائمه‌ی مثلث از Q کم‌تر است. پس کم‌ترین مجموع فواصل را رأس قائمه‌ی مثلث دارد.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

این هشت وجهی در واقع از یک مربع به قطر ۱ و دو نقطه به فواصل $\frac{1}{2}$ از این مربع در بالا و پایین آن تشکیل شده است. در واقع اجتماع دو هرم مربع القاعده به سطح قاعده $\frac{1}{2}$ و ارتفاع $\frac{1}{2}$ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید H پای عمود از M بر AB باشد. اکنون با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث BMH، طول BM به راحتی محاسبه می‌شود. از طرفی در ذوزنقه $AMND$ مساحت برابر است با $\frac{1}{4}(1+MN)$.

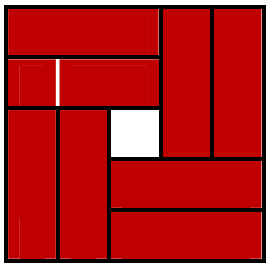
۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

بنابر شرط ماتریس A، اگر در سطر iام ماتریس ۱ داشته باشیم، در ستون iام نمی‌توانیم ۱ داشته باشیم و بالعکس. فرض کنید در t سطر درایه ۱ وجود داشته باشد. پس در t ستون هیچ درایه ۱ای وجود ندارد. پس حداکثر $t(10-t) \leq 25$ درایه ۱ می‌توانیم داشته باشیم. برای حالت تساوی هم ماتریسی را در نظر بگیرید که تمامی خانه‌های ربع بالا سمت راست آن ۱ باشد.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

طبق قضیه‌ی تالس اگر شعاع خواسته شده r باشد، $\frac{3}{5} = \frac{r}{r+10}$.

۱۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.



۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

به وضوح اگر x ریشه‌ی این معادله باشد، $\sin(24x)$ و $\sin(32x)$هر دو صفر باشند. به عبارتی ریشه‌ها هم به شکل $\frac{k\pi}{24}$ هستند و هم به شکل $\frac{l\pi}{32}$. اعداد مثبت بدین شکل که از π بیش‌تر نیستند، به صورت $\frac{m\pi}{8}$ هستند که m عددی صحیح است که $0 \leq m \leq 8$.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

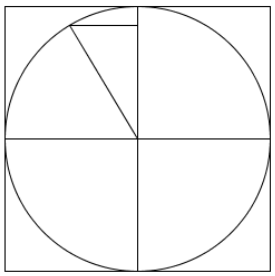
۲۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم $\log 9 = \log e \times \ln 9 > \frac{467}{486} > \frac{19}{20}$ و $\log e > \frac{1}{3}$ و $\ln 9 > 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{81^2 \times 2}$.
پس $20 \log 9 > 19$. همچنین به وضوح $20 \log 9 < 20$. پس 9^{20} عددی ۲۰ رقمی است.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در واقع باید ۱۱ ستون دارای خانه‌ی سیاه باشند، زیرا در یک ستون نمی‌توانیم دو خانه‌ی سیاه داشته باشیم. پس در اول ما یک ستون را انتخاب می‌کنیم که فاقد خانه سیاه است. اگر این ستون یکی از دو ستون کناری جدول باشد، خانه‌های دیگر دقیقا به ۲ روش می‌توان رنگ کرد. در غیر این صورت ۴ روش مختلف می‌توان داشت.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.



اگر نصف ضلع مربع را r فرض کنیم، فاصله‌ی این نقطه از قطر عمودی دایره برابر $r-2$ و از قطر افقی برابر است با $r-1$. پس بنابر رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت: $r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2$. پس $r = 5$.

۲۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$AB = B, BA = A \Longrightarrow A^2 = ABA = BA = A$ به همین ترتیب $B^2 = B$.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$\Longrightarrow \big(2y - (2x+1)\big)\big(2y + (2x+1)\big) = 31$$
$$\Longrightarrow 2y - (2x+1) = 1, \big(2y + (2x+1)\big) = 31$$

پس تنها جواب معادله $x = 7, y = 8$ است.
توجه کنید که ۳۱ اول است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

هر عدد طبیعی n را می‌توان به صورت یکتا به شکل qd^2 نوشت که q حاصل‌ضرب چند عدد اول متمایز است. به راحتی ثابت می‌شود که اگر kn مربع کامل باشد آنگاه $q \mid k$. در این مسئله گزینه‌ای درست است که q در آن از ۱۰۰۰ بیش‌تر باشد.

۲۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

خط‌هایی که ایجاد می‌شود، از نقطه‌ای واقع بر طول می‌گذرد که فاصله‌ی آن از دو رأس روبرو مستطیل به یک اندازه است. برای این فاصله x داریم: $x^2 = 1 + (5-x)^2$. پس $x = \frac{13}{5}$. حال مساحت ناحیه یک لایه متشکل از دو مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه‌ی ۱ و $\frac{12}{5}$ است.

۲۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ما هر حرکت پاسبان را با یکی از حروف U(بالا)، D(پایین)، R(راست) و L(چپ) مشخص می‌کنیم. به وضوح باید تعداد Uها با Dها برابر باشد. همچنین تعداد Rها و Lها. پس تعداد حالات برابر است با تعداد کلمات ۶ حرفی متشکل از این حروف به گونه‌ای که در شرط فوق صدق کنند.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اولاً به وضوح x^2 عددی صحیح است و هم‌چنین نامنفی است. برای $x = 0, 1$ که به وضوح برابری برقرار است. اگر $x > 1$

$$x^2 = [x^3] = x^2 + [x^2(x-1)] \Longrightarrow 0 \leq x^2(x-1) \leq 1$$

که تنها $\sqrt{2}$ در این شرط صدق می‌کند.

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید تعداد این افراد a باشد. A را مجموعه‌ی بازی‌هایی در نظر بگیرید که یکی از این a نفر در آن پیروز شده باشد. به وضوح در $\binom{a}{2}$ بازی که این افراد با هم انجام می‌دهند در مجموعه‌ی A هستند. همچنین این افراد در دیدار با کشتی گیران دیگر حداکثر می‌توانند $a(9-a)$ پیروزی کسب کنند. از طرفی بنابر فرض مسئله $|A| \geq 5a$. پس

$$\frac{1}{2}a(a-1) + a(9-a) \geq |A| \geq 5a \Longrightarrow \frac{1}{2}(a-1) + 9 - a \geq 5$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حال یک گروه ۷ نفره را در نظر بگیرید که هرکدام در گروه خود دقیقا ۳ نفر را برده‌اند (کافی است سه دور مجزای یالی را در نظر بگیریم که گراف کامل ۷ راسی را افراز می‌کنند.)و همگی آن‌ها ۲ نفر باقی‌مانده را شکست داده‌اند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۱) مجموع عناصر جدول‌ضرب ۱۰×۱۰ چند است؟ در سطر i، ستون j این جدول، $i \times j$ نوشته شده است.

الف) ۵۰۵۰ ب) ۴۰۵۰ ج) ۶۰۵۰ د) ۲۰۲۵ ه) ۳۰۲۵

۲) یک غلتک مخروطی شکل رنگی، با زاویه رأس ۶۰° و طول یال یک متر، یک دور روی سطح زمین غلت می‌خورد. با فرض این که رأس مخروط ثابت است، مساحت رنگ‌شده سطح زمین چند مترمربع است؟

الف) ۱ ب) $\frac{\pi}{۲}$ ج) $\frac{\pi}{۲}\sqrt{۳}$ د) π ه) $\frac{۱}{۲}$

۳) از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که فاصله شهر A از دو شهر دیگر ۶۰ و ۵۰ کیلومتر و فاصله دو شهر B و C از هم ۴۰ کیلومتر است.

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۷۰

۴) روی یک کره جغرافیایی به شعاع ۲۰ سانتی‌متر، مساحت ایران ۱۸ سانتی‌متر مربع است. نقاط ایران را با پاره‌خط‌هایی به مرکز کره وصل می‌کنیم. حجم تولیدشده توسط این پاره‌خط‌ها چند سانتی‌متر مکعب است؟

الف) ۱۲۰ ب) ۳۶۰ ج) ۱۰۰ د) ۱۸۰ ه) ۹۰

۵) چند عدد طبیعی را می‌توان به صورت جمع تعدادی عدد طبیعی متمایز کم‌تر از ۱۰۰ نوشت؟

الف) ۴۹۵۰ ب) ۱۴۴۰ ج) ۴۸۵۱ د) ۵۰۵۰ ه) بیش از ۱۰۰۰۰



۶) اگر عمر زمین یک سال تصور شود، از فروردین تا آذر شرایط حیات فراهم شده و تا اواخر بهمن حیات بیش‌تر در آب‌ها بوده است. در اواسط اسفند دایناسورها پدید آمدند و پستانداران حدود پنج دقیقه به سال تحویل ظاهر شدند. تاریخ پنج هزار ساله مکتوب بشر چیزی حدود یک ثانیه‌ای طول کشیده که توپ سال نو در پایان آن به صدا در می‌آید. عمر زمین بر حسب سال عددی چند رقمی است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۷) فرض کنید هنگامی که تالس ارتفاع یکی از اهرام مصر را از روی سایه آن محاسبه می‌کرده زاویه تابش خورشید نسبت به افق سی درجه بوده باشد. اگر قاعده هرم مذکور مربعی به ضلع صد متر، و وجوه دیگرش مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، فاصله نوک هرم تا سایه نوک هرم تقریباً چند متر است؟

الف) ۱۲۰ ب) ۱۴۰ ج) ۱۶۰ د) ۱۸۰ ه) ۲۰۰

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۸) چند سه‌تایی طبیعی $x < y < z \leq ۱۰$ وجود دارد که $x + y = z$؟

الف) ۱۵ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۴۵ ه) ۵۰

۹) فرض کنید $x^۴ + ۲x^۲$ در بازه $[-۱,۱]$ محدود شده باشد. دامنه تغییرات x زیرمجموعه کدام یک از بازه‌های زیر است؟

الف) $[۰,۱]$ ب) $\left[\frac{-۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right]$ ج) $\left[\frac{-۱}{۳},۱\right]$ د) $\left[-۱,\frac{۱}{۳}\right]$ ه) هیچ‌کدام

۱۰) در مثلث ABC سه نقطه A'، B' و C' به ترتیب بر روی سه ضلع BC، CA و AB چنان واقع شده‌اند که سه خط AA'، BB' و CC' در نقطه P همرسند. می‌دانیم که $PB = ۴$، $PC = ۶$، $PA' = ۲$، $PB' = ۲$ و $PC' = ۳$. اندازه PA چقدر است؟

الف) ۳ ب) ۳/۵ ج) ۴ د) ۴/۵ ه) ۵

۱۱) به ازای چند عدد گویای ناصفر q، حاصل $q + \frac{۱۳۸۵}{q}$ عددی صحیح است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۷ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌نهایت

۱۲) مستطیلی در صفحه با رئوس $(۰,۰)$، $(۰,۱۰۰)$، $(۱۵۰,۰)$ و $(۱۵۰,۱۰۰)$ در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رأس $(۰,۰)$، اضلاع مستطیل را در دو نقطه متمایز با مختصات صحیح قطع می‌کند؟ خود قطر را هم بشمارید.

الف) ۹۹ ب) ۱۰۰ ج) ۱۹۹ د) ۲۰۰ ه) ۳۰۰

۱۳) عقربه دقیقه‌شمار ساعتی، که خراب شده است، برعکس می‌چرخد!! از ساعت ۹ صبح تا ساعت ۹ شب چند بار عقربه‌های ساعت بر هم منطبق می‌شوند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۱۴) مکعب چند محور تقارن دارد؟

الف) ۴ ب) ۷ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۳

۱۵) درون دایره‌ای خاصیت آینه‌ای دارد و نقطه A روی محیط آن است. چند راستا وجود دارد که اگر از A در امتداد آن‌ها پرتوی نوری تابیده شود، پرتو در ۲۶ امین برخورد خود با دایره در نقطه A است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۲۵ د) ۲۶ ه) نامتناهی راستا

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۱۶) ضرایب چندجمله‌ای P صحیح است. تحت کدام‌یک از شرایط زیر P نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد؟

الف) $P(۵)=۵$ و $P(۶)=۶$ ب) $P(۵)=۵$ و $P(۶)=۵$ ج) $P(۵)=۶$ و $P(۶)=۶$

د) $P(۵)=۶$ و $P(۶)=۵$ ه) تحت هر کدام از این شرایط، P می‌تواند ریشه صحیح داشته باشد.



۱۷) قورباغه‌ای در نقطه صفر محور نشسته است. این قورباغه در مرحله n ام، یک پرش بلند به طول n سانتی‌متر و سپس $n-۱$ پرش به طول ۱ سانتی‌متر انجام می‌دهد ($۱,۲,۱,۳,۱,۱,۴,۱,۱,۱,۵,\ldots$). این قورباغه به کدام یک از اعداد زیر نخواهد رسید؟

الف) ۲۰۰۶ ب) ۱۳۸۴ ج) ۱۴۲۶ د) ۱۰۲۳ ه) ۱۹۸۱

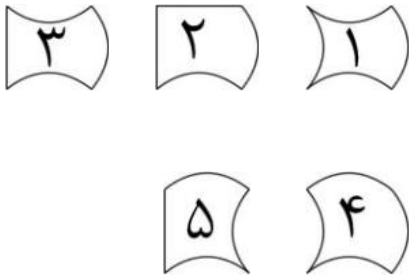
۱۸) دستگاه معادلات روبه‌رو چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x=\dfrac{۲y}{۱-y^۲} \\ y=\dfrac{۲x}{۱-x^۲} \end{cases}$$

الف) یک ب) دو ج) سه

د) چهار ه) بی‌نهایت

۱۹) هر یک از کاشی‌های روبرو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع ۱×۱ به دست آمده است. هر کدام از این کاشی‌ها را «صفحه‌پرکن» می‌گوییم اگر بتوان با آن صفحه نامتناهی شبکه‌بندی‌شده را پوشاند؛ هر کاشی را می‌توان ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه دوران داد و آن را پشت و رو کرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهار گوشه آن روی نقاط شبکه قرار گیرد. کدام یک از کاشی‌ها صفحه‌پرکن هستند؟



الف) ۱ و ۵ ب) ۲ و ۴ و ۵ ج) ۲ و ۳ و ۵ د) ۳ و ۴ ه) ۲ و ۴

۲۰) به ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}$ صحیح است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۱) برای عدد طبیعی n، $n!=۱\times۲\times\ldots\times(n-۱)\times n$. می‌دانیم که نمایش $۲۰!$ در مبنای ۱۰ به این صورت است: $۲۴۳۲۹۰۲۰۰۸۱۷۶۶xy۰۰۰$، که x و y رقمند. کدام درست است؟

الف) $x=۰$ و $y=۰$ ب) $x=۵$ و $y=۸$ ج) $x=۸$ و $y=۵$

د) $x=۴$ و $y=۰$ ه) $x=۸$ و $y=۰$

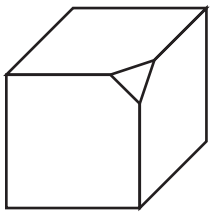
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

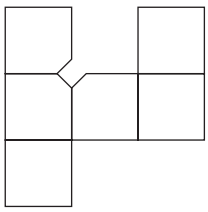
مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

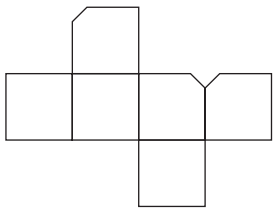
۲۲) گوشه یک مکعب را مطابق شکل روبرو بریده‌ایم. شکل بازشده مکعب کدام است؟



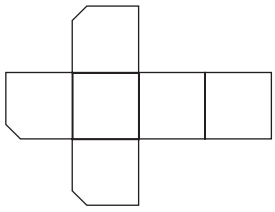
الف)



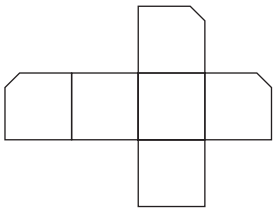
ب)



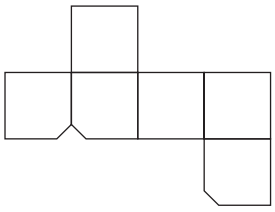
ج)



د)



ه)



۲۳) شازده کوچولو، روی سیاره کوچکی زندگی می‌کند که شعاعش ۶۰ متر است. روزی با شروع از روی خط استوا، ۳۰π متر به شرق، ۲۰π متر به شمال، ۳۰π متر به غرب و سرانجام ۲۰π متر به جنوب می‌رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟

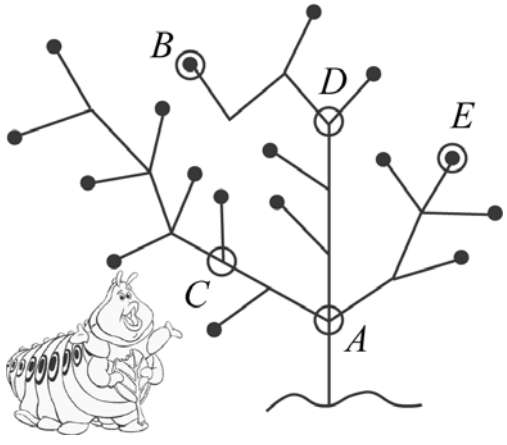


الف) صفر ب) ۳۰π ج) ۲۰π د) ۴۰π ه) ۱۵π

۲۴) فرض کنید $(۲+\sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ ه) ۲۹۱۱

۲۵) کرمی شکمو می‌خواهد همه میوه‌های درخت روبرو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه‌ها طی می‌کند، کم‌ترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می‌تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصله بین دو نقطه متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه‌های انتهایی، میوه دارند. میوه‌ها با دایره سیاه توپر مشخص شده‌اند.



الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

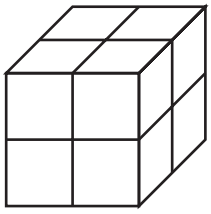
ویژه دانش‌آموزان اول دبیرستان

۲۶) کدام بزرگ‌تر است؟

الف) $۲^{۴۳۱}$ ب) $۳^{۴۲۱}$ ج) $۴^{۳۲۱}$ د) $۲۱^{۴۳}$ ه) $۳۱^{۴۲}$

۲۷) A، B و C سه زیرمجموعه دلخواه مجموعه اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه مختلف می‌توان ساخت؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۸ د) ۱۲۸ ه) ۲۵۶



۲۸) شبکه مکعبی ۲×۲×۲ روبرو را در نظر بگیرید. مورچه‌ای می‌خواهد از کوتاه‌ترین مسیر، با حرکت بر روی شبکه‌های سطح مکعب از راس A به راس B برود. این کار به چند طریق ممکن است؟

الف) ۶۰ ب) ۹۰ ج) ۳۶ د) ۵۴ ه) ۴۵

۲۹) الگوریتم زیر را روی چندجمله‌ای $P(x)$ اجرا کرده‌ایم.

۱. d را برابر درجه P قرار بده و اگر $d < ۱$ به سطر ۴ برو.
۲. a را برابر ضریب x^d در P قرار بده و $P(x) - ax^{d-۱}(x+۲)$ را به جای $P(x)$ بگذار.
۳. به سطر ۱ برو.
۴. P را چاپ کن.

پس از اجرای الگوریتم عدد ۱۳۸۴ چاپ شده است. P در آغاز کدام بوده است؟

الف) $x^{۱۰} - ۴۵x^{۳}$ ب) $۱۳x^{۷} - ۲$ ج) $x^{۱۱} - ۸۳x^{۳}$ د) $۱۶x^{۸} + x$ ه) $-x^{۱۱} + ۸۴$



۳۰) در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پاداش دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به ازای خانه اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانه قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحه شطرنج مانند شکل روبرو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندم‌ها به ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟ (جواب تا دو رقم اعشار است.)

الف) ۰/۳۳ ب) ۰/۵۰ ج) ۰/۶۶ د) ۰/۷۵ ه) هیچ‌کدام

توضیح: در سؤال ۲۸، شکل ناقص است. راس A و راس B، دو گوشه مقابل به هم در مکعب هستند.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

۱) ضرایب چندجمله‌ای P صحیح است. تحت کدام‌یک از شرایط زیر P نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد؟

الف) $P(۵)=۵$ و $P(۶)=۶$ ب) $P(۵)=۵$ و $P(۶)=۵$ ج) $P(۵)=۶$ و $P(۶)=۶$

د) $P(۵)=۶$ و $P(۶)=۵$ ه) تحت هر کدام از این شرایط، P می‌تواند ریشه صحیح داشته باشد.



۲) شازده کوچولو، روی سیاره کوچکی زندگی می‌کند که شعاعش ۶۰ متر است. روزی با شروع از روی خط استوا، ۳۰π متر به شرق، ۲۰π متر به شمال، ۳۰π متر به غرب و سرانجام ۲۰π متر به جنوب می‌رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟

الف) صفر ب) ۳۰π ج) ۲۰π د) ۴۰π ه) ۱۵π

۳) چند سه‌تایی طبیعی $x<y<z\le ۱۰$ وجود دارد که $x+y=z$؟

الف) ۱۵ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۴۵ ه) ۵۰

۴) به ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}$ صحیح است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۵) از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که فاصله شهر A از دو شهر دیگر ۶۰ و ۵۰ کیلومتر و فاصله دو شهر B و C از هم ۴۰ کیلومتر است.

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۷۰

۶) الگوریتم زیر را روی چندجمله‌ای $P(x)$ اجرا کرده‌ایم.

۱. d را برابر درجه P قرار بده و اگر $d<۱$ به سطر ۴ برو.
۲. a را برابر ضریب x^d در P قرار بده و $P(x)-ax^{d-۱}(x+۲)$ را به جای $P(x)$ بگذار.
۳. به سطر ۱ برو.
۴. P را چاپ کن.

پس از اجرای الگوریتم عدد ۱۳۸۴ چاپ شده است. P در آغاز کدام بوده است؟

الف) $x^{۱۰}-۴۵x^{۳}$ ب) $۱۳x^{۷}-۲$ ج) $x^{۱۱}-۸۳x^{۳}$ د) $۱۶x^{۸}+x$ ه) $-x^{۱۱}+۸۴$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

۷) فرض کنید $(۲+\sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ ه) ۲۹۱۱

۸) مستطیلی در صفحه با رئوس $(۰,۰)$، $(۰,۱۰۰)$، $(۱۵۰,۰)$ و $(۱۵۰,۱۰۰)$ در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رأس $(۰,۰)$، اضلاع مستطیل را در دو نقطه متمایز با مختصات صحیح قطع می‌کند؟ قطر را هم بشمارید.

الف) ۹۹ ب) ۱۰۰ ج) ۱۹۹ د) ۲۰۰ ه) ۳۰۰

۹) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته است؟ اعداد طبیعی‌ای که یکانشان در بسط مبنای...

الف) چهار، ۱ یا ۲ یا ۳ است. ب) پنج، ۱ یا ۲ یا ۴ است. ج) هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ است.

د) نه، ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است. ه) ده، ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۵ است.

۱۰) نیم‌سازهای داخلی مثلث ABC دایره محیطی آن را در نقاط A'، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I' مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ باشد، اندازه $\angle B'I'C'$ برابر کدام گزینه است؟

الف) $۹۰^\circ + \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۴}$ ب) $۱۸۰^\circ - \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۴}$ ج) $۲\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}$ د) $۱۸۰^\circ - \widehat{A}$ ه) $۲\widehat{A}$

۱۱) اگر a، b و c اعدادی حقیقی باشند که $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱$، مجموعه همه مقادیر ممکن $ab + bc + ca$ زیرمجموعه کدام یک از بازه‌های زیر است؟

الف) $[۰,۲]$ ب) $[-۱,۰]$ ج) $[۰,۱]$ د) $\left[-۲,\frac{۱}{۲}\right]$ ه) $\left[\frac{-۱}{۲},۲\right]$

۱۲) دوربینی زیر یک هواپیما نصب شده است. هواپیما روی مسیری خطی در حال اوج‌گیری است. زمین را مسطح فرض کنید. مساحت فیلم‌برداری شده، تابع درجه چندی از جابجایی مکانی هواپیما است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) چندجمله‌ای نیست.

۱۳) تصاعد حسابی از اعداد اول با قدر نسبت $n^۲ + ۱$، که n عددی طبیعی است حداکثر چند عضو دارد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) تصاعد با هر تعداد عضو وجود دارد.

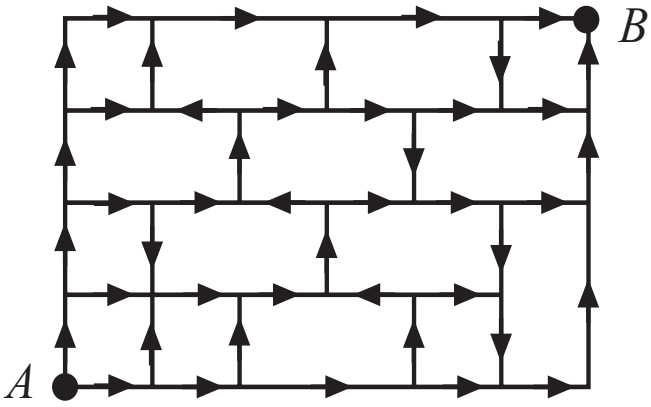
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

۱۴) در شکل روبرو می‌خواهیم از نقطه A به نقطه B برویم. مسیرها در جهت فلش یک‌طرفه هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار انجام دهیم؟



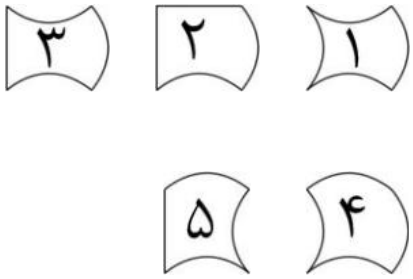
الف) ۳۷ ب) ۵۸ ج) ۱۲

د) ۶۳ ه) ۶۴

۱۵) طول یال مکعبی یک واحد است. اگر A، B و C رأس‌های مجاور به رأس D باشند، کم‌ترین مقدار مجموع مربعات فاصله نقطه دلخواه P از خطوط AB، BC و CA چقدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) $\frac{۳}{۴}$ ه) $\frac{۱}{۴}$

۱۶) هر یک از کاشی‌های روبرو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع ۱×۱ به دست آمده است. هر کدام از این کاشی‌ها را «صفحه‌پرکن» می‌گوییم اگر بتوان با آن صفحه نامتناهی شبکه‌بندی‌شده را پوشاند؛ هر کاشی را می‌توان ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه دوران داد و آن را پشت و رو کرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهار گوشه آن روی نقاط شبکه قرار گیرد. کدام یک از کاشی‌ها صفحه‌پرکن هستند؟



الف) ۱ و ۵ ب) ۲ و ۴ و ۵ ج) ۲ و ۳ و ۵ د) ۳ و ۴ ه) ۲ و ۴

۱۷) کدام بزرگ‌تر است؟

الف) $۲^{۴۳۱}$ ب) $۳^{۴۲۱}$ ج) $۴^{۳۲۱}$ د) $۲۱^{۴۳}$ ه) $۳۱^{۴۲}$

۱۸) در مثلث ABC نقطه D محل برخورد نیم‌ساز زاویه A با ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر $BE = ED$، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۳A + ۲C = ۱۸۰^\circ$ ب) $۲A + ۳C = ۱۸۰^\circ$ ج) $B - C = ۹۰^\circ$

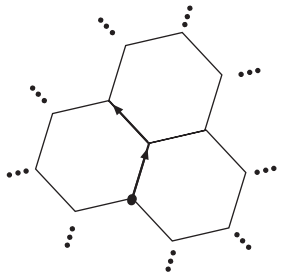
د) $۲B + C = ۱۸۰^\circ$ ه) $B = ۲C$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان



۱۹) کندوی زنبوری از شش‌ضلعی‌های منتظم با طول واحد تشکیل شده است. بچه‌زنبوری روی اضلاع حرکت می‌کند و به هر رأسی که می‌رسد می‌تواند به سمت چپ یا راست خود برود. اگر این زنبور ۱ بار به چپ، ۲ بار به راست، ۴ بار به چپ،... و $۲^{۱۳۸۴}$ بار به چپ برود، فاصله مکان نهایی او از ابتدای حرکتش چند واحد است؟

الف) بین صفر و $۲^{۵}$ ب) بین $۲^{۵}$ و $۲^{۱۰}$ ج) بین $۲^{۱۰}$ و $۲^{۱۵}$ د) بین $۲^{۱۵}$ و $۲^{۲۰}$ ه) بین $۲^{۱۳۸۴}$ و $۲^{۱۳۸۵}$

۲۰) می‌خواهیم برای سه روستا به فاصله دوبه‌دوی ۹، ۱۴ و ۱۹ کیلومتر، مدرسه‌ای بسازیم. کم‌ترین مقدار a که بتوان مدرسه را جایی ساخت که فاصله‌اش از هر سه روستا بیش از a کیلومتر نباشد چند است؟

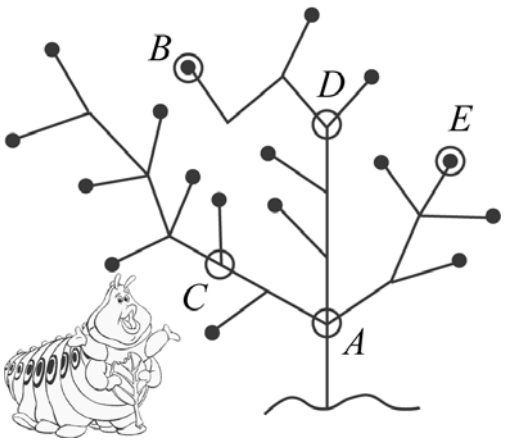
الف) ۹ ب) ۹/۵ ج) $۷\sqrt{۲}$ د) $\frac{۵۷\sqrt{۲}}{۸}$ ه) ۱۰

۲۱) بسط مبنای ۲- را با استفاده از ارقام صفر و یک، شبیه بسط مبنای ۲ تعریف می‌کنیم. مثلاً

$$(۱۰۱)_{-۲} = ۱\times(-۲)^{۲} + ۰\times(-۲)^{۱} + ۱\times(-۲)^{۰} = ۵$$

۱۱۷ در مبنای ۲-، چند تا یک دارد؟ (توجه کنید گذاشتن علامت منفی، مثلاً $-(۱۰۱)_{-۲}$، مجاز نیست.)

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۱۷ بسط مبنای ۲- ندارد. ه) ۱۱۷ بیش‌تر از یک بسط در مبنای ۲- دارد.



۲۲) کرمی شکمو می‌خواهد همه میوه‌های درخت روبرو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه‌ها طی می‌کند، کم‌ترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می‌تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصله بین دو نقطه متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه‌های انتهایی، میوه دارند. میوه‌ها با دایره سیاه توپر مشخص شده‌اند.

الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

۲۳) $*$، عملی روی اعداد صحیح است با این خاصیت که جابجایی و شرکت‌پذیر است ولی روی جمع پخش نمی‌شود. به جای آن برای هر a، b و c صحیح $a*(b+c) = (a*b) + (a*c) - a$. می‌دانیم که $۱*۱ = ۳$. در این صورت $۱۰*۱۰$ چند است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۰۲ ج) ۱۲۰ د) ۲۵۰ ه) ۳۰۰

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان



۲۴) در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پاداش دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به ازای خانه اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانه قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحه شطرنج مانند شکل روبرو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندم‌ها به ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟ (جواب تا دو رقم اعشار است.)

الف) ۰/۳۳ ب) ۰/۵۰ ج) ۰/۶۶ د) ۰/۷۵ ه) هیچ‌کدام

۲۵) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و نقطه E محل تماس دایره محاطی داخلی مثلث با ضلع BC است. اگر نقطه L وسط AM و K محل برخورد AE با BL باشد و بین اضلاع مثلث رابطه $۲(AC-AB)=BC$ باشد، آنگاه $\frac{AK}{AE}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ ه) $\frac{۳}{۴}$

۲۶) دو نفر با هم مشاعره می‌کنند؛ اولی بیتی از اشعار روبرو را می‌خواند و دومی باید بیت جدیدی بگوید که با حرف آخر بیت قبلی شروع شده باشد. چند بیت وجود دارد که با شروع از آن‌ها نفر اول می‌تواند مستقل از بازی نفر دوم برنده شود؟ بازنده کسی است که نتواند شعری بخواند.

این سر به مهر نامه بدان مهربان رسان	کس را خبر مکن که کجا می‌فرستمت
نور تویی سور تویی دولت منصور تویی	مرغ که طور تویی خسته به منقار مرا
ای پادشه خوبان داد از غم تنهایی	دل بی‌تو به جان آمد وقت است که بازآیی
نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود	مزد آن گرفت جان برادر که کار کرد
درخت تو گر بار دانش بگیرد	به زیر آوری چرخ نیلوفری را
تا توانی دلی به دست آور	دل شکستن هنر نمی‌باشد
یعقوب‌وار وا اسفاها همی‌زنم	دیدار خوب یوسف کنعانم آرزوست
تا نگردی بی‌خبر از جسم و جان	کی خبر یابی ز جانان یک زمان
یار شو و یار بین دل شو و دل‌دار بین	در پی سرو روان چشمه و گلزار بین
دوست آن باشد که گیرد دست دوست	در پریشان حالی و درماندگی

الف) صفر ب) ۲ ج) ۵ د) ۸ ه) ۱۰

۲۷) A، B و C سه زیرمجموعه دلخواه مجموعه اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه مختلف می‌توان ساخت؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۸ د) ۱۲۸ ه) ۲۵۶

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

ویژه دانش‌آموزان دوم و سوم دبیرستان

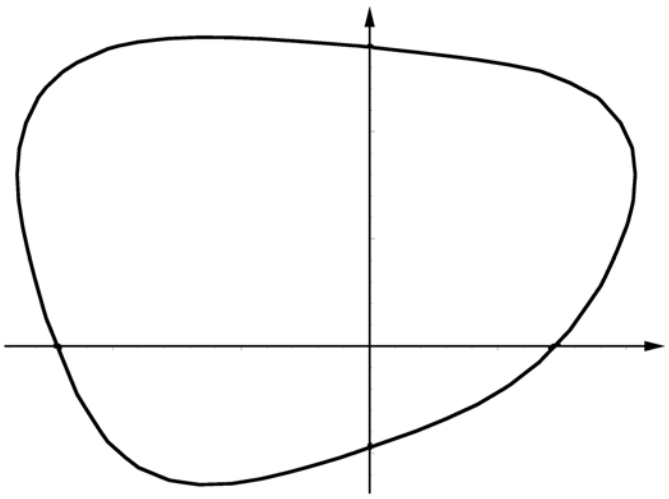
۲۸) فاصله مرکزهای دو دایره به شعاع $\sqrt{۳}$، برابر ۴ است. نقاطی را در نظر بگیرید که خارج دو دایره هستند و هر خط گذرنده از آن نقاط، دست‌کم یکی از دو دایره را قطع می‌کند. مساحت این مجموعه چقدر است؟

الف) صفر ب) $۲\pi - \sqrt{۳}$ ج) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$ د) $۲\sqrt{۳} - \pi$ ه) $۴\sqrt{۳} - ۲\pi$

۲۹) خانه‌های یک مستطیل ۴×۵ را می‌خواهیم با چهار رنگ طوری رنگ کنیم که در هر مربع ۲×۲، هر چهار رنگ ظاهر شوند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۱۲۰ ب) ۱۹۲ ج) ۲۴ د) ۲۶۴ ه) ۲۸۸

۳۰) شکل روبرو مجموعه جواب‌های کدام یک از معادلات زیر در صفحه است؟



الف) $x^۳ + xy + y^۳ = ۴$

ب) $\mathrm{Cos}\, x + x^۲ + y^۲ + y = ۲$

ج) $x^۲y^۳ + xy^۲ + y = ۱$

د) $x^۴ + y^۴ = ۲y - x + ۱$

ه) $\mathrm{Sin}\,(x + y) + \mathrm{Sin}\, x + \mathrm{Sin}\, y = ۱$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۴

---

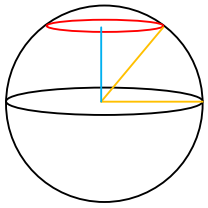
۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

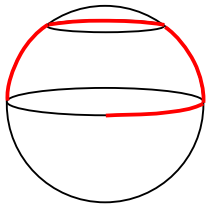
لم: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ دارای ضرایب صحیح باشد آن‌گاه $a-b \mid P(a)-P(b)$.

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح دارای ریشه صحیح a باشد، یعنی $P(a)=۰$. حال اگر بخواهد گزینه‌ی (ب) درست باشد طبق لم باید $۵-a \mid P(۵)-P(a)=۵$ و همچنین باید $۶-a \mid P(۶)-P(a)=۵$ که در این صورت باید عدد ۵ دو مقسوم‌علیه متوالی داشته باشد، که این غیر ممکن است.

دقت کنید که برای گزینه‌های (الف)، (ج) و (د) به ترتیب چندجمله‌ای‌های $P(x)=x$، $P(x)=-۳(x-۵)(x-۶)+۶$ و $P(x)=۱۱-x$ شرایط هر گزینه را دارا هستند و به علاوه به ترتیب دارای ریشه‌های صحیح ۰، ۷ و ۱۱می‌باشند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.





محیط مدار استوا $۲\pi \times ۶۰ = ۱۲۰\pi$ است. در حرکت اول به اندازه‌ی یک چهارم محیط خط استوا به سمت شرق می‌رود. سپس به اندازه ۲۰π بالا می‌رود (مانند شکل اول) که در این صورت ۱۰π تا رسیدن به قطب شمال فاصله دارد. یعنی $\frac{۲}{۳}$ مسیر تا قطب شمال طی شده است. پس زاویه‌ی طی شده $\frac{۲}{۳}$ کل زاویه تا رسیدن به قطب است، یعنی ۶۰ درجه. حال بر روی یک دایره جدید باید حرکت کند. اگر از مرکز کره به مرکز این دایره‌ی جدید وصل کنیم؛ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ای ۳۰ درجه خواهیم داشت. ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است. پس شعاع دایره‌ی جدید نصف شعاع کره یعنی ۳۰ متر است. بنابراین محیط این دایره‌ی جدید $۲\pi \times ۳۰ = ۶۰\pi$ و حال که ۳۰π روی محیط این دایره حرکت کرده است؛ یعنی نصف محیط را رفته است. در آخرین حرکت به مدار استوا بر می‌گردد. در این حرکت نصف خط استوا را طی کرده است. پس نسبت به جای اول خود یک چهارم محیط استوا (۳۰π) طی کرده است.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

z بین ۳ تا ۱۰ می‌تواند باشد. اگر z ۳ یا ۴ باشد برای x یک حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۵ یا ۶ باشد برای x دو حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۷ یا ۸ باشد برای x سه حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود. اگر z ۹ یا ۱۰ باشد، برای x چهار حالت داریم و y به صورت یک‌تا تعیین می‌شود؛ پس در مجموع: ۲×۴ + ۲×۳ + ۲×۲ + ۲×۱ = ۲۰ حالت داریم.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

باید $\sqrt{m-۱}+\sqrt{m+۱۵}=n$ باشد که در آن n عددی طبیعی است. پس داریم:

$$\sqrt{m+۱۵}-\sqrt{m-۱}=\frac{۱۶}{\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}}=\frac{۱۶}{n}\in\mathbb{Q}$$

حال چون $\sqrt{m+۱۵}+\sqrt{m-۱}$ و $\sqrt{m+۱۵}-\sqrt{m-۱}$ هر دو گویا هستند میانگین آن‌ها یعنی $\sqrt{m+۱۵}$ و به تبع آن $\sqrt{m-۱}$ هر دو گویا هستند. پس $m+۱۵$ و $m-۱$ هر کدام مربع عددی گویا هستند. می‌توان به سادگی نشان داد که اگر عددی طبیعی مربع عددی گویا باشد لزوماً مربع عدد طبیعی است. پس حتماً باید $\sqrt{m-۱}$ و $\sqrt{m+۱۵}$ طبیعی باشند.

بنابراین باید داشته باشیم:

$$m+۱۵=a^۲\ ,m-۱=b^۲\Rightarrow a^۲-b^۲=۱۶\Rightarrow(a-b)(a+b)=۱۶$$

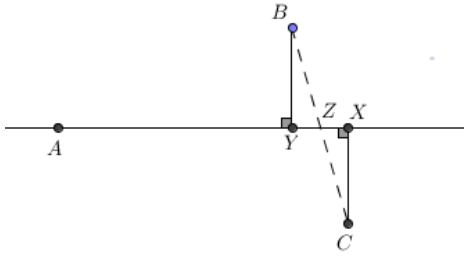
حال با بررسی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۶ به این نتیجه می رسیم که m فقط می‌تواند اعداد ۱ و ۱۰ باشد.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر X و Y به ترتیب نقاطی روی خط جاده باشند که کم‌ترین فاصله را تا C و B دارند و Z محل تقاطع پاره‌خط BC و جاده باشد، می‌دانیم که مثلث‌های BYZ و CXZ قائم‌الزاویه هستند و همواره در یک مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگ‌ترین ضلع است، بنابراین:

$$BY\le BZ \text{ و } CX\le CZ$$

در نتیجه: $BY+CX\le BC$ پس مجموع فاصله‌ی دو شهر از جاده حداکثر برابر فاصله‌ی دو شهر است که برابر ۴۰ کیلومتر است. زمانی هم این مقدار برابر ۴۰ می‌شود که BC بر جاده عمود باشد که این حالت هم محتمل است.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ باشد. در این صورت $p(x)$ بعد از یک تغییر به چندجمله‌ای زیر تبدیل می شود:

$$(a_{n-1} - 2a_n)x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

در تغییر دوم این چندجمله‌ای به چندجمله‌ای زیر تبدیل خواهد شد:

$$(a_{n-2} - 2a_{n-1} + 4a_n)x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1 x + a_0$$

با ادامه‌ی این روند به چندجمله‌ای درجه صفر زیر می‌رسیم:

$$(-2)^0 a_0 + (-2)^1 a_1 + (-2)^2 a_2 + \ldots + (-2)^{n-1} a_{n-1} + (-2)^n a_n$$

حال اگر گزینه‌ها را در این مسئله امتحان کنیم فقط گزینه‌ی (الف) است که حاصل بالا ۱۳۸۴ برابر می‌شود:

$$(-2)^3 \times \big(-45\big) + (-2)^{10} \times 1 = 1384$$

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

می‌دانیم که اگر آن عبارت را در مزدوجش ضرب کنیم حاصل برابر یک می‌شود؛ یعنی

$$(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = 1$$

حال اگر بتوانیم مقدار مزدوج را بر حسب خود عبارت بدست آوریم، مسئله حل خواهد شد. برای این منظور با استقرا به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $(2 + \sqrt{3})^n = r_n + s_n\sqrt{3}$ باشد؛ در این صورت $(2 - \sqrt{3})^n = r_n - s_n\sqrt{3}$ خواهد شد. بنابراین با جای‌گذاری خواهیم داشت:

$$1 = (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = (r_n + s_n\sqrt{3})(r_n - s_n\sqrt{3})$$
$$= (5042 + b\sqrt{3})(5042 - b\sqrt{3}) = 5042^2 - b^2 \times 3$$
$$\Rightarrow 1 = 5042^2 - 3b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{5042^2 - 1}{3} \Rightarrow b = 2911$$

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شیب قطر برابر $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$ است و تعداد ۴۹ خط داریم که دارای این شیب هستند و زیر خط قطر قرار دارند. این تعداد از آن جا به دست می‌آید که به ازای هر ۳ واحد حرکت در راستای محور افقی به سمت

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راست و ۲ واحد حرکت در راستای محور عمودی به سمت پایین به نقاط جدیدی در این مستطیل می‌رسیم که خط گذرنده از آن‌ها موازی قطر است.

دقیقاً به همین میزان هم بالای قطر پاره خط وجود دارد. پس در مجموع ۹۹ خط موازی داریم.

۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای رد گزینه‌ی (الف) ۲×۲ در مبنای چهار را در نظر بگیرید که حاصل ۱۰ می‌شود. که یکانش ۰ است.

برای رد گزینه‌ی (ب) ۲×۴ در مبنای پنج را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش ۳ است.

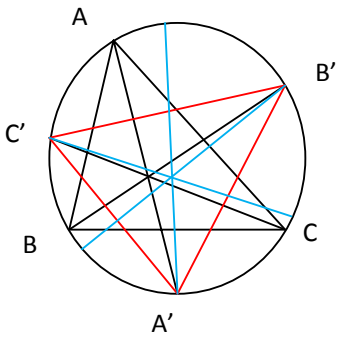
برای رد گزینه‌ی (د) ۲×۶ در مبنای نه را در نظر بگیرید که حاصل ۱۳ می‌شود. که یکانش ۳ است.

برای رد گزینه‌ی ه ۲×۲ در مبنای ده را در نظر بگیرید که حاصل ۴ می‌شود. که یکانش ۴ است.

برای اثبات گزینه‌ی (ج) باید نشان دهیم که اگر رقم یکان هر عددی در مبنای هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ باشد در ضرب درون همین مجموعه قرار خواهد گرفت که با بررسی هر ۹ حالت به این نتیجه خواهیم رسید.

۱۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شکل این سوال به صورت روبه‌رو خواهد شد:



$$\angle B'I'C' = \frac{\overset{\frown}{B'AC'}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{C''A'B''}}{۲}$$

که در آن B'' و C'' به ترتیب پای نیم‌سازهای زوایای B' و C' بر دایره‌ی محیطی هستند. همان طور که در شکل نیز واضح است:

$$\frac{\overset{\frown}{B'AC'}}{۲} = \angle A' \text{ و}$$

$$\frac{\overset{\frown}{C''A'B''}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{C''A'}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{A'B''}}{۲} = \frac{\angle C'}{۲} + \frac{\angle B'}{۲}$$

در نتیجه $\angle B' = \angle A' + \frac{\angle B'}{۲} + \frac{\angle C'}{۲} = ۹۰^\circ + \frac{\angle A'}{۲}$ و از آن‌جا که زاویه‌ی A' روبه‌رو به کمان $B'AC'$ است داریم: $\angle A' = \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲}$ در نتیجه: $\angle B'I'C' = ۹۰^\circ + \frac{\angle B + \angle C}{۴}$

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ممکن در بازه‌ی $[-\frac{۱}{۲}, ۱]$ قرار دارد. برای این منظور دو نامساوی‌های زیر را ثابت می‌کنیم:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$a^۲+b^۲+c^۲ \geq ab+bc+ac \geq -\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲+c^۲)$$

برای اثبات نامساوی سمت چپ داریم:

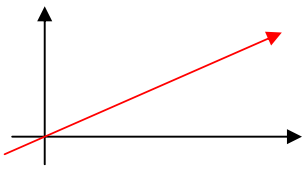
$$\begin{aligned}
&a^۲+b^۲+c^۲ \geq ab+bc+ac \\
\Leftrightarrow\ &۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲ \geq ۲ab+۲bc+۲ac \\
\Leftrightarrow\ &(a^۲+b^۲)+(b^۲+c^۲)+(c^۲+a^۲) \geq ۲ab+۲bc+۲ac \\
\Leftrightarrow\ &(a^۲+b^۲-۲ab)+(b^۲+c^۲-۲bc)+(c^۲+a^۲-۲ac) \geq ۰ \\
\Leftrightarrow\ &(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

برای اثبات نامساوی سمت راست هم داریم:

$$\begin{aligned}
&ab+bc+ac \geq -\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲+c^۲) \\
\Leftrightarrow\ &۲ab+۲bc+۲ac \geq -(a^۲+b^۲+c^۲) \\
\Leftrightarrow\ &a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲bc+۲ac \geq ۰ \\
\Leftrightarrow\ &(a+b+c)^۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

حال دقت کنید که اگر $a=b=c=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، $ab+bc+ca=۱$ و اگر $a=-b=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $c=۰$ باشد، $ab+bc+ca=\frac{-۱}{۲}$. بنابراین گزینه‌ی صحیح باید شامل ۱ و $\frac{-۱}{۲}$ باشد که تنها گزینه‌ای که این خاصیت را دارد گزینه‌ی (ه) است.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.



دقت کنید که حرکت هواپیما مشابه خط روبه‌رو است که طبق قضیه‌ی تالس نتیجه می‌دهد ارتفاع هواپیما به صورت خطی رشد می کند و در نتیجه مساحت به صورت تابعی درجه دو خواهد بود.

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید که a اولین عضو این دنباله باشد. در این صورت باید همه‌ی اعداد دنباله‌ی زیر اول باشند:

$$a\ ,a+n^۲+۱\ ,a+۲n^۲+۲\ ,a+۳n^۲+۳\ ,\dots$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

می‌خواهیم نشان دهیم که در این صورت چهارمین عضو دنباله نمی‌تواند عددی اول باشد و در نتیجه دنباله حداکثر سه عضوی می‌شود.

برای این منظور باید دقت شود که باقیمانده $n^۲ + ۱$ بر ۳ نمی‌تواند صفر باشد.(این موضوع را می‌توانید با بررسی حالت‌های مختلفی که باقی‌مانده‌ی n بر ۳ می‌تواند داشته باشد تحقیق کنید.) پس با اضافه شدن به a باقی‌مانده‌ی آن بر ۳ با a متفاوت خواهد شد. به همین ترتیب باقیمانده $a + ۲n^۲ + ۲$ بر ۳ با باقیمانده $a + n^۲ + ۱$ بر۳ و با باقی‌مانده‌ی a بر ۳ متفاوت است.

پس در بین این اعداد یکی باید مضرب ۳ باشد و چون این عددها اول هستند باید یکی از این اعداد ۳ باشد. اما دقت کنید کنید که a عددی اول است و در نتیجه $a \geq ۱$. پس

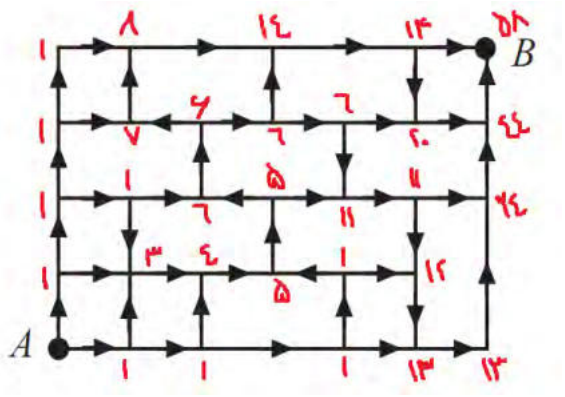
$$a + ۲n^۲ + ۲ > a + n^۲ + ۱ > ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

پس تنها a می‌تواند برابر ۳ باشد. حال اگر دنباله عضو چهارمی داشته باشد باید باقی‌مانده‌ی این عضو یعنی $a + ۳n^۲ + ۳$ بر ۳ با باقی‌مانده‌ی a بر ۳ برابر باشد. که در این صورت این عدد مضرب ۳ است که نمی‌تواند اول باشد.

دقت کنید که اگر $n = ۱$ باشد تصاعد ۳، ۵، ۷ دارای سه عضو است. بنابراین مقدار حداکثر برابر ۳ است.

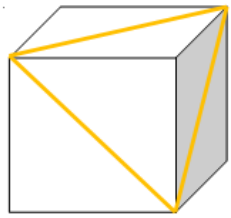
۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن به هر نقطه برابر است با جمع تعداد راه‌هایی که می‌توان به آن نقطه رسید و بر همین اساس تعداد راه‌های رسیدن به هر نقطه را محاسبه می‌کنیم و جدول روبه‌رو به دست می‌آید:



۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



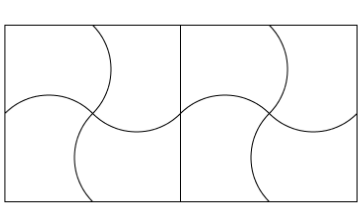
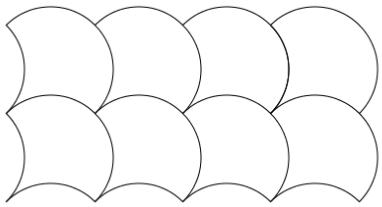
خطوط مذکور بر روی یک صفحه قرار دارند. بنابراین برای این که مجموع مربعات کمترین مقدار خود را اخذ کند باید نقطه‌ی P بر روی همان صفحه قرار داشته باشد. دلیل آن این است که اگر خارج صفحه در نظر بگیریم تصویر آن نقطه بر روی صفحه فاصله کمتری خواهد داشت و چون مثلث متساوی الاضلاع است باید این نقطه بر روی مرکز ثقل باشد. (برای چک کردن این موضوع هم می‌توانید مثلث متساوی‌الاضلاع مسئله را مثلثی مرکز صفر و رئوس $(۰,a)$، $(\frac{a\sqrt{۳}}{۲},\frac{-a}{۲})$ و $(\frac{-a\sqrt{۳}}{۲},\frac{-a}{۲})$ در نظر بگیرید و خواهید دید که کم‌ترین مجموع مربعات فاصله مربوط به مبدأ مختصات که مرکز ثقل مثلث است می‌باشد.) حال در مسئله‌ی اصلی اندازه‌ی ضلع مثلث برابر است با. $\sqrt{۲}$ است پس ارتفاع آن طبق قضیه‌ی فیثاغورس برابر $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ است و فاصله‌ی این نقطه تا ضلع مثلث برابر $\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ است که مربع آن برابر $\frac{۱}{۶}$ است و جمع سه تا از آن‌ها مساوی $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

۱۶. گزینه‌ی (۵) صحیح است.

ادعا می‌کنیم که شرط لازم برای این که با یک کاشی بتوان صفحه را فرش کرد این است که تعداد فررفتگی‌ها و برآمدگی‌هایش با هم برابر باشند. فرض کنید یک کاشی a تورفتگی و b برآمدگی داشته باشد. حال برای یک عدد طبیعی مثل N، یک مربع $N\times N$ را در نظر بگیرید. تعداد کاشی‌های لازم برای فرش کردن این مربع برابر $N^۲$ است. دقت کنید که تعداد تورفتگی‌های کاشی‌ها درون این مربع حداقل برابر $aN^۲-۴N$ است زیرا ممکن است حداکثر $۴N$تا از تورفتگی‌ها در ضلع‌های مربع بزرگ باشند. از طرف دیگر تعداد برآمدگی‌ها درون این مربع حداکثر برابر $bN^۲$ است. اما می‌دانیم اگر صفحه کاملاً کاشی‌کاری شده باشد باید برای هر تورفتگی یک برآمدگی داشته باشیم پس تعداد آن‌ها در درون مربع باید برابر باشد و این نتیجه می‌دهد که $aN^۲-۴N\le bN^۲$. پس $a-\frac{۴}{N}\le b$. حال چون N عدد طبیعی دل‌خواهی است این نتیجه می‌دهد که $a\le b$. با برعکس کردن استدلال برای تورفتگی‌ها و برآمدگی‌ها می‌توان نشان داد که $b\le a$. پس در کل $a=b$ و تعداد برآمدگی‌ها و تورفتگی‌ها برابر هستند. بنابراین کاشی‌های شماره‌های ۱، ۳ و ۵ نمی‌توانند صفحه‌پرکن باشند. بنابراین تنها کاشی‌های شماره‌ی ۲و ۴ باقی می‌مانند که با این دو کاشی هم می‌توان صفحه را فرش کرد.

بنابراین فقط شکل‌های ۲ و ۴ می‌توانند صفحه‌پرکن باشند که با توجه به الگوی زیر این‌چنین هستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

می‌دانیم که اگر در مقایسه دو عدد توانی پایه‌های برابر باشد، عددی که توان برابر دارد بزرگ‌تر است و هم چنین اگر توان‌ها برابر باشد، عددی که پایه‌ی بزرگ‌تر دارد، بزرگ‌تر است و اگر پایه و توان عددی از دیگر بزرگ‌تر باشد عدد اول بزرگ‌تر است. بنابراین $۴^{۳۲۱} = ۲^{۶۴۲} > ۲^{۴۳۱}$. به علاوه

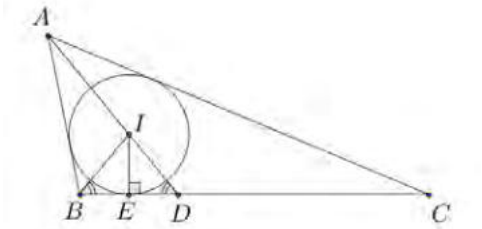
$$۴^{۳۲۱} = ۲^{۶۴۲} = (۲^۵)^{۱۲۸} \times ۲^۲ = ۳۲^{۱۲۸} \times ۲^۲ > ۳۲^{۱۲۸} > ۳۱^{۴۲}$$

$$۴^{۳۲۱} = ۲^{۶۴۲} = (۲^۵)^{۱۲۸} \times ۲^۲ = ۳۲^{۱۲۸} \times ۲^۲ > ۳۲^{۱۲۸} > ۲۱^{۴۳}$$

و داریم:

$$۳^{۴۲۱} = (۳^۷)^{۶۰} \times ۳^۱ = ۲۱۸۷^{۶۰} \times ۳^۱ > ۲۰۴۸^{۶۰} \times ۳$$
$$= (۲^{۱۱})^{۶۰} \times ۳ = ۲^{۶۶۰} \times ۳ > ۲^{۶۶۰} \times ۲ = ۲^{۶۶۱} > ۲^{۶۴۲} = ۴^{۳۲۱}$$

۱۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.



نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle B$ را رسم می‌کنیم. این نیم‌ساز هم مانند AD از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث(نقطه‌ی I) خواهد گذشت. بعد از آن از مرکز دایره‌ی محاطی I به ضلع عمود می‌کنیم. دو مثلث BIE و DIE با هم هم‌نهشت هستند. پس زاویه‌ی $\angle D_۲$ برابر زاویه‌ی $\angle B_۱$ نصف زاویه‌ی $\angle B$ است. هم‌چنین $\angle D_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث DAC هم هست. پس داریم:

$$\frac{\angle B}{۲} = \frac{\angle A}{۲} + \angle C \Rightarrow \angle B = \angle A + ۲\angle C$$
$$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = ۲\angle A + ۳\angle C \Rightarrow ۲\angle A + ۳\angle C = ۱۸۰^\circ$$

۱۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر زنبور ۶ بار به سمت چپ برود؛ محیط یک شش‌ضلعی را طی می‌کند و سر جای اول خود باز می‌گردد. در مورد سمت راست هم همین طور است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حال کافی است دقت کنید که برای هر عدد طبیعی فرد n، ۲^n به صورت $۶k + ۲$ و برای هر عدد طبیعی زوج n، ۲^n به صورت $۶k + ۴$ می‌شود.

پس می‌توان فرض کرد که به جز حرکت اول که یک بار به سمت چپ می‌رود یکی در میان ۲ بار به راست و ۴ بار به چپ می‌رود. حال با طی کردن چند حرکت اولیه می‌توان دید که بر روی یک مسیر بسته حرکت می‌کند و بنابراین دور نمی‌شود! پس فاصله‌ی مکان نهایی از مکان اولیه کم‌تر از $۲^۵$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا فرض کنید روستاها را با A، B و C نشان دهیم به طوری که $AB = ۹$، $AC = ۱۴$ و $BC = ۱۹$. دقت کنید که اگر M نقطه‌ی وسط BC باشد، $MB = MC = ۹/۵$ و به علاوه

$$AM^۲ = \frac{AB^۲ + AC^۲}{۲} - \frac{BC^۲}{۴} = \frac{۱۹۶ + ۸۱}{۲} - \frac{۳۶۱}{۴} = ۴۸/۲۵ < ۹۰/۲۵ = (۹/۵)^۲$$

پس اگر مدرسه را در M بسازیم فاصله‌اش از سه روستا بیش‌تر از $۹/۵$ نیست و لذا $a \leq ۹/۵$. اما دقت کنید که نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله‌اش از هر دو B و C کم‌تر از $۹/۵$ باشد پس a نمی‌تواند کم‌تر از $۹/۵$ باشد و بنابراین در کل کم‌ترین مقدار ممکن $۹/۵$ است.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

برای این منظور باید از تقسیمات متوالی بر عدد -۲ انجام دهیم:

$$۷ = (-۲)(-۳) + ۱ \qquad ۱۱۷ = (-۲)(-۵۸) + ۱$$
$$-۳ = (-۲)(۲) + ۱ \qquad -۵۸ = (-۲)(۲۹) + ۰$$
$$۲ = (-۲)(-۱) + ۰ \qquad ۲۹ = (-۲)(-۱۴) + ۱$$
$$-۱ = (-۲)(۱) + ۱ \qquad -۱۴ = (-۲)(۷) + ۰$$

پس $(۱۱۰۱۱۰۱۰۱)_{-۲} = ۱۱۷$ که دارای ۶ رقم ۱ است. تنها کافی است با استقرا ثابت کنید که هر عدد صحیح در مبنای -۲ یک بسط یک‌تا خواهد داشت.

۲۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر از نقطه‌ی A شروع کند باید هر مسیری از سه مسیر روبه‌رویش را که طی می‌کند برگردد (به جز مسیر آخر). به‌تر است به جای این که مجبور بشود کل شاخه را برود و برگردد؛ از انتهای یک شاخه آغاز کند که مجبور به بازگشت مسیر نشود.

هم‌چنین اگر از D یا C آغاز کند باید بخشی از مسیر را برگردد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس تنها موارد باقی‌مانده B و E هستند که در انتهای شاخه‌های اصلی درخت قرار دارند. در مقایسه‌ی این دو باید به این نکته توجه و دقت کنیم که نقطه‌ی E بر روی یک شاخه به طول ۳ با ۳ تا شاخه منشعب قرار دارد و نقطه B بر روی یک شاخه به طول ۶ با ۴ تا انشعاب.

اگر از E آغاز کند مجبور است یکی از شاخه‌های اصلی که طول آن ۶ است و انشعاباتی دارد را برگردد ولی اگر از B آغاز کند می تواند از شاخه های اصلی که طول آن ۶ است برگردد و یا از شاخه اصلی که طول آن ۳ است برگردد که به وضوح حالت اخیر مسیر کم‌تری را برگشته است. پس کل مسافت طی‌شده آن کم‌تر خواهد شد.

بنابراین به‌ترین نقطه برای آغاز نقطه‌ی B خواهد بود و به‌ترین مسیر این است که پس از خوردن تمام میوه‌های شاخه‌ی خودش به شاخه‌ی سمت راست رفته و پس از آن به شاخه‌ی سمت چپ برود. که در طول این مسیر در به‌ترین حالت ۴۶ متر طی می‌کند که کم‌ترین میزان ممکن است.

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n داریم: $n * ۱ = ۲n + ۱$ برای این منظور از استقرا استفاده می‌کنیم. حکم برای $n = ۱$ به دلیل فرض صورت سؤال درست است. حال داریم:

$$(n+۱) * ۱ = ۱ * (n + ۱) = (۱ * n) + (۱ * ۱) - ۱ = (۲n + ۱) + ۳ - ۱ = ۲n + ۳$$

هم‌چنین ادعا می‌کنیم که برای هر عددی طبیعی n داریم: $n * n = (n + ۱)^۲ - ۱$ برای این منظور هم از استقرا استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(n + ۱) * (n + ۱) &= (n + ۱) * n + (n + ۱) * ۱ - (n + ۱)\\ &= (n + ۱) * n + (۲n + ۳) - (n + ۱)\end{aligned}$$

حال باید مقدار $(n + ۱) * n$ را محاسبه کنیم تا حکم مورد نظر اثبات شود:

$$\begin{aligned}(n + ۱) * n = n * (n + ۱) &= n * n + n * ۱ - n\\ &= ((n + ۱)^۲ - ۱) + \big(۲n + ۱\big) - n = n^۲ + ۳n + ۱\end{aligned}$$

حال با جای‌گذاری در معادله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$(n + ۱) * (n + ۱) = (n^۲ + ۳n + ۱) + n + ۲ = (n + ۲)^۲ - ۱$$

بنابراین ۱۲۰ = ۱۰ * ۱۰ می شود.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

x	$۲x$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

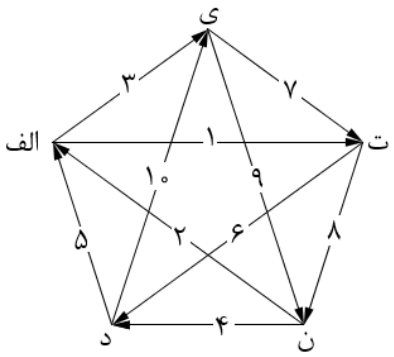
$۲^۹x$	$۲^۸x$

صفحه‌ی شطرنج را به ۱۶ تا مربع ۲×۲ مجاور افراز می‌کنیم. در این صورت در هر مربع ۲×۲ افراز شده مربع کوچک بالا- سمت راست سفید است و اگر مقدار آن خانه x باشد مقدار بقیه‌ی خانه‌های مربع ۲×۲ شامل آن خانه برحسب x به صورت جدول روبه‌رو خواهد بود. بنابراین نسبت مقدار خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در این مربع برابر $\frac{x+۲^۹x}{x+۲x+۲^۸x+۲^۹x}=\frac{۵۱۳x}{۷۷۱x}\approx ۰.۶۶$ است. پس نسب خانه‌های سفید به کل خانه‌ها در کل جدول هم برابر همین عدد است.

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید که طبق خواص مثلث می‌دانیم $BE=\frac{BC+AB-AC}{۲}$ که با توجه به فرض مسئله نتیجه می‌شود که $BE=\frac{BC+AB-AC}{۲}=\frac{۲(AC-AB)+AB-AC}{۲}=\frac{AC-AB}{۲}=\frac{BC}{۴}=\frac{BM}{۲}$. پس E نقطه‌ی وسط پاره‌خط BM و چون L هم وسط AM است K مرکز ثقل مثلث ABM و AE میانه‌ی این مثلث است. پس با توجه به خواص میانه‌ها می‌دانیم که $\frac{AK}{AE}=\frac{۲}{۳}$.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



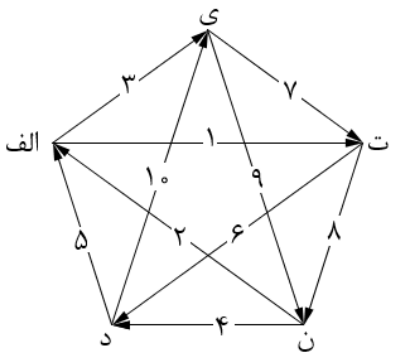
یک گراف جهت‌دار به این صورت می‌سازیم که حروف "الف، ن، د، ت و ی" را به عنوان رئوس اختیار می‌کنیم و به ازای هر بیت دو رأس مربوط به حرف ابتدایی و انتهایی آن بیت را با یالی جهت‌دار به هم وصل می‌کنیم. با این کار به گراف روبه‌رو می‌رسیم. (عددهای نوشته شده روی یال‌ها شماره‌ی بیت مربوط به آن یال را درصورت سؤال نشان می‌دهد.)

حال مشاعره در مسئله معادل با این می‌شود که نفر اول یک یال انتخاب کند و نفر بعد هر بار یالی غیرتکراری که ابتدای آن انتهای یال نفر قبلی باشد انتخاب می‌کند. هر کس که نتواند یالی انتخاب کند بازنده است. با توجه به تقارن وجود در گراف یال‌های $\{۱,۶,۱۰,۹,۲\}$ و همین طور $\{۳,۷,۸,۴,۵\}$ وضعیت مشابهی دارند. پس کافی است یک یال از هر دسته به عنوان یال شروع بازی انتخاب شود و وضعیت بازی بررسی شود.(با توجه به این نکته الآن می‌فهمیم که گزینه‌های (ب) و (د) نمی‌توانند پاسخ مسئله باشند.)

ابتدا فرض کنید که نفر اول یک یال از دسته‌ی اول مثلاً یال ۱ را انتخاب کند. ادعا می‌کنیم در این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود. نفر دوم باید از بین $\{۶,۸\}$ یک یال انتخاب کند. اگر یال ۶ را انتخاب کند نفر

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

اول یال ۵ و اگر یال ۸ را برگزینند، نفر اول یال ۲ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب‌ها بعد از سه حرکت بار دیگر در رأس "الف" هستیم و نفر دوم این بار مجبور است یال ۳ را انتخاب کند و بعد از آن نفر اول یال ۷ را انتخاب می‌کند. با این حرکات دوباره به رأس "ت" که قبلاً در آن بوده‌ایم بازگشته‌ایم و در این مرحله نفر دو به ناچار باید یالی از بین $\{6,8\}$ که قبلاً انتخاب نکرده را انتخاب کند. بعد نفر اول استراتژی حرکت دومش را تکرار می‌کند و به این صورت برای بار سوم به رأس "الف" برگشته‌ایم با این تفاوت که این بار انتخاب جدیدی نداریم و بنابراین نفر اول حتماً برنده است. پس در ۵ یال $\{1,6,10,9,2\}$ نفر اول می‌تواند برنده شود.



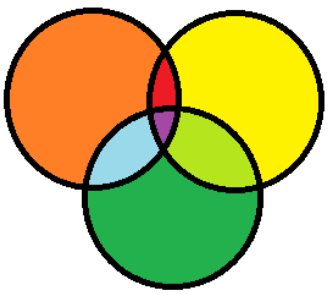
حال ادعا می‌کنیم که در ۵ یال دیگر مثلاً یال شماره‌ی ۳ نفر دوم می‌تواند برنده باشد. در این حالت نفر دوم یال ۷ را انتخاب می‌کند. حال نفر اول برای انتخاب یال بعدی دو حالت دارد.

حالت اول. یال ۸ را انتخاب کند. در این حالت نفر دوم یال ۴ را انتخاب می‌کند. بعد از این نفر یک یکی از دو یال ۱۰ یا ۵ را انتخاب می‌کند. می‌توان به سادگی بررسی کرد که با انتخاب هر کدام از این دو یال انتخاب‌های بعدی به هر نفر تحمیل می‌شود و با انتخاب یال‌ها همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شوند. پس آخرین یال را نفر دو استفاده می‌کند و بنابراین نفر اول که گزینه‌ای برای انتخاب ندارد، بازنده است.

حالت دوم. یال ۶ را انتخاب کند. در این صورت نفر دوم یال ۱۰ را انتخاب می‌کند. با این انتخاب نفر اول مجبور از یال ۹ را انتخاب کند و در مرحله‌ی بعد نفر دوم باید یالی که از رأس "ن" خارج می‌شود را برگزینند. اگر نفر دوم یال ۲ را انتخاب کند، مشابه حالت قبل می‌توان چک کرد که حرکات بعدی به دو نفر به تحمیل می‌شود و در نهایت همه‌ی یال‌ها استفاده می‌شود که این باعث می‌شود نفر دوم پیروز شود.

پس در کل نفر اول با شروع از ۵ یال $\{1,6,10,9,2\}$ می‌تواند برنده‌ی بازی باشد.

۲۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.



با استفاده از هر کدام از این مجموعه‌ها می‌توان مجموعه‌های مجزای زیر را پدید آورد. برای این منظور کافی است دقت کنید که عمل اشتراک را می‌توانیم با استفاده از اجتماع و مکمل داشته باشیم. تعداد کل این زیرمجموعه‌ها ۸ تا هستند

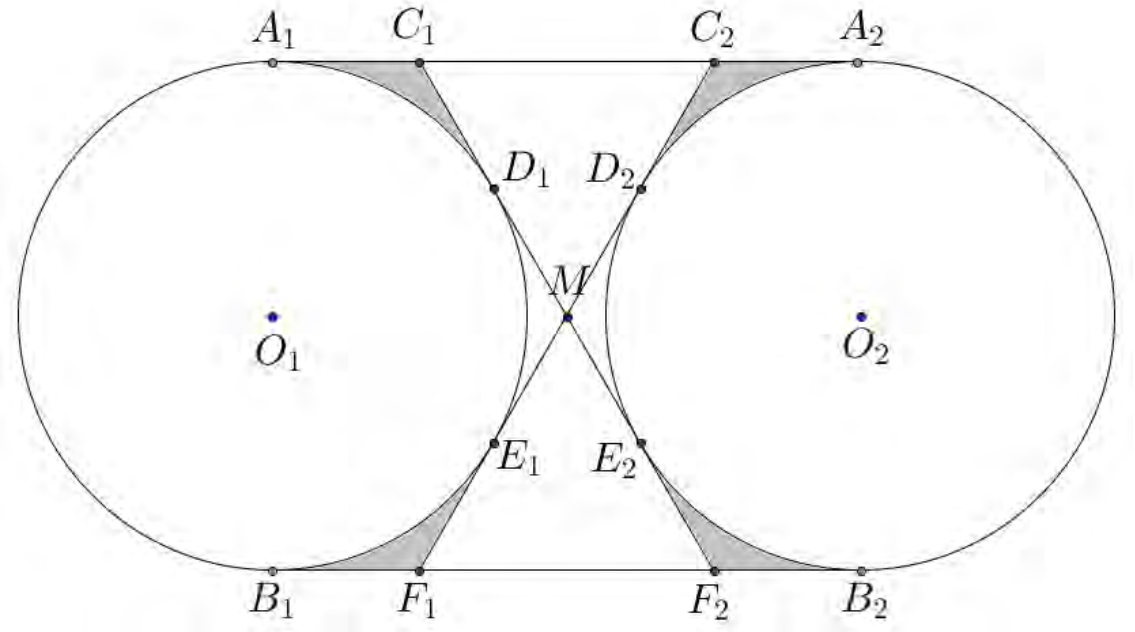
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

که همگی از هم مجزا هستند. این زیرمجموعه‌ها در شکل با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند. (یک ناحیه بیرونی هم هست که با رنگ سفید مشخص شده است.)

حال ما می‌توانیم با کنار هم قرار دادن هر تعداد دل‌خواه از این ۸ مجموعه یک مجموعه‌ی جدید ایجاد کنیم. مثلاً با اجتماع زیر مجموعه‌ی زرد و نارنجی و آبی یک مجموعه به دست می‌آید. پس تعداد کل مجموعه‌های ممکن برابر $۲^۸$ است.

۲۸. گزینه‌ی (۵) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که با توجه به طول شعاع دایره‌ها و فاصله‌ی بین مرکزهای آن‌ها دو دایره خارج از هم قرار دارند. حال ادعا می‌کنیم نواحی رنگی شکل زیر تنها نقاطی خارج از دایره‌ها هستند که هر خط گذرنده از آن‌ها حداقل یکی از دو دایره را قطع می‌کند. (خط‌های رسم شده مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره هستند.)



ابتدا دقت کنید که اگر نقطه‌ای درون مثلث‌های $MC_۱C_۲$ و یا $MF_۱F_۲$ باشد خط واصل بین آن نقطه و M هیچ‌کدام از دایره‌ها را قطع نمی‌کند. اگر نقطه‌ای هم بیرون از دو دایره و چهارضلعی $A_۱A_۲B_۲B_۱$ باشد به راحتی می‌توان از آن نقطه خطی گذرند که هیچ‌کدام از دایره‌ها را قطع نکند. اگر هم نقطه‌ای درون قسمت‌های خارج از دایره‌های مثلث‌های $MD_۱E_۱$ و $MD_۲E_۲$ باشد. خط مماس بر دایره‌ی نزدیک‌تر از آن نقطه تنها در یک نقطه آن دایره را قطع می‌کند و با دایره‌ی دیگر اشتراکی ندارد. حال می‌توان این خط مماس را اندکی تغییر داد طوری که دایره‌ی نزدیک‌تر را هم قطع نکند. حال نشان می‌دهیم که اگر نقطه‌ای

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

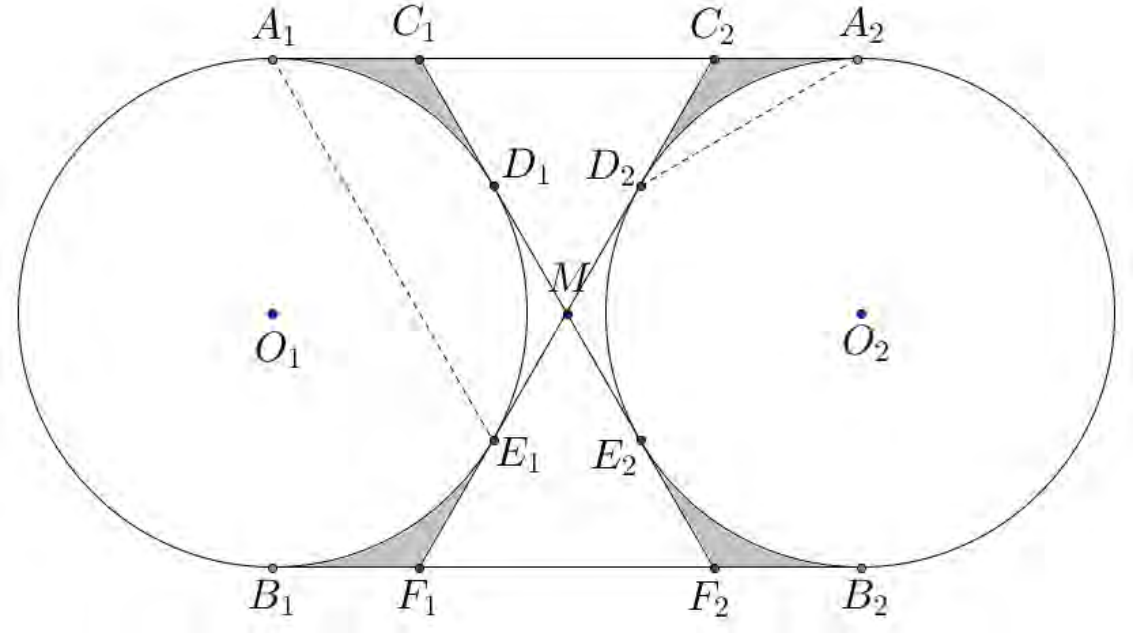
در یکی از نواحی رنگی مثلاً قسمت رنگی درون مثلث $C_۲A_۲D_۲$ باشد هر خط گذرا از آن دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع می‌کند.

برای این منظور از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم. نقطه‌ی X درون مثلث ABC قرار دارد. هر خط گذرا از X یا از یک رأس و یک ضلع مثلث عبور می‌کند یا دقیقاً دو ضلع را قطع می‌کند.

اثبات این لم به سادگی و با در نظر گرفتن دو نیم‌خطِ خط گذرنده از X انجام می‌شود.

حال در مسئله‌ی اصلی نقطه‌ای را درون ناحیه‌ی رنگی مثلث $C_۲A_۲D_۲$ و یک خط دل‌خواه گذرنده از آن نقطه را در نظر بگیرید.



اگر ضلع $A_۲D_۲$ را قطع کند یا از یکی از رئوس مثلث بگذرد با دایره‌ی به مرکز $O_۲$ تقاطع دارد. پس فرض کنید خط با $A_۲D_۲$ اشتراکی ندارد. بنابراین باید دو ضلع $A_۲C_۲$ و $D_۲C_۲$ را قطع کند. حال دقت کنید که از آن‌جا که این خط با $C_۲E_۱$ تقاطع دارد باید شامل نقطه‌ای درون مثلث $A_۱C_۲E_۱$ باشد. دقت کنید که این خط با ضلع $C_۲E_۱$ از این مثلث تقاطع دارد ولی با ضلع $C_۲A_۱$ تقاطع ندارد.(زیرا تقاطع این خط با خط شامل $C_۲A_۱$ در پاره‌خط $A_۲C_۲$ است.) بنابراین طبق لم بالا این خط به ناچار باید با ضلع $A_۱C_۱$ اشتراک داشته باشد و بنابراین این خط دایره‌ی به مرکز $O_۲$ را قطع می‌کند. با توجه به تقارن شکل اثبات ادعا برای دیگر نواحی رنگ‌شده هم مشابه است و بنابراین اثبات درستی ادعا کامل می‌شود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

بنابراین کافی است مساحت چهار ناحیه‌ی رنگ‌شده‌ی شکل را محاسبه کنیم. برای این منظور دقت کنید که $\sin(\angle D_۲MO_۲) = \frac{D_۲O_۲}{O_۲M} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ پس $\angle D_۲MO_۲ = ۶۰^\circ$ و به تبع آن با اندکی محاسبه خواهیم داشت که:

$$\angle D_۲O_۲A_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle C_۲O_۲D_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow C_۲A_۲ = A_۲\,\mathrm{O}_۲ . \tan(۳۰^\circ) = ۱$$

پس برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی مورد نظر داریم:

$$\text{مساحت ناحیه‌ی رنگی} = ۸ \times (\text{مساحت مثلث } C_۲O_۲A_۲) - \frac{۲}{۳} \times \text{مساحت دایره}$$

$$= ۸ \times \frac{۱ \times \sqrt{۳}}{۲} - \frac{۲}{۳} \times \pi(\sqrt{۳})^۲ = ۴\sqrt{۳} - ۲\pi$$

۲۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

راه‌حل اول. فرض کنید رنگ‌های مورد استفاده را با چهار شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ نمایش دهیم. به این ترتیب برای رنگ‌آمیزی چهارخانه‌ی بالا راست جدول $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ حالت داریم. فرض کنید چهار خانه‌ی بالا سمت راست جدول به صورت زیر رنگ شده باشند.

۱	۴			
۲	۳			

در این صورت برای دو خانه‌ی اول سطر سوم باید شامل ۱ و ۴ و دو خانه‌ی اول سطر چهارم باید شامل ۲ و ۳ باشند. حال بر حسب حالت‌های مختلفی که این چهار خانه می‌توانند رنگ‌آمیزی شوند مسئله را حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول.

۱	۴			
۲	۳			
۴	۱			
۲	۳			

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

در این حالت خانه‌ی دوم از ستون سوم در سه مربع ۲×۲ حاضر است، پس نمی‌تواند برابر ۱، ۴ و ۳ باشد و لذا به ناچار ۲ است. با مشخص شدن این خانه می‌توان رنگ بقیه‌ی خانه‌های این ستون و با استدلال مشابه رنگ بقیه‌ی خانه‌های جدول را به طور یک‌تا مشخص کرد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حالت دوم.

۱	۴			
۲	۳			
۴	۱			
۳	۲			

در این حالت هم کاملاً مشابه حالت اول رنگ بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود.(ابتدا خانه‌ی دوم از ستون سوم که باید برابر ۲ باشد، سپس بقیه‌ی خانه‌های این ستون و به همین شکل بقیه‌ی جدول)

حالت سوم.

۱	۴			
۲	۳			
۱	۴			
۳	۲			

این حالت هم مشابه حالت‌های قبلی بقیه‌ی جدول به طور یک‌تا تعیین می‌شود با این تفاوت که ابتدا رنگ خانه‌ی سوم از ستون سوم مشخص می‌شود.

حالت چهارم.

۱	۴			
۲	۳			
۱	۴			
۲	۳			

در این جا برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون سوم دو حالت ۱ و ۲ داریم. با انتخاب رنگ این خانه رنگ بقیه‌ی ستون تعیین می‌شود. سپس برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون چهارم که رنگ کلیه‌ی خانه‌های این ستون را تعیین می‌کند هم دو حالت ۳ و ۴ داریم. در نهایت برای انتخاب رنگ خانه‌ی اول ستون پنجم هم دو حالت ۱ و ۲ را داریم. با انتخاب رنگ این خانه ستون پنجم هم تعیین می‌شود. پس در این حالت برای رنگ‌آمیزی جدول ۸ حالت داریم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

بنابراین در کل با توجه به انتخاب رنگ ۴ خانه‌ی اولیه $۲۴ \times (۱ + ۱ + ۱ + ۸) = ۲۴ \times ۱۱۲ = ۲۶۴$ حالت داریم.

راه‌حل دوم. می‌توان به سادگی نشان داد که در هر چنین جدولی یا خانه‌های همه‌ی سطرها یک در میان رنگ‌شده‌اند یا خانه‌های همه‌ی ستون‌ها. به علاوه اگر خانه‌های یک سطر به صورت یک در میان رنگ شده باشند می‌توان نشان داد که خانه‌های همه‌ی سطرها باید یک در میان رنگ شده باشند و حکم مشابه برای ستون‌ها هم درست است. پس باید تعداد جدول‌هایی را بشماریم که سطرها یا ستون‌های آن به صورت یک در میان رنگ شده اند.
در حالتی که سطرها یک در میان باشند. در سطر اول ۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و ۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود ۱۲ حالت. برای سطر دوم ۲ حالت و سطر سوم نیز ۲ حالت و سطر چهارم هم ۲ حالت. که در کل ۹۶ حالت می‌شود.

در حالتی که ستون‌ها یک در میان باشند: برای ستون اول ۴ حالت برای رنگ خانه‌ی اول و ۳ حالت برای رنگ خانه‌ی دوم داریم که می‌شود ۱۲ حالت. برای ستون دوم ۲ حالت و ستون سوم نیز ۲ حالت و ستون چهارم هم ۲ حالت و هم‌چنین ستون آخر که در کل ۱۹۲ حالت می‌شود.
جدول‌هایی که هم سطر و هم ستون آن ها یک در میان است در خانه‌ی گوشه سمت چپ ۴ حالت، خانه‌ی مجاور ۳ حالت و خانه زیرین آن ۲ حالت دارد و بقیه به طور یک‌تا تعیین می‌شوند و بنابراین تعداد آن‌ها ۲۴ است.
در نهایت تعداد کل جدول‌ها به کمک اصل شمول و عدم شمول به دست می‌آید:

$$۲۴ \quad - \quad ۱۹۲ \quad + \quad ۹۶ = ۲۶۴$$

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

گزینه‌های (الف) و (ه) به دلیل تقارن حذف می‌شوند؛ به این معنی که اگر نقطه‌ی (α, β) در هر کدام از این معادله‌ها صدق کند نقطه‌ی (β, α) هم صدق می‌کند. بنابراین باید نمودار جواب آن‌ها باید نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم محورهای مختصات متقارن باشد که نمودار مسئله این طور نیست.
دلیل رد گزینه‌ی (ب) این است که اگر در معادله‌ی این گزینه قرار دهیم $y = ۰$ معادله به صورت $\cos x + x^۲ = ۲$ در می‌آید که یک تابع زوج است یعنی به ازای جمیع مقادیر x که در این رابطه

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

صدق می‌کند $-x$ نیز صدق می‌کند. یعنی باید نقاطی که نمودار محور x را قطع کرده نسبت به خط محور yها متقارن باشد که نمودار صورت سؤال چنین نیست.

دلیل رد گزینه‌ی (ج) این است که اگر در معادله قرار دهیم $x = ۰$ معادله به صورت $y = ۱$ تبدیل می‌شود، یعنی مجموعه‌ی جواب رابطه‌ی مربوط به این گزینه باید محور y ها را باید تنها در یک نقطه قطع کند که باز هم نمودار رسم‌شده در صورت سؤال این‌گونه نیست.

پس این ۴ گزینه رد می‌شوند و تنها گزینه‌ی (د) باقی می‌ماند که صحیح است.

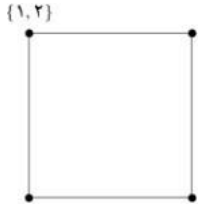
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

. . . . . .

P . . . . . ۷۰° . . . . . $\ell_۲$ $\ell_۱$ . . .

. . . . . PAQ . . . . . A . . . Q . .

۱۴۵° ۱۲۵° ۵۵° ۴۵° ۳۵°



$\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$

($(۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + ۹x^۸ + ۱۰x^۹)^۲$

. . . . . ۱۰×۲۰ . . . . .

. . . . . .

. . . . . ۱۱×۲۱ . . . . .

$$\sqrt{\left(۴۵ + ۴\sqrt{۴۱}\right)^۳} - \sqrt{\left(۴۵ - ۴\sqrt{۴۱}\right)^۳}$$

$۹۰\sqrt[۳]{۲}$ $۱۰۶\sqrt{۴۱}$ $۴\sqrt{۴۱}$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

$a_{15} = 9 \quad a_{1000} = 36 \quad a_{30} \quad a$

$a_6 = 7 \quad a_{mn} = a_m + a_n \; n \quad m$

$a > 1 \quad ab = a^b \; b \neq 0 \quad \frac{a}{b} = a^{3b} \quad b^{-a}$

$\frac{1}{2}$

i

i



$ABCD \qquad C \quad A$

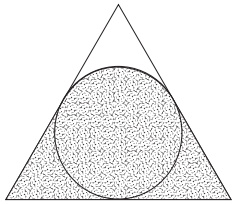
$AB \quad CD$

$B \quad D$

$x^5 \qquad (x+1)(x+2)\cdots(x+7)$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

x $[x]$ $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]$ n



$\pi + ۵\sqrt{۳}$ $\pi + \sqrt{۳}$ $\pi + ۶\sqrt{۳}$

$\frac{\pi}{۲} + ۴\sqrt{۳}$ $\frac{\pi}{۲} + ۲\sqrt{۳}$

. .. . E D C B A .. ..

.. .. E D C B A . . . . . .

... . **دوقلو** . . $(\overline{xyzxyz})_۹$ . . . .

.. . . . z y x . .. . d . . d . . ..

$$A = \left\{\sqrt{۲} - \frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad B = \left\{۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ \leq ۲\right\} \quad , \quad D = \left\{\frac{m}{۲^n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

B $\mathbb{R} - D$ $C \cup A$ $A \cup B$ $C \cap D$

. . . . $\{۱, ۲, \ldots, ۲۸\}$ . . . .

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$k \in \mathbb{N}$ A_k

$$\begin{cases} A_1 = \\ A_{k+1} = \{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{k+1} \mid a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in A_k\} \end{cases}$$

. A_k . . . . . a_{k+1} . . . a_2 a_1 . . . . .

$۲^{۶۰} \times ۳^{۱۲} \times ۵^۶$ $۲^{۱۱۱} \times ۳^۹$ $۲^{۲۳۱} \times ۷^{۲۵}$ $۲^{۲۵} \times ۵^{۲۵}$ $۲^{۲۴۳} \times ۳^۷$

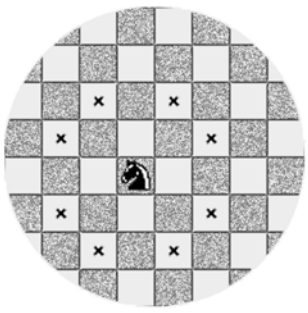
. . . . . .

			۱۷				۲۰				?	

$$\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - \sqrt{\ldots \sqrt{۱ - x}}}}$$

$\{۰\}$ $\{۱\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \le x \le \frac{۱}{۲^{۱۰}}\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \le x \le ۱\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le ۱\}$

۹۹×۹۹



L

$۹۹^۲ - ۱$

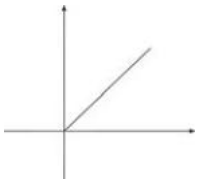
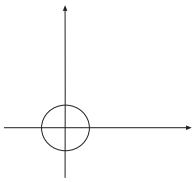
$۵^{۲(x+۱)} + ۶۲۱ \times ۱۰^x = ۱۰۰ \times ۴^x$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

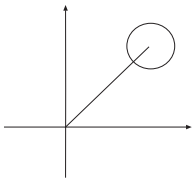
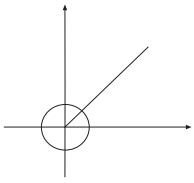
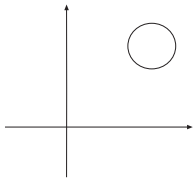
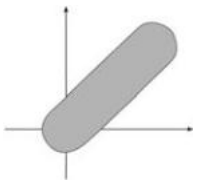
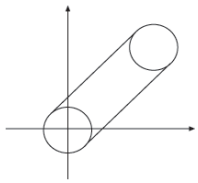
$A \oplus B$ B A

$$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$$

B A

$A \oplus B$

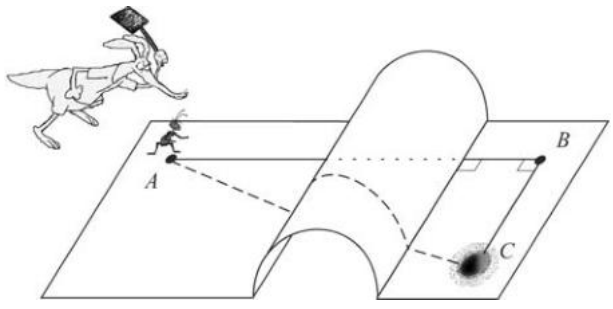






قطر . . . .

. . .. d . . B A . . . .

$A \oplus B$ $A \oplus B$

$۳d$ $۲d$ $۲d$ $\sqrt{۲}d$ $۲d$ d $\sqrt{۳}d$ $\sqrt{۲}d$ d d



ABC

$BC = ۶$ $AB = ۱۰ - \pi$ $\hat{B} = ۹۰^\circ$

C A AB

C A

$۷ + \pi$ $\sqrt{۱۳۶} - \pi$ $\sqrt{۱۳۶}$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

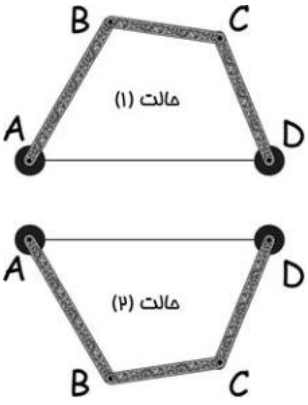
. . . . . a . . . .

۵a + ۴ ۴a + ۳ ۳a + ۲ ۲a + ۱

۳۰^۱۳۸۳ − ۱

0 1234567 89 23:59 00:00

. 1



C B CD BC AB

D A

AD

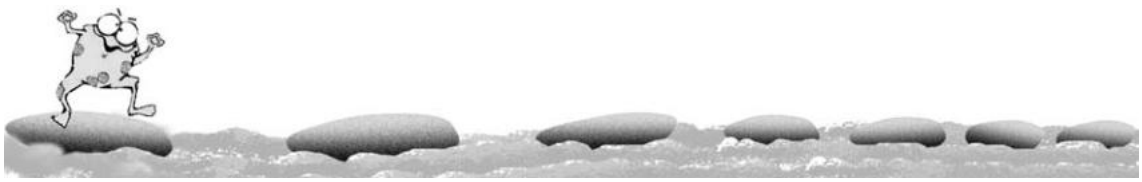
BC CD AD = ۱۰

AB

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

$$(۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + ۹x^۸ + ۱۰x^۹)^۲$$

. . . . . i . . . . . i . . .



. . . . . $\{۱, ۲, \ldots, ۶\}$ . . . . . .

x $[x]$ $\left[\frac{n^۲}{۳}\right] n$

$ABCD$

$ABCD$

$\sqrt{۲}$ $\frac{\sqrt{۷}}{۷}$ $\frac{۶}{۵}$ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

. . . . . ABC . . C . . . . $AB = AC$ ABC . . . . . .

$\frac{BC}{AB}$

$\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ $\frac{۱}{۲}$ $\sqrt{۲}$ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$y = ۲b(a-x)$ $y = x^۲ - ۲ax + ۱$

$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^۲ \mid$ $\}$

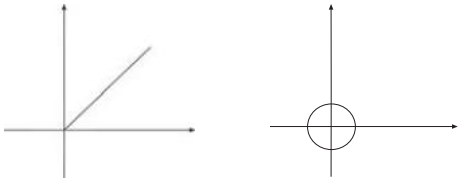
A

π A $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ $\frac{\pi}{۴}$

$y = x$

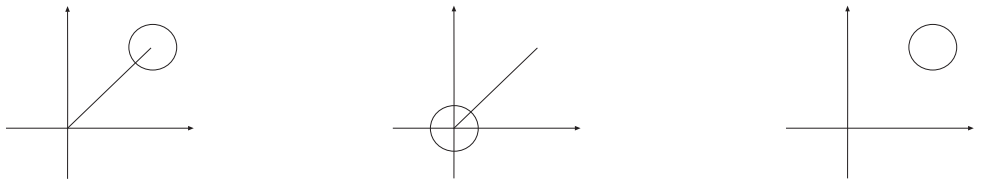
$A \oplus B$ B A

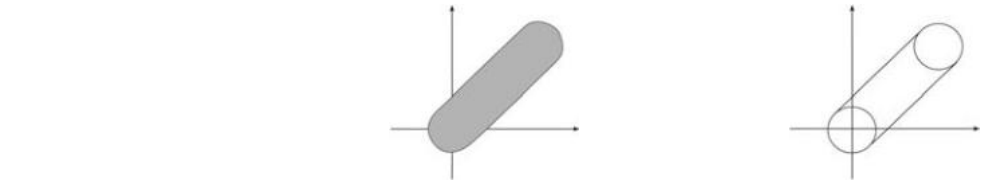
$$A \oplus B = \{(x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲) \mid (x_۱, y_۱) \in A, (x_۲, y_۲) \in B\}$$



B A

$A \oplus B$





قطر

d B A

$A \oplus B$ $A \oplus B$

$۳d$ $۲d$ $۲d$ $\sqrt{۲}d$ $۲d$ d $\sqrt{۳}d$ $\sqrt{۲}d$ d d

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$k \in \mathbb{N}$ A_k

$$\begin{cases} A_۱ = \\ A_{k+۱} = \{a_۱ \times a_۲ \times \cdots \times a_{k+۱} \mid a_۱, a_۲, \ldots, a_{k+۱} \in A_k\} \end{cases}$$

A_k ..... $a_{k+۱}$ ... $a_۲$ $a_۱$ .....

$۲^{۶۰} \times ۳^{۱۲} \times ۵^{۶}$ $۲^{۱۱۱} \times ۳^{۹}$ $۲^{۲۳۱} \times ۷^{۲۵}$ $۲^{۲۵} \times ۵^{۲۵}$ $۲^{۲۴۳} \times ۳^{۷}$

$$\frac{۱}{x} = \frac{a}{x+y} - \frac{۱}{y}$$ a

a

ABC

DAC D BC

$۹۰^\circ - \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{۲}$ $۹۰^\circ - \widehat{B}$ $۹۰^\circ - \widehat{A}$ $\frac{\widehat{B}}{۲}$ $\frac{\widehat{A}}{۲}$

h . $h(x) = \frac{kf(x)}{۱ - f(x)}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\frac{x}{f \circ h^{-۱}(x)} - x$

$\frac{x}{f(x)} - x$ k kx $h(x)$ $f(x)$

$۲(۱ + \frac{۵}{۳}\pi)$ $۲(۱ + \pi)$ $۲(۱ + \frac{۲}{۳}\pi)$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

. . . . . n . . . . . n . . . . . $S(n)$ . . .

$S(n)$ n

. . . . . a . . . . . .

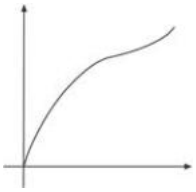
$۵a+۴$ $۴a+۳$ $۳a+۲$ $۲a+۱$

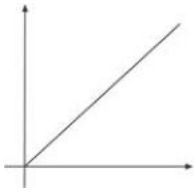
$۳۰^{۱۳۸۳}-۱$

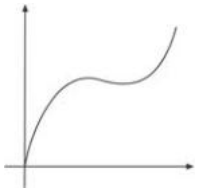
$f_{۱۳۸۳}(x)$ f $_{n+۱}(x)=\sqrt{۱-f_n(x)}$ $n \geq ۰$ $f_۰(x)=x$

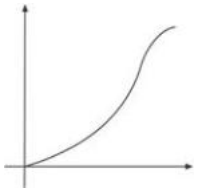
$\{۰\}$ $\{۱\}$ $[۰,\frac{۱}{۲۱۳۸۳}]$ $[۰,۱]$ $(-\infty,۱]$

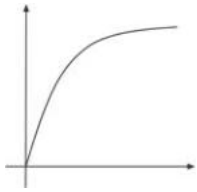












. . . . YB XA . . . . . XY ۶۰° . . . AB . . . . .

PXY P

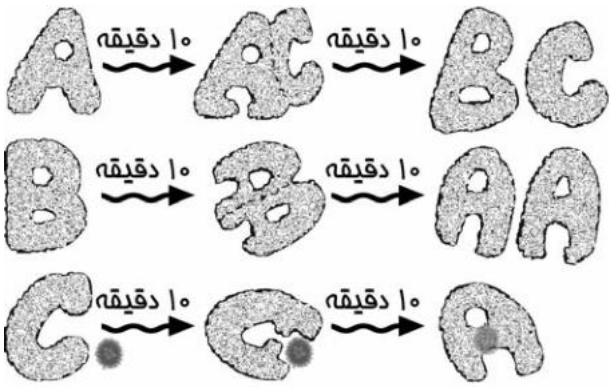
$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ AB $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ AB $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

یکنوا



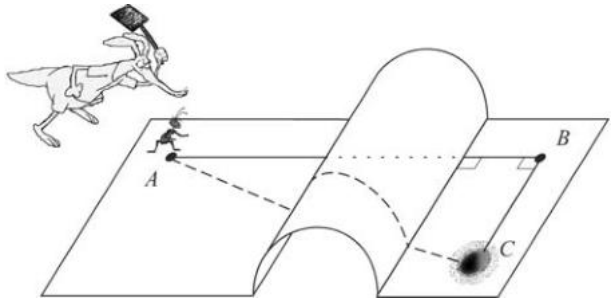
$$\begin{cases} ۲A^۶ + ۲A^۲ + A + B = \overline{O} \\ A^۲ - A + I = \overline{O} \end{cases}$$

$$A + ۳B = \overline{O} \qquad A + B = I \qquad ۳A + B = \overline{O}$$

$$A^۲ + B^۲ = \overline{O}$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$\frac{x}{۳} + \left[\frac{x}{۳}\right] = \sin x + [\sin x]$ $[a]$ a



ABC

$\widehat{B} = ۹۰^\circ$ $AB = ۱۰ - \pi$ $BC = ۶$

AB A C

C A

$\sqrt{۱۳۶}$ $\sqrt{۱۳۶} - \pi$ $۷ + \pi$

$(n+۱, m+۱)$ $(-n-۱, -m-۱)$

(m, n)

$m = ۱$ $n = ۳$ $m = ۲$ $n = ۳$ $m = ۳$ $n = ۵$

$m = ۴$ $n = ۷$ n m

$(x) = x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱$ f $f(x^{۱۲})$ $f(x)$

$x^۳ + x^۲ + x + ۱$ $x^۲ - x + ۶$ $x + ۶$ $۶ - x$



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و سومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۳

---

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

به ازای هر جمله‌ی ax^ix^j، جمله‌ی ax^jx^i نیز وجود دارد که در مجموع ضریبی زوج می‌سازد مگر اینکه $i=j$. به ازای حالاتی که i فرد باشد و ضریب x^i نیز زوج است، جمله‌ی x^{2i} ضریب زوج خواهد داشت.

در نتیجه به ازای $i=0,4,8,12,16$ ضرایبِ x^i، فرد هستند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

بیایید از آخر مسئله را حل کنیم. فرض می‌کنیم که در حال حاضر روی سنگ iاُم هستیم و تعداد روش‌های مختلف برای رسیدن به سنگ ۷اُم را یادداشت می‌کنیم. ابتدا مسئله را برای سنگ ۷اُم حل می‌کنیم (۱ روش). سپس برای سنگ ۶اُم و ...

در هر مرحله کافی است که برای سنگ iاُم، مجموع تعداد روش‌های سنگ‌های $i+1$اُم تا $2i$اُم را محاسبه کنیم. در نتیجه جواب مسئله این‌گونه به دست می‌آید:

$$7:1 \rightarrow 6:1 \rightarrow 5:2 \rightarrow 4:4 \rightarrow 3:7 \rightarrow 2:11 \rightarrow 1:11$$

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

دو حالت برای انتخاب زیرمجموعه‌ها ممکن است:

حالت اول: یکی از اعضا در سه زیرمجموعه آمده باشد. تعداد حالات برابر است با: $6\times\binom{5}{3}=60$

حالت دوم: هر عضو دقیقا در دو زیرمجموعه آمده است. تعداد حالات برابر است با: $\binom{6}{3}=20$

تعداد کل روش‌ها برابر مجموع این دو حالت یعنی ۸۰ است.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم n^2 بر ۳ برابر صفر یا یک است پس این چنین عددی به صورت $3k$ و یا $3k+1$ است.

اگر به صورت $3k$ باشد: $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ بر ۳ بخشپذیر است. در نتیجه تنها به ازای $\left[\frac{n^2}{3}\right]=3$ عدد اول خواهیم داشت.

اگر به صورت $3k+1$ باشد: $\left[\frac{n^2}{3}\right]=\frac{(n-1)(n+1)}{3}$. در نتیجه تنها در صورتیکه $n=4$ باشد، $\left[\frac{n^2}{3}\right]=5$ عدد اول خواهد بود.

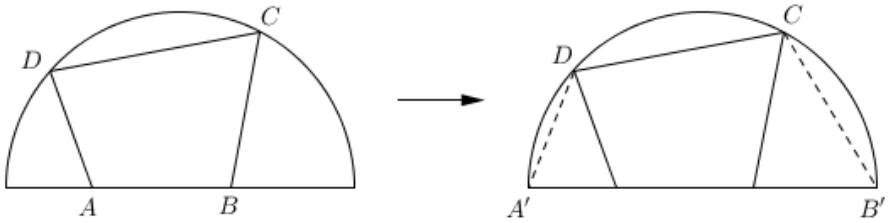
در مجموع دو عدد با ویژگی سوال وجود دارد.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

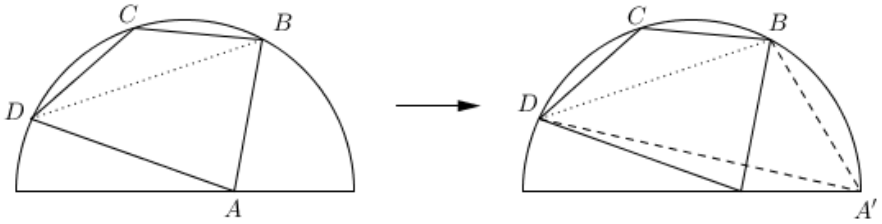
ابتدا ادعا می‌کنیم که چهارضلعی که بیش‌تری مساحت را دارد، همه‌ی رئوسش روی محیط نیم‌دایره قرار دارند.

دقت کنید که حداکثر دو رأس از رئوس چهارضلعی می‌تواند روی قطر نیم‌دایره باشد.

اگر مطابق شکل زیر دقیقاً دو رأس روی قطر باشد، می‌توان مطابق شکل زیر دو رأس را طوری جابه‌جا کرد که مساحت چهارضلعی بیش‌تر شود.



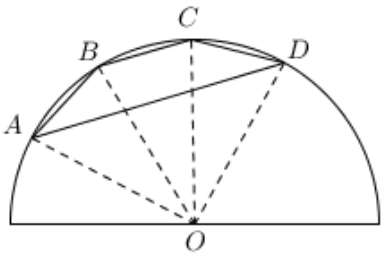
اگر هم تنها یک رأس روی قطر باشد(مثلاً رأس A) می‌توان آن رأس را با یکی از دو سر قطر که از نقاط روی کمان نیم‌دایره هستند طوری جابه‌جا کرد که ارتفاع مثلث ABD و تبع آن مساحت چهارضلعی کم نشود.



حال فرض کنید چهار نقطه‌ی A، B، C و D به همین ترتیب روی دایره هستند. اگر نقطه‌ی B دقیقاً وسط A و C نباشد و B را با وسط کمان AC عوض کنیم ارتفاع مثلث ABC و به تبع آن مساحت

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مثلث زیاد می‌شود. پس در مثلثی که بیش‌ترین مساحت را دارد، کمان AB و BC برابر هستند. با استدلال کاملاً مشابه کمان‌های BC و CD هم باید برابر باشند.

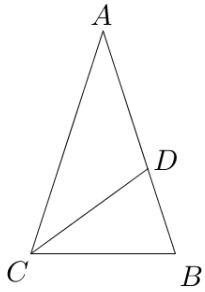


پس چهارضلعی با بیش‌ترین مساحت ذوزنقه‌ی با رئوس روی محیط نیم‌دایره است. اگر زاویه‌ی کمان AB برابر α باشد $(۰ \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۳})$ ، مطابق شکل روبه‌رو برای مساحت چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(AOB) + S(BOC) + S(COD) - S(AOD) \\ &= ۳S(AOB) - S(AOD) \\ &= \frac{۳}{۲}\sin\alpha - \frac{۱}{۲}\sin(۳\alpha) = \frac{۳}{۲}\sin\alpha - \frac{۱}{۲}(۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha) \\ &= ۲\sin^۳\alpha \leq ۲\sin^۳(\frac{\pi}{۳}) = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۳ \\ &= \frac{۳\sqrt{۳}}{۴} \end{aligned}$$

پس بیش‌ترین مقدار مساحت برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ است.

۶. گزینه‌ی (۵) صحیح است.



مطابق شکل روبه‌رو اگر $\angle CDB \geq ۹۰^\circ$، با توجه به این که مثلث CDB متساوی‌الساقین است باید $\angle DBC = \angle DCB = \frac{۱}{۲}\angle ACB$ که امکان ندارد. پس $\angle CDB \leq ۹۰^\circ$. این نتیجه می‌دهد که $\angle ADC \geq ۹۰^\circ$ و با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ADC، باید $\angle CAD = \angle ACD = \frac{۱}{۲}\angle ACB$. با توجه به این اطلاعات از یک سو مثلث‌های BDC و ABC با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها نتیجه می‌دهد که $BC^۲ = BD.BA$ و از طرف دیگر با توجه به این که CD نیم‌ساز است داریم $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} BC^۲ = BD.BA \Rightarrow (\frac{BC}{BA})^۲ = \frac{BD}{BA} \\ \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{AC+BC} = \frac{BC}{AC+CB} = \frac{BD}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\frac{BC}{AB})^۲ = \frac{\frac{BC}{AB}}{۱ + \frac{BC}{AB}}$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

که با طرفین وسطین رابطه‌ی آخر و با توجه به این که $\frac{BC}{AB} > ۰$، به معادله‌ای درجه دو برای $\frac{BC}{AB}$ می‌رسیم که از حل آن نتیجه می‌شود $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$.

۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر برای یک a, b خاص خط و سهمی یک‌دیگر را قطع کنند به زبان جبر این موضوع یعنی این که دست‌گاه معادلات $\begin{cases} y = x^2 - ax + 1 \\ y = 2b(a - x) \end{cases}$ جواب دارد . به این ترتیب باید حالاتی را بیابیم که این دست‌گاه جواب دارد.

رابطه‌ی دوم را در رابطه اول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - ax + 1 \\ y = 2b(a - x) \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow x^2 + (2b - 2a)x + 1 - 2ab = 0$$

قطع کردن سهمی و خط به این معنی است که معادله درجه دو بالا جواب حقیقی داشته باشد و این معادله زمانی جواب حقیقی دارد که مبین (دلتا-Δ) آن منفی نباشد به عبارت دیگر اگر بخواهیم این دو هم‌دیگر را قطع نکنند مبین عبارت بالا باید منفی باشد.

$$\Delta < 0 \rightarrow (2b - 2a)^2 - 4(1 - 2ab) < 0$$

$$4a^2 + 4b^2 - 8ab - 4 + 8ab < 0 \rightarrow 4a^2 + 4b^2 < 4 \rightarrow a^2 + b^2 < 1$$

مجموعه نقاط (a, b) در صفحه که $a^2 + b^2 = 1$ دایره به شعاع یک به مرکز مبدأ است. بنابراین $a^2 + b^2 < 1$ نقاط درون این دایره را شامل می‌شود .بنابراین مساحت این ناحیه از رابطه‌ی مساحت دایره به دست می‌آید:

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید که تعداد خطوط افقی، عمودی و مورب به ترتیب x، y و z باشد. در صورتی که این نقاط با یکدیگر تقاطعی نداشته باشند (موازی باشند)، تعداد ناحیه‌ها برابر با $x + y + z + 1$ خواهد بود. به ازای هر نقطه‌ی

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

تقاطع بین خطوط یک ناحیه به شکل اضافه می‌شود. تعداد نقاط تقاطع در شکل برابر است با $xy + yz + xz$

$$xy + yz + xz + x + y + z + 1 = \frac{(x + y + z)^2}{2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + 19$$

$$= 181 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

با توجه به این‌که مجموع این سه عدد برابر ۱۸ است، طبق نامساوی حسابی-مربعی:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \geq 54 \Rightarrow x = y = z = 6 \Rightarrow 181 - 54 = 127$$

در صورتی که هیچ سه خطی با یک‌دیگر در یک نقطه تقاطع نداشته باشند این تعداد ناحیه به وجود خواهد آمد.

۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

به ازای هر نقطه در شکل، ابتدا نقطه‌ای با فاصله‌ی واحد روی خط A پیدا می‌کنیم و دایره‌ای به شعاع واحد از آن می‌گذرانیم. بدین ترتیب مرکز دایره (x_2, y_2) و موقعیت نقطه نسبت به مرکز (x_1, y_1) خواهد بود.

۱۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.

کم‌ترین فاصله: در صورتی که تنها نقاطی که بیش‌ترین فاصله را از یک‌دیگر دارند در دو شکل در نظر بگیریم، ادغام دو شکل چهار نقطه خواهد شد که تشکیل یک لوزی را می‌دهند (چون فاصله‌ی ضلع‌ها همگی برابر با d است). در لوزی نیز می‌دانیم بیش‌ترین فاصله زمانی کمینه خواهد شد که شکل مربع باشد که این فاصله برابر $\sqrt{2}d$ است. مثال برای این حالت دو پاره‌خط است که بر یک‌دیگر عمود هستند.

بیش‌ترین فاصله: هر دو نقطه که در شکل نهایی در نظر بگیرید، از مجموع دو نقطه در هر شکل بدست آمده است که از یک‌دیگر حداکثر d واحد فاصله دارند. پس در مجموع فاصله‌ی آن‌ها از یک‌دیگر حداکثر $2d$ خواهد شد. مثال برای این حالت دو خط است که موازی یک‌دیگر هستند.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

هر عدد در A_k دقیقا از ضرب $k!$ عدد اول تشکیل شده است. این حکم به سادگی با استقرا اثبات می‌شود و از طرفی هر عدد با این ویژگی نیز در A_k وجود دارد چرا که می‌توانیم هر عددی را به عوامل اولش تقیسم کنیم و آن را بسازیم. در بین گزینه‌ها تنها $2^{111} \times 3^9$ است که تعداد عوامل اولش $6! = 120$ باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

با ساده‌سازی روابط به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{x} = \frac{ay - x - y}{(x+y)y} \Rightarrow xy + y^2 + x^2 = (a-1)xy$$

به وضوح $a > 3$. اگر x و y را بر ب.م.م آن‌ها تقسیم کنیم تا نسبت به هم اول باشند، در رابطه‌ی بالا از طرفی سمت راست تساوی بر x و y بخش‌پذیر هستند. پس سمت چپ تساوی هم باید بر این دو عدد بخشپذیر باشد. بدین ترتیب ثابت می‌شود $x|y$ و $y|x$.(x و y بعد از تقسیم به ب.م.م نسبت به هم اول هستند.) در نتیجه:

$$x = y \Rightarrow a = 4$$

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌توان به سادگی و با اندکی برابر زاویه‌ها نشان داد که قرینه‌ی مرکز ارتفاعی نسبت به خود ضلع BC هم روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را E می‌نامیم. با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث HDE(H مرکز ارتفاعی است.) می‌توان نتیجه گرفت $DE \parallel BC$ و بنابراین داریم:

$$\angle DAC = \frac{۱}{۲}\widehat{DC} = \frac{۱}{۲}\widehat{BE} = \angle BAD = ۹۰^\circ - \angle B$$

۱۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

در ابتدا سعی می‌کنیم $h^{-1}(x)$ را بدست آوریم. فرض کنید $h(x) = y$:

$$h(x) = \frac{kf(x)}{1 - f(x)} \Rightarrow (k+y)f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}\left(\frac{y}{k+y}\right)$$

$$\Rightarrow fo\,h^{-1}(x) = \frac{x}{k+x} \Rightarrow \frac{x}{fo\,h^{-1}(x)} - x = \frac{kx + x^2 - x^2}{x} = k$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در صورتی که تعداد تاهای افقی و عمودی به ترتیب x و y باشد، تعداد خطوط افقی و عمودی برابر با $2^x - 1$ و $2^y - 1$ خواهد بود (به ازای هر خط اضافه تعداد نواحی دو برابر می‌شود). در نتیجه اگر تعداد خطوط در انتها برابر با ۳۱۸ باشد داریم:

$$2^x + 2^y = 320 = (101000000)_2 \Rightarrow \{x, y\} = \{6,8\} \Rightarrow x + y = 14$$

۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

شکل نهایی این سوال از چند بخش تشکیل شده است:

- یک مکعب مستطیل که عمود بر مربع ساخته شده است به حجم ۲.
- چهار نیم استوانه که به محوریت ضلع‌های مربع ساخته شده‌اند به حجم $4 \times \frac{\pi}{2} = 2 \times \pi$.
- چهار تا ربع کره که یک کره‌ی کامل را تشکیل می‌دهند به حجم $\frac{4\pi}{3}$.

پس در مجموع حجم شکل برابر است با: $2 \times \left(1 + \frac{5\pi}{3}\right)$

۱۷. در صورتی که مجموع هفت رقم برابر با عددی شود که دو رقم دیگر را داراست، این هفت رقم می‌توانند به ۵۰۴۰ = !۷ حالت مختلف چیده شوند. در نتیجه پاسخ مسئله بر این عدد بخشپذیر است.

با توجه به اینکه مجموع ارقام ۱ تا ۹ برابر با ۴۵ است باید دو رقم را حذف کنیم که مجموع بقیه، از این دو رقم شکل گرفته باشد.

- اگر دهگان مجموع ۴ باشد: عدد ۴ حذف شده و مجموع کمتر از ۴۱ خواهد شد که نمی‌تواند چنین باشد.
- اگر دهگان مجموع ۳ باشد: رقم بعدی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$30 + x = 42 - x \Rightarrow x = 6$$

- اگر دهگان مجموع ۲ و یا ۱باشد: یکی از ارقام حذف شده ۲ است و در هیچ صورتی مجموع هفت رقم کمتر از ۳۰ نخواهد شد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در هر مرحله اگر عدد را به صورت $a-1$ نمایش دهیم، پس از حرکات فوق به $2a-1$، $3a-1$، $4a-1$ و یا $5a-1$ تبدیل می‌شود. پس اگر در انتها a تنها از ۲ و ۳ و ۵ تشکیل شده است، در ابتدا نیز باید مضربی از این اعداد باشد.

بین گزینه‌های داده شده تنها ۱۱=۱-۱۲ این ویژگی را دارد. پس پاسخ برابر با ۱۱ خواهد بود. ضمناً به سادگی می‌توان نشان داد که با شروع از عدد ۱۱ و تعدادی بار انجام این عمل می‌توان به عدد خواسته شده رسید.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

تنها اعدادی می‌توانند در دامنه‌ی f_1 باشند که در بازه‌ی $(-\infty,1]$ باشند. در نتیجه دامنه‌ی تابع f_1 بازه‌ی $(-\infty,1]$ و برد آن اعداد نامنفی است. در نتیجه دامنه و برد تابع f_2 بازه‌ی $[0,1]$ خواهد بود. و هم‌چنین به ازای توابع بعدی نیز این دامنه و برد حفظ می‌شود. پس پاسخ بازه‌ی $[0,1]$ است.

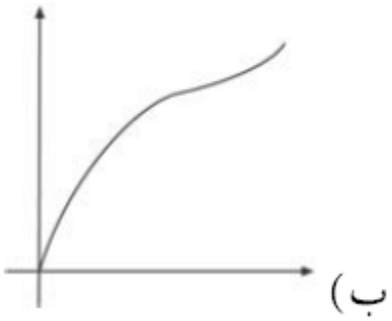
۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در این سوال کافی است که به چند نکته دقت کنیم:

- ارتفاع آب در طول زمان همواره صعودی است.

- شیب نمودار در هر لحظه تابعی نزولی از مساحت هر قطاع ظرف است.

در نتیجه ابتدا شیب باید زیاد باشد و به مرور زمان کم شود (تا به میانه‌ی ظرف که بیشترین مساحت را دارد برسد) و سپس دوباره باید شیب افزایش پیدا کند.



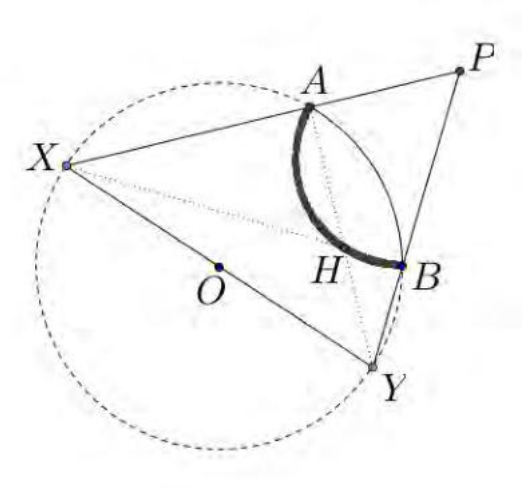
با توجه به موارد فوق تنها گزینه‌ی (ب) این ویژگی را دارد.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که با توجه به این که XY قطر دایره است، $AX \perp AY$ و $XB \perp BY$، پس مرکز ارتفاعی مثلث PXY همان محل تقاطع XB و AY است. حال دقت کنید که

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$\angle AHB = \angle XBY + \angle AYB = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\angle AOB = ۱۲۰^\circ$$



پس مرکز ارتفاعی روی کمان درخور زاویه‌ی ۱۲۰درجه پاره‌خط AB قرار دارد. پس H روی دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ قرار دارد. (دقت کنید که حالتی که در بالا بررسی شد مربوط به همین ترتیب قرار گرفتن نقاط بود، در حالت‌های دیگر باید وضعیت جداگانه بررسی شود که باز به همین جواب می‌رسیم.)

۲۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

تناظری بین اعداد با ویژگی یاد شده پیدا می‌کنیم. به ازای هر عدد یکنوا به صورت $a_1a_2a_3a_4$ عدد دیگری به صورت $(10-a_1)(10-a_2)(10-a_3)(10-a_4)$ انتخاب می‌کنیم که یکنوا است. حال مجموع این دو عدد برابر با ۱۱۱۱۰ است. پس باید تعداد کل اعداد صعودی چهار رقمی را بیابیم و در عدد ۱۱۱۱۰ ضرب کنیم تا مجموع کل به دست آید.

$$\binom{9}{4} \times 11110 = 1399860$$

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در ۱۰ ساعت مجموعاً ۳۰ مرحله تغییر نسل صورت می‌گیرد. در مراحل زوج تمامی باکتری‌ها از نوع B و C هستند و در مراحل فرد تمامی باکتری‌ها از نوع A خواهند بود.

همچنین در مراحل زوج تعداد باکتری‌های نوع B با نوع C برابر هستند (به جز مرحله‌ی صفرم) و دو برابر تعداد باکتری‌های مرحله‌ی قبل. در مراحل فرد نیز تعداد باکتری‌های نوع A، ۳ برابر تعداد باکتری‌های نوع A در دو مرحله قبل خواهد بود. در نتیجه تعداد گلبول‌های خورده شده در ۱۵ مرحله‌ی فرد رخ می‌دهد که تعداد آن‌ها به صورت زیر است:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$0 + 2 + 6 + \cdots + 2 \times 3^{13} = 2 \times \left(\frac{3^{14} - 1}{3 - 1}\right) = 4782969$$

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

از معادله‌ی دوم به دست می‌آید:

$$A^2 = A - I$$

در نتیجه داریم:

$$A^6 = (A - I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I = -2A^2 + 2A - I = I$$

$$2A^6 + 2A^2 + A + B = \bar{O} \Rightarrow 2I + (2A - 2I) + A + B = 3A + B = \bar{O}$$

۲۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ثابت می‌کنیم جواب مسئله ۳ است.

شرط دوم مسئله معادل با این است که هر دو عدد که باقی‌مانده‌ی ثابتی در تقسیم بر ۱۱×۱۷ داشته باشند، باید هم‌رنگ شوند. چون در غیر این صورت دو عدد ناهم‌رنگ خواهیم داشته که باقی‌مانده‌شان بر ۱۱ و ۱۷ برابر است. در صورتی‌که از دو رنگ استفاده کنیم، با توجه به شرط اول اعداد باید یکی در میان رنگ‌آمیزی شوند و در اینصورت رنگ اعداد ۱ و ۱۸۸ متفاوت خواهد بود.

ولی در صورتی‌که با رنگ سومی داشته باشیم، اعدادی که باقی‌مانده‌شان به پیمانه‌ی ۱۱×۱۷ برابر ۱۸۶ باشد را با رنگ سوم، رنگ می‌کنیم و باقی اعداد را یکی در میان با دو رنگ دیگر. بدین ترتیب شرایط مسئله برقرار خواهد شد.

۲۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می دانیم که تابع سینوس بین یک و منفی یک است. پس :

$$-1 \leq \sin x \leq$$

حال دو حالت داریم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) $0 \le x \le 3$ در این حالت می‌دانیم که اگر $x = 3$ باشد معادله جواب نخواهد داشت. و در غیر این صورت

$$0 \le x < 3 \Rightarrow 0 \le \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 0$$

و هم‌چنین چون $0 \le x < 3$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $[\sin x] = 0$ و در نتیجه معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

حال کافی است نمودار خط $\frac{x}{3}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه‌ی مثبت، یکی در ناحیه‌ی منفی و دیگری در صفر. فقط در جواب‌های صفر و مثبت آن قابل قبول است.

ب) اگر $-3 \le x < 0$ باشد. در این حالت می‌دانیم که:

$$-3 \le x < 0 \Rightarrow -1 \le \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -1$$

و همچنین چون $-3 \le x < 0$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $[\sin x] = -1$ و در نتیجه باز هم معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

حال نمودار خط $\frac{x}{3}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه‌ی مثبت، یکی در ناحیه‌ی منفی و دیگری در صفر. فقط در جواب منفی آن قابل قبول است. پس در مجموع سه جواب خواهیم داشت.

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر فرش زیر پای را می کشیم که چروک پدید آمده از بین برود! در این حالت باز هم مثلثی قائم‌الزاویه ABC را خواهیم داشت که در آن $BC = 6$ است ولی مقدار AB تغییر می‌کند. AB به اندازه‌ی قطر دایره کاهش یافته و به اندازه نصف محیط دایره اضافه می‌شود. بنابراین: $AB = (10 - \pi) - 2 + \pi$ که داریم: $AB = 8$ حال طبق قضیه‌ی فیثاغورس $AC = 10$ و چون کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه خط مستقیم خواهد بود؛ پس او بعد از چین خوردن دوباره فرش باید در خط مستقیم قبلی حرکت کرده و خود را از A به C برساند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۸. گزینه‌ی (۵) صحیح است.

برای این که مهره بتواند با این حرکت‌ها به همه‌ی خانه‌های با مختصات صحیح برسد لازم و کافی است که بتواند با این حرکت‌ها به خانه‌های $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ برسد. معادلاً باید اعداد صحیح مثبت یا منفی a، b، c و d یافت شوند که

$$a(m,n)+b(n+۱,m+۱)=(۱,۰)$$
$$c(m,n)+d(n+۱,m+۱)=(۰,۱)$$

که این روابط هم به بیان دیگری یعنی

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که این هم نتیجه می‌دهد ماتریس $\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix}$ باید وارونی با درایه‌های صحیح داشته باشد، پس باید دترمینانش ± ۱ باشد. اما

$$\det\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix}=m^۲+m-n^۲-n=(m-n)(m+n+۱)$$

که از بین $m-n$ و $m+n+۱$ یکی زوج و دیگری فرد است. پس حاصل‌ضرب آن‌ها نمی‌تواند عددی فرد باشد. پس برای هیچ m و n صحیح این عمل امکان‌پذیر نیست.

۲۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$f(x^{12})=f(x).q(x)+r(x)$ که در آن $r(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی کم‌تر از $f(x)$ است. یعنی درجه‌ی $r(x)$ باید کم‌تر از ۵ باشد.

از طرفی می‌دانیم که $f(-1)=0$ که در نتیجه با قرار دادن -۱ در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$f((-$

پس باید $r(-1)=0$ باشد که فقط گزینه‌ی (الف) این خاصیت را دارد.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۱۱۱ قرمز و ۲۱۱ سبز هستند. بنابراین ۳۳۲ و ۳۲۳ هر دو زرد هستند. چون هر دو با تغییر تمام کلیدهای این دو حالت به دست آمده‌اند و باید رنگی غیر از سبز و قرمز (که زرد است) داشته باشند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

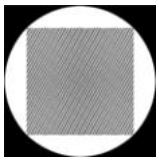
با همین استدلال باید ۱۳۲ قرمز باشد، چون ۲۱۱ سبز و ۳۲۳ زرد هستند. پس ۲۲۱ سبز است چرا که نمی‌تواند با ۱۳۲ و ۳۳۲ هم‌رنگ باشد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

$(۱+۲x+۳x^۲+۴x^۳+\cdots+۱۳۸۲x^{۱۳۸۱})^۲(۱+x^۴+x^۸)^۲$ $x^۵$

$(۲^x-۴)^۳+(۴^x-۲)^۳=(۴^x+۲^x-۶)^۳$



B A

C B A C

$C<A<B$ $B<C<A$ $A<C<B$ $B<A<C$ $A<B<C$

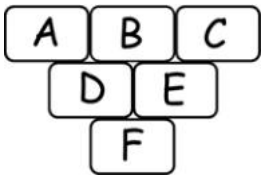
. $C-B$ $C-A$ $B-A$ $B-C$ $A-B$ . . .. C B A

$A-C$

۴ ۳ ۲ ۱ ۰

$a+۲b$ $x^۲-۳x+b$ $x^۳+ax+۱$

-۳ ۰ ۱ $-\frac{۲۵}{۴}$ -۸



C B A

$D=A-B$

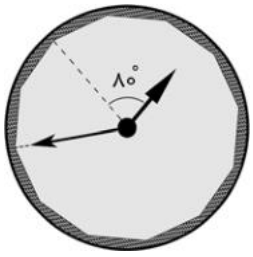
$D\cap C\subseteq F$ $A\cap C\subseteq F$ $F\subseteq A\cap C$ $B\subseteq F$ $F\subseteq C$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

۹ : ۲۰
۱۰ : ۳۰
۱۱ : ۳۵
۱۲ : ۴۰
۱ : ۴۵

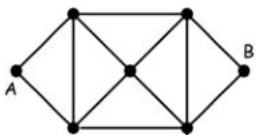


. . . . . .

۳ : ۲۲ ۳ : ۵۲ ۲ : ۳۲ ۴ : ۰۰ ۴ : ۳۱

. . . a_i . . .. .. $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{23}$ ... . a_{23} ...$a_2 a_1$

$$(a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{23}) - (a_1 + \cdots + a_{11})$$



A

B

$$x^4 + 16x - 12 = 0$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

. . . . . B A . . . $O_۲$ $O_۱$ . . . $C_۲$ $C_۱$.

. . N M . . . . . A . . . . . .

MN AM

$۴\sqrt{۵}$ $۴+۳\sqrt{\frac{۱۳}{۵}}$ ۸ ۷ $۴+۳\sqrt{۳}$

. . ۱۲۳۰۰۰ ۱۳۸۰۱۳۸۱۱۳۸۲ . . . . . .

. . . . . .

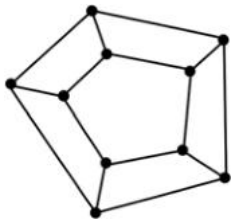
b a

$\frac{(a-b)^۲}{(a+b)^۲}$ $\frac{|a-b|}{ab}$ $\frac{۲|a-b|}{a+b}$ $\frac{(a-b)^۲}{۲ab}$ $\frac{|a-b|}{a+b}$

. . BD AC . . . . O . $AB=CD$ $\widehat{ABC}=\widehat{BDC}=۹۰^\circ$. $ABCD$ . . .

CO $BO=۳$ $CB=۵$

$۳\sqrt{۲}$ ۳ $\sqrt{۱۴}$ $\sqrt{۱۵}$



$$\begin{cases} ۱+a^۳+۳ab=b^۳ \\ ۱+a^۵=b^۵ \end{cases}$$

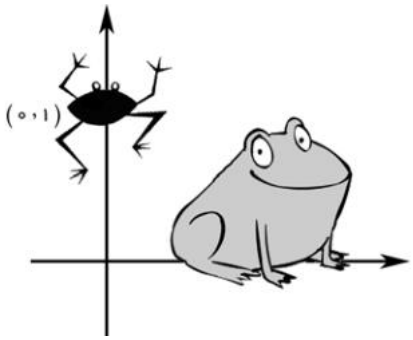
$$(x+۱)^{۱۳۸۳}+(x+۱)^{۱۳۸۲}(x-۲)+(x+۱)^{۱۳۸۱}(x-۲)^۲+\cdots+(x+۱)(x-۲)^{۱۳۸۲}+(x-۲)^{۱۳۸۳}=۰$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

۲×۳

$(۰, ۱)$

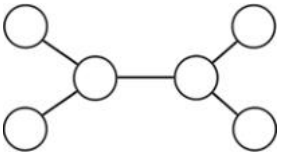


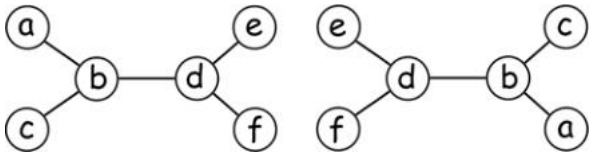
a (a, b)

-۱۲۸ -۲۵۶ $-۱۲۸\sqrt{۲}$ ۲۵۶ ۰

$p(۱) + \cdots + p(۹۹۹)$ n $p(n)$ n

f e d c b a





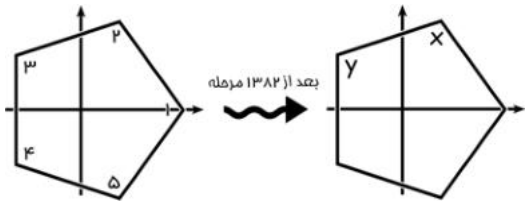
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

. . . . . ۷۲° . . . . . x . . . . . .

x

(x, y)



$(۵, ۴)$ $(۴, ۵)$ $(۵, ۱)$ $(۱, ۵)$ $(۳, ۴)$

$$\{۶k + ۱ \mid k \in Z\ ,\ ۱ \le k \le ۱۰۰۰\} \cup \{۷k + ۵ \mid k \in Z\ ,\ ۱ \le k \le ۸۰۰\}$$



$-n$

. . . $(n > ۱)$

$-(n - ۱)$

. . . . . .

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات بیست و دومین المپیاد مقدماتی ریاضی
سال ۱۳۸۲ (مرحله‌ی اول)

۱) کدام یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته نیست؟

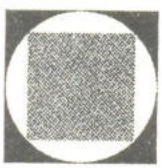
الف) مجموعهٔ اعداد مربع کامل

ب) مجموعهٔ اعداد مرکب

ج) مجموعهٔ اعدادی که بر ۱۳ بخش پذیر نیستند.

د) مجموعهٔ اعدادی که بر ۹۱ بخش پذیر نیستند.

ه) مجموعهٔ توان‌های ۳



۲) در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ سیاه را با A ، مساحت ناحیهٔ سفید را با B و مساحت ناحیهٔ هاشور خورده را با C نشان می‌دهیم. چه رابطه‌ای بین A، B، و C برقرار است؟

الف) $A < B < C$ ب) $B < A < C$ ج) $A < C < B$ د) $B < C < A$ ه) $C < A < B$

۳) ضریب x^5 در چندجمله‌ای $(1 + x^4 + x^8)^2(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 1382x^{1381})^2$ چند است؟

الف) ۲۰ ب) ۳۲ ج) ۴۰ د) ۶۴ ه) ۷۰

۴) چند جمله‌ای $x^3 + ax + 1$ بر $x^2 - 3x + b$ بخش‌پذیر است. $a + 2b$ چند است؟

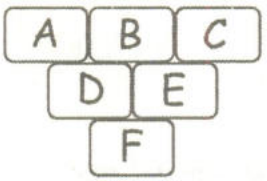
الف) -8 ب) $-\frac{25}{3}$ ج) ۱ د) ۰ ه) -3

۵) A، B، و C سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد اعضای $A - B$، $B - C$، $B - A$، $C - A$، و $C - B$ ، به ترتیب، برابر ۳، ۲، ۲، ۴، و ۵ است. تعداد اعضای $A - C$ چند است ؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۶) A، B، و C سه مجموعهٔ دلخواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعهٔ بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$. کدام گزینهٔ حتماً درست است؟



الف) $F \subseteq C$ ب) $B \subseteq F$ ج) $F \subseteq A \cap C$ د) $A \cap C \subseteq F$ ه) $D \cap C \subseteq F$

۷) تعداد جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(۶ - ۲^x + ۴^x)^۳ = (۲ - ۴^x)^۳ + (۴ - ۲^x)^۳$ چند تاست؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۸) یک ترازوی سه‌کفه‌ای داریم که می توانیم با استفاده از آن از میان سه وزنه داده شده سنگین‌ترین و سبک‌ترین وزنه را مشخص کنیم. دست کم با چند بار استفاده از این ترازو می‌توانیم از بین ۵ وزنه با وزن‌های متفاوت، وزنه میانی را پیدا کنیم؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۹) علی‌مردان خان قرار است به عنوان تنبیه از یک تا دو هزار بنویسد! عباس‌قلی خان (پدر وی) ساعت ۲ بعدازظهر سری به او می‌زند و می‌بیند که تا ۶۹ را نوشته است. پس از ۵ دقیقه دوباره به وی سر می‌زند و مشاهده می‌کند که به ۱۷۹ رسیده است. تقریباً کی تکلیف علی‌مردان خان تمام می‌شود؟
(فرض کنید نوشتن هر رقم زمان ثابتی طول می‌کشد.)

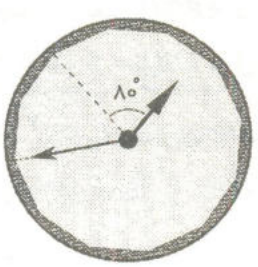
الف) ۳ : ۲۲ ب) ۳ : ۵۲ ج) ۲ : ۳۲ د) ۴ : ۰۰ ه) ۴ : ۳۱

۱۰) $a_۱, a_۲, \ldots$ و $a_{۲۳}$ اعدادی طبیعی هستند و $a_۱ \le a_۲ \le \cdots \le a_{۲۳}$. در ضمن هیچ سه تا از a_i ها برابر نیستند. حداقل مقدار عبارت زیر چند است؟

$$(a_{۱۲} + a_{۱۳} + \cdots + a_{۲۳}) - (a_۱ + \cdots + a_{۱۱})$$

الف) ۶۶ ب) ۶۷ ج) ۶۸ د) ۷۰ ه) ۷۲

۱۱) ساعتی مطابق شکل زیر داریم که بدون شماره است. ساعت چند است؟



الف) ۹ : ۲۰
ب) ۱۰ : ۳۰
ج) ۱۱ : ۳۵
د) ۱۲ : ۴۰
ه) ۱ : ۴۵

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۲) به چند طریق می‌توان با شروع از رأس A و حرکت روی پاره‌خط‌ها به رأس B رفت طوری که از هر رأس حداکثر یک بار عبور کنیم؟



الف) ۳۰ ب) ۲۸ ج) ۲۷ د) ۲۶ ه) ۲۴

۱۳) توجه کنید که در این سؤال هم مثل همهٔ سؤال‌های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!

الف) (ب) صحیح است.
ب) (ج) و (د) هر دو غلط‌اند.
ج) (ج) صحیح است.
د) (د) صحیح است.
ه) حداقل یکی از (ج) یا (ه) صحیح‌اند.

۱۴) معادلهٔ $x^4 + 16x - 12 = 0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ ه) ریشه حقیقی ندارد.

۱۵) کوچک‌ترین عددی که هم خودش و هم مجموع ارقامش بر ۵۰ بخش‌پذیر باشد چند رقم متمایز دارد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ ه) ۹

۱۶) اعداد ۱ تا ۱۳۸۲ را از چپ به راست پشت سر هم نوشته‌ایم تا عدد ۱۲۳۰۰۰۱۳۸۰۱۳۸۱۱۳۸۲ به دست آید. باقیماندهٔ تقسیم این عدد بر ۹ چند است؟

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۱۷) از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی به دست می‌آید. اگر اضلاع متوازی‌اضلاع به اندازه‌های a و b باشند نسبت مساحت این چهارضلعی به مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

الف) $\frac{|a-b|}{a+b}$ ب) $\frac{(a-b)^2}{2ab}$ ج) $\frac{2|a-b|}{a+b}$ د) $\frac{|a-b|}{ab}$ ه) $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$

۱۸) در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\widehat{ABC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ و $AB = CD$. اگر O محل تقاطع AC و BD باشد و $CB = 5$ و $BO = 3$، طول CO چقدر است؟

الف) ۴ ب) $\sqrt{15}$ ج) $\sqrt{14}$ د) ۳ ه) $3\sqrt{2}$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۹) دو دایرهٔ C_1 و C_2 به مراکز O_1 و O_2 در دو نقطهٔ A و B متقاطع می‌باشند. طول خط المرکزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطهٔ A گذشته دو دایره را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر اندازهٔ وتر AM برابر ۴ باشد اندازهٔ MN کدام است؟

الف) $4+3\sqrt{3}$ ب) ۷ ج) ۸ د) $4+3\sqrt{\frac{13}{5}}$ ه) $4\sqrt{5}$

۲۰) دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} 1+a^3+3ab=b^3 \\ 1+a^5=b^5 \end{cases}$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) نامتناهی جواب

۲۱) معادلهٔ زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383}+(x+1)^{1382}(x-2)+(x+1)^{1381}(x-2)^2+\cdots+(x+1)(x-2)^{1382}+(x-2)^{1383}=0$$

الف) این عبارت همواره صفر است. ب) ۲ ج) ۱۳۸۳
د) ۰ ه) ۱

۲۲) محسن به طور دلخواه اعداد ۱ تا ۱۰ را روی ۱۰ رأس شکل روبرو می‌گذارد و سپس روی هر پاره‌خط قدرمطلق تفاضل اعداد دو سر آن را می‌نویسد. حداقل چند عدد متفاوت روی پاره‌خط‌ها ظاهر می‌شود؟



الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۲۳) فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل‌ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیهٔ ما مجموعهٔ اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می‌توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

الف) ۱۰۰۰ ب) ۳۳۰ ج) ۳۵۰۰۰۰ د) ۳۷۵ ه) ۱۰۵۰۰

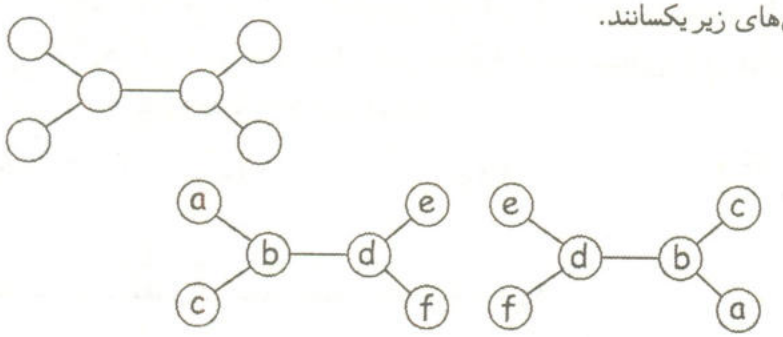
۲۴) برای عدد طبیعی n فرض کنید $p(n)$ حاصل‌ضرب ارقام n در مبنای ۱۰ باشد. $p(1)+\cdots+p(999)$ چند است؟

الف) ۱۱۲۵۷۶ ب) ۲۰۷۰ ج) ۹۱۱۲۵ د) ۹۳۱۹۵ ه) ۱۳۲۰۷۰

۲۵) می‌خواهیم در دایره‌های شکل زیر برچسب‌های a، b، c، d، e و f را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره‌ای برابر نباشند. دو برچسب گذاری را متمایز گوییم هرگاه دو حرف وجودداشته باشند که دایره‌های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیرمجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هرگاه بین آن‌ها پاره‌خطی رسم شده

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

باشد). مثلاً برچسب گذاری‌های زیر یکسانند.



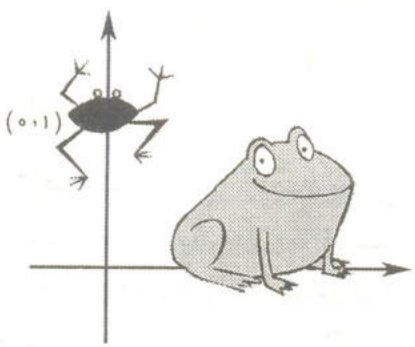
چند برچسب گذاری متمایز وجود دارد؟

الف) ۱۸۰ ب) ۱۲۰ ج) ۹۰ د) ۶۰ ه) ۴۵

۲۶) حداقل چند مستطیل ۳ × ۲ باید از یک صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل ۳ × ۲ نتوان از شکل باقی‌مانده جدا کرد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۲۷) یک قورباغه در نقطهٔ به مختصات $(۱, ۰)$ از صفحه قرار دارد و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را به مکان فعلی‌اش وصل می‌کند (طوری که مبدأ در سمت راستش قرار بگیرد) به اندازهٔ فاصلهٔ همان لحظه‌اش از مبدأ، جهش می‌کند. اگر قورباغه پس از ۱۵ جهش به نقطهٔ (a, b) برسد، a چند است؟



الف) ۰ ب) ۲۵۶ ج) $-۱۲۸\sqrt{۲}$ د) -۲۵۶ ه) -۱۲۸

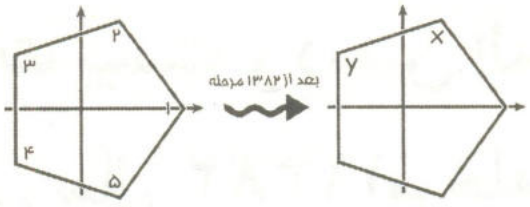
۲۸) مجموعهٔ $\{۶k+۱ | k \in Z, ۱ \le k \le ۱۰۰۰\} \cup \{۷k+۵ | k \in Z, ۱ \le k \le ۸۰۰\}$ چند عضو دارد؟

الف) ۱۲۵۰ ب) ۱۲۵۱ ج) ۱۶۶۶ د) ۱۶۶۷ ه) ۱۸۰۰

۲۹) فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محورهای مختصات قرار گرفته است. عمل زیر را روی ۵ ضلعی ۱۳۸۲ بار انجام می‌دهیم: «نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، ۷۲° در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت دوران می‌دهیم، دوباره نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.»

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

در این صورت (x,y) چند می باشد؟



الف) $(3,4)$ ب) $(1,5)$ ج) $(5,1)$ د) $(4,5)$ ه) $(5,4)$

۳۰) رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چند سر حرکت می‌کند.
اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می‌دهد که این کار، چندان ساده نیست :
این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر n–چشم را $(n > 1)$ قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک‌چشم، یک سر دوچشم، ⋯
و یک سر $(n-1)$–چشم در می‌آورد!



تهمتن چو بشنید گفتار دیو — برآورد چون شیر جنگی غریو
بزد بر سر دیو چون پیل مست — سر و مغزش از گرز او گشت پست

اگر دیو در ابتدا سه سر، با ۴، ٦، و ۸ چشم داشته باشد رستم چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

الف) ۱۸
ب) ٦۱
ج) ۱٦۸
د) متأسفانه رستم نمی‌تواند دیو را از پای درآورد!
ه) رستم دیو را از پای درمی‌آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ سؤالات بیست و دومین المپیاد مقدماتی ریاضی سال ۱۳۸۲ (مرحله‌ی اول)

۱) گزینهٔ (د) صحیح است.

در عبارت $(x^8 + x^4 + 1)^2$ توان‌های کمتر مساوی ۵ عبارتند از ۱ و $2x^4$ و در عبارت دیگر توان‌های کمتر مساوی ۵ عبارتند از ۱، $4x$، $10x^2$، $12x^3$، $35x^4$ و $56x^5$ بنابراین ضریب x^5 در حاصل‌ضرب دو عبارت برابر است با:

$$56 \times 1 + 4 \times 2 = 64$$

۲) گزینهٔ (د) صحیح است.

با ساده کردن دو طرف تساوی داریم:

$$(2^x - 4) = 0, (4^x - 2) = 0, (4^x + 2 - 6) = 0$$

(الف) $2^x - 4 = 0 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow 2^{x-2} = 1 \Rightarrow x = 2$

(ب) $4^x - 2 = 0 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

(ج) $4^x + 2^x - 6 = 0 \Rightarrow 4^x - 4 + 2^x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

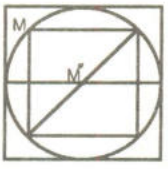
در عبارت $4^x + 2^x - 4 - 2 = 0$ اگر $x > 1$ سمت راست مثبت است و اگر $x < 1$ سمت راست منفی است پس تنها حالت ممکن $x = 1$ است.

۳) گزینهٔ (د) صحیح است.

زیرا نه ۱۳ و نه ۷ هیچ‌کدام بر ۹۱ بخش‌پذیر نیستند ولی ضربشان بر ۹۱ بخش‌پذیر است.

۴) گزینهٔ (الف) صحیح است.

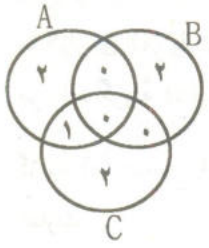
ضلع مربع M برابر a و برابر قطر دایره‌ی D و برابر قطر مربع M'.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$S_M = a^2 \quad , \quad S_D = \pi()^2 = \frac{\pi}{4}a^2 \quad \text{و} \quad S'_M = (\frac{a}{2})a = \frac{a^2}{2}$$
$$\Rightarrow A = S_M - S_D = a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{(1-\frac{\pi}{4})a^2}{A}$$
$$B = S_D - S_M - \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}a^2)}{B} \quad , \quad C = S_M = \frac{a^2}{\frac{2}{a}}$$
$$1 - \frac{\pi}{4} \simeq \frac{4-3/14}{4} = \frac{0/86}{4} = 0/215, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3/14}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1/14}{4} \simeq 0/25 = B$$
$$\Rightarrow C > B > A$$

۵) گزینهٔ (ج) صحیح است.



ما یک شکل از A و B و C را رسم می‌کنیم.
همان‌گونه که می‌بینید شرط‌های مسأله را
داراست و داریم $|A - C| = 2$.

۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.

$$x^3 + ax + 1 = (x - c)(x^2 - 3x + b) = x^3 - (3 + c)x^2 + (b + 3c)x + bc$$

پس $c + 3 = 0$، یعنی $c = -3$. همچنین $-bc = 1$ پس $b = \frac{1}{3}$ و $a = b + 3c = b - 9$ پس $a + 2b = -8$.

۷) گزینهٔ (ه) صحیح است.

داریم $D = A - B$ و $E = B - C$، پس E و D با هم اشتراکی ندارند در نتیجه $F = D - E = D$ پس $D \cap C \subseteq F$.

۸) گزینهٔ (ب) صحیح است.

واضح است که با دو بار وزن کردن نمی‌شود. فرض کنیم مهره‌ها A، B، C، D و E باشند و در وزن کردن A، B و C داشته باشیم. $A < B < C$ حال A و D و C را وزن می‌کنیم.

۱) اگر داشته باشیم $A < B < C$ و $A < D < C$ حال B، D و E را وزن می‌کنیم، داریم مثلاً $E < D < E$ در این صورت با سه بار وزن کردن می‌فهمیم D میانه است.

۲) اگر داشته باشیم $D < A < B < C$ (یا به همین ترتیب $A < B < C < D$) B، A و E را وزن می‌کنیم اگر $E < A$، A میانه است اگر $A < E < B$، E میانه است و اگر $B < E$، B میانه است پس با سه بار وزن کردن مهره‌ی میانه را یافته‌ایم.

۹) گزینهٔ (د) صحیح است.

عقربه‌ی کوچک روی ۲۰° فاصله از یک رأس قرار دارد و هر ساعت ۳۰° درجه است پس عقربه‌ی کوچک $\frac{2}{3}$ یک ساعت را پیموده است پس ۴۰ دقیقه را پیموده است و تنها جواب منطبق گزینهٔ (د) است یعنی ۴۰ : ۱۲

۱۰) گزینهٔ (ب) صحیح است.

اعداد ۷۰ تا ۱۷۹ جمعاً $3 \times 80 + 2 \times 30 = 300$ رقم دارند که در ۵ دقیقه یعنی ۳۰۰ ثانیه نوشته شده‌اند، پس

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

نوشتن هر رقم یک ثانیه زمان می‌برد. اما اعداد ۱۸۰ تا ۲۰۰۰ جمعاً ۳ × ۸۲۰ + ۴ × ۱۰۰۱ رقم دارند یعنی ۶۴۶۴ رقم، پس برای نوشتن آنها ۶۴۶۴ ثانیه زمان لازم است یعنی یک ساعت و ۴۷ دقیقه که با اضافه کردن به ۰۵ : ۲ زمان ۵۲ : ۳ به دست می‌آید.

۱۱) گزینهٔ (د) صحیح است.
در گزینهٔ (ه) اگر غلط باشد آن‌گاه (ج) غلط است. از طرف دیگر اگر گزینهٔ (الف) درست باشد گزینهٔ (ب) نیز درست می‌شود پس دو گزینهٔ درست داریم که نمی‌شود پس گزینهٔ (الف) غلط است، پس گزینهٔ (ب) غلط است. پس حداقل یکی از گزینه‌های (ج) و (د) درست است، چون هر دو با هم درست نیستند پس یکی درست و دیگری نادرست است. ما گزاره‌ی (ه) را در این‌صورت غلط خواهیم داشت. طبق آن‌چه در خط اول گفته شد گزینهٔ (ج) غلط است. پس می‌ماند گزینهٔ (د) که درست است.

۱۲) گزینهٔ (ه) صحیح است.
عبارت مورد نظر با انتخاب زیر حداقل می‌شود

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{23}) = (1, 1, 2, 2, \ldots\ldots\ldots, 11, 11, 12)$$

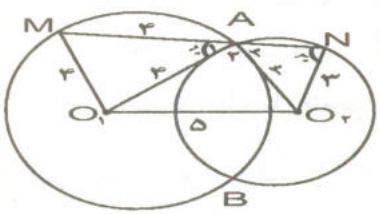
پس حداقل برابر است با

$$6 + 7 + 7 + \ldots + 11 + 11 + 12 - (1 + 1 + \ldots + 5 + 6) = 72$$

۱۳) هیچ‌کدام از گزینه‌ها درست نیست.
جواب ۳۴ است که با شمردن به دست می‌آید.

۱۴) گزینهٔ (ب) صحیح است.
داریم $x^4 + 16x - 12 = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x + 6)$. معادلهٔ $x^2 + 2x - 2$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد و معادلهٔ $x^2 - 2x + 6$ ریشه ندارد.

۱۵) گزینهٔ (الف) صحیح است.

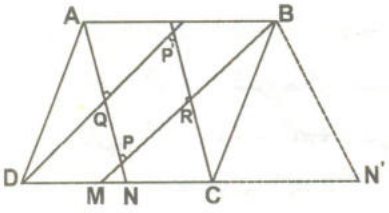


مثلث $\overset{\triangle}{O_1AM}$ به علت تساوی اضلاع متساوی الاضلاع است پس $\widehat{A_1} = 60$. مثلث $\overset{\triangle}{O_1O_2A}$ دارای اضلاع مثلث قائم‌الزاویه است پس $\widehat{A_2} = 90$ پس $\widehat{A_3} = 30$ و چون $\overset{\triangle}{O_2AN}$ متساوی الساقین است پس داریم $\widehat{N} = 30$ پس طول AN برابر است با $2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$ پس طول MN برابر می‌شود با $3\sqrt{3} + 4$.

۱۶) گزینهٔ (د) صحیح است.
باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مذکور بر ۹ برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم $1382 + \ldots + 3 + 2 + 1$ بر ۱۹ است، که این عدد برابر $\frac{1382 \times 1383}{2} = 955653$ است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۹ برابر ۶ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۷) گزینهٔ (ب) صحیح است.



به راحتی دیده می‌شود $\hat{P} = \hat{Q} = \hat{A} = ۹۰^\circ$ و چون نیمساز ارتفاع نیز شده است. پس مثلث‌های $\overset{\triangle}{APN}$ و $\overset{\triangle}{BCM}$ متساوی الساقین می‌باشند.

به راحتی دیده می‌شود که اگر BN' را موازی AN رسم کنیم مساحت متوازی الاضلاع جدید با قبلی برابر است و برابر $BP.AN$ می‌باشد.

حال داریم:

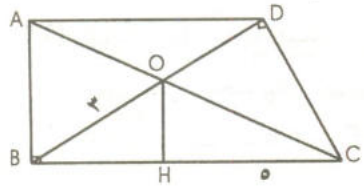
$$\frac{PQ}{QN} = \frac{b-a}{a} \Rightarrow \frac{PQ}{AN} = \frac{b-a}{۲a} \text{ و } \frac{PR}{MR} = \frac{b-a}{a} \Longrightarrow \frac{PR}{PB} = \frac{PB}{PR+MR} = \frac{b-a}{b-a+a}\frac{b-a}{b}$$

$$\frac{S_{P'RQP}}{S_{ABCD}} = \frac{PQ.PR}{AN.PB} = \frac{(b-a)^۲}{۲ab}$$

۱۸) گزینهٔ (ج) صحیح است.

اگر از O بر BC عمود کنیم، دو مثلث OHC و ABC متشابه خواهند بود، پس

$$\frac{OH}{AB} = \frac{CH}{CB}$$

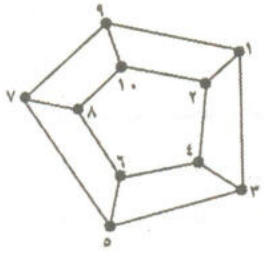


از طرفی در مثلث BDC و OBH متشابه‌اند پس داریم:

$$\frac{۳}{۵} = \frac{OB}{BC} = \frac{OH}{CD}$$

همچنین $\frac{CH}{CB} = \frac{OH}{CD} = \frac{۳}{۵}$ چون $BC = ۵$، داریم $CH = ۳$ در مثلث قائم‌الزاویه OBH داریم $OH = \sqrt{۵}$ و در مثلث قائم‌الزاویه OHC داریم $OC = \sqrt{۱۴}$.

۱۹) گزینهٔ (ب) صحیح است.



طبق مثال می‌توان طوری عدد گذاری کرد که تعداد اعداد متفاوت ۳ باشد. اما کمتر از ۳ نمی‌شود. زیرا اگر رأسی که برچسب یک دارد را در نظر بگیریم، با همسایه‌هایش ۳ اختلاف متفاوت درست می‌کند. پس حداقل جواب سه است.

۲۰) گزینهٔ (ج) صحیح است.

داریم

$$۱^۳ + a^۳ + (-b)^۳ - ۳(۱)(a)(-b) = ۰$$

بنا بر اتحاد اویلر داریم

$$۱^۳ + a^۳ + (-b)^۳ - ۳(۱)(a)(-b) = (۱ + a - b)(۱ + a^۲ + b^۲ - a + b + ab)$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

بنابراین

$$۱ + a - b = ۰ \text{ یا } ۱ + a^۲ + b^۲ - a + b + ab = ۰$$

اگر $۱ + a^۲ + b^۲ - a + b + ab = ۰$ آن‌گاه $a = -b = ۱$، در این حالت $a = ۱$ و $b = -۱$ که با توجه به رابطه‌ی $a^۵ + ۱ = b^۵$ غیرممکن است. پس داریم $۱ + a - b = ۰$، در نتیجه $b = a + ۱$، پس با توجه به معادله‌ی دوم داریم $a^۵ + ۱ = (a + ۱)^۵$ در نتیجه $۵a^۴ + ۱۰a^۳ + ۱۰a^۲ + ۵a = ۰$، پس $a = ۰$ یا $a^۳ + ۲a^۲ + ۲a + ۱ = ۰$، اگر $a = ۰$ داریم $b = ۱$ که این یک جواب دستگاه است و اگر $a^۳ + ۲a^۲ + ۲a + ۱ = ۰$، $a = -۱$ یک جواب است، داریم $a^۳ + ۲a^۲ + ۲a + ۱ = (a + ۱)(a^۲ + a + ۱)$، پس تنها $a = -۱$ جواب است، در این حالت $b = ۰$ و $(a, b) = (-۱, ۰)$ یک جواب دیگر دستگاه است، پس این دستگاه تنها دو جواب دارد.

۲۱) گزینهٔ (ه) صحیح است.

دو طرف را در ۳ ضرب می‌کنیم. داریم $(x - ۱) + (x - ۲) = ۳$ پس

$$(x + ۱) = \pm(x - ۲) \quad \text{و} \quad (۲x - ۱)^{۱۳۸۴} = (x - ۲)^{۱۳۸۴} = ۰$$
$$۲x = ۱^{۱۳۸۴} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

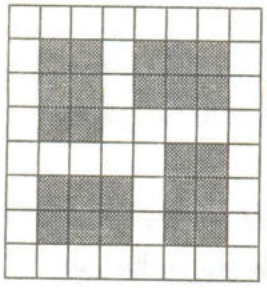
پس تنها جواب ممکن $x = \frac{۱}{۲}$ است و این نیز در معادله صدق می‌کند.

۲۲) گزینهٔ (ب) صحیح است.

چون a بر ۵ بخش‌پذیر است پس دو رقم اول آن ۰۰ یا ۵۰ باید باشد و جمع سایر ارقام برای آن‌که کمترین باشد باید ۴۵ باشد. پس ۵ تا ۹ می‌گذاریم، عدد ۹۹۹۹۵ به دست می‌آید که سه رقم مختلف دارد.

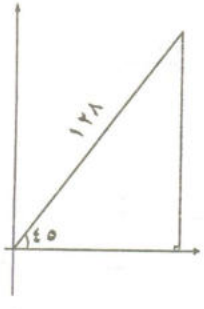
۲۳) گزینهٔ (الف) صحیح است.

طبق شکل ۴ تا.



۲۴) گزینهٔ (ه) صحیح است.

فاصله‌ی قورباغه از مبدأ در پرش n ام برابر $(\sqrt{۲})^n$ می‌باشد و زاویه برابر ۱۵×۴۵ در جهت عقربه‌های ساعت است که برابر ۴۵° می‌شود.



$$(\sqrt{۲})^{۱۵} = ۲\sqrt[۷]{۲} = ۱۲۸\sqrt{۲}$$
$$a = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} ۱۲۸\sqrt{۲} = -۱۲۸$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۵) گزینهٔ (ه) صحیح است.

۱۰۵۰۰ ساختنی است زیرا: $۱۰۵۰۰ = ۳ \times ۷ \times ۵^۳ \times ۲^۲ = (۳ \times ۵ \times ۲) \times (۷ \times ۵ \times ۲) \times ۵$

۲۶) گزینهٔ (د) صحیح است.

$$p_۹ = p(۱) + \cdots + p(۹) = ۴۵$$
$$p_{۹۹} = p(۱۰) + \cdots + p(۹۹) = p_۹ \times p_۹ = ۴۵^۲$$
$$p_{۹۹۹} = p_{(۱۰۰)} + \cdots + p(۹۹۹) = p_۹ \times p_{۹۹} = ۴۵^۳$$
$$\Rightarrow p = p(۱) + \cdots + p(۹۹۹) = ۴۵ + ۴۵^۲ + ۴۵^۳$$
$$\Rightarrow p = ۹۳۱۹۵$$

۲۷) گزینهٔ (ج) صحیح است.

تعداد برچسب گزاریهای یکسان مساوی با $۲ \times ۲ \times ۲$ است و کل برچسب گزاریها برابر است با $۶!$ پس تعداد برچسب گزاریهای متمایز برابر است با:

$$\frac{۶!}{۸} = ۹۰$$

۲۸) گزینهٔ (د) صحیح است.

به راحتی دیده می‌شود این عمل یک دوران ۷۲° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. پس بعد از ۱۳۸۰ بار به حالت اول برمی‌گردیم زیرا ۱۳۸۰ بر ۵ بخش‌پذیر است و با دو چرخش دیگر به $(x, y) = (۴, ۵)$ می رسیم.

۲۹) گزینهٔ (ج) صحیح است.

اگر دو مجموعه را با A و B نشان دهیم داریم:

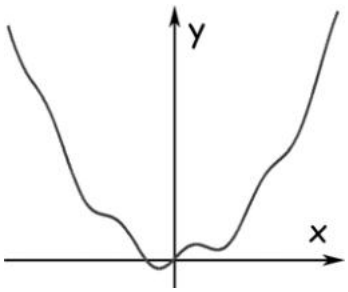
$$n(A \cap B) = n(\{۴۲x + ۱۹ | ۴۲x + ۱۹ \leq ۵۶۰۵ \text{و} ۴۲x + ۱۹ \leq ۶۰۰۱\}) = n(\{۴۲x + ۱۹ \leq ۵۶۰۵\}) = ۱۳۴$$
$$\Rightarrow n(A \cup B) = ۱۰۰۰ + ۸۰۰ - ۱۳۴ = ۱۶۶۶$$

۳۰) گزینهٔ (ج) صحیح است.

با استقراء می‌توان نشان داد برای نابودی یک سر n- چشمی باید $۲^{n-۱}$ ضربه وارد کرد. بنابراین جواب مسأله عبارت است از $۲^۷ + ۲^۵ + ۲^۳$ که برابر ۱۶۸ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور



$y = \frac{x^۲}{۱۰} \cdot \sin x$

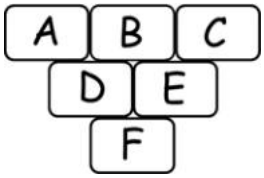
$y = \frac{(\tan x)^۲}{۱۰}$

$y = \cos(\frac{x^۲}{۱۰}) - ۱$

$y = \frac{x^۲}{۱۰} + \cos x - ۱$

$y = \frac{x^۲}{۱۰} + \sin x$

$$(x+۱)^{۱۳۸۳} + (x+۱)^{۱۳۸۲}(x-۲) + (x+۱)^{۱۳۸۱}(x-۲)^۲ + \cdots + (x+۱)(x-۲)^{۱۳۸۲} + (x-۲)^{۱۳۸۳} = ۰$$



$C \quad B \; A$

$D = A - B$

$D \cap C \subseteq F \qquad A \cap C \subseteq F \qquad F \subseteq A \cap C \qquad B \subseteq F \qquad F \subseteq C$

$(۱ + ۲x + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \cdots + ۱۳۸۲x^{۱۳۸۱})^۲(۱ + x^۴ + x^۸)^۲ \qquad x^۵$

f

$$f(x, y) = y^۲ - x^۲ - ۲xy + ۲x + ۱$$

x

y

$-\sqrt{۲} \qquad -۱ \qquad \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \frac{۵}{۴} \qquad \frac{۳}{۲}$

$a + ۲b \qquad x^۲ - ۳x + b \quad x^۳ + ax + ۱$

$-۳ \qquad ۰ \qquad ۱ \qquad -\frac{۲۵}{۴} \qquad -۸$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

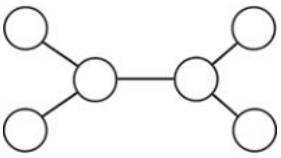
B A ۲×۲

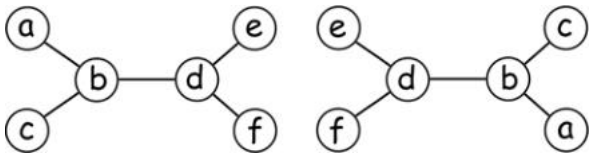
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$$

$xy = ۱$ $x = y$ $x+y = ۰$

f e d c b a





۸×۸ ۲×۳

۲×۳

۱۰۰

$p(۱) + \cdots + p(۹۹۹)$ n $p(n)$ n

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

. . . . . B A . . . $O_۲$ $O_۱$ . . . $C_۲$ $C_۱$.

. . N M . . . . . A . . . . . .

MN AM

$۴\sqrt{۵}$ $۴+۳\sqrt{\frac{۱۳}{۵}}$ ۸ ۷ $۴+۳\sqrt{۳}$



$-n$

. . . $(n>۱)$

$-(n-۱)$

. . . . . .

. . . . . .

BD AC . . . O . $AB=CD$ $\widehat{ABC}=\widehat{BDC}=۹۰^\circ$. $ABCD$ . . .

CO $BO=۳$ $CB=۵$

$۳\sqrt{۲}$ ۳ $\sqrt{۱۴}$ $\sqrt{۱۵}$

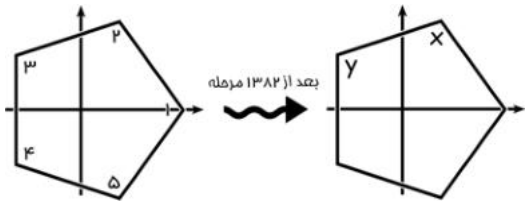
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

. . . . . ۷۲° . . . . . x . . . . . .

x

(x, y)



$(۵, ۴)$ $(۴, ۵)$ $(۵, ۱)$ $(۱, ۵)$ $(۳, ۴)$

. . . . . E . . . CD . . ABC . . . . . $ABCD$ . . . . . .

$\angle CDA = \angle BCD$ $\angle AEB = ۹۰^\circ$

$ABCD$

$ABCD$

$AB = AD + BC$

$CD = AD + BC$

$EA \cdot EB = EC \cdot ED$

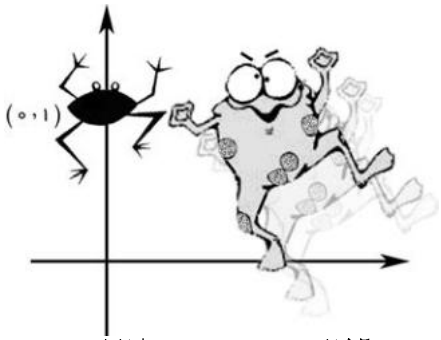
$$\begin{cases} ۱ + a^۳ + ۳ab = b^۳ \\ ۱ + a^۵ = b^۵ \end{cases}$$

$a > ۰$ λ

$$a^۳ + \frac{۱}{a^۳} - ۲ \geq \lambda(a + \frac{۱}{a} - ۲)$$

$\frac{۵۰}{۴}$

$(۰, ۱)$



a (a, b)

-۱۲۸ -۲۵۶ $-۱۲۸\sqrt{۲}$ ۲۵۶ ۰

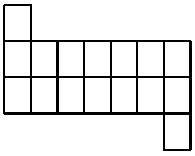
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

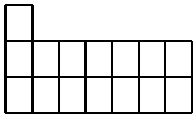
مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

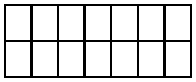
. . . . . ۱ × ۲ . . . . . .

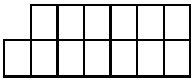
. . . . . .

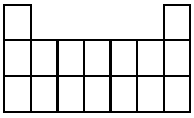
. . . . . .

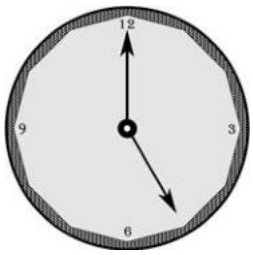




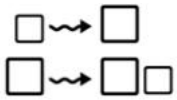


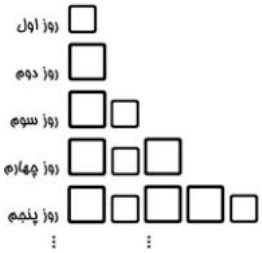


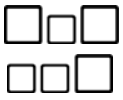


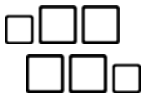


۱۲ : ۲۵









. . n . . . . $۲^n + ۳^n$ . . . . n . . . . . .

n

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

$۹k+۳$

$۹k+۴$

(O) P A B C D

PT P M AB MD MC

$\widehat{TPE}$ $\angle FTP = ۳۰^\circ , \angle ETF = ۷۰^\circ$ AB E F

۶۰° ۳۰° ۴۵° ۵۰° ۷۵°

$\overset{\triangle}{ABC}$ B $\widehat{A} = ۱۵۰^\circ$ A

۱ $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$ $\frac{۳}{۲}(۳-\sqrt{۷})$ ۲ $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

D B C AB AC ABC

N M AMN MNB MNC

BC

$\frac{AM}{NB} = \frac{AN}{MC}$

AH

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۲

---

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

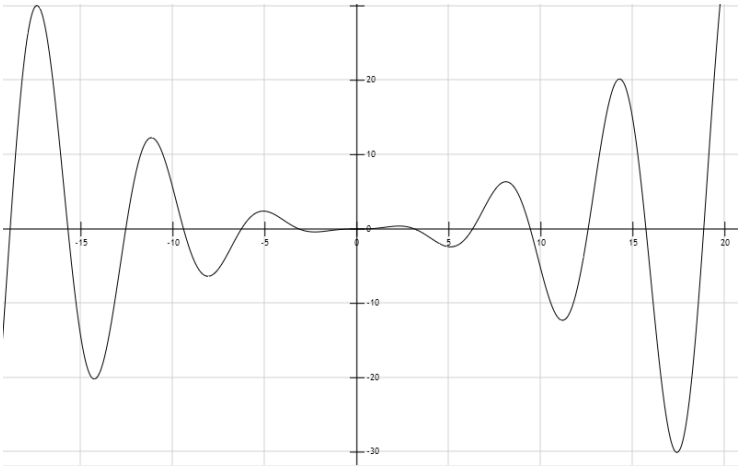
فرض کنید $y = f(x)$ تابع مورد نظر باشد. ابتدا با توجه به این که نقطه‌ی $(۰,۰)$ روی نمودار قرار دارد، باید $f(۰) = ۰$ که همه‌ی گزینه‌ها این شرط را برآورده کنند. این نمودار تابعی را مشخص می‌کند که نه زوج است و نه فرد(زیرا نه نسبت به مبدأ مختصات و نه محور yها تقارن دارد.) پس گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) که به ترتیب توابعی فرد، زوج و زوج هستند نمی‌توانند جواب مسئله باشند.

طبق نمودار سؤال برای هر عدد حقیقی مثبت x باید $f(x)$ مثبت باشد، اما اگر در گزینه‌ی (د) به جای x، $\frac{\pi}{۲}$ قرار دهیم داریم:

$$\frac{x^۲}{۱۰} + \cos x - ۱ = \frac{\pi^۲}{۴۰} + \cos \pi - ۱ = \frac{\pi^۲}{۴۰} - ۱ < ۰$$

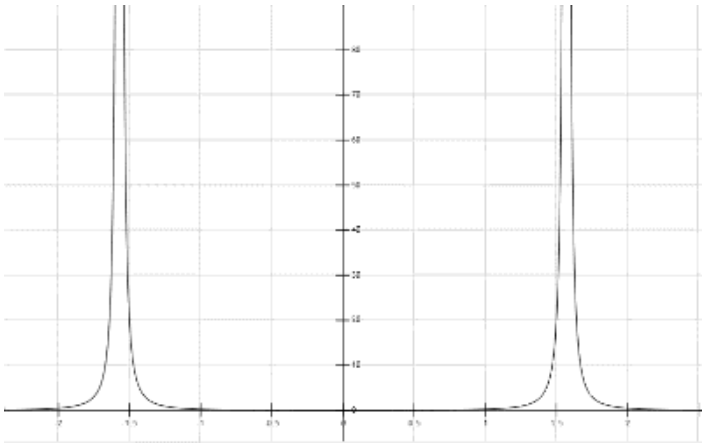
پس گزینه‌ی (د) هم نمی‌تواند جواب مسئله باشد و جواب درست گزینه‌ی (ه) است. در زیر نمودار مربوط به چهار تابع دیگر را می‌بینید.

گزینه‌ی الف. $y = \frac{x^۲}{۱۰}.\sin x$

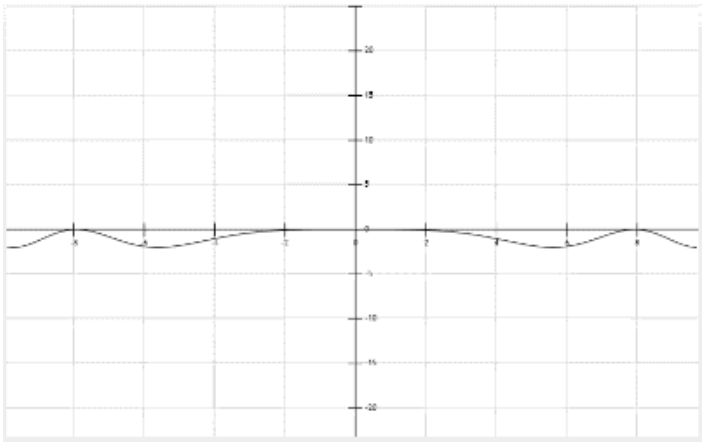


@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

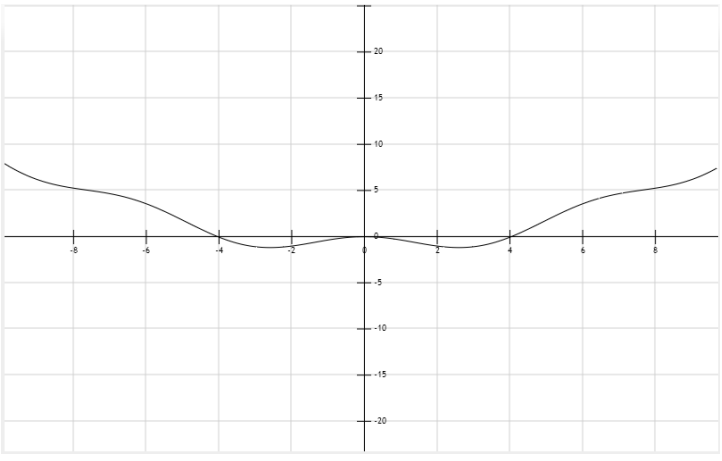
گزینه‌ی ب. $y = \frac{(\tan x)^۲}{۱۰}$



گزینه‌ی ج. $y = \cos(\frac{x^۲}{۱۰}) - ۱$

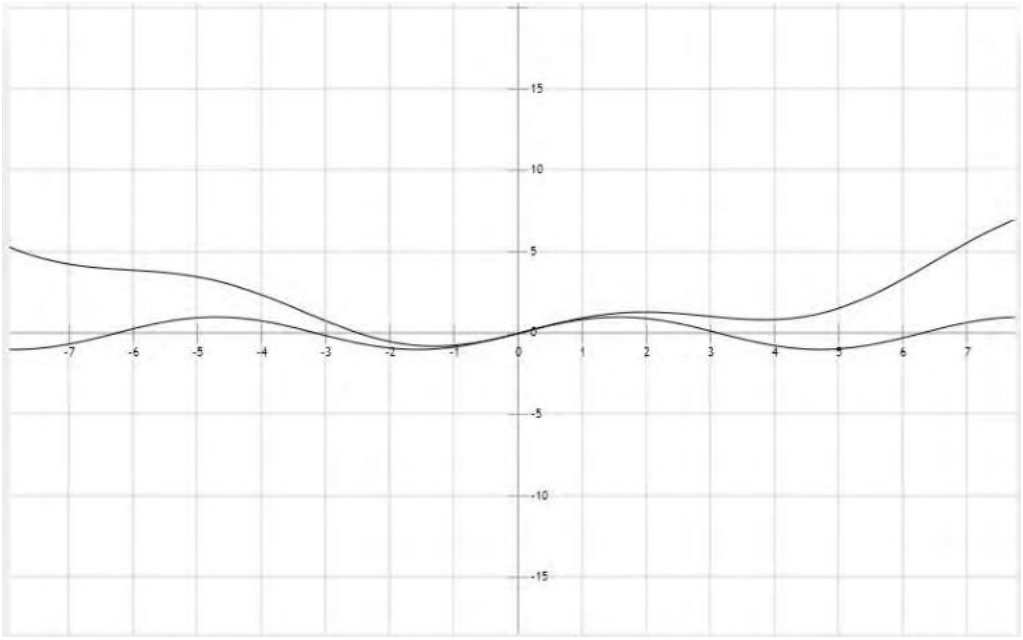


گزینه‌ی د. $y = \frac{x^۲}{۱۰} + \cos x - ۱$

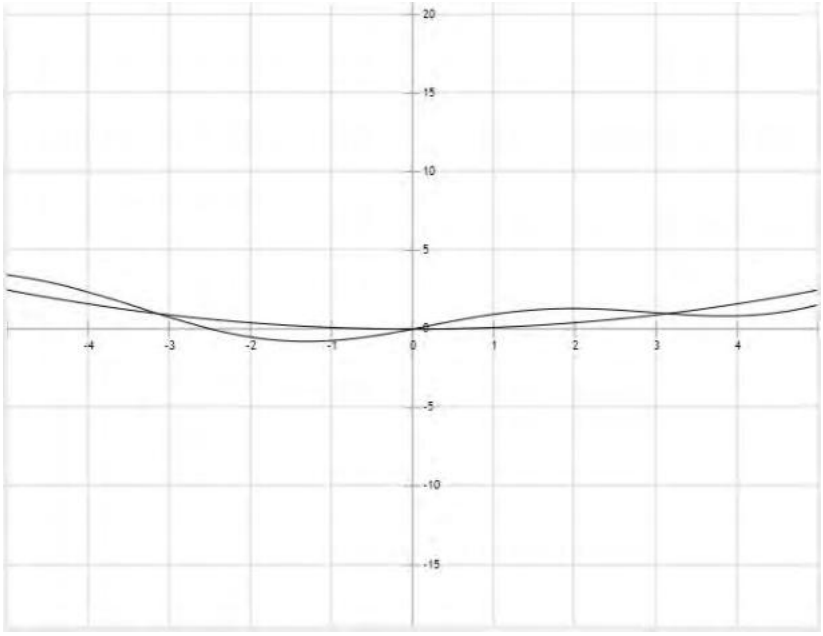


@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

توضیح: اگر به نمودار صورت سؤال حول نقطه‌ی صفر که کسر $\frac{x^۲}{۲}$ در این‌جا بسیار کوچک است، دقت کنید نموداری شبیه به $\sin x$ می‌بینید.(در شکل زیر نمودار پایینی مربوط به $y = \sin x$ و نمودار بالاتر مربوط به گزینه‌ی (ه) است.)



توضیح: نمودار $\sin x + \frac{x^۲}{۱۰}$ از جمع کردن نمودار دو تابع $\frac{x^۲}{۱۰}$ و $\sin x$ به دست می‌آید. یعنی به تعبیری کاملاً غیر دقیق باید نمودار $\sin x$ روی نمودار $\frac{x^۲}{۱۰}$ قرار گیرد تا به نمودار $\sin x + \frac{x^۲}{۱۰}$ برسیم.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

صورت سؤال کاملاً ما راه‌نمایی می‌کند که باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم. طرفین عبارت را در $(x+۱)-(x-۲)=۳$ ضرب می‌کنیم. صرفاً برای راحتی در نوشتن از نماد a برای $x+۱$ و از b برای $x-۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a^{۱۳۸۴}-b^{۱۳۸۴} &= (a-b)(a^{۱۳۸۳}+a^{۱۳۸۲}b+\cdots+ab^{۱۳۸۲}+b^{۱۳۸۳}) \\ &= \quad ۳\times(a^{۱۳۸۳}+a^{۱۳۸۲}b+\cdots+ab^{۱۳۸۲}+b^{۱۳۸۳})=۰ \end{aligned}$$

پس $a^{۱۳۸۴}=b^{۱۳۸۴}$ و لذا $a=b$ و یا $a=-b$. با ترجمه‌ی این عبارت‌ها با استفاده از متغیر اصلی مسئله یعنی x، $x+۱=x-۲$ و یا $x+۱=۲-x$. حالت اول به $۱=-۲$ منجر می‌شود که امکان ندارد، اما از حالت دوم جواب $x=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید که تنها جواب مسئله است.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

$$D\cap C=(A-B)\cap C=A\cap B^c\cap C$$

$$\begin{aligned} F=D-E=D\cap E^c=(A-B)\cap(B-C)^c=(A\cap B^c)\cap(B\cap C^c)^c= \\ =A\cap(B^c\cap(B^c\cup C))=A\cap B^c \end{aligned}$$

پس به وضوح حکم مسئله برقرار است.

توضیح ۱. استفاده از نمودار ون در چنین سؤالاتی بسیار سودمند است.

توضیح ۲. $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۲,۳\}$ و $C=\{۲\}$ مثال نقضی برای همه‌ی گزینه‌های دیگر است.

۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.

برای ایجاد $x^۵$ باید از هر کدام از ۴ پرانتز مسئله یکی از جملات انتخاب شود طوری که مجموع توان‌های آن‌ها برابر ۵ باشد.

از هیچ‌کدام از دو پرانتز $x^۸+x^۴+۱$، نمی‌تواند جمله‌ی $x^۸$ انتخاب شود و ضمناً نمی‌توان هم‌زمان از هر دوی آن‌ها $x^۴$ انتخاب کرد زیرا در هر دو صورت مجموع توان‌ها از ۵ بیش‌تر می‌شود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

اگر از یکی از دو $x^۸ + x^۴ + ۱$، جمله‌ی $x^۴$ انتخاب شود از دیگری باید لزوماً ۱ را انتخاب کنیم و در این حالت از یکی از دو پرانتز باقی‌مانده و از دیگری $۲x$ باید انتخاب شود. بنابراین چهار حالت داریم که هر کدام منجر به یک جمله‌ی $۲x^۵$ و در مجموع $۸x^۵$ می‌شوند.

اگر از هر دو پرانتز $x^۸ + x^۴ + ۱$، ۱ انتخاب شود باید از دو پرانتز دیگر دو جمله انتخاب کنیم که مجموع توان‌های آن‌ها ۵ باشد پس در این حالت ضریب $x^۵$ برابر $۲(۱\times۶ + ۲\times۵ + ۳\times۴) = ۵۶$ می‌شود.

یعنی ضریب $x^۵$ در مجموع $۶۴ = ۸ + ۵۶$ است.

۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ناصر عدد α را انتخاب کرده باشد، در این صورت منصور برای این که امتیاز کم‌تری به ناصر برسد سعی می‌کند عددی را به جای y قرار دهد تا $f(\alpha,y) = y^۲ - ۲\alpha y + -\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$ کم‌ترین مقدار ممکن شود. این عبارت یک رابطه‌ی درجه دوم برحسب y است که کم‌ترین مقدار آن وقتی است که y برابر $\alpha = \frac{-۲\alpha}{۲}-$ باشد و این کم‌ترین مقدار برابر است با $f(\alpha,\alpha) = -۲\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$. یعنی با فرض این‌که منصور خوب بازی می‌کند ناصر با انتخاب α به $-۲\alpha^۲ + ۲\alpha + ۱$ امتیاز می‌رسد. پس ناصر باید α را طوری انتخاب کند که این مقدار بیش‌ترین مقدار ممکن خود باشد. بیش‌ترین مقدار این عبارت زمانی است که α برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۲\times(-۲)}-$و این بیش‌ترین مقدار برابر است با $\frac{۳}{۲} = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) -۲(\frac{۱}{۲})^۲$.

۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

با تقسیم کردن خواهیم داشت:

$$x^۳ + ax + ۱ = (x+۳)(x^۲ - ۳x + b) + \big((a - b + ۹)x + ۱ - ۳b\big)$$

اگر طبق فرض مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده باید متحد با صفر باشد.

$$(a - b + ۹)x + (۱ - ۳b) \equiv ۰ \Rightarrow \begin{cases} a - b + ۹ = ۰ \Rightarrow a = -۹ + b \\ ۱ - ۳b = ۰ \Rightarrow b = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + ۲b = (-۹ + b) + ۲b = -۹ + ۳b = -۹ + ۳(\frac{۱}{۳}) = -۹ + ۱ = -۸$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها روی جمع پخش می‌شود اما خاصیت جابه‌جایی ندارد(لزوماً AB و BA با هم برابر نیستند.)، پس $(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B$. با مقایسه‌ی این رابطه با فرض مسئله می‌فهمیم $AB = BA$ و لذا

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+xy & ۱+x \\ ۱+y & ۲ \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ y & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & x+۱ \\ y+۱ & xy+۱ \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow xy+۱ = ۲ \Rightarrow xy = ۱$$

۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه‌حل اول. دو دایره‌ی وسط که هر کدام با سه دایره‌ی دیگر مجاور هستند را دایره‌ی مرکزی می‌نامیم. در دو برچسب‌گذاری یک‌سان باید برچسب دایره‌های مرکزی یکی باشد زیرا در غیر این صورت حرفی وجود دارد که در یکی از دو برچسب‌گذاری در دایره‌ی مرکزی است و با سه حرف دیگر مجاور است اما در برچسب‌گذاری دیگر تنها با یک حرف مجاور است.

بنابراین برای مشخص کردن یک برچسب‌گذاری ابتدا به $C(۶,۲) = \frac{۶!}{۲!\times ۴!} = ۱۵$ حالت دو حرف دایره‌های مرکزی را انتخاب می‌کنیم، سپس دو حرف از چهار حرف باقی مانده را انتخاب می‌کنیم که مجاور حرفی باشد که زودتر در الفبا ظاهر می‌شود(a زودتر از b، b زودتر از c و... ظاهر می‌شود.) این کار به $c(۴,۲) = \frac{۴!}{۲!\times ۲!} = ۶$ حالت امکان‌پذیر است. دو حرف باقی‌مانده هم در دو دایره‌ی باقی‌مانده قرار می‌گیرند. پس در کل $۱۵ \times ۶ = ۹۰$ برچسب‌گذاری داریم.

راه‌حل دوم. اگر فرض کنیم هر دو برچسب‌گذاری با هم متقاوت هستند، تعداد کل برچسب‌گذاری‌ها $۶! = ۷۲۰$ تا می‌شود. برای یک برچسب‌گذاری خاص مثل شکل زیر تعداد برچسب‌گذاری‌هایی که طبق تعریف مسئله با آن یک‌سان هستند می‌شماریم.

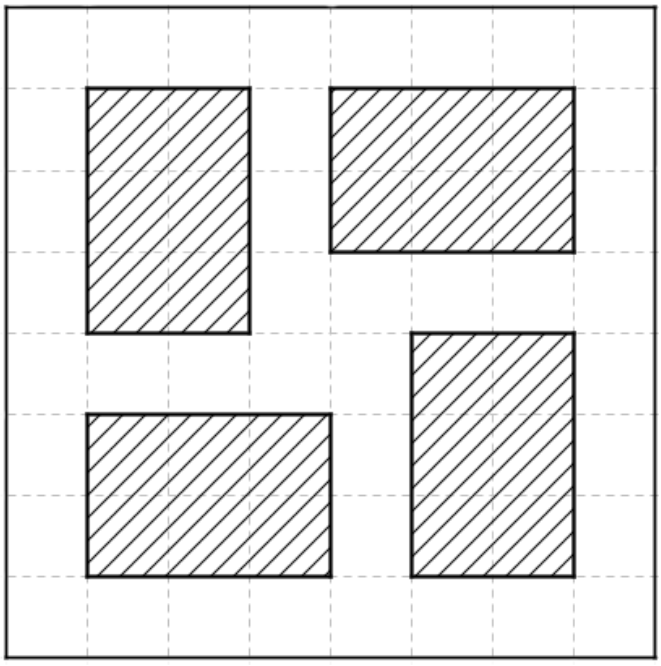
در هر برچسب‌گذاری یک‌سان با این برچسب‌گذاری باز هم حرف‌های a و b باید در دایره‌های مرکزی باشند. پس بسته به این که کدام حرف سمت چپ قرار گیرد دو حالت داریم. در هر کدام از حالت‌ها برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی a دو حالت و برای قرار دادن حرف‌های دایره‌های مجاور به دایره‌ی b هم

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

دو حالت داریم. پس در کل ۸ برچسب‌گذاری مشابه با این برچسب‌گذاری وجود دارد(با احتساب خودش). با توجه به این که با استدلال مشابه همین هر برچسب‌گذاری ۸ برچسب‌گذاری مشابه دارد، تعداد کل برچسب‌گذاری‌های متفاوت $\frac{۷۲۰}{۸} = ۹۰$ است.

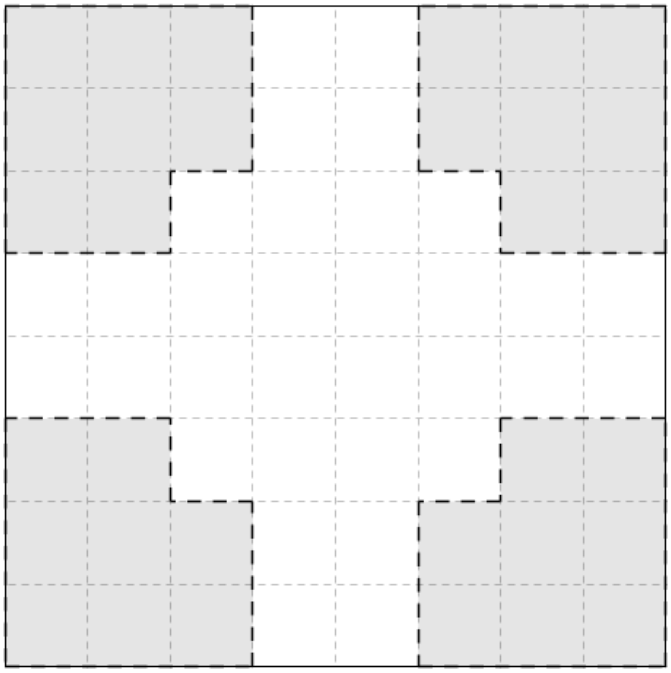
۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

شکل زیر چهار مستطیل ۳×۲ را در جدولی ۸×۸ مشخص می‌کند، طوری که هیچ مستطیل دیگری در جدول جای نگیرد.



حال ادعا می‌کنیم به هر صورت که سه مستطیل ۳×۲ در جدول قرار دهیم، می‌توان یک مستطیل دیگر هم در جدول قرار داد. به چهار شکلی که در گوشه‌ی جدول زیر مشخص هستند دقت کنید. هر مستطیل ۳×۲ حداکثر با یکی از این چهار شکل گوشه‌ای خانه‌ی مشترک دارد. پس اگر تنها سه مستطیل داشته باشم یکی از این گوشه‌ها هست که هیچ کدام از خانه‌های آن پوشیده نشده است، و به وضوح در این شکل یک مستطیل ۳×۲ قرار می‌گیرد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ادعا می‌کنیم هر عدد طبیعی خوب مثل n اول است. اگر این طور نباشد مقسوم‌علیهی مثل a دارد که $1 < a < n$. طبق فرض مسئله

$$\left.\begin{array}{l} 7 \mid a+1, 7 \mid n+1 \Rightarrow 7 \mid a+n+2 \\ \qquad\qquad\quad 7 \mid a+n \end{array}\right\} \Rightarrow 7 \mid 2$$

که این یک تناقض است. حال یک عدد اول p خوب است اگر $7 \mid p+1$، که اعداد اول این‌چنینیِ کم‌تر از ۱۰۰، تنها $\{13, 41, 83, 97\}$ هستند.

۱۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

اگر $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد، $S(n)$ را برابر مجموع $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n که در فهرست ظاهر می‌شود، $S(m)$ فرد است. ابتدا تنها اعداد اول در فهرست هستند و برای هر عدد اول p، $S(p) = 1$ و فرد است. برای این منظور ادعا می‌کنیم در هر گام این فرد بودن حفظ می‌شود. فرض کنید همه‌ی اعدادی که تا یک مرحله در فهرست قرار دارند فرد هستند و در مرحله‌ی بعدی با استفاده از سه عدد a، b و c که در فهرست قرار دارند عدد abc را اضافه کنیم. می‌دانیم $S(abc) = S(a) + S(b) + S(c)$، حال چون $S(a)$، $S(b)$ و $S(c)$ فرد هستند، $S(abc)$ هم فرد می‌شود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حال باید دید برای اعداد هر گزینه مقدار S چه‌قدر است.

$$S(۱۰۰۰) = S(۲^۳ \times ۵^۳) = ۶$$
$$S(۳۳۰) = S(۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱) = ۴$$
$$S(۳۵۰۰۰۰) = S(۲^۴ \times ۵^۵ \times ۷) = ۱۰$$
$$S(۳۷۵) = S(۳ \times ۵^۳) = ۴$$
$$S(۱۰۵۰۰) = S(۲^۲ \times ۳ \times ۵^۳ \times ۷) = ۷$$

پس تنها گزینه‌ی (ه) می‌تواند صحیح باشد. با قرآیند زیر نشان می‌دهیم که با در هر گام با استفاده از اعداد اول و عدد به دست آمده در گام قبلی می‌توان به عدد ۱۰۵۰۰ در فهرست رسید.

$$۲,۳,۵ \to ۳۰, \quad ۳۰,۲,۵ \to ۳۰۰, \quad ۳۰۰,۵,۷ \to ۱۰۵۰۰$$

توضیح: با فرآیندی شبیه به بالا می‌توان نشان داد غیر از اعداد اول، تنها اعداد طبیعی nای در فهرست ظاهر می‌شود که حداقل سه عامل اول داشته باشد و ثانیاً $S(n)$ فرد باشد.

۱۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

محاسبه‌ی این حاصل‌جمع را با توجه به تعداد ارقام به سه قسمت تقسیم می‌کنیم.

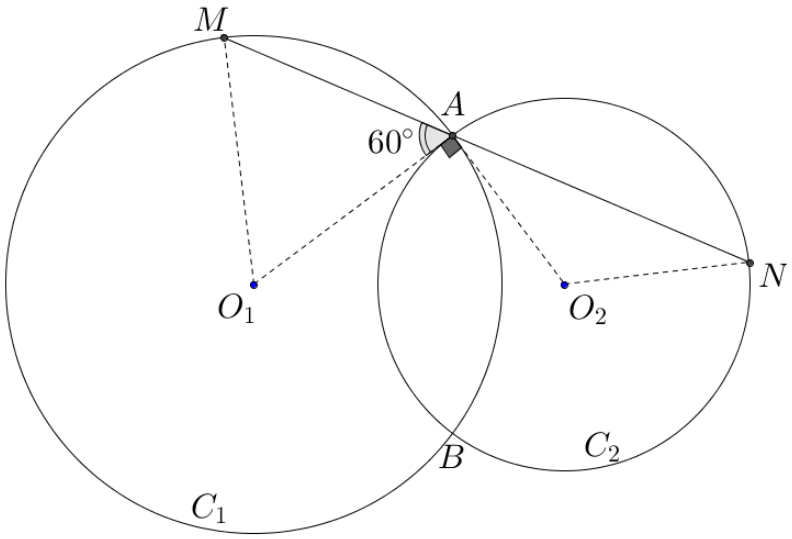
$$\sum_{n=۱}^{۹} p(n) = \sum_{i=۱}^{۹} i = ۴۵$$
$$\sum_{n=۱۰}^{۹۹} p(n) = \sum_{i=۱}^{۹}\sum_{j=۰}^{۹}(i \times j) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)(\sum_{i=۰}^{۹} j) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)^۲ = ۴۵^۲$$
$$\sum_{n=۱۰۰}^{۹۹۹} p(n) = \sum_{i=۱}^{۹}\sum_{j=۰}^{۹}\sum_{k=۰}^{۹}(i \times j \times k) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)(\sum_{i=۰}^{۹} j)(\sum_{k=۰}^{۹} k) = (\sum_{i=۱}^{۹} i)^۳ = ۴۵^۳$$

بنابراین

$$\sum_{n=۱}^{۹۹۹} p(n) = ۴۵ + ۴۵^۲ + ۴۵^۳ = ۹۳۱۹۵$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



با توجه به شکل بالا می‌بینیم که طول AM طبق فرض مسئله برابر ۴ است. از طرف دیگر MO_1 و AO_1 که شعاع‌های دایره‌ی C_1 هستند، طولی برابر ۴ دارند، پس مثلث AMO_1 متساوی‌الاضلاع است و لذا $\angle MAO_1 = ۶۰^\circ$. به علاوه طبق قضیه‌ی فیثاغورس مثلث AO_1O_2 هم قائم‌الزاویه است $(۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲)$.

بنابراین زاویه‌ی $\angle NAO_2$ در مثلث متساوی‌الساقین AO_2N برابر ۳۰° است و لذا با یک محاسبه‌ی ساده نتیجه می‌شود که $AN = ۳\sqrt{۳}$ و بنابراین $MN = MA + AN = ۴ + ۳\sqrt{۳}$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

فرض کنید a_k تعداد ضربات لازم برای از بین بردن یک سر با k چشم باشد. در این صورت $a_۱ = ۱$، ضمناً اگر $k > ۱$ با یک ضربه به این سر، باید تمام سرهای جدید را از بین ببرد و از آن‌جا که برای هر $i < k$ دیو یک سر i چشم درآورده است به a_i ضربه برای از بین بردن این سر احتیاج دارد. پس

$$a_k = a_{k-۱} + a_{k-۲} + \cdots + a_۱ + ۱$$

از آن‌جا که $a_۱ = ۱$، با استفاده از رابطه‌ی بالا می‌فهمیم $a_۲ = ۲$، $a_۳ = ۴$ و با استفاده از استقرا به راحتی دیده می‌شود که $a_k = ۲^{k-۱}$. پس برای از بین بردن یک سر k چشم، $۲^{k-۱}$ ضربه نیاز است.

سرهای دیو به ترتیب ۴، ۶ و ۸ چشم دارند، پس برای از بین بردن کامل دیو به

$$a_۴ + a_۶ + a_۸ = ۲^۳ + ۲^۵ + ۲^۷ = ۸ + ۳۲ + ۱۲۸ = ۱۶۸$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ضربه نیاز است.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

در زیر بررسی می‌کنیم که اگر هر کدام از گزینه‌ها درست باشند چه می‌شود:

الف. این امکان ندارد زیرا در صورت درست بودن (الف) باید (ب) هم درست باشد(آن‌چه (الف) می‌گوید) که ممکن نیست.

ب. اگر (ب) درست باشد، چون تنها یک گزینه‌ی درست داریم باید (الف) غلط باشد، اما غلط بودن (الف) به معنی غلط بودن (ب) هست. پس این گزینه هم نمی‌تواند درست باشد.

ج. اگر (ج) درست باشد، گزینه‌ی (ه) به ناچار غلط است، اما غلط بودن گزینه‌ی (ه) یعنی هیچ‌کدام از (ج) و (ه) درست نیستند که با فرض اولیه تناقض دارد. پس این گزینه هم نمی‌تواند گزینه‌ی درست باشد.

د. اگر (د) درست باشد. گزینه‌ی (الف) که بیان می‌کند (ب) صحیح است، غلط می‌شود. گزینه‌ی (ب) که بیان می‌کند (ج) و (د) هر دو غلط هستند به خاطر فرض درستی (د) غلط می‌شود. گزینه‌ی (ج) که بیان می‌کند (ج) غلط است هم غلط می‌شود. درستی گزینه‌ی (د) تناقضی با خودش ندارد. در مورد گزینه‌ی ه، غلط بودن آن نتیجه می‌دهد که (ج) و (ه) باید هر دو غلط باشند که از قضا این درست است. پس گزینه‌ی (د) باید گزینه‌ی صحیح باشد.

ه. درستی (ه) نتیجه می‌دهد (ب) غلط است و لذا باید یکی از (ج) و (د) درست باشند که این طور نیست پس این گزینه هم غلط است.

۱۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

برای این‌که عدد طبیعی چهاررقمی $\overline{xyzt}$ مضرب ۵ باشد باید $t \in \{۰,۵\}$. به علاوه اگر یکی از اعداد x، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ مضرب سه باشند این عدد تقسیمی می‌شود. بنابراین عدد $\overline{xyzt}$ غیر تقسیمی است اگر $t \in \{۰,۵\}$ و $\overline{x}$، $\overline{xy}$ و $\overline{xyz}$ بر سه بخش‌پذیر نباشند. معادلاً x، $x+y$ و $x+y+z$ بر سه بخش‌پذیر نباشد.(یک عدد طبیعی بر ۳ بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.) بنابراین می‌توان از روی باقی‌مانده‌ی تقسیم x، y و z تشخیص داد که یک عدد تقسیمی هست یا نه. با بررسی حالت‌های مختلفی که باقی‌مانده‌های x، y و z می‌تواند داشته باشد می‌بینیم که تنها حالت‌های زیر منجر به یک عدد غیرتقسیمی می‌شوند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۳	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
باقی‌مانده‌ی تقسیم y بر ۳	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۲	۲
باقی‌مانده‌ی تقسیم z بر ۳	۰	۱	۰	۲	۰	۲	۰	۱
تعداد حالت‌ها برای x	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای y	۴	۴	۳	۳	۴	۴	۳	۳
تعداد حالت‌ها برای z	۴	۳	۴	۳	۴	۳	۴	۳
تعداد حالت‌ها	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷	۴۸	۳۶	۳۶	۲۷

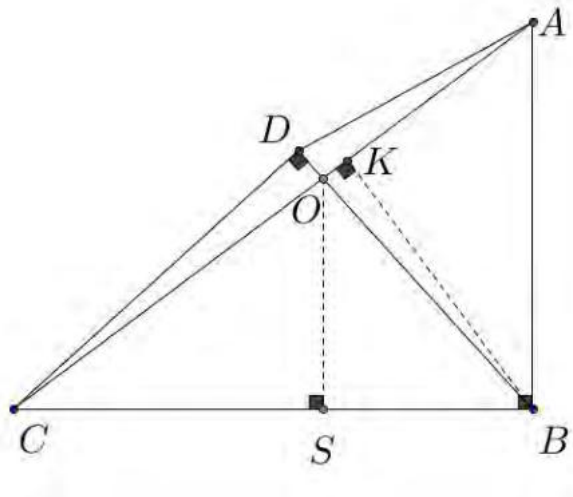
با توجه به این‌که برای t هم دو حالت داریم، تعداد کل اعداد مضرب ۵ غیرتقسیمی ۵۸۸تا است.

$$۲(۲۷ + ۳۶ + ۳۶ + ۴۸ + ۲۷ + ۳۶ + ۳۶ + ۴۸) = ۵۸۸$$

۱۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم و پای این عمود را K می‌نامیم. در این صورت- $\angle CDB = \angle CKB$ و لذا چهارضلعی $CDKB$ محاطی است و در نتیجه- دو مثلث ODC و OKB متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{DC}{KB} = \frac{CO}{OB} = \frac{CO}{۳} \Rightarrow CO = ۳\frac{DC}{KB} = ۳\frac{AB}{KB} \quad (\star)$$



از طرف دیگر دو مثلث AKB و ABC هم متشابه هستند و لذا

$$\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{۵} \overset{\star}{\Rightarrow} CO = \frac{۳}{۵}AC$$

حال از O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را S می‌نامیم. OS و AB هر دو بر BC عمود هستند و لذا با هم موازی‌اند. بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{CS}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{CS}{۵} \Rightarrow CS = ۳, BS = ۲$$

و در نهایت با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OBS و OSC خواهیم داشت:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$OC^۲ = OS^۲ + SC^۲ = BO^۲ - BS^۲ + SC^۲ = ۹ - ۴ + ۹ = ۱۴$$

و بنابراین $OC = \sqrt{۱۴}$.

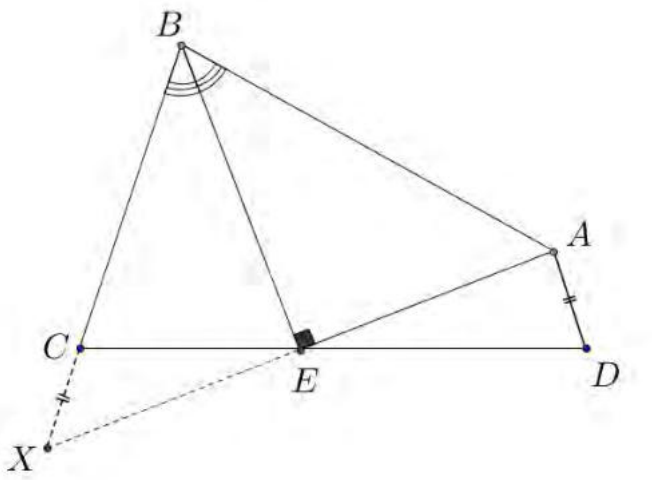
۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.

با یک بررسی ساده می‌بینیم که ترکیب اعمال گفته شده در صورت مسئله در حقیقت همان دوران ۷۲° ساعت‌گرد به مرکز مبدأ است و بنابراین انجام این عمل برای ۱۳۸۲ مرحله معادل دورانی به اندازه‌ی ۷۲×۱۳۸۲ درجه است. اما می‌دانیم که دوران ۳۶۰ درجه و مضارب ۳۶۰ درجه همان دوران صفر درجه است. پس

$$۱۳۸۲ \times ۷۲ = ۱۳۸۰ \times ۷۲ + ۲ \times ۷۲ = (۱۳۸ \times ۲) \times ۳۶۰ + ۱۴۴$$

کل این عمل دورانی ۱۴۴درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و لذا $x = ۴$ و $y = ۵$ است.

۱۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.



AE را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در نقطه‌ی X قطع کند. در این صورت دو مثلث قائم‌الزوایه‌ی AEB و XEB به حالت وتر و یک زاویه($\angle ABE = \angle XBE$) با هم برابر هستند و در نتیجه $XE = AE$ $(\star)$و $BX = AB$ $(\star\star)$. حال با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های XEC و ADE داریم:

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle DEA)}{AD}, \quad \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

با توجه به این که $\angle ADE = \angle BCE$، دو زاویه‌ی $\angle ADE$ و $\angle XCE$ مکمل هستند و در نتیجه سینوس برابر دارند. این موضوع و $\star$ نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\sin(\angle ADE)}{AE} = \frac{\sin(\angle XCE)}{XE} \Rightarrow \frac{\sin(\angle DEA)}{AD} = \frac{\sin(\angle XEC)}{XC}$$

اما دو زاویه‌ی $\angle XEC$ و $\angle DEA$ متقابل‌به‌رأس هستند و لذا سینوس برابر دارند. بنابراین $AD = XC$ و

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$(\star\star) \Rightarrow AB = BX = BC + XC = BC + AD$$

که همان چیزی است که گزینه‌ی (د) به آن اشاره می‌کند.

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

طبق رابطه‌ی اول داریم:

$$a^۳ + (-b)^۳ + ۱^۳ = ۳a(-b)(۱)$$

این یعنی مجموع مکعب‌های سه عدد برابر حاصل‌ضرب آن‌ها شده است. طبق اتحاد اویلر این نتیجه می‌دهد این سه عدد با هم برابر هستند و یا این که مجموع آن‌ها برابر صفر است. اگر $a = -b = ۱$، $۱ + a^۵ = ۲$ در حالی که $b^۵ = -۱$ پس این حالت امکان ندارد و $a - b + ۱ = ۰$، معادلاً $b = a + ۱$. حال اگر این نتیجه را در رابطه‌ی دوم جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$۱ + a^۵ = (۱ + a)^۵ \Rightarrow (۱ + a)((۱ + a)^۴ - (a^۴ - a^۳ + a^۲ - a + ۱)) = ۰$$
$$(۱ + a)^۴ - (a^۴ - a^۳ + a^۲ - a + ۱) = ۵a^۳ + ۵a^۲ + ۵a = ۵a(a^۲ + a + ۱)$$
$$\Rightarrow ۵a(a + ۱)(a^۲ + a + ۱) = ۰$$

از آن‌جا که $a^۲ + a + ۱ > ۰$، تنها جواب‌های معادله‌ی اخیر $a = ۰$ و $a = -۱$ هستند که به ترتیب منجر به $b = ۱$ و $b = ۰$ می‌شوند. پس این دست‌گاه در مجموع دو جواب دارد.

۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

دقت کنید که $(\frac{a - ۱}{\sqrt{a}})^۲ = a + \frac{۱}{a} - ۲$ و $(\frac{a^۳ - ۱}{a\sqrt{a}})^۲ = a^۳ + \frac{۱}{a^۳} - ۲$. پس

$$a^۳ + \frac{۱}{a^۳} - ۲ \geq \lambda(a + \frac{۱}{a} - ۲) \Leftrightarrow (\frac{a^۳ - ۱}{a\sqrt{a}})^۲ - \lambda(\frac{a - ۱}{\sqrt{a}})^۲ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (\frac{a - ۱}{\sqrt{a}})^۲((\frac{a^۲ + a + ۱}{a})^۲ - \lambda) \geq ۰ \Leftrightarrow (\frac{a^۲ + a + ۱}{a})^۲ \geq \lambda$$

یعنی باید بزرگ‌ترین مقدار λ را بیابیم که رابطه‌ی بالا را برآورده کند. این یعنی باید کم‌ترین مقدار عبارت $(\frac{a^۲+a+۱}{a})^۲$ را پیدا کنیم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$(\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}})^۲ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \Rightarrow \frac{a^۲+a+۱}{a}=a+\frac{۱}{a}+۱\geq ۳$$
$$\Rightarrow (\frac{a^۲+a+۱}{a})^۲ \geq ۳^۲ = ۹$$

پس بیش‌ترین مقدار ممکن برای λ، ۹ است.

۲۲. گزینه‌ی (۵) صحیح است.

منظور از زاویه‌ی قورباغه، زاویه‌ای است که خط واصل بین قورباغه با جهت مثبت محور y می‌سازد. دقت کنید که زاویه را با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌کنیم. در هر حرکت جدید زاویه‌ی قورباغه ۴۵درجه افزایش پیدا می‌کند، پس بعد از ۱۵ مرحله قورباغه زاویه‌ی قورباغه $۱۵\times ۴۵^\circ = ۳۱۵^\circ$ می‌شود و بنابراین قورباغه روی قسمتی از خط $y=-x$ که درون ربع دوم مختصات قرار دارد، خواهد بود.

به علاوه اگر فاصله‌ی قورباغه تا مبدأ مختصات بعد از گام nاُم را d_n بنامیم. $d_{n+۱}$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی است که طول ساق آن برابر d_n است. بنابراین $d_{n+۱}=\sqrt{۲}d_n$. پس

$$d_{۱۵}=\sqrt{۲}.d_{۱۴}=(\sqrt{۲})^۲ d_{۱۳}=\cdots=(\sqrt{۲})^{۱۵}d_۰=(\sqrt{۲})^{۱۵}=۲^۷\sqrt{۲}=۱۲۸\sqrt{۲}$$

با توجه به این‌که (a,b) روی خط $y=-x$ قرار دارد، $b=-a>۰$ و

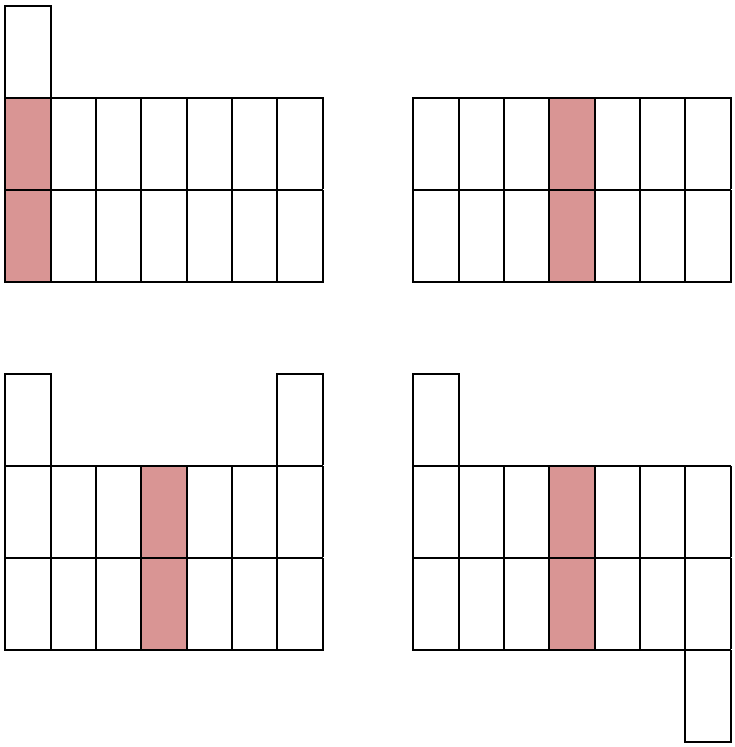
$$۲^{۱۵}=(۲^۷\sqrt{۲})^۲=d_{۱۵}^۲=a^۲+b^۲=۲a^۲ \Rightarrow a=-۲^۷=-۱۲۸$$

توضیح: می‌توان با اندکی تلاش به دست آورد که اگر قورباغه در خانه‌ی (x,y) قرار داشته باشد، بعد از جهش از این خانه با شیوه‌ای که در صورت سؤال بیان شده است به خانه‌ی $(x+y,y-x)$ می‌رود. (در حقیقت بردار (x,y) با دوران ۹۰درجه‌ی آن در جهت ساعت‌گرد یعنی $(y,-x)$ جمع می‌شود.)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ادعا می‌کنیم در گزینه‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نفر اول همواره می‌تواند برنده‌ی بازی باشد. به این صورت که در هر کدام از این چهار گزینه مطابق شکل زیر با قرار دادن این کاشی زمین بازی شکلی است که دارای یک خط تقارن یا یک مرکز تقارن است و به علاوه در این زمین جدید نفر دوم شروع کننده‌ی بازی است. حالا نفر اول در هر گام قرینه‌ی خانه‌هایی که نفر دوم با یک کاشی پر کرده است را با یک کاشی جدید پر می‌کند. با این نحوه‌ی بازی اگر نفر دوم بازی کند، نفر اول حتماً می‌تواند حرکت بعد از آن را هم انجام دهد و لذا نفر اول نمی‌تواند بازنده باشد و بنابراین حتماً برنده است.

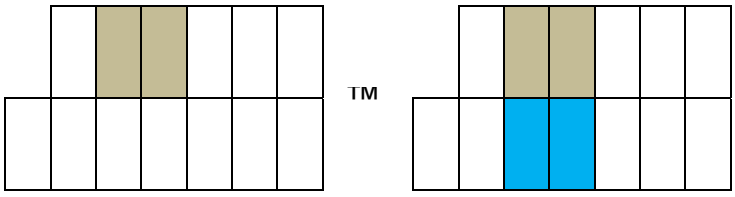


@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

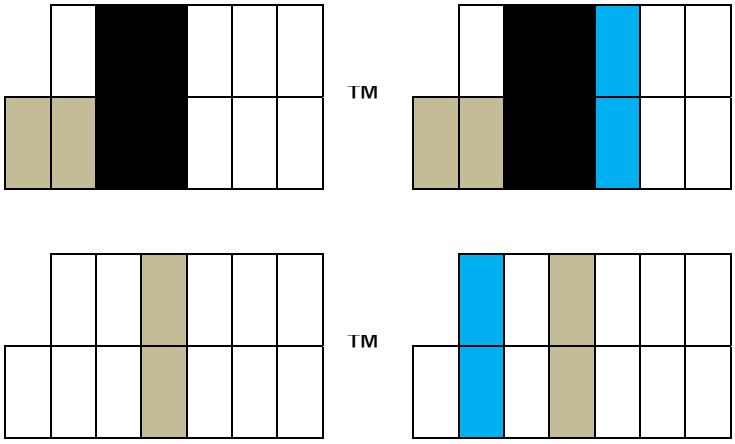
حال روشی ارایه می‌دهیم که نفر دوم می‌تواند با این روش در گزینه‌ی (ه) برنده‌ی بازی باشد.

اگر نفر اول یک کاشی افقی را در جدول قرار دهد طوری که شامل تک‌خانه‌ی پایین چپ جدول نباشد، نفر دوم یک کاشی افقی را دقیقاً پایین یا بالای کاشی نفر اول قرار می‌دهد.(اگر نفر اول در ردیف پایین گذاشته باشد، نفر دوم در ردیف بالا می‌گذارد و بالعکس)

در زیر شکل سمت چپ حرکت نفر اول و شکل سمت راست حرکت نفر دوم را تصویر می‌کند. خانه‌های مشکی رنگ هم خانه‌هایی را نشان می‌دهند که قبلاً با کاشی پر شده اند.



اگر نفر اول یک کاشی عمودی در جدول قرار دهد، یا این‌که یک کاشی افقی را مطابق شکل زیر طوری قرار دهد که تک‌خانه‌ی پایین سمت چپ جدول را بپوشاند، نفر دوم یک کاشی عمودی را در اولین ستون از سمت چپ که کاملاً خالی باشد قرار می‌دهد.



وقتی نفر اول و دوم یک دور بازی خود را انجام دهند، دو ستون از ستون‌های دوتایی جدول غیرقابل قابل استفاده می‌شود، اگر نفر اول یک بار از حرکت‌های دوم استفاده کند، تک ستون یک خانه‌ای هم غیرقابل استفاده می‌گردد. بنابراین در هر دو بازی هر دو نفر اول و دوم ۲ ستون از شش ستون کامل جدول(غیر از تک ستون ناقص) غیرقایل استفاده می‌شود. بنابراین با ادامه‌ی این روند به وضعیتی می‌رسیم که نفر اول نتواند بازی را ادامه دهد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

فرض کنید ساعت ۵ و x دقیقه باشد، در این صورت زاویه‌ی عقربه‌ی دقیقه‌شمار نسبت به نقطه‌ی صفر (همان۱۲)، $۶x = \frac{x}{۶۰} \times ۳۶۰$ درجه و زاویه‌ی عقربه‌ی ساعت‌شمار برابر $۵ \times ۳۰ + \frac{x}{۶۰} \times ۳۰ = ۱۵۰ + \frac{x}{۲}$ درجه باشد. حال اگر در ساعت a و b دقیقه عقربه‌ها در وضعیت مشابهی قرار داشته باشند. در این صورت:

$$۳۰a + \frac{b}{۲} = ۶x \Rightarrow ۶ \Big| \frac{b}{۲} \Rightarrow ۱۲ \Big| b$$
$$۶b = ۱۵۰ + \frac{x}{۲} \Rightarrow ۶ \Big| \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۱۲k \ (۰ \le k \le ۵)$$
$$\Rightarrow ۶b = ۱۵۰ + ۶k \Rightarrow b = ۲۵ + k$$

با توجه به این که b بر ۱۲ بخش‌پذیر است، باید $k+۱$ بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد که برای $k = ۰,۱,\cdots,۵$ امکان ندارد.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

رشته‌ی مرحله‌ی iاُم را با A_i نمایش می‌دهیم. هم‌چنین منظور ما از نماد A_iA_j این است که رشته‌ی مربوط به A_i در سمت چپ رشته‌ی A_j قرار گرفته است. به طور مثال $A_۴ = A_۲A_۱$.

به استقرا نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی m، $A_{۳m+۲} = A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}A_{۳m-۱}A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}$. (با اندکی بازی کردن برای رسیدن به $A_۵$ و سپس $A_۸$ از روی $A_۵$ و با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۳۸۲ بر ۳ برابر ۲ است می‌توان این رابطه را حدس زد.)

برای حالت $m = ۱$ که حکم به وضوح برقرار است. ($A_۵ = A_۲A_۱A_۲A_۲A_۱$)

حال فرض کنید حکم برای k برقرار باشد، یعنی:

$$A_{۳k+۲} = A_{۳k-۱}A_{۳k-۲}A_{۳k-۱}A_{۳k-۱}A_{۳k-۲}$$

حال اگر باکتری‌ها سه مرحله رشد کنند به اندیس هر A_nای سه واحد اضافه می‌گردد. پس

$$A_{۳(k+۱)+۲} = A_{۳k+۵} = A_{۳k+۲}A_{۳k+۱}A_{۳k+۲}A_{۳k+۱}A_{۳k+۲}$$

و حکم ثابت می‌شود. حال از آن‌جا که تعداد باکتری‌های دو رشته‌ی $A_{۳m-۱}A_{۳m-۲}$ و $A_{۳m-۲}A_{۳m-۱}$ یک‌سان و برابر مجموع تعداد باکتری‌های رشته‌های $A_{۳m-۱}$ و $A_{۳m-۲}$ است، سه باکتری وسطی مربوط به $A_{۳m+۲}$ همان سه باکتری وسطی مربوط به $A_{۳m-۱}$ است و با استدلال مشابه سه باکتری وسطی $A_{۳m-۱}$ همان سه باکتری وسطی $A_{۳m-۴}$ است. با ادامه‌ی همین فرآیند می‌فهمیم که سه باکتری وسطی $A_{۳m+۲}$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

همان سه باکتری وسطی $A_۵$ است. پس با توجه به این‌که $۳\times۴۶۰+۲=۱۳۸۲$ گزینه‌ی (الف) گزینه‌ی درست است.

۲۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که n باید عددی فرد باشد. زیرا اگر n بر ۲ بخش‌پذیر شود:

$$۰ \equiv ۲^n + ۳^n \equiv ۲^n + (-۲)^n \equiv ۲^n + ۲^n \equiv ۲^{n+۱} \text{(به پیمانه‌ی ۵)}$$

که امکان ندارد. حال برای $n \geq ۳$ داریم: (حالت $n=۱$ و $n=۲$ به وضوح جواب نیستند.)

(دقت کنید که همه‌ی روابط زیر بالا به پیمانه‌ی ۱۲۵ هستند.)

$$۰ \equiv ۲^n + ۳^n \equiv ۲^n + (۵-۲)^n \equiv ۲^n + \binom{n}{n}۵^n(-۲)^۰ + \cdots + \binom{n}{۱}۵^۱(-۲)^{n-۱} + \binom{n}{۰}۵^۰(-۲)^n$$
$$\equiv ۲^n - \frac{n(n-۱)}{۲}۵^۲ \times ۲^{n-۲} + ۲^{n-۱} \times ۵ \times n - ۲^n \equiv ۲^{n-۳}(-۲۵n^۲ + ۴۵n)$$

حال با استفاده‌ی از رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$۱۲۵ \Big| ۲^{n-۳} \times ۵n(۵n-۹) \Rightarrow ۲۵ \Big| ۲^{n-۳}n(۵n-۹)$$

حال با توجه به این‌که $(۵,۲)=۱$ و $(۵,۱)=(۵,-۹)=(۵,۵n-۹)=۱$ و با به کارگیری لم اقلیدس نتیجه می‌شود که باید n بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد. کوچک‌ترین عدد طبیعی مضرب ۲۵ خودش است که مجموع ارقامش برابر ۷ می‌باشد. پس گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۷. گزینه‌ی (ج) درست است.

اولاً فرض کنید $۱۰^{k-۱} \leq n < ۱۰^k$ یک عدد ریشه‌دار k رقمی باشد. در این صورت $n = \overline{a_k a_{k-۱} \cdots a_۱}$.

حال داریم

$$۱۰^{k-۱} \leq n = (a_k + a_{k-۱} + \cdots + a_۱)^۲ < (۱۰k)^۲ \Rightarrow ۱۰^{k-۳} < k^۲$$

اما به سادگی به کمک استقرا می‌توان نشان داد که اگر k بزرگ‌تر از ۴ باشد، $۱۰^{k-۳} \geq k^۲$ و لذا عدد ریشه‌دار با بیش از ۴ رقم نداریم و بنابراین تعداد اعداد ریشه‌دار باید متناهی باشد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حال ادعا می‌کنیم عدد ریشه‌دار ۴ رقمی هم وجود ندارد. اگر $n = \overline{abcd}$ یک عدد ریشه‌دار چهار رقمی باشد، این یعنی $1000 \le n = (a+b+c+d)^2 < 40^2 = 1600$ پس $a = 1$ و اگر a برابر یک باشد، باید داشته باشیم $1000 \le n = (1+b+c+d)^2 < (1+10+10+10)^2 = 31^2 = 961$ که امکان ندارد. پس عدد ریشه‌دار چهاررقمی هم نداریم. اما به وضوح ۸۱ یک عدد ریشه‌دار دورقمی است.

به علاوه دقت کنید که می‌دانیم باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۹ با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ با هم برابر هستند. اگر مجموع ارقام n را با $S(n)$ نمایش دهیم، n ریشه‌دار است اگر $n = S(n)^2$. پس باید

$$n \equiv S(n) \equiv n \equiv S(n)^2 \equiv n^2 \pmod 9$$

پس باید $9 \mid n(n-1)$، با توجه به این که n و $n-1$ هر دو نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند این تنها در صورتی امکان دارد که $9 \mid n$ و یا $9 \mid n-1$. یعنی تمام اعداد ریشه‌دار به شکل $9k$ و $9k+1$ هستند و غیر از این دو صورت عدد ریشه‌داری نداریم.

توضیح: دقت کنید که اگر n عددی ریشه‌دار باشد، از آن‌جا که $n < 1000$، $S(n) = \sqrt{n} < \sqrt{1000}$، پس $S(n) \le 32$. اما $S(n) \equiv n \equiv 0,1 \pmod 9$. پس $S(n) \in \{1,8,9,17,18,26,27\}$.

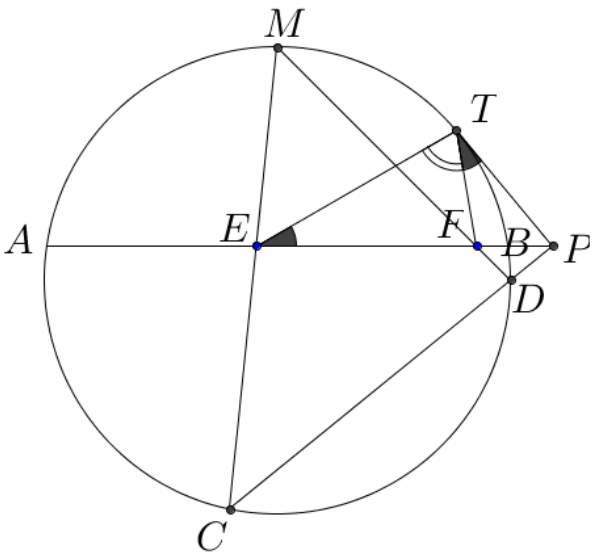
اما

$$\begin{aligned}
S(8^2) = S(64) &= 10 \neq 8 \\
S(17^2) = S(289) &= 19 \neq 17 \\
S(18^2) = S(324) &= 9 \neq 18 \\
S(26^2) = S(676) &= 19 \neq 26 \\
S(27^2) = S(729) &= 18 \neq 27
\end{aligned}$$

بنابراین تنها عددهای ریشه‌دار ۱ و ۸۱ هستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که $\angle MBE = \angle BCM = \frac{\widehat{AB}}{۲}$، بنابراین با توجه به این‌که زاویه‌ی $\angle BME$ در دو مثلث BME و BMC مشترک است، این مثلث متشابه هستند. نسبت تشابه این دو مثلث نتیجه می‌دهد $MB^۲ = ME.MC$. با استدلال کاملاً مشابه و با توجه به مثلث‌های AMF و BAM به دست می‌آوریم $MA^۲ = MF.MD$. از آن‌جا که دو کمان MA و MB با هم برابر هستند، $MA^۲ = MB^۲$ و در نتیجه $ME.MC = MF.MD$ و این یعنی چهارضلعی $EFDC$ محاطی است. از محاطی بودن این چهارضلعی نتیجه می‌شود که $PF.PE = PD.PC$. اما طبق قوت P نسبت به دایره‌ی اصلی مسئله $PD.PC = PT^۲$. این رابطه نتیجه می‌دهد که دو مثلث PTF و PTE متشابه‌اند و لذا $\angle TEP = \angle PTF = ۳۰^\circ$. در نتیجه داریم $\angle TPE = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - ۳۰^\circ - ۷۰^\circ = ۵۰^\circ$.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

M را وسط ضلع AC و G را مرکز ثقل مثلث بگیرید. در این صورت نقطه‌ی A باید روی کمان درخور زاویه‌ی ۱۵۰° نظیر پاره‌خط BM باشد. از آن‌جا که طول AG برابر $\frac{۲}{۳}$ میانه‌ی نظیر رأس A است، کافی است کم‌ترین مقدار ممکن برای AG را بیابیم و آن را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم. فرض کنید O مرکز این کمان درخور باشد و نیم‌خط OG دایره را در نقطه‌ی X قطع کند. حال داریم

$$OG + GA \geq OA = OX \Rightarrow GA \geq OX - OG = XG$$

یعنی کم‌ترین مقدار ممکن طول GX است. حال باید طول GX را بیابیم. با توجه به قوت نقطه‌ی G داریم:

$$TG.GX = GA.GM = ۲ \Rightarrow (۲R - GX)GX = ۲$$

که T و R به ترتیب محل تماس دوم خط GX و دایره‌ی محیطی AMC و شعاع این دایره هستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$R = \frac{۳}{۲\sin(۱۵۰^\circ)} = ۳$$

پس $GX^۲ - ۶GX + ۲ = ۰$ و بنابراین $GX = ۳ \pm \sqrt{۷}$ که چون $GX < R = ۳$ تنها حالت $GX = ۳ - \sqrt{۷}$ قابل قبول است.

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

T را نقطه‌ی وسط ضلع BC بگیرید و فرض کنید h_a، h_b، h_c و h_t به ترتیب طول عمودهای وارد از A، B، C و T بر MN باشند. از آن جا که قاعده‌ی هر سه مثلث همان MN است باید $h_b + h_c = h_a$. حال از آن‌جا که T نقطه‌ی وسط ضلع BC است، می‌توان به سادگی به کمک قضیه‌ی تالس نتیجه گرفت که $h_t = \frac{h_b + h_c}{۲} = \frac{h_a}{۲}$. حال فرض کنید خط واصل بین A و T، خط مذکور در صورت سؤال را در نقطه‌ی S قطع کند. در این صورت به دلیل قضیه‌ی تالس و توازی عمودهای وارد از T و A، $\frac{AS}{ST} = \frac{h_a}{h_t} = ۲$، پس S نقطه‌ای روی میانه‌ی نظیر ضلع BC از مثلث ABC است که این میانه را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، پس باید مرکز ثقل مثلث باشد و بنابراین این خط همواره از مرکز ثقل مثلث که نقطه‌ای ثابت در صفحه‌ی مثلث است می‌گذرد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور سال ۱۳۸۱

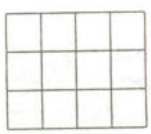
۱) مساحت مثلثی که طول یک ضلع آن ۳ و طول ضلع دیگرش ۶ است حداکثر چقدر است؟

الف) ۱۸ ب) ۱۲ ج) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ د) ۹ ه) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

۲) یک صفحهٔ مشبک ۵ × ۴ داریم. در این صفحه چند شکل مانند  (افقی یا عمودی) می‌توان یافت؟

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ ه) ۳۴

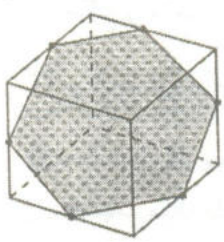
۳) فرض کنید صفحات مشبک ۴ × ۳، ۴ × ۶، ۵ × ۳، ۵ × ۷ و صفحهٔ ۴ × ۴ که یکی از خانه‌های گوشه‌ای آن حذف شده در دست است. به عنوان مثال شکل روبرو صفحهٔ مشبک ۴ × ۳ است:



چند تا از این صفحات را می‌توان به وسیلهٔ کاشی‌هایی مانند  فرش کرد؟ (یعنی طوری پوشاند که هیچ دو کاشی روی هم قرار نگیرند.)

الف) ۵ تا ب) ۴ تا ج) ۳ تا د) ۲ تا ه) یکی

۴) اضلاع مکعب روبرو برابر ۱ است. نقاط مشخص شده در شکل وسط اضلاع می‌باشند، مساحت شش ضلعی حاصل چقدر است؟



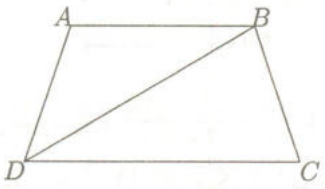
الف) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ج) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
د) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ه) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۵) فرض کنید سه باغچهٔ سبزیجات به شکل دایرهٔ به شعاع ۱۰ متر، مستطیلی به طول ۵۰ متر و عرض ۶ متر و مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲۶ متر داریم. می‌خواهیم دور هر کدام حصاری بکشیم که خرگوش‌ها به یک متری باغچه هم نزدیک نشوند. کدام یک به حصار بیش‌تری احتیاج دارد؟

الف) به ترتیب دایره، مستطیل و مثلث ب) به ترتیب مستطیل، مثلث و دایره ج) به ترتیب مستطیل، دایره و مثلث
د) به ترتیب مثلث، دایره و مستطیل ه) به ترتیب دایره، مثلث و مستطیل

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۶) در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ که در آن اضلاع CD, AB موازیند، داریم: $CD = ۴$، $AB = ۳$ و $AD = ۲$. طول قطر BD برابر است با



الف) ۴ ب) ۵ ج) $\frac{۷}{۲}$

د) $۲\sqrt{۳}$ ه) $\frac{۱۷}{۴}$

۷) فرض کنید m و n اعداد طبیعی دلخواه باشند. عدد A را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A = (\cdots(((n+۱)^m + ۱)^m + ۱)^m + \cdots)^m + ۱$$

که در آن ۱۳۸۱ بار عبارت m ظاهر گشته است. در این‌صورت:

الف) A همواره زوج است. ب) A همواره فرد است. ج) $A + m$ همواره زوج است.

د) $A + n$ همواره زوج است. ه) $A+m+n$ همواره زوج است.

۸) فرض کنید مجموعهٔ A به شکل زیر تعریف شده باشد:

$$A = \{a^۲ + b^۲ | a, b \in N \cup \{۰\}\}$$

در این‌صورت:

الف) برای هر دو عدد x, y در A داریم $x + y \in A$.

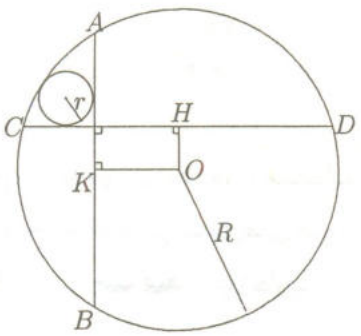
ب) برای هر دو عدد x, y در A داریم $|x - y| \in A$.

ج) برای هر دو عدد x, y در A داریم $xy \in A$.

د) اگر $x^۲ \in A$ آنگاه $|x| \in A$.

ه) هیچ‌کدام از موارد بالا صحیح نیست.

۹) در شکل مقابل دو وتر AB و CD بر هم عمودند و داریم: $OK = ۳$ و $OH = ۱$ و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، یعنی r، برابر ۱ است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چقدر است؟



الف) ۵ ب) $۱+۲\sqrt{۵}$ ج) ۶

د) $۱+\sqrt{۱۰}$ ه) $\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}$

۱۰) عدد $\underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{۱۳۸۱ بار}} + \cdots + ۹۹۹ + ۹۹ + ۹$ چند رقم یک دارد؟

الف) ۱۳۷۶ ب) ۱۳۷۷ ج) ۱۳۷۸

د) ۱۳۷۹ ه) این عدد رقم یک ندارد

۱۱) فرض کنید اعداد حقیقی a، b و c در روابط زیر صدق کنند:

$$۲a + b + c = ۰ \quad , \quad ab + ac + bc = ۰$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

در این‌صورت کسر $\frac{a^۲+۱}{b^۲+c^۲+۱}$ چند مقدار مختلف را می‌تواند بپذیرد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۱۲) قرار می‌دهیم $A(k,s)=(۱+\frac{۲}{k+۱})(۱+\frac{۲}{k+۲})(۱+\frac{۲}{k+۳})\cdots(۱+\frac{۲}{k+۲s+۱})$ و سپس $B(k,s)=(۱+\frac{۱}{k})A(k,s)$. کدام‌یک از اعداد زیر را می‌توان به شکل $B(k,s)$ نوشت به‌طوری که $s>k>۱۳۸۱$.

الف) ۳ ب) $\frac{۱۱}{۴}$ ج) $\frac{۱۲۳۴۵}{۲۳۴۷}$ د) $\frac{۱۲۵}{۳۷}$ ه) $\frac{۱۳۷}{۴۲}$

۱۳) کدام‌یک از اعداد زیر را نمی‌توان به صورت حاصل‌ضرب ۵ عدد طبیعی متمایز بزرگ‌تر از ۱ نوشت؟

$$۲^{۳۲}-۱,۵^{۲۷}+۱,۶^{۴},۳^{۱۴},۲۱^{۳},۵۰^{۳}$$

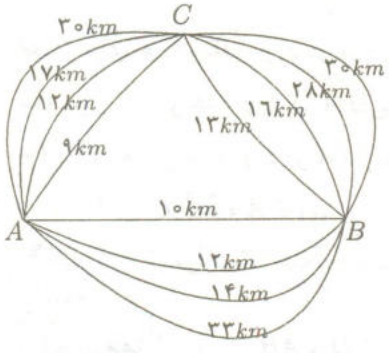
الف) $۱+۲۱^{۳},۵^{۲۷}$ ب) $۱-۵۰^{۳},۲^{۳۲}$ ج) $۳^{۱۴},۲۱^{۳}$

د) $۶^{۴},۲۱^{۳}$ ه) $۱-۵^{۲۷}+۱,۲^{۳۲}$

۱۴) در این امتحان به ۳۰ سوال تستی پاسخ می‌دهید. هر جواب درست، ۴ نمرهٔ مثبت دارد و هر جواب غلط ۱ نمرهٔ منفی دارد و هر تستی که بدون پاسخ رها شود صفر نمره دارد. نمرهٔ نهایی شما چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

الف) ۱۴۵ ب) ۱۴۶ ج) ۱۴۸ د) ۱۵۰ ه) ۱۵۱

۱۵) علی می‌خواهد از شهر A به شهر B و از شهر B به شهر C برود و از آنجا به A بازگردد. از هر شهر به شهر دیگر مسیرهایی با طول‌هایی که در شکل دیده می‌شوند، وجود دارد. علی به چند طریق می‌تواند مسافرت نماید تا نمازش شکسته‌نباشد؟ (نماز در صورتی شکسته است که طول مسافتی که طی می‌شود بیش از $۴۸km$ شود.)



الف) ۴۵ ب) ۲۴ ج) ۱۹
د) ۱ ه) صفر

۱۶) تیم المپیاد ریاضی در یک دوره مسابقات فوتبال شرکت کرده است و در ۲۰۰۳ بازی ۵۷۰۲ امتیاز کسب کرده است. تعداد بردها، باخت‌ها و تساوی‌های این تیم چند حالت مختلف ممکن است داشته باشد؟ (هر برد ۳ امتیاز، هر تساوی ۱ امتیاز و هر باخت صفر امتیاز دارد.)

الف) ۵۱ ب) ۵۲ ج) ۱۰۲ د) ۱۰۳ ه) ۱۰۵

۱۷) اگر از یک عدد سه رقمی کم‌تر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به‌دست آید؟

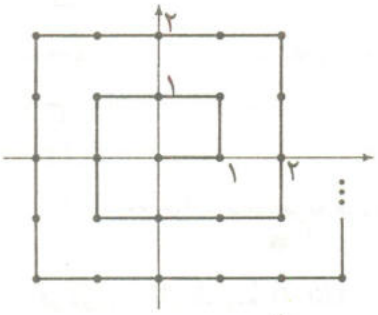
الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۳ د) ۵۵ ه) ۵۶

۱۸) چند عدد ۶ رقمی وجود دارد که پس از حذف یکی از رقم‌های آن عدد ۱۱۱۲۲ حاصل شود؟

الف) ۵۴ ب) ۵۵ ج) ۵۶ د) ۵۷ ه) ۵۸

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۹) حلزونی در صفحهٔ مختصات با سرعت ۱ میلی‌متر بر ثانیه شروع به حرکت می‌کند. او حرکت خود را از مبداء آغاز می‌کند و مسیری مشابه به شکل روبرو را طی می‌کند (محورهای مختصات برحسب میلی‌متر مدرج شده‌اند). اگر حلزون حرکت خود را در لحظهٔ $t = ۰$ آغاز کرده باشد، در لحظهٔ $t = ۱۳۸۱$ (بر حسب ثانیه) حلزون در چه نقطه‌ای قرار دارد؟



(به عنوان مثال در لحظهٔ $t = ۵$ حلزون در نقطهٔ $(۰, -۱)$ و در لحظهٔ $t = ۱۰$ در نقطهٔ $(۰, ۲)$ قرار دارد.)

الف) $(-۱۰, ۱۸)$ ب) $(-۸, -۱۸)$ ج) $(۱۲, ۱۹)$ د) $(-۱۸, ۱۷)$ ه) $(-۶, ۱۹)$

۲۰) دهی، صد خانه دارد. هر ۱۰ خانه‌ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بام‌هایشان هست (ممکن است روی یک بام چند آنتن هم باشد). هر سه آنتنی را که در نظر بگیریم، حداقل دو کلاغ روی آن‌ها نشسته است (ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ هم باشد). این ده حداقل چند کلاغ دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۹۲ ج) ۹۳ د) ۹۸ ه) ۹۹

۲۱) در هر مرحله ۴ خانه از جدول روبرو انتخاب می‌کنیم به‌طوری که از هیچ سطر یا ستونی ۲ خانه انتخاب نشده باشد. عددهای هر ۴ خانه را یک واحد اضافه یا از هر یک، یک واحد کم می‌کنیم. با این روش به کدام‌یک از جدول‌های زیر می‌توان رسید؟

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

الف)

۳	−۶	۰	−۲۱
۲۷	۲۷	۱۰	−۶
۴	۷	۷	۲۰
۴	۱۰	۲۳	۳

ب)

۱۳	۰	۰	۲۰
۷	۴	۱۷	۰
۱۱	۱۰	۵	۱۰
۱۳	۱۱	۶	۰

ج)

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۲	۴	۳	۱

د)

۲۱	۲	۱۷	۱۰
۲	۱۴	۱۷	۱۷
۱۰	۲۴	۱۳	۳
۱۷	۱۰	۳	۲۰

ه)

۱۵	۳	۱۷	۱۵
۶	۱۳	۱۳	۱۶
۸	۱۵	۱۳	۱۴
۲۱	۱۹	۵	۳

۲۲) هر مولکول از تعدای اتم تشکیل شده است. بین هر دو اتم یک مولکول، تعدادی پیوند وجود دارد. این تعداد می‌تواند ۰ و ۱ و ۲ و یا حتی بیش‌تر باشد. تعداد پیوندهای بین اتم‌های x و y از مولکول‌های مختلف عددی ثابت و وابسته به x و y است. می‌دانیم:

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، b، c دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، b، d دارای ۷ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، c، d دارای ۳ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های b، c، d دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، b، c، d چند پیوند دارد؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) ۶

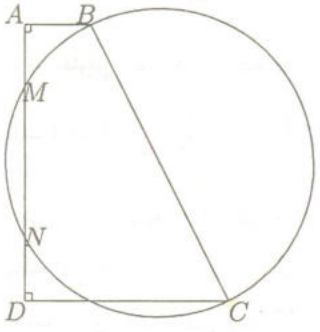
ب) ۱۰

ج) ۱۲

د) ۱۵

ه) مساله جواب منحصر به فرد ندارد.

۲۳) در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ دایره‌ای به قطر BC ضلع AD را در دو نقطهٔ M و N مطابق شکل قطع کرده است. داریم: $CD = ۷$, $AB = ۴$. اندازهٔ $AM \times MD$ چقدر است؟



الف) $۲\sqrt{۷}$ ب) $\sqrt{۱۳}$ ج) ۴

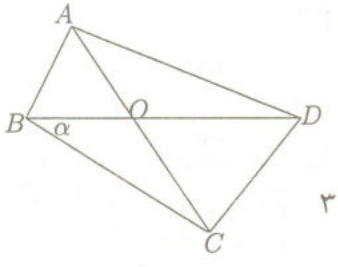
د) ۳ ه) $\sqrt{۱۷}$

۲۴) در یک چهار وجهی چهار مثلث داریم که هر کدام سه زاویه دارند. کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند تعداد زوایای منفرجه در یک چهار وجهی باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) ۴ ه) همهٔ موارد ممکن است.

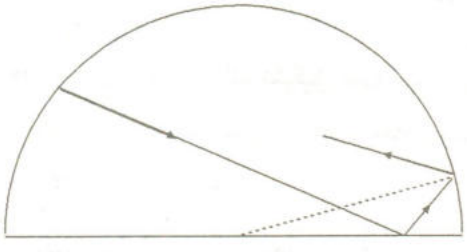
۲۵) در چهار ضلعی $ABCD$ داریم: $\widehat{BAC} = ۶۰^\circ$، $\widehat{BDC} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{BOA} = ۴۵^\circ$ که در آن O محل برخورد اقطار است. اگر مقدار زاویهٔ $\widehat{DBC}$ را α بنامیم، α چه مقادیری را می‌پذیرد؟



الف) $۰ < \alpha < ۳۰$ ب) $۰ < \alpha < ۴۵$ ج) $۳۰ < \alpha < ۴۵$

د) $۳۰ < \alpha$ ه) $۳۰ < \alpha < ۶۰$

۲۶) داخل یک نیم دایره و قطر آن را آینه کرده‌ایم. پرتوی که از نقطه‌ای روی نیم دایره به سوی درون تابیده می‌شود را در نظر بگیرید. اگر پرتو به گوشه‌ای برخورد کند، روی همان مسیر برمی‌گردد. (توجه کنید که هر پرتو که به آینهٔ نیم دایره‌ای شکل برخورد کند چنان منعکس می‌شود که نیمساز بین پرتو تابش و بازتابش از مرکز دایره بگذرد.) در این‌صورت:



الف) مسیر این پرتو به گوشه‌ها نزدیک می‌شود.

ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم‌دایره و قطر آن به دلخواه نزدیک می‌شود.

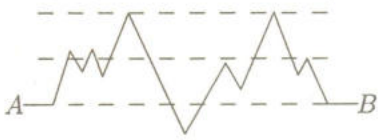
ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.

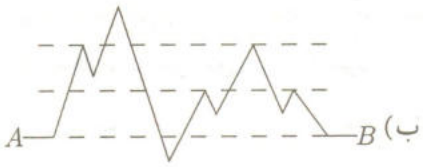
د) مسیر این پرتو به ازای نامتناهی جهت تابش متناوب است.

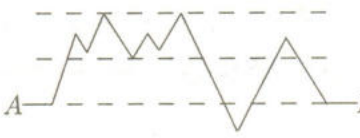
ه) مسیر این پرتو تنها به ازای متناهی جهت تابش متناوب است.

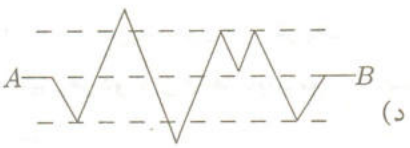
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۷) شیرین در نقطهٔ A و فرهاد در نقطهٔ B ایستاده است. آن‌ها می‌خواهند از کوه‌ها و دره‌ها عبور کنند و به هم برسند ولی هیچ‌کدام از آن‌ها نمی‌خواهد بالاتر از دیگری قرار گیرد. به همین منظور طوری حرکت می‌کنند که در هر لحظه هم ارتفاع باشند. در کدام‌یک از کوهستان‌های زیر فرهاد و شیرین به هم می‌رسند؟

الف)


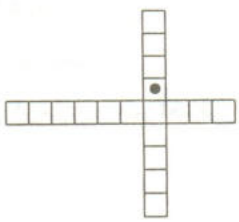
ب)


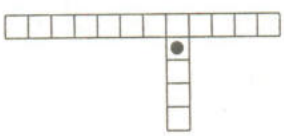
ج)


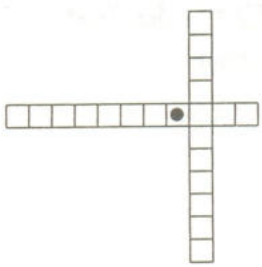
د)


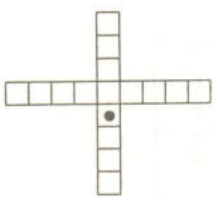
ه)


۲۸) در یک بازی دو نفره بازیکنان می‌خواهند به خانه‌ای که در آن شکلات قرار دارد برسند. قانون این بازی این است که هر بازیکن در نوبت خود خانه‌ای از جدول را که سه ضلع آزاد دارد، برمی‌دارد. در کدام‌یک از زمین‌های بازی زیر بازیکن دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟

الف)


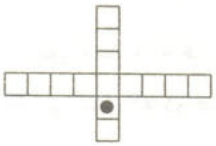
ب)


ج)


د)


@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ه)



۲۹) به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول ۳ × ۳ یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را نوشت به‌طوری که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون برابر ۲ شود؟

الف) ۱۵ ب) ۱۸ ج) ۲۱ د) ۲۴ ه) ۲۷

۳۰) مولکول تشکیل شده توسط ۱۰ اتم x_1، x_2، ... و x_{10} را در نظر بگیرید. می‌دانیم این مولکول ۴۳ پیوند دارد و در ضمن بین هر دو اتم از این مولکول حداکثر یک پیوند موجود است. می‌گوییم سه اتم x_i، x_j و x_k تشکیل یک مثلث می‌دهند، هرگاه بین هر دو تا از آن‌ها پیوند موجود باشد. فرض کنید تعداد مثلث‌های این مولکول برابر t باشد. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۹۶ \leq t \leq ۹۸$ ب) $۹۹ \leq t \leq ۱۰۲$ ج) $۱۰۳ \leq t \leq ۱۰۵$

د) $۱۰۶ \leq t \leq ۱۰۸$ ه) $۱۰۹ \leq t \leq ۱۱۲$

... باید توجه داشت که ریاضیات، نقشی بسیار جدی در شکل‌گیری فرهنگ معنوی ما دارد.
دانش ریاضیات هم، شبیه آفرینش‌های اساتیری، ادبیات و موسیقی، یکی از حوزه‌های خلاقیت خاص را تشکیل می‌دهد که در آن، ماهیت انسانی او، یعنی کشش به سمت فضای معنوی زندگی، که خود یکی از مظاهر هم آهنگی جهانی است، آشکار می‌شود.

هرمان ویل ریاضی‌دان آلمانی
Hermann Weyl
(۱۹۵۵–۱۸۸۵)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور سال ۱۳۸۱

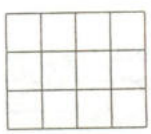
۱) مساحت مثلثی که طول یک ضلع آن ۳ و طول ضلع دیگرش ۶ است حداکثر چقدر است؟

الف) ۱۸ ب) ۱۲ ج) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ د) ۹ ه) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

۲) یک صفحهٔ مشبک ۵ × ۴ داریم. در این صفحه چند شکل مانند  (افقی یا عمودی) می‌توان یافت؟

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ ه) ۳۴

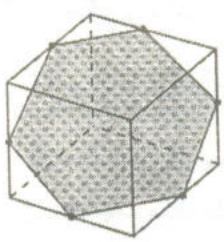
۳) فرض کنید صفحات مشبک ۴ × ۳، ۴ × ۶، ۵ × ۳، ۵ × ۷ و صفحهٔ ۴ × ۴ که یکی از خانه‌های گوشه‌ای آن حذف شده در دست است. به عنوان مثال شکل روبرو صفحهٔ مشبک ۴ × ۳ است:



چند تا از این صفحات را می‌توان به وسیلهٔ کاشی‌هایی مانند  فرش کرد؟ (یعنی طوری پوشاند که هیچ دو کاشی روی هم قرار نگیرند.)

الف) ۵ تا ب) ۴ تا ج) ۳ تا د) ۲ تا ه) یکی

۴) اضلاع مکعب روبرو برابر ۱ است. نقاط مشخص شده در شکل وسط اضلاع می‌باشند، مساحت شش ضلعی حاصل چقدر است؟



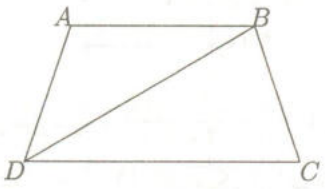
الف) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ج) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
د) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ه) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۵) فرض کنید سه باغچهٔ سبزیجات به شکل دایرهٔ به شعاع ۱۰ متر، مستطیلی به طول ۵۰ متر و عرض ۶ متر و مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲۶ متر داریم. می‌خواهیم دور هر کدام حصاری بکشیم که خرگوش‌ها به یک متری باغچه هم نزدیک نشوند. کدام یک به حصار بیش‌تری احتیاج دارد؟

الف) به ترتیب دایره، مستطیل و مثلث ب) به ترتیب مستطیل، مثلث و دایره ج) به ترتیب مستطیل، دایره و مثلث
د) به ترتیب مثلث، دایره و مستطیل ه) به ترتیب دایره، مثلث و مستطیل

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۶) در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ که در آن اضلاع CD, AB موازیند، داریم: $CD = ۴$، $AB = ۳$ و $AD = ۲$. طول قطر BD برابر است با



الف) ۴ ب) ۵ ج) $\frac{۷}{۲}$

د) $۲\sqrt{۳}$ ه) $\frac{۱۷}{۴}$

۷) فرض کنید m و n اعداد طبیعی دلخواه باشند. عدد A را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A = (\cdots(((n+۱)^m + ۱)^m + ۱)^m + \cdots)^m + ۱$$

که در آن ۱۳۸۱ بار عبارت m ظاهر گشته است. در این‌صورت:

الف) A همواره زوج است. ب) A همواره فرد است. ج) $A + m$ همواره زوج است.

د) $A + n$ همواره زوج است. ه) $A+m+n$ همواره زوج است.

۸) فرض کنید مجموعهٔ A به شکل زیر تعریف شده باشد:

$$A = \{a^۲ + b^۲ | a, b \in N \cup \{۰\}\}$$

در این‌صورت:

الف) برای هر دو عدد x, y در A داریم $x + y \in A$.

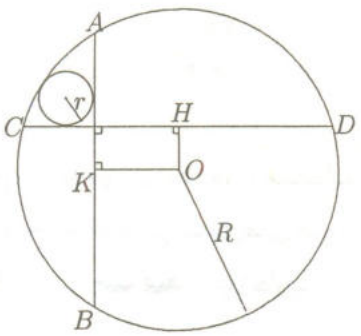
ب) برای هر دو عدد x, y در A داریم $|x - y| \in A$.

ج) برای هر دو عدد x, y در A داریم $xy \in A$.

د) اگر $x^۲ \in A$ آنگاه $|x| \in A$.

ه) هیچ‌کدام از موارد بالا صحیح نیست.

۹) در شکل مقابل دو وتر AB و CD بر هم عمودند و داریم: $OK = ۳$ و $OH = ۱$ و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، یعنی r، برابر ۱ است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چقدر است؟



الف) ۵ ب) $۱+۲\sqrt{۵}$ ج) ۶

د) $۱+\sqrt{۱۰}$ ه) $\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}$

۱۰) عدد $\underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{۱۳۸۱ بار}} + \cdots + ۹۹۹ + ۹۹ + ۹$ چند رقم یک دارد؟

الف) ۱۳۷۶ ب) ۱۳۷۷ ج) ۱۳۷۸

د) ۱۳۷۹ ه) این عدد رقم یک ندارد

۱۱) فرض کنید اعداد حقیقی a، b و c در روابط زیر صدق کنند:

$$۲a + b + c = ۰ \quad , \quad ab + ac + bc = ۰$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

در این‌صورت کسر $\frac{a^۲+۱}{b^۲+c^۲+۱}$ چند مقدار مختلف را می‌تواند بپذیرد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۱۲) قرار می‌دهیم $A(k,s)=(۱+\frac{۲}{k+۱})(۱+\frac{۲}{k+۲})(۱+\frac{۲}{k+۳})\cdots(۱+\frac{۲}{k+۲s+۱})$ و سپس $B(k,s)=(۱+\frac{۱}{k})A(k,s)$. کدام‌یک از اعداد زیر را می‌توان به شکل $B(k,s)$ نوشت به‌طوری که $s>k>۱۳۸۱$.

الف) ۳ ب) $\frac{۱۱}{۴}$ ج) $\frac{۱۲۳۴۵}{۲۳۴۷}$ د) $\frac{۱۲۵}{۳۷}$ ه) $\frac{۱۳۷}{۴۲}$

۱۳) کدام‌یک از اعداد زیر را نمی‌توان به صورت حاصل‌ضرب ۵ عدد طبیعی متمایز بزرگ‌تر از ۱ نوشت؟

$$۲^{۳۲}-۱,۵^{۲۷}+۱,۶^{۴},۳^{۱۴},۲۱^{۳},۵۰^{۳}$$

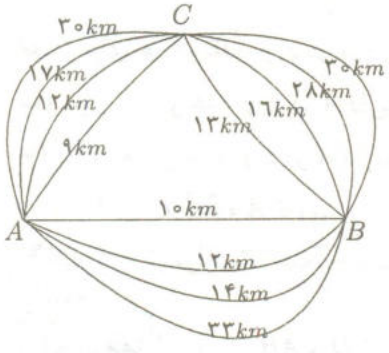
الف) $۱+۲۱^{۳},۵^{۲۷}$ ب) $۱-۵۰^{۳},۲^{۳۲}$ ج) $۳^{۱۴},۲۱^{۳}$

د) $۶^{۴},۲۱^{۳}$ ه) $۱-۵^{۲۷}+۱,۲^{۳۲}$

۱۴) در این امتحان به ۳۰ سوال تستی پاسخ می‌دهید. هر جواب درست، ۴ نمرهٔ مثبت دارد و هر جواب غلط ۱ نمرهٔ منفی دارد و هر تستی که بدون پاسخ رها شود صفر نمره دارد. نمرهٔ نهایی شما چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

الف) ۱۴۵ ب) ۱۴۶ ج) ۱۴۸ د) ۱۵۰ ه) ۱۵۱

۱۵) علی می‌خواهد از شهر A به شهر B و از شهر B به شهر C برود و از آنجا به A بازگردد. از هر شهر به شهر دیگر مسیرهایی با طول‌هایی که در شکل دیده می‌شوند، وجود دارد. علی به چند طریق می‌تواند مسافرت نماید تا نمازش شکسته‌نباشد؟ (نماز در صورتی شکسته است که طول مسافتی که طی می‌شود بیش از $۴۸km$ شود.)



الف) ۴۵ ب) ۲۴ ج) ۱۹
د) ۱ ه) صفر

۱۶) تیم المپیاد ریاضی در یک دوره مسابقات فوتبال شرکت کرده است و در ۲۰۰۳ بازی ۵۷۰۲ امتیاز کسب کرده است. تعداد بردها، باخت‌ها و تساوی‌های این تیم چند حالت مختلف ممکن است داشته باشد؟ (هر برد ۳ امتیاز، هر تساوی ۱ امتیاز و هر باخت صفر امتیاز دارد.)

الف) ۵۱ ب) ۵۲ ج) ۱۰۲ د) ۱۰۳ ه) ۱۰۵

۱۷) اگر از یک عدد سه رقمی کم‌تر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به‌دست آید؟

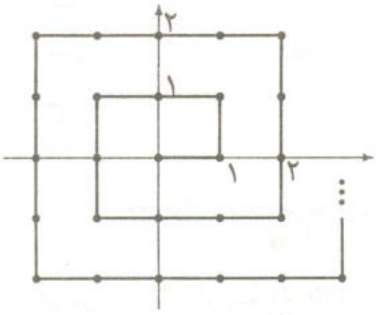
الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۳ د) ۵۵ ه) ۵۶

۱۸) چند عدد ۶ رقمی وجود دارد که پس از حذف یکی از رقم‌های آن عدد ۱۱۱۲۲ حاصل شود؟

الف) ۵۴ ب) ۵۵ ج) ۵۶ د) ۵۷ ه) ۵۸

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۹) حلزونی در صفحهٔ مختصات با سرعت ۱ میلی‌متر بر ثانیه شروع به حرکت می‌کند. او حرکت خود را از مبداء آغاز می‌کند و مسیری مشابه به شکل روبرو را طی می‌کند (محورهای مختصات برحسب میلی‌متر مدرج شده‌اند). اگر حلزون حرکت خود را در لحظهٔ $t = ۰$ آغاز کرده باشد، در لحظهٔ $t = ۱۳۸۱$ (بر حسب ثانیه) حلزون در چه نقطه‌ای قرار دارد؟



(به عنوان مثال در لحظهٔ $t = ۵$ حلزون در نقطهٔ $(۰, -۱)$ و در لحظهٔ $t = ۱۰$ در نقطهٔ $(۰, ۲)$ قرار دارد.)

الف) $(-۱۰, ۱۸)$ ب) $(-۸, -۱۸)$ ج) $(۱۲, ۱۹)$ د) $(-۱۸, ۱۷)$ ه) $(-۶, ۱۹)$

۲۰) دهی، صد خانه دارد. هر ۱۰ خانه‌ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بام‌هایشان هست (ممکن است روی یک بام چند آنتن هم باشد). هر سه آنتنی را که در نظر بگیریم، حداقل دو کلاغ روی آن‌ها نشسته است (ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ هم باشد). این ده حداقل چند کلاغ دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۹۲ ج) ۹۳ د) ۹۸ ه) ۹۹

۲۱) در هر مرحله ۴ خانه از جدول روبرو انتخاب می‌کنیم به‌طوری که از هیچ سطر یا ستونی ۲ خانه انتخاب نشده باشد. عددهای هر ۴ خانه را یک واحد اضافه یا از هر یک، یک واحد کم می‌کنیم. با این روش به کدام‌یک از جدول‌های زیر می‌توان رسید؟

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

الف)

۳	−۶	۰	−۲۱
۲۷	۲۷	۱۰	−۶
۴	۷	۷	۲۰
۴	۱۰	۲۳	۳

ب)

۱۳	۰	۰	۲۰
۷	۴	۱۷	۰
۱۱	۱۰	۵	۱۰
۱۳	۱۱	۶	۰

ج)

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۲	۴	۳	۱

د)

۲۱	۲	۱۷	۱۰
۲	۱۴	۱۷	۱۷
۱۰	۲۴	۱۳	۳
۱۷	۱۰	۳	۲۰

ه)

۱۵	۳	۱۷	۱۵
۶	۱۳	۱۳	۱۶
۸	۱۵	۱۳	۱۴
۲۱	۱۹	۵	۳

۲۲) هر مولکول از تعدای اتم تشکیل شده است. بین هر دو اتم یک مولکول، تعدادی پیوند وجود دارد. این تعداد می‌تواند ۰ و ۱ و ۲ و یا حتی بیش‌تر باشد. تعداد پیوندهای بین اتم‌های x و y از مولکول‌های مختلف عددی ثابت و وابسته به x و y است. می‌دانیم:

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، b، c دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، b، d دارای ۷ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، c، d دارای ۳ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های b، c، d دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم‌های a، b، c، d چند پیوند دارد؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) ۶

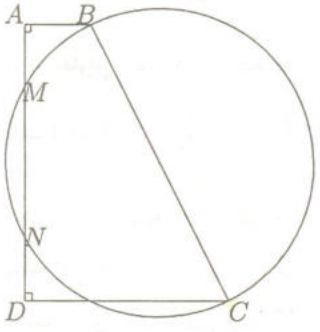
ب) ۱۰

ج) ۱۲

د) ۱۵

ه) مساله جواب منحصر به فرد ندارد.

۲۳) در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ دایره‌ای به قطر BC ضلع AD را در دو نقطهٔ M و N مطابق شکل قطع کرده است. داریم: $CD = ۷$, $AB = ۴$. اندازهٔ $AM \times MD$ چقدر است؟



الف) $۲\sqrt{۷}$ ب) $\sqrt{۱۳}$ ج) ۴

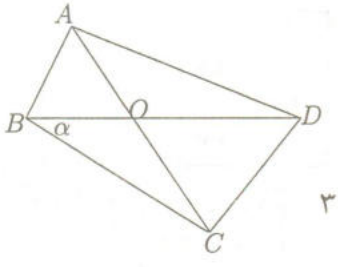
د) ۳ ه) $\sqrt{۱۷}$

۲۴) در یک چهار وجهی چهار مثلث داریم که هر کدام سه زاویه دارند. کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند تعداد زوایای منفرجه در یک چهار وجهی باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) ۴ ه) همهٔ موارد ممکن است.

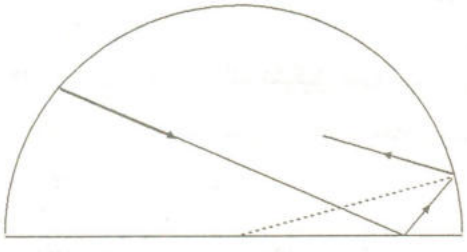
۲۵) در چهار ضلعی $ABCD$ داریم: $\widehat{BAC} = ۶۰^\circ$، $\widehat{BDC} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{BOA} = ۴۵^\circ$ که در آن O محل برخورد اقطار است. اگر مقدار زاویهٔ $\widehat{DBC}$ را α بنامیم، α چه مقادیری را می‌پذیرد؟



الف) $۰ < \alpha < ۳۰$ ب) $۰ < \alpha < ۴۵$ ج) $۳۰ < \alpha < ۴۵$

د) $۳۰ < \alpha$ ه) $۳۰ < \alpha < ۶۰$

۲۶) داخل یک نیم دایره و قطر آن را آینه کرده‌ایم. پرتوی که از نقطه‌ای روی نیم دایره به سوی درون تابیده می‌شود را در نظر بگیرید. اگر پرتو به گوشه‌ای برخورد کند، روی همان مسیر برمی‌گردد. (توجه کنید که هر پرتو که به آینهٔ نیم دایره‌ای شکل برخورد کند چنان منعکس می‌شود که نیمساز بین پرتو تابش و بازتابش از مرکز دایره بگذرد.) در این‌صورت:



الف) مسیر این پرتو به گوشه‌ها نزدیک می‌شود.

ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم‌دایره و قطر آن به دلخواه نزدیک می‌شود.

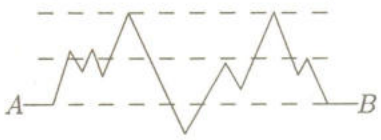
ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.

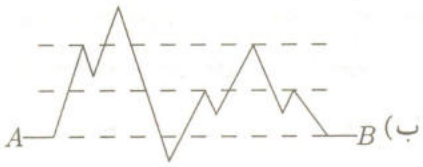
د) مسیر این پرتو به ازای نامتناهی جهت تابش متناوب است.

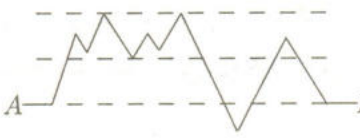
ه) مسیر این پرتو تنها به ازای متناهی جهت تابش متناوب است.

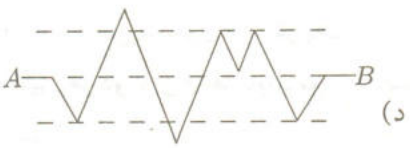
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۷) شیرین در نقطهٔ A و فرهاد در نقطهٔ B ایستاده است. آن‌ها می‌خواهند از کوه‌ها و دره‌ها عبور کنند و به هم برسند ولی هیچ‌کدام از آن‌ها نمی‌خواهد بالاتر از دیگری قرار گیرد. به همین منظور طوری حرکت می‌کنند که در هر لحظه هم ارتفاع باشند. در کدام‌یک از کوهستان‌های زیر فرهاد و شیرین به هم می‌رسند؟

الف)


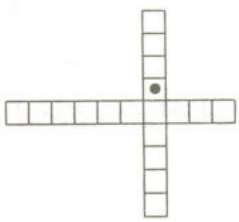
ب)


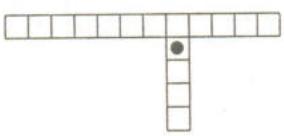
ج)


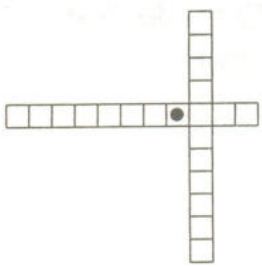
د)


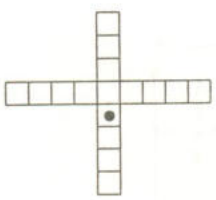
ه)


۲۸) در یک بازی دو نفره بازیکنان می‌خواهند به خانه‌ای که در آن شکلات قرار دارد برسند. قانون این بازی این است که هر بازیکن در نوبت خود خانه‌ای از جدول را که سه ضلع آزاد دارد، برمی‌دارد. در کدام‌یک از زمین‌های بازی زیر بازیکن دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟

الف)


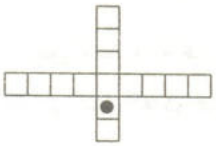
ب)


ج)


د)


@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ه)



۲۹) به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول ۳ × ۳ یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را نوشت به‌طوری که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون برابر ۲ شود؟

الف) ۱۵ ب) ۱۸ ج) ۲۱ د) ۲۴ ه) ۲۷

۳۰) مولکول تشکیل شده توسط ۱۰ اتم x_1، x_2، ... و x_{10} را در نظر بگیرید. می‌دانیم این مولکول ۴۳ پیوند دارد و در ضمن بین هر دو اتم از این مولکول حداکثر یک پیوند موجود است. می‌گوییم سه اتم x_i، x_j و x_k تشکیل یک مثلث می‌دهند، هرگاه بین هر دو تا از آن‌ها پیوند موجود باشد. فرض کنید تعداد مثلث‌های این مولکول برابر t باشد. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۹۶ \leq t \leq ۹۸$ ب) $۹۹ \leq t \leq ۱۰۲$ ج) $۱۰۳ \leq t \leq ۱۰۵$

د) $۱۰۶ \leq t \leq ۱۰۸$ ه) $۱۰۹ \leq t \leq ۱۱۲$

... باید توجه داشت که ریاضیات، نقشی بسیار جدی در شکل‌گیری فرهنگ معنوی ما دارد.
دانش ریاضیات هم، شبیه آفرینش‌های اساتیری، ادبیات و موسیقی، یکی از حوزه‌های خلاقیت خاص را تشکیل می‌دهد که در آن، ماهیت انسانی او، یعنی کشش به سمت فضای معنوی زندگی، که خود یکی از مظاهر هم آهنگی جهانی است، آشکار می‌شود.

هرمان ویل ریاضی‌دان آلمانی
Hermann Weyl
(۱۹۵۵–۱۸۸۵)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ سؤالات مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی سال ۱۳۸۱

امیر آجرلو
برنده مدال طلای کشوری المپیاد ریاضی ۷۶و۷۷
برنده مدال طلای المپیاد جهانی ریاضی ۹۸و۹۹

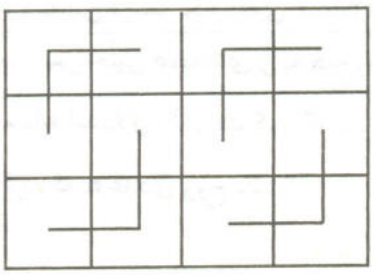
۱) گزینه‌ی (د) صحیح است.
طبق رابطه‌ی سینوسی مساحت می‌دانیم:

$$S = \frac{۱}{۲} bc.\sin A = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۶ \sin A = ۹ \sin A \leq ۹$$

۲) گزینه‌ی (ب) صحیح است.
در هر سطر از این جدول ۴ تا از این شکل‌ها و در هر ستون آن ۳ تا از این شکل‌ها داریم. لذا تعداد کل این شکل‌ها در جدول برابر است با:

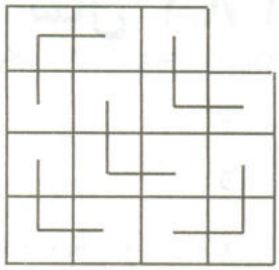
$$۴ \times ۴ + ۵ \times ۳ = ۳۱$$

۳) گزینه‌ی (ج) صحیح است.
از همان صفحه ۴ × ۳ شروع می‌کنیم. به سادگی، مطابق آن‌چه در شکل می‌بینید، می‌توان این جدول را با این کاشی‌ها فرش کرد.

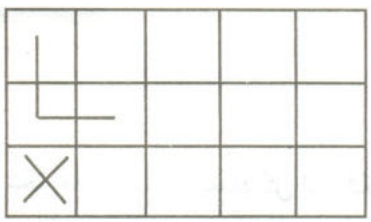


@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

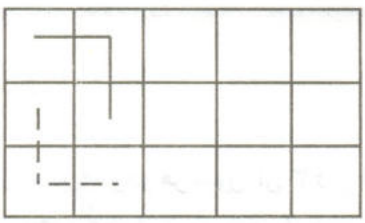
صفحه‌ی ۴ × ۶ هم که از کنار هم گذاشتن دو صفحه‌ی ۴ × ۳ بوجود می‌آید و بنابراین آن هم قابل فرش کردن است. روش فرش کردن صفحه ۴ × ۴ بدون گوشه را هم با اندک تلاشی می‌توانید پیدا کنید.



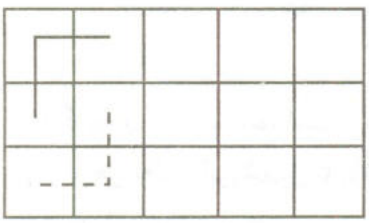
حال دو صفحه دیگر باقی‌مانده است؛ صفحه‌ی ۵ × ۳ و صفحه‌ی ۵ × ۷. اما آیا مشخص نیست که صفحه‌ی ۵ × ۷ قابل فرش کردن نیست؟ البته که واضح است، زیرا کاشی‌های ما سه خانه‌ای هستند و در نتیجه صفحه‌ای را که تعداد کل خانه‌های آن مضرب ۳ نباشد نمی‌توان به طور کامل با این کاشی‌ها فرش کرد. صفحه‌ی ۵ × ۳ چه‌طور؟ آیا می‌توان آن‌را به طور کامل با کاشی‌های گفته شده فرش کرد؟ کمی سعی کنید، خواهید دید که نمی‌توان این کار را انجام داد. اما چرا؟ به خانه‌ی گوشه‌ای این صفحه توجه کنید، برای پر کردن این خانه ۳ راه بیشتر وجود ندارد.



(الف)



(ب)



(ج)

در حالت (الف) که گوشه علامت خورده را نمی‌توان فرش کرد. می‌ماند حالات (ب) و (ج). در این دو حالت برای پر کردن گوشه‌ی دیگر مجبوریم دو کاشی، در محل‌های نشان داده شده در شکل به صورت خط‌چین، قرار دهیم. پس برای فرش کردن خانه‌ی گوشه‌ای در یک صفحه ۵ × ۳، مجبوریم یک تکه‌ی ۲ × ۳ از آن‌را کاملاً پر کنیم. اما در این صورت یک تکه‌ی ۳ × ۳ از صفحه می‌ماند که برای پر کردن خانه‌ی گوشه‌ای آن نیز مشابهاً باید یک تکه‌ی ۲ × ۳ از آن‌را به‌طور کامل پر کنیم و به این ترتیب یک تکه‌ی ۱ × ۳ از صفحه‌ی اولیه می‌ماند که باید آن‌را پر کنیم. اما به وضوح این کار غیرممکن است. پس چنین صفحه‌ای را به هیچ‌وجه نمی‌توان با کاشی‌های گفته شده فرش کرد.

توضیح: آیا می‌توانید با استدلالی مشابه استدلال بالا ثابت کنید که یک صفحه‌ی $n \times 3$ را تنها در صورتی می‌توان با کاشی‌های به شکل  فرش کرد، که n عددی زوج باشد؟

۴) گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

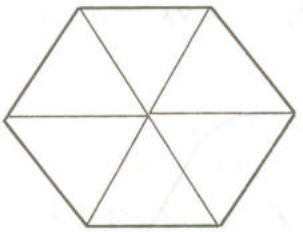
اولاً همه‌ی اضلاع و زاویه‌های این شش ضلعی با هم برابرند و لذا این شش ضلعی یک شش ضلعی منتظم است طول ضلع این شش ضلعی را با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در رئوس مکعب ایجاد

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

شده است، می‌توان محاسبه کرد:

$$a = \sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع a را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟ برای یافتن پاسخ این سؤال مرکز شش ضلعی منتظم را به رئوس آن متصل کنید تا شش ضلعی به ٦ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a تقسیم شود.



حال از آن‌جا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است، مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر خواهد بود با

$$٦ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

و در مورد مسأله ما، که $a = \sqrt{\frac{۱}{۲}}$،

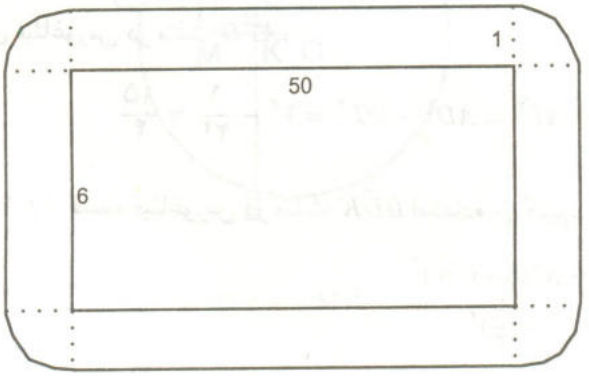
$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

۵) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

در مورد هر یک از باغچه‌ها طول حصار مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم. حصار باغچه‌ی دایره‌ای شکل، دایره‌ای به شعاع ۱۱ = ۱ + ۱۰ متر است، با طولی برابر با:

$$۲\pi \times ۱۱ = ۲۲\pi$$

حصار لازم برای باغچه‌ی مستطیلی، همان‌طور که در شکل می‌بینید، شامل دو حصار ۵۰ متری و دو حصار ٦ متری و چهار ربع دایره به شعاع واحد، و یا معادلاً یک دایره‌ی کامل، است.



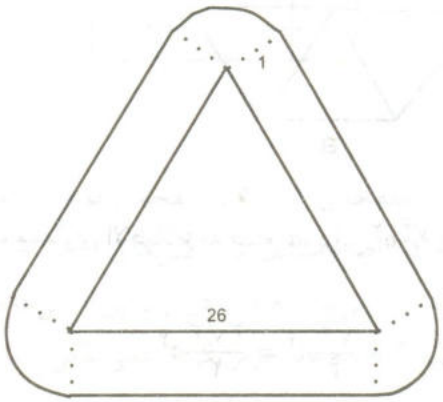
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس طول حصار لازم برابر است با:

$$۲ \times ۵۰ + ۲ \times ۶ + ۲\pi \times ۱ = ۱۱۲ + ۲\pi$$

در مورد مثلث متساوی الاضلاع، حصار شامل سه قسمت ۲۶ متری و سه مثلث دایره، و یا روی هم یک دایره کامل، می‌باشد و لذا طول آن برابر است با:

$$۳ \times ۲۶ + ۲\pi \times ۱ = ۷۸ + ۲\pi$$

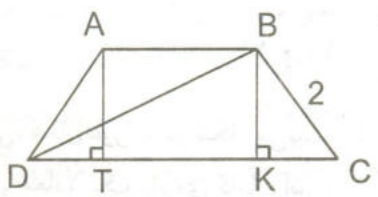


حال این سه عدد را مقایسه کنید؛ $۲۲\pi > ۷۸ + ۲\pi > ۱۱۲ + ۲\pi$. لذا گزینه (ب) صحیح است.

۶) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

AT و BK را ارتفاع‌های این ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بگیرید. با توجه به متساوی‌الساقین بودن ذوزنقه و این‌که $AB = ۳$ و $CD = ۴$، لذا:

$$DT = CK = \frac{۱}{۲}(CD - AB) = \frac{۱}{۲}$$



حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{ATD}$،

$$AT^۲ = AD^۲ - DT^۲ = ۲^۲ - \frac{۱}{۲^۲} = \frac{۱۵}{۴}$$

و نهایتاً برای محاسبه‌ی BD از قضیه فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{BDK}$ استفاده می‌کنیم:

$$BD^۲ = BK^۲ + KD^۲ = AT^۲ + (CD - CK)^۲$$
$$= \frac{۱۵}{۴} + (۴ - \frac{۱}{۲})^۲$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$= \frac{۱۵}{۴} + \frac{۴۹}{۴} = \frac{۶۴}{۴} = ۱۶$$

بنابراین $BD = ۴$.

۷) گزینه‌ی (د) صحیح است.

اولاً دقت کنید که توان در زوج و فردی نقشی ندارد. یعنی دو عبارت x و x^m از لحاظ زوج و فردی یکسان هستند. بنابراین زوج و فردی A با عبارت زیر یکی است:

$$(\ldots(((n+۱)+۱)+۱)+\ldots)+۱$$

اما چند تا ۱؟ به عبارت مربوط به A نگاه کنید. این عبارت ۱۳۸۱ تا m دارد و دقت می‌کنیم که تعداد ۱ها از تعداد mها یکی بیشتر است. بنابراین عبارت نوشته شده در بالا ۱۳۸۲ تا ۱ دارد، یعنی برابر است با $n + ۱۳۸۲$ که چون ۱۳۸۲ زوج است، زوج و فردی آن با n یکی است. نتیجه این‌که دو عبارت A و n زوج و فردی یکسانی دارند و بنابراین $A + n$ زوج است.

۸) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

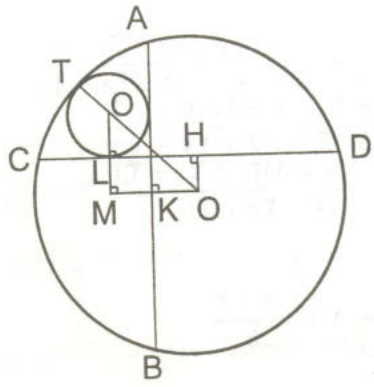
با استفاده از اتحاد لاگرانژ داریم:

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac + bd)^۲ + (ab - bc)^۲$$

بنابراین برای هر دو عدد $x, y \in A$ داریم $xy \in A$.

۹) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

محل تماس دو دایره را T و مرکز دایره کوچک‌تر را O' می‌نامیم. چون دو دایره بر هم مماسند بنابراین مراکز آنها یعنی O و O'، و محل تماس آنها یعنی T هم‌خطند. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{OO'M}$ داریم:



$$OO'^۲ = OM^۲ + O'M^۲ = (OK + KM)^۲ + (O'L + LM)^۲$$
$$= (۳ + r)^۲ + (r + OH)^۲$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$= ۴^۲ + ۲^۲ = ۲۰$

بنابراین $OO' = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$، و نهایتاً

$$R = OO' + O'T = ۲\sqrt{۵} + ۱$$

۱۰) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

$$۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \cdots + \underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{۱۳۸۱بار}} =$$

$$= (\underbrace{۱۰۰\ldots۰}_{\text{۱۳۸۱بار}} - ۱) + \cdots + (۱۰۰۰ - ۱) + (۱۰۰ - ۱) + (۱۰ - ۱)$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{۱۱۱\ldots۱۱۱۱۰}^{\text{۱۳۸۱بار}} \\ - \quad ۱۳۸۱ \\ \hline \underbrace{۱۱۱\ldots۱۱}_{\text{۱۳۷۷بار}}۰۹۷۲۹ \end{array}$$

۱۱) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

$$۲a + b + c = ۰ \Rightarrow a + b + c = -a \Rightarrow (a + b + c)^۲ = a^۲$$
$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + ac + bc) = a^۲$$

اما $ab + ac + bc = ۰$ و بنابراین،

$$b^۲ + c^۲ = ۰$$

که نتیجه می‌دهد $b = c = ۰$ و با توجه به رابطه‌ی $۲a + b + c = ۰$، بدست می‌آید $a = ۰$، پس

$$\frac{a^۲ + ۱}{b^۲ + c^۲ + ۱} = ۱$$

۱۲) گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

$$\begin{aligned} A(k,s) &= (۱ + \frac{۲}{k+۱})(۱ + \frac{۲}{k+۳})(۱ + \frac{۲}{k+۵}) \ldots (۱ + \frac{۲}{k+۲s+۱}) \\ &= \frac{k+۱+۲}{k+۱} \cdot \frac{k+۳+۲}{k+۳} \cdot \frac{k+۵+۲}{k+۵} \cdots \frac{k+۲s+۱+۲}{k+۲s+۱} \\ &= \frac{(k+۳)(k+۵)(k+۷)\ldots(k+۲s+۱)(k+۲s+۳)}{(k+۱)(k+۳)(k+۵)\ldots(k+۲s+۱)} \\ &= \frac{k+۲s+۳}{k+۱} \end{aligned}$$

$$B(k,s) = \frac{k+۱}{k} . A(k,s) = \frac{k+۲s+۳}{k} = ۱ + \frac{۲s+۳}{k}$$

حال توجه کنید که $s > k$ ایجاب می‌کند $B(k,s) > ۱ + \frac{۲k+۳}{k} > ۱ + ۲ = ۳$ بنابراین گزینه‌های (الف) و (ب) رد می‌شوند. پس باید دید بین مابقی گزینه‌ها کدام را می‌توان به صورت $۱ + \frac{۲s+۳}{k}$ نوشت، و یا معادلاً کدام‌یک از اعداد

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$\frac{۱۲۳۴۵-۲۳۴۷}{۲۳۴۷}$، $\frac{۱۲۵-۳۷}{۳۷}$ و $\frac{۱۳۷-۴۲}{۴۲}$ را می‌توان به شکل $\frac{۲s+۳}{k}$ نوشت. از سه عدد فوق، صورت دو کسر اول عددی زوج است، در حالی‌که صورت $\frac{۲s+۳}{k}$ عددی فرد است؛ بنابراین، گزینه‌های (ج) و (د) نیز رد می‌شوند. پس گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

توضیح: ما در راه حل خود، چهار گزینه را رد کردیم و به این ترتیب گزینه‌ی صحیح مشخص شد. اما بررسی این‌که چطور می‌توان $\frac{۱۳۷}{۴۲}$ را به صورت $B(k,s)$ با شرط $s > k > ۱۳۸۱$ نوشت، خالی از لطف نیست.

$$B(k,s) = ۱ + \frac{۲s+۳}{k} = \frac{۱۳۷}{۴۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۲s+۳}{k} = \frac{۹۵}{۴۲}$$

حال می‌توانیم قرار دهیم $۲s+۳ = ۹۵$ و $k = ۴۲$، اما شرط $s > k > ۱۳۸۱$ برآورده نمی‌شود. پس باید صورت و مخرج کسر سمت راست را بزرگ‌تر کنیم؛

$$\frac{۲s+۳}{k} = \frac{۹۵}{۴۲} = \frac{۹۵ \times ۱۰۱}{۴۲ \times ۱۰۱} = \frac{۹۵۹۵}{۴۲۴۲}$$

و قرار می‌دهیم $۹۵۹۵ = ۲s+۳$ و $k = ۴۲۴۲$ که می‌دهد $s = ۴۷۹۶$ و $k = ۴۲۴۲$ که در شرط $s > k > ۱۳۸۱$ هم‌صادقند.

۱۳) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

$$۲^{۳۲} - ۱ = (۲^{۱۶}+۱).(۲^{۱۶}-۱) = (۲^{۱۶}+۱)(۲^{۸}+۱)(۲^{۸}-۱) = \ldots$$
$$= (۲^{۱۶}+۱)(۲^{۸}+۱)(۲^{۴}+۱)(۲^{۲}+۱)(۲+۱)$$
$$۵^{۲۷}+۱ = (۵^{۹}+۱)(۵^{۱۸}-۵^{۹}+۱) = (۵^{۳}+۱)(۵^{۶}-۵^{۳}+۱)(۵^{۱۸}-۵^{۹}+۱)$$
$$= ۱۲۶(۵^{۶}-۵^{۳}+۱)(۵^{۱۸}-۵^{۹}+۱)$$
$$= ۲ \times ۷ \times ۹ \times (۵^{۶}-۵^{۳}+۱)(۵^{۱۸}-۵^{۹}+۱)$$
$$۶^{۴} = ۲ \times ۳ \times ۲^{۲} \times ۳^{۲} \times ۶$$
$$۵۰^{۳} = ۲ \times ۲^{۲} \times ۵ \times ۵^{۲} \times ۵^{۳}$$

بنابراین هیچ‌یک از گزینه‌های (الف)، (ب)، (د) و (هـ) نمی‌توانند صحیح باشند، لذا گزینه‌ی (ج) صحیح است.

توضیح: چرا $۳^{۱۴}$ را نمی‌توان به صورت حاصل‌ضرب ۵ عدد طبیعی متمایز بزرگ‌تر از ۱ نوشت؟ زیرا در این صورت این سه عدد باید ۵ توان متمایز از ۳ باشند، که ضرب ۵ توان متمایز ۳ حداقل می‌شود:

$$۳^{۱} \times ۳^{۲} \times ۳^{۳} \times ۳^{۴} \times ۳^{۵} = ۳^{۱۵} > ۳^{۱۴}$$

البته همان‌طور که دیدیم، برای یافتن گزینه‌ی صحیح احتیاج به دانستن این مطلب نداریم. حال خودتان به عنوان تمرین همین مطلب را در مورد $۲^{۱۳}$ توجیه کنید.

۱۴) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر x تعداد جواب‌های صحیح و y تعداد جواب‌های غلط شما باشد، نمره شما $۴x - y$ خواهد بود. حال خواسته مسأله

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

تعیین مقادیری است که $4x - y$ می‌تواند اختیار کند (با شرط $x + y \leq 30$). حداکثر نمره‌ی شما $4 \times 30 = 120$ و حداقل آن -30 می‌باشد. پس $-30 \leq 4x - y \leq 120$. حال اعداد این محدوده را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام‌ها قابل کسب و کدام‌ها غیرقابل کسب هستند. اعداد -30 تا ۰ که به وضوح با گرفتن $x = 0$ (یعنی صفر جواب درست) و $0 \leq y \leq 30$ قابل کسب هستند. اعداد $\{1, 2, 3, \ldots, 27 \times 4\}$ نیز با تغییر x از ۱ تا ۲۷ و $y = 0, 1, 2$ یا ۳، بصورت $4x - y$ قابل کسب هستند، (زیرا هر کدام از این اعداد یا مضرب ۴ هستند و یا از یکی از مضارب ۴ حداکثر ۳ تا فاصله دارند)، که البته شرط $x + y \leq 30$ را نیز برآورده می‌کنند. پس تا این‌جا همه‌ی اعداد از -30 تا $27 \times 4 = 108$ قابل اکتساب هستند. اما مابقی اعداد از ۱۰۸ تا ۱۲۰ چطور؟ برای کسب چنین نمره‌ای x باید از ۲۷ بیشتر باشد، یعنی ۲۸، ۲۹ یا ۳۰. اما با توجه به محدودیت $x + y \leq 30$، y دیگر نمی‌تواند به دل‌خواه ۰، ۱، ۲ یا ۳ شود. به بیان واضح‌تر، دیگر نمرات $28 \times 4 - 3$، $29 \times 4 - 2$، $30 \times 4 - 3$، $30 \times 4 - 2$ و $30 \times 4 - 1$ قابل کسب نیستند. پس از بین ۱۵۱ عدد موجود از -30 تا ۱۲۰، شش عدد ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۷، ۱۱۸ و ۱۱۹ نمی‌توانند نمره‌ی شما باشند. پس نمره‌ی شما ۱۴۵ مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۱۵) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

علی از مسیر ۳۳ کیلومتری بین A و B نباید بگذرد. زیرا در این صورت حتی در صورت طی کوتاه‌ترین مسیر بین B و C و کوتاه‌ترین مسیر از C به A، طول مسیر او $9 + 13 + 33 = 55$ کیلومتر و بیشتر از ۴۸ کیلومتر خواهد شد. مشابهاً با توجه به این‌که $9 + 10 + 30 > 48$ و $13 + 10 + 30 > 48$، مسیرهای ۳۰ کیلومتری از B به C و از C به A نیز باید حذف شوند.

به این ترتیب علی از A به B، B به C و C به A، هر یک ۳ راه دارد و لذا در کل $3 \times 3 \times 3 = 27$ راه ممکن برای او وجود دارد. این راه‌ها به دو دسته‌اند:

- از جاده ۲۸ کیلومتری B به C نمی‌گذرند. در این صورت همه‌ی این مسیرها برای علی مناسبند، زیرا طول چنین مسیرهایی حداکثر $14 + 16 + 17 = 47$ بوده و از ۴۸ کمترند.
- از جاده ۲۸ کیلومتری B به C می‌گذرند. در این حالت برای این‌که مسیر، مسیر مناسبی برای علی باشد باید راهی از A تا B و راهی از C تا A انتخاب شود که مجموعه‌شان از ۲۰ بیشتر نباشد. اما چنین کاری را فقط در یک صورت، آن هم انتخاب جاده ۱۰ کیلومتری از A به B و جاده ۹ کیلومتری از C به A می‌توان کرد. پس از بین مسیرهای گذرا از جاده ۲۸ کیلومتری B به C که تعدادشان $3 \times 3 = 9$ است (۳ راه از A تا B و ۳ راه از C تا A) تنها یک راه برای علی مناسب و ۸ راه آن غیر مناسب است.

پس دیدیم که از بین کل ۲۷ راهی که در نظر گرفتیم، ۸ راه غیرمناسب و مابقی راه‌ها مناسب بودند، پس علی $27 - 8 = 19$ راه مناسب دارد.

۱۶) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۲۰۰۳ بازی روی‌هم $3 \times 2003 = 6009$ امتیاز دارد، که این تیم متأسفانه $6009 - 5702 = 307$ امتیاز آن را از دست داده است. اما امتیاز چطور از دست می‌رود؟ دقت کنید که یک تساوی باعث از دست رفتن ۲ امتیاز و یک باخت باعث از دست رفتن ۳ امتیاز می‌شود. پس اگر تعداد تساوی‌های این تیم را y و تعداد باخت‌های آن را z

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

بنامیم، باید $۳z + ۲y = ۳۰۷$، و یا معادلاً $y = \frac{۳۰۷-۳z}{۲}$. طبق این معادله، برای آن‌که y عددی صحیح شود، z باید عددی فرد، و برای این‌که y منفی نشود، z باید کمتر از ۱۰۲ باشد. بنابراین z، یعنی تعداد باخت‌های این تیم، باید یکی از ۵۱ عدد فرد بین ۰ تا ۱۰۲ باشد، که از روی آن y یعنی تعداد تساوی‌ها از معادله‌ی قبل، و سپس از روی z و y، تعداد بردها، یعنی x، با توجه به تعداد کل بازی‌ها قابل محاسبه است.

۱۷) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اعداد سه رقمی کمتر از ۶۰۰ را که ۵۰۰ تا هستند به ۵۰ دسته ۱۰ تایی تقسیم می‌کنیم:

$$(۱۰۰,۱۰۱,\dots,۱۰۹),(۱۱۰,۱۱۱,\dots,۱۱۹),\dots,(۵۹۰,۵۹۱,\dots,۵۹۹)$$

در این صورت اگر یک دسته را انتخاب کنیم و از هر کدام از اعداد این دسته مجموع ارقامش را کم کنیم به یک عدد می‌رسیم مثلاً در مورد دسته اول به عدد ۹۹ می‌رسیم و تمام ۵۰ عددی که از دسته‌های مختلف بدست می‌آید متمایزند، پس ۵۰ عدد مختلف بدست می‌آید.

۱۸) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

- رقم حذفی ۱ یا ۲ باشد. تعداد چنین اعداد ۶ رقمی ۷ تا بیشتر نیست؛ ۱۱۱۱۲۲، ۱۱۱۲۱۲، ۱۱۱۲۲۱، ۱۱۱۲۲۲، ۱۱۲۱۲۲، ۱۲۱۱۲۲، ۲۱۱۱۲۲.
- رقم حذفی غیر از ۱ و ۲ باشد. در این صورت باید در عبارت $-۲-۲-۱-۱-۱-$، در یکی از جاهای خالی یکی از ارقام $\{۰,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ را قرار دهیم. به وضوح همه‌ی اعدادی که به این طریق حاصل می‌شوند متمایزند، و تعداد این اعداد برابر است با $۶ \times ۸ = ۴۸$. البته از بین این اعداد یک عدد پذیرفته نیست. زیرا در جای خالی اول (از سمت چپ)، صفر نباید قرار داد. پس تعداد این اعداد $۴۸ - ۱ = ۴۷$ تاست. بنابراین تعداد کل چنین اعداد شش رقمی برابر است با $۴۷ + ۷ = ۵۴$.

۱۹) گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

ابتدا فرمولی برای محاسبه‌ی زمان لازم برای رسیدن به نقاط خاصی از صفحه می‌یابیم. برای رسیدن به نقطه‌ی $(۱,-۱)$ باید مسیری برابر محیط مربعی به ضلع ۲ را طی کنیم (کمی دقت کنید، چرا؟)، برای رسیدن به نقطه‌ی $(۲,-۲)$ باید در ادامه مسیر قبل، طولی برابر محیط مربعی به ضلع ۴ را نیز طی کنیم و ...برای رسیدن به نقطه‌ی $(n,-n)$ باید در ادامه‌ی مسیرهای قبل، طولی برابر محیط مربعی به ضلع n را نیز طی کنیم؛ پس زمان لازم برای رسیدن به نقطه $(n,-n)$ برابر است با:

$$۴ \times (۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۲n) = ۸ \times (۱ + ۲ + \dots + n) = ۴n(n+۱)$$

متأسفانه ۱۳۸۱ به صورت $۴n(n+۱)$ نیست، اگر بود، به راحتی مکان حلزون را در لحظه‌ی $t = ۱۳۸۱$ می‌یافتیم. اما با این حال باز هم رابطه‌ی فوق مفید خواهد بود. با کمی جستجو می‌توانید بفهمید که نزدیک‌ترین عدد به فرم $۴n(n+۱)$ به ۱۳۸۱، $۱۳۶۸ = ۱۹ \times ۱۸ \times ۴$ است. پس حلزون در $t = ۱۳۶۸$ در خانه‌ی $(۱۸,-۱۸)$ است. در لحظه‌ی $t = ۱۳۶۹$ به خانه‌ی $(۱۸,-۱۹)$ می‌رود (چرا؟) و تا لحظه‌ی $t = ۱۳۸۱$ ۱۲ میلی‌متر به سمت بالا حرکت می‌کند و به خانه‌ی $(۶,-۱۹)$ می‌رسد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۰) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ابتدا ثابت می‌کنیم تعداد آنتن‌ها حداقل ۹۳ است. فرض کنیم تعداد آنتن‌ها کمتر مساوی ۹۲ باشد، در این صورت حداقل ۸ خانه وجود دارد که روی بامشان هیچ آنتنی نیست و از بین ۹۲ خانه دیگر می‌توان ۲ خانه انتخاب کرد که تعداد آنتن‌های روی بام هر کدام کمتر مساوی یک باشد و به این ترتیب روی بام‌های این ۱۰ خانه کمتر مساوی ۲ آنتن وجود دارد که تناقض است. پس تعداد آنتن‌ها حداقل ۹۳ است. حال ثابت می‌کنیم تعداد کلاغ‌ها حداقل ۹۲ است. اگر تعداد کلاغ‌ها کمتر مساوی ۹۱ باشد، ۲ آنتن وجود دارد که روی آنها هیچ کلاغی نیست و از بین بقیه آنتن‌ها می‌توان آنتنی پیدا کرد که حداکثر یک کلاغ روی آن نشسته باشد. در این صورت تعداد کلاغ‌های روی این سه آنتن حداکثر یک است که تناقض است، پس تعداد کلاغ‌ها حداقل ۹۲ است. حال اگر ۹۳ خانه انتخاب کنیم و روی هر کدام یک آنتن بگذاریم و ۹۲ آنتن انتخاب کنیم و روی هر کدام‌یک کلاغ قرار دهیم تمام شرایط مسأله درست خواهد بود، پس جواب مسأله همان ۹۲ است.

۲۱) گزینه‌ی (د) صحیح است.

مجموع اعداد واقع در هر سطر و هر ستون در جدول اولیه با هم مساوی و برابر صفر است. هر بار انجام این عمل موجب می‌شود که جمع اعداد واقع در هر سطر و هر ستون ۱ واحد کم (یا یک واحد زیاد) شود. بنابراین از این جدول به هر جدولی برسیم، در آن جدول نیز حاصل جمع اعداد واقع در هر سطر و هر ستون باید با هم برابر باشد. اما در بین گزینه‌ها تنها گزینه‌ی (د) دارای این خاصیت است (جمع اعداد واقع در هر سطر و هر ستون این جدول ۵۰ است).

۲۲) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

تعداد پیوندهای بین اتم‌های x و y را که در مولکول‌های مختلف ثابت است با xy نمایش می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ab+ac+bc=5 \\ ab+ad+bd=7 \\ ac+ad+cd=3 \\ bc+cd+bd=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd = 5+7+3+5=20$$

پس $ab+ac+ad+bc+bd+cd=10$، یعنی مولکول تشکیل شده از a و b و c و d، ۱۰ پیوند دارد.

۲۳) گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

از آن‌جا که BC قطر است، لذا $\angle BMC = 90^\circ$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\triangle}{ABM}$ و $\overset{\triangle}{DMC}$ زوایای مساوی دارند (چرا؟) و لذا با هم متشابهند. بنابراین

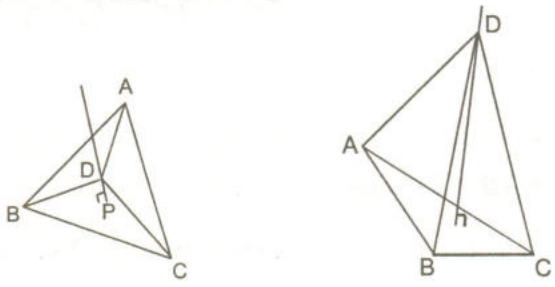
$$\frac{AM}{DC}=\frac{AB}{MD} \Rightarrow AM \times MD = AB \times DC = 4 \times 7 = 28$$

۲۴) گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

ثابت می‌کنیم n می‌تواند برابر یک و برابر سه باشد. مطابق شکل (۱) یک مثلث منفرج‌الزاویه ABC انتخاب می‌کنیم وروی خطی عمود بر صفحه مثلث ABC نقطه‌ی D را به اندازه کافی دور انتخاب می‌کنیم تا هر سه مثلث ABC، BCD و ACD حادالزاویه باشند، در این چهاروجهی $n=1$ است. همچنین مطابق شکل (۲) یک مثلث حاده‌الزاویه

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ABC انتخاب می‌کنیم و نقطه P را درون مثلث طوری انتخاب می‌کنیم که هر سه زاویه $\widehat{APB}$، $\widehat{BPC}$ و $\widehat{CPA}$ منفرجه باشند و نقطه D را روی خط عمود بر صفحه مثلث ABC در نقطه P، به قدر کافی نزدیک انتخاب می‌کنیم که هر سه زاویه $\widehat{ADB}$، $\widehat{BDC}$ و $\widehat{CDA}$ منفرجه باشند، در این صورت در این چهاروجهی $n = ۳$ است.



شکل (۱) شکل (۲)

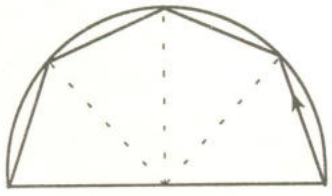
به طریق مشابه می‌توان به $n = ۲$ و $n = ۴$ رسید، پس گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

۲۵) گزینه‌ی (ب) صحیح است.

تنها شرطی از شرایط مسأله که روی مقدار α اثر می‌گذارد، شرط $\angle BOA = ۴۵^\circ$ می‌باشد. این زاویه، در مثلث $\overset{\triangle}{BOC}$، زاویه خارجی و لذا از زاویه‌ی داخلی غیرمجاور α بزرگ‌تر است. پس $۴۵ > \alpha > ۰$. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که α هر مقداری در این محدوده را می‌تواند اختیار کند. برای هر $۴۵ > \alpha > ۰$، کافیست ابتدا مثلثی مثل $\overset{\triangle}{BOC}$ با زاویه‌ی $\overset{\triangle}{BOC}$ با زاویه‌ی ۱۳۵° در رأس O و زاویه α در رأس B بسازید،سپس CO را از سمت O تا نقطه‌ی A آن قدر ادامه دهید که زاویه ساخته شده در A برابر ۶۰° شود. مشابهاً BO را نیز از سمت O تا نقطه B آن‌قدر ادامه می‌دهیم که زاویه ساخته شده در D نیز ۳۰ شود. به این ترتیب شکل حاصل همه خواص گفته شده را دارا بوده و زاویه‌ی $\angle DBC$ از آن نیز α خواهد بود.

۲۶) گزینه‌ی (د) صحیح است.

صفحه گذرنده از مرکز کره و عمود بر دایره عظیمه را در نظر می‌گیریم. واضح است که اگر پرتو روی این صفحه باشد همواره روی این صفحه باقی می‌ماند پس مسأله به یک مسأله مسطحه تبدیل شد و ما روی یک نیم‌دایره که داخل و قطر آن آینه‌ای شده به دنبال نامتناهی جهت تابش هستیم که متناوب باشند، برای این منظور به ازای هر $n \in N$ اگر کمان نیم‌دایره را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و نقاط تقسیم را متوالیاً به هم وصل کنیم و پرتو را از روی مسیر بدست آمده بتابانیم پرتو همواره روی این مسیر حرکت می‌کند و مسیر حرکت آن متناوب می‌شود. در شکل این کار به ازای $n = ۴$ نمایش داده شده است.

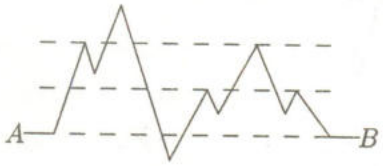


۲۷) گزینه‌ی (الف) صحیح است.

بلندترین کوه را قله و عمیق‌ترین دره را دره عمیق می‌نامیم و ممکن است چند قله یا چند دره عمیق داشته باشیم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ثابت می‌کنیم شیرین و فرهاد تنها در کوهستانی می‌توانند به هم برسند که یک دره عمیق بین دو قله یا یک قله بین دو دره عمیق وجود داشته باشد. با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه (الف) دارای این خاصیت است و در بقیه گزینه‌ها دره عمیق در سمت راست قله‌ها قرار گرفته است. یکی از این گزینه‌ها مثلاً گزینه (ب) را انتخاب کرده و ثابت می‌کنیم شیرین و فرهاد نمی‌توانند در این کوهستان به هم برسند.



ناحیه بین قله و دره عمیق را ناحیه بد می‌نامیم. اگر قرار باشد شیرین و فرهاد به هم برسند باید دست کم یکی از آنها وارد ناحیه‌ی بد شود. دو حالت در نظر می‌گیریم:

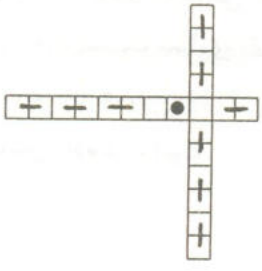
i) ابتدا شیرین وارد ناحیه بد می‌شود در این صورت وقتی شیرین در قله قرار می‌گیرد فرهاد در سمت راست ناحیه بد قرار دارد اما در سمت راست ناحیه بد نقطه‌ای هم ارتفاع با قله وجود ندارد که تناقض است.

ii) ابتدا فرهاد وارد ناحیه بد می‌شود در این صورت وقتی فرهاد در دره عمیق قرار می‌گیرد شیرین در سمت چپ ناحیه بد قرار دارد اما در سمت چپ ناحیه بد نقطه‌ای هم ارتفاع با دره عمیق وجود ندارد که تناقض است. پس شیرین و فرهاد نمی‌توانند در این کوهستان به هم برسند و گزینه‌های (ج) و (د) و (هـ) نیز به همین ترتیب رد می‌شوند.

۲۸) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در این حالت برای نفر دوم استراتژی برد می‌دهیم. به این صورت که خانه‌ها را مطابق شکل زیر به زوج‌های دوتایی تقسیم می‌کنیم و در هر نوبت اگر نفر اول خانه‌ای از یک زوج برداشت نفر دوم خانه دیگر همان زوج را بر می‌دارد. پس در نهایت نفر اول مجبور است یکی از دو خانه را که مجاور شکلات هستند بردارد و نفر دوم شکلات را برای خودش بر می‌دارد.

(دو خانه متصل به یکدیگر یک زوج را تشکیل می‌دهند)



۲۹) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

مجموع اعداد جدول باید ٦ باشد، پس تعداد ۱های جدول باید زوج باشد یعنی صفر، ۲، ۴ یا ٦ . اما واضح است که

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

تعداد ۱های جدول نمی‌تواند ۲ باشد، چون اگر در یک خانه جدول ۱ باشد در سطر و ستون گذرنده از آن خانه نیز باید ۱های دیگری وجود داشته باشد. پس سه حالت می‌گیریم:

i) تعداد ۱های جدول صفر است. در این حالت در هر سطر و هر ستون باید دقیقاً یک ۲ وجود داشته باشد. برای سطر اول ۳ حالت برای قرار دادن ۲ و برای سطر دوم ۲ حالت و برای سطر سوم ۱ حالت داریم پس تعداد حالت‌ها ۶ = ۱ × ۲ × ۳ است.

ii) تعداد ۱های جدول ۴ است. در این حالت باید در خانه‌ای دل‌خواه ۲ قرار گرفته باشد و در ۴ خانه‌ای که با این خانه هم سطر و هم ستون نیستند ۱ قرار گرفته باشد، پس تعداد حالت‌ها ۹ است.

iii) تعداد ۱های جدول ۶ است. در این حالت اگر در خانه‌هایی که صفرند ۲ قرار دهیم و در خانه‌هایی که ۱ هستند صفر قرار دهیم به یک حالت از (*i*) می‌رسیم. پس تعداد حالت‌های (*i*) و (*iii*) برابر است و جواب ۶ است.

با جمع زدن سه حالت بالا به عدد ۲۱ = ۶ + ۹ + ۶ می‌رسیم.

۳۰) گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون بین هر دو اتم حداکثر یک پیوند موجود است پس تعداد پیوندها حداکثر ۴۵ = $\binom{10}{2}$ است و از ۴۵ پیوند ممکن مولکول دارای ۴۳ پیوند است، پس فقط دو پیوند تشکیل نشده‌اند. دو حالت می‌گیریم:

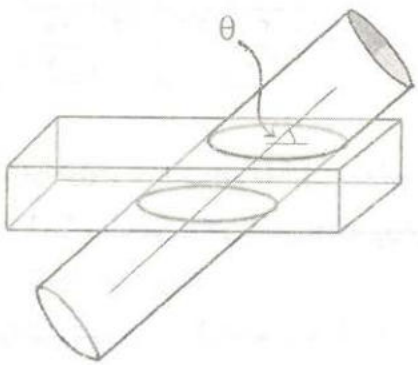
i) دو پیوندی که تشکیل نشده‌اند اتم مشترک ندارند، مثل x_ix_j و x_kx_l. در این صورت تعداد سه تایی‌های شامل x_ix_j برابر ۸ است و سه تایی‌های شامل x_kx_l نیز برابر ۸ است پس تعداد مثلث‌های مولکول برابر است با $\binom{10}{3} - 8 - 8 = 120 - 16 = 104$

ii) دو پیوندی که تشکیل نشده‌اند اتم مشترک دارند، مثل x_ix_j و x_ix_k در این صورت تعداد سه تایی‌های شامل x_ix_j ۸ تا و سه تایی‌های شامل x_ix_k نیز ۸ تا است و در ضمن سه تایی $x_ix_jx_k$ را دو بار شمرده‌ایم پس تعداد مثلث‌ها در این مولکول برابر است با: $\binom{10}{3} - 8 - 8 + 1 = 120 - 16 + 1 = 105$.

پس $t = 104$ یا $t = 105$ و گزینه‌ی (ج) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

مرحلهٔ اول بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور
سال ۱۳۸۱



۱) کیکی به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ × ۲۰ × ۱۰ داریم. به کودکی اجازه داده شده به وسیلهٔ یک استوانه که دو سر آن باز است، از کیک قطعه‌ای جدا کند؛ به این ترتیب که استوانه را با یکی از زوایای ۳۰°، ۴۵°، ۶۰°، ۹۰° نسبت به سطح بزرگ وارد آن کرده و مقدار کیکی را که درون استوانه قرار می‌گیرد برای خود بردارد. در کدام حالت بیش‌ترین مقدار کیک را به‌دست می‌آورد؟

الف) $\theta = 30°$

ب) $\theta = 45°$

ج) $\theta = 60°$

د) $\theta = 90°$

ه) در همهٔ موارد، مقدار ثابتی کیک به‌دست می‌آید.

۲) در یک چهار وجهی چهار مثلث داریم که هر کدام سه زاویه دارند. اگر از این دوازده زاویه n تای آن‌ها منفرجه باشند آنگاه

الف) n نمی‌تواند ۱ باشد. ب) n نمی‌تواند ۲ باشد. ج) n نمی‌تواند ۳ باشد.

د) n نمی‌تواند ۴ باشد. ه) هیچ‌کدام.

۳) در یک ده، صد خانه ساخته شده است. هر ۱۰ خانه‌ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بامهایشان هست (ممکن است روی یک بام هیچ یا چند آنتن هم باشد). هر سه تا آنتنی را که در نظر بگیریم، حداقل دو کلاغ روی آن‌ها نشسته است (ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ هم باشد). این ده حداقل چند کلاغ دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۹۲ ج) ۹۳ د) ۹۸ ه) ۹۹

۴) اگر از یک عدد سه رقمی کم‌تر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به‌دست آید؟

الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۳ د) ۵۵ ه) ۵۶

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۵) در هر مرحله ۴ خانه از جدول روبرو انتخاب می‌کنیم به‌طوری که از هیچ سطر یا ستونی ۲ خانه انتخاب نشده باشد. عددهای هر ۴ خانه را یک واحد اضافه یا از هر یک، یک واحد کم می‌کنیم. با این روش به کدام‌یک از جدول‌های زیر می‌توان رسید؟

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

الف)

۳	−٦	۰	−۲۱
۲۷	۲۷	۱۰	−٦
۴	۷	۷	۲۰
۴	۱۰	۲۳	۳

ب)

۱۳	۰	۰	۲۰
۷	۴	۱۷	۰
۱۱	۱۰	۵	۱۰
۱۳	۱۱	٦	۰

ج)

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۲	۴	۳	۱

د)

۲۱	۲	۱۷	۱۰
۲	۱۴	۱۷	۱۷
۱۰	۲۴	۱۳	۳
۱۷	۱۰	۳	۲۰

ه)

۱۵	۳	۱۷	۱۵
٦	۱۳	۱۳	۱٦
۸	۱۵	۱۳	۱۴
۲۱	۱۹	۵	۳

٦) هر مولکول از تعدادی اتم تشکیل شده است. بین هر دو اتم یک ملکول، تعدادی پیوند وجود دارد. این تعداد می‌تواند ۰، ۱، ۲ و یا حتی بیشتر باشد. تعداد پیوندهای بین اتم‌های x و y در مولکول‌های مختلف عددی ثابت و وابسته به x و y است. می‌دانیم:

مولکول تشکیل شده از اتمهای a، b و c دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتمهای a، b و d دارای ۷ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتمهای a، c و d دارای ۳ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتمهای b، c و d دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتمهای a، b، c، d چند پیوند دارد؟

الف) ٦

ب) ۱۰

ج) ۱۲

د) ۱۵

ه) مساله جواب منحصر به فرد ندارد.

۷) مولکول تشکیل شده توسط ۱۰ اتم x_1، x_2، ... و x_{10} را در نظر بگیرید. می‌دانیم این مولکول ۴۳ پیوند دارد و در ضمن بین هر دو اتم از این مولکول حداکثر یک پیوند موجود است. می‌گوییم سه اتم x_i، x_j و x_k تشکیل یک مثلث می‌دهند، هرگاه بین هر دو تا از آنها پیوند موجود باشد. فرض کنید تعداد مثلث‌های این مولکول برابر t باشد. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۹۶ \le t \le ۹۸$

ب) $۹۹ \le t \le ۱۰۲$

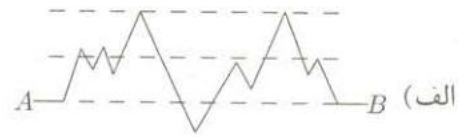
ج) $۱۰۳ \le t \le ۱۰۵$

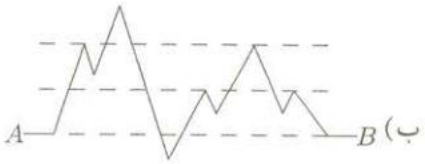
د) $۱۰۶ \le t \le ۱۰۸$

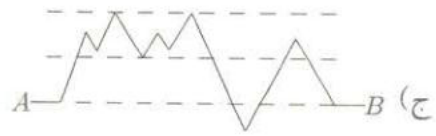
ه) $۱۰۹ \le t \le ۱۱۲$

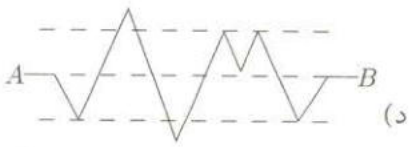
۸) شیرین در نقطهٔ A و فرهاد در نقطهٔ B ایستاده است. آن‌ها می‌خواهند از کوه‌ها و دره‌ها عبور کنند و به هم برسند، ولی هیچ‌کدام از آن‌ها نمی‌خواهد بالاتر از دیگری قرار گیرد. به همین منظور طوری حرکت می‌کنند که در هر لحظه هم ارتفاع باشند. در کدام‌یک از کوهستان‌های زیر فرهاد و شیرین به هم می‌رسند؟

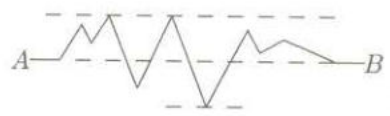
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف)


ب)


ج)


د)


ه)


۹) فرض کنید x_1، x_2، x_3 و x_4 اعدادی صحیح و نامنفی باشند، به‌طوری که مجموع آنها برابر ۱۶ باشد و

$$A = (2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4)(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)(2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4)(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$

اگر بیش‌ترین مقدار A برابر M باشد در چند حالت داریم، $A = M$؟

الف) تعداد حالات تساوی ۱ است.
ب) تعداد حالات تساوی ۶ است.
ج) تعداد حالات تساوی ۹ است.
د) تعداد حالات تساوی نامتناهی است .
ه) A بی‌کران است و بیش‌ترین مقدار ندارد.

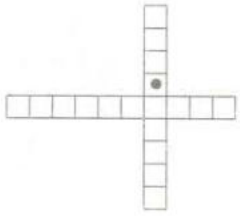
۱۰) به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول 3×3 یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را نوشت طوری که مجموع اعداد در هر سطر و هر ستون برابر ۲ شود؟

الف) ۱۵ ب) ۱۸ ج) ۲۱ د) ۲۴ ه) ۲۷

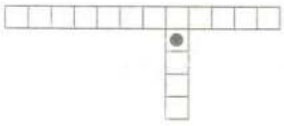
۱۱) در یک بازی دو نفره بازیکنان می‌خواهند به خانه‌ای که در آن شکلات قرار دارد برسند. قانون این بازی این است که هر بازیکن در نوبت خود خانه‌ای از جدول را که سه ضلع آزاد دارد، برمی‌دارد. در کدام‌یک از زمین‌های بازی زیر بازیکن دوم می تواند همیشه برنده باشد؟

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

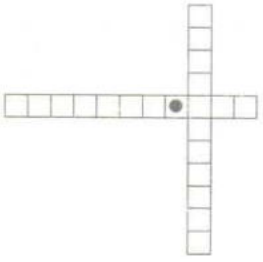
الف)



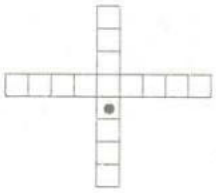
ب)



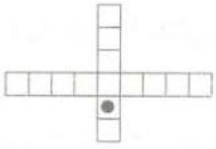
ج)



د)



ه)



۱۲) زیرمجموعهٔ A از اعداد طبیعی را ضعیف می‌نامیم، هرگاه مجموع هیچ دو عضوی از A بر عضوی از A بخش‌پذیر نباشد. در ضمن، یک مجموعه ضعیف را بزرگ می‌نامیم، هرگاه هیچ زیر مجموعهٔ ضعیف دیگری شامل آن نباشد. کدام گزینه نادرست است؟

الف) نامتناهی مجموعهٔ ضعیف نامتناهی داریم.
ب) مجموعهٔ ضعیف نامتناهی وجود دارد که بزرگ است.
ج) نامتناهی مجموعهٔ ضعیف متناهی داریم که بزرگ هستند.
د) مجموعهٔ ضعیف نامتناهی وجود دارد که همهٔ اعضای آن بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیرند.
ه) مجموعه‌ای ضعیف وجود دارد که از هر سه عدد متوالی حداقل یکی را دارا است.

۱۳) به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول ۴×۴ یکی از دو عدد $\bar{۰}$ و ۱ را نوشت به‌طوری که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون برابر ۲ شود؟

الف) ۸۳ ب) ۴۴ ج) ۵۴ د) ۹۰ ه) ۷۸

۱۴) فرض کنید A یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی و B زیر مجموعه‌ای ناتهی از A باشد. تعداد زیر مجموعه‌هایی (مانند C) از مجموعهٔ A که $B \cap C$ تعداد فردی عضو داشته باشد برابر است با:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) ۵۹۶

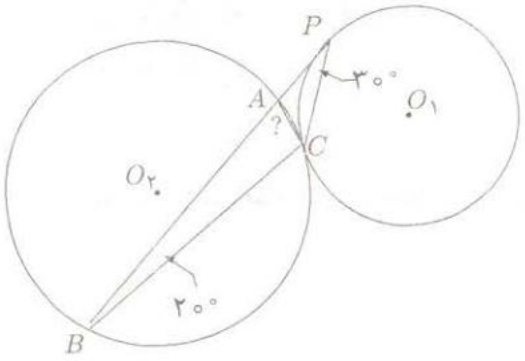
ب) ۵۱۲

ج) ۴۶۴

د) ۳۴۸

ه) بستگی به تعداد اعضای B دارد.

۱۵) در شکل مقابل BP بر دایرهٔ (O_1) مماس است. داریم: $\widehat{APC} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{CBA} = ۲۰^\circ$. همچنین دوایر (O_1) و (O_2) بر هم مماس‌اند. اندازهٔ $\widehat{BAC}$ کدام است؟



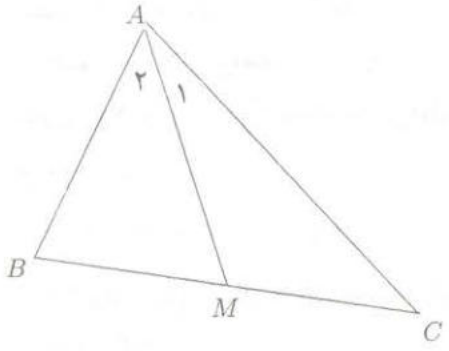
الف) ۸۰°　　ب) ۱۳۰°　　ج) ۶۰°

د) ۵۰°　　ه) ۱۴۰°

۱۶) در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ داریم: $AB = ۳, BC = DA = ۲, CD = ۴$. طول قطر BD چقدر است؟

الف) ۵　　ب) $\frac{۷}{۲}$　　ج) $۲\sqrt{۳}$　　د) $\frac{۱۷}{۴}$　　ه) ۴

۱۷) در شکل روبه‌رو زاویهٔ $\widehat{A_۲}$ دو برابر زاویهٔ $\widehat{A_۱}$ است و داریم: $AC = \sqrt{۳}$ و $AB = ۱$ و AM میانهٔ BC است. طول BC کدام است؟



الف) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$　　ب) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$　　ج) ۲

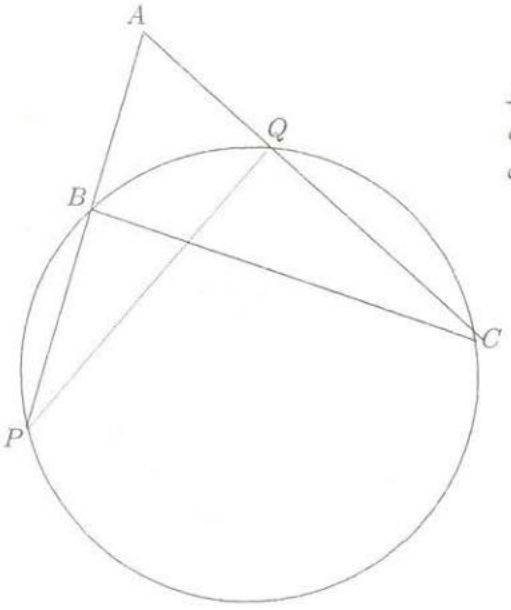
د) $\sqrt{۳}$　　ه) $\frac{۳}{۲}$

۱۸) درمثلث ABC ، $\widehat{A} = ۱۲۰^\circ$ و مجموع دو ضلع AB و AC برابر ۱۰ است. در مورد ضلع BC چه می‌توان گفت؟

الف) $BC < ۹$　　ب) $BC \geq ۵\sqrt{۳}$　　ج) $۵ \leq BC \leq ۹$

د) $۵\sqrt{۳} \leq BC \leq ۹$　　ه) $\frac{۱۱}{۲} \leq BC \leq \frac{۱۷}{۲}$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



۱۹) در مثلث ABC دوایری را در نظر بگیرید که از رئوس B و C می‌گذرند و AB و AC یا امتداد آن‌ها را در نقاطی مثل P و Q قطع می‌کنند. مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی مانند PQ کدام می‌باشد؟

الف) عمود منصف BC.

ب) خطی که از A می‌گذرد.

ج) قسمتی از دایره‌ای که از B و C می‌گذرد.

د) دایره‌ای که از A می‌گذرد.

ه) هیچ‌کدام

۲۰) معادلهٔ زیر در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

$$x^۲ + y^۵ = ۱۳۸۱ + z^۲$$

الف) صفر ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌نهایت

۲۱) فرض کنید n عددی طبیعی باشد، مقسوم علیه d از n را خوب می‌گوییم، اگر $(d, \frac{n}{d}) = ۱$. فرض کنید $f(n)$ نمایندهٔ مجموع مقسوم علیه‌های خوب n باشد و S مجموعهٔ اعداد طبیعی مانند m باشد که $f(m) - ۲$ مضرب ۴ است و $۱ \le m \le ۱۰۰۰$. کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) عضوی از S وجود دارد که بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

ب) عضوی از S به شکل $۴k + ۳$ است.

ج) هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد.

د) عضوی از S وجود دارد که تعداد عوامل اول آن ۴ است.

ه) هیچ‌کدام.

۲۲) فرض کنید f و g دو تابع از N به R باشند. می‌گوییم $f \lhd g$ اگر عدد طبیعی N وجود داشته باشد که برای هر $n > N$، $f(n) < g(n)$. اگر:

$$f_۱(n) = (۱۰^n)! \qquad f_۲(n) = ۲^{n!} \qquad f_۳(n) = \sqrt[n]{(n!)!}$$

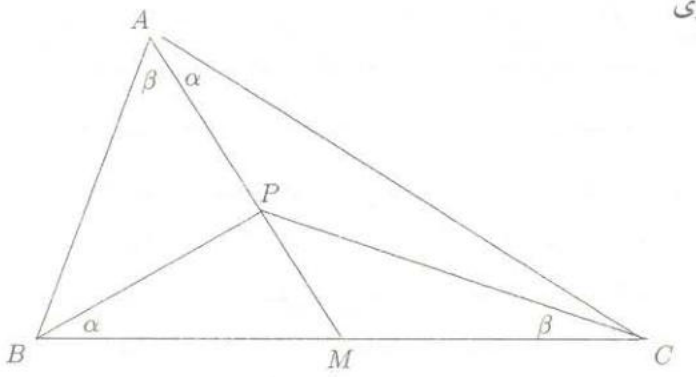
کدام گزینه صحیح است؟

الف) $f_۱ \lhd f_۲ \lhd f_۳$ ب) $f_۲ \lhd f_۱ \lhd f_۳$ ج) $f_۳ \lhd f_۲ \lhd f_۱$ د) $f_۱ \lhd f_۳ \lhd f_۲$ ه) $f_۲ \lhd f_۳ \lhd f_۱$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۳) در مثلث ABC، AM میانه است. نقطهٔ P روی AM چنان قرار گرفته است که

$$\widehat{PAC} = \widehat{PBC} = \alpha$$
$$\widehat{PAB} = \widehat{PCB} = \beta$$



اگر $\alpha + \beta = ۸۰^\circ$ زاویهٔ $\widehat{CPA}$ چقدر است؟

الف) ۱۳۰°

ب) ۱۲۰°

ج) ۱۴۰°

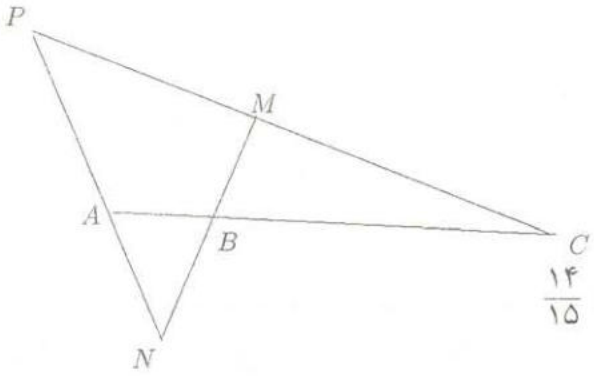
د) $۱۲۰^\circ < \widehat{CPA} < ۱۳۰^\circ$

ه) تمام مقادیر بین ۱۲۰° و ۱۴۰° می‌تواند باشد.

۲۴) در شکل روبرو $BM = BN$. اگر داشته باشیم

$$\frac{S_{BMC}}{S_{APC}} = \frac{۴}{۴۹}$$

مطلوبست مقدار $\frac{AB}{AC}$.



الف) $\frac{۴}{۴۹}$ ب) $\frac{۲}{۷}$ ج) $\frac{۱۴}{۱۵}$

د) $\frac{۳}{۷}$ ه) $\frac{۲}{۳}$

۲۵) بزرگ‌ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت یک محاط شود چه مساحتی دارد؟

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) $\frac{۳}{۴}$

۲۶) داخل یک نیم کره و صفحهٔ گذرنده از دایرهٔ عظیمهٔ آن را آینه کرده‌ایم. پرتوی را در نظر بگیرید که از نقطه‌ای روی نیم کره به‌سوی درون آن تابیده می‌شود. فرض کنید اگر پرتو به مرز دایرهٔ عظیمه برخورد کند روی همان مسیر برگردد. (توجه کنید که بردار عمود بر سطح، پرتو تابش و بازتابش همواره در یک صفحه‌اند و هر پرتو که به نیم کره برخورد می‌کند چنان منعکس می‌شود که نیمساز بین پرتو تابش و باز تابش از مرکز کره بگذرد.

الف) مسیر این پرتو به مرز دایرهٔ عظیمه میل می‌کند.

ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم کره و دایرهٔ عظیمهٔ آن به دلخواه نزدیک می‌شود.

ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.

د) مسیر این پرتو به ازای نامتناهی جهت تابش، متناوب است.

ه) مسیر این پرتو تنها به ازای متناهی جهت تابش، متناوب است.

۲۷) خرج نگهداری فیل خیلی زیاد است به همین دلیل رییس باغ وحش شهر خسیس‌ها تصمیم می‌گیرد اگر دو فیل هم شکل داشته باشد، یکی از آن‌ها را بفروشد. به نظر وی دو فیل وقتی هم شکل‌اند که در مقایسهٔ طول خرطوم و طول

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

دم آن‌ها با هر فیل دیگری که در باغ وحش وجود دارد، هر دو به نتایج یکسانی برسند. یعنی برای مثال، اگر با فیل خاصی مقایسه شوند طول خرطوم هر دو از خرطوم آن کوتاه‌تر باشد و طول دم هر دو از طول دم آن بلندتر باشد. پس از عملیات فروش، وقتی دیگر هیچ دو فیلی هم شکل نیستند کدام‌یک از گزینه‌ها صحیح است؟

(توجه کنید که طول خرطوم یا دم هیچ دو فیلی برابر نیست.)

الف) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.

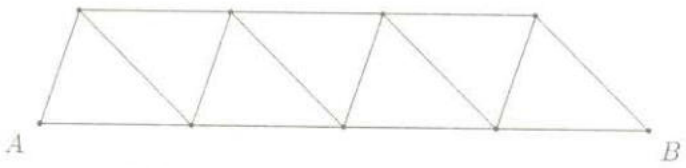
ب) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۵ فیل باقی بماند.

ج) ممکن است ۴ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۳ فیل باقی بماند.

د) ممکن است ۵ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.

ه) ممکن است هر تعداد بیش‌تر یا مساوی ۳ فیل باقی بماند.

۲۸) در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم به‌طوری که از هیچ نقطه‌ای دوبار عبور نکنیم؟



الف) ۸۱ ب) ۷۲ ج) ۶۱ د) ۵۲ ه) ۴۴

۲۹) دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به این‌صورت تعریف می‌کنیم $x_0 = t$ و به ازای $n \geq 0$، $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. چند $t \in [-1, 1]$ وجود دارد که $x_{11} = 1$؟ (راهنمایی: $\cos 2\theta + 1 = 2\cos^2\theta$)

الف) چنین t ای وجود ندارد.

ب) تنها یک t با این خاصیت وجود دارد.

ج) تعدای چنین t هایی بین صد و هزار است.

د) بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد.

ه) نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد.

۳۰) فرض کنید $p(x) = x^2 + a$ که a یک عدد حقیقی و ثابت است. معادلهٔ $p(p(x)) = x$ را در نظر بگیرید.

الف) این معادله چهار جواب دارد اگر و تنها اگر $a < \frac{-3}{4}$.

ب) این معادله همواره جواب دارد

ج) به ازای $a = \frac{1}{4}$ این معادله دو جواب دارد.

د) به ازای $a > 0$ این معادله جواب ندارد.

ه) الف و ب

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۱

---

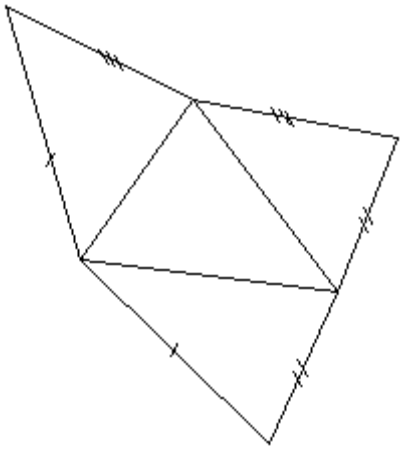
۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

به وضوح می‌دانیم $\overline{abc}-(a+b+c)=۹۹a+۹b=۹(۱۱a+b)$ و اگر a، b، c و d چهار عدد طبیعیِ یک‌رقمی باشند و $۱۱a+b=۱۱c+d$ باشد آن‌گاه $۱۱(a-c)=d-b$ و چون $|d-b|<۱۱$ نتیجه می‌شود $b-d=a-c=۰$ و بنابراین تعداد اعدادی که می‌توانیم به آن‌ها برسیم برابر است با تعداد زوج مرتب‌های (a,b) است که عددی کمتر از ۶۰۰ تولید می‌کنند و تعداد این زوج مرتب‌ها برابر است با ۵۰=10×5.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

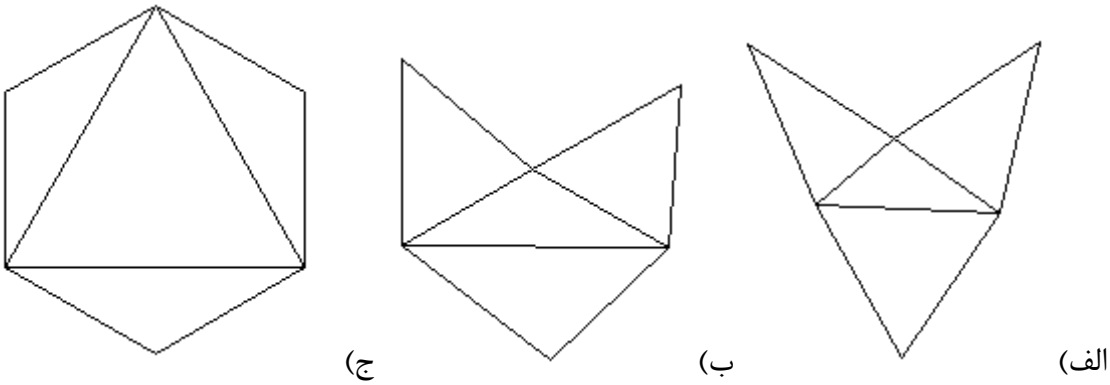
می‌دانیم حجم منشور از رابطه‌ی "مساحت قاعده ضرب در ارتفاع" بدست می‌آید. ارتفاع که ثابت است پس برای به‌دست‌آوردن حداکثر حجم کیک باید بیش‌ترین مساحت قاعده را داشته باشیم، که مساحت قاعده‌ی قطعه کیک هم با کاهش زاویه بیش‌تر می‌شود در واقع سطح مقطع یک بیضی است که می‌توان به صورت شهودی دریافت که مساحت آن با کاهش زاویه زیاد می‌شود، پس گزینه‌ی (الف) که کم‌ترین زاویه را دارد درست است.

۳- به‌تر است برای تصور چهار وجهی، بازشده‌ی آن را در نظر بگیریم. بازشده‌ی چهاروجهی، چیزی به شکل زیر است(به برابری طول‌های مشخص‌شده روی شکل توجه کنید.)

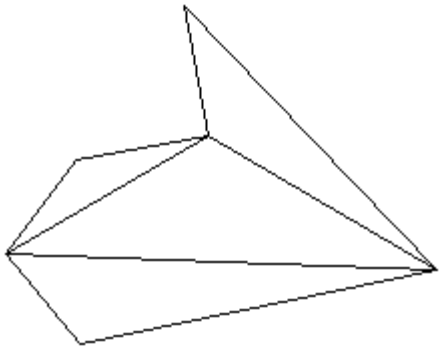


که برابری این طول‌ها شرط کافی برای این‌که این شکل باز شده‌ی یک چهاروجهی باشد است، چون فرض کنید که چنین شکلی را روی کاغذ بریده باشیم با با چسباندن دو تا از طول‌های مشخص‌شده روی شکل به هم‌دیگر مثلثی تشکیل می‌شود که به حالت سه ضلع هم‌نهشت با مثلثی است که باقی‌مانده پس می‌توان این مثلث هم به دو تای دیگر چسباند و چهاروجهی تشکیل می‌شود. اکنون برای هر کدام از گزینه‌ها یک مثال می‌آوریم و نشان می‌دهیم که گزینه‌ی (ه) درست است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



الف) ب) ج)



د)

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

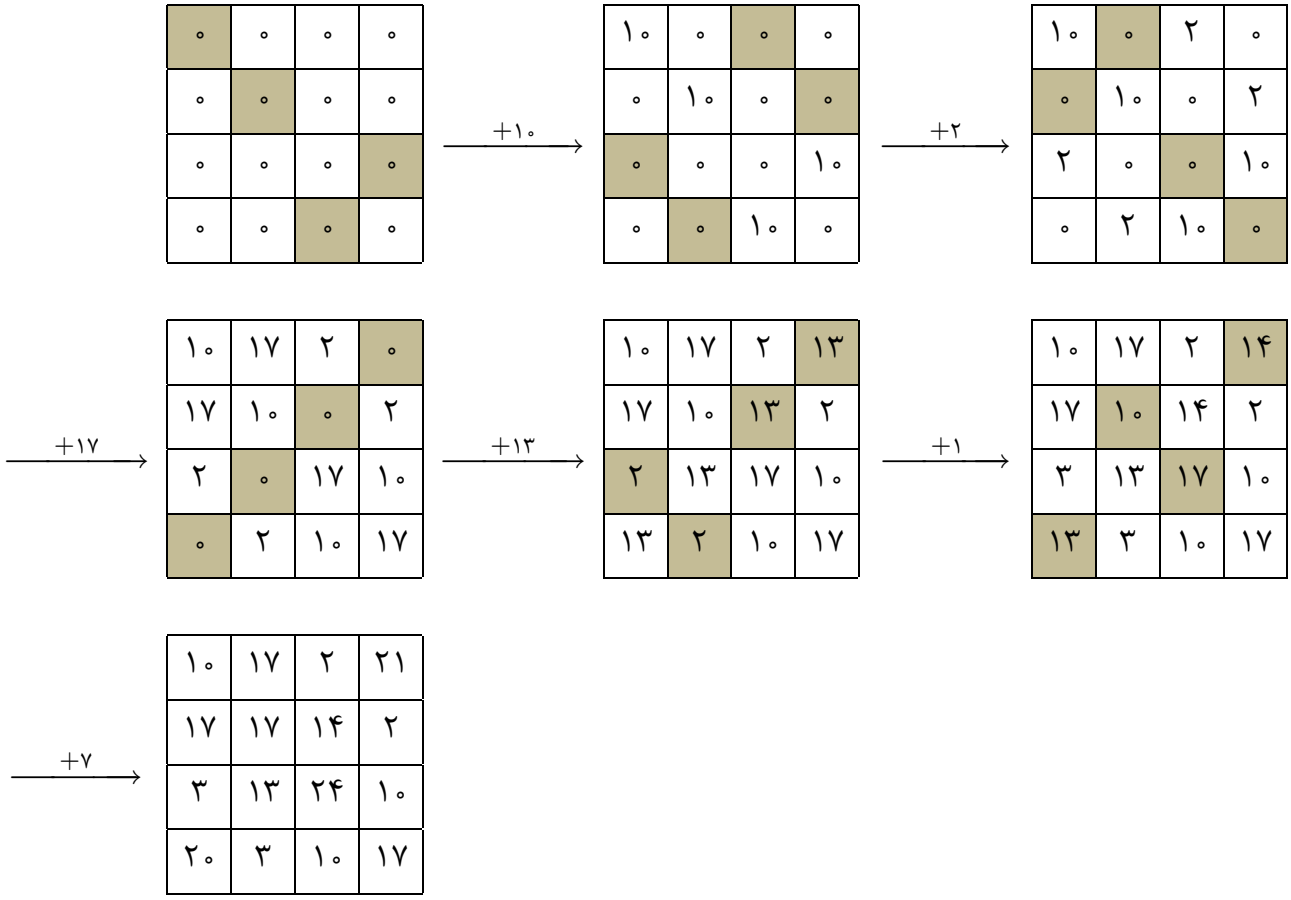
اولاً حداقل ۹۳ آنتن در این ده داریم، زیرا فرض کنید کم‌تر از ۹۳ آنتن داشته باشیم و a_i تعداد آنتن‌های خانه‌ی iاُم باشد و $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{10}$(این فرض را می‌توان به دلیل تقارن انجام داد.) در این‌صورت $a_1 = a_2 = \cdots = a_8 = 0$ و $a_9, a_{10} \leq 1$ این دُه خانه کم‌تر از ۳ آنتن دارند که با فرض مسئله در تناقض است. با استدلالی شبیه به همین نتیجه می‌شود حداقل ۹۲ کلاغ روی این آنتن‌ها وجود دارد.

۵- گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون با هر بار انجام عمل گفته‌شده در صورت مسأله، اختلاف مجموعِ اعداد یک سطر و یک ستون تغییری نمی‌کند و چون مجموع اعداد هر سطر و هر ستون در ابتدا صفر است بنابراین به هر جدولی که برسیم مجموع

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

اعداد هر سطر و هر ستون یک عدد است. و تنها جدولی که این خاصیت را در میان پنج گزینه داراست گزینه‌ی (د) است. به صورت زیر با انتخاب خانه‌ها و اضافه کردن اعداد می‌توان به جدول گزینه‌ی (د) رسید.



۶- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر نقطه‌ای که بیش‌ترین(کم‌ترین) ارتفاع را دارد یک‌تا باشد، این دو عاشق باید در این نقطه به هم برسند چون در غیر این صورت حتماً یکی از آنها از این نقطه عبور کرده در حالی که نفر دیگر جای دیگری بوده که امکان ندارد! با این استدلال گزینه‌های (ب) و (د) رد می‌شوند. در گزینه‌های (ج) و (ه) هم با توجه به همین استدلال، شیرین و فرهاد باید در پایین ترین ارتفاع به هم برسند اما در این‌صورت شیرین که در نقطه‌ی A است باید از دو نقطه‌ی ماکزیمم ارتفاعیِ کوهستان بگذرد که فرهاد نمی‌تواند بدون عبور از پایین‌ترین ارتفاع به آن بلندی برسد. اما در گزینه‌ی (الف) مشکلی برای وصال وجود ندارد.

۷- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

xy را تعداد پیوندهای بین اتم xو اتم y تعریف می‌کنیم. طبق داده‌های مسأله داریم:

$$ab + bc + ca = ۵$$
$$ab + bd + da = ۷$$
$$ac + cd + da = ۳$$
$$bc + cd + bd = ۵$$

و داریم:

$$ab + bc + cd + da + bd + ca =$$
$$\frac{۱}{۲}[(ab + bc + ca) + (ab + bd + da) + (ac + cd + da) + (bc + cd + bd)]$$

و طرف چپ تساوی تعداد پیوندهای مولکول حاصل از اتم‌های a، b، cو d است و طرف راست هم برابر ۱۰ می‌شود.

۸- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون بین هردو اتم حداکثر یک پیوند وجود دارد و این مولکول ده اتم دارد، بنابراین حداکثر $\binom{۱۰}{۲} = ۴۵$ پیوند دارد و چون ۴۳ پیوند دارد یعنی دو جفت اتم هستند که پیوندی بینشان نیست که دو حالت داریم که این دو جفت، اتم مشترکی داشته باشند یا نداشته باشند. اگر اتم مشترک داشته باشند فرض کنیم پیوندهای ab و ac وجود نداشته باشند. آن‌گاه تعداد مثلث‌ها برابر است با $\binom{۱۰}{۳} - ۸ - ۸ + ۱ = ۱۰۵$ و در حالت دوم فرض کنیم پیوند های ab و cd وجود نداشته باشند، آنگاه تعداد مثلث ها برابر است با $\binom{۱۰}{۳} - ۸ - ۸ = ۱۰۴$.

۹- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

مسأله را با توجه به تعداد ۲های جدول می‌توان به چند حالت تقسیم کرد: (دقت کنید که بیش‌تر از سه عدد ۲ نمی‌تواند در جدول موجود باشد زیرا در این صورت دو تا از آن‌ها هم‌سطر می‌شوند که باعث می‌شود مجموع اعداد آن سطر بیش‌تر از ۲ شود.)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) اصلاً ۲ در جدول نباشد: در این‌صورت باید در هر سطر و هر ستون دوتا ۱ داشته باشیم که برای قراردادن دو ۱ در سطر اول ۳ حالت داریم و برای قرار دادن دو یک در سطر دوم ۲ حالت داریم زیرا دو ۱ سطر دوم نمی‌توانند دقیقاً زیر دو ۱ سطر اول قرار بگیرند(چرا؟) و برای قرار دادن یک های سطر سوم هم ۱ راه باقی می‌ماند، پس !۳ راه برای پر کردن جدول در این حالت داریم.

ب)یک ۲ در جدول داشته باشیم: در این‌صورت خانه‌هایی که در سطر و ستون عدد ۲ قرار دارند باید صفر باشند و بقیه‌ی خانه‌های جدول باید ۱ باشند. پس در این حالت تنها باید مکان عدد ۲ را در جدول مشخص کنیم که ۹ انتخاب برای این حالت وجود دارد.

ج)دو عدد ۲ در جدول باشد: در این‌صورت هم باید خانه‌هایی که در سطر یا ستون این دو عدد ۲ قرار دارند باید صفر باشند و چون این دو ۲ هم سطر یا هم ستون نیستند تنها یک خانه در جدول باقی می‌ماند که مقدارش تعیین نشده که آن خانه هم باید ۲ باشد. پس امکان ندارد که جدول تنها دو عدد دو داشته باشد.

د) سه عدد دو داشته باشیم: این سه عدد دو نمی‌توانند هم‌سطر یا هم‌ستون باشند، و لذا کافی است مکان آن‌ها را طوری تعیین کنیم که از هر سطر و ستون یک خانه انتخاب کرده باشیم که ۶=!۳ راه برای این کار داریم.

بنابراین جواب برابر است با $۲۱ = ۶ + ۹ + ۶$.

۱۰-گزینه‌ی (ج) صحیح است.

داریم:

$$۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ = ۳۲ + (x_۴ - x_۲)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} A &= (۳۲ + (x_۴ - x_۲))(۳۲ - (x_۳ - x_۱))(۳۲ - (x_۴ - x_۲))(۳۲ + (x_۳ - x_۱)) \\ &= (۳۲^۲ - (x_۴ - x_۲)^۲)(۳۲^۲ - (x_۳ - x_۱)^۲) \end{aligned}$$

پس بیش‌ترین مقدار A برابر $۳۲^۴$ است و حالت تساوی زمانی است که $x_۱ = x_۳$ و $x_۲ = x_۴$. بنابراین تعداد حالات تساوی برابر ۹ است:

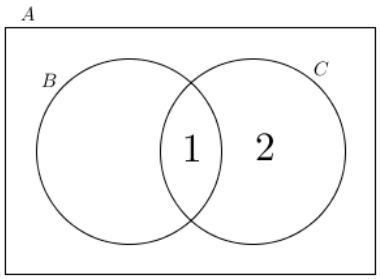
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$$(x_۱, x_۲) = (i, ۸ - i), ۰ \leq i \leq ۸, i \in \mathbb{Z}$$

۱۱- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

در زمین گزینه‌ی (ج) از هر طرف چهار طرف تعداد فردی خانه با خانه‌ی شکلاتی(!) فاصله داریم. حال بازیکن دوم به این صورت عمل می‌کند که در هر مرحله، بازیکن اول از هر یک از چهار طرف که خانه‌ای برداشت او هم از همان طرف یک خانه را بر می‌دارد در این‌صورت همواره در نوبت بازیکن اول تعداد فردی خانه، فاصله تا خانه شکلاتی وجود دارد و او هرگز به این خانه نمی‌رسد و بدیهی است که پس از تعدادی مرحله بازیکن دوم به شکلات می‌رسد. در زمین‌های بازی گزینه‌های دیگر از یک طرف تعداد زوجی خانه تا خانه‌ی شکلاتی فاصله داریم و از سه طرف دیگر تعداد فردی خانه. در این زمین‌ها استتراتژی برد نفر اول به این شکل است که او ابتدا از طرفی که تعداد زوجی فاصله داریم یک خانه بر می‌دارد و اکنون نوبت نفر دوم است که بازی کند و زمینی داریم که از هر طرف تعداد فردی فاصله تا خانه شکلاتی داریم و مطابق آن‌چه گفتیم در چنین زمینی کسی که حرکت دوم را انجام دهد استراتژی برد دارد که همان نفراول خودمان است. پس در این زمین‌ها نفر اول استراتژی برد دارد.

۱۲- گزینه‌ی (ب) صحیح است.



فرض می‌کنیم B شاملِ k عضو باشد در این‌صورت مجموعه‌ی C دارای دو قسمت است: (۱) اعضایی که در B هم هستند و (۲) اعضایی که در B نیستند.

کافی است قسمت ۱ تعداد فردی عضو داشته باشد و قسمت ۲ محدودیت ندارد برای قسمت ۲ ، $۲^{۱۰-k}$ حالت داریم. چون $۱۰ - k$ عضو A هستند که در B نیستند و یک مجموعه‌ی $۱۰ - k$ عضوی $۲^{۱۰-k}$ زیرمجموعه دارد. هم‌چنین برای این که تعداد حالت های قسمت یک را بیابیم باید تعداد زیر مجموعه‌های فرد عضوی یک مجموعه‌ی k عضوی را بیابیم که برابر $۲^{k-۱}$ است.پس در کل $۲^{۱۰-k} \times ۲^{k-۱} = ۲^۹$ حالت داریم.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۳- گزینه‌ی (ه) صحیح است.

برای رد گزینه‌ی (ه) داریم: چون از هر سه عدد متوالی باید یکی عضو A باشد، پس از بین ۱، ۲ و ۳ یکی باید در A باشد که ۱ نمی‌تواند باشد و اگر ۲ عضو A باشد در این‌صورت دو عدد فرد یا دو عدد زوج نمی‌توانند در A باشند چون مجموعشان بر ۲ بخش‌پذیر است، پس A نمی‌تواند نامتناهی شود. بنابراین ۳ عضو Aاست پس عضو به شکل $۳k$ در A حداکثر یکی داریم و نمی‌توانیم در A هم عدد به شکل $۳k+۱$ هم به شکل $۳k+۲$ داشته باشیم چون مجموعشان بر ۳ بخش‌پذیر است و چون از بین $۳k$، $۳k+۱$ و $۳k+۲$ باید یکی در A باشد پس می‌توانیم بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم از جایی به بعد همه‌ی $۳k+۱$ ها عضو Aهستند که در این صورت داریم $(۳(k-۱)+۱)+(۳(k+۱)+۱)=۲(۳k+۱)$ پس عبارت گزینه‌ی (ه) نادرست است.

۱۴-گزینه‌ی (د) صحیح است.

اولین چیزی که به دست می‌آید این است که باید در هر سطر و هر ستون، دو یک و دو صفر داشته باشیم. برای حل، مسأله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم: (۱) دو سطر در جدول باشند که مکان ۱ و ۰ هایشان دقیقاً مشابه باشد. (۲) دو سطر دقیقاً مشابه نداشته باشیم.

حالت ۱. در این حالت با نگاه به جدول درمی‌یابیم که دو جفت سطرِ دقیقاً مشابه داریم،که با تعیین یک جفت، دیگری به طور یک‌تا تعیین می‌شود. $\binom{۴}{۲}=۶$ راه برای قرار دادن ۱ها در یک سطر داریم و $\binom{۴}{۲}=۶$ راه برای انتخاب دو سطر از جدول که دو سطر مشابه را در آنها قرار دهیم. یعنی در کل $۶\times۶=۳۶$ حالت داریم که هر حالت را دوبار شمرده‌ایم(به ازای هر کدام از ۲ جفت سطرهای مشابه، یک‌بار شمارش انجام داده‌ایم). پس تعداد حالت‌های مورد قبول در این قسمت $\frac{۳۶}{۲}=۱۸$است.

حالت ۲. در این حالت $\binom{۴}{۲}=۶$ روش برای انتخاب ۱های سطر اول وجود دارد و به ازای هر سطر همواره سطر دیگری در جدول هست که مکان ۱های هر کدام دقیقاً بر مکان ۰ های سطر دیگر منطبق باشد، زیرا در هر ستون از این جدول که در سطر مورد نظر صفر داریم، باید دو یک موجود باشد و چون تنها سه سطر دیگر داریم

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سطری هست که در هر دو ستون در آن‌خانه یک قرار دارد و تبع آن در دو خانه‌ی دیگر آن سطر صفر داریم، پس این سطر شرط ادعا شده را برآورده می‌کند. این چنین دو سطری را مزدوج می‌نامیم. بنابراین ۳ حالت هم برای انتخاب سطر مزدوج سطر اول در جدول داریم و چهار حالت داریم که ۱های دو سطر دیگر جدول را (که آن دو هم قطعاً مزدوج هستند) طوری تعیین کنیم که سطرهای دقیقاً مشابه در جدول به وجود نیاید. پس در کل در این حالت $۶ \times ۳ \times ۴ = ۷۲$ روش داریم.

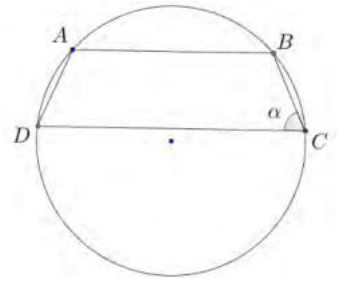
و در نهایت تعداد کل حالت‌ها برابر $۷۲ + ۱۸ = ۹۰$ است.

۱۵- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

مماس مشترک دو دایره که از نقطه‌ی C می‌گذرد را رسم می‌کنیم. در این‌صورت زاویه‌ی $\angle ADC$ به دو قسمت تبدیل می‌شود، که یک قسمت زاویه‌ی ظلی کمان $\overset{\frown}{AC}$ است و قسمت دیگر زاویه‌ی ظلی کمان $\overset{\frown}{PC}$ است و اندازه‌ی این دو کمان را هم که داریم. پس $\angle ACP$ برابر است با $۵۰^\circ = ۳۰^\circ + ۲۰^\circ$ و چون $\angle BAC$ زاویه‌ی خارجی مثلث APC است داریم:

$$\angle BAC = \angle ACP + \angle APC = ۵۰^\circ + ۳۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۱۶- گزینه‌ی (ه) صحیح است.



راه‌حل اول. این راه‌حل با استفاده از قضیه‌ی بطلمیوس است، که طبق این قضیه در هر چهار ضلعی محاطی $ABCD$ داریم:

$$BD \times AC = AD \times BC + AB \times CD$$

و چون در این چهارضلعی محاطی $BC = AD$، پس $BD = AC$ و بنابراین داریم:

$$BD^۲ = ۲ \times ۲ + ۳ \times ۴ = ۱۶ \Rightarrow BD = ۴$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه‌حل دوم. استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها است. چون $ABCD$ محاطی است داریم $\angle DAC = ۱۸۰^\circ - \angle DBC$. پس کسینوس این دو زاویه قرینه‌ی یک‌دیگر است. اکنون با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها:

$$DA^۲ + AB^۲ - ۲\cos\alpha.DA.AB = BC^۲ + CD^۲ + ۲\cos\alpha.BC.CD = BD^۲$$
$$\Rightarrow ۱۳ - ۱۲\cos\alpha = ۲۰ + ۱۶\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-۱}{۴}$$

که با جای‌گذاری دوباره همان جواب $BD = ۴$ به دست می آید.

۱۷-گزینه‌ی (ج) صحیح است.

اگر $m = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_n^{\alpha_n}$ تجزیه‌ی عدد m به عوامل اول باشد، در این‌صورت هر عدد به فرم $p_{i_۱}^{\alpha_{i_۱}} p_{i_۲}^{\alpha_{i_۲}} \cdots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ یک مقسوم‌علیه خوب m است.(یعنی تعدادی از عوامل اول m را با حفظ توانشان انتخاب کنیم.) پس $f(m) = (۱ + p_۱^{\alpha_۱})(۱ + p_۲^{\alpha_۲}) \cdots (۱ + p_n^{\alpha_n})$. می‌دانیم که اگر $p \neq ۲$، $۲ \mid p^\alpha + ۱$ پس اگر m بیش از دو عامل اول داشته باشد در این‌صورت $f(m)$ مضرب چهار خواهد شد. پس تنها گزینه‌ی (ج) می‌تواند درست باشد.

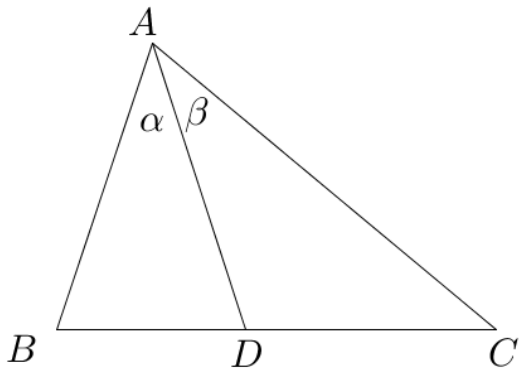
حال به رد گزینه‌های دیگر هم می‌پردازیم:

گزینه‌ی (الف) و (د). با توجه به توضیحات بالا هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد ولی اگر عددی بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد، حداقل سه عامل اول دارد.

گزینه‌ی (ب). هر عدد به شکل $۴k + ۳$ مقسوم‌علیهی به همین شکل دارد که توانش در تجزیه‌ی آن عدد فرد است. (اگر چنین عددی موجود نباشد قسمت مربوط به هر عدد اول در تقسیم بر ۴ دارای باقی‌مانده‌ی ۱ می‌شود و لذا کل عدد در تقسیم بر ۴ دارای باقی‌مانده‌ی ۱ است.) فرض کنید این عدد اول p و توانش در تجزیه $۲s + ۱$ باشد. در این صورت (به پیمانه‌ی ۴) $۱ + p^{۲s+۱} \equiv ۱ + (-۱)^{۲s+۱} \equiv ۰$ پس $f(m)$ بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۸- گزینه‌ی (ج) صحیح است.



می‌دانیم که در هر مثلث ABC با قاطع AD داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB.\sin(\angle BAD)}{AC.\sin(\angle CAD)}$$

بنابراین در شکل مسأله داریم:

$$۱ = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \times \frac{AB}{AC} \overset{\alpha=۲\beta}{\Rightarrow} ۲\cos\beta = \sqrt{۳} \Rightarrow \beta = ۳۰^\circ \Rightarrow \angle A = ۹۰^\circ$$

و در نتیجه از قضیه‌ی فیثاغورس بدست می آید که $BC = \sqrt{۳+۱} = ۲$.

۱۹- گزینه‌ی (ب) صحیح است.

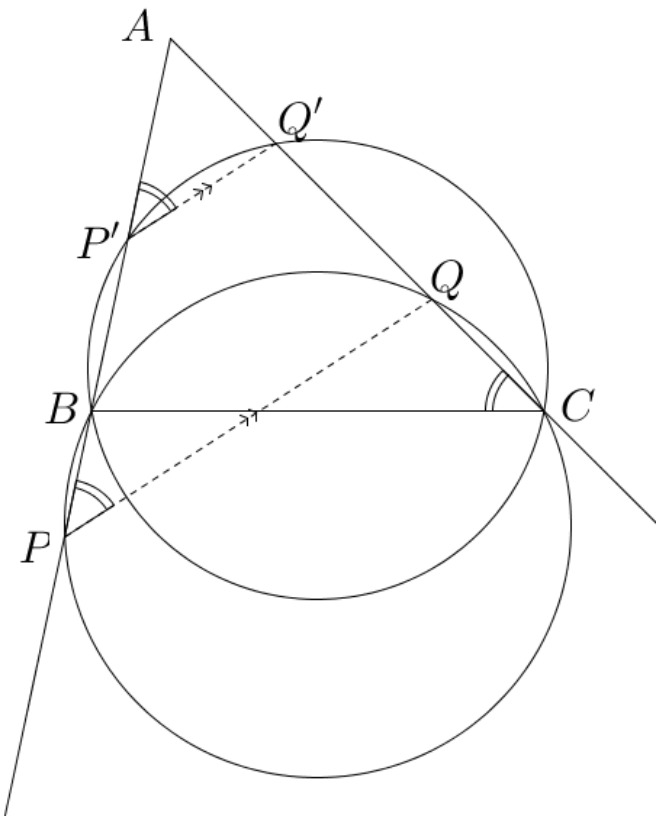
در طول راه‌حل از نماد a برای طول ضلع BC، از b برای طول ضلع AC و از c برای طول ضلع AB استفاده شده است. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos A = (a+b)^۲ - ۲(۱+\cos(۱۲۰^\circ))ab = ۱۰۰ - ab$$
$$۰ \le ab \le (\frac{a+b}{۲})^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow ۷۵ \le c^۲ \le ۱۰۰ \Rightarrow ۵\sqrt{۳} \le c \le ۱۰$$

می‌توان a و b را به گونه‌ای انتخاب کرد که با توجه به بالا c هر عدد بین $۵\sqrt{۳}$ و ۱۰ را به عنوان مقدار بگیرد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۰-گزینه‌ی (ب) صحیح است.



ابتدا با توجه به محاطی بودن چهارضلعی $BQCP$ متوجه می‌شویم $\angle P = \angle C$ و در نتیجه از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که تمام خطوط PQ موازی هم هستند(در شکل PQ موازی $P'Q'$ است) پس اگر میانه مثلث APQ را در نظر بگیریم همواره یک راستای ثابت دارد در نتیجه این مکان هندسی خطی است که از A می‌گذرد. اثبات این‌که به ازای هر نقطه‌ای روی این خط هم یک دایره وجود دارد، در اینجا نیاز نیست اما در امتحانات تشریحی باید این قسمت را هم در نظر داشته باشید.

۲۱- گزینه‌ی (ه) صحیح است.

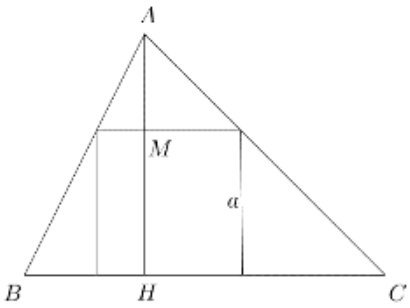
معادله را به صورت $x^۲ - z^۲ = ۱۳۸۱ - y^۵$ بازنویسی می‌کنیم و در نتیجه:

$$(x - z)(x + z) = ۱۳۸۱ - y^۵.$$

اکنون اگر $pq = ۱۳۸۱ - y^۵$ در این‌صورت $x = \frac{p+q}{۲}$ و $z = \frac{p-q}{۲}$ یک جواب این معادله است. کافی است برای صحیح بودن x و z اعداد p و q دارای زوجیت یک‌سان باشند. پس کافی است y را یک عدد زوج در نظر بگیریم که $۱۳۸۱ - y^۵$ یک عدد فرد شود و یک عدد فرد را همواره می توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد فرد(عدد ۱ هم مجاز است) نوشت.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۲- گزینه‌ی (ب) صحیح است.



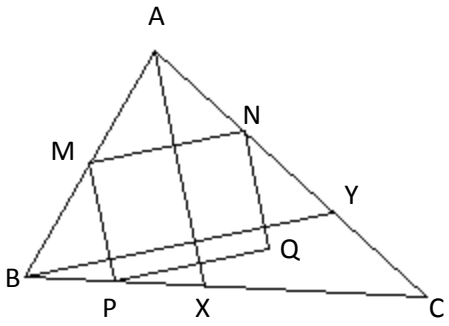
اگر یکی از اضلاع مربع بر یکی اضلاع مثلث واقع شده باشد(مانند شکل) داریم:

(AH ارتفاع است و a طول ضلع مربع است.)

$$\frac{AM}{a}=\frac{AH}{BC}\Rightarrow\frac{AH-a}{a}=\frac{AH}{BC}\Rightarrow\frac{AH}{a}=\frac{AH+BC}{BC}$$
$$\Rightarrow a=\frac{AH.BC}{AH+BC}\leq\frac{AH.BC}{۲\sqrt{AH.BC}}=\frac{\sqrt{AH.BC}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a^{۲}\leq\frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که این استدلال ناقص است اما برای بدست آوردن یک عدد مناسب است. اما استدلال زیر کامل است.

شکل زیر را در نظر بگیرید.



$MNPQ$ مربع است و $AX\parallel MP, BY\parallel MN$ در نتیجه $AX\perp BY$ و همچنین :

$$AX.BY=۲S_{ABXY}\leq ۲S_{ABC}=۲$$
$$S_{MNPQ}=MP.MN=(\frac{AM}{AB}.BY).(\frac{BM}{AB}.AX)$$
$$=\frac{AM.BM}{AB^{۲}}.AX.BY\leq ۲.\frac{AM.BM}{AB^{۲}}\leq ۲.\frac{(AM+BM)^{۲}}{۴AB^{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

با این استدلال هم چنین ثابت کردیم مساحت بزرگ‌ترین مستطیل در این مثلث هم $\frac{۱}{۲}$ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

23- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ابتدا به این نکته توجه می کنیم که

$$k(n-k+1) \geq n \Rightarrow n! = (n \times 1)((n-1) \times 2) \cdots \geq n^{\frac{n}{2}}$$

و هم‌چنین $n! < n^n$. بنابراین داریم:

$$(10^n)! \leq 10^{n10^n} < 16^{n10^n} = 2^{4n10^n}, 2^{n!} \geq 2^{n^{\frac{n}{2}}}$$

بنابراین برای اینکه ثابت کنیم که $f_2 \ll f_1$ کافی است نشان دهیم که $2^{n^{\frac{n}{2}}} \ll 2^{4n10^n}$. حال داریم:

$$2^{4n10^n} \ll 2^{n^{\frac{n}{2}}} \Leftrightarrow 4n10^n \ll n^{\frac{n}{2}}$$

که این هم درست است.(چرا؟)

و برای اینکه نشان دهیم $f_2 \ll f_3$ داریم: $\sqrt[n]{(n!)!} \geq (n!)^{\frac{n!}{2n}}$ پس کافی است نشان دهیم $(n!)^{\frac{n!}{2n}} \gg 2^{n!}$:

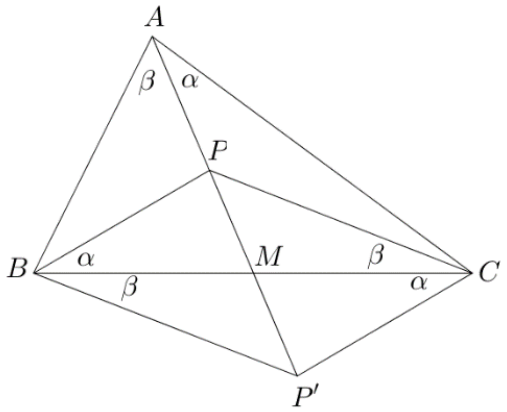
$$(n!)^{\frac{n!}{2n}} \gg 2^{n!} \Leftrightarrow n! \gg 4^n$$

که این هم درست است.(چرا؟)

۲۴- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

راه‌حل اول: PM را به اندازه‌ی خودش از طرف M ادامه می‌دهیم تا به نقطه‌ی P' برسیم. در این‌صورت $PCP'B$ متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه که این نتیجه می‌دهد که $\triangle P'MB \sim \triangle P'BA$ (زوایای متناظرِ در تشابه از ترتیب در نام مثلث‌ها مشخص است.) و لذا $P'M.P'A = P'B^2$ و به همین ترتیب داریم

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



$P'M.P'A = P'C^{۲}$ که از دو قسمت آخر نتیجه می شود $P'C = P'B$ و در نتیجه $\beta = \alpha$. پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و $\beta = \alpha = ۴۰^\circ$. پس:

$$\angle CPA = \frac{۱}{۲}(۳۶۰^\circ - \angle CPB) = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

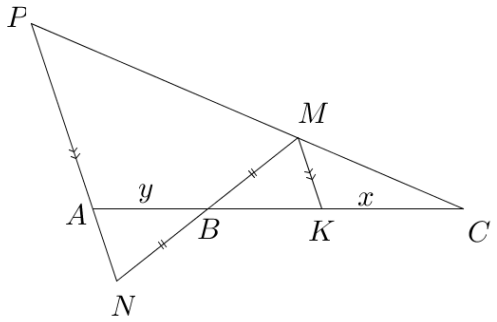
راه دوم:

$$PBC \text{ قضیه سینوس‌ها در مثلث} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{PC} = \frac{\sin\beta}{PB}$$

$$PAB \text{ و } PAC \text{ قضیه سینوس ها در دو مثلث} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{PC} = \frac{\sin\angle PCA}{AP}, \frac{\sin\beta}{PB} = \frac{\sin\angle PBA}{AP}$$

پس $\sin\angle PCA = \sin\angle PBA$(این تساوی با یک بار استفاده از سوای سینوسی برای سه خط هم‌رس در نقطه‌ی P به سادگی به دست می‌آید.) و چون این دو زاویه مکمل نیستند پس با هم برابرند و اگر مقدارشان را x بنامیم داریم: $۲x + ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $x + \alpha + \beta = ۹۰^\circ$ که یعنی AM بر BC عمود است و چون AM میانه هم هست پس ABC متساوی‌الساقین است و ادامه‌ی راه‌حل مشابه است.

۲۵- گزینه‌ی (د) درست است.



مطابق شکل بالا، پاره‌خط MK را به موازات AN رسم می‌کنیم. در این صورت چون $NB = BM$ خواهیم داشت $AN = MK$ و $BK = AB$. اکنون اگر مقدار CK و AB را به ترتیب x و y بنامیم داریم:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

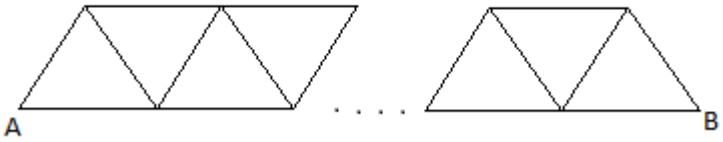
$$\frac{S_{MBC}}{S_{PAC}} = \frac{CM}{CP}.\frac{CB}{CA} = \frac{CK}{CA}.\frac{CB}{CA} = \frac{y}{y+۲x}.\frac{y+x}{y+۲x} = \frac{۴}{۴۹}$$

$$\overset{\frac{x}{y}=a}{\Rightarrow} ۴(۲a+۱)^۲ = ۴۹(a+۱) \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow \frac{x}{y} = ۳ \Rightarrow \frac{x}{۲x+y} = \frac{a}{۲a+۱} = \frac{۳}{۷}$$

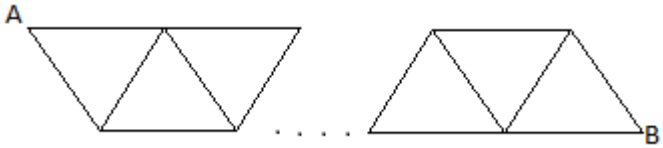
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۷}$$

۲۶-گزینه‌ی (الف) صحیح است.

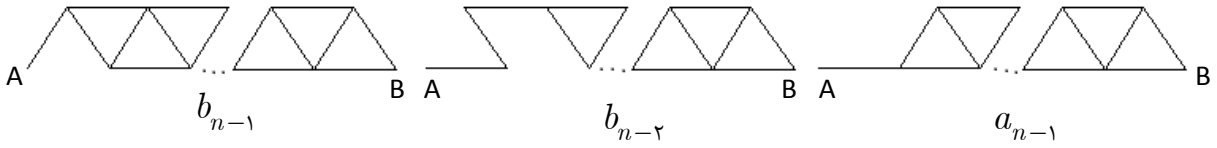
از دنباله‌های بازگشتی استفاده می‌کنیم. اگر a_n برابر تعداد راه‌های رسیدن از A به B در شکل زیر باشد:(تعداد مثلث‌های پایینی n است)



و b_n تعداد راه‌های رسیدن از A به B در شکل زیر باشد:(تعداد مثلث‌های پایینی n است.)

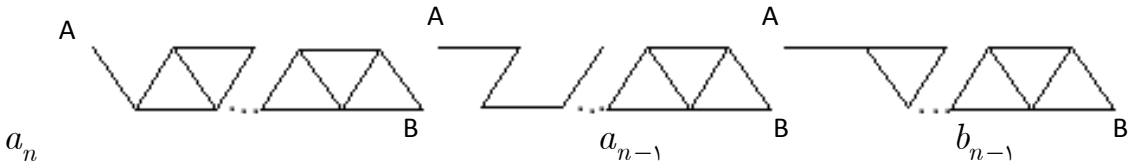


اکنون با توجه به شکل زیر داریم:



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس این رابطه بدست می آید: $a_n = a_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-1}$



پس بدست می آید: $b_n = a_n + a_{n-1} + b_{n-1}$

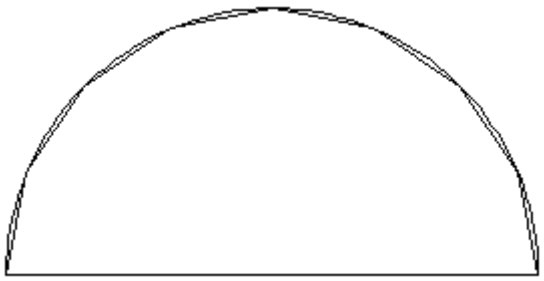
قصد ما بدست آوردن a_4 است بنابراین نیازی به حل کلی دنباله‌ی بازگشتی نداریم.

n	0	1	2	3	4
a_n	1	2	7	24	81
b_n	1	4	13	44	لازم نداریم

پس پاسخ مسئله برابر ۸۱ است.

۲۷- گزینه‌ی (د) صحیح است.

مثال زیر را در نظر بگیرید:



می‌بینیم که اگر پرتو طوری در یکی از دایره‌های عظیمه طوری در یک نیم‌دایره بتابد که نیمی از یک $2n$ضلعی محدب را بسازد، آن‌گاه مسیر این جهت تابش متناوب است زیرا با حرکت به روی اضلاع $2n$ضلعی و رسیدن به لبه، باز روی همان مسیر باز می‌گردد. اکنون به ازای nهای متفاوت جهت‌های تابش متفاوتی بدست می‌آوریم و در نتیجه به ازای بی‌نهایت جهت تابش مسیر پرتو متناوب است. دقت کنید که می‌توان حرکت پرتو در نیم کره با حرکت یک پرتو دیگر درون یک کره متناظر کرد. به این صورت که هر گاه پرتو به صفحه‌ی قطر نیم‌کره برخورد کرد، به جای قرینه کردن پرتو، آن را مستقیم ادامه دهیم و در حقیقت نیم‌کره را قرینه کنیم.(بازگشت پرتو هنگامی که به گوشه‌ی نیم‌کره می‌خورد متناظر با بازتاب آن در کره می‌شود.)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

28- گزینه‌ی (ج) صحیح است.

نشان می دهیم ۳ فیل نمی‌تواند باقی بماند. فرض کنید فیل‌ها را a، b و c بنامیم که ترتیب خرطوم آن‌ها به شکل $a < b < c$ باشد. اکنون در ترتیبِ بلندی دم‌ها، b با یکی از فیل‌ها مجاور است(مثلاً در ترتیب $a < c < b$ ، b با c مجاور است.) که اگر b با این فیل را در نظر بگیریم این دو فیل هم‌شکل اند. اما نشان می‌دهیم که چهار یا پنج فیل امکان دارد باقی بمانند. فرض کنید فیل ها را با اعداد ۱ تا n نمایش دهیم و طول خرطوم‌ها $k_1, k_2, \ldots, k_n$ و طول دم‌هایشان $g_1, g_2, \ldots, g_n$ باشند. می‌توانیم فرض کنیم $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ و اکنون اگر دو فیل با شماره‌ی i و j $(i < j)$ هم‌شکل باشند در این‌صورت در ترتیب دم‌ها باید $i+1, \ldots, j-1$ بین دو فیل i و j باشند و بقیه فیل‌ها نباید بین آن دو باشند. پس باید تعداد فیل‌هایی که بین i و j قرار دارد در هر دو ترتیب یک‌سان باشد تا این دو فیل هم‌شکل باشند. این نکته راهی برای ساختن ترتیب‌هایی که هیچ دو فیلی هم شکل نباشند به ما نشان می‌دهد. برای $n = 4,5$ داریم:

$$k_1 < k_2 < k_3 < k_4, g_2 < g_4 < g_1 < g_3$$
$$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5, g_1 < g_4 < g_2 < g_5 < g_3$$

پس گزینه‌ی (ج) درست است.

۲۹- گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ابتدا توجه می‌کنیم که گزینه‌های (ب) و (د) غلط هستند زیرا اگر $a > 1$ در این‌صورت برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$p(x) > x \Rightarrow p(p(x)) > p(x) > x$$

پس اگر $a > 1$ آن‌گاه معادله جواب ندارد. به ازای $a = \frac{1}{4}$، $x = \frac{1}{2}$ جواب است پس گزینه‌ی (د) هم غلط است. گزینه (ه) هم با توجه به غلط بودن (ب)، غلط است. تنها دو گزینه‌ی (الف) و (ج) باقی می‌ماند. داریم:

$$(x^2 - a)^2 - a - x = (x^2 - x - a)(x^2 + x + 1 - a)$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

که $x^۲ - x - a$ همواره دارای دو ریشه است و $x^۲ + x + ۱ - a$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است اگر و تنها اگر $a < \frac{-۳}{۴}$.گزینه‌ی (ج) هم با توجه به تجزیه، اشتباه است.

۳۰- گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون به دنبال $t \in [۰,۱]$ می‌گردیم پس می‌توانیم فرض کنیم که $x_۰ = \cos\theta$ و در نتیجه با استقرا ثابت می‌شود که $x_n = \cos(۲^n\theta)$.پایه‌ی استقرا که صحیح است و برای n اگر فرض استقرا درست باشد برای $n+۱$ داریم:

$$x_{n+۱} = ۲x_n^۲ - ۱ = ۲\cos^۲(۲^n\theta) - ۱ = \cos(۲ \times ۲^n\theta) = \cos(۲^{n+۱}\theta)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\cos(۲^{۱۱}\theta) = ۱$ و لذا $۲^{۱۱}\theta = ۲k\pi$. پس $\theta = \frac{۲k\pi}{۲^{۱۱}} = \frac{k\pi}{۱۰۲۴}$ و به ازای $۰ \leq i \leq ۱۰۲۴$، θهایی بدست می آوریم که کسینوس‌های متفاوتی دارند و در نتیجه tهای متمایزی به دست می‌آید. پس بیش از ۱۰۰۰ جواب برای مسئله یافت می‌شود و گزینه‌ی (د) صحیح است.

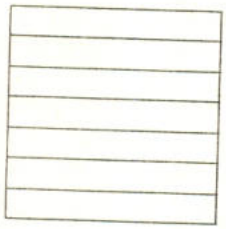
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات آزمون مرحلهٔ اوّل المپیاد مقدماتی ریاضی، سال ۱۳۸۰

۱) میانگین ۶ عدد برابر ۷ است، اگر دو تا از این اعداد را کنار بگذاریم، میانگین اعداد باقی‌مانده برابر ۸ می‌شود، مجموع دو عدد کنار گذاشته شده چند است؟

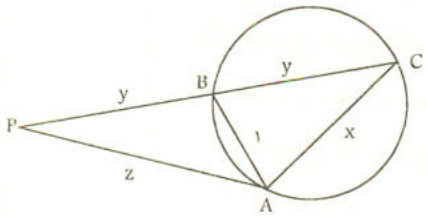
الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ هـ) ۱۲

۲) یک مربع به ۷ مستطیل برابر، مطابق شکل روبه‌رو تقسیم شده است. اگر محیط هر مستطیل برابر ۳۲ باشد، محیط مربع چقدر است؟



الف) ۵۶ ب) ۹۸ ج) ۱۱۲
د) ۱۹۶ هـ) ۲۲۴

۳) در شکل مقابل PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $AB = ۱$. طول AC چقدر است؟



الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) $\sqrt{۲}$
ج) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$ د) ۲
هـ) هیچ‌کدام

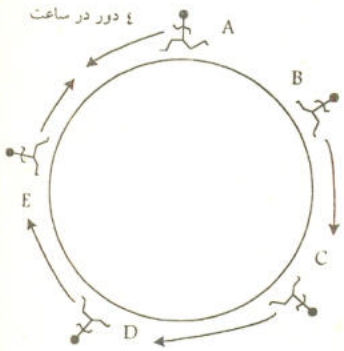
۴) در چند زیرمجموعه از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو برابر ۱۱ است؟

الف) ۳۲۰ ب) ۳۲۸ ج) ۳۴۱ د) ۳۵۲ هـ) ۳۶۴

۵) کدام ترتیب برای اعداد ۳۳۳۳ و ۶۲۲۲۲ و ۲۵۵۵۵ درست است؟

الف) $۲۵۵۵۵ > ۶۲۲۲۲ > ۳۳۳۳$ ب) $۲۵۵۵۵ > ۳۳۳۳ > ۶۲۲۲۲$
ج) $۳۳۳۳ > ۶۲۲۲۲ > ۲۵۵۵۵$ د) $۶۲۲۲۲ > ۳۳۳۳ > ۲۵۵۵۵$
هـ) $۶۲۲۲۲ > ۲۵۵۵۵ > ۳۳۳۳$

۶) در یک پیست دو میدانی دایره‌وار پنج دوندهٔ A، B، C، D و E به فاصله‌های مساوی روی پیست قرار گرفته‌اند (مانند شکل) و چوبی در دست دوندهٔ A قرار دارد. بعد از شروع مسابقه، دوندهٔ A با سرعت ۴ دور در ساعت (یعنی در هر ساعت چهار بار دور پیست را طی می‌کند) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و دونده‌های B، C، D و E با سرعت ۱ دور در ساعت در جهت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت می‌کنند.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

در ضمن در هر زمان که دو دونده از کنار هم عبور کنند و چوب در دست یکی از آن‌ها باشد، آن را به دیگری می‌دهد. بعد از گذشت ۱ ساعت چوب در دست کدام دونده است؟

الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

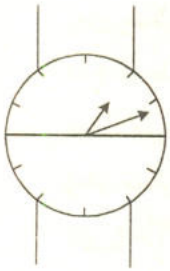
۷) سه دایره C_1، C_2 و C_3 به شعاع ۵ و به مراکز O_1، O_2 و O_3 طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که $O_1O_2 = ۶$، $O_1O_3 = ۸$ و O_1O_2 بر O_1O_3 عمود است. مساحت ناحیه‌ای از C_1 که با C_2 و C_3 تداخل ندارد، چقدر است؟

الف) ۱۰π ب) ۱۲π ج) ۲۴ د) ۴۸ ه) ۵۴

۸) جملهٔ ۱۳۸۰ـاُم در دنبالهٔ $۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴, ۵, \ldots$ برابر چند است؟

الف) ۵۰ ب) ۵۱ ج) ۵۲ د) ۵۳ ه) ۵۴

۹) یک ساعت عقربه‌ای جادویی در اختیار داریم. این ساعت دارای یک خط طلایی است که شمارهٔ ۳ را به ۹ وصل کرده است. این ساعت ویژگی جالبی دارد و آن این است که هرگاه خط طلایی نیم‌سازداخلی دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار شود، ساعت زنگ می‌زند. در حال حاضر ساعت ۱۲ : ۱ ظهر می‌باشد، تا ساعت ۱۲ : ۱ شب ساعت چند بار زنگ می‌زند؟



الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۱۰) گوییم دایرهٔ A بر دایرهٔ B عمود است، اگر یکدیگر را قطع کنند و مماس‌های A و B در نقطهٔ برخوردشان بر هم عمود باشند. اگر A و B بر هم عمود باشند و شعاع‌های A و B به ترتیب ۱٫۵ و ۲ باشد، فاصلهٔ مراکز A و B چقدر است؟

الف) ۱٫۵ ب) ۲٫۵ ج) ۳ د) ۳٫۵ ه) معلوم نیست

۱۱) در دبیرستان پسرانهٔ ابن‌سینا تعدادی دانش‌آموز تحصیل می‌کنند. اگر دو دانش‌آموز از این مدرسه دوست باشند، پدرهای این دو دانش‌آموز نیز با هم دوست هستند (دوستی یک رابطه دو طرفه است و هیچ‌کس با خودش دوست نیست!). کدام گزینه قطعاً درست است؟

الف) اگر حامد (یکی از دانش‌آموزان مدرسه) k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابوحامد (پدر حامد) حداقل k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.

ب) اگر حامد k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابوحامد حداکثر k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.

ج) اگر k دانش‌آموز از دبیرستان موجود باشند که هیچ دوتایی از آن‌ها دوست نباشند، آن‌گاه در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

د) اگر در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دوتایی دوست نباشند، آن‌گاه k دانش‌آموز وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ه) اگر حسام برادر کوچک‌تر حامد باشد، آن‌گاه حسام و حامد با هم دوست هستند (حسام و حامد هر دو در دبیرستان ابن‌سینا تحصیل می‌کنند).

۱۲) در میان اعداد صحیح از ۱ تا ۲۰۰۲ چند عدد مجموع رقم‌هایشان بر ۵ بخش‌پذیر است؟

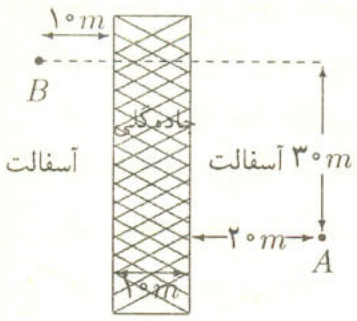
الف) ۳۹۷ ب) ۳۹۸ ج) ۳۹۹ د) ۴۰۰ ه) ۴۰۱

۱۳) در مثلث $\triangle ABC$ داریم: $\hat{C} = ۳۰^\circ$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $AB = ۱$. E و F به ترتیب روی اضلاع BC و AC طوری قرار دارند که $AC = ۶AF$ و $BC = ۴CE$. طول EF برابر است با

الف) ۱ ب) $\frac{\sqrt{۳۹}}{۶}$ ج) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

د) $\frac{۳}{۲}$ ه) قابل محاسبه نمی‌باشد.

۱۴) مطابق شکل مقابل، یک دونده در نقطهٔ A قرار دارد و می‌خواهد درکم‌ترین زمان ممکن خود را به B برساند. در مسیر حرکت او یک جادهٔ گِلی وجود دارد که باعث می‌شود سرعت حرکتش حین گذر از آن به نصف کاهش یابد. سرعت حرکت دونده روی آسفالت ۱۰ متر بر ثانیه است. کم‌ترین زمان ممکن را پیدا کنید که دونده می‌تواند خود را به نقطهٔ B برساند.



الف) $\sqrt{۲۶}$ ثانیه ب) $\sqrt{۲۰}$ ثانیه ج) ۵ ثانیه

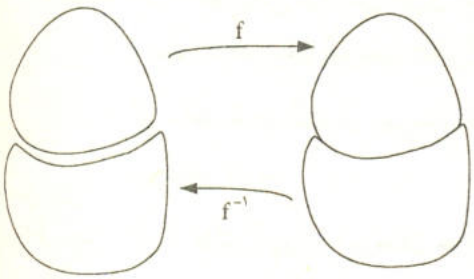
د) $\sqrt{۳۰}$ ثانیه ه) $\sqrt{۳۴}$ ثانیه

۱۵) یک صفحهٔ بی‌نهایت در بی‌نهایت داریم که خانه‌های آن را به صورت شطرنجی، سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. شعاع دایره‌ای که همهٔ نقاط محیط آن در خانه‌های سیاه قرار بگیرد حداکثر چقدر است؟ (طول هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی ۱ واحد است.)

الف) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ب) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ج) $\sqrt{\frac{۲}{۲}}$ د) $\frac{۳}{۲}$ ه) $\sqrt{\frac{۶}{۲}}$

۱۶) یک «تبدیل پیوسته» تبدیلی است که نقاطی که قبل از تبدیل نزدیک به هم هستند، بعد از تبدیل نیز نزدیک به هم بمانند. تبدیل f بین دو تکه خمیر را این طور در نظر می‌گیریم که لبه‌های دو تکه خمیر را به هم می‌چسباند و لذا تبدیل وارون آن، یعنی $f^{-۱}$، تکه خمیر بزرگ‌تر را به دو تکه خمیر جدا از هم تقسیم می‌کند.

در این صورت:



الف) f و $f^{-۱}$ هر دو پیوسته‌اند.

ب) f و $f^{-۱}$ هیچ‌کدام پیوسته نیستند.

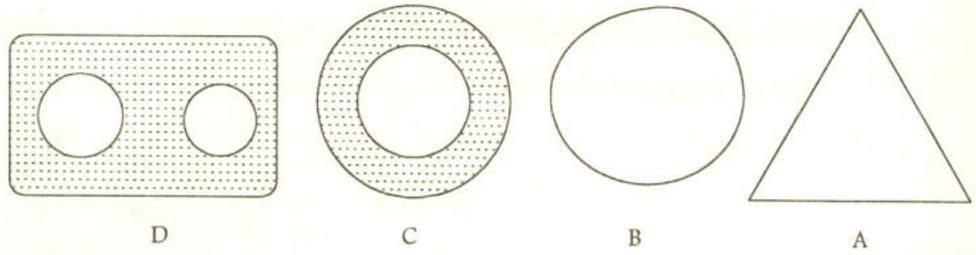
ج) f پیوسته است ولی $f^{-۱}$ پیوسته نیست.

د) f پیوسته نیست ولی $f^{-۱}$ پیوسته است.

ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق، درست نیست.

۱۷) اگر شکل A با تبدیلی پیوسته که وارون آن هم پیوسته است (در سؤال قبل تعریف شده است) قابل تبدیل به شکل B باشد، می‌گوییم این دو شکل «هم‌ریخت» هستند، اجسام زیر را در نظر بگیرید.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



(فرض کنید A و B از سیم نرم ساخته شده‌اند و C و D نیز از خمیر ساخته شده‌اند).
کدام گزینه درست است؟

الف) A و B هم‌ریختند ولی C و D هم‌ریخت نیستند.

ب) A و B هم‌ریختند و C و D نیز هم‌ریختند.

ج) A و B هم‌ریخت نیستند ولی C و D هم‌ریختند.

د) A و B هم‌ریخت نیستند و C و D نیز هم‌ریخت نیستند.

ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق درست نیست.

۱۸) مجموعهٔ $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x < y \ , \ ۲x^۲ - ۵xy + ۲y^۲ - x - y - ۱ = ۱۱\}$ چند عضوی است؟

الف) این مجموعه تهی است. ب) تک عضوی

ج) دو عضوی د) سه عضوی

ه) این مجموعه نامتناهی است.

۱۹) می‌گوییم زیرمجموعهٔ A از صفحه «ساختار دایره‌ای» دارد، اگر برای هر $x \in A$، دایرهٔ توپُری به مرکز x وجود داشته باشد که کاملاً در A قرار بگیرد؛ به طور مشابه، می‌گوییم B «ساختار مثلثی» دارد هرگاه برای هر $x \in B$، مثلث متساوی‌الاضلاع توپُری به مرکز ثقل x، داخل B وجود داشته باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

الف) دایرهٔ واحد، $D = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ < ۱\}$ ساختار مثلثی دارد.

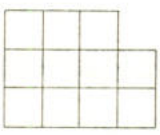
ب) نیم‌صفحهٔ $H = \{(x,y) | y > ۰\}$ ساختار دایره‌ای دارد.

ج) هر مجموعه‌ای که ساختار دایره‌ای داشته‌باشد، ساختار مثلثی دارد.

د) هر مجموعه‌ای که ساختار مثلثی داشته باشد، ساختار دایره‌ای دارد.

ه) می‌توان صفحه را به دو زیرمجموعهٔ ناتهی طوری تقسیم کرد که یکی ساختار دایره‌ای و دیگری ساختار مثلثی داشته باشد.

۲۰) در شکل روبه‌رو چند مستطیل دیده می‌شود؟
(توجه کنید که هر مربع یک مستطیل است!)

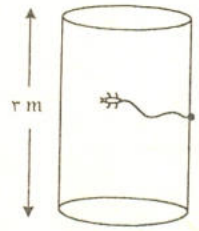


الف) ۴۰ ب) ۴۸ ج) ۵۰

د) ۵۶ ه) ۶۴

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۱) حشره‌ای را با نخی به طول ۱ متر به وسط یک استوانهٔ به ارتفاع ۳ متر و محیط قاعدهٔ $\sqrt{۳}$ متر، از بیرون بسته‌ایم! مساحت قسمتی از استوانه که حشره می‌تواند به آن برود، چقدر است؟



الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۲}{۳}\pi$
ب) π
ج) $\sqrt{۳}+\frac{۲}{۳}\pi$
د) $\pi+\sqrt{۳}$
ه) $۲\sqrt{۳}$

۲۲) عدد حقیقی x را «جالب» می‌گوییم اگر در بسط اعشاری آن، بعد از ممیز، هر عدد طبیعی ظاهر شده باشد. مثلاً عدد ۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲... که از پشت سرهم قرارگرفتن همهٔ اعداد طبیعی به وجود آمده، عددی جالب است. کدام یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ اعداد جالب صحیح نیست؟

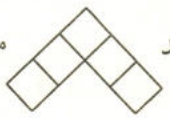
الف) در بسط اعشاری هر عدد جالب نامتناهی بار ۱۳۸۰ ظاهر می‌شود.

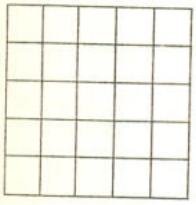
ب) هر عدد جالب گنگ است.

ج) اگر x و y دو عدد جالب باشند، $\frac{۱}{x}$ و xy هم جالب هستند.

د) اگر x جالب باشد، عدد y هم که از حذف ارقام x به صورت یکی در میان به دست می‌آید، جالب است.

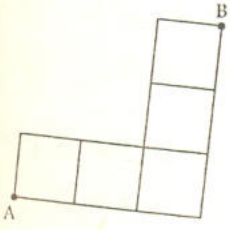
ه) اگر x جالب باشد، $x-۱$ هم جالب است.

۲۳) حداکثر چند شکل مانند  می‌توان در شکل روبه‌رو قرار داد، به نحوی که روی هم قرار نگیرند؟



الف) ۲
ب) ۳
ج) ۴
د) ۵
ه) ۶

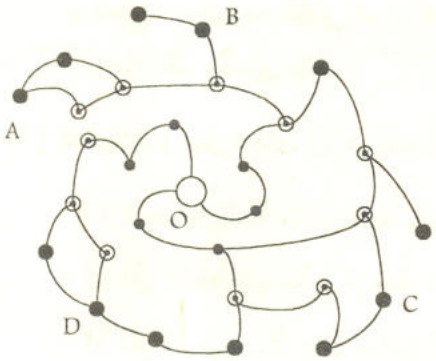
۲۴) یک متحرک در نقطهٔ A از شکل زیر قرار دارد. این متحرک می‌خواهد خود را به نقطهٔ B برساند. متحرک می‌تواند روی خطوط شبکه حرکت کند و از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به B برساند؟



الف) ۲۴
ب) ۲۸
ج) ۳۲
د) ۳۶
ه) ۴۰

۲۵) آرش و علی روی شکل زیر با یک مهره مشغول بازی هستند، هرکس در نوبت خود می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



- مهره را روی یال‌ها در جهت ساعت‌گرد هر تعداد خانه که بخواهد حرکت دهد.
- مهره را روی یال متصل به رأس مجاورکه در لایهٔ درونی است (در صورت وجود چنین رأسی) حرکت دهد (رؤوس هم لایه شبیه هم هستند).

هر کس مهره را به خانهٔ مرکزی (O) برساند، برنده بازی است. فرض کنید آرش بازی را شروع کند و هیچ‌کس دچار اشتباه نشود. با آغاز از کدام خانه آرش برنده بازی خواهد بود؟

الف) B, A ب) D, C ج) D, A د) A, C ه) D, B

۲۶) عدد n را خوب می‌نامیم اگر بتوان ارقام آن را به دو دسته چنان تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد. به عنوان مثال ۱۲۱ خوب است زیرا $۲ = ۱ + ۱$. فرض کنید x کوچک‌ترین عدد خوب باشد که $x + ۱$ نیز خوب است، در این صورت:

الف) $۳۰۰ \leqslant x < ۴۰۰$ ب) $۴۰۰ \leqslant x < ۵۰۰$

ج) $۵۰۰ \leqslant x < ۶۰۰$ د) $۶۰۰ \leqslant x < ۷۰۰$

ه) $۷۰۰ \leqslant x < ۸۰۰$

۲۷) اتومبیلی از شهر A به سمت شهر B در حرکت است و فاصلهٔ دو شهر ۱۰۰ کیلومتر است. حرکت اتومبیل این‌گونه است که وقتی در x کیلومتری شهر B قرار دارد با سرعت x کیلومتر بر ساعت در حرکت است. کدام گزینه درست است؟

الف) اتومبیل قبل از نیم ساعت ۵۰ کیلومتر اول را طی می‌کند.

ب) زمانی که اتومبیل ۵۰ کیلومتر آخر را طی می‌کند کم‌تر از ۲ ساعت است.

ج) زمانی که اتومبیل ۲۵ کیلومتر آخر را طی می‌کند کم‌تر از ۱ ساعت است.

د) زمان طی کردن ۲۵ کیلومتر سوم بیش‌تر از ۱ ساعت است.

ه) اتومبیل هیچ‌گاه به مقصد نمی‌رسد!

توجه:
بارم سؤال‌های ۲۸ الی ۳۰ دو برابر بارم بقیهٔ سؤال‌هاست (در نظر داشته باشید که نمره منفی این سؤال‌ها هم طبق همین قاعده محاسبه می‌شود).

در سه سؤال بعد منظور از «نقطه» عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{Z}^۲$ است، یعنی (m, n)هایی که m و n اعدادی صحیح هستند. زیرمجموعهٔ A از $\mathbb{Z}^۲$ را «خط» می‌نامیم اگر اولاً ناتهی باشد، ثانیاً اعداد صحیح a، b و c وجود داشته باشد که $a^۲ + b^۲ \neq ۰$ و $A = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^۲ | am + bn = c\}$. می‌گوییم دو خط A و B موازی‌اند، اگر $A \cap B = \varnothing$ یا $A = B$. اگر O یک نقطه و r یک عدد حقیقی نامنفی باشد، منظور از دایرهٔ به مرکز O و

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به شعاع r مجموعه نقاطی است که فاصله‌شان تا O برابر r است. خط A را بر دایرهٔ C مماس می‌گوییم، اگر $A \cap C$ تک عضوی باشد.

۲۸) کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) از هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط می‌گذرد.

۲) اگر x نقطه‌ای خارج از خط A باشد، دقیقاً یک خط وجود دارد که از x می‌گذرد و موازی A است.

۳) اگر A موازی B و B موازی C باشد، آن‌گاه A موازی C است.

۴) مجموعه نقاطی که از دو نقطه متمایز به یک فاصله‌اند، یک خط است.

الف) ۱، ۲ و ۳ ب) ۱ ج) ۲، ۳ و ۴ د) ۳ و ۴ ه) همهٔ عبارات

۲۹) کدام‌یک از مقادیر زیر می‌توانند تعداد نقاط یک دایره باشند؟

الف) ۷ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) بی‌نهایت ه) ب و ج

۳۰) با توجه به تعریف‌های بالا کدام گزینه درست است؟

الف) از هر نقطه خارج یک دایره دقیقاً دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

ب) از هر نقطه روی دایره بی‌نهایت مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

ج) دو دایره متمایز حداکثر ۴ مماس مشترک دارند.

د) از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می‌گذرد.

ه) با زیاد شدن شعاع، تعداد نقاط روی دایره افزایش می‌یابد.

فیلسوف و گیاه‌شناس

تمام کائنات را خدا آفریده و خداست که همواره آنها را حفظ و نگهداری می‌کند. هر قدر به مطالعه خود ادامه می‌دهم و در طبیعت و خاک و گیاه دقت می‌کنم، ایمانم به خدا فزونی می‌یابد و هر روز بیشتر از روز پیش به حیرت و ستایش در پیشگاه عظمتش زانو می‌زنم و سر تعظیم فرود می‌آورم.

اثبات وجود خدا، ص ۲۳۲ به نقل از کتاب اعترافات دانشمندان بزرگ جهان، ص ۲۱.

https://amoozz.ir/class/12

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ مسائل مرحله اول اولین المپیاد مقدماتی ریاضی، سال ۱۳۸۰

۱) گزینهٔ (ج) صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{مجموع ۶ عدد} = ۶ \times ۷ = ۴۲ \\ \text{مجموع ۴ عدد دیگر} = ۴ \times ۸ = ۳۲\end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع دو عدد کنارگذاشته شده} = ۴۲ - ۳۲ = ۱۰$$

۲) گزینهٔ (الف) صحیح است.

اگر طول ضلع مربع a باشد، محیط هر مستطیل برابر $۲(a + \frac{a}{۷})$ خواهد بود، بنابر این

$$۲(a + \frac{a}{۷}) = ۳۲ \Rightarrow \frac{۸}{۷}a = ۱۶ \Rightarrow a = ۱۴$$

لذا محیط مربع برابر $۴a = ۴ \times ۱۴ = ۵۶$ می‌باشد.

۳) گزینهٔ (ب) صحیح است.

از تشابه دو مثلث $\triangle PBA$ و $\triangle PAC$ داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{y}{z} = \frac{z}{۲y}$

بنابر این $x = \frac{z}{y} = \frac{۲y}{z}$ و در نتیجه $x^۲ = \frac{z}{y} \cdot \frac{۲y}{z} = ۲$، لذا $AC = x = \sqrt{۲}$.

۴) گزینهٔ (ج) صحیح است.

در چنین زیرمجموعه‌ای اگر کوچکترین عضو k باشد، بزرگ‌ترین عضو باید $k - ۱۱$ باشد و مابقی اعداد این زیرمجموعه هم باید زیرمجموعه‌ای از اعداد بین k و $k - ۱۱$ باشند. امّا تعداد اعداد بین k و $k - ۱۱$ برابر $۱۰ - ۲k = k - k - ۱ - ۱۱$ می‌باشد، لذا برای انتخاب یک زیرمجموعه از این اعداد و در نتیجه برای ساختن مجموعهٔ اصلی $۲^{۱۰-۲k}$ حالت خواهیم داشت.

حال دقت کنید که k می‌تواند از ۱ تا ۵ تغییر کند. بنابر این پاسخ مسأله برابر است با:

$$\sum_{k=۱}^{۵} ۲^{۱۰-۲k} = ۲^۸ + ۲^۶ + ۲^۴ + ۲^۲ + ۲^۰ = ۳۴۱$$

۵) گزینهٔ (ه) صحیح است.

$$۳^۳ < ۲^۵ < ۶^۲ \Rightarrow ۳^{۳\times۱۱۱۱} < ۲^{۵\times۱۱۱۱} < ۶^{۲\times۱۱۱۱}$$

$$\Rightarrow ۳^{۳۳۳۳} < ۲^{۵۵۵۵} < ۶^{۲۲۲۲}$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.
همان سؤال ۱۸ از المپیاد اصلی.

۷) گزینهٔ (د) صحیح است.
همان سؤال ۱۲ از المپیاد اصلی.

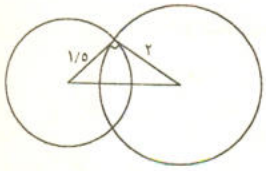
۸) گزینهٔ (د) صحیح است.
اگر جملهٔ ۱۳۸۰ـام را n بنامیم، در اینصورت:

$$۱+۲+\cdots+(n-۱)<۱۳۸۰\leqslant ۱+۲+\cdots+n \Rightarrow$$
$$\frac{n(n-۱)}{۲}<۱۳۸۰\leqslant\frac{n(n+۱)}{۲}$$

حال گزینه‌های مختلف را در این رابطه امتحان می‌کنیم. به ازای $n=۵۳$ این رابطه برقرار می‌شود.

۹) گزینهٔ (هـ) صحیح است.
همان سؤال ۹ از المپیاد اصلی.

۱۰) گزینهٔ (ب) صحیح است.
از آنجایی که خط عمود بر مماس در نقطهٔ تماس، از مرکز دایره می‌گذرد، لذا در دوایر عمود بر هم، مراکز دو دایره به همراه نقطه برخوردشان تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند.



بنابر این با استفاده از قضیه فیثاغورس فاصلهٔ مراکز دو دایره برابر خواهد بود با:

$$\sqrt{۱/۵^۲+۲^۲}=۲/۵$$

۱۱) گزینهٔ (د) صحیح است.
همان سؤال ۱۰ از المپیاد اصلی.

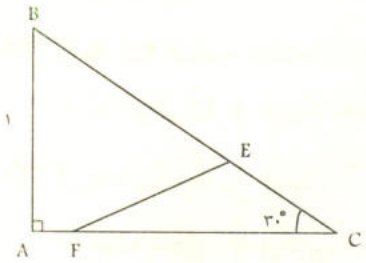
۱۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.
همهٔ رقم‌های یک عدد را ثابت نگه دارید و فقط یکان آن را از ۰ تا ۹ تغییر دهید. در اینصورت در بین ده عدد حاصله، دقیقاً دو عدد مجموع رقم‌هایشان بر ۵ بخش‌پذیر است. (چرا؟)
اعداد از ۰ تا ۱۹۹۹ را به صورت زیر به دسته‌های ۱۰تایی تقسیم می‌کنیم:

$$\{۰,۱,\ldots,۹\},\{۱۰,\ldots,۱۹\},\{۲۰,\ldots,۲۹\},\{۱۹۹۰,\ldots,۱۹۹۹\}$$

تعداد این دسته‌ها $=\frac{۲۰۰۰}{۱۰}=۲۰۰$ است و طبق آنچه در شروع کار گفتیم از هر دسته دقیقاً دو عدد مجموع رقم‌هایشان مضرب ۵ است. لذا در کل $۲\times ۲۰۰=۴۰۰$ تا از این اعداد دارای خاصیت گفته شده هستند، که البته یکی از این اعداد ۰ است. لذا در بیان اعداد از ۱ تا ۱۹۹۹، ۳۹۹ عدد مجموع ارقامشان مضرب ۵ است. حال از آنجایی که ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ جمع ارقامشان بر ۵ بخش‌پذیر نیست، پاسخ مسأله همان ۳۹۹ خواهد بود.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۳) گزینهٔ (ب) صحیح است.



$$CE = \frac{۱}{۴}BC = \frac{۱}{۴}(\frac{AB}{\sin ۳۰^\circ}) = \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۰/۵}) = \frac{۱}{۲}$$

$$CF = \frac{۵}{۶}AC = \frac{۵}{۶}(AB \cdot \cot ۳۰^\circ) = \frac{۵}{۶}(۱ \times \sqrt{۳}) = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

حال با استفاده از قضیه کسینوسها در مثلث $\triangle CEF$ خواهیم داشت:

$$EF^۲ = CE^۲ + CF^۲ - ۲CE \cdot CF \cdot \cos C$$
$$= (\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۵\sqrt{۳}}{۶})^۲ - ۲ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۵\sqrt{۳}}{۶} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۴} + \frac{۲۵}{۱۲} - \frac{۵}{۴} = \frac{۳ + ۲۵ - ۱۵}{۱۲}$$
$$= \frac{۱۳}{۱۲}$$

لذا $EF = \sqrt{\frac{۱۳}{۱۲}} = \sqrt{\frac{۳۹}{۳۶}} = \frac{\sqrt{۳۹}}{۶}$.

۱۴) پاسخ صحیح در بین گزینه‌ها موجود نمی‌باشد.
همان سؤال ۴ از المپیاد اصلی.

۱۵) گزینهٔ (الف) صحیح است.
همان سؤال ۱۳ از المپیاد اصلی.

۱۶) گزینهٔ (ج) صحیح است.
همان سؤال ۷ از المپیاد اصلی.

۱۷) گزینهٔ (الف) صحیح است.
همان سؤال ۸ از المپیاد اصلی.

۱۸) گزینهٔ (ب) صحیح است.

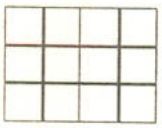
$$۲x^۲ - ۵xy + ۲y^۲ - x - y - ۱ = ۱۱ \Rightarrow$$
$$(۲x - y + ۱)(x - ۲y - ۱) = ۱۱ \Rightarrow$$
$$(y - ۲x - ۱)(۲y - x + ۱) = ۱۱ \Rightarrow \quad (\text{با توجه به اینکه } x < y)$$
$$\begin{cases} y - ۲x - ۱ = ۱ \\ ۲y - x + ۱ = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow x = ۲ \, , \, y = ۶$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

بنابر این، این مجموعه تک عضوی است.

۱۹) گزینهٔ (ه) صحیح است.
همان سؤال ۲۰ از المپیاد اصلی.

۲۰) گزینهٔ (ب) صحیح است.



اگر گوشه شکل را کامل کنیم، تعداد مستطیل‌های شکل حاصل برابر با $\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۲} = ۶۰$ خواهد بود، زیرا هر مستطیل مطابق شکل از تلاقی دو خط عمودی و دو خط افقی بوجود می‌آید.



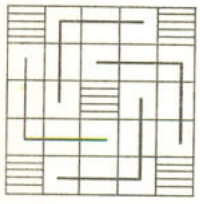
حال باید تعداد مستطیل‌هایی را که گوشه اضافه شده را دارند از ۶۰ کم کنیم. یک چنین مستطیلی باید دو خط عمودی و افقی کناری مستطیل را حتماً داشته باشد.

خط عمودی دوم آن ۴ حالت و خط افقی دوم آن ۳ حالت دارد و لذا تعداد این مستطیل‌ها برابر $۳ \times ۴ = ۱۲$ است. بنابر این تعداد مستطیل‌های خواسته شده برابر است با $۶۰ - ۱۲ = ۴۸$.

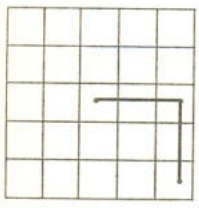
۲۱) گزینهٔ (الف) صحیح است.
همان سؤال ۱۶ از المپیاد اصلی.

۲۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.
همان سؤال ۱۴ از المپیاد اصلی.

۲۳) گزینهٔ (ج) صحیح است.



مطابق شکل می‌توان ۴ عدد از این قطعات را در این جدول قرار داد، بدون اینکه همدیگر را قطع کنند. حال نشان می‌دهیم برای ۵ قطعه این کار ممکن نیست. زیرا در اینصورت این ۵ قطعه باید کل ۲۵ خانهٔ جدول را بپوشانند، حال قطعه‌ای را در نظر بگیرید که خانهٔ وسطی را پوشانده است و مثلاً یک بازوی آن در سطر سوم قرار دارد. (اگر در ستون سوم بود، شکل را دوران می‌دهیم.) بنابر این از این سطر سه خانه اشغال می‌شود. پس در این سطر دو خانه خالی می‌ماند. حال توجه کنید هر قطعه از قطعات فوق باید سطر سوم را قطع کند ولی ۴ قطعهٔ دیگر داریم و دو خانهٔ خالی در سطر سوم. این تناقض نشان می‌دهد که اگر قرار باشد با یک قطعه خانهٔ میانی جدول ۵×۵ را بپوشانیم، نمی‌توانیم بیش از ۳ قطعه در این جدول قرار دهیم.



۲۴) گزینهٔ (ب) صحیح است.
همان سؤال ۱۱ از المپیاد اصلی.

۲۵) گزینهٔ (الف) صحیح است.
همان سؤال ۱۷ از المپیاد اصلی.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۶) گزینهٔ (ج) صحیح است.

اولاً دقت کنید که اگر x عددی خوب باشد، جمع ارقام x زوج خواهد بود. پس برای اینکه $x+1$ هم خوب باشد، رقم یکان x باید ۹ باشد. از روی گزینه‌ها می‌توان فهمید که x باید عددی سه رقمی باشد. پس x باید یکی از اعداد خوبِ ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹، ۴۵۹، ۵۴۹، ۶۳۹، ۷۲۹، ۸۱۹ یا ۹۰۹ باشد. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که از بین این اعداد تنها $۵۴۹+۱=۵۵۰$ عددی خوب است. بنابر این $x=۵۴۹$ و در نتیجه گزینهٔ (ج) صحیح است.

۲۷) گزینهٔ (ه) صحیح است.

همان سؤال ۱۹ از المپیاد اصلی.

۲۸) گزینهٔ (ب) صحیح است.

همان سؤال ۲۳ از المپیاد اصلی.

۲۹) گزینهٔ (ج) صحیح است.

همان سؤال ۲۴ از المپیاد اصلی.

۳۰) گزینهٔ (ب) صحیح است.

همان سؤال ۲۵ از المپیاد اصلی.

ژول لابوم JULES LABEUME

خاورشناس فرانسوی

قرآن برای همیشه زنده است و هر کس از مردم جهان به قدر درک و استعداد خود از آن بهره برمی‌دارد.

قرآن و کتاب‌های دیگر آسمانی ص ۲۹۷

به نقل از کتاب اعترافات دانشمندان بزرگ جهان ص ۵۸.

@sampaadia amoozz.ir ی دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤالات مرحلهٔ اول بیستمین المپیاد ریاضی، سال ۱۳۸۰

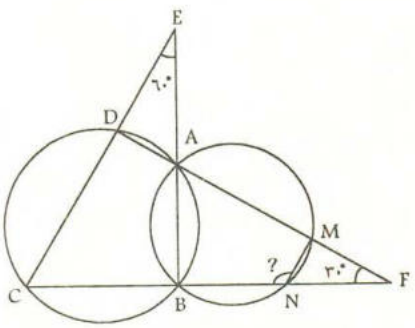
۱) به ازای چند عدد طبیعی n، $۳^n + ۳^{۱۱} + ۳^{۳۷}$ مربع کامل است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) بی‌نهایت

۲) به ازای چند عدد طبیعی n معادلهٔ $n^a + n^b + n^c = n^d$ در اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت

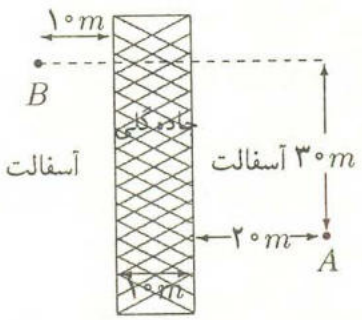
۳) در چهارضلعی محاطی $ABCD$، E و F به ترتیب محل برخورد AB با CD و AD با BC می‌باشند. دایره‌ای دلخواه از A و B می‌گذرانیم تا AF و BF را به ترتیب در M و N قطع کند. اگر $A\hat{F}B = ۳۰^\circ$ و $A\hat{E}D = ۶۰^\circ$، آنگاه $M\hat{N}B$ برابر است با:



الف) ۹۰° ب) ۱۲۰° ج) ۱۳۵°

د) ۱۰۵° ه) ۱۵۰°

۴) مطابق شکل مقابل، یک دونده در نقطهٔ A قرار دارد و می‌خواهد درکم‌ترین زمان ممکن خود را به B برساند.



در مسیر حرکت او یک جادهٔ گِلی وجود دارد که باعث می‌شود سرعت حرکتش حین گذر از آن به نصف کاهش یابد. سرعت حرکت دونده روی آسفالت ۱۰ متر بر ثانیه است. کم‌ترین زمان ممکن را پیدا کنید.

الف) $\sqrt{۲۶}$ ثانیه ب) $\sqrt{۲۰}$ ثانیه ج) ۵ ثانیه

د) $\sqrt{۳۰}$ ثانیه ه) $\sqrt{۳۴}$ ثانیه

۵) با رقمهای ۱ و ۲ حداکثر چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت، طوری که هر دو عدد حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند؟

الف) ۱۶ ب) ۱۷ ج) ۱۸ د) ۱۹ ه) ۲۰

۶) a و b دو عدد حقیقی مثبت و متمایز هستند، به‌طوری که $a = ۱ + \sqrt[۳]{۶a - ۲}$ و $b = ۱ + \sqrt[۳]{۶b - ۲}$. ab برابر با چه مقداری است؟

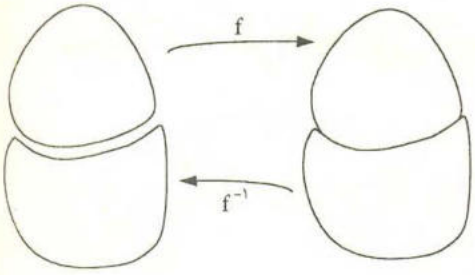
الف) $\sqrt[۳]{۶}$ ب) ۴ ج) ۱ د) ۲ ه) $\sqrt{۲}$

۷) یک «تبدیل پیوسته» تبدیلی است که نقاطی که قبل از تبدیل نزدیک به هم هستند، بعد از تبدیل نیز نزدیک به هم بمانند. تبدیل f بین دو تکه خمیر را این طور در نظر می‌گیریم که لبه‌های دو تکه خمیر را به هم می‌چسباند و لذا تبدیل وارون آن، یعنی $f^{-۱}$، تکه خمیر بزرگ‌تر را به دو تکه خمیر جدا از هم تقسیم می‌کند.

در این صورت:

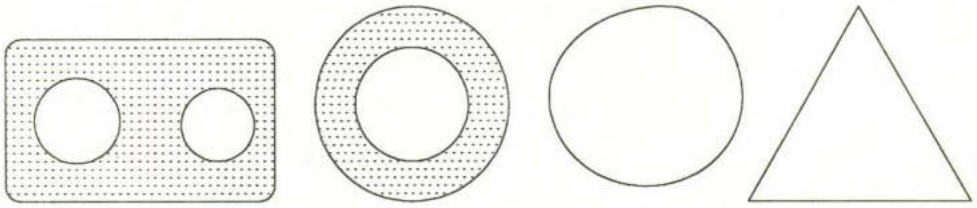
الف) f و $f^{-۱}$ هر دو پیوسته‌اند.

@sampaadia amoozz.ir ی دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



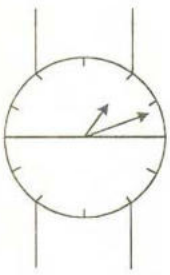
ب) f و f^{-1} هیچ‌کدام پیوسته نیستند.
ج) f پیوسته است ولی f^{-1} پیوسته نیست.
د) f پیوسته نیست ولی f^{-1} پیوسته است.
ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق، درست نیست.

۸) اگر شکل A با تبدیلی پیوسته که وارون آن هم پیوسته است (در سؤال قبل تعریف شده است) قابل تبدیل به شکل B باشد، می‌گوییم این دو شکل «هم‌ریخت» هستند، اجسام زیر را در نظر بگیرید.



(فرض کنید A و B از سیم نرم ساخته شده‌اند و C و D نیز از خمیر ساخته شده‌اند).
کدام گزینه درست است؟

الف) A و B هم‌ریختند ولی C و D هم‌ریخت نیستند.
ب) A و B هم‌ریختند و C و D نیز هم‌ریختند.
ج) A و B هم‌ریخت نیستند ولی C و D هم‌ریختند.
د) A و B هم‌ریخت نیستند و C و D نیز هم‌ریخت نیستند.
ه) هیچ‌کدام از نتیجه‌گیری‌های فوق درست نیست.



۹) یک ساعت عقربه‌ای جادویی در اختیار داریم. این ساعت دارای یک خط طلایی است که شمارهٔ ۳ را به ۹ وصل کرده است. این ساعت ویژگی جالبی دارد و آن این است که هرگاه خط طلایی نیم‌سازداخلی دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار شود، ساعت زنگ می‌زند. در حال حاضر ساعت ۱۲ : ۱ ظهر می‌باشد، تا ساعت ۱۲ : ۱ شب ساعت چند بار زنگ می‌زند؟

الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۱۰) در دبیرستان پسرانهٔ ابن‌سینا تعدادی دانش‌آموز تحصیل می‌کنند. اگر دو دانش‌آموز از این مدرسه دوست باشند، پدرهای این دو دانش‌آموز نیز با هم دوست هستند (دوستی یک رابطه دو طرفه است و هیچ‌کس با خودش دوست نیست!). کدام گزینه قطعاً درست است؟

الف) اگر حامد (یکی از دانش‌آموزان مدرسه) k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابوحامد (پدر حامد) حداقل k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.
ب) اگر حامد k دوست در دبیرستان داشته باشد، آن‌گاه ابوحامد حداکثر k دوست در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان دارد.

https://amoozz.ir/class/

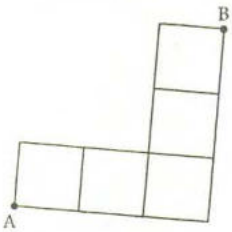
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ج) اگر k دانش‌آموز از دبیرستان موجود باشند که هیچ دوتایی از آن‌ها دوست نباشند، آن‌گاه در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

د) اگر در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دوتایی دوست نباشند، آن‌گاه k دانش‌آموز وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

ه) اگر حسام برادر کوچک‌تر حامد باشد، آن‌گاه حسام و حامد با هم دوست هستند (حسام و حامد هر دو در دبیرستان ابن‌سینا تحصیل می‌کنند).

۱۱) یک متحرک در نقطهٔ A از شکل زیر قرار دارد. این متحرک می‌خواهد خود را به نقطهٔ B برساند. متحرک می‌تواند روی خطوط شبکه حرکت کند و از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به B برساند؟



الف) ۲۴ ب) ۲۸
ج) ۳۲ د) ۳۶
ه) ۴۰

۱۲) سه دایره C_1، C_2 و C_3 به شعاع ۵ و به مراکز O_1، O_2 و O_3 طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که $O_1O_2 = 6$، $O_1O_3 = 8$ و O_1O_2 بر O_1O_3 عمود است. مساحت ناحیه‌ای از C_1 که با C_2 و C_3 تداخل ندارد، چقدر است؟

الف) 10π ب) 12π ج) ۲۴ د) ۴۸ ه) ۵۴

۱۳) یک صفحهٔ بی‌نهایت در بی‌نهایت داریم که خانه‌های آن را به صورت شطرنجی، سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. شعاع دایره‌ای که همهٔ نقاط محیط آن در خانه‌های سیاه قرار بگیرد حداکثر چقدر است؟ (طول هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی ۱ واحد است.)

الف) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{3}{2}$ ه) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۱۴) عدد حقیقی x را «جالب» می‌گوییم اگر در بسط اعشاری آن، بعد از ممیز، هر عدد طبیعی ظاهر شده باشد. مثلاً عدد ۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲... که از پشت سرهم قرارگرفتن همهٔ اعداد طبیعی به وجود آمده، عددی جالب است. کدام یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ اعداد جالب صحیح نیست؟

الف) در بسط اعشاری هر عدد جالب نامتناهی بار ۱۳۸۰ ظاهر می‌شود.

ب) هر عدد جالب گنگ است.

ج) اگر x و y دو عدد جالب باشند، $\frac{1}{x}$ و xy هم جالب هستند.

د) اگر x جالب باشد، عدد y هم که از حذف ارقام x به صورت یکی در میان به دست می‌آید، جالب است.

ه) اگر x جالب باشد، $x - 1$ هم جالب است.

۱۵) فرض کنید $\triangle ABC$ مثلثی در صفحهٔ مختصات باشد که مختصات رؤوس آن $A = (x_1, y_1)$، $B = (x_2, y_2)$ و $C = (x_3, y_3)$ باشد. در این صورت مساحت مثلث $\triangle ABC$ از رابطهٔ $\frac{1}{2}|y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)|$ به دست می‌آید. با دانستن این مطلب کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ توجه کنید منظور از نقاط شبکه‌ای، نقاطی از صفحهٔ مختصات است که مختصات آن‌ها صحیح است.

sampaadia amoozz.ir دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) در صفحه می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۵ با رؤوس شبکه‌ای رسم کرد.

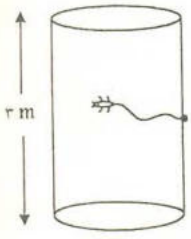
ب) یک مربع ۳×۳ را می‌توان به ۲۰ مثلث با رؤوس شبکه‌ای افراز کرد.

ج) نقطه‌ای شبکه‌ای درون متوازی‌الاضلاعی با مختصات رؤوس $(۰,۰)$، $(۱,۱)$، $(۱۰۰۰,۱۰۰۱)$ و $(۱۰۰۱,۱۰۰۲)$ وجود دارد.

د) مساحت هر متوازی‌الاضلاع با رؤوس شبکه‌ای صحیح است.

ه) یک مستطیل ۷×۴ را می‌توان به ۲۰ متوازی‌الاضلاع و ۲۰ مثلث با رؤوس شبکه‌ای افراز کرد.

۱۶) حشره‌ای را با نخی به طول ۱ متر به وسط یک استوانهٔ به ارتفاع ۳ متر و محیط قاعدهٔ $\sqrt{۳}$ متر، از بیرون بسته‌ایم! مساحت قسمتی از استوانه که حشره می‌تواند به آن برود، چقدر است؟



الف) $\frac{۲}{۳}\pi + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

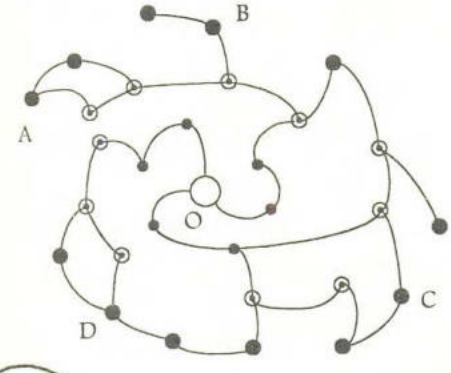
ب) π

ج) $\frac{۲}{۳}\pi + \sqrt{۳}$

د) $\pi + \sqrt{۳}$

ه) $۲\sqrt{۳}$

۱۷) آرش و علی روی شکل زیر با یک مهره مشغول بازی هستند، هر کس در نوبت خود می‌تواند یکی از دو کار زیر را انجام دهد.

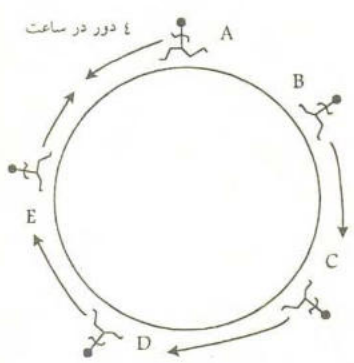


- مهره را روی یال‌ها در جهت ساعت‌گرد هر تعداد خانه که بخواهد حرکت دهد.
- مهره را روی یال متصل به رأس مجاور که در لایهٔ درونی است (در صورت وجود چنین رأسی) حرکت دهد (رؤوس هم لایه شبیه هم هستند).

هر کس مهره را به خانهٔ مرکزی (O) برساند، برنده بازی است. فرض کنید آرش بازی را شروع کند و هیچ‌کس دچار اشتباه نشود. با آغاز از کدام خانه آرش برنده بازی خواهد بود؟

الف) B, A ب) D, C ج) D, A د) A, C ه) D, B

۱۸) در یک پیست دو میدانی دایره‌وار پنج دوندهٔ A، B، C، D و E به فاصله‌های مساوی روی پیست قرار گرفته‌اند (مانند شکل) و چوبی در دست دوندهٔ A قرار دارد. بعد از شروع مسابقه، دوندهٔ A با سرعت ۴ دور در ساعت (یعنی در هر ساعت چهار بار دور پیست را طی می‌کند) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و دونده‌های B، C، D و E با سرعت ۱ دور در ساعت در جهت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت می‌کنند. در ضمن در هر زمان که دو دونده از کنار هم عبور کنند و چوب در دست یکی از آن‌ها باشد، آن را به دیگری می‌دهد. بعد از گذشت ۱ ساعت چوب در دست کدام دونده است؟



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) A ب) B ج) C د) D ه) E

۱۹) اتومبیلی از شهر A به سمت شهر B در حرکت است و فاصلهٔ دو شهر ۱۰۰ کیلومتر است. حرکت اتومبیل این‌گونه است که وقتی در x کیلومتری شهر B قرار دارد با سرعت x کیلومتر بر ساعت در حرکت است. کدام گزینه درست است؟

الف) اتومبیل قبل از نیم ساعت ۵۰ کیلومتر اول را طی می‌کند.

ب) زمانی که اتومبیل ۵۰ کیلومتر آخر را طی می‌کند کم‌تر از ۲ ساعت است.

ج) زمانی که اتومبیل ۲۵ کیلومتر آخر را طی می‌کند کم‌تر از ۱ ساعت است.

د) زمان طی کردن ۲۵ کیلومتر سوم بیش‌تر از ۱ ساعت است.

ه) اتومبیل هیچ‌گاه به مقصد نمی‌رسد!

۲۰) می‌گوییم زیرمجموعهٔ A از صفحه «ساختار دایره‌ای» دارد، اگر برای هر $x \in A$، دایرهٔ توپُری به مرکز x وجود داشته باشد که کاملاً در A قرار بگیرد؛ به طور مشابه، می‌گوییم B «ساختار مثلثی» دارد هرگاه برای هر $x \in B$، مثلث متساوی‌الاضلاع توپُری به مرکز ثقل x، داخل B وجود داشته باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

الف) دایرهٔ واحد، $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 < 1\}$ ساختار مثلثی دارد.

ب) نیم‌صفحهٔ $H = \{(x,y)|y > 0\}$ ساختار دایره‌ای دارد.

ج) هر مجموعه‌ای که ساختار دایره‌ای داشته‌باشد، ساختار مثلثی دارد.

د) هر مجموعه‌ای که ساختار مثلثی داشته باشد، ساختار دایره‌ای دارد.

ه) می‌توان صفحه را به دو زیرمجموعهٔ ناتهی طوری تقسیم کرد که یکی ساختار دایره‌ای و دیگری ساختار مثلثی داشته باشد.

۲۱) در مثلث $\triangle ABC$ نقاط P و Q درون مثلث، دارای این خاصیت هستند که

$$S(\triangle PAC) = \frac{1}{2}S(\triangle PAB) = \frac{1}{3}S(\triangle PBC)$$
$$S(\triangle QAB) = \frac{1}{2}S(\triangle QBC) = \frac{1}{3}S(\triangle QAC)$$

اگر پاره‌خط PQ ضلع AB را در F قطع کند، مطلوبست محاسبهٔ $\frac{AF}{FB}$ (منظور از $S(\triangle XYZ)$ مساحت مثلث $\triangle XYZ$ است).

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۲) حداکثر چند عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ می‌توان انتخاب کرد که هیچ‌کدام از آن‌ها حاصل ضرب بقیه‌شان را عاد نکند؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

توجه:
بارم سؤال‌های ۲۳ الی ۳۰ دو برابر بارم بقیهٔ سؤال‌هاست
(در نظر داشته باشید که نمره منفی این سؤال‌ها هم طبق همین قاعده محاسبه می‌شود).

https://amoozz.ir/class/12

sampaadia amoozz.ir ی دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

در سه سؤال بعد منظور از «نقطه» عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{Z}^2$ است، یعنی (m,n)هایی که m و n اعدادی صحیح هستند. زیرمجموعهٔ A از $\mathbb{Z}^2$ را «خط» می‌نامیم اگر اولاً ناتهی باشد، ثانیاً اعداد صحیح a، b و c وجود داشته باشد که $a^2+b^2 \neq 0$ و $A=\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 | am+bn=c\}$. می‌گوییم دو خط A و B موازی‌اند، اگر $A\cap B=\varnothing$ یا $A=B$. اگر O یک نقطه و r یک عدد حقیقی نامنفی باشد، منظور از دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r مجموعه نقاطی است که فاصله‌شان تا O برابر r است. خط A را بر دایرهٔ C مماس می‌گوییم، اگر $A\cap C$ تک عضوی باشد.

۲۳) کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) از هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط می‌گذرد.

۲) اگر x نقطه‌ای خارج از خط A باشد، دقیقاً یک خط وجود دارد که از x می‌گذرد و موازی A است.

۳) اگر A موازی B و B موازی C باشد، آن‌گاه A موازی C است.

۴) مجموعه نقاطی که از دو نقطه متمایز به یک فاصله‌اند، یک خط است.

الف) ۱، ۲ و ۳ ب) ۱ ج) ۲، ۳ و ۴ د) ۳ و ۴ ه) همهٔ عبارات

۲۴) کدام‌یک از مقادیر زیر می‌توانند تعداد نقاط یک دایره باشند؟

الف) ۷ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) بی‌نهایت ه) ب و ج

۲۵) با توجه به تعریف‌های بالا کدام گزینه درست است؟

الف) از هر نقطه خارج یک دایره دقیقاً دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

ب) از هر نقطه روی دایره بی‌نهایت مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

ج) دو دایره متمایز حداکثر ۴ مماس مشترک دارند.

د) از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می‌گذرد.

ه) با زیاد شدن شعاع، تعداد نقاط روی دایره افزایش می‌یابد.

۲۶) ۱۷۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، بزرگ‌ترین گردهمایی نقاشان برجسته در شهر بلاف‌بلوف افتتاح شد. صدها نفر از همهٔ نقاط راه شیری جمع شده بودند. برای مراسم افتتاحیه، سرگرمی‌ای تدارک دیده شده بود که به این صورت اجرا می‌شد:

ابتدا یک نفر، یک «شکل» دلخواه روی تابلو می‌کشید. منظور از «شکل»، همهٔ نقاط درون و روی یک منحنی بسته است (که خودش را قطع نکند). سپس نفر دوم باید شکلی روی همان تابلو بکشد که حتماً شامل تعدادی نقطهٔ جدید بشود (این شکل ممکن است با شکل‌های قبلی اشتراک داشته باشد یا نداشته باشد). به همین ترتیب هر کس به نوبت باید شکلی بکشد که شامل تعدادی نقطهٔ جدید (نقاطی که در هیچ یک از شکل‌های قبلی نیامده باشد) بشود. زیر تابلو، شکل‌های کشیده شده در آن ـ بدون این که ترتیب کشیده شدنِ آن‌ها ذکر شود ـ نام برده می‌شود.



ممکن است کسی از روی خط‌های شکل‌های قبلی دوباره بکشد. ولی هیچ‌گاه دو شکل بر هم منطبق نداریم. مثلاً تابلوی روبه‌رو توسط چهار نقاش بزرگ کشیده شد و در پایان مراسم به قیمت ۱۰۰۰۰۰ بلوفی (واحد پول بلاف‌بلوف) به فروش رفت. در ابتدا، امین مثلث $\triangle DEF$ را کشید، بعد سیامک چهارضلعی $BEFC$ را کشید، پس از آن احسان مثلث $\triangle ABC$ را کشید و در نهایت ایمان منحنی G را رسم کرد. توجه کنید که ترتیب نقاشی مهم است. مثلاً امکان نداشت اول احسان مثلث $\triangle ABC$

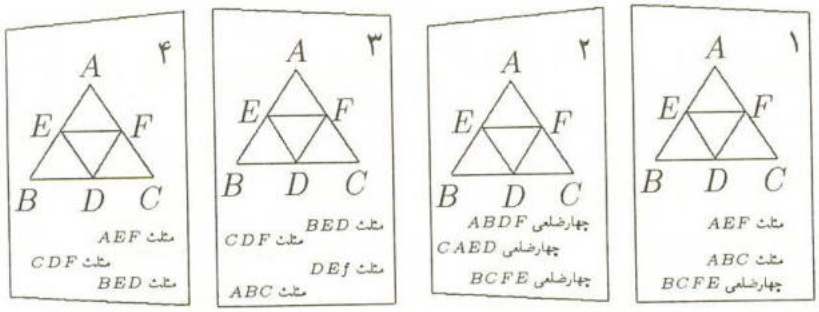
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

را بکشد و بعد سیامک بخواهد چهارضلعی $BEFC$ را بکشد. چون در آن صورت شکل سیامک نقطهٔ جدیدی نسبت به نقاط قبلی نداشت. بعدها در تاریخ هر n شکل که امکان داشته باشد در این مراسم کشیده شده باشند، یک مَنگول نامیده شد!

حمید ادعا می‌کند تابلوهای زیر را در پایان همان مراسم خریداری کرده است.

کدام تابلوها قطعاً تقلّبی‌اند؟ (به عبارت دیگر کدام‌ها مَنگول نیستند؟)

الف) ۲ و ۱ ب) ۳ و ۱ ج) ۴ و ۱ د) ۳ و ۲ ه) ۴ و ۲



۲۷) مردی راست‌گو از فرامفیا آمده است و اصوات نامفهومی از دهانش خارج می‌شود. مترجم او می‌گوید: «من درست نمی‌فهمم چه می‌گوید، ولی مطمئنم منظور او یکی از این جملات است:

۱) تابلوی من شامل تعدادی شکل است که همگی با انتقال از روی یکدیگر به دست می‌آیند.

۲) تابلوی من شامل تعدادی شکل هم‌نهشت است (شکل‌های قابل انطباق با هم).

۳) تابلوی من شامل تعدادی دایره است.

۴) در تابلوی من شکلی هست که زیرمجموعهٔ اجتماع بقیهٔ شکل‌ها نیست.»

اگر کدام جمله را گفته باشد می‌توان مطمئن بود که این تابلو مَنگول است؟

الف) ۲ و ۱ ب) ۳ و ۱ ج) ۴ و ۱ د) ۳ و ۲ ه) ۴ و ۲

۲۸) دو نفر از برگزارکنندگان مراسم تصمیم می‌گیرند با یکی از مهمان خارجی ـ و ناآشنا به قوانین ـ شوخی کنند. به همین دلیل وقتی نحوهٔ کشیده شدن تابلوها را توضیح می‌دادند، ترتیب کشیده شدن را معکوس می‌گفتند (مثلاً اگر به ترتیب شکل‌های $F_1, F_2, \ldots, F_n$ کشیده شده بود، به او می‌گفتند: ابتدا شکل F_n رسم شده، بعد شکل F_{n-1}، ... ، و در نهایت شکل F_1). برای این که همهٔ تابلوها را به این شکل توضیح بدهند و قضیه لو نرود، آن‌ها باید قانونِ سرگرمی را به چه صورت برای مهمانان خارجی بیان کنند؟

الف) هر کس باید شکلی بکشد که شامل تعدادی نقطهٔ جدید بشود (نقاطی که در شکل‌های قبل نیامده)

ب) هر کس باید شکلی بکشد که شامل کلّ نقاط یکی از شکل‌های قبلی نشود.

ج) هر کس باید شکلی بکشد که زیرمجموعهٔ اجتماع شکل‌های قبلی باشد.

د) هر کس باید شکلی بکشد که از اجتماع آن با k تا از شکل‌های قبل، اجتماع $k+1$ تا از شکل‌های قبلی پوشانده نشود.

ه) هیچ‌کدام

@sampaadia amoozz.ir ی دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۹) دو تابلوی تقلّبی که در هر کدام ۱۰۰۰۰ شکل رسم شده است، داریم. هر کس نظری می‌دهد:
بهزاد تابلوی ۱ را ندیده و می‌گوید: در این تابلو می‌توان ۱۰ شکل انتخاب کرد که مَنگول باشند.
امید تابلوی ۲ را دیده و می‌گوید: در این تابلو می‌توان ۲۰ شکل انتخاب کرد که مَنگول باشند.
کسری تابلوی ۲ را دیده و می‌گوید: در این تابلو هیچ ۲۱ شکلی تشکیل یک مَنگول نمی‌دهند.
کدام گزاره بهترین نتیجه‌گیری است؟

الف) بهزاد حتماً راست می‌گوید.

ب) ممکن است امید و کسری هر دو راست بگویند.

ج) ممکن است امید و کسری هر دو دروغ بگویند.

د) الف و ب

ه) الف و ج

۳۰) یاسر و مرتضی که در همهٔ جنبه‌های زندگی ـ حتّی نفس کشیدن ـ سعی می‌کنند با هم رقابت کنند، با دیدن مراسم بین خودشان یک مسابقه ترتیب می‌دهند. به این ترتیب که ابتدا یکی از آن دو شکلی را می‌کشد. سپس نفر دیگر شکل دیگری را می‌کشد. به همین ترتیب هر کس در نوبت خود یک شکل می‌کشد. اولین کسی که بتواند شکلی بکشد که باعث شود همهٔ شکل‌ها غیر مَنگول شوند، برنده است.
فرض کنید تابلوشان از هر طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد.

الف) نفر اول می‌تواند همیشه برنده شود.

ب) نفر دوم می‌تواند همیشه برنده شود.

ج) اگر هر دو خوب بازی کنند، تا آخر دنیا کسی برنده نمی‌شود.

د) بعد از ۲۸ حرکت بازی تمام می‌شود.

ه) یاسر می‌تواند همیشه برنده شود.

دیتریشی DIETERCI
اسلام‌شناس آلمانی
همین علوم و معارف مسلمین بود که اروپا را در قرن دهم میلادی جلو برد همان علومی است که سرچشمه آنها قرآن کریم بود و اروپا از این حیث مدیون اسلام است.
اسلام از نظر دانشمندان غرب ص ۴
به نقل از کتاب اعترافات دانشمندان بزرگ جهان ص ۶۲

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ مسائل مرحله اول بیستمین المپیاد ریاضی، سال ۱۳۸۰

۱) گزینهٔ (الف) صحیح است.

اگر $n \geqslant ۷$ باشد، آنگاه $۳^n + ۳^{۱۱} + ۳^۷ = ۳^۷(۱ + ۳^۴ + ۳^{n-۷})$ و در نتیجه توان ۳ در این عبارت عددی فرد خواهد بود و لذا این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد. پس $n < ۷$.

حال با توجه به اینکه $۳^n + ۳^{۱۱} + ۳^۷ = ۳^n(۳^{۷-n} + ۳^{۱۱-n} + ۱)$ نتیجه می‌گیریم که n باید عددی زوج باشد. امّا در این صورت $(-۱)^n + ۱ - ۱ - \overset{۴}{\equiv} ۳^n + ۳^{۱۱} + ۳^۷$ در حالی که باقیمانده یک عدد مربع کامل بر ۴ نمی‌تواند برابر -۱ باشد. بنابر این در حالت $n < ۷$ هم این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد.

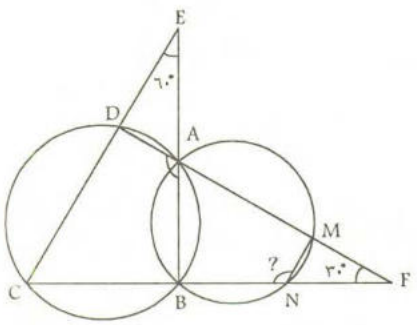
۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.

ابتدا روشن است که d باید از هر سه عدد a و b و c بزرگ‌تر باشد. بنابر این

$$n^d = n^a + n^b + n^c \leqslant n^{d-۱} + n^{d-۱} + n^{d-۱} = ۳n^{d-۱} \Rightarrow n \leqslant ۳ \Rightarrow n = ۳ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۱$$

واضح است که $n \neq ۱$. مثال‌های سادهٔ $۲^۳ = ۲^۲ + ۲ + ۲$ و $۳^۲ = ۳ + ۳ + ۳$ نشان می‌دهند که به ازای $n = ۲$ و $n = ۳$ معادلهٔ مذکور جواب دارد.

۳) گزینهٔ (ج) صحیح است.



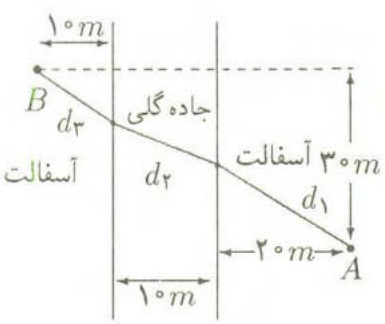
از آنجایی که چهارضلعی $ABNM$ محاطی است، لذا $\angle MNB = \angle BAD$. با جمع زدن زوایای دو مثلث $\triangle ECB$ و $\triangle FCD$ بدست می‌آوریم:

$$۲\hat{C} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{D} + \hat{B} = ۳۶۰^\circ$$

امّا $\hat{E} + \hat{F} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$، بنابر این $\hat{C} = ۴۵^\circ$ و از آنجا $\angle BAD = ۱۸۰^\circ - ۴۵ = ۱۳۵^\circ$.

۴) پاسخ صحیح در بین گزینه‌ها موجود نمی‌باشد.

همهٔ گزینه‌ها را رد می‌کنیم.



فرض کنید دونده مطابق شکل پس از طی سه تکهٔ $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ از A به B برسد. زمانی که لازم دارد برابر است با:

$$t = \frac{d_۱}{۱۰} + \frac{d_۲}{۵} + \frac{d_۳}{۱۰} = \frac{d_۱ + d_۲ + d_۳}{۱۰} + \frac{d_۲}{۱۰} > \frac{AB}{۱۰} + \frac{۱۰}{۱۰} = \frac{۵۰}{۱۰} + ۱ = ۶$$

بنابر این این دونده به زمانی بیشتر از ۶ ثانیه احتیاج خواهد داشت، در حالی که همهٔ گزینه‌ها از ۶ کمترند.

sampaadia amoozz.ir ی دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۵) گزینهٔ (الف) صحیح است.

از بین این اعداد، اعدادی را انتخاب می‌کنیم که در نوشتن آنها از تعداد فردی ۱ استفاده شده باشد. در اینصورت هر دوتایی از این اعداد حداقل در دو رقم با هم اختلاف دارند و تعداد کل چنین اعدادی برابر است با:

$$\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۵} = ۵ + ۱۰ + ۱ = ۱۶$$

در ادامه نشان می‌دهیم که انتخاب بیش از ۱۶ عدد با خاصیت خواسته شده ممکن نیست.

تعداد کل اعداد ۵ رقمی که با رقم‌های ۱ و ۲ می‌توان ساخت برابر است با $۲^۵ = ۳۲$. حال ما این ۳۲ عدد را به شیوهٔ زیر به ۱۶ دستهٔ دوتایی تقسیم می‌کنیم:

هر دو عددی را که فقط در رقم یکان با هم تفاوت دارند در یک دسته قرار می‌دهیم. برای مثال دو عدد (۱۱۲۱۲, ۱۱۲۱۱) در یک دسته قرار می‌گیرند. حال واضح است که از دو عدد واقع در هر یک از این ۱۶ دسته حداکثر یکی را می‌توان انتخاب کرد. لذا حداکثر ۱۶ عدد از این اعداد را می‌توان انتخاب کرد.

۶) گزینهٔ (ج) صحیح است.

$$\begin{aligned} a = ۱ + \sqrt[۳]{۶a - ۲} &\Rightarrow (a-۱)^۳ = ۶a - ۲ \Rightarrow a^۳ - ۳a^۲ + ۳a - ۱ = ۶a - ۲ \\ &\Rightarrow a^۳ - ۳a^۲ - ۳a + ۱ = ۰ \Rightarrow a^۳ + ۱ - ۳a(a+۱) = ۰ \\ &\Rightarrow (a+۱)(a^۲ - a + ۱ - ۳a) = ۰ \end{aligned}$$

که با توجه به مثبت بودن a، $a + ۱ \neq ۰$ و لذا $a^۲ - ۴a + ۱ = ۰$. مشابهاً $b^۲ - ۴b + ۱ = ۰$ بنابر این با توجه به فرض متمایز بودن a و b، این دو عدد باید همان ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند. لذا با توجه به رابطهٔ مربوط به حاصل‌ضرب ریشه‌ها خواهیم داشت $ab = ۱$.

۷) گزینهٔ (ج) صحیح است.

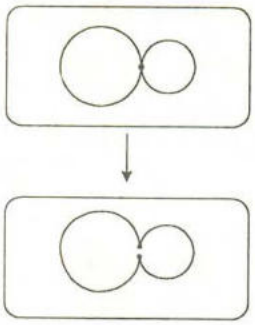
اگر در تبدیل f، دو نقطهٔ نزدیک به هم در نظر بگیریم، از آنجایی که تبدیل f این دو تکه خمیر را به هم می‌چسباند لذا بعد از تبدیل، این دو نقطه همچنان نزدیک به هم باقی خواهند ماند. بنابر این f یک تبدیل پیوسته است.

امّا اگر در دو تکه خمیر به هم چسبیده شده، دو نقطه نزدیک به هم انتخاب کنیم بطوریکه هر دو در یک تکه خمیر نباشند (در دو طرف مرز چسبیدگی دو تکه خمیر باشند)، آنگاه تبدیل یافته‌های این دو نقطه، یکی در تکه خمیر بالایی و دیگری در تکه خمیر پایینی می‌افتد و لذا این نقاط دیگر نزدیک به هم نخواهند بود. بنابر این $f^{-۱}$ یک تبدیل ناپیوسته است.

۸) گزینهٔ (الف) صحیح است.

دو شکل A و B هم‌ریختند، زیرا به روشنی با تغییرات پیوسته می‌توان شکل A را به شکل B تبدیل کرد، بطوریکه نقاط نزدیک به هم، همچنان نزدیک به یکدیگر باقی بمانند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید



امّا دو شکل C و D هم‌ریخت نیستند. زیرا اگر بخواهیم شکل D را به شکل C تبدیل کنیم، ابتدا باید دو سوراخ را به هم نزدیک کنیم تا جایی که دقیقاً در یک نقطه مطابق شکل مشترک شوند. حال باید خمیر را از نقطهٔ اشتراک دو دایره پاره کنیم تا دو سوراخ به یک سوراخ تبدیل شوند، ولی در اینصورت نقاط دو طرف محل اشتراک دو دایره، به وضوح از هم دور خواهند شد و لذا تبدیل پیوسته نیست.

۹) گزینهٔ (ه) صحیح است.

راه اول: با کمی دقت می‌توان دریافت که در فاصلهٔ هر یک ساعت، دقیقاً یک بار این اتفاق روی می‌دهد. یک بار بین ساعت ۱ و ۲، یک بار بین ساعت ۲ و ۳ و .... امّا علاوه بر اینها رأس ساعت ۶ هم یک بار دیگر این اتفاق روی می‌دهد. لذا در کل ۱۳ بار این ساعت زنگ می‌زند.

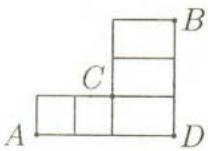
راه دوم: فرض کنید z مختصات نوک عقربهٔ ساعت‌شمار در صفحهٔ مختلط باشد. می‌توان z را روی دایره واحد فرض کرد. در اینصورت مختصات عقربهٔ دقیقه‌شمار برابر $z^{۱۲}$ خواهد بود. حال برای اینکه محور افقی نیمساز زاویهٔ بین دو عقربه باشد، باید $z^{۱۲} = \bar{z}$ و به عبارتی $z \cdot z^{۱۲} = z \cdot \bar{z} = ۱$ یعنی $z^{۱۳} = ۱$ که این معادله دارای ۱۳ جواب در مجموعهٔ اعداد مختلط است.

۱۰) گزینهٔ (د) صحیح است.

از فرض مسأله نتیجه می‌شود که اگر دو پدر با هم دوست نباشند، پسرهای آنها نیز با هم دوست نیستند. لذا اگر در میان پدرهای دانش‌آموزان دبیرستان k نفر موجود باشند که هیچ دوتایی دوست نباشند، آنگاه پسرهای آنها نیز با هم دوست نیستند و لذا k دانش‌آموز وجود دارند که هیچ دوتایی دوست نیستند.

۱۱) گزینهٔ (ب) صحیح است.

مسیرها را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:



i) مسیرهایی که از C رد می‌شوند و از D رد نمی‌شوند، که در اینصورت از A تا C، ۴ راه و از C تا B هم ۴ راه خواهیم داشت، لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با $۴ \times ۴ = ۱۶$.

ii) مسیرهایی که از D رد می‌شوند و از C رد نمی‌شوند، که در اینصورت از A تا D، ۲ راه و از D تا B هم ۲ راه خواهیم داشت، لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با $۲ \times ۲ = ۴$.

iii) مسیرهایی که هم از C و هم از D رد می‌شوند، که این خود به دو صورت ممکن است:

اول اینکه، از A به C، از C به D و از D به B برویم که تعداد این مسیرها با توجه به اینکه از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کرد، به ترتیب برابرند با: ۲، ۱، ۲ و لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با: $۲ \times ۱ \times ۲ = ۴$

دوم اینکه، از A به D، از D به C و از C به B برویم که تعداد این مسیرها با توجه به اینکه از هیچ نقطه‌ای نباید دو بار عبور کرد، به ترتیب برابرند با: ۲، ۱، ۲ و لذا تعداد چنین مسیرهایی برابر است با: $۲ \times ۱ \times ۲ = ۴$.

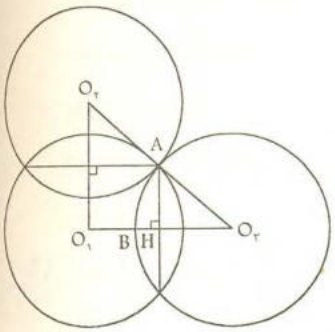
بنابر این تعداد کل مسیرهای از A به B برابر خواهد بود با $۱۶ + ۴ + ۴ + ۴ = ۲۸$.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۲) گزینهٔ (د) صحیح است.

اولاً طبق قضیه فیثاغورس

$$O_۲O_۳ = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰.$$



بنابر این دو دایرهٔ $C_۲$ و $C_۳$ در وسط $O_۲O_۳$ بر هم مماسند، و البته از آنجایی که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است، فاصلهٔ $O_۱$ از وسط $O_۲O_۳$ برابر $\frac{۱۰}{۲} = ۵$ خواهد بود و بنابر این دایرهٔ $C_۱$ نیز از وسط $O_۲O_۳$ یعنی همان محل تماس $C_۲$ و $C_۳$ می‌گذرد.

قرار دهید $\hat{O_۳} = \theta'$ و $\hat{O_۲} = \theta$. در اینصورت مساحت ناحیهٔ مشترک $C_۳$ و $C_۱$ برابر است با:

$$= (\text{مساحت مثلث } \triangle O_۳AH - \text{مساحت قطاع } O_۳AB) \times ۴$$

$$۴ \times (\frac{۵^۲\theta'}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{O_۱O_۳}{۲} \times \frac{O_۱O_۲}{۲}) = ۴ \times (\frac{۵^۲\theta'}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۲} \times \frac{۸}{۲}) = ۵۰\theta' - ۲۴$$

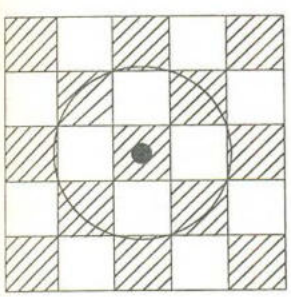
مشابهاً مساحت ناحیه مشترک $C_۲$ و $C_۱$ برابر است با:

$$۴(\frac{۵^۲\theta}{۲} - \frac{۳ \times ۴}{۲}) = ۵۰\theta - ۲۴$$

لذا مساحت ناحیه‌ای از $C_۱$ که با $C_۲$ و $C_۳$ تداخل ندارد، برابر است با:

$$\pi \times ۵^۲ - (۵۰\theta - ۲۴ + ۵۰\theta' - ۲۴) = ۲۵\pi - (۵۰(\theta + \theta') - ۴۸)$$
$$= ۲۵\pi - (۵۰ \times \frac{\pi}{۲} - ۴۸) = ۴۸$$

۱۳) گزینهٔ (الف) صحیح است.



دایره نشان داده شده در شکل تماماً در خانه‌های سیاه قرار دارد و شعاع آن برابر است با

$$\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

و چون $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ بزرگ‌ترین گزینهٔ مسأله است، پس $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ جواب مسأله خواهد بود.

۱۴) گزینهٔ (ج) صحیح است.

زیرا چنانچه گزارهٔ (ج) در مورد اعداد جالب برقرار باشد، باید $x \cdot (\frac{۱}{x}) = ۱$ هم جالب باشد که نیست.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

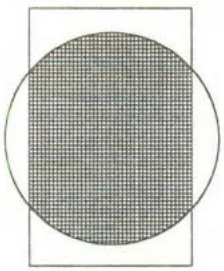
۱۵) گزینهٔ (د) صحیح است.

با کمی دقت و نگاه کردن به گزینه‌ها می‌توان به سادگی دریافت که گزینهٔ (د) صحیح است، زیرا مساحت متوازی‌الاضلاعی مثل $ABCD$ که رئوس آن شبکه‌ای باشند، برابر است با:

$$S_{ABCD} = ۲S_{ABC} = ۲ \times \frac{۱}{۲}|y_۱(x_۲ - x_۳) + y_۲(x_۳ - x_۱) + y_۳(x_۱ - x_۲)|$$
$$= |y_۱(x_۲ - x_۳) + y_۲(x_۳ - x_۱) + y_۳(x_۱ - x_۲)|$$

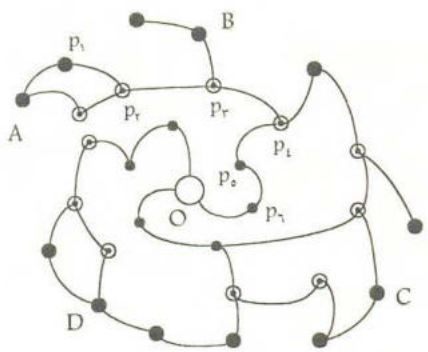
که عددی صحیح است. لذا گزینهٔ (د) صحیح است.

۱۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.



اگر استوانه را بازکنیم تا به مستطیلی تبدیل شود، مساحتی که حشره می‌تواند به آن برود قسمتی از دایرهٔ به مرکز وسط مستطیل و شعاع یک خواهد بود که داخل مستطیل قرار می‌گیرد. (دقت کنید که چون قطر دایره برابر ۲ و از $\sqrt{۳}$ بیشتر است، دایره کاملاً داخل مستطیل نمی‌افتد.) همین جا می‌توان جواب مسأله را پیدا کرد، زیرا مساحت این ناحیه حتماً از مساحت کل دایره که $\pi \times ۱^۲ = \pi$ است کمتر است و بین گزینه‌ها تنها گزینه (الف) از π کمتر است. البته خودتان به سادگی می‌توانید مساحت قسمت‌هایی از دایره را که بیرون مستطیل می‌افتد حساب کنید و به صورت تشریحی هم به همین جواب برسید.

۱۷) گزینهٔ (الف) صحیح است.



A: آرش مهره را به $p_۱$ می‌برد، علی به اجبار آن را به $p_۲$ می‌برد. آرش آن را به $p_۳$ و سپس علی به اجبار به $p_۴$، آرش آن را به $p_۵$ و علی به اجبار به $p_۶$ و در نهایت آرش آن را به O می‌برد

B: آرش مهره را به $p_۳$ و علی به اجبار به $p_۴$ و سپس آرش آن را به $p_۵$ و علی به اجبار به $p_۶$ و در نهایت آرش آن را به O می‌برد.

۱۸) گزینهٔ (الف) صحیح است.

دقت کنید که می‌توان دونده‌های E و D و C و B را بدون حرکت در نظر گرفت و در عوض سرعت آنها یعنی یک دور در ساعت را به سرعت A افزود. (به بیانی سرعت نسبی این متحرک‌ها مهم است.) در این صورت همهٔ دونده‌ها ثابتند و A با سرعت ۵ دور در ساعت حرکت می‌کند. در دور اول چوب را به E می‌دهد، در دور دوم چوب را از E گرفته به D می‌دهد، در دور سوم از D به C و در دور چهارم از C به B می‌دهد. در دور پنجم هم چوب را از B می‌گیرد و لذا در پایان این دور چوب در دست خود A خواهد بود.

۱۹) گزینهٔ (ه) صحیح است.

فرض کنیم که این اتومبیل در فاصلهٔ x کیلومتری شهر B باشد. سرعت این اتومبیل در x کیلومتر باقیمانده حداکثر x کیلومتر بر ساعت است. لذا برای طی مسافت باقیمانده به حداقل یک ساعت زمان احتیاج دارد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به عبارتی این اتومبیل در هر نقطه‌ای از مسیر که باشد، حداقل یک ساعت تا مقصد فاصله دارد. بنابر این این اتومبیل هیچ‌گاه به مقصد نخواهد رسید!

۲۰) گزینهٔ (ه) صحیح است.

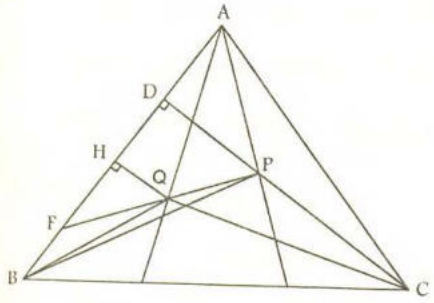
گزارهٔ (الف) صحیح است، زیرا اگر x نقطه‌ای درون دایره واحد باشد، مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز ثقل x در نظر می‌گیریم و آن قدر این مثلث را کوچک می‌کنیم که کاملاً درون دایرهٔ واحد بیفتد. درستی گزارهٔ (ب) نیز با استدلال مشابهی اثبات می‌شود.

گزارهٔ (ج) نیز صحیح است، زیرا فرض کنید x نقطه‌ای درون مجموعه‌ای با ساختار دایره‌ای باشد، لذا دایره توپری به مرکز x وجود دارد که کاملاً داخل مجموعه بیفتد. حال مثلثی متساوی‌الاضلاع به مرکز ثقل x در نظر می‌گیریم و آن را آنقدر کوچک می‌کنیم تا کاملاً درون این دایره بیفتد، لذا مثلث متساوی‌الاضلاع توپری به مرکز ثقل x وجود دارد که کاملاً درون مجموعه باشد، بنابر این مجموعه ساختار مثلثی نیز دارد.

درستی گزارهٔ (د) نیز مشابهاً اثبات می‌شود.

بنابر این گزینهٔ (ه) پاسخ مسأله خواهد بود.

۲۱) گزینهٔ (ه) صحیح است.



اولاً ادعا می‌کنیم $PQ = QF$، زیرا:

$$\frac{QF}{PF} = \frac{QH}{PD} = \frac{QH \cdot AB}{PD \cdot AB} = \frac{S_{AQB}}{S_{APB}} = \frac{\frac{1}{6}S_{ABC}}{\frac{2}{6}S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

بنابر این $QF = \frac{1}{2}PF$ و یا معادلاً $PQ = QF$، یعنی نقطه Q وسط پاره‌خط PF است.

حال از آنجایی که $\frac{AF}{FB} = \frac{S_{AFC}}{S_{BFC}}$، سعی می‌کنیم مساحت مثلث $\triangle BFC$ را محاسبه کنیم. دقت می‌کنیم که چون Q وسط PF است، لذا ارتفاع وارد از Q بر BC برابر نصف مجموع ارتفاع‌های وارد از P و F بر BC می‌باشد و لذا $S_{QBC} = \frac{S_{FBC} + S_{PBC}}{2}$ و از آنجا:

$$S_{FBC} = 2S_{QBC} - S_{PBC} = 2 \times \frac{2}{6}S_{ABC} - \frac{3}{6}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC} \Rightarrow$$
$$S_{AFC} = S_{ABC} - S_{BFC} = \frac{5}{6}S_{ABC}$$

و بنابر این،

$$\frac{AF}{FB} = \frac{S_{AFC}}{S_{BFC}} = \frac{\frac{5}{6}S_{ABC}}{\frac{1}{6}S_{ABC}} = 5$$

۲۲) گزینهٔ (ج) صحیح است.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول از ۱ تا ۳۰ را انتخاب می‌کنیم. تعداد این اعداد ۱۰ تاست و روشن است که هیچ‌یک از این اعداد حاصلضرب بقیه‌شان را نمی‌شمارد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حال نشان می‌دهیم که ۱۰ حداکثر مقدار ممکن نیز می‌باشد.

فرض کنید تعدادی عدد انتخاب کرده‌ایم، بطوریکه هیچ‌کدام از آن‌ها حاصلضرب مابقی را نمی‌شمارد. ادعا می‌کنیم می‌توان تمام این اعداد را به صورت p^α در نظر گرفت، بدون اینکه تعداد این اعداد کاهش یابد. برای این کار فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ یکی از این اعداد باشد، در اینصورت حداقل یکی از $p_i^{\alpha_i}$ها حاصلضرب مابقی اعداد را نمی‌شمارد، زیرا در غیر اینصورت حاصلضرب مابقی اعداد باید بر همهٔ $p_i^{\alpha_i}$ها و در نتیجه بر حاصلضرب آنها یعنی n بخشپذیر باشد که تناقض است. حال می‌توان جای n و $p_i^{\alpha_i}$ را با هم عوض کرد، بدون اینکه خاصیت مسأله به هم بخورد.

به این ترتیب می‌توان همهٔ این اعداد را به p^αها تبدیل کرد بدون اینکه تعداد آنها کاهش یابد. حال دقت می‌کنیم که اگر p^α و q^β دو تا از این اعداد باشند، در اینصورت $p \neq q$ (چرا؟) لذا تعداد این اعداد حداکثر برابر تعداد اعداد اول مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$، یعنی ۱۰ خواهد بود.

* قبل از شروع به بررسی این سه سؤال سعی می‌کنیم برداشت مناسبی از مفاهیم خط، نقطه و دایره که در این مسأله تعریف شده‌اند پیدا کنیم:

نقطه: منظور از نقطه همان نقطهٔ صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ است. با این خاصیت که باید مختصات آن صحیح باشد.

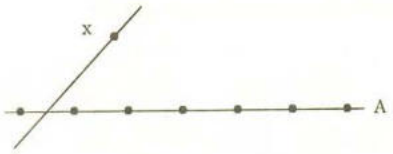
خط: منظور از یک خط، نقاط صحیح واقع بر یک خط است، البته این خط باید حداقل یک نقطه صحیح داشته باشد و به علاوه شیب آن نیز باید گویا باشد. (و یا موازی محور عمودی باشد.)

دایره: منظور از دایره، نقاط صحیح واقع بر یک دایره است. البته مختصات مرکز دایره نیز باید صحیح باشد.

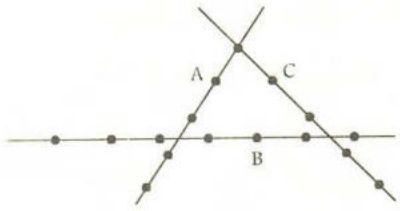
حال با در نظر داشتن این مطالب به حل این مسایل می‌پردازیم.

۲۳) گزینهٔ (ب) صحیح است.

گزارهٔ (۱) به وضوح درست است.



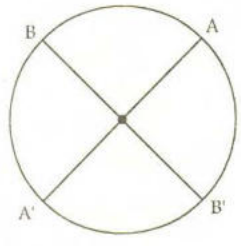
گزارهٔ (۲) غلط است. زیرا اگر x نقطه‌ای خارج از خط A باشد کافیست از این نقطه خطی با شیب گویا رسم کنید که خط A را در نقطه‌ای غیر صحیح قطع کند. در اینصورت این خط با خط A موازی خواهد بود.



گزارهٔ (۳) غلط است. مطابق شکل A با B موازی و B با C موازی است، ولی A و C موازی نیستند.

گزارهٔ (۴) غلط است، مثلاً دو نقطهٔ $(۱, ۰)$ و $(۰, ۰)$ را در نظر بگیرید. مجموعه نقاطی که از این دو نقطه به یک فاصله‌اند خط $x = \frac{۱}{۲}$ است، که شامل هیچ نقطهٔ صحیحی نیست؛ لذا یک خط نیست.

۲۴) گزینهٔ (ج) صحیح است.



ابتدا دقت کنید که تعداد نقاط صحیح روی یک دایره متناهی است. حال ادعا می‌کنیم که این تعداد مضرب ۴ است. زیرا اگر A نقطه‌ای صحیح روی دایره باشد، A' نقطهٔ مقابل قطری A و دو سر قطر عمود بر AA' نیز صحیح خواهند بود. پس نقاط صحیح روی دایره به صورت دسته‌های چهارتایی هستند و لذا تعداد آنها مضرب ۴ می‌باشد.

http://amoozz.ir/class/19

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

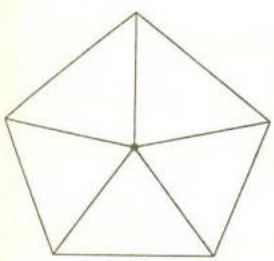
۲۵) گزینهٔ (ب) صحیح است.
زیرا از هر نقطه روی دایره می‌توان بی‌نهایت خط با شیب گویا رسم کرد که دایره را در نقطهٔ صحیحی قطع نکنند. در اینصورت تمام این خطوط بر دایره مماس خواهند بود.

۲۶) گزینهٔ (الف) صحیح است.
دقت کنید که در شکل (۱)، اجتماع هر دو شکل، شکل سوم را می‌پوشاند. بنابر این، این تابلو منگول نیست. در مورد شکل (۲) نیز همین مطلب صادق است.

۲۷) گزینهٔ (ب) صحیح است.
تابلوی گزارهٔ (۱) منگول است، زیرا خطی را در نظر بگیرید که موازی هیچ‌کدام از محورهای انتقال نباشد. با نزدیک کردن این خط از بی‌نهایت به این شکل‌ها، به ترتیب برخورد، ترتیب کشیده شدن شکل‌ها بدست می‌آید.
تابلوی گزارهٔ (۳) نیز منگول است، دایره‌ای به شعاع به اندازهٔ کافی بزرگ در نظر بگیرید که همه شکل‌ها را شامل باشد. با کوچک کردن شعاع، این دایره دایره‌ها را قطع خواهد کرد. حال کافیست شکل‌ها به ترتیب عکس این قطع کردن‌ها کشیده شوند. (البته باید دایرهٔ مذکور را طوری انتخاب کنیم که هیچ‌گاه به طور همزمان بر دو تا از این دوایر مماس نشود که برای این منظور هم کافیست مرکز دایره را نقطه‌ای غیر از نقاط واقع بر هذلولی‌های به کانون‌های مراکز این دوایر و به فاصلهٔ رأسی تفاضل دوبه‌دوی شعاع‌های این دوایر در نظر بگیریم. (چرا؟))

۲۸) گزینهٔ (ب) صحیح است.
به سادگی می‌توان دید که در هر شکل منگول شرط (ب) برقرار است.
توضیح: به دلیل برداشت‌های متفاوتی که از صورت این سؤال شده بود، هر سه گزینهٔ (ب)، (د) و (ه) در تصحیح اوراق به عنوان پاسخ صحیح پذیرفته شدند.

۲۹) گزینهٔ (ب) صحیح است.
ابتدا یک تابلو برای گزینهٔ (ب) ارائه می‌کنیم. یک ۱۰۰۰۰ ضلعی منتظم در نظر بگیرید که با وصل کردن مرکز آن به رئوسش به ۱۰۰۰۰ قاچ برابر تقسیم شده است. (این کار در شکل برای ۵ ضلعی منتظم نشان داده شده است.)



حال ۱۹ قاچ پشت سرهم از این ۱۰۰۰۰ ضلعی منتظم را حذف کنید و شکل باقیمانده را F_1 بنامید. از حذف ۱۹ قاچ‌های متوالی دیگر اشکال $F_{10000}, \ldots, F_3, F_2$ بدست می‌آیند. حال تابلو را متشکل از این ۱۰۰۰۰ شکل بگیرید. به وضوح هیچ ۲۱ شکلی تشکیل یک منگول نمی‌دهند، زیرا اجتماع هر ۲۰ تا از آنها حتماً ۲۱ـامی را می‌پوشاند. از طرفی یک شکل و ۱۹ دوران دیگر آن به اندازهٔ $\frac{2\pi}{10000}$ (به عبارتی هر ۲۰ شکل متوالی) منگول می‌باشند. پس گزینهٔ (ب) قطعاً درست است.
حال شما خود می‌توانید با مثال مشابهی گزینهٔ (الف) را رد کنید. یعنی مثالی بسازید که در آن هیچ ۱۰ شکلی تشکیل منگول ندهند. برای این منظور کافیست در مثال قبل بجای ۱۹ قاچ پشت سرهم، ۸ قاچ متوالی را حذف کنید تا دیگر در این تابلو هیچ ۱۰ شکلی منگول نباشند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۳۰) گزینهٔ (ج) صحیح است.

زیرا هر بار هرکس شکلی بکشد، کافی است نفر بعد شکلی بکشد که از همه شکل‌ها به اندازهٔ کافی فاصله داشته باشد و با آنها اشتراکی نداشته باشد.

توماس کارلایل TOMASS CARLYLE

نویسنده دانشمند مشهور انگلیسی

هیچ‌کس قرآن را با دقت نمی‌خواند مگر آن‌که می‌بیند حقایقی اصیل در برابر وی آشکار است و در می‌یابد که این کتاب وابسته به اصلی حقیقی و مبدئی عالی و مقدس پیوسته است و تردیدی نیست که گفتار حقیقی و درست نفوذ خاصی بر دل‌ها دارد و حق آن است که تمام کتاب‌ها در برابر قرآن ناچیز و کوچکند و این کتاب از هرگونه عیب و نقص و اصول ناپسند پاکیزه و مبرا است.

تاریخ قرآن ص ۱۵۲، به نقل از کتاب اعترافات دانشمندان بزرگ جهان، ص ۴۷.

مرحله ی اول نوزدهمین دوره ی المپیاد ریاضی ایران

بهمن ماه ۱۳۷۹

۱) جدول اعداد زیر را در نظر بگیرید:

۱

۱ -۱

۱ -۱ ۱

۱ -۱ ۱ -۱

۱ -۱ ۱ -۱ ۱

.

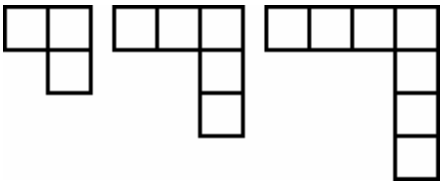
.

.

حاصل جمع کلیه ی سطر ها از سطر اول تا سطر ۱۳۷۹ (با خود سطر ۱۳۷۹) برابر است با:

الف) ۶۹۰ ب) ۱ ج) ۰ د) ۱۳۷۹ ه) ۶۸۹

۲) شکل های زیر با چوب کبریت ساخته شده اند:



اگر ۵۰۰ تا چوب کبریت داشتیم، چند تا است؟

الف) ۱۶۷ ب) ۱۶۶ ج) ۱۶۵ د) ۱۶۴ ه) هیچ کدام

۳) ۴۰ توپ را با اعداد ۱ تا ۴۰ شماره گذاری کرده ایم. می خواهیم توپ ها را در تعدادی جعبه قرار دهیم به این ترتیب که اگر در یک جعبه توپی با شماره ی n قرار داده شده باشد، توپ دیگری با مضارب n را نمی توانیم در آن جعبه بگذاریم، حداقل چند تا جعبه برای قرار دادن همه ی توپ ها لازم است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۱۲ د) ۱۴ ه) ۲۰

۴) پنج نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض است، کدام یک از نتیجه گیری های زیر درباره ی مختصات وسط پاره خط های واصل بین این نقاط درست است؟

الف) مختصات کلیه ی نقاط فوق الذکر نیز لزوما صحیح است.

ب) مختصات هیچ کدام لزوما صحیح نیست.

ج) حداقل مختصات یکی از نقاط صیح است و نه لزوما بیش تر.

د) حداقل مختصات دو نقطه صحیح است و نه لزوما بیش تر.

ه) حداقل مختصات سه نقطه صحیح است و نه لزوما بیش تر.

۵) یک زوج (a,b)، $a,b \in \mathbb{Z}$، خوب نامیده می شود اگر از هر مسیری از نقطه ی (۰،۲) حرکت کنیم و در هر مرحله روی شبکه ی مختصات یک واحد به بالا، پایین، چپ یا راست برویم و سرانجام به نقطه ی (a,b) برسیم دست کم یک بار از نقطه ای مثل (x,y) گذشته باشیم که x^2-4y مربع کامل باشد. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف) زوج (۲۰۰۰،۱۳۷۹) خوب است ولی زوج (۱۳۶۱،۷۶۵-) خوب نیست.

ب) زوج (۲۰۰۰،۱۳۷۹) و زوج (۱۳۶۱،۷۶۵-) خوب هستند.

ج) زوج (۲۰۰۰،۱۳۷۹) خوب نیست ولی زوج (۱۳۶۱،۷۶۵-) خوب است.

د) هیچ زوج خوبی وجود ندارد.

ه) تعداد متناهی زوج خوب وجود دارد و حداقل یک زوج خوب وجود دارد.

۶) تعداد اعداد طبیعی $n \leq ۱۳۷۹$ که به ازای آن ها عدد n^3+2n^2 مربع کامل باشد، چند تاست؟

الف) ۱۶ ب) ۶۴ ج) ۴۹ د) ۵۵ ه) ۳۶

۷) تعداد x های صحیح که در معادله ی زیر صدق می کنند چند تا است؟

$$\frac{x^3+x}{x+3}=35$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی شمار

۸) در مثلث ΔABC، B' قرینه ی B نسبت به ضلع AC و C' قرینه ی C نسبت به ضلع AB است. مـی دانـیم که $B'C'=AB+AC$. زاویه ی $A<$ چند درجه است؟

الف) 30^o ب) 40^o ج) 60^o د) 90^o ه) این زاویه یا 30^o است و یا 60^o.

۹) اعداد طبیعی x، y و n در شرایط زیر صدق می کنند:

i) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک x و y برابر با ۱۳۷۹ است.

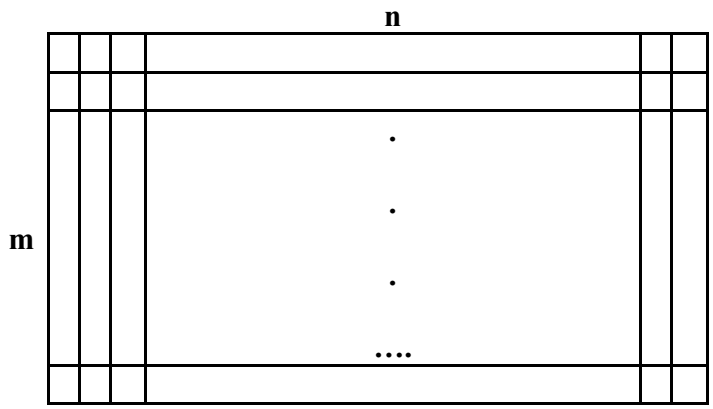
ii) کوچک ترین مقسوم علیه مشترک x و y برابر $n!$ است.

n $(n!=1\times2\times\ldots\times n)$ با کدام یک از اعداد زیر می تواند برابر باشد؟

الف) ۲۷ ب) ۶۴ ج) ۱۲۵ د) ۲۱۶ ه) هیچ کدام

۱۰) کارخانه ی « شوکولات » شکلات کاکائویی خوشمزه ای به شکل یک مـستطیل شـبکه بنـدی شـده تولیـد کرده است. وقت خوردن، در هر گاز، یکی از خطوط افقی یا عمودی زیر دندان قرار می گیـرد و مـی شـکند. در نتیجه شکلات به دو مستطیل تقسیم می شود. و یک قسمت آن خورده می شود، شخص بـا انتخـاب کـدام ابعـاد برای شکلاتش می تواند در بیش ترین تعداد گاز آن را بخورد؟

الف) 35×32 ب) 4×60 ج) 34×33 د) 80×3 ه) 7×79



۱۱) آیا اعداد طبیعی x_1، x_2، ...، x_n و x_{n+1} وجود دارند که

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=x_{n+1}^2$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

الف) برای هر n ای اعداد $x_{n+1},\dots,x_1$ وجود دارند.

ب) به جز $n=1,2$ چنین اعدادی وجود ندارند.

ج) فقط برای هر n مربع کامل و $n=1,2$ چنین اعدادی وجود دارند.

د) فقط برای $n=1$ و اعداد اول n چنین اعدادی وجود دارند.

ه) هیچ کدام

۱۲) در مثلث ABC داریم AB>AC. دو نیم دایره به قطر های AB و AC در خارج مثلث رسم می کنیم. نقاط تلاقی امتداد ارتفاع های CH' و BH را با نیم دایره های مزبور به ترتیب C' و B' می نامیم. کدام صحیح است؟

الف) همواره AC'<AB'

ب) AC'<AB' اگر و تنها اگر A> حاده باشد.

ج) همواره AC'>AB'

د) AC'=AB' اگر و تنها اگر A> حاده باشد.

ه) همواره AC'=AB'

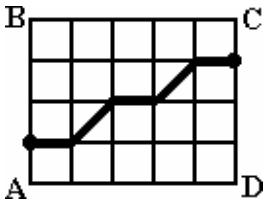
۱۳) در مثلث حاده الزاویه ی ABC، BD و CE به ترتیب ارتفاع های وارد بر اضلاع AC و AB هستند. می دانیم $2DE=BC$. زاویه ی A> چند درجه است؟

الف) 60^o ب) 30^o ج) 45^o د) 30^o یا 60^o ه) نمی توان زاویه ی A> را مشخص کرد.

۱۴) یک جدول 9×9 از مربعات سفید موجود است. حداکثر مقدار n را بیابید که اگر به هر طریق ممکن n تا از خانه های جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان به هر طریق ممکن n تا از خانه های جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان چهار خانه ی سفید متوالی عمودی یا افقی یافت.

الف) ۱۷ ب) ۱۸ ج) ۱۹ د) ۲۰ ه) ۲۱

۱۵) می خواهیم در شکل زیر از نقطه ی دلخواه روی ضلع AB به نقطه ی دلخواه روی ضلع CD بـرویم. فـرض کنید تنها مجازیم دو نوع حرکت انجام دهیم، یک قدم افقی به سمت راست یا یک قدم مایل با زاویه ی 45^{o} بـه سمت بالا- راست . به چند طریق این کار ممکن است؟



الف) ۱۲۶ ب) ۱۲۷ ج) ۱۲۸ د) ۱۲۹ ه) ۱۳۰

۱۶) یک فرش مربعی شکل ۳×۳ داریم که طرح روی آن ۹ مربع ۱×۱ است. می خواهیم هر یک از مربـع هـای ۱×۱ را با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم. چند فرش متفاوت با این خواص داریم؟ (اگر فـرش را دوران دهیم، فرش جدیدی به وجود نمی آید!)

الف) ۱۲۰ ب) 2^{7} ج) 2^{8} د) 2^{9} ه) ۱۴۰

۱۷) چند سه تایی مرتب (x,y,z) از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد به طوری که داشته باشیم:

$$xyz=2+x+y+z \ , \ xy+yz+zx=12$$

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) ۱۲

۱۸) تمام پنج تایی های مرتب از اعداد طبیعی به صورت (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) را در نظر بگیرید که

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=1$$

در این صورت کدام یک از گزینه های زیر در مورد تعداد این پنج تایی های مرتب صحیح است؟

الف) تعداد آن ها متناهی است.

ب) فقط یک پنج تایی مرتب با خاصیت فوق وجود دارد.

ج) تعداد این پنج تایی ها بر ۵ بخش پذیر است.

د) تعداد این پنج تایی ها به صورت $5k+1$ است که $k\geq 1$ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ه) هیچ کدام

۱۹) بزرگ ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر سه عدد حقیقی $a,b,c\geq ۰$ داشته باشیم:

$$(a+b+c)^۲(ab+bc+ca)\geq k(a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲)$$

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۹ ه) ۱۲

۲۰) دنباله ای از اعداد حقیقی به این شکل تعریف می شوند $x_۱=۸$، $x_۰=۳$ و برای هر $n\geq ۱$، $x_{n+۱}=۳x_n-۴x_{n-۱}$. به طور مثال: $x_۲=۱۲, x_۳=۴, \dots$. در بین ۲۰۰۱ جمله ی ابتدایی این دنباله از $x_۰$ تا $x_{۲۰۰۰}$ چند مضرب ۳ داریم؟

الف) ۹۹۹ ب) ۱۰۰۰ ج) ۱۰۰۱ د) ۱۵۰۰ ه) ۱۵۰۱

۲۱) چند عدد صحیح $n\geq ۲$، وجود دارد که به ازای هر n عدد حقیقی $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n، گزاره ی شرطی زیر برقرار باشد؟

$$x_۱x_۲+x_۲x_۳+\dots+x_{n-۱}x_n+x_nx_۱\leq ۰ \Rightarrow x_۱+x_۲+\dots+x_n=۰$$

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۲۲) در یک صفحه ی شطرنج ۷۹×۱۳ یک خانه را مناسب می نامیم. اگر با حذف آن خانه بتوان مابقی خانه های صفحه س شطرنج را با موزاییک های ۱×۲ پر کرد. تعداد خانه های مناسب این صفحه ی شطرنج چند تاست؟ (موزاییک ها می توانند افقی یا عمودی قرار گیرند.)

الف) ۳۱۷ ب) ۴۲۹ ج) ۵۱۴ د) ۶۲۰ ه) ۷۱۶

۲۳) یک بازی ۷ نفره، بین امین، سلمان، علی، بابک، آرش، رضا و داود که به ترتیب دور یک دایره نشسته اند، انجام می شود. ابتدا هر کدام تعدادی کارت دارند. تعداد کل کارت های بین آن ها ۶ تاست. بازی از امین شروع می شود و به ترتیب سلمان، علی، ...، رضا، داود، سلمان، ... بازی می کنند. در هر مرحله کسی که نوبتش است اگر بیش از یک کارت دستش باشد ۱ کارت را نگه می دارد و بقیه ی کارت ها را به کسی که نوبت بعدی را دارد می دهد. کسی که هیچ وقت کارتی به او نرسد برنده است. (اگر ۶ نفر دقیقا ۱ کارت داشته باشند و نفر هفتم بدون کارت باشد با انجام بازی وضعیت تغییر نمی کند.) تعداد حالاتی را بیابید که امین برنده شود.

الف) ۱۳۸ ب)۸۸ ج) ۱۴۲ د) ۱۳۲ ه) ۱۳۰

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

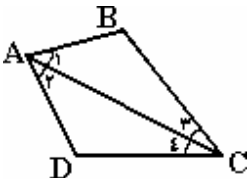
۲۴) کدام یک از اعداد زیر به صورت $a^۲-b^۲$، $a,b \in \mathbb{Z}$ قابل بیان هستند؟

الف) ۱۶، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ ب) ۱۶، ۲۰۰۱، ۹۸

ج) ۱۴، ۱۳۷۹، ۲۰۰۱ د) ۲۰۰۱، ۶۶، ۹۸

ه) ۱۶، ۶۶، ۹۸

۲۵) مساحت چهارضلعی زیر چقدر است اگر $<A_۱+<C_۳=۳۰^o$ و $<A_۱+<C_۴=۹۰^o$ و $AB=۴, BC=۸, CD=۹, DA=۵$.



الف) ۲۸

ب) ۲۹

ج) $۱۸+۱۰\sqrt{۳}$

د) $۱۰+۹\sqrt{۳}$

ه) $۹+۱۰\sqrt{۳}$

۲۶) فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد. تعداد جواب های طبیعی معادله ی $۲^k+b^۲=c^۲$ چند تاست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) k د) $(k-۱)^۲$ ه) $k-۱$

۲۷) تعداد جواب های معادله ی $۳xy-y-۵x=۱۳$ که $x,y \in \mathbb{N}$ برابر است با

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی نهایت

۲۸) چند عدد حقیقی مانند a وجود دارد که در معادله ی زیر صدق می کند؟

$$\left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{a}{3}\right]+\left[\frac{a}{5}\right]=a$$

([x] برابر با بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x است.)

الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۳۰ د) ۶۰ ه) بی نهایت

۲۹) یک عدد ۱۰ رقمی را جالب می گوییم اگر تمام ارقام آن متفاوت باشند و بـر ۱۱۱۱۱ بخـش پـذیر باشـد. چند عدد ۱۰ رقمی جالب وجود دارد؟

الف) ۲۰۴۸ ب) ۴۰۹۶ ج) ۳۴۵۶ د) ۳۸۴۰ ه) هیچ کدام

۳۰) عدد طبیعی n را یک عدد « مثلثی » می گوییم اگر بتوان هر مثلث دل خواه را به n مثلث متساوی الـساقین افراز کرد (این n مثلث تنها می توانند روی محیط با هم اشتراک داشته باشند). کدام یک از اعضای مجموعه ی {۴،۶،۷،۱۰} مثلثی هستند؟

الف) هیچ کدام از این اعداد مثلثی نیستند.

ب) ۷

ج) ۴، ۶ و ۱۰

د) ۴

ه) همه ی این اعداد مثلثی هستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله اول نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۷۹

---

۱. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

حاصل‌جمع اعداد سطرهای با شماره‌ی فرد ۱ و سطرهای با شماره‌ی زوج صفر است پس مجموع کل اعداد برابر تعداد سطرهای با شماره‌ی فرد است و چون ۶۹۰ عدد فرد از ۱ تا ۱۳۷۹ موجود است جمع کل اعداد ۶۹۰ می‌شود .

۲. صورت سوال ایراد دارد!

چرا که اگر منظورش ساخت یکی از آن شکل‌ها بود باید تعداد چوب کبریت‌ها 6k+4 می‌بود و اگر منظورش مجموعه‌ی این شکل‌ها بود باید تعداد چوب کبریت‌ها مساوی $\sum_{i=1}^{k} 6i + 4 = 6\frac{k(k+1)}{2} + 4k = 3k^2 + 7k$ می‌بود ولی معادله‌ی $3k^2 + 7k = 500$ جواب ندارد.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

مطمئناً حداقل ۶ جعبه لازم است چرا که هیچ دو تایی از اعداد ۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲ نمی‌توانند در یک جعبه باشند. دسته‌بندی زیر نشان می‌دهد که ۶ جعبه کافی هم است.

۱

۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۳۹

۴,۶,۹,۱۰,۱۴,۱۵,۲۱,۲۲,۲۵,۲۶,۳۳,۳۴,۳۵,۳۸

۸,۱۲,۱۸,۲۰,۲۷,۲۸,۳۰

۱۶,۲۴,۳۶,۴۰

۳۲

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

پنج نقطه با مختصات صحیح داریم طبق اصل لانه کبوتری زوجیت مولفه‌ی x سه تا از این اعداد با هم برابر است حال باز هم از بین این سه نقطه دو نقطه موجودند که زوجیت مولفه‌ی yشان نیز برابر است. پس دو نقطه یافتیم که زوجیت مولفه‌ی x شان با هم و y شان نیز با هم برابر است پس وسط این دو نقطه دارای مختصات صحیح است. مثال زیر هم نشان می‌دهد که لزومی ندارد این اتفاق بیش از یکبار بیفتد.

(۱,۱) (۱,۲) (۲,۳) (۲,۴) (۲,۷)

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید به برای هر نقطه‌ی (x,y) روی خط $y = x - ۱$ و $y = -x - ۱$ مقدار $x^۲ - ۴y$ مربع کامل است. زیرا

$$x^۲ - ۴(x - ۱) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲$$
$$x^۲ - ۴(-x - ۱) = x^۲ + ۴x + ۴ = (x + ۲)^۲$$

دقت کنید که مطابق شکل اگر نقطه‌ای زیر یکی از این دو خط قرار داشته باشد با توجه به این که $(۰,۲)$ بالای این دو خط است برای حرکت از $(۰,۲)$ و رسیدن به آن نقطه ناچار باید از نقاطی از یکی از این دو خط عبور کنیم. یعنی نقاطی که $y \le x - ۱$ و یا $y \le -x - ۱$(معادلاً $y \le |x| - ۱$) خوب هستند. بنابراین هر دو زوج $(۲۰۰۰,۱۳۷۹)$ و $(-۱۳۶۱,۷۶۵)$ خوب هستند.

۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

پس $n + 2 = \frac{k^2}{n^2} = (\frac{k}{n})^2$ پس n+2 باید مربع کامل باشد.
و از آن‌جایی که n≤1379 :

پس ۳۶ عدد با این خاصیت داریم.

۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

ولی $x^2 + 1 \equiv 1,2,5,3\ (mod\ 7) \rightarrow 7 \nmid x^2 + 1$

پس $x=7k$ با جای‌گذاری در *(1)* دایم: $k(49k^2 + 1) = 5(7k + 3)$ در ضمن k ناصفر است($k=0$ نتیجه می‌دهد $x=0$ که جواب نیست) پس با تقسیم بر k داریم: $49k^2 + 1 = 35 + \frac{15}{k}$ ولی طرف راست این عبارت

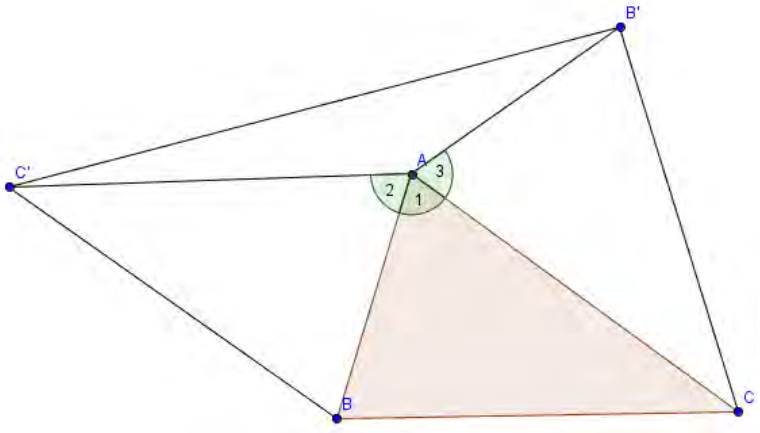
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حداکثر ۵۰ است و طرف چپ به ازای $k \neq 0,1,-1$ بزرگ‌تر از ۵۰ است و با امتحان این سه مقدار می‌بینیم که فقط k=1 جواب است و در نتیجه فقط x=7 جواب است .

۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

چون c’ و b’ قرینه‌ی c و b اند پس ABC’ و AB’C با ABC هم‌نهشت اند و AC’ برابر AC و AB’ برابر AB است

پس داریم: AC’ + AB’ =C’B’ یعنی زاویه‌ی C’AB’ برابر ۱۸۰° است.



و چون A1,A2,A3 با هم برابراند وجمعشان ۱۸۰° است پس هرکدام ۶۰° اند .

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

این شرط فقط در گزینه‌ی (د) صدق می‌کند.(مثال X=۱۳۷۹ , y=۲۱۶! نشان می‌دهد که این گزینه درست است.)

۱۰. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در هر مرحله گاز زدن m+n(جمع طول و عرض مستطیل) حداقل یک واحد کم می‌شود پس تعداد گاز زدن‌ها حداکثر m+n است در ضمن m+n ممکن است به این صورت که هر بار پایین‌ترین خط افقی را گاز می‌زنیم تا به مستطیلی n×۱ برسیم سپس راست‌ترین خط‌های عمودی را گاز می‌زنیم. ماکزیمم m+n برای گزینه‌ی (ه) به دست می‌آید.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۱. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

ثابت می‌کنیم برای هر nای این کار امکان‌پذیر است برای n=۱ که به وضوح دو عدد مساوی جواب است برای n=۲ هم اعداد فیثاغورسی موجودند مثلا $12^2 + 5^2 = 13^2$ برای سایر n ها با توجه به رابطه‌ی

روش ساختنی زیر را ارائه می‌دهیم:

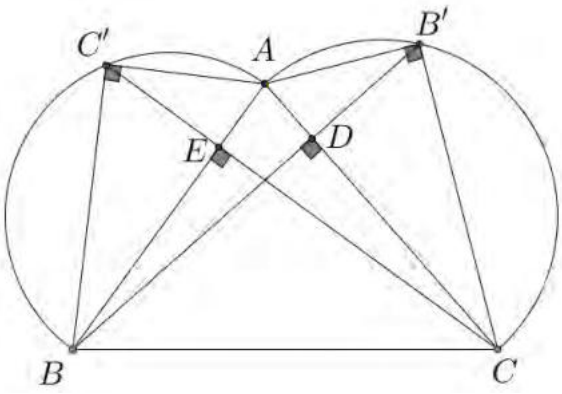
برای مثال x ای که در 13^2= 2x+1 صدق می‌کند یعنی ۸۴ را در نظر بگیرید طیق فرمول فوق :

$$84^2 + 13^2 = 85^2 = 84^2 + 12^2 + 5^2$$

وبرای n=4: $85^2 = 2x + 1 \rightarrow x = 3612 \rightarrow 3612^2 + 85^2 = 3613^2$

و همین طور به صورت استقرایی برای تمامی n ها ساخته می‌شود .

۱۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.



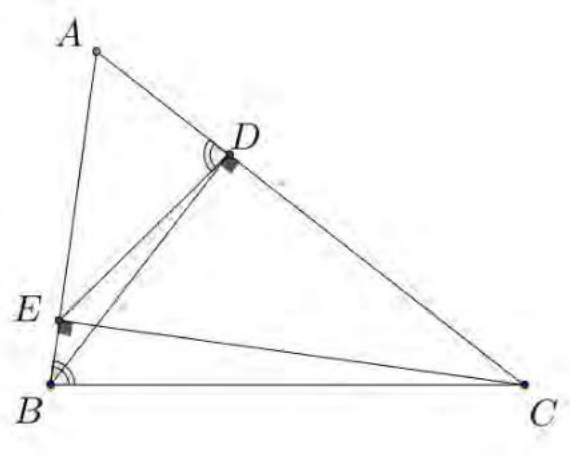
ابتدا دقت کنید که اگر زاویه‌ی A حاده نباشد، ارتفاع‌های یاد شده اصلاً نیم‌دایره‌ها را قطع نمی‌کنند. حال اگر زاویه‌ی A حاده باشد داریم:

$$AB' \perp B'C, AC \perp B'D \Rightarrow AB'^2 = AD.AC$$
$$AC' \perp BC', AB \perp C'E \Rightarrow AC'^2 = AE.AB$$

به علاوه دقت کنید که $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$ پس چهارضلعی $BEDC$ محاطی است و بنابراین $AD.AC = AE.AB$ که این با توجه به رابطه‌ی بالا نتیجه می‌دهد $AB' = AC'$.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.



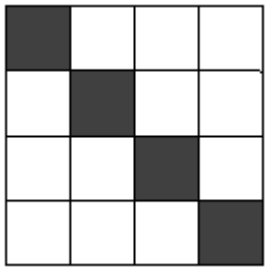
ابتدا دقت کنید که مطابق شکل روبه‌رو داریم:

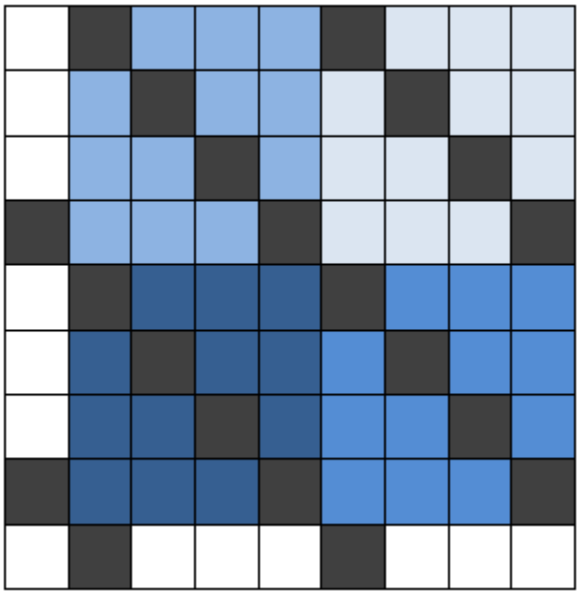
$$\angle BDC = \angle BEC = ۹۰^\circ$$

پس چهارضلعی $BEDC$ محاطی است. بنابراین زاویه‌های $\angle ADE$ و $\angle ABC$ برابر هستند که این نتیجه می‌دهد دو مثلث ADE و ABC متشابه هستند که چون $\frac{DE}{BC} = \frac{۱}{۲}$ پس $\frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۲}$ و لذا $\cos(\angle A) = \frac{۱}{۲}$ و $\angle A = ۶۰^\circ$.

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

هر جدول ۴×۴ به وضوح حداقل ۴ خانه‌ی سیاه نیاز دارد تا هیچ ۴ خانه‌ی متوالی سفیدی در آن یافت نشود . شکل سمت چپ در زیر یک مثال برای ۴ خانه‌ی سیاه است. هم‌چنین هر سطر یا ستون ۹ تایی برای این که ۴ خانه‌ی متوالی سفید در آن یافت نشود، حداقل ۲ خانه‌ی سیاه نیاز دارد و چون جدول ۹×۹ را می‌توان به ۴ جدول ۴×۴ و دو ردیف ۹ تایی مانند شکل افراز کرد پس حداقل ۴×۴+۲×۲=۲۰ خانه‌ی سیاه نیاز است تا هیچ ۴ خانه‌ی سفید متوالی یافت نشود. شکل زیر نشان می‌دهد که ۲۰ خانه‌ی سیاه برای رسیدن به این هدف کافی هم هست. بنابراین با حداکثر ۱۹ خانه‌ی سیاه نمی‌توان این کار را کرد و حتماً ۴ خانه‌ی متوالی سفید یافت خواهد شد.

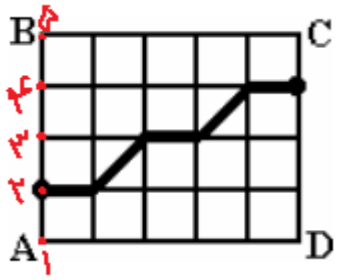




@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۵. سؤال اشکال دارد!

چون در هر گام حتماً یک خانه‌ی افقی به سمت راست می‌رویم و فاصله‌ی افقی دو ضلع AB و CD نیز ۵ خانه است پس در کل هر مسیر شامل ۵ گام است.



برای نمونه تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۱ روی AB به نقطه‌ی ۳ روی CD برابر $\binom{5}{2}$ است چرا که باید ۲ تا از حرکات را از نوع اُریب انتخاب کنیم . به همین ترتیب :

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۱ روی AB به ضلع CD : $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۲ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۳ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۴ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}$

تعداد راه‌های از نقطه‌ی ۵ روی AB به ضلع CD: $\binom{5}{0}$

جواب ۸۰ می‌شود که در گزینه‌ها موجود نیست!

۱۶. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

در کل به 2^9 طریق می‌توان فرش را رنگ کرد که یه سری حالات تکراری هستند:

چون دوران حالت جدیدی به وجود نمی‌آورد، پس بعضی حالات را هرکدام ۴ بار شمرده‌ایم به جز :

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

- حالاتی که با هر دورانی تغییری نمی‌کنند که تنها یک بار شمرده شده‌اند: در این حالت گوشه‌ها باید با هم هم‌رنگ باشند پس برای رنگ آن‌ها 2 حالت داریم. رنگ خانه‌ی وسط هم ۲ حالت دارد بقیه خانه‌ها هم با هم هم‌رنگ اند پس برای رنگ آن‌ها هم ۲ حالت داریم پس در کل ۲×۲×۲=۸ حالت داریم.



- حالاتی که با دوران ۱۸۰ درجه ثابت می‌مانند و بنابراین دو بار شمرده شده اند: در این حالت هم‌رنگ‌ها در شکل روبه‌رو باید در فرش با هم هم‌رنگ باشند که منجر به ۳۲ حالت می‌شود.

پس تعداد حالاتی که با دوران ۱۸۰ تغییر نمی‌کنند ولی مثلاً با دوران ۹۰ تغییر می‌کنند برابر ۳۲-۸ =۲۴ است.

پس تعداد کل حالت‌ها برابر عبارت زیر است :

$$\frac{۲^۹ - (۲۴ + ۸)}{۴} + ۸ + \frac{۲۴}{۲} = ۱۴۰$$

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

نامساوی حسابی هندسی : $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

نامساوی حسابی توافقی : $\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

نامساوی هندسی توافقی: $\sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

بنابر نامساوی حسابی توافقی: $\frac{4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} - \frac{2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$$\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \geq \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{(نامساوی توافقی هندسی)}} xyz \geq \left(\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right)^3 \geq 8$$

$12 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \rightarrow xyz \leq 8$ (نامساوی حسابی هندسی)

پس $xyz = 8$ و حالت تساوی نامساوی‌های فوق رخ داده یعنی همه با هم برابر هستند و $x = y = z = 2$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۸. گزینه‌های (الف) و (د) هر دو صحیح هستند.

ابتدا فرض می‌کنیم $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ و از آنجایی که همه‌ی a_i ها نمی‌توانند بزرگتر از ۵ باشند (در این صورت مجموع مورد نظر از ۱ کمتر می‌شود) باید داشته باشیم $a_1 \le 5$ پس

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که

$a_2 \le \frac{1}{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{k})} = \frac{4k}{k-1}\ (k = 1,2,3,4,5)$ یعنی $a_2 \le 8$ و به همین ترتیب برای بقیه‌ی اعداد نیز کران بالایی پیدا می‌شود، یعنی تعداد جواب‌ها متناهی است.

به علاوه غیر از حالتی که ۵ عدد با هم مساوی هستند، در دیگر حالت‌ها (مثلاً در حالتی که چهارتا از عددها برابر ۸ و یکی برابر ۲ است.) با جای‌گشت اعداد به تعدادی جواب می‌رسیم که مضرب ۵ است. پس در کل تعداد جواب‌های معادله به صورت $۵k + ۱$ است.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دقت کنید که

$$(a+b+c)^۲ab \ge (a+b)^۲ab \ge ۴a^۲b^۲$$

با نوشتن نامساوی‌های مشابه برای دیگر متغیرها و جمع کردن آن‌ها نامساوی خواسته‌شده برای $k = ۴$ نتیجه می‌شود. پس $k \le ۴$ است و مثال $(a,b,c) = (۱,۱,۰)$ نشان می‌دهد که $k = ۴$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

x_1

پس دقیقاً x های با اندیس زوج مضرب ۳ هستند که ۱۰۰۱ عدد هستند.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

اگر $n = ۲$، $x_۱ + x_۲ = ۰$ و لذا $x_۱^۲ + x_۲^۲ + ۲x_۱x_۲ = ۰$ پس $x_۱x_۲ + x_۲x_۱ \leq ۰$.

اگر $n = ۳$، $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰$ و لذا $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + ۲(x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱) = ۰$، بنابراین $x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱ \leq ۰$.

اگر $n = ۴$، $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$ و لذا

$$x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۴ + x_۴x_۱ = (x_۲ + x_۴)(x_۱ + x_۳)$$

که چون جمع دو عدد $x_۲ + x_۴$ و $x_۱ + x_۳$ صفر شده است، حاصل‌ضربشان نامثبت است.

برای $n \geq ۵$ قرار می‌دهیم $x_۱ = x_۲ = -(n-۲)$ و $x_۳ = \cdots = x_n = ۲$. می‌دانیم مجموع این اعداد برابر صفر است، اما

$$\begin{aligned} x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + \cdots + x_nx_۱ &= (n-۲)^۲ - ۲(n-۲) + \underbrace{۴ + \cdots + ۴}_{n-۳} - ۲(n-۲) \\ &= n^۲ - ۴n = n(n-۴) \geq ۵ \times ۱ > ۰ \end{aligned}$$

پس تنها سه عدد طبیعی دارای این خاصیت هستند.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

صفحه را شطرنجی رنگ می‌کنیم چون تعداد خانه‌ها فرد است از یک رنگ بیش‌تر داریم در ضمن هر موزائیک ۱×۲ از هر رنگ یک خانه را می‌پوشاند. پس اگر صفحه را فرش کرده باشیم از هر دو رنگ به یک تعداد داریم. خانه‌های به آن رنگی که تعدادشان بیش‌تر است همه مناسب اند یعنی ۵۱۴ تا. با یک بررسی ساده و الگویابی می‌توان نشان داد که با حذف هر کدام از این ۵۱۴ خانه بقیه‌ی جدول را می‌توان با موزاییک‌های ۱×۲ پر کرد.

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.

چون شرایط در کل برای همه یک‌سان است احتمال برد همه با هم برابر است، پس تعداد حالاتی که امین برنده می‌شود برابر یک هفتم تعداد راه‌های دادن ۶ کارت به ۷ نفر است که برابر $\binom{۱۲}{۶} = 942$ است پس جواب مساله برابر ۱۳۲ است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

لذا هر عدد فرد یا هر عدد مضرب ۴ ای این خاصیت را دارد. به علاوه با توجه به این که باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد مربع کامل بر ۴ برابر ۱ و صفر است، امکان ندارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی که به این صورت قابل نمایش است بر ۴ برابر دو باشد. حال با بررسی گزینه‌ها می‌بینیم که تنها گزینه‌ی (الف) در خواسته‌ی سؤال صادق است.

۲۵. صورت سوال ایراد دارد از آنجایی که BC بزرگ‌تر از AB است زاویه‌ی $\angle A_۱$ بزرگ‌تر از زاویه‌ی $\angle C_۳$ می‌شود، یعنی زاویه‌ی $\angle A_۱$ بزرگ‌تر از ۴۵° می‌شود که این با توجه به شرط اول مسئله امکان ندارد.

۲۶. این مسئله ایراد دارد!

$c - b \Big| c^۲ - b^۲$ پس اختلاف b و c توانی از ۲ است پس $c = b + ۲^s$ که s یک عدد صحیح نامنفی است.

$$(b + ۲^s)^۲ - b^۲ = ۲^{s+۱}(b + ۲^{s-۱}) = ۲^k \Rightarrow b = ۲^{k-s-۱} - ۲^{s-۱}$$

که برای $s = ۱, ۲, \ldots, \left\lfloor \frac{k-۱}{۲} \right\rfloor$ یک جواب طبیعی به ما می‌دهد. پس جواب $\left\lfloor \frac{k-۱}{۲} \right\rfloor$ است که در گزینه‌ها موجود نیست.

۲۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

$$۳xy - y - ۵x = ۱۳ \Rightarrow x = \frac{y + ۱۳}{۳y - ۵} \Rightarrow \; ۳y - ۵ \mid y + ۱۳ \Rightarrow \Big| ۳y - ۵ \Big| \leq y + ۱۳$$

دقت کنید که اگر x طبیعی است پس مخرج کسری که با x برابر است یعنی $۳y - ۵$ مثبت است و لذا

$$۳y - ۵ \leq y + ۱۳ \Rightarrow ۲y \leq ۱۸ \Rightarrow y \leq ۹$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

با امتحان کردن yها مشخص می‌شود ۳ جواب $\begin{cases} x = ۱۵ \ , y = ۲ \\ x = ۴ \ , y = ۳ \\ x = ۱, y = ۹ \end{cases}$ موجود است .

۲۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

راه حل اول :

$0 \leq \{$

اگر این مقادیر را امتحان کنیم می بینیم برای ۳۰ مقدار زیر درست است :

0,6,10,12,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28,31,32,33,34,35,37,38,39,41,43, 44,47,49,53,59

راه حل دوم :

فرض کنید $0 \leq r < 30$ که $a = 30k + r$ در این صورت :

یعنی: $30k + r + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor$ پس : $k = r - \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor$

پس برای هر مقدار $0 \leq r < 30$ یک k خواهیم داشت یعنی تعداد جواب‌ها ۳۰ تا است .

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

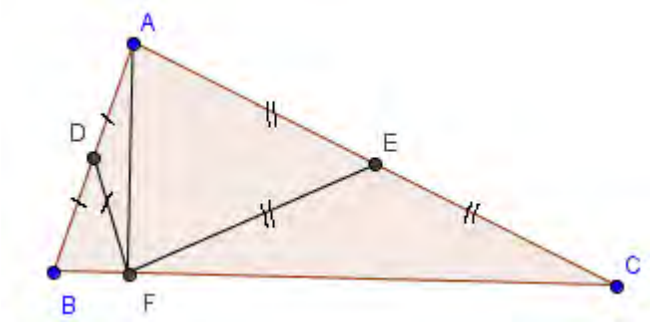
دقت کنید که چون در نمایش یک عدد جالب همه‌ی اعداد ۰، ۱،... ، ۹ ظاهر می‌شوند هر عدد جالب باید بر ۹ هم بخش‌پذیر باشد پس هر عدد جالب بر ۹۹۹۹۹ بخش‌پذیر است. حال فرض کنید n عددی جالب باشد و x و y به ترتیب ۵ رقم سمت چپ و سمت راست n باشند. در این صورت $n = ۱۰^۵x + y$. دقت کنید که

$$۰ \equiv n \equiv ۱۰^۵x + y \equiv x + y \ (\text{به پیمانه‌ی } ۹۹۹۹۹)$$

پس $x + y$ باید بر ۹۹۹۹۹ بخش‌پذیر باشد، اما x و y هر دو ۵رقمی و با توجه به متفاوت بودن ارقامشان متمایز هستند، پس $۰ < x + y < ۲ \times ۹۹۹۹۹$. این نتیجه می‌دهد که $x + y = ۹۹۹۹۹$. با توجه به این که در ایجاد مجموع ۹ در یک جمع ده بر یک نداریم پس مجموع هر رقم در x با رقم متناظرش در y برابر ۹ است. پس کافی است پنج رقم x را انتخاب کنیم. برای انتخاب رقم سمت چپ ۹ حالت برای رقم بعدی ۸ حالت و رقم‌های بعدی به ترتیب ۶، ۴ و ۲ حالت داریم. پس در کل تعداد چنین اعدادی $۹ \times ۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۴۵۶$ خواهد بود.

۳۰. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ادعا می‌کنیم عدد ۴ و همه‌ی اعداد طبیعی بیش‌تر یا مساوی ۶ مثلثی هستند. برای ۴ با توجه به این که میانه‌ی وارده بر وتر نصف وتر است شکل زیر را در نظر می‌گیریم.



اگر برای یکی از مثلث‌های درونی شکل بالا این کار را انجام دهیم نتیجه می‌شود که ۷ هم عددی مثلثی است. حال دقت کنید که اگر n مثلثی باشد، می‌توان ابتدا یک ارتفاع مثلث را رسم کرد و به وسیله‌ی روش بالا یکی از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ایجاد شده را به دو مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کرد. به علاوه چون n مثلثی است می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر را به n مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کرد. پس در کل مثلث به $n + ۲$ مثلث متساوی‌الساقین تقسیم شده است و در نتیجه $n + ۲$ هم مثلثی است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حال با توجه به این که ۴ مثلثی است و اگر n مثلثی باشد $n+۲$ هم مثلثی است، همه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲ مثلثی هستند. به علاوه از آن‌جا که ۷ مثلثی است همه‌ی اعداد فرد بزرگ‌تر از ۵ هم مثلثی هستند. پس ادعایمان ثابت شد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

سؤال‌های آزمون مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱) چند تا عدد صحیح x که $۹ < x < ۱۵$ وجود دارد که دنباله‌ی متناهی

$$۱, ۲, ۶, ۷, ۹, x, ۱۵, ۱۸, ۲۰$$

مشتمل بر هیچ سه‌جمله‌ای نباشد که تشکیل یک تصاعد عددی بدهند؟

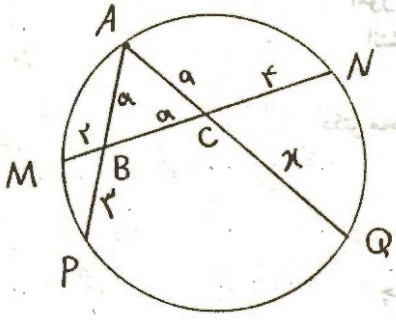
الف ـ صفر ب ـ ۱ ج ـ ۲ د ـ ۳ هـ ـ ۵

۲) دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ «برگشتی خطی» نامیده می‌شود اگر و فقط اگر اعداد صحیح p و q موجود باشند که $a_{n+۲} = pa_{n+۱} + qa_n$. دو جمله‌ی بعدی در دنباله‌ی $۲, ۵, ۱۴, ۴۱, \ldots$ کدام‌یک از دو عدد زیر است با این شرط که این دنباله «برگشتی خطی» باشد؟

الف ـ ۲۸ و ۸۲ ب ـ ۲۸ و ۱۲۳ ج ـ ۱۳۶ و ۳۲۸ د ـ ۱۲۲ و ۳۶۵ هـ ـ ۲۴۴ و ۴۸۷

۳) عدد a طبیعی بوده و b و c صحیح‌اند. اگر معادله‌ی $P(x) = ax^۲ + bx + c = ۰$ دو ریشه‌ی متمایز در فاصله‌ی باز $(۰, ۱)$ داشته باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

الف ـ ۲ ب ـ ۳ ج ـ ۴ د ـ ۶ هـ ـ ۷



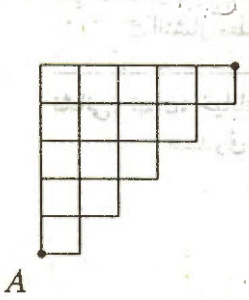
۴) دایره‌ی Ω به شعاع r و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a درون آن مفروض است اگر A روی محیط دایره باشد و ضلع BC دایره را در نقاط N و M، و AB و AC دایره را به‌ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند و $\overline{BP} = ۳$، $\overline{MB} = ۲$، و $\overline{CN} = ۴$، آنگاه مقدار $\overline{CQ}$ کدام است؟

الف ـ ۴ ب ـ ۴٫۵ ج ـ ۵ د ـ ۵٫۵ هـ ـ با اطلاعات مسئله نمی‌توان آن را به‌دست آورد.

۵) عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، و ... به این صورت تعریف شده‌اند که $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = ۲a_n + ۵$.
کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند در بین a_iها ظاهر شود؟

الف ـ ۵۶۲۳۰۱ ب ـ ۷۸۶۴۲۷ ج ـ ۱۶۴۸۵ د ـ ۳۱۲۳ هـ ـ ۵۱۵۱۹

۶) تعداد مسیرهای از نقطه‌ی A به B را بیابید در صورتی که بدانیم در هر مرحله می‌توان فقط یک گام به راست یا یک گام به سمت بالا برداشت.



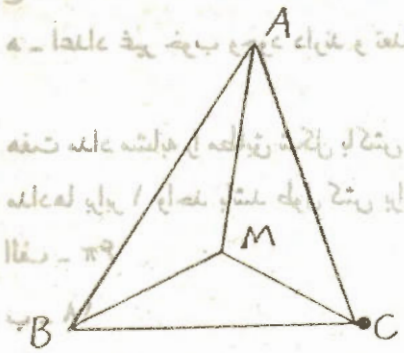
الف ـ ۶۱ ب ـ ۱۳۲ ج ـ ۱۲۶ د ـ ۱۲۷ هـ ـ ۶۲

sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۷) چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد $۱۲۵^{۰}$، $۴۵^{۲۰}$، و $۵۰^{۱۰۰}$ باشد؟

الف ـ ۱ ب ـ ۲۶۳۱۲ ج ـ ۲۶۳۱۳ د ـ ۲۶۱۵۱ ه ـ ۲۶۱۵۰

۸) نقطه‌ی M درون مثلث غیرمتساوی‌الساقین ABC مفروض است. کدام جمله‌ی زیر در مورد مقدار $MA + MB + MC$ درست است؟



الف ـ همیشه از بزرگ‌ترین ضلع مثلث، کوچک‌تر است.

ب ـ همیشه از جمع دو ضلع بزرگ‌تر مثلث، کوچک‌تر است.

ج ـ همیشه از جمع دو ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر است.

د ـ همیشه از ۳ برابر شعاع دایره‌ی محیطی، بزرگ‌تر است.

ه ـ از جمع دو ارتفاع بزرگ‌تر، کوچک‌تر است.

۹) از روی عدد a می‌توانیم به b برسیم، اگر $\frac{\text{ک‌م‌م}[a,b]}{\text{ب‌م‌م}(a,b)}$ عددی اول باشد و می‌نویسیم $a \to b$. کدام‌یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

الف ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$ با زنجیره‌ای مثل $a \to b \to c \to \cdots \to k$ می‌توان به هر $k \in \mathbb{N}$ای رسید.

ب ـ با هر عدد $a \in \mathbb{N}$ و اعداد $b_1, \ldots, b_m$ که داده شده‌اند، زنجیره‌ای با آغاز از a وجود دارد که همه‌ی b_iها در آن ظاهر شوند و هر کدام یک‌بار.

ج ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، زنجیره‌ای وجود دارد که تنها شامل مضارب a باشد و همه‌ی مضارب a در آن ظاهر شوند. (زنجیره‌ای نامتناهی)

د ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همه‌ی اعداد مربع کامل در آن آمده باشند. (زنجیره‌ای نامتناهی)

ه ـ با آغاز از هر عدد $a \in \mathbb{N}$، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همه‌ی اعداد آن کمتر از b باشند و همه‌ی اعداد کمتر از b در آن آمده باشند، هر یک دقیقاً یک‌بار ($a > b$ عددی داده‌شده است).

۱۰) فرض کنیم $a_{۱۳۷۹}, \ldots, a_2, a_1$ همان اعداد $۱, ۲, \ldots, ۱۳۷۹$ هستند که با یک ترتیب دل‌خواه ظاهر شده‌اند. تعریف می‌کنیم: $f_i = |a_i - i|$ و قرار می‌دهیم: $L = f_1 \times f_2 \times \cdots f_{۱۳۷۹}$. با درنظر گرفتن تمام ترتیب‌ها، L مساوی چند تا از اعداد ۱ تا ۱۰ می‌تواند باشد؟

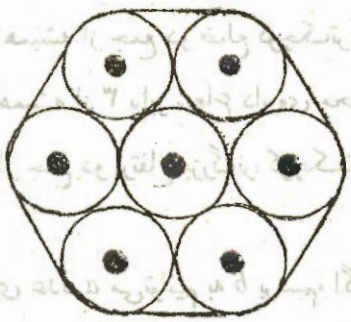
الف ـ هیچ مقدار ب ـ ۳ ج ـ ۵ د ـ ۷ ه ـ تمام مقادیر

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۱) فرض کنید a_1 عددی طبیعی باشد و a_{n+1} را برابر بزرگ‌ترین عامل اول در $a_n + 1$ تعریف کنیم. a_1 را خوب می‌نامیم اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ متناظر با آن، سرانجام متناوب باشد. کدام حکم درست است؟

الف ـ تعداد اعداد خوب، متناهی است.
ب ـ تعداد اعداد غیر خوب، نامتناهی است.
ج ـ همه‌ی اعداد خوب هستند.
د ـ همه‌ی اعداد غیرخوب هستند.
هـ ـ اعداد غیر خوب وجود دارند و تعداد آن‌ها متناهی است.

۱۲) هفت مداد مشابه را مطابق شکل باکش بسته‌ایم. اگر شعاع مدادها برابر ۱ واحد باشد طول کش برابر است با:



الف ـ 6π
ب ـ 18
ج ـ $12 + \pi$
د ـ $12 + 2\pi$
هـ ـ $18 + 2\pi$

۱۳) در یکی از اقمار سیاره‌ی مریخ مردم برای انتخاب رئیس این‌گونه عمل می‌کنند که اگر n نفر نامزد ریاست باشند، هر فرد به‌هنگام رأی دادن بر حسب علاقه‌ی خود امتیازهای متفاوتی از بین اعداد ۱ تا n به هر کدام از نامزدها نسبت می‌دهد. سپس امتیازهای هر کدام از نامزدها را جمع می‌زنند و کسی که بیش‌ترین امتیاز را بیاورد رئیس می‌شود. در این دوره سه نفر A، B، و C نامزد شده‌اند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف ـ اگر بیشتر مردم (بیش از نصف) A را بر B ترجیح دهند و بیشتر مردم B را بر C ترجیح دهند، آنگاه بیشتر مردم A را بر C ترجیح می‌دهند.
ب ـ اگر بیشتر مردم A را بر B ترجیح دهند و بیشتر مردم A را بر C ترجیح دهند، A رئیس می‌شود.
ج ـ اگر کمتر از نصف مردم A را هم بر B و هم بر C ترجیح دهند، ممکن است A رئیس شود.
د ـ اگر همه‌ی کسانی که A را بر B ترجیح می‌دهند، C را بر A ترجیح دهند، ممکن است B رئیس شود.
هـ ـ اگر ابتدا بین هر سه و سپس بین دو نفری که بیشترین امتیازها را کسب کرده‌اند، انتخابات برگزار شود (انتخابات دومرحله‌ای)، ممکن است نتایج آن با نتایج انتخابات یک‌مرحله‌ای متفاوت باشد.

۱۴) تعداد جواب‌های معادله‌ی $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ در اعداد طبیعی چند تاست؟

الف ـ صفر ب ـ ۲ ج ـ ۴ د ـ ۸ هـ ـ بی‌نهایت

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۱۵) فرض کنید صفحه‌ی شطرنجی $2n \times 2n$ را بخواهیم با یک عدد موزاییک 2×2 و $n^2 - 1$ تا موزاییک 1×4 بپوشانیم. کدام یک از احکام زیر، درست است؟

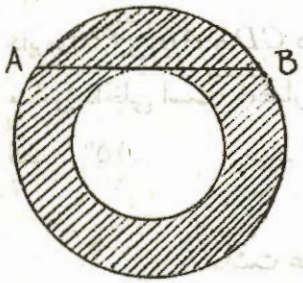
الف ـ به‌ازای همه‌ی nها، می‌توان این کار را کرد.

ب ـ به‌جز برای متناهی تا n، می‌توان این کار را کرد.

ج ـ به‌جز برای متناهی تا n، هرگز نمی‌توان این کار را کرد.

د ـ فقط برای nهای فرد می‌توان این کار را کرد.

هـ ـ برای nهای مربع کامل می‌توان این کار را کرد.



۱۶) در شکل مقابل می‌دانیم طول پاره‌خط AB برابر ۱۴ واحد است. اگر مساحت قسمت هاشور خورده را S بنامیم، در مورد S قوی‌ترین حکم کدام است؟

الف ـ $49\pi \le S \le 98\pi$ ب ـ $14\pi \le S \le 49\pi$

ج ـ $S = 49\pi$ د ـ $S \ge 14\pi$ هـ ـ $S \le 98\pi$

۱۷) بین ۱۰۰ دانش آموز ۷ آزمون برگزار کرده‌ایم، و در هیچ یک از آزمون‌ها هیچ دو دانش‌آموزی نمره‌ی مساوی نگرفته‌اند. هر دانش‌آموزی که حداقل در یکی از امتحانات نفر اول شده باشد و یا حداقل در ۴ آزمون بین ۶ نفر اول باشد جایزه می‌گیرد. هم‌چنین این شرط را نیز داریم که هر دانش‌آموزی حداکثر یک جایزه می‌گیرد. حداکثر چند دانش‌آموز می‌توانند جایزه بگیرند؟

الف ـ ۱۵ نفر ب ـ ۱۴ نفر ج ـ ۱۳ نفر د ـ ۱۲ نفر هـ ـ ۷ نفر

۱۸) فرض کنید $a, b, c > 0$ و داشته باشیم $a + b = c$. حداقل مقدار عبارت $A = \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 b^2}$ کدام است؟

الف ـ ۹ ب ـ ۱۵ ج ـ ۱۸ د ـ ۲۱ هـ ـ ۳

۱۹) برای هر $m \in \mathbb{N}$، f_m را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$f_1 = 1, f_2 = 11, f_3 = 111, \quad \ldots \quad \text{مثلاً،} \quad f_m = \underbrace{111\ldots1}_{m \text{ بار}}$$

چندتا از f_mها را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی غیرصفر نوشت؟

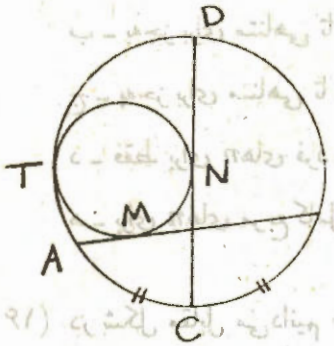
الف ـ ۰ ب ـ ۱ ج ـ ۲ د ـ ۳ هـ ـ بی‌نهایت

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۰) اعداد ۱, ۲, ۳, . . . , ۶۱ را طوری در یک ردیف نوشته‌ایم که هر عدد مجموع اعداد قبل از خود را می‌شمارد. اگر عدد اول در این ردیف ۶۱ و عدد دوم ۱ باشد، عدد سوم کدام‌یک از اعداد زیر است؟

الف ـ ۲ ب ـ ۴ ج ـ ۳۰ د ـ ۳۱ هـ ـ نمی‌توان پیدا کرد.

۲۱) دایره‌ی C روی صفحه مفروض است. چهار نقطه‌ی A, C, B, D طوری روی دایره‌ی C قرار دارند که داریم:



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} = ۶۰^\circ = ۲\overset{\frown}{AC}$$

دایره‌ی C' بر AB و CD در نقاط M و N و بر دایره‌ی C در نقطه T مماس داخلی است. مقدار زاویه‌ی $\overset{\frown}{MTN}$ کدام است؟

الف ـ ۱۵° ب ـ ۲۰° ج ـ ۲۲٫۵° د ـ ۲۷٫۵° هـ ـ ۳۰°

۲۲)

داشت عباس‌قلی‌خان پسری — پسر بی‌ادب و بی‌هنری
اسم او بود علی‌مردان‌خان — اهل منزل ز دستش به امان

علی‌مردان از دست عباس‌قلی‌خان گریخته و داخل حوضی به شعاع ۱ پریده. عباس‌قلی‌خان از آن رو که به فن شنا آشنا نیست، در لبه‌ی حوض ایستاده. سرعت دویدن او چهار برابر سرعت شناکردن علی‌مردان است، اما بیرون از حوض علی‌مردان سریع‌تر از وی می‌دود. حداقل فاصله‌ی آن دو چه‌قدر باشد تا علی‌مردان بتواند خود را به لبه‌ی حوض رسانده و فرار کند؟

الف ـ ۱ ب ـ $۲ - \frac{\pi}{۴}$ ج ـ $\frac{\pi}{۲}$

د ـ خوشبختانه هیچ‌گاه نمی‌تواند فرار کند. هـ ـ متأسفانه همیشه می‌تواند فرار کند.

۲۳) دو نفر مشغول خوردن تخمه از یک ظرف هستند. قرار است که به‌نوبت از آن ظرف تخمه بردارند. هر نفر مجاز به برداشتن ۱، ۲، یا ۵ تخمه در نوبت خودش است. هر کس که آخرین تخمه (یا تخمه‌ها) را بردارد برنده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۷ باشد، نفر دوم برنده است.

ب ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۸ باشد، نفر دوم برنده است.

ج ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۹ باشد، نفر دوم برنده است.

د ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر اول برنده است.

هـ ـ در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر دوم برنده است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

۲۴) برای اعداد حقیقی و مثبت x، y، و z داریم $xyz(x+y+z)=1$. حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)$ کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف ـ $\frac{4}{\sqrt[3]{3}}$ ب ـ $\frac{1}{2}$ ج ـ $\frac{4}{\sqrt{3}}$ د ـ ۲ هـ ـ $\frac{5}{2}$

۲۵) فرض کنید شخصی یک عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ را انتخاب کرده باشد. می‌توانیم هر بار به او یک عدد بدهیم و او بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این عدد و عدد اولیه را به ما بگوید. با چند مرحله حتماً می‌توانیم عدد او را بیابیم؟

الف ـ ۱۰۰ ب ـ $\binom{100}{2}$ ج ـ به‌تعداد اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰

د ـ به‌تعداد اعداد مرکب کوچک‌تر از ۱۰۰ هـ ـ هیچ‌کدام

۲۶) در یک کارخانه هر کارگر با تعدادی از کارگرها دوست است و به‌اندازه‌ی میانگین حقوق همه‌ی دوستانش، حقوق می‌گیرد. کدام گزینه درست است؟

الف ـ کارگری وجود دارد که به‌اندازه‌ی میانگین بقیه‌ی کارگرها حقوق می‌گیرد.

ب ـ حقوق هیچ کارگری بیشتر از دو برابر حقوق عباس‌قلی جوش‌کار (عباس‌قلی‌خان!) نیست.

ج ـ حقوق همه‌ی کارگرها برابر است.

د ـ حقوق هر دو دوست برابر است، ولی حقوق همه لزوماً برابر نیست.

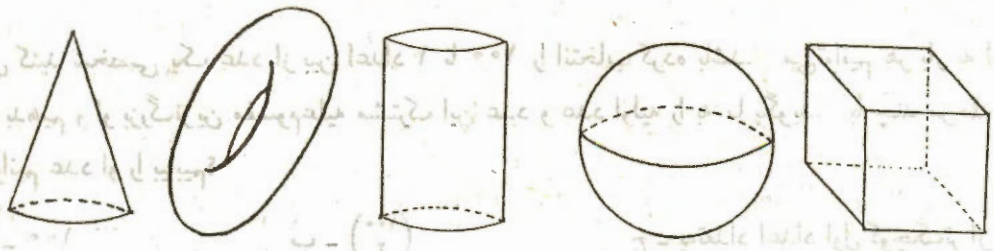
هـ ـ هیچ‌کدام

سؤال‌های ۲۷ تا ۳۰ با توجه به توضیحاتی که قبل از آن‌ها آمده است، حل می‌شوند. پیش از خواندن صورت سؤال‌ها، ابتدا متنی که به هر قسمت مربوط می‌شود را با دقت کافی مطالعه کنید. این سؤال‌ها به‌گونه‌ای طرح شده‌اند که یک موضوع جدید را با بیان ساده معرفی می‌کنند و توانایی درک مفاهیم را می‌سنجند. توجه داشته باشید که نمره‌ی مثبت و منفی‌ای که برای هر یک از این سؤال‌ها در نظر گرفته می‌شود دو برابر سؤال‌های عادی است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

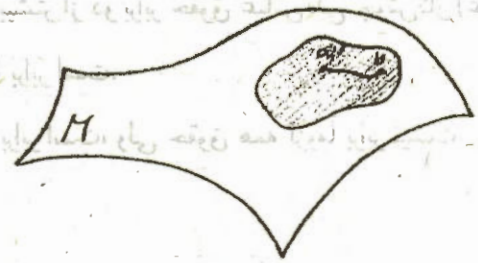
با توجه به توضیحات زیر به دو سؤال ۲۷ و ۲۸ پاسخ دهید.

منظور از یک «رویه» شکلی است که در آن حول و حوش هر نقطه، شبیه صفحه‌ای احتمالاً کج و کوله است، مثل سطح یک مکعب، کره، استوانه، چنبره (تیوپ ماشین) و یا یک مخروط.



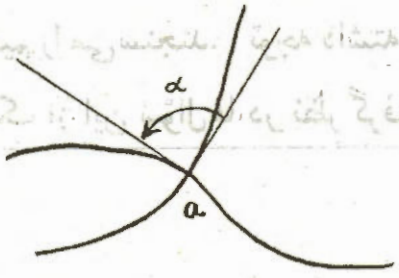
یک «رویه» را «هموار» می‌گوییم اگر در هیچ نقطه‌ای شکستگی یا تیزی نداشته باشد. همه‌ی مثال‌های بالا غیر از مکعب و مخروط هموار هستند.

می‌توان ثابت کرد که اگر a نقطه‌ای روی «رویه‌ی هموار» M باشد، ناحیه‌ای کوچک اطراف a وجود دارد که اگر b نقطه‌ای از این ناحیه باشد، آنگاه a و b را می‌توان با یک خم داخل رویه طوری به هم وصل کرد که طول این خم کمترین مقدار ممکن باشد.



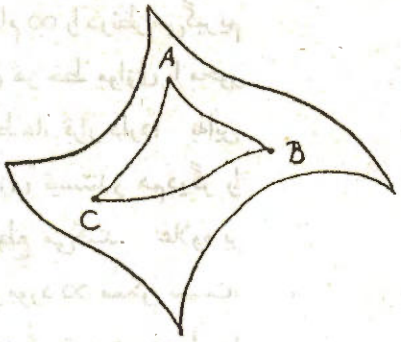
با کنار هم گذاشتن این خم‌های کوچک، به‌طوری که شکستگی به‌وجود نیاید، خم‌های بلندتری ساخته می‌شود که به نوعی نقش خط‌ها را در صفحه بازی می‌کنند. به این خم‌ها «شبه‌خط» می‌گوییم). می‌توان نشان داد که «شبه‌خط»های کره همان دایره‌های عظیمه‌اند.

منظور از یک «خم هموار» مسیر حرکت یک متحرک است که تیزی ندارد. یعنی در هر نقطه می‌توان مماسی بر آن رسم کرد. فرض کنید دو خم هموار در نقطه‌ی a همدیگر را قطع کرده باشند. منظور از زاویه‌ی این دو خم زاویه‌ی بین مماس‌های آنها است.



@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

اگر سه نقطه‌ی روی یک «رویه‌ی هموار» را دوبه‌دو با شبه‌خط‌ها به‌هم وصل کنیم یک «مثلث» به‌وجود می‌آید. مجموع سه زاویه‌ی یک «مثلث» می‌تواند ۱۸۰° نباشد!



۲۷) کدام گزینه درست است؟

الف ـ از هر دو نقطه‌ی کره حداکثر ۲ شبه‌خط می‌گذرد.

ب ـ مجموع زوایای یک «مثلث» روی کره به شعاع یک مقداری ثابت و بیشتر از ۱۸۰° است.

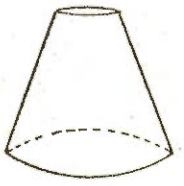
ج ـ مجموع زوایای یک «مثلث» روی کره عددی بین ۱۸۰° و ۹۰۰° است.

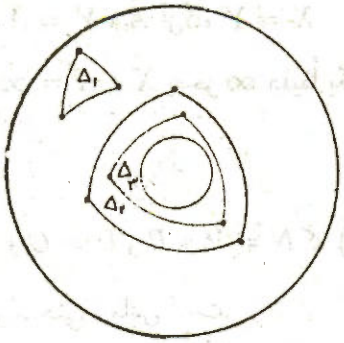
د ـ مجموع زوایای یک «مثلث» روی کره به شعاع یک‌تناسب با مساحت داخل مثلث است.

هـ ـ الف و ج

۲۸) کدام گزینه درست است؟

فرض کنید M یک مخروط ناقص باشد (یعنی مخروطی که سر آن را بریده‌اند). اگر $\triangle_1$، $\triangle_2$، و $\triangle_3$ «مثلث‌هایی» به شکل زیر روی M باشند، کدام درست است؟ (تصویر از بالا است.)





۱) مجموع زوایای $\triangle_1$، ۱۸۰° است.

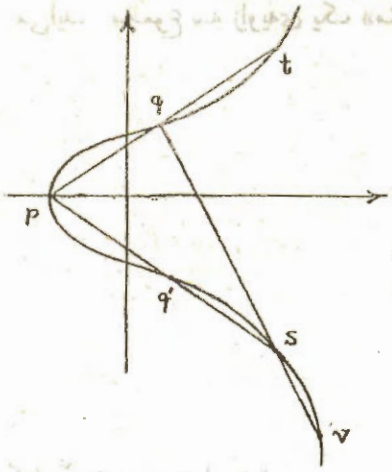
۲) مجموع زوایای $\triangle_2$ و $\triangle_3$ برابر است.

۳) مجموع زوایای $\triangle_2$ از دوتای دیگر بیشتر است.

الف ـ ۱ و ۳ ب ـ ۱ و ۲ ج ـ ۲ د ـ ۳ هـ ـ هیچ‌کدام

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

با توجه به توضیحات زیر به دو سؤال ۲۹ و ۳۰ پاسخ دهید.



منحنی $y^2 = x^3 + 1$ را در صفحه درنظر بگیرید. به‌طور نمادین یک موجود به نام ∞ را درنظر می‌گیریم و قرارداد می‌کنیم که ∞ روی هر خط موازی با محور yها، و فقط روی همین خط‌ها، قرار دارد! به‌این ترتیب این خط‌ها دیگر موازی نیستندو هم‌دیگر را دقیقاً در یک نقطه (∞) قطع می‌کنند. علاوه بر این دیگر به‌کار بردن شهود در مورد ∞ ممکن نیست، چون ∞ هم در بالای صفحه است و هم در پایین! مجموعه‌ی نقاط منحنی به‌همراه ∞ را M می‌نامیم.

برای دو نقطه‌ی A و B در M، خط گذرنده از A و B را درنظر می‌گیریم. اگر این خط از نقطه‌ی سومی از M گذشت، قرینه‌ی آن نقطه نسبت به محور xها را با $A * B$ نشان می‌دهیم. اگر روی خط مورد نظر نقطه‌ی دیگری از M نبود ولی در یکی از نقاط A و B خط بر منحنی مماس بود، نقطه‌ی برخورد سوم را همان محل تماس فرض کنید. درضمن تعریف می‌کنیم $\infty * \infty = \infty$. می‌توان نشان داد که $A * B$ همواره تعریف می‌شود و در تعریف آن ابهامی نیست (یعنی هیچ خطی M را در ۴ نقطه قطع نمی‌کند). به‌علاوه می‌توان نشان داد که $A * (B * C) = (A * B) * C$. توجه کنید که وصل کردن A به A با یک خط یعنی رسم مماس بر منحنی در نقطه‌ی A. هم‌چنین تعریف می‌کنیم که $A^n = \underbrace{A * A * \cdots * A}_{n \text{ بار}}$

۲۹) کدام گزینه غلط است؟

الف ـ عضو $E \in M$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $A \in M$ داریم $A * E = A$

ب ـ برای هر $A, B \in M$، $x \in M$ وجود دارد که $A * X = B$

ج ـ اگر $A * Y = A * X$ آن‌گاه $X = Y$

د ـ معادله‌ی $X * X = \infty$ به‌جز ∞ دقیقاً یک جواب دیگر دارد.

هـ ـ هیچ‌کدام

۳۰) فرض کنید $U = Q * S$ و $N = V * P$ که $P = (-1, 0)$. کدام گزینه غلط است؟

الف ـ NS بر منحنی مماس است.

ب ـ مماس بر منحنی در Q از $U * P$ می‌گذرد.

ج ـ $S = (U * P) * T$

د ـ تنها یک خط عمودی مماس بر منحنی وجود دارد.

هـ ـ اگر $A^{11} = A^7$ و $A^{20} = A^{15}$ آن‌گاه $A = \infty$

«موفق باشید»

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پاسخ مرحله اول «هجدهمین دوره» المپیاد ریاضی کشور

۱ ـ ب

فقط دنباله‌ی ۲۰ ، ۱۸ ، ۱۵ ، ۱۴ ، ۹ ، ۷ ، ۶ ، ۲ ، ۱ مشتمل به هیچ سه‌تایی که تشکیل تصاعد عددی بدهند نیست. برای حالت‌هایی که $a \in \{10, 11, 12, 13\}$ مثال‌های نقض زیر را می‌آوریم.

$a = 10$	۲ ، ۶ ، ۱۰	۲ ، ۱۰ ، ۱۸	۱۰ ، ۱۵ ، ۲۰	
$a = 11$	۲ ، ۱۱ ، ۲۰	۷ ، ۹ ، ۱۱	۷ ، ۱۱ ، ۱۵	
$a = 12$	۲ ، ۷ ، ۱۲	۶ ، ۹ ، ۱۲	۶ ، ۱۲ ، ۱۸	۹ ، ۱۲ ، ۱۵
$a = 13$	۱ ، ۷ ، ۱۳	۶ ، ۱۳ ، ۲۰		

۲ ـ د

$$a_3 = pa_2 + qa_1 \Rightarrow 14 = 5p + 2q \qquad (1)$$

$$a_4 = pa_3 + qa_2 \Rightarrow 41 = 14p + 5q \qquad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $p = 4 \ , \ q = -3$

در نتیجه: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

$$a_5 = 4a_4 - 3a_3 = (4\times41) - (3\times14) = 122$$

$$a_6 = 4a_5 - 3a_4 = (4\times122) - (3\times41) = 365$$

۳ ـ د

مبین p مثبت است پس $b^2 - 4ac$ در نتیجه $b^2 - 4ac \geq 1$ زیرا a و b و c صحیح هستند. p دو ریشه‌ی متمایز بین صفر و یک دارد بنابه روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم: $0 < \frac{c}{a} < 1$ و $0 < \frac{b}{a}$

با توجه به مثبت بودن a داریم: $a > c > 0$ و $b > 0$. از طرفی چون a مثبت است مقدار $p(x)$ در دو سر بازه‌ی $(0 , 1)$ مثبت خواهد بود به‌ویژه $p(1) > 0$ در نتیجه $a+c > -b$. طرفین این نامساوی مثبت هستند که اگر آنها را مجذور کنیم داریم: $a^2 + 2ac + c^2 > b^2$. در نتیجه $(a - c)^2 > b^2 - 4ac$ که مجدداً از آنجاکه a و b و c صحیح هستند نتیجه می‌گیریم که: $a - c \geq 2$. یعنی $c \leq a - 2$

اینک اگر $a \leq 4$ بگیریم تنها سه حالت ممکن خواهد بود:

$$\begin{matrix} a = 4 \\ c = 2 \end{matrix} \Rightarrow 4 > b^2 - 32 > 0$$

$$\begin{matrix} a = 4 \\ c = 1 \end{matrix} \Rightarrow 9 > b^2 - 16 > 0$$

$$\begin{matrix} a = 3 \\ c = 1 \end{matrix} \Rightarrow 4 > b^2 - 12 > 0$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

ولی در هیچ‌کدام از حالت‌های فوق مقدار صحیحی برای b به‌دست نمی‌آید و در نتیجه $a \geq 5$ می‌باشد که در این حالت مشکلی پیش نمی‌آید و چند جمله‌ای $5x^2 - 5x + 10$ برای حالت $a = 5$ و چندجمله‌ای $6x^2 - 5x + 1$ برای حالت $a = 6$ در شرایط موردنظر صدق می‌کنند.

۴ـ ج

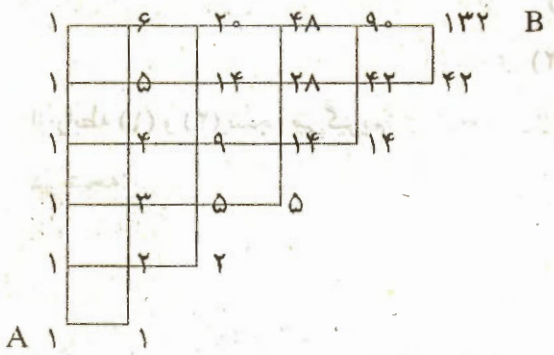
بنابر قوت داریم:

$$\begin{cases} 3a = 2(a+4) \Rightarrow a = 8 \\ ax = 4(a+2) \Rightarrow 8x = 40 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

۵ـ ب

در این دنباله همواره $a_n \overset{3}{\equiv} 1$. در بین گزینه‌های داده شده فقط عدد ۷۸۶۴۲۷ به هنگ ۳ با ۱ هم‌نهشت می‌باشد پس تنها این عدد می‌تواند در بین a_i ها ظاهر شود.

۶ـ ب



توجه کنید که برای هر سه‌تایی X ـــ Y ـــ Z تعداد مسیرهای مورد قبول از A به X برابر تعداد راه‌های A به Y به اضافه‌ی تعداد راه‌های از A به Z است و چون در ردیف اول عددهای سست داده شده ۱ است (تعداد راه‌های A به آنها ۱ است) با پرکردن جدول به عدد ۱۳۲ می‌رسیم.

۷ـ د

برای به‌دست آوردن جواب مسئله کافی است با توجه به اصل شمول و عدم شمول تعداد مقسوم‌علیه‌های هر سه عدد را با هم جمع کرده بعد تعداد مقسوم‌علیه‌های ب.م.م دو به‌دوی آنها را از مجموع به‌دست آمده کم کرده و در انتها تعداد مقسوم‌علیه‌ها مشترک هر سه عدد را به حاصل اضافه نماییم.

$12^{50} = 2^{100} \times 3^{50} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 101 \times 51$

$45^{20} = 5^{20} \times 3^{40} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 21 \times 41$

$50^{100} = 2^{100} \times 5^{200} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $= 101 \times 201$

$(12^{50}, 45^{20}) = 3^{40} \Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(12^{50}, 45^{20}) = 41$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

$(۱۲^{۵۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۲^{۱۰۰}$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۱۲^{۵۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۱۰۱$

$(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۵^{۲۰}$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}) = ۲۱$

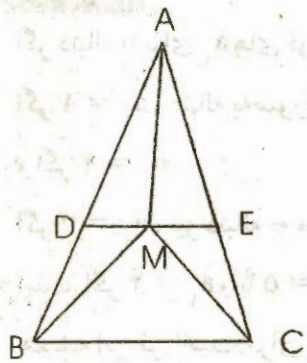
$(۴۱^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}, ۱۲^{۵۰}) = ۱$ ⇒ تعداد مقسوم‌علیه‌های $(۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}, ۱۲^{۵۰}) = ۱$

در نتیجه جواب مسئله برابر است با:

$$(۱۰۱\times۵۱) + (۲۱\times۴۱) + (۱۰۱\times۲۰۱) - (۱۰۱+۴۱+۲۱) + ۱ = ۲۶۱۵۱$$

۸ـ ب

چون اگر DE || BC داریم:



$$MC < ME + EC$$

$$MB < MD + BD$$

$$MA < \max\{AD , AE\}$$

$$DE < \min\{AD , AE\}$$

با جمع زدن ۴ نامساوی فوق داریم:

$$MA + MB + MC < AB + AC$$

(در راه حل فوق فرض شده است که BC کوچکترین ضلع مثلث است.)

۹ـ د

$a = ۱$, $b = ۴$

نمی‌توان چنین زنجیره‌ای یافت. دو حالت داریم $\begin{cases} ۱ \to ۲ \to X \\ ۱ \to ۳ \to X \end{cases}$

الف) تک تک عوامل a را حذف می‌کنیم و تک تک عوامل k را اضافه می‌کنیم.

ب) یک سری اعداد اول خیلی بزرگ درنظر می‌گیریم (بزرگتر از همه‌ی b_i ها). a را در یکی از آنها ضرب می‌کنیم و بعد عوامل a را کم کم حذف می‌کنیم و عوامل $b_۱$ را جایگزین می‌کنیم و در آخرین مرحله، آن عامل اولِ خیلی بزرگ را برمی‌داریم تا به $b_۱$ برسیم. به همین روش می‌توان از $b_۱$ به $b_۲$ رسید تا .....

ج) چون تکرارشدن اشکالی ندارد، می‌شود ابتدا از ۱ به ۲ رفت و بعد به ۱ برگشت. از ۱ به ۳ رفت و بعد دوباره به ۱ برگشت و به همین شکل در هر مرحله از ۱ به b می‌رویم (طبق الف) و بعد به ۱ برمی‌گردیم ... پس همه‌ی جملات این دنباله را در a ضرب می‌کنیم.

د) با روشی که در ابتدای قسمت (ج) گفتیم، زنجیره‌ای نامتناهی شامل همه‌ی اعداد به‌دست می‌آید.

۱۰ـ ج

ثابت می‌کنیم که L هیچ یک از اعداد فرد را نمی‌تواند بگیرد در حالی‌که کلیه‌ی اعداد زوج بین ۱ تا ۱۰ را می‌تواند بگیرد.

اینکه L زوج است بدیهی است چون داریم: $\sum f_i = \sum(a_i - i) = ۰$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس $\sum_{i=1}^{1999} (f_i)$ زوج است و چون مجموع فرد عدد، یک عدد زوج شده حتماً یکی از آنها زوج است پس L که حاصلضرب این اعداد است هم باید زوج شود همچنین بدیهی است که L تمام مقادیر زوج را می‌گیرد چون کافی است جایگشت $(1998, 1999) = (2k+4, 2k+5)(2k+2, 2k+3)(1, 2, 3, \ldots, 2k+1)$ را درنظر بگیریم مقداری که برای این جایگشت به‌دست می‌آید $2k$ است پس کلیه‌ی مقادیر زوج بین ۱ تا ۱۰ را می‌توان پوشاند. پس L می‌تواند با ۵ تا از اعداد ۱ تا ۱۰ مساوی شود.

۱۱ - ج

اگر دنباله را برای a_1 های کوچک بنویسیم متوجه‌ی نکته‌ای می‌شویم:

اگر $a_1 = 1$، دنباله به‌صورت روبرو است: $1, 2, 3, 2, 3, \ldots$

و اگر $a_1 = 2$ $2, 3, 2, 3, \ldots$

اگر $a_1 = 3$، نیز دنباله به صورت $3, 2, 3, 2, \ldots$

است. اگر $a_1 = 4$ و یا $a_1 = 5$ باز هم به تناوب ۳ ، ۲ در دنباله خواهیم رسید. پس می‌توانیم حدس بزنیم که همیشه این‌طور است. برای اثبات حدس، از استقرا استفاده می‌کنیم.

برای $a_1 \leq 3$ حکم در بالا، ثابت شد. حالا اگر حکم برای $1 \leq a_1 \leq n$ درست باشد $(n \geq 3)$ آن را برای $a_1 = n+1$ ثابت می‌کنیم. اگر $n+2$ اول نباشد داریم

$$a_2 \leq \frac{n+2}{2} \leq n$$

پس دنباله‌ای که از a_2 شروع می‌شود، متناوب خواهد شد (بنابر فرض استقرا) پس این اتفاق برای a_1 هم خواهد افتاد.

اگر $n+2$ اول باشد آنگاه $n+3$ اول نخواهد بود (چون $n \geq 3$) پس

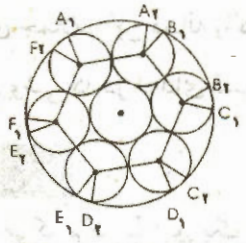
$$a_2 = n+2 \ , \ a_3 \leq \frac{n+3}{2} \leq n$$

با استقرا، حکم ثابت است.

یعنی تمام اعداد، خوبند!

۱۲ - د

محیط کش را می‌توان به ۶ پاره‌خط مماس بر دوایر که طول هر کدام ۲ می‌باشد و ۶ کمان که روی هم یک دایره به شعاع یک می‌سازند تقسیم کرد.



$$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2} = \overline{D_1D_2} = \overline{E_1E_2} = \overline{F_1F_2} = 2$$

$$X = \overset{\frown}{A_2B_1} + \overset{\frown}{B_2C_1} + \overset{\frown}{C_2D_1} + \overset{\frown}{D_2E_1} + \overset{\frown}{E_2F_1} + \overset{\frown}{F_2A_2} = 2\pi$$

در نتیجه طول کش برابر است با:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} + \overline{D_1D_2} + \overline{E_1E_2} + \overline{F_1F_2} + X = 6 \times 2 + 2\pi = 12 + 2\pi$$

۱۳ - الف و ب

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

هم گزینه‌ی (الف) و هم گزینه‌ی (ب) جواب است (هرچند قرار است فقط یک گزینه جواب باشد!)

نادرستی گزینه‌ی (الف):

C C A B B

A A B C C

B B C A A

بیشتر مردم C را بر A ترجیح می‌دهند ← ولی ← { بیشتر مردم A را بر B ترجیح می‌دهند ؛ بیشتر مردم B را بر C ترجیح می‌دهند }

نادرستی گزینه‌ی (ب):

A A A B B

B B B C C

C C C A A

A رئیس نمی‌شود { امتیاز A = ۱۱ ؛ امتیاز B = ۱۲ } { بیشتر مردم A را بر B ترجیح می‌دهند ؛ بیشتر مردم A را بر C ترجیح می‌دهند }

(ج):

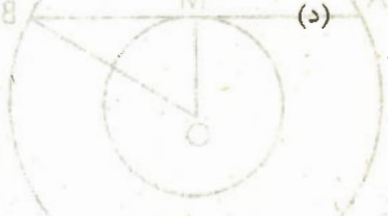
A A B B C

B B A A A

C C C C B

A رئیس می‌شود { امتیاز A = ۱۲ ؛ امتیاز B = ۱۱ } کمتر از نصف مردم A را هم بر B و هم بر C ترجیح می‌دهند.

(د)



C B B

A S C ⟶ B رئیس می‌شود

B C A

(ه) B B A A A تک مرحله‌ای ⟵ B رئیس می‌شود

C C B B B

A A C C C دو مرحله‌ای ⟵ A رئیس می‌شود

۱۲ ـ د

قرار دهید: $c = b + ۱$. در نتیجه داریم:

$$a^۲ + b^۲ = (b + ۱)^۲ + ۳ \Rightarrow a^۲ = ۲b + ۴$$

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس اگر $a = 2k$ داریم: $4k^2 = 2b + 4$

یعنی $b = 2k^2 - 2$ و با فرض $c = b + 1 = 2k^2 - 1$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} a = 2k \\ b = 2k^2 - 2 \\ c = 2k^2 - 1 \end{cases}$$ به‌ازای هر $k \in N$ این جواب‌ها برای (a,b,c) در معادله صدق می‌کنند پس این معادله بی‌نهایت جواب دارد.

$$(2k)^2 + (2k^2 - 2)^2 = (2k^2 - 1)^2 + 3$$

۱۵ ـ د

صفحه را به صورت ستونی سیاه و سفید (یکی در میان) رنگ می‌کنیم. چون مربع ۲×۲، و مستطیل‌های سطری ۱×۴ به تعداد مساوی از خانه‌های سفید و سیاه را می‌پوشانند، پس تعداد مستطیل‌های ۱×۴ ستونی که تماماً در خانه‌های سفید قرار دارند با آنهایی که کاملاً در خانه‌های سیاه قرار می‌گیرند، برابر است. پس تعداد کل مستطیل‌های ۱×۴ ستونی زوج است.

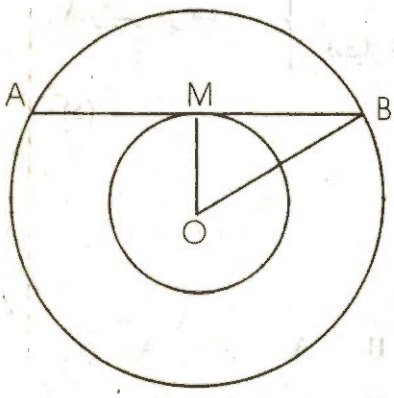
با همین استدلال، تعداد کل مستطیل‌های ۱×۴ سطری هم زوج است پس $n^2 - 1$ که تعداد مستطیل‌های ۱×۴ است زوج است، یعنی n فرد است.

حالا نشان می‌دهیم برای n های فرد، می‌توان این کار را کرد.

در واقع پوشاندن یک مستطیل ۲×۲n (که n فرد است) به وسیله‌ی یک مربع ۲×۲ و $n-1$ مستطیل ۱×۴ ساده است. پوشاندن مستطیل ۴×۲n با مستطیل‌های ۱×۴ هم ساده است و چون n فرد است پس با کنار هم گذاشتن یک مستطیل ۲×۲n و تعدادی مستطیل ۴×۲n، مربع ۲n×۲n حاصل می‌شود.

۱۶ ـ ج

فرض کنید شعاع دایره‌ی کوچک r و شعاع دایره‌ی بزرگ R باشد.



$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = r$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OM}^2 = R^2 - r^2 = 49 \quad (1)$$

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $S = 49\pi$

۱۷ ـ الف

ماکزیمم وقتی می‌شود که:

الف) هیچ دانش‌آموزی بیش از یک بار اول نشود.

ب) ۳۵ محل از رتبه‌ی دوم تا ششم، در ۷ آزمون، با ۸ دانش‌آموز (غیر رتبه اول) که هر کدام حداقل ۴ بار ظاهر می‌شوند پرگردد.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

رتبه \ آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	T	U	V	W	X	Y	Z
۲	A	B	C	D	E	F	G
۳	H	A	B	C	D	E	F
۴	G	H	A	B	C	D	E
۵	F	G	H	A	B	C	D
۶	E	F	G	H	—	—	—

پس حداکثر ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند جایزه بگیرند.

۱۸ ـ ج

به کمک اتحاد زیر داریم:

$$a + b = c \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2$$

(اثبات: با توان رساندن به‌دست می‌آید.)

پس چون $a + b = c$ داریم:

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2} = \frac{2(a^2 + ab + b^2)^2}{a^2b^2} = 2\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{ab}\right)^2$$

امّا $\frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \geq 3$ زیرا $(a - b)^2 \geq 0$. پس

$$A \geq 2 \times 9 = 18$$

برای حالت تساوی قرار می‌دهیم: $a = b = 1 \quad , \quad c = 2$

۱۹ ـ الف

$$f_m = \underbrace{11 \ldots . 1}_{m \text{ بار}}$$

$$m \geq 2 \Rightarrow f_m \overset{4}{\equiv} 11 \overset{4}{\equiv} 3 \qquad (1)$$

$$x \in N \Rightarrow \begin{cases} x^2 \overset{4}{\equiv} 0 \\ x^2 \overset{4}{\equiv} 1 \end{cases} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که برای $m \geq 2$ تساوی $f_m = x^2 + y^2$ نمی‌تواند برقرار باشد حالت $m=1$ نیز واضح است.

۲۰ ـ الف

داریم: $1 + 2 + 3 + \ldots + 61 = \frac{61 \times 62}{2} = 61 \times 31$

در ردیف موردنظر عدد سومی را a و عدد آخری را b می‌نامیم. می‌خواهیم a را پیدا کنیم: با توجه به فرض مسأله داریم:

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

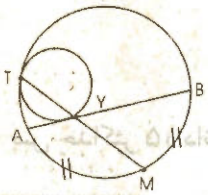
$a \mid ۶۱+۱ = ۲\times۳۱$ و $b \mid ۱+۲+ \ldots + ۶۱-b \Rightarrow b \mid ۱+۲+ \ldots + ۶۱ = ۶۱\times۳۱$

چون ۶۱ و ۳۱ هر دو عدد اولند به‌دست می‌آید:

$(a = ۲$ یا $a = ۳۱)$ و $(b = ۶۱$ یا $b = ۳۰)$

اما $b = ۶۱$ **قابل قبول** نیست زیرا ۶۱ قبلاً در خانه‌ی اول آمده پس به‌دست می‌آید $b = ۳۱$. حالا که خانه‌ی آخر یعنی b **برابر ۳۱ شد** پس $a = ۳۱$ هم امکان ندارد پس $a = ۲$ جواب موردنظر می‌باشد.

۲۱ - ج



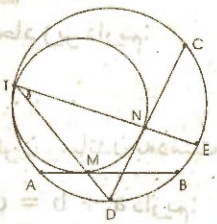
با توجه به شکل و بنابر قضیه‌ای می‌دانیم:

$$AM = BM$$

پس TM از C یعنی وسط AB می‌گذرد.

و طبق استدلال فوق اگر E وسط کمان DC باشد، E و N و T روی یک خط هستند پس:

کمان‌های $BE = y$ و $DE = z$ و $AC = CB = x$ را در نظر می‌گیریم داریم:



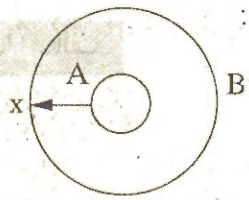
$$\begin{cases} x = ۳۰^\circ \\ z = x+y = ۳۰+y \\ y+z = ۶۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y = ۱۵^\circ \\ x = ۳۰^\circ \\ z = ۴۵^\circ \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{۲} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵^\circ$$

۲۲ - د

فرض کنید $r < \frac{۱}{۴}$ (مقدار دقیق آن را بعداً مشخص خواهیم کرد.)

اگر علی‌مردان خان روی دایره‌ای به مرکز وسط حوض و شعاع r بچرخد، سرعت زاویه‌ای‌اش از عباس‌قلی‌خان بیشتر خواهد بود. پس می‌تواند کاری کند که وضعیت روبرو رخ دهد:



A، علی‌مردان خان و B، عباس‌قلی‌خان است. حال اگر علی‌مردان خان مستقیم به سمت x شنا کند باید مسیری به طول $r - ۱$ را طی کند. عباس قلی‌خان هم برای رسیدن به نقطه x باید مسیری به طول π را طی کند. نشان می‌دهیم r را می‌توان طوری انتخاب کرد که $\pi > ۴(۱-r)$. یا به عبارتی $r > ۱ - \frac{\pi}{۴}$. برای وجود چنین r‌ای باید داشته باشیم $\frac{۱}{۴} > ۱ - \frac{\pi}{۴}$. یعنی $\pi > ۳$. که این هم درست است.

۲۳ - الف

با استقرا نشان می‌دهیم که اگر n یعنی تعداد تخمه‌ها به‌صورت $۳k$ باشد نفر دوم برنده است و در غیر این‌صورت نفر اول برنده خواهد بود.

برای $n = ۱$ و $n = ۲$ واضح است که نفر اول برنده خواهد بود.

برای $n = ۳$ اگر نفر اول یک تخمه بردارد، نفر دوم ۲ تخمه برمی‌دارد و اگر نفر اول ۲ تخمه بردارد نفر دوم یک تخمه برخواهد داشت پس برای $n = ۳$ نفر دوم برنده خواهد بود.

حال فرض می‌کنیم که حکم برای اعداد ۱ تا $۳k$ برقرار باشد ما حکم را برای اعداد $۳k+۱$ و $۳k+۲$ و $۳(k+۱)$ ثابت می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که حکم به‌ازای هر n برقرار است.

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

اگر تعداد تخمه‌ها $3k+1$ باشد نفر اول یعنی A، ۱ تخمه برمی‌دارد. در وضعیت جدید تعداد تخمه‌ها $3k$ می‌باشد و A نفر دوم خواهد شد و شخص B نفر اول می‌باشد پس طبق فرض استقرا A برنده می‌شود.
اگر تعداد تخمه‌ها $3k+2$ باشد نفر اول یعنی A، ۲ تخمه برمی‌دارد. در وضعیت جدید تعداد تخمه‌ها $3k$ می‌باشد و A نفر دوم خواهد شد و B نفر اول می‌باشد و طبق فرض استقرا A برنده می‌شود.
اگر تعداد تخمه‌ها $3(k+1)$ باشد نفر اول یعنی A اگر ۱ یا ۲ و یا ۵ تخمه بردارد در وضعیت جدید به‌ترتیب $3k+2$ یا $3k+1$ یا $3(k-1)+1$ تخمه باقی می‌ماند و چون در این وضعیت A نفر دوم و B نفر اول است طبق فرض استقرا B برنده خواهد شد.
پس طبق استقرای حکم برای هر n برقرار می‌باشد و گزینه‌ی (الف) گزینه‌ی صحیح می‌باشد.

۲۴ ـ د

داریم:

$$(x+y)(y+z) = xy + xz + y^2 + yz = xz + y(x+y+z) = xz + \frac{1}{xz}$$

و با توجه به اینکه $(\sqrt{xz} - \frac{1}{\sqrt{xz}})^2 \geq 0$ نامساوی $xz + \frac{1}{xz} \geq 2$ برقرار می‌باشد پس حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)$ برابر ۲ است.

۲۵ ـ ه

نشان می‌دهیم که یک سؤال کافی است. توجه کنید که $2^7 = 128 > 100$
پس اگر $1 \leq a \leq 100$، p عددی اول و $p^k \mid a$ آنگاه $k \leq 7$. حال اگر $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰ باشند. m را به‌صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $m = p_1^7 p_2^7 \ldots p_n^7$
واضح است که $(n, m) = n$
پس کافی است در اولین سؤال عدد m را بگوییم.

۲۶ ـ د

می‌توان هر کارگر را با یک نقطه نمایش داد و در صورتی که دو کارگر دوست باشند نقطه‌های متناظر آنها را به‌هم وصل کرد. با این کار یک گراف به‌دست می‌آید، که شامل یک یا چند مؤلفه همبندی است. مثال زیر نشان می‌دهد که گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) نادرست هستند.



عباس قلی‌خان

توجه کنید که میانگین حقوق همه‌ی کارگرها $\frac{9}{5}$ است.
حال نشان می‌دهیم که (د) درست است. در واقع حقوق افراد یک مؤلفه همبندی گراف، مقدار ثابتی است. فرض کنید در یک مؤلفه بیشترین مقدار حقوق M باشد. حقوق رأس‌های متصل به این رأس از M تجاوز نمی‌کند و در ضمن میانگین این مقدار هم M است. پس حقوق همه دوستان این کارگر M است. با تکرار همین کار نتیجه می‌شود که حقوق همه افراد یک مؤلفه همبندی برابر M است.

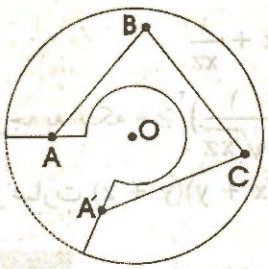
۲۷ ـ ج

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

از دو نقطه‌ی متقاطع بی‌نهایت دایره‌ی عظیمه می‌گذرد. پس گزینه‌ی (الف) نادرست است. اگر سه نقطه روی یک دایره‌ی عظیمه باشند تشکیل یک مثلث با سه زاویه‌ی 180° می‌دهد که مجموع زوایای آن 540° است. اگر مثلثی کوچک روی کره رسم کنیم، مجموع زوایای آن نزدیک 180° است. پس گزینه‌ی (ب) نیز نادرست است. با توجه به نکته‌ی اخیر نادرست بودن گزینه‌ی (د) هم نتیجه می‌شود. توجه کنید که وقتی مساحت مثلث به صفر نزدیک شود مجموع زوایای آن به 180° نزدیک می‌شود.

اگر کمی دقت کنید می‌بینید که هر سه نقطه نشان دهنده‌ی دو مثلث بر روی کره هستند. این دو مثلث با هم سطح کره را می‌پوشانند و مجموع زاویه‌های دو مثلث روی هم، $3\times360^\circ$ یعنی 1080° است. حال اگر مساحت یکی از این دو به صفر نزدیک شود مجموع زوایایش به 180° نزدیک می‌شود و همیشه از این مقدار بیشتر است. در این وضعیت مجموع زوایای مثلث دیگر به $180^\circ - 1080^\circ$ یعنی 900° نزدیک می‌شود و همیشه از این مقدار کمتر است. پس گزینه (ه) صحیح است.

۲۸ ـ ب

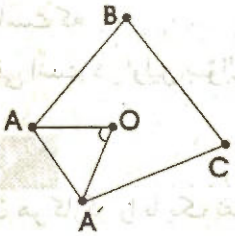


اگر ABC مثلثی باشد که دور رأس مخروط چرخیده با پاره‌کردن مخروط و مسطح کردن آن به شکل روبرو می‌رسیم.

توجه کنید که با این کار طول خم‌ها تغییر نمی‌کند و در نتیجه شبه‌خطها به خط تبدیل می‌شوند. (A و A′ در واقع یک نقطه روی مخروط ناقص هستند.)

با انجام کار اخیر مثلثی مثل Δ_1 به یک مثلث معمولی تبدیل می‌شد. پس مجموع زوایای Δ_1، 180° است (گزاره ۱)

حال نشان می‌دهیم مجموع زوایای ABC، $\pi + \theta$ است که $\theta = \hat{AOA'}$. (θ مستقل از مثلث است).



$$\text{مجموع زوایای ABC} = \hat{BAO} + \hat{OA'C} + \hat{B} + \hat{C}$$
$$= \hat{BAA'} - \hat{OAA'} + \hat{AA'C} - \hat{AA'O}$$
$$+ \hat{B} + \hat{C} = 2\pi - \hat{OAA'} - \hat{AA'O}$$
$$= \pi + \theta$$

پس گزاره ۲ نیز صحیح است.

۲۹ ـ ب

$$N * S = (V * P) * S = V * (P * S) = V * Q = T$$

پس قرینه‌ی T نسبت به محور xها، محل برخورد NS با منحنی است. پس محل سوم برخورد NS، قرینه‌ی T یعنی S است. یعنی NS در S بر منحنی مماس است پس (الف) صحیح است.

به‌علاوه

$$(U * P) * T = ((Q * S) * P) * (P * Q') = Q * (S * P) * P * Q'$$
$$= Q * Q * P * Q' = (Q * Q') * P * Q'$$
$$= (\infty * P) * Q = P * Q = S$$

پس (ج) هم درست است.

(د) هم درست است چراکه مماس در P عمودی است و اگر در Q مماس عمودی باشد، Q و قرینه‌ی Q برهم

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

منطبق‌اند و لذا Q همان P است.

اگر $A * X = A * Y = Z$ آنگاه قرینه Z را Z' بنامید. پس AZ' خم را در نقطه X و Y قطع می‌کند پس X و Y قرینه‌ی Z' هستند که یکتا است پس $X = Y$ حال

$$A^{۷} = A^{۱۱} \Rightarrow A^{۷} * \infty = A^{۷} * A^{۴} \Rightarrow \infty = A^{۴}$$

$$A^{۱۵} = A^{۲۰} \Rightarrow A^{۱۵} * \infty = A^{۱۵} * A^{۵} \Rightarrow \infty = A^{۵}$$

$$\Rightarrow A^{۴} = A^{۵} \Rightarrow A^{۴} * \infty = A^{۴} * A \Rightarrow \infty = A$$

پس (ه) هم درست است.

اما اگر مماسی بر منحنی در Q از $U * P$ بگذرد مماس در Q' از قرینه‌ی $U * P$ می‌گذرد و لذا

$$Q' * Q' = U * P$$

$$U * P = Q * S * P = Q * Q \Rightarrow Q' * Q' = Q * Q$$

یعنی مماس در Q همان مماس در Q' است و این تناقض است. پس گزینه غلط (ب) است.

۳۰ ـ ه

$\infty * A$ را محاسبه می‌کنیم. خط عمودی گذرا از A، خطی است که از ∞ هم می‌گذرد و منحنی را در قرینه‌ی A، یعنی A'، قطع می‌کند. قرینه‌ی A' نسبت به محور xها A است پس $A * \infty = A$. قرار دهید $E = \infty$ تا (الف) نتیجه شود.

برای (ب)، B' را قرینه‌ی B فرض کنید. پس کافی است X چنان باشد که AX، M را در B' قطع کند یا معادلاً AB'، M را در X قطع کند یا $X' = A * B'$ که X' قرینه‌ی X است و این طبق اطلاعات داده شده همیشه یک X می‌دهد.

(ج) در راه حل سؤال ۲۹ نشان داده شد.

اگر $X * X = \infty$، مماس در X از ∞ می‌گذرد پس مماس در X عمودی است و این همان قسمت (د) از سؤال ۲۹ می‌باشد که ثابت شد صحیح است پس همه‌ی گزینه‌ها درست هستند.

کلید پاسخ به سؤالات مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد ریاضی کشور

سال تحصیلی ۷۹-۱۳۷۸

	الف	ب	ج	د	ه
۱-				■	
۲-		■			
۳-		■			
۴-			■		
۵-				■	
۶-				■	
۷-		■			
۸-				■	
۹-	■				
۱۰-			■		

	الف	ب	ج	د	ه
۱۱-			■		
۱۲-		■			
۱۳-				■	■
۱۴-	■				
۱۵-		■			
۱۶-			■		
۱۷-					■
۱۸-			■		
۱۹-					■
۲۰-					■

	الف	ب	ج	د	ه
۲۱-			■		
۲۲-	■				
۲۳-					■
۲۴-		■			
۲۵-	■				
۲۶-		■			
۲۷-			■		
۲۸-				■	
۲۹-				■	
۳۰-	■				

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

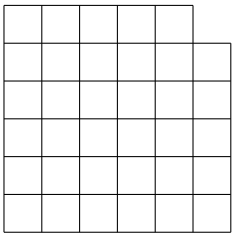
زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر $n \geq ۲$ عددی طبیعی و $۲^n + n^۲$ عددی اول باشد، باقیمانده‌ی n بر ۶ کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟
الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) الف و ب ه) ب و ج

۲. در مثلث ABC ارتفاع وارد بر ضلع BC آن را در D قطع می‌کند و ارتفاع وارد بر ضلع CA نیز AD را در H قطع می‌کند. اگر $AD = ۴$، $BD = ۳$ و $CD = ۲$، آن‌گاه طول HD برابر است با:
الف) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\sqrt{۵}$ د) $\frac{۵}{۲}$ ه) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$

۳. در شکل زیر چند مربع وجود دارد؟
الف) ۳۵ ب) ۷۵ ج) ۸۵ د) ۱۰۵ ه) ۲۰۵



۴. ۵ عدد میله‌ی آهنی به طولهای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ داریم. با این میله‌ها به چند صورت می‌توان یک مثلث درست کرد؟
الف) ۳ ب) ۵ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۵. x و y دو عدد صحیح متوالی هستند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عبارت $x^۲ + y^۲ + (xy)^۲$ درست است؟
الف) مجموعه‌ی رقمهای یکان آنها شامل مجموعه‌ی $\{۰, ۱, ۳, ۵, ۶, ۹\}$ است.
ب) همواره مربع کامل است.
ج) به‌ازای مقادیری از x و y، عددی اول است.
د) همواره عددی مرکب است.
ه) هیچ‌کدام

۶. دنباله‌ی a_n به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۰ = ۰ \\ a_{n+۱} = na_n + a_n + n \end{cases}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

باقیمانده‌ی تقسیم $a_{۱۰۱}$ بر ۱۰۲ چند است؟
الف) صفر ب) ۱ ج) ۹۹ د) ۱۰۰ ه) ۱۰۱

۷. طول اقطار ذوزنقه‌ای ۱۳ و ۱۵ و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. مساحت این ذوزنقه چقدر است؟
الف) ۵۶ ب) ۷۲ ج) ۸۴ د) ۹۶ ه) با این اطلاعات قابل محاسبه نیست.

۸. بزرگترین توان ۲ که عدد $N = ۳^{۵۱۲} - ۱$ بر آن بخش‌پذیر باشد، کدام است؟
الف) $۲^{۸}$ ب) $۲^{۹}$ ج) $۲^{۱۰}$ د) $۲^{۱۱}$ ه) $۲^{۱۲}$

۹. اعداد طبیعی را مطابق الگوی زیر در یک جدول قرار داده‌ایم. مثلاً ۱۴ در سطر دوم و ستون چهارم آمده است. مکان عدد ۱۳۷۷ کدام است؟
الف) سطر ۲ ستون ۵۲ ب) سطر ۵۲ ستون ۲ ج) سطر ۲ ستون ۵۱
د) سطر ۵۱ ستون ۲ ه) هیچ‌کدام

۱	۲	۶	۷	۱۵	
۳	۵	۸	۱۴		
۴	۹	۱۳			
۱۰	۱۲				
۱۱					

۱۰. چند عدد در مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{۱۳۷۷, \ldots, ۱۹۹۹\}$ وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند؟
الف) ۳۱۱ ب) ۳۱۲ ج) ۴۶۶ د) ۴۶۷ ه) ۶۲۳

۱۱. عددهای ۱، ۲، ... و ۱۳۷۷ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. هر بار دو تا از اعداد روی تخته را به دلخواه پاک می‌کنیم و قدر مطلق تفاضلشان را روی تخته می‌نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عدد به‌دست آمده کامل‌تر است؟
الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.
ب) این عدد همواره فرد است.
ج) باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۴، مساوی یک است.
د) این عدد همواره زوج است.
ه) هیچ‌کدام

۱۲. در مثلث ABC یکی از میانه‌ها بر یکی از نیمسازهای درونی عمود است. اگر اندازه‌ی اضلاع این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشند، آن‌گاه اندازه‌ی محیط این مثلث برابر است با:
الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۵ د) ۱۸ ه) ۲۱

۱۳. اگر a, b, c, d, e یک ترتیب دلخواه از اعداد $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ باشد، در این‌صورت حداکثر مقدار عبارت $S = ab + bc + cd + de + ea$ به‌ازای ترتیبهای مختلف چقدر است؟
الف) ۴۲ ب) ۴۳ ج) ۴۵ د) ۴۸ ه) ۵۰

۱۴. فرض کنید A، B و C سه نقطه در داخل یا روی اضلاع یک مربع به ضلع واحد باشند. اگر داشته باشیم $x = \min\{AB, AC, BC\}$ (که در آن، min کوچکترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد)، آنگاه

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

حداکثر مقدار x، وقتی که A، B و C داخل یا روی اضلاع مربع تغییر می‌کنند، چیست؟
الف) $\frac{۶}{۵}$ ب) ۱ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$ ه) $\frac{۴}{۳}$

۱۵. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تابعی است یک‌به‌یک و پوشا و به‌علاوه می‌دانیم که m بر n بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر $f(m)$ بر $f(n)$ بخش‌پذیر باشد. کدام گزینه در مورد هر تابع به این شکل درست است؟
الف) $f(n)$ بر n بخش‌پذیر است.
ب) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $f(p)=p$
ج) برای هر a و b داریم: $f(ab)=f(a)f(b)$
د) $f(n)\le n^{۲}$
ه) $f(f(n))=n$

۱۶. از بین عددهای مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\dots,۵۳\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دوتایی از آنها برابر با ۴ نباشد؟
الف) ۲۶ ب) ۲۷ ج) ۲۸ د) ۲۹ ه) ۳۰

۱۷. یک تکه مقوای مربع شکل را با قیچی به n تا مربع کوچکتر (نه لزوماً مساوی) بریده‌ایم. n کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟
الف) ۱۱۲ ب) ۱۷۲ ج) ۲۲۲ د) ۳۱۲
ه) همه‌ی مقادیر الف، ب، ج، و د

۱۸. از میان عددهای $۱,۲,\dots,۲۰$ حداقل چند عدد را باید حذف کنیم به‌طوری که مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده، عددی اول نباشد.
الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

۱۹. فرض کنید $A=\overbrace{۹۹\dots۹۹}^{۸۱}$. مجموع ارقام $A^{۲}$ در پایه‌ی ۱۰ چند است؟
الف) ۶۹۳ ب) ۷۲۹ ج) ۷۹۰ د) ۸۳۷ ه) ۹۳۶

۲۰. $C_۱$ و $C_۲$ دو دایره به شعاعهای ۳ و ۱ هستند که فاصله‌ی بین مرکزهای آنها برابر ۱۰ است. فرض کنید S مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی باشد که یک سر آن روی محیط $C_۱$ و سر دیگر آن روی محیط $C_۲$ است. مساحت S چقدر است؟
الف) ۰ ب) ۳π ج) ۴π د) ۵π ه) ۶π

۲۱. $A\subseteq\mathbb{N}$ را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بتوان اعضای آن را به‌صورت دنباله‌ی $a_۱,a_۲,a_۳,\dots$ نوشت به‌طوری که هر دو جمله‌ی متوالی مثل a_i و $a_{i+۱}$ دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ باشند. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر خوب نیستند؟
الف) اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ ب) اعداد فرد بزرگتر از ۱
ج) اعداد طبیعی به‌صورت $۳k+۲$ د) اعداد مربع کامل بزرگتر از ۱
ه) هر چهار مجموعه، خوب هستند.

۲۲. در مثلث ABC، D نقطه‌ی وسط AB، و E نقطه‌ای روی BC است به‌طوری که $BE=۲EC$. فرض کنید $\angle ADC=\angle BAE$. زاویه‌ی $\angle BAC$ چقدر است؟
الف) ۴۵ درجه ب) ۶۰ درجه ج) ۷۵ درجه
د) این زاویه به‌طور یکتا مشخص می‌شود ولی هیچ‌کدام از جوابهای بالا درست نیست.
ه) اطلاعات برای تعیین زاویه کافی نیست.

۲۳. ABC یک مثلث است. D نقطه‌ای روی AB و E نقطه‌ای روی AC است. تقاطع BE و CD را P می‌نامیم. اگر مساحت مثلثهای ADE، BPD و CEP به‌ترتیب ۵، ۸ و ۳ باشد، مساحت مثلث ABC

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

چقدر است؟
الف) ۲۵ ب) ۲۷ ج) ۳۰ د) ۳۲
ه) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲۴. فرض کنید $a_n = n^۳ - ۵n^۲ + ۶n$، $b_n = n^۲ + ۵$ و d_n برابر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a_n و b_n است. کدام گزینه درست است؟ (max بزرگترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد.)
الف) d_n متناوب است. ب) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty$
ج) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = ۶۳۰$ د) d_n از جایی به بعد ثابت است.
ه) الف و ج

۲۵. چند عدد گویای t وجود دارد که $۰ \le t \le ۷۷$ و $۳t^۳ + ۱۰t^۲ - ۳t$ عددی صحیح باشد؟
الف) ۷۸ ب) ۸۶ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۴ ه) ۲۳۲

۲۶. نقطه‌ی P روی نقاط صفحه‌ی xy با مختصات صحیح در حال حرکت است. به این‌صورت که اگر در نقطه‌ی (a, b) باشد با توجه به اینکه باقیمانده‌ی تقسیم $a+b$ بر ۴، برابر ۰، ۱، ۲، یا ۳ است به‌ترتیب به راست، بالا، چپ، یا پایین می‌رود. فرض کنید P از $P_۰$ شروع به حرکت کرده و پس از ۱۰۰ حرکت به نقطه‌ی $(۱۰, ۰)$ رسیده است. به‌ازای چه تعداد $P_۰$ چنین اتفاقی می‌افتد؟
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۲۷. می‌خواهیم ۱۰ عدد سکه را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه‌ی مجاوری به رو نباشند. به چند صورت این کار امکان‌پذیر است؟
الف) ۱۰۰ ب) ۱۲۱ ج) ۱۴۴ د) ۲۴۳ ه) ۲۵۶

۲۸. چند دوتایی (x, y) از اعداد طبیعی در معادله‌ی $۲x^۲y^۲ + y^۲ = ۲۶x^۲ + ۱۲۰۱$ صدق می‌کند؟
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) این معادله جواب ندارد.

۲۹. به‌ازای کدام دسته از مقادیر n، تابع $f : \{۱, \dots, ۳۱\} \to \{۱, \dots, ۳۱\}$ وجود دارد که در هر دو شرط زیر صدق می‌کند: $\left(f^i = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{i}\right)$

برای هر $x \in \{۱, \dots, ۳۱\}$ داریم $f^n(x) = x$ برای هر $۰ < i < n$ داریم $f^i(x) = x \Leftrightarrow x = ۱$
الف) مجموعه‌ی اعداد اول کمتر از ۳۱ ب) $\{۲, ۸, ۱۶\}$
ج) $\{۲, ۳, ۱۵\}$ د) $\{۲k+۱ \mid k = ۱, ۲, \dots, ۱۴\}$
ه) $\{۳, ۷, ۱۳\}$

۳۰. بزرگترین m ای که دنباله‌ای مثل $a_۱, a_۲, \dots, a_m$ با شرایط زیر وجود دارد، چند است؟
$a_i \in \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\}$، اگر $a_i = a_j$ و $a_{i+۱} = a_{j+۱}$، آنگاه $i = j$.
الف) ۹۸ ب) ۹۹ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۱ ه) ۱۰۲

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۷

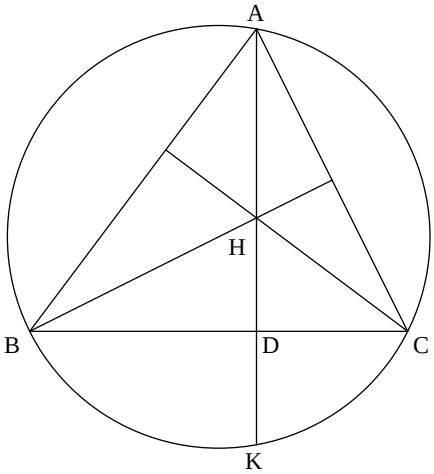
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه (ب) صحیح است.
فرض کنید که عدد $m = ۲^n + n^۲$ عددی اول باشد. روشن است که n باید فرد باشد، چون در غیر این‌صورت m زوج خواهد بود. پس n به پیمانه‌ی ۶ با یکی از اعداد ۱، ۳ یا ۵ همنهشت خواهد بود. اما توجه کنید که اگر $n \overset{۶}{\equiv} ۱$، آنگاه $n = ۶k + ۱$ و درنتیجه،

$$۲^n \overset{۳}{\equiv} \left(۲^۶\right)^k \times ۲ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

همچنین، $n^۲ \overset{۶}{\equiv} ۱$ و بنابراین $n^۲ + ۲^n \overset{۳}{\equiv} ۰$ و m اول نخواهد بود. به‌دلیل مشابه $n \overset{۶}{\equiv} ۵$ نیز رد می‌شود و فقط حالت $n \overset{۶}{\equiv} ۳$ باقی می‌ماند.

۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
محل برخورد AD با دایره‌ی محیطی مثلث را K می‌نامیم.



دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

دقت کنید که چون H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است،

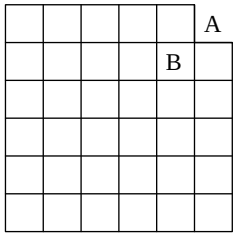
$$\angle HCB = ۹۰^\circ - \angle ABC = ۹۰^\circ - \angle AKC = \angle BCK$$

پس در مثلث HCK، ارتفاع و نیمساز برهم منطبق شده‌اند، و درنتیجه، این مثلث متساوی‌الساقین است. پس $HD = DK$. حال قوت نقطه‌ی D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$P(D) = BD \cdot CD = DK \cdot DA = HD \cdot DA$$

پس $۴HD = ۳ \times ۲$ و بنابراین، $HD = \frac{۳}{۲}$.

۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید که S_k تعداد مربعهای به‌ضلع k در شکل زیر باشد.



روشن است که چنین مربعی با مشخص شدن راس گوشه‌ی پایین چپ آن به‌طور یکتا مشخص می‌شود. دقت کنید که هر یک از این نقاط مشخص شده جز A در $S_۱$ شمرده می‌شوند. پس $S_۱ = ۶^۲ - ۱$. به‌طور مشابه، هر یک از مربعها غیر از نقاط سطر بالا و ستون راست و همچنین، نقطه‌ی B، در محاسبه‌ی $S_۲$ به حساب می‌آیند. پس $S_۲ = ۵^۲ - ۱$، با استدلال مشابه می‌توان دید که $S_۳ = ۴^۲ - ۱$، ...، $S_۶ = ۲^۲ - ۱$ و $S_۷ = ۱^۲ - ۱$. پس اگر N تعداد کل مربعها را نشان دهد، آنگاه

$$N = \left(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + ۶^۲\right) - ۶ = \frac{۶ \times ۷ \times ۱۳}{۶} - ۶ = ۸۵$$

یادداشت. استدلال مشابه نشان می‌دهد که اگر به‌جای جدول ۶×۶، جدولی $n \times n$ با یک خانه‌ی حذف شده در گوشه داشته باشیم تعداد مربعها برابر است با

$$N = \frac{n(n-۱)(۲n+۵)}{۶}$$

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اولاً دقت کنید که میله‌ی به‌طول ۱۰ نمی‌تواند در هیچ مثلثی شرکت کند. چون اگر طول اضلاع مثلثی $a < b$ باشند، آنگاه $b - a \geq ۱۰$ و بنابراین، $a + ۱۰ \leq b$. پس $(a, b, ۱۰)$ اضلاع مثلث نیستند. فرض کنید $a < b$ طول اضلاع مثلثی باشند. اگر $a = ۳۰$، آنگاه $b < ۲۰ + a = ۵۰$. پس $b = ۴۰$ و جواب قابل‌قبول $(۲۰, ۳۰, ۴۰)$ به‌دست می‌آید. اگر $a = ۴۰$، آنگاه جواب قابل‌قبول $(۲۰, ۴۰, ۵۰)$ پیدا می‌شود. همین‌طور، اگر $a < b$ طول اضلاع مثلث باشند، لزوماً $a = ۴۰$ و $b = ۵۰$ و جواب قابل‌قبول $(۳۰, ۴۰, ۵۰)$ به‌دست می‌آید. پس در مجموع سه مثلث به کمک این میله‌ها ساخته می‌شوند.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید $y = x + ۱$. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} x^۲ + y^۲ + (xy)^۲ &= x^۲ + (x+۱)^۲ + (x(x+۱))^۲ \\ &= ۲x^۲ + ۲x + ۱ + (x(x+۱))^۲ \\ &= ۲x(x+۱) + ۱ + (x(x+۱))^۲ \\ &= (x(x+۱) + ۱)^۲ \end{aligned}$$

که مربع کامل است.

۶. گزینه (ه) صحیح است.
اگر تعریف کنیم $b_n = a_n + ۱$، آنگاه $b_۰ = ۰$ و به‌ازای $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} b_{n+۱} &= a_{n+۱} + ۱ \\ &= (n+۱)a_n + n + ۱ \\ &= (n+۱)(a_n + ۱) \\ &= (n+۱)b_n \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به $b_0 = 1$ داریم،

$$b_n = nb_{n-۱} = n(n-۱)b_{n-۲} = \cdots = n!$$

پس $a_n = n! - ۱$. اما دقت کنید که

$$۱۰۱ = ۱ \times ۲ \times \cdots \times ۵۱ \times \cdots \times ۱۰۱$$

بر $۱۰۲ = ۵۱ \times ۲$ بخش‌پذیر است. بنابراین،

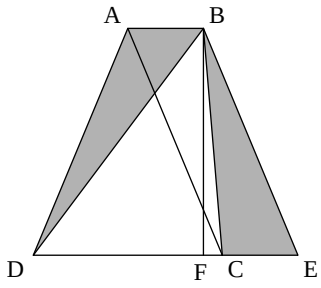
$$\begin{aligned} a_{۱۰۱} &\overset{۱۰۲}{\equiv} (۱۰۱)! - ۱ \\ &\overset{۱۰۲}{\equiv} ۱۰۲ - ۱ \\ &\overset{۱۰۲}{\equiv} ۱۰۱ \end{aligned}$$

۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
در ذوزنقه‌ی $ABCD$ فرض کنید که $AC = ۱۳$ و $BD = ۱۵$ و ارتفاع ذوزنقه برابر ۱۲ باشد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور



از نقطه‌ی B به موازات قطر AC خطی رسم می‌کنیم تا امتداد قاعده‌ی DC را در نقطه‌ی E قطع کند. چون چهارضلعی $ABEC$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AB = CE$. پس دو مثلث ABD و BCE دارای قاعده و ارتفاع مساوی‌اند. پس مساحت این دو مثلث برابر است. حال اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [ABD] + [BCD] \\ &= [BCE] + [BCD] \\ &= [BDE]\end{aligned}$$

اگر پای عمود وارد از B بر CD را F بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}DE &= DF + EF \\ &= \sqrt{BD^۲ - BF^۲} + \sqrt{BE^۲ - BF^۲} \\ &= \sqrt{۱۵^۲ - ۱۲^۲} + \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} \\ &= ۹ + ۵ \\ &= ۱۴\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [BDE] \\ &= \tfrac{۱}{۲}(۱۴ \times ۱۲) \\ &= ۸۴\end{aligned}$$

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
N را به‌صورت زیر تجزیه‌ی می‌کنیم:

$$N = \left(۳^{۲۵۶} + ۱\right)\left(۳^{۱۲۸} + ۱\right)\cdots\left(۳^۲ + ۱\right)\left(۳^۲ - ۱\right)$$

توجه کنید که به‌ازای هر عدد زوج مانند k،

$$۳^k + ۱ \overset{۴}{\equiv} (-۱)^k + ۱ \overset{۴}{\equiv} ۲$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

پس بزرگترین توان ۲ در $۳^k + ۱$ برابر ۲ است. اما چون بزرگترین توان ۲ در $۳^۲ - ۱$ برابر ۳ است، پس بزرگترین توان ۲ در N برابر $۱۱ = ۳ + ۸$ خواهد بود.

یادداشت. استدلالی مشابه استدلال بالا نشان می‌دهد که به‌ازای $n \geq ۳$، توان ۲ در $۳^{۲^n} - ۱$ برابر $n + ۲$ است.

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.

فرض کنید $a_۰ = ۰$ و به‌ازای $i \geq ۱$، $a_i = ۱ + ۲ + \cdots + i = \frac{i(i+۱)}{۲}$. با توجه به اینکه روی قطر i ام دقیقاً i عدد می‌آیند، به آسانی می‌توان دید که قطر i ام با عدد $a_{i-۱} + ۱$ شروع می‌شود و با عدد a_i پایان می‌پذیرد. همچنین برای مقادیر زوج i، اولین عدد در قطر i ام در سطر اول و برای مقادیر فرد i، اولین عدد در قطر i ام، در ستون اول ظاهر می‌شود.

ابتدا قطری را که عدد ۱۳۷۷ در آن قرار دارد پیدا می‌کنیم. باید مقدار i را پیدا کنیم که $a_{i-۱} + ۱ \leq ۱۳۷۷ \leq a_i$. توجه کنید که اگر

$$\frac{i(i-۱)}{۲} + ۱ \leq ۱۳۷۷ \leq \frac{i(i+۱)}{۲}$$

آنگاه

$$۴i^۲ - ۴i + ۸ \leq ۱۱۰۱۶ \leq ۴i^۲ + ۴i$$

نابرابری سمت چپ به‌صورت $۱۱۰۰۹ \leq (۲i-۱)^۲$ یا $۲i - ۱ < ۱۰۴$ یا $۲i - ۱ \leq ۱۰۳$ در می‌آید. پس $i \leq ۵۲$. نابرابری سمت راست به‌صورت $۱۱۰۱۷ \geq (۲i+۱)^۲$ یا $۲i + ۱ > ۱۰۴$ یا $۲i + ۱ \geq ۱۰۵$ در می‌آید. پس $i \geq ۵۲$. بنابراین، $i = ۵۲$. چون $a_{۵۲} = ۱۳۷۸$ پس ۱۳۷۷ عدد یکی مانده به‌آخر در قطر ۵۲ ام است. اما چون ۵۲ زوج است، پس آخرین عدد در این قطر در ستون اول و سطر ۵۲ ظاهر می‌شود. بنابراین عدد ۱۳۷۷ در این جدول در ستون دوم و سطر ۵۱ ظاهر شده است.

۱۰. گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که عدد طبیعی n را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت اگر و فقط اگر n فرد باشد و یا $۴|n$. در واقع، با توجه به رابطه‌های

$$۲k + ۱ = (k+۱)^۲ - k^۲$$

$$۴k = (k+۱)^۲ - (k-۱)^۲$$

هر یک از اعداد به‌صورت بالا را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت. همچنین اگر $n = x^۲ - y^۲ = (x-y)(x+y)$، بسته به آن که x و y زوجیت یکسان یا متفاوت داشته باشند، عدد n فرد و یا مضرب ۴ خواهد بود.

پس کافی است اعداد به‌صورت $۴k + ۲$ در مجموعه‌ی $\{۱۳۷۷, \ldots, ۱۹۹۹\}$ را حذف کنیم. اما

$$۱۳۷۷ \leq ۴k + ۲ \leq ۱۹۹۹$$

آنگاه

$$۳۴۴ \leq k \leq ۴۹۹$$

پس باید ۱۵۶ عدد از بین $۱۹۹۹ - ۱۳۷۶ = ۶۲۳$ عدد را حذف کنیم و ۴۶۷ عدد باقی می‌ماند.

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

دو تا از عددها را x و y می‌نامیم اگر مجموع اعداد قبل و بعد از حذف x و y را به‌ترتیب با S و S' نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$S' = S + |x-y| - x - y \overset{۲}{\equiv} S + x - y - x - y \overset{۲}{\equiv} S$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

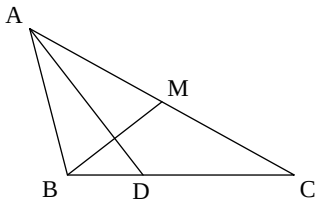
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

پس چون $۱۳۷۷ + \cdots + ۲ + ۱$، یعنی ۶۸۹×۱۳۷۷، عددی فرد است و زوجیت S هربار ثابت می‌ماند، پس عدد نهایی باید فرد باشد. گزینه‌ی (ج) نادرست است. توجه کنید که دنباله‌ی ۱، ۲، . . .، $i+۴$ را می‌توان با سه‌گام به دنباله‌ی ۱، ۲، . . .، i تبدیل کرد. برای این کار ابتدا $i+۴$ و $i+۳$ و سپس $i+۲$ و $i+۱$ را حذف می‌کنیم و در گام سوم دو عدد ۱ به‌دست آمده را حذف می‌کنیم. با تکرار این کار می‌توان به دنباله‌ی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ رسید. اگر فرایند حذف i و j را با $\xrightarrow{ij}$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

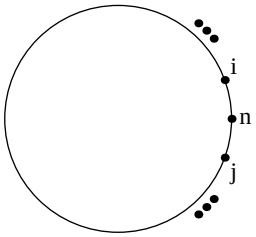
$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \xrightarrow{۱۵} ۲, ۳, ۴, ۴ \xrightarrow{۲۴} ۲, ۳, ۴ \xrightarrow{۲۳} ۱, ۴ \xrightarrow{۱۴} ۳$$

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید AD نیمساز زاویه‌ی A و BM میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد و $AD \perp BM$.



در مثلث ABM، ارتفاع و نیمساز نظیر راس A برهم منطبق شده‌اند. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $AM = AB$. پس $AC = ۲AB$. بنابراین اگر $x+۱$، x و $x-۱$ طول اضلاع مثلث باشند، یکی از این سه عدد دو برابر دیگری است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که این فقط وقتی امکان دارد که $x = ۳$. پس اضلاع مثلث ۲، ۳، ۴ و محیط مثلث برابر ۹ است.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که مسأله معادل با این مسأله است که اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به‌ترتیبی دور دایره بچینیم که مجموع حاصل‌ضربهای اعداد مجاور بیشترین مقدار ممکن باشد.



فرض کنید که در حالت کلی اعداد ۱، ۲، . . . و $n-۱$ را به‌ترتیبی دور دایره چیده باشیم و بخواهیم n را اضافه کنیم. اگر $S_{n-۱}$ مجموع مورد نظر در وضعیت اول و S_n مجموع پس از اضافه کردن n بین عددهای i و j باشد آنگاه

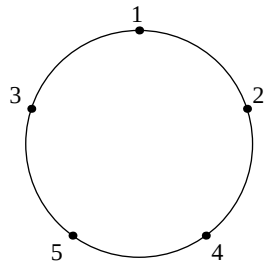
$$S_n = S_{n-۱} - ij + ni + nj = S_{n-۱} - (n-i)(n-j) + n^۲$$

پس برای اینکه S_n بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید $(n-i)(n-j)$ کمترین مقدار ممکن را اختیار کند، پس i و j باید اعداد $n-۱$ و $n-۲$ باشند. یعنی در هر گام برای ماکزیمم شدن S_n باید n را بین $n-۱$ و $n-۲$ قرار دهیم.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور



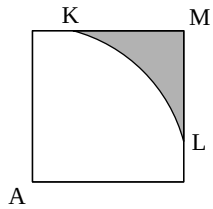
پس آرایش نشان داده شده در شکل به‌دست می‌آید و می‌توانیم بنویسیم

$$S_۵ = ۲ + ۸ + ۲۰ + ۱۵ + ۳ = ۴۸$$

یادداشت. با استدلالی مشابه استدلال بالا می‌توان نشان داد که در حالت کلی، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$S_n = \frac{۲n^۳ + ۳n^۲ - ۱۱۸ + ۱۸}{۶}$$

۱۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
روشن است که نقطه‌های A و B و C را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که در یک امتداد نباشند. اگر به مرکز A دایره‌ای به‌شعاع $r = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ رسم کنیم تا اضلاع مربع را در نقاط K و L قطع کند.



بنابر فرض چون $AB, AC \geq r$، پس B و C درون ناحیه‌ی سایه‌دار KLM قرار می‌گیرند. اما محاسبه‌ی ساده‌ای نشان می‌دهد که $KL = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$. پس $BC < KL = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ که با فرض $x > \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ تناقض دارد.

همچنین به‌سادگی می‌توان دید که در مثلث AKL داریم $x = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ و بنابراین، بزرگترین مقدار x همین عدد است.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید p عددی اول باشد. نشان می‌دهیم که $f(p)$ نیز عددی اول است. در واقع اگر $q|f(p)$، آنگاه عددی مانند r وجود دارد که $q = f(r)$. پس $f(r)|f(p)$ و بنابراین، $r|p$. پس $r = p$. (توجه کنید که $r \neq ۱$ زیرا به آسانی می‌توان دید که $f(۱) = ۱$.) درنتیجه، $q = f(p)$ و بنابراین، $f(p)$ عددی اول است. همچنین اگر n عددی طبیعی باشد که $f(n)$ توانی از q باشد، آنگاه n توانی از p است، زیرا اگر r عامل اولی از n و مخالف p باشد، آنگاه $f(r)|f(n)$ و بنابراین $f(r) = q$ و درنتیجه، $r = p$ که تناقض است. حال توجه کنید که $q = f(p)|f(p^۲)|f(p^۳)|\cdots$ و بنابراین، $p|p^۲|p^۳|\cdots$. چون f پوشاست پس همه‌ی توانهای q در برد f قرار دارند. اما چنین اعضایی می‌توانند تنها از اثر f بر توانهای p به‌دست آیند. پس نتیجه می‌شود که $f(p^i) = q^i$. اکنون به آسانی می‌توان دید که اگر a و b دو عدد طبیعی

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

باشند که $(a,b) = ۱$ آنگاه $f(ab) = f(a)f(b)$. پس اگر n تجزیه‌ی $\Pi p_i^{\alpha_i}$ به عوامل اول باشد. آنگاه $f(n) = \Pi f(p_i)^{\alpha_i}$. ویژگی (ج) به آسانی از این حکم نتیجه می‌شود.

یادداشت. برای گزینه‌های دیگر، می‌توان به روش زیر مثال نقض ساخت. فرض کنید P مجموعه‌ی اعداد اول باشد و $\sigma : P \longrightarrow P$ یک جایگشت باشد، یعنی σ یک به یک و پوشا باشد. حال برای $n = \Pi p_i^{\alpha_i}$ تعریف کنید $f(n) = \Pi \sigma(p_i)^{\alpha_i}$.

اگر σ جایگشتی مخالف همانی باشد، (الف) و (ب) نادرست خواهند بود. همچنین با انتخاب $\sigma(۲) = ۵$ و $\sigma(۵) = ۲$ نتیجه می‌شود $f(۲) = ۵$ که مثال نقض (د) است. همچنین اگر σ طوری باشد که $\sigma \circ \sigma \neq ۱$، آنگاه تابع به‌دست آمده از σ، مثال نقض برای گزینه‌ی (ه) است.

۱۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $A_۰$، $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۱ و ۵۳ باشند که به پیمانه‌ی ۴ به‌ترتیب همنهشت با ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند. توجه کنید که

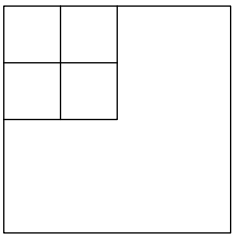
$$|A_۰| = |A_۲| = |A_۳| = ۱۳, \quad |A_۱| = ۱۴$$

اگر $S \subset \{۱, ۲, \ldots, ۵۳\}$ دارای خاصیت مورد نظر مسأله باشد، واضح است که

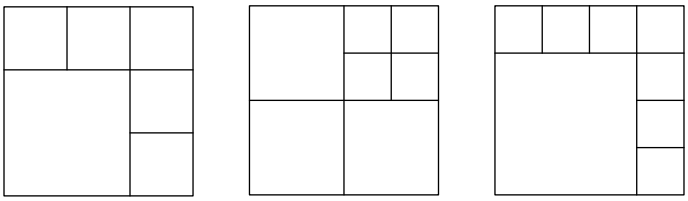
$$|S \cap A_۰| \leq ۷, \quad |S \cap A_۲| \leq ۷, \quad |S \cap A_۳| \leq ۷, \quad |S \cap A_۱| \leq ۷$$

زیرا از بین n و $n+۴$ حداکثر یکی را می‌توان انتخاب کرد. پس $|S| \leq ۲۸$. به آسانی می‌توان مجموعه‌ی S با خاصیت مورد نظر را طوری ساخت که $|S| = ۲۸$.

۱۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است
توجه کنید که اگر بتوان از یک مربع n مربع برید، آن‌گاه می‌توان مطابق شکل، با چهار قسمت کردن یکی از مربعها، آن را به $n+۳$ مربع نیز برید.



همچنین، مطابق شکلهای زیر، می‌توان یک مربع را به ۶ و ۷ یا ۸ مربع برید.



پس به‌ازای $n \geq ۶$، می‌توان هر مربع را به n مربع افراز کرد.

یادداشت. با کمی بحث، می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان یک مربع را به دو، سه یا پنج مربع افراز کرد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که اگر اعداد فرد را حذف کنیم، اعداد باقی‌مانده دارای خاصیت مورد نظر مسأله هستند. برای آن که نشان دهیم باید حداقل ۱۰ عدد را حذف کرد، زوجهای مرتب $(۱,۲)$، $(۳,۲۰)$، $(۴,۱۹)$، ... و $(۱۱,۱۲)$ را درنظر بگیرید. چون مجموع مولفه‌ی اول و دوم هر یک از این زوجهای مرتب عددی اول است، پس از هر زوج باید حداقل یک مو□لفه‌اش حذف شود. پس چون ۱۰ زوج داریم، حذف حداقل ۱۰ عدد لازم است.

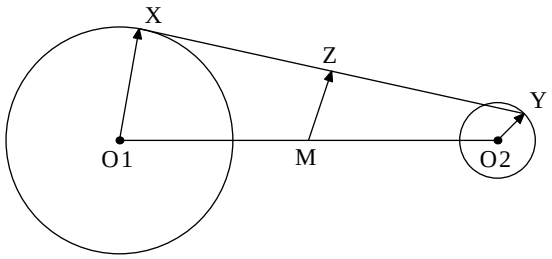
یادداشت. می‌توان ثابت کرد که اگر به‌جای ۲۰، عدد زوجی مانند $۲k$ بگذاریم، باید حداقل k عدد را حذف کنیم تا مجموع هیچ دو عدد باقی مانده اول نباشد. این مطلب را به استقرا نشان می‌دهیم. فرض کنید p عددی اول بین $۲k$ و $۴k$ باشد. وجود چنین عدد اولی از قضیه‌ی چبیشف نتیجه می‌شود. اکنون زوجهای مرتب $(۲k, p-۲k)$، $(۲k-۱, p-۲k+۱)$، ... و $(\frac{p+۱}{۲}, \frac{p-۱}{۲})$ را درنظر بگیرید. با استدلالی مشابه استدلال بالا باید حداقل به تعداد $۲k - \frac{p-۱}{۲}$ از این اعداد حذف شوند. همچنین از بین اعداد ۱، ۲، ... و $p-۲k-۱$ نیز باید حداقل تعداد $\frac{p-۲k-۱}{۲}$ حذف شوند (فرض استقرا). توجه کنید که این دو مجموعه از اعداد هیچ اشتراکی ندارند (این مطلب از این که $p < ۴k$ نتیجه می‌شود). پس دست‌کم $۲k - \frac{p-۱}{۲} + \frac{p-۲k-۱}{۲} = k$ عدد باید حذف شوند.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که $A = ۱۰^{۸۱} - ۱$. بنابراین، $A^۲ = ۱۰^{۱۶۲} - ۲ \times ۱۰^{۸۱} + ۱$ پس نمایش ده‌دهی $A^۲$ به‌صورت زیر است:

$$A^۲ = \underbrace{۹۹\ldots۹}_{۸۰}۸۰۰\ldots۰۱$$

پس مجموع رقمهای $A^۲$ در پایه‌ی ۱۰ برابر $۷۲۹ = ۱ + ۸ + ۸۰ \times ۹$ است.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
با توجه به شکل فرض کنید $O_۱$ مرکز دایره $C_۱$ و $O_۲$ مرکز دایره‌ی $C_۲$ را نشان دهد. همچنین X را نقطه‌ای روی $C_۱$ و Y را نقطه‌ای روی $C_۲$ بگیرید. اگر Z وسط پاره‌خط XY و M وسط $O_۱O_۲$ را نشان دهد.



می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MZ} &= \tfrac{۱}{۲}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}) \\
&= \tfrac{۱}{۲}\left(\overrightarrow{MO_۱} + \overrightarrow{O_۱X} + \overrightarrow{MO_۲} + \overrightarrow{O_۲Y}\right) \\
&= \tfrac{۱}{۲}(\overrightarrow{O_۱X} + \overrightarrow{O_۲Y})
\end{aligned}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

توجه کنید که

$$\left|\overrightarrow{O_۱X}\right| = ۳$$

و

$$\left|\overrightarrow{O_۲Y}\right| = ۱$$

پس

$$۲ \leq \left|\overrightarrow{O_۱X} + \overrightarrow{O_۲Y}\right| \leq ۴$$

و بنابراین،

$$۱ \leq \left|\overrightarrow{MZ}\right| \leq ۲$$

همچنین به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\overrightarrow{MZ}$ می‌تواند هر برداری با طول دلخواه $۱ \leq r \leq ۲$ باشد. پس Z در ناحیه‌ای بین دو دایره به شعاعهای ۲ و ۱ و مرکز M تغییر می‌کند. پس مساحت مکان هندسی فوق برابر است با $\pi\left(۲^۲ - ۱\right) = ۳\pi$.

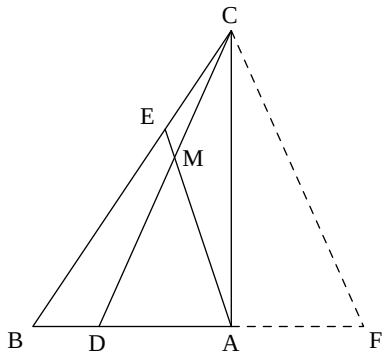
۲۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
ثابت می‌کنیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ خوب است. استدلال در بقیه‌ی موارد نیز مشابه است. دنباله‌ی مورد نظر را به طور استقرایی می‌سازیم. فرض کنید $a_۱ = ۲$ و اعداد $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n را ساخته‌ایم و m کوچکترین عدد طبیعی است که در این بین نیامده است. عدد طبیعی k را آن‌قدر بزرگ انتخاب کنید که عدد kma_n در این فهرست نیامده باشد. حال قرار دهید $a_{n+۱} = kma_n, a_{n+۲} = m$. روشن است که هر عدد طبیعی سرانجام در این دنباله خواهد آمد. همچنین توجه کنید که

$$(a_n, a_{n+۱}) = (a_n, kma_n) = a_n > ۱$$

$$(a_{n+۱}, a_{n+۲}) = (kma_n, m) = m > ۱$$

بنابراین مجموعه‌ی $\mathbb{N} - \{۱\}$ مجموعه‌ای خوب است.

۲۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.
از نقطه‌ی C خطی به موازات AE رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه‌ی F قطع کند. در مثلث BCF، چون $AE \| CF$ و $BE = ۲EC$ نتیجه می‌شود $AB = ۲AF$ و بنابراین، $DA = AF$.



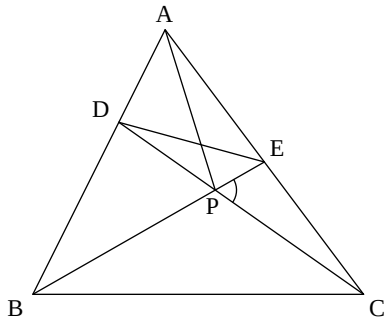
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $x = [DEP]$ و $y = [PBC]$. اگر زاویه‌ی $\angle DPE$ برابر α باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} xy &= [DEP] \cdot [PBC] \\ &= \frac{۱}{۴} PE \cdot DP \cdot PB \cdot PC \cdot \sin^۲ \alpha \\ &= [PEC] \cdot [PDB] \\ &= ۸ \times ۳ \\ &= ۲۴ \end{aligned}$$



بنابر قضیه‌ی منلائوس در مثلث CAD،

$$\frac{BA}{BD} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = ۱$$

اما،

$$\frac{BA}{BD} = \frac{[AEB]}{[DEB]} = \frac{x+۱۳}{x+۸}, \quad \frac{PD}{PC} = \frac{[EPD]}{[EPC]} = \frac{x}{۳}$$

و

$$\frac{CE}{EA} = \frac{[DCE]}{[DEA]} = \frac{x+۳}{۵}$$

بنابراین،

$$x(x+۱۳)(x+۳) = ۱۵(x+۸)$$

معادله‌ی فوق دارای ریشه‌ی $x = ۲$ است. بنابراین، $y = ۱۲$ و مساحت مثلث برابر ۳۰ است.

۲۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

با استفاده از الگوریتم اقلیدس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} d_n &= (a_n, b_n) \\ &= (n^۳ - ۵n^۲ + ۶n, n^۲ + ۵) \\ &= (n^۲ + ۵, n + ۲۵) \\ &= (n + ۲۵, ۶۳۰) \end{aligned}$$

پس $d_n \leq ۶۳۰$. چون $d_{۶۰۵} = ۶۳۰$، بنابراین، $\max\{d_n | n \in N\} = ۶۳۰$. همچنین بدیهی است که

$$d_{n+۶۳۰} = (n + ۶۳۰ + ۲۵, ۶۳۰) = (n + ۲۵, ۶۳۰) = d_n$$

و بنابراین، d_n متناوب است.

۲۵. این مسأله نادرست است.
فرض کنید $t = \frac{a}{b}$ که $(a, b) = ۱$. در این‌صورت

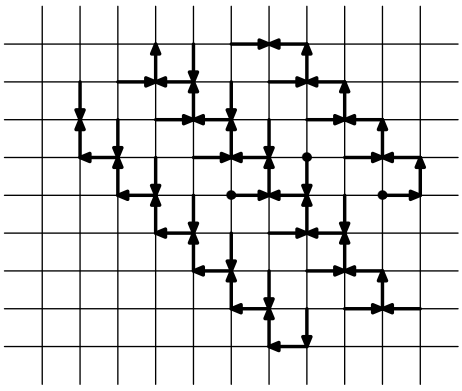
$$f(t) = ۳t^۳ + ۱۰t^۲ - ۳t = \frac{۳a^۳ + ۱۰a^۲b - ۳ab^۲}{b^۳}$$

اگر $f(t) \in \mathbb{Z}$، آنگاه $b | ۳a^۳ + ۱۰a^۲b - ۳ab^۲$ و درنتیجه $b | ۳a^۳$. اما چون $(b, a) = ۱$ پس $b | ۳$. یعنی b یکی از اعداد ۱ یا ۳ خواهد بود. اگر $b = ۱$، آن‌گاه باید $۰ \leq a \leq ۷۷$ و ۷۸ انتخاب برای a وجود دارد.
اگر $b = ۳$، نتیجه می‌شود که $۲۷ | ۳a^۳ + ۳۰a^۲ - ۲۷a$ و بنابراین $۹ | a^۳ + ۱۰a^۲$ و چون $(a, ۳) = ۱$ پس $۹ | a + ۱۰$. یعنی $a = ۹k - ۱$ که $k \in \mathbb{Z}$. پس از شرط $۰ \leq t \leq ۷۷$ نتیجه می‌شود

$$۰ \leq \frac{۹k - ۱}{۳} \leq ۷۷$$

و درنتیجه $۱ \leq k \leq ۲۵$. پس ۲۵ انتخاب برای k و بنابراین، برای a وجود دارد. بنابراین در مجموع ۱۰۳ انتخاب برای t وجود دارد که در بین گزینه‌ها وجود ندارد.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
در شکل زیر مسیر حرکت یک نقطه مشخص شده است. توجه کنید که چون $۱۰ \overset{۴}{\equiv} ۲$، در صورت مسأله می‌توان به‌جای نقطه‌ی $(۰, ۱۰)$، از نقطه‌ی $(۰, ۲)$ استفاده کرد.



https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

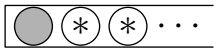
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس کافی است از نقطه‌ی $(۰,۲)$ شروع کنیم و ۱۰۰ گام به عقب برگردیم. اگر حرکت به چپ، راست، بالا و پایین را به‌ترتیب با L، R، U و D نشان دهیم، با کمی دقت می‌توان دید که برای بازگشت، فقط دو راه وجود دارد:

$$DRDR\dots DRDR, \qquad DRDR\dots DRDL$$

(در واقع اگر مسیر دیگری را انتخاب کنیم، پیش از ۱۰۰ گام، متوقف می‌شویم.)

۲۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید a_n تعداد روشهای چیدن n سکه در یک ردیف باشد که هیچ دو سکه‌ی مجاوری به رو نباشد. ادعا می‌کنیم که $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$. برای اثبات توجه کنید که اگر اولین سکه به پشت باشد، $n-۱$ سکه‌ی بعدی به $a_{n-۱}$ طریق می‌توانند چیده شوند.



اما اگر اولین سکه به رو گذاشته شود، سکه‌ی مجاور آن باید حتماً به پشت باشد و $n-۲$ سکه‌ی بعدی به $a_{n-۲}$ روش می‌توانند قرار بگیرند.



حال با توجه به اینکه $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$، به آسانی نتیجه می‌شود $a_{۱۰} = ۱۴۴$.

۲۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^۲y^۲ + y^۲ - ۲۶x^۲ - ۱۳ = ۱۲۰۱ - ۱۳ = ۱۱۸۸$$

یا

$$\left(۲x^۲ + ۱\right)\left(y^۲ - ۱۳\right) = ۴ \times ۲۷ \times ۱۱$$

با توجه به این‌که $۲x^۲ + ۱$ عددی فرد است، این عدد، باید برابر با یکی از اعداد ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۱۱، ۳۳، ۹۹ یا ۲۹۷ باشد. اما از حل معادله‌ی $۲x^۲ + ۱ = a$ به‌ازای این مقادیر a، فقط جوابهای $x = ۱, ۲, ۴, ۷$ به‌دست می‌آیند. اما به‌ازای این مقادیر x، معادله به‌صورت $y^۲ = ۴۰۹, ۱۴۵, ۴۹, ۲۵$ در می‌آید که فقط دو جواب آخر قابل‌قبول‌اند. پس معادله دارای دو جواب $(x, y) = (۴, ۷)$ و $(x, y) = (۷, ۵)$ است.

۲۹. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید که تابع f با شرایط داده شده وجود داشته باشد. ادعا می‌کنیم که $n|۳۰$. برای اثبات، توجه کنید که برای هر $x \neq ۱$، مدار x، یعنی مجموعه‌ی $\{x, f(x), f^۲(x), \dots\}$ مجموعه‌ای n عضوی است. همچنین اگر مدار x را با $O(x)$ نشان دهیم، هر دو مجموعه‌ی $O(x)$ و $O(y)$ یا مساوی و یا جدا از هم‌اند. زیرا اگر $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$ و مثلاً $z = f^i(x) = f^j(y)$، آنگاه چون تابع f یک‌به‌یک و پوشاست (این مطلب از شرط اول به‌سادگی نتیجه می‌شود)، پس اگر $i > j$ نتیجه می‌شود $f^{i-j}(x) = y$ و بنابراین، $y \in O(x)$. پس $O(y) = O(x)$. حال چون مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$ به تعدادی مجموعه که تعداد اعضای هرکدام برابر n است افراز شده است، پس $n|۳۰$ و در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (ج) در این شرط صدق می‌کند.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

یادداشت. توجه کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n|۳۰$، چنین تابعی وجود دارد. کافی است f را چنین تعریف کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x=۱ \\ (x+\frac{۳۰}{n}) \pmod{۳۰} & x\neq ۱ \end{cases}$$

به‌سادگی می‌توان این مسأله را برای حالتی که ۳۱ با عدد طبیعی دلخواهی عوض شده باشد، تعمیم داد.

۳۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.
ابتدا همه‌ی زوجهای $(a_۱,a_۲)$، $(a_۲,a_۳)$، ... و $(a_{m-۱},a_m)$ را درنظر بگیرید. با توجه به شرط دوم، این $m-۱$ زوج مرتب، دوبه‌دو متمایزند. اما چون $a_i\in\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$، پس حداکثر ۱۰۰ زوج مرتب به‌صورت $(a_i,a_{i+۱})$ وجود دارند. پس $m-۱\leq ۱۰۰$ و بنابراین، $m\leq ۱۰۱$. حال ثابت می‌کنیم که چنین دنباله‌ای به‌طول ۱۰۱ وجود دارد. برای اثبات، در حالت کلی ثابت می‌کنیم که اگر ۱۰ را با عدد طبیعی n جایگزین کنیم، دنباله‌ای به‌طول $n^۲+۱$ با شرایط مسأله وجود دارد و این دنباله دارای این شرط اضافی نیز هست که $a_۱=a_{n^۲+۱}=۱$. این مطلب را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n=۱$ دنباله‌ی ۱، ۱ در شرط مسأله صدق می‌کند. فرض کنید که برای عدد طبیعی n دنباله‌ی $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n^۲+۱}$ را ساخته باشیم که $a_۱=۱$ و $a_{n^۲+۱}=۱$. حال دنباله را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$۱,n+۱,۲,n+۱,\dots,n-۱,n+۱,n,n+۱,n+۱,۱$$

توجه کنید که $۲n+۱$ جمله به دنباله‌ی قبلی افزوده‌ایم. به‌سادگی می‌توان دید که دنباله‌ی فوق دنباله‌ای به‌طول $(n+۱)^۲+۱$ است که جمله‌های اول و آخر آن برابر ۱ هستند و در شرایط مسأله نیز صدق می‌کند.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

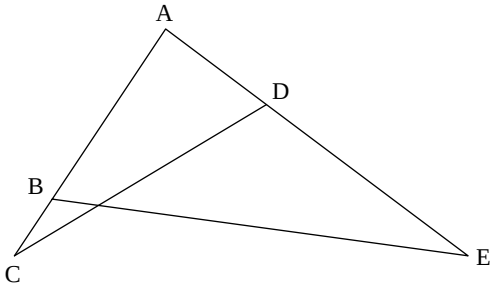
آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله‌ی $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=d$ که a، b، c، و d اعداد طبیعی هستند و $a<b<c$، چند جواب دارد؟
الف) جواب ندارد ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) بینهایت

۲. در شکل زیر زوایای $\angle CDE$ و $\angle CBE$ مساوی‌اند. اگر $AB=a$، $BC=b$، $AD=c$ و $DE=d$، آنگاه داریم:
الف) $b(a+b)=d(c+d)$ ب) $ab=cd$
ج) $a(a+b)=c(c+d)$ د) $ad=cb$
ه) $c(a+b)=a(c+d)$



۳. مجموعه‌ی A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟
الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۴. چند عدد اول کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲ است؟
الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) بیش از ۵

۵. معادله‌ی $x^y+۱=(x+۱)^۲$ روی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۵

۶. فرض کنید که معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ دو جواب صحیح داشته باشد. عبارتهای زیر را درنظر بگیرید:
۱) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a و b فرد است.
۲) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
۳) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.
۵) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
۶) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a و b فرد است.
کدام‌یک از عبارتهای فوق درست است؟
الف) ۱ و ۴ ب) ۲ و ۴ ج) ۱ و ۵ د) ۳ و ۵ ه) ۲ و ۶

۷. معادله‌ی $n! + ۳ = ۳^{n-۱}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟
الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) بینهایت

۸. اگر ABC مثلثی باشد که $\angle A = ۴۵^\circ$ و D نقطه‌ای روی امتداد BA باشد به قسمی که $BD = BA + AC$ و نقاط K و M به‌ترتیب روی AB و BC به‌گونه‌ای قرار داشته باشند که مساحت مثلث BDM مساوی مساحت مثلث BCK باشد آنگاه $\angle BKM$ برابر است با:
الف) $۲۲/۵^\circ$ ب) ۳۰° ج) ۴۵° د) ۱۵° ه) ۲۰°

۹. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$. چند تابع $f : A \to A$ وجود دارد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(f(x)) = f(x)$؟
الف) ۱ ب) ۴ ج) ۷ د) ۱۰ ه) ۱۳

۱۰. مثلث ABC را با اضلاعی با طولهای صحیح a و b و c درنظر می‌گیریم و طول ارتفاعهای آن را h_a، h_b و h_c می‌نامیم. فرض کنید $h_a = h_b + h_c$، در این‌صورت داریم:
الف) $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است.
ب) $۲(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است.
ج) $۳(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است.
د) $b^۲ + c^۲ - a^۲$ مربع کامل است.
ه) $a^۲ + b^۲ - c^۲$ مربع کامل است.

۱۱. فرض کنید $a = ۱۰^{۲\times۱۳۷۶} - ۱۰^{۱۳۷۶} + ۱$. مقدار $[۲\sqrt{a}]$ برابر است با:
($[x]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x.)
الف) $۲ \times ۱۰^{۱۳۷۶} - ۲$ ب) $۲ \times ۱۰^{۱۳۷۶} - ۱$ ج) ۲×۱۰^{۱۳۷۶}
د) $۲ \times ۱۰^{۱۳۷۶} + ۱$ ه) $۲ \times ۱۰^{۱۳۷۶} + ۲$

۱۲. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. نقاط D و E را به‌ترتیب روی AB و AC می‌گیریم به‌طوری که دایره‌ی محیطی مثلث ADE در نقطه‌ی X بر BC مماس باشد. اگر D و E را طوری انتخاب کنیم که DE مینیمم شود در این‌صورت داریم:
الف) AX میانه است.
ب) AX ارتفاع است.
ج) AX نیمساز است.
د) X بین پای نیمساز و پای میانه قرار دارد.
ه) X بین پای نیمساز و پای ارتفاع قرار دارد.

۱۳. ۵ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه داریم. به چند طریق این مهره‌ها را می‌توانیم در یک ردیف از چپ به راست کنار هم بچینیم، به‌طوری که بلافاصله بعد از هر مهره‌ی سفید حداقل یک مهره‌ی سیاه قرار داشته باشد؟
الف) ۱۲۶ ب) ۱۳۲ ج) ۲۱۸ د) ۲۵۲ ه) ۳۱۲

۱۴. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$،
$A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x و n بزرگتر از یک است$\}$.
عدد طبیعی $n > ۱$ را «خوب» می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A_n$، داشته باشیم $x + y \in A_n$. چند عدد خوب زوج داریم که کوچکتر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند؟
الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۹ ه) ۲۳

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. نقطه‌ی M درون مثلث ABC قرار دارد. $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ به‌ترتیب پای عمودهای مرسوم از M بر BC، AC و AB می‌باشند. اگر حاصل‌ضرب $MH_۱ \cdot MH_۲ \cdot MH_۳$ بیشترین مقدار ممکن خود را اختیار کند آنگاه M کدام‌یک از نقطه‌های زیر است؟
الف) مرکز ارتفاعی ب) مرکز دایره‌ی محاطی ج) مرکز دایره‌ی محیطی
د) مرکز ثقل ه) نقطه‌ای که از آن سه ضلع به یک زاویه دیده می‌شود.

۱۶. معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{۱۳۷۶}$ با شرط $(x \le y)$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) جواب ندارد

۱۷. چند تابع $f : \mathbb{N} \cup \{۰\} \to \mathbb{N} \cup \{۰\}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ داشته باشیم: $f(f(n)) + f(n) = ۲n + ۳$؟
الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه ه) بینهایت

۱۸. چند عدد اول سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که در آن داشته باشیم $b^۲ - ۴ac = ۹$؟
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۹. در زیرمجموعه‌ی $\{(x, y) \mid ۱ \le x, y \le ۵;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ از نقاط صفحه حداکثر چند نقطه می‌توانیم انتخاب کنیم به‌طوری که فاصله‌ی دوبه‌دوی این نقاط متمایز باشد؟
الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۲۰. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:
۱) به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{N}$ داریم: $f(xy) = f(x) + f(y) - ۱$
۲) فقط به‌ازای تعداد متناهی x داریم: $f(x) = ۱$
۳) $f(۳۰) = ۶$
مقدار $f(۲)$ چقدر است؟
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۱. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشند به‌طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی A_i و A_j حداقل ۲ عضو دارد. در این‌صورت بیشترین مقدار n کدام‌یک از مقادیر زیر است؟
الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴ ه) ۲۵

۲۲. تعداد مقسوم‌علیه‌های هر عدد طبیعی n را با $d(n)$ نشان می‌دهیم. عدد n را «جالب» گوییم هرگاه $d(d(d(n))) = d(d(n))$. کدام‌یک از احکام زیر نادرست است؟
الف) بینهایت عدد جالب مضرب ۳ وجود دارد.
ب) بینهایت عدد جالب زوج وجود دارد.
ج) بینهایت عدد جالب فرد وجود دارد.
د) اگر n جالب باشد، $n^۳$ نیز جالب است.
ه) اگر n جالب باشد، $d(n)$ نیز جالب است.

۲۳. اعداد حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n روی تخته نوشته شده‌اند. در هر «گام» دو تا از آنها مثل x و y را به دلخواه انتخاب کرده و آنها را حذف می‌کنیم و به جای آنها عدد $x + y + xy$ را می‌نویسیم. پس از $n - ۱$ گام عدد A روی تخته باقی مانده است. کدام یک از نتیجه‌گیریهای زیر درست است؟
الف) می‌توان مقادیر اولیه‌ی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را چنان تعیین کرد که با روشهای مختلف $n!$ مقدار متمایز برای A حاصل شود.
ب) مقدار A به‌طور منحصربه‌فرد توسط $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n تعیین می‌شود.
ج) اگر $a_۱ = ۲$، در این‌صورت A حتماً عددی زوج است.
د) به تعداد متناهی مقادیر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n وجود دارد که برای آنها A می‌تواند برابر ۱ شود.
ه) تمام گزینه‌های بالا نادرست است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. ۱۳۷۶ لامپ داریم که همه در حالت اولیه خاموش هستند. این لامپها را از ۱ تا ۱۳۷۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای هر عدد صحیح و مثبت k، سوئیچ P_k وضعیت خاموش و روشن لامپهایی که شماره‌ی آنها مضربی از k است را عوض می‌کند. سوئیچهای P_1، P_2، ...، P_{1376} را متوالیاً می‌زنیم. در آخر چند لامپ روشن می‌ماند؟

الف) ۱۳۷۶ ب) ۱۳۳۹ ج) ۷۶ د) ۳۹ ه) ۳۷

۲۵. از جدول زیر ۵ عدد انتخاب می‌کنیم به‌طوری که هیچ دو عددی در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند. کوچکترین این اعداد را a می‌نامیم. a حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۳۱	۲۱	۲۹	۲۲	۲۰
۷	۲۰	۱۵	۱۲	۱۴
۲۳	۱۳	۷	۹	۳
۳۱	۱۷	۱۱	۱۴	۲۳
۲۸	۴۱	۲	۲۶	۲۱

الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۲۰ ه) ۲۱

۲۶. از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \ldots, 1001\}$ زیرمجموعه‌ای مانند $S \subset A$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری که اگر $x, y \in S$ آنگاه $x + y \notin S$. حداکثر تعداد اعضای S چقدر است؟

الف) ۴۹۹ ب) ۵۰۰ ج) ۵۰۱ د) ۵۰۲ ه) ۵۰۳

۲۷. برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می‌دهیم (مثلاً $f(1376) = 17$). اگر $n_0 = (13)^{76}$، کدام‌یک از اعداد زیر در دنباله‌ی

$$n_0,\ f(n_0),\ f(f(n_0)),\ \ldots,\ f(f(\cdots(f(n_0))\cdots)),\ \ldots$$

وجود دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) هیچ‌کدام

۲۸. مثلث ABC با اضلاع $AB = 4$، $AC = 5$ و $BC = 6$ مفروض است. نقاط A'، B' و C' پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A، B و C هستند. A''، B'' و C'' را به‌ترتیب محل تلاقی امتداد این ارتفاعها با دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گیریم. در این‌صورت $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'}$ برابر است با:

الف) ۴ ب) ۵ ج) $3\sqrt{2}$ د) $2\sqrt{3} + 1$ ه) $3\sqrt{3} - 1$

۲۹. در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر عددی به‌صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{5^m + 5^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ ب) $\{4^m + 4^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$

ج) $\{6^m + 6^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ د) $\{7^m + 7^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$

ه) هیچ‌کدام

۳۰. معادله‌ی $\frac{1376}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{1376}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{1376}}$ که در آن

$$1 = a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{1376}$$

روی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) $1376!$ د) بینهایت ه) $2 \times (1376!)$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=d$$

که در آن a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند و $a<b<c$. چون

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}<۲$$

بنابراین $d=۱$.
ادعا می‌کنیم که $a=۲$. توجه کنید که $a\neq ۱$ و اگر $a\geq ۳$، آنگاه،

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\leq\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}<۱$$

که ناممکن است. پس $a=۲$ و بنابراین،

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۲}$$

و $b\geq ۳$.
ادعا می‌کنیم $b=۳$. توجه کنید که اگر $b\geq ۴$، آنگاه

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\leq\frac{۱}{۵}<\frac{۱}{۲}$$

پس $b=۳$ و درنتیجه، $c=۶$ به‌طور یکتا به‌دست می‌آید. پس تنها جواب مسأله $a=۲$، $b=۳$، $c=۶$ و $d=۱$ است.

۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
چون $\angle CDE=\angle CBE$، بنابراین چهار نقطه‌ی E، D، B و C روی یک دایره قرار دارند. پس بنابر تعریف قوت نقطه، $AB\cdot AC=AD\cdot AE$ و بنابراین،

$$a(a+b)=c(c+d)$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

---

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
فرض کنید $|A| \geq ۵$. در این‌صورت اگر A از هر رده‌ی مانده‌های به پیمانه‌ی ۳ دست‌کم یک عضو داشته باشد، مجموع این سه عضو بر ۳ بخش‌پذیر است. پس A دست‌کم از یکی از رده‌های مانده‌های به پیمانه‌ی ۳ عضوی ندارد. در این‌صورت، بنابر اصل لانه‌کبوتری، عددی مانند r وجود دارد که $۰ \leq r \leq ۲$ و n دارای سه عضو متمایز مانند $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ است که

$$x_i \overset{۳}{\equiv} r, \quad ۱ \leq i \leq ۳$$

اما در این‌صورت $|x_۱+x_۲+x_۳|$۳. پس $|A| \leq ۴$. مثال $A = \{۱, ۲, ۴, ۵\}$ نشان می‌دهد که $|A| = ۴$ امکان‌پذیر است.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید N عددی با ویژگی مورد نظر باشد. چون مجموع ارقام N برابر ۲ است پس یا $N = ۲$ یا N دارای دو رقم ۱ است و بقیه‌ی ارقام آن صفرند. اما چون N اول است ، رقم آخر آن باید ۱ باشد. پس n باید به شکل

$$N = ۱\underbrace{۰۰\ldots۰}_{n\text{تا}}۱ = ۱۰^n + ۱$$

باشد و چون $N < ۱۳۷۶$، پس $n < ۴$. به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ عددهای ۱۱ و ۱۰۱ به‌دست می‌آیند که اول‌اند. اما به‌ازای $n = ۳$ عدد ۱۰۰۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
چون $x^y + ۱ = (x+۱)^۲$، پس $x^y = x^۲ + ۲x$. درنتیجه، $x^{y-۱} = x + ۲$. اگر $y = ۱$، نتیجه می‌شود $x + ۲ = ۱$ که غیرممکن است. پس $y \geq ۲$. بنابراین، $x|x^{y-۱}$ و چون $x|x$ پس $x|۲$. بنابراین، $x = ۱$ یا $x = ۲$. اگر $x = ۱$، به رابطه‌ی $۲ + ۱ = ۱$ می‌رسیم که تناقض است. اگر $x = ۲$ نتیجه می‌شود $y = ۳$. پس تنها جواب مسأله $(x, y) = (۲, ۳)$ است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو جواب معادله باشند، آنگاه، $b = x_۱x_۲$ و $a = -(x_۱ + x_۲)$. پس اگر $x_۱x_۲$ فرد باشند، a زوج و b فرد خواهد بود و اگر یکی از $x_۱$ و $x_۲$ فرد و دیگری زوج باشد، a فرد و b زوج خواهد بود. پس عبارتهای ۲ و ۴ صحیح هستند.

۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
به آسانی می‌توان دید که $n = ۳$ و $n = ۴$ جوابهای معادله‌ی $n! + ۳ = ۳^{n-۱}$ هستند اما $n = ۱$، $n = ۲$ و $n = ۵$ جواب این معادله نیستند. به‌ازای $n \geq ۶$، $n!$ بر ۹ بخش‌پذیر است ولی $۳^{n-۱} - ۳$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
چون $BD = BA + AC$، پس $AD = AC$ و درنتیجه زاویه‌های $\angle ACD$ و $\angle ADC$ برابرند. بنابراین،

$$\angle ADC = \frac{۱}{۲}(\angle ADC + \angle ACD) = \frac{۱}{۲}\angle A = ۲۲/۵^\circ$$

فرض کنید L نقطه‌ی تقاطع CK با DM باشد. اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، از $[BDM] = [BCK]$ نتیجه می‌شود

$$[MLC] = [KLD]$$

پس، $[MCD] = [KCD]$ و بنابراین، اگر $H_۱$ و $H_۲$ به‌ترتیب پاهای عمودهای رسم شده از M و K بر CD باشند،

$$CD \cdot MH_۱ = CD \cdot KH_۲$$

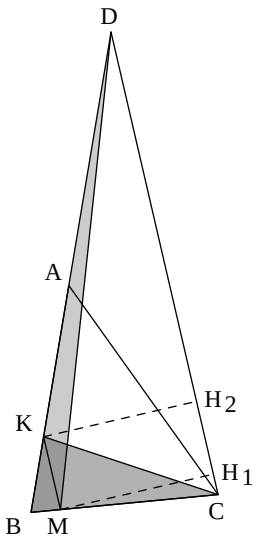
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

درنتیجه، $MH_۱ = KH_۲$. یعنی KM و CD موازی‌اند بنابراین،

$$\angle BKM = \angle BDC = \angle ADC = ۲۲/۵^\circ$$



۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
شرط $f(f(x)) = f(x)$ هم ارز آن است که اگر y در برد تابع f قرار داشته باشد، آنگاه $f(y) = y$.
اگر برد f را با R_f نشان دهیم، سه حالت خواهیم داشت:

الف) $|R_f| = ۲$. در این حالت f روی R_f همانی است و به‌ازای تنها عضو خارج از R_f باید مقدار f را برابر با عضوی در R_f تعریف کنیم. پس دو امکان برای f وجود دارد و چون $\binom{۳}{۲} = ۳$ امکان برای R_f وجود دارد پس ۳×۲ امکان در این حالت وجود دارد.

ب) $|R_f| = ۳$. در این حالت $R_f = A$ و f روی A همانی است و بنابراین تنها ۱ انتخاب وجود دارد.

ج) $|R_f| = ۱$. در این حالت f تابعی ثابت است و بنابراین، ۳ انتخاب برای f وجود دارد.

پس جمعاً $۱ + ۳ + ۶$ یعنی ۱۰ انتخاب برای تابع f وجود دارد.

۱۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر S مساحت مثلث ABC باشد، چون $h_a = h_b + h_c$، نتیجه می‌شود

$$\frac{۲S}{a} = \frac{۲S}{b} + \frac{۲S}{c}$$

و درنتیجه، $bc = ab + ac$. بنابراین

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۲ab - ۲ac + ۲bc = (a - b - c)^۲$$

پس $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که

$$\left(۱۰^{۱۳۷۶} - \frac{۱}{۲}\right)^۲ < a < \left(۱۰^{۱۳۷۶}\right)^۲$$

بنابراین،

$$۲ \times ۱۰^{۱۳۷۶} - ۱ < ۲\sqrt{a} < ۲ \times ۱۰^{۱۳۷۶}$$

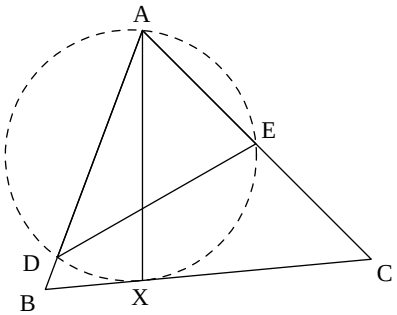
و درنتیجه،

$$[۲\sqrt{a}\,] = ۲ \times ۱۰^{۱۳۷۶} - ۱$$

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ADE را R بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$DE = ۲R\sin A$$

پس DE وقتی مینیمم می‌شود که R مینیمم شود (چون $\sin A$ ثابت است).



اما چون $h_a \leq AX \leq ۲R$ (h_a ارتفاع وارد بر ضلع BC است)، پس R وقتی مینیمم می‌شود که $۲R = h_a$ یعنی AX ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد.

۱۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.
به هر مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سیاه می‌چسبانیم؛ حال ۵ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره سفید- سیاه داریم که می‌خواهیم در یک ردیف آنها را از چپ به راست بچینیم. هر روش چیدن این مهره‌ها دقیقاً متناظر است با یک روش چیدن مهره‌ها که پس از هر سفید، دست‌کم یک سیاه قرار داشته باشد. پس تعداد حالتها برابر است با $N = \frac{۱۰!}{۵! \times ۵!} = ۲۵۲$.

۱۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
ادعا می‌کنیم که هر عدد خوب زوج لزوماً توانی از ۲ است. فرض کنید n یک عددی خوب و زوج باشد و فرض کنید $n = ۲^k m$ که در آن $k \geq ۱$ و m عددی فرد است. اگر n توانی از ۲ نباشد، $m > ۱$ و بنابراین، $(m, n) = m > ۱$ پس $m \in A$. همچنین $۲^k \in A_n$. اما

$$(۲^k + m, n) = (۲^k + m, ۲^k m) = (۲^k + m, m) = (۲^k, m) = ۱$$

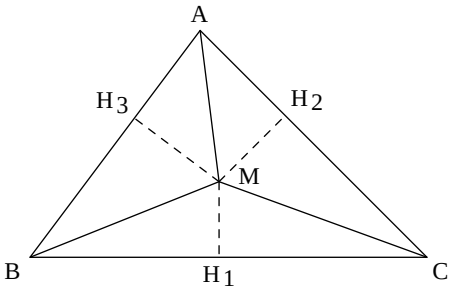
عدد $۲^k + m$ در A_n نیست. این تناقض نشان می‌دهد که فرض $m > ۱$ نادرست است. همچنین به آسانی می‌توان ثابت کرد که هر توان ۲ عددی خوب است. اکنون باید تعداد توانهای ۲ را بشماریم که از ۱۳۷۶ کوچکترند. اگر $۲^n < ۱۳۷۶$، نتیجه می‌شود $n \leq 10$. پس ۱۰ عدد خوب زوج کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.
قرار می‌دهیم $a = BC$، $b = AC$ و $c = AB$، و مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم.



در این‌صورت،

$$[MBC] \cdot [MAC] \cdot [MAB] = \frac{۱}{۸} abc \cdot MH_۱ \cdot MH_۲ \cdot MH_۳$$

و چون a، b و c ثابت‌اند، حاصل‌ضرب $MH_۱ \cdot MH_۲ \cdot MH_۳$ وقتی ماکزیمم است که $[MBC] \cdot [MAC] \cdot [MAB]$ ماکزیمم باشد. اما چون $[MBC] + [MAC] + [MAB] = [ABC]$ مقداری ثابت است، پس حاصل‌ضرب بالا وقتی ماکزیمم است که

$$[MBC] = [MAC] = [MAB] = \frac{[ABC]}{۳}$$

پس M باید مرکز ثقل مثلث باشد.

۱۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید $x = dx'$ و $y = dy'$ که $(x', y') = ۱$. پس $x' + y' + ۲\sqrt{x'y'} = \frac{۱۳۷۶}{d}$ و چون $\sqrt{x'y'}$ صحیح است و x', y' نسبت به هم اول‌اند پس x' و y' هر دو مربع کامل هستند. فرض کنید $x' = u^۲$ و $y' = v^۲$ پس $(u+v)^۲ = \frac{۱۳۷۶}{d}$ و با توجه به $۱۳۷۶ = ۲^۵ \times ۴۳$ داریم $\frac{۱۳۷۶}{d} = ۴, ۱۶$ و از آنجا جوابهای $(u, v) = (۱, ۱)$ و $(u, v) = (1, 3)$ به‌دست می‌آیند که متناظر با $(x, y) = (۱۰۴, ۱۰۴)$ و $(x, y) = (۲۶, ۷۸)$ هستند.

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که f تابعی یک به یک است. در واقع، اگر $f(m) = f(n)$ آنگاه $ff(m) = ff(n)$. پس $۲m + ۳ = ۲n + ۳$ و درنتیجه، $m = n$. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$f(۰) + ff(۰) = ۳$$

اگر $f(۰) = ۰$، نتیجه می‌شود $f(۰) + f(f(۰)) = ۰ \neq ۳$ که تناقض است. پس همین طور اگر $f(۰) = ۳$، نتیجه می‌شود $f(۳) + ۳ = ۳$ و بنابراین، $f(۳) = ۰$. پس

$$۹ = f(۳) + f(f(۳)) = ۰ + ۳ = ۳$$

که باز هم تناقض است. پس $f(۰) = ۱$ یا $f(۰) = ۲$. اگر $f(۰) = ۲$، نتیجه می‌شود $f(۲) + ۲ = ۳$ و بنابراین، $f(۲) = ۱$. پس $f(۱) + f(۲) = ۹$ و درنتیجه، $f(۱) = ۸$. اما $f(۱) \leq f(۱) + ۱$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

$f(f(۱)) = ۵$. پس نتیجه می‌گیریم $f(۰) = ۱$. اکنون به استقرا ثابت می‌کنیم که $f(n) = n + ۱$.
حکم به‌ازای $n = ۰$ صحیح است. اگر تساوی به‌ازای n برقرار باشد، آنگاه

$$f(n+۱) = ۲n + ۳ - f(n) = ۲n + ۳ - (n+۱) = n + ۲$$

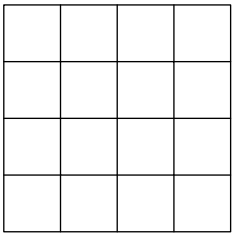
پس تنها یک تابع در این معادله صدق می‌کند.

۱۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
هیچ عدد سه رقمی با این خاصیت وجود ندارد. در واقع اگر $b^۲ - ۴ac = ۹$، چندجمله‌ای $ax^۲ + bx + c$ روی مجموعه‌ی اعداد صحیح به‌صورت $(px+q)(rx+s)$ تجزیه می‌شود. بنابراین،

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c = (۱۰p + q)(۱۰r + s)$$

عددی مرکب خواهد بود.

۱۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که بیش از ۵ نقطه با این خاصیت نمی‌تواند وجود داشته باشد،



A

چون ۶ نقطه $\binom{۶}{۲} = ۱۵$ فاصله به‌وجود می‌آورند و به سادگی می‌توان دید که در شکل بالا دقیقاً ۱۴ فاصله‌ی ناصفر متمایز وجود دارد.

شکل بالا ۵ نقطه را نشان می‌دهد که تمام فاصله‌ها در آن متمایزند.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
ادعا می‌کنیم که اگر $x \le ۱$، آنگاه $f(x) \ge ۲$. در واقع اگر $f(x) = ۱$، آنگاه

$$f(x^۲) = f(x) + f(x) - ۱ = ۱$$

و به‌همین ترتیب، $f(x^۴) = f(x^۸) = \cdots = ۱$. پس به‌ازای تعدادی نامتناهی عدد طبیعی مانند y، $f(y) = ۱$ که با فرض (۲) مسأله تناقض دارد. از سوی دیگر از شرط (۳) نتیجه می‌شود

$$f(۳۰) = f(۱۵) + f(۲) - ۱ = f(۳) + f(۵) + f(۲) = ۶$$

اما چون $f(۲), f(۳), f(۵) \ge ۲$ و مجموع آنها برابر ۶ است، پس $f(۲) = f(۳) = f(۵) = ۲$.

۲۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید که همه‌ی زیرمجموعه‌های ۴، ۵ و ۶ عضوی را انتخاب کنیم. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با

$$\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶} = ۲۲$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

و روشن است که هر دو تای آنها دست‌کم در ۲ عضو مشترک‌اند.

حال ادعا می‌کنیم که بیش از ۲۲ مجموعه نمی‌توان انتخاب کرد. اولاً در مجموعه‌های انتخاب شده $\emptyset$ و مجموعه‌های تک‌عضوی نمی‌توانند وجود داشته باشند. همچنین اگر مجموعه‌ای دوعضوی مثل $\{۱,۲\}$ در این زیرمجموعه‌ها باشد، بقیه باید همه شامل این زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی باشند و بنابراین، تعداد کل مجموعه‌ها حداکثر $۲^۴ = ۱۶$ خواهد بود. همچنین اگر مجموعه‌ای سه‌عضوی مثل $\{۱,۲,۳\}$ بین زیرمجموعه‌ها باشد، باز هم با استدلالی مشابه استدلال قبل می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان به بیش از ۲۲ مجموعه رسید.

۲۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که $n = ۲$ عددی جالب است چون $d(d(d(۲))) = d(d(۲)) = ۲$ ولی $n^۳ = ۸$ جالب نیست چون $d(d(d(۸))) = d(۴) = ۳$، ولی $d(۳) = ۲ \neq ۳$.

۲۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
عمل $*$ را روی اعداد حقیقی چنین تعریف کنید:

$$x * y = x + y + xy$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که $*$ عملی جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است. بنابراین اعداد $a_۱$، ... و a_n را به هر شکل و با هر ترتیب که با عمل $*$ ترکیب کنیم نتیجه‌ی نهایی به‌ترتیب انجام این کار بستگی ندارد و A به‌طور منحصر به‌فرد توسط $a_۱$، ... و a_n مشخص می‌شود.

۲۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
روشن است که لامپ شماره‌ی m به تعداد مقسوم‌علیه‌های m تغییر وضعیت می‌دهد. بنابراین چون در ابتدا همه‌ی لامپها خاموش بوده‌اند، در پایان لامپهایی روشن خواهند بود که تعداد مقسوم‌علیه‌های آنها عددی فرد باشد. اما اگر

$$m = p_۱^{\alpha_۱} \dots p_s^{\alpha_s}$$

تجزیه‌ی m به عوامل اول باشد، در این‌صورت تعداد شمارنده‌های m برابر است با $d(m) = (\alpha_۱ + ۱) \cdots (\alpha_s + ۱)$ و $d(m)$ فقط وقتی فرد خواهد بود که هر α_i زوج باشد، یعنی m مربع کامل باشد. پس تعداد لامپهای روشن برابر تعداد مربعهای کامل کوچکتر از ۱۳۷۶ است. اگر $m^۲ < ۱۳۷۶$ نتیجه می‌شود $m \leq ۳۷$.

۲۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که با انتخاب اعداد ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۲۰ و ۲۳ از ستونهای اول تا پنجم به عدد ۲۰ می‌رسیم. برای آنکه ثابت کنیم a نمی تواند از ۲۰ بزرگتر باشد، توجه کنید که از مربع ۳×۳ وسط باید دست‌کم یک عدد انتخاب شود و بزرگترین عدد در این مربع نیز ۲۰ است.

۲۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که زیرمجموعه‌ی $S = \{۵۰۱, ۵۰۲, \dots, ۱۰۰۱\}$، که ۵۰۱ عضو دارد، در شرط مسأله صدق می‌کند. اگر $|S| > ۵۰۱$، فرض کنید که t بزرگترین عضو S باشد. زوجهای

$$(۱, t-۱), (۲, t-۲), \dots, \left(\left\lfloor \frac{t}{۲} \right\rfloor, \left\lceil \frac{t}{۲} \right\rceil\right)$$

$\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor$ زوج مرتب‌اند که مجموع مولفه‌ی اول و دوم هر یک از آنها برابر t است. بنابراین از هر زوج مرتب حداکثر یک مولفه‌ی آن می‌تواند در S باشد. چون همه‌ی اعداد ۱، ۲، ...، $t-۱$ در مولفه‌های این $\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor$ زوج مرتب ظاهر شده‌اند، بنابراین $\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor \leq |S|$. از فرض $|S| > ۵۰۱$ نتیجه می‌شود $\lfloor \frac{t}{۲} \rfloor \geq ۵۰۲$ و بنابراین $t \geq ۱۰۰۴$ که تناقض است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

می‌دانیم که n و $f(n)$ همواره باقیمانده‌ی مساوی در تقسیم بر عدد ۹ دارند. یعنی $f(n) \overset{۹}{\equiv} n$. اما،

$$(۱۳)^{۷۶} \overset{۹}{\equiv} ۴^{۷۶} \overset{۹}{\equiv} (۴^۲)^{۳۸}$$

$$\overset{۹}{\equiv} (-۲)^{۳۸} \overset{۹}{\equiv} (۲^۳)^{۱۲} \times ۲^۲$$

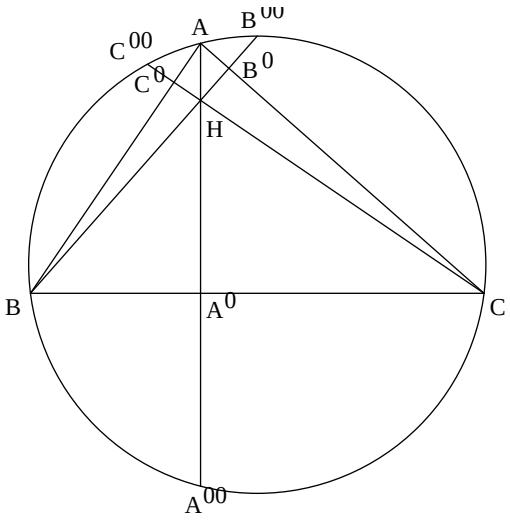
$$\overset{۹}{\equiv} (-۱)^{۱۲} \times ۴ \overset{۹}{\equiv} ۴$$

پس اگر $k = f(f \cdots f(n_۰)) \cdots)$، آنگاه $k \overset{۹}{\equiv} ۴$.

اکنون توجه کنید که چون برای هر عدد مانند n که دست‌کم دو رقم داشته باشد، $f(n) < n$، در دنباله‌ی داده شده اعداد مرتباً کوچک می‌شوند تا به یک عدد یک رقمی برسیم این عدد یک رقمی لزوماً ۴ خواهد بود.

۲۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

نقطه‌ی تلاقی ارتفاعها را H می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{AA''}{AA'} = ۱ + \frac{A'A''}{AA'} = ۱ + \frac{HA'}{AA'} = ۱ + \frac{HA' \cdot BC}{AA' \cdot BC}$$

$\frac{BB''}{BB'}$ و $\frac{CC''}{CC'}$ را به‌همین ترتیب ساده می‌کنیم. اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، آنگاه

$$\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} = ۳ + \frac{[BHC]+[AHC]+[AHB]}{[ABC]}$$

$$= ۳ + \frac{[ABC]}{[ABC]}$$

$$= ۴$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

توجه کنید که اگر m و k عددهایی طبیعی باشند، $۵^m + ۵^k \overset{۴}{\equiv} ۲$. اما هیچ عدد مربع کامل به‌صورت $۴r + ۲$ وجود ندارد. گزینه‌های (ب)، (ج) و (د) نیز با همنهشتی به پیمانه‌های ۳، ۵ و ۶ و دقت به این نکته که هیچ مربع کاملی به پیمانه‌ی این اعداد همنهشت با ۲ نیست رد می‌شوند.

۳۰. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

از نابرابری کوشی- شوارتز نتیجه می‌شود،

$$\left(\frac{۱}{a_۱} + \cdots + \frac{۱}{a_{۱۳۷۶}}\right)(a_۱ + \cdots + a_{۱۳۷۶}) \geq ۱۳۷۶^۲$$

و اگر معادله جواب داشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت $1376 \geq 1376^2$ که تناقض است. پس این معادله جواب ندارد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

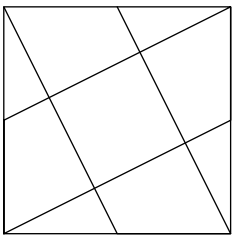
زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله‌ی $\left(\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}}\right)^x + \left(\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}\right)^x = ۸$ دارای چند جواب است؟
الف) جواب ندارد. ب) یک جواب ج) دو جواب
د) تعداد متناهی جواب ه) تعداد نامتناهی جواب

۲. رقم راست عدد $۱۷^{۱۷} - ۲۳^{۲۳}$ برابر است با:
الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۳. در شکل زیر فرض کنید مساحت مربع بزرگ برابر ۱ باشد. هر رأس مربع را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کنیم. مساحت مربع کوچک چقدر است؟
الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۵}$ ج) $\frac{۱}{۶}$ د) $\frac{۱}{۷}$ ه) $\frac{۱}{۸}$



۴. حداقل چند عضو از مجموعه‌ی $\{۲, ۳, \ldots, ۱۳۷۵\}$ را حذف کنیم به‌طوری که مجموعه‌ی باقی مانده دارای این خاصیت باشد که حاصل ضرب هیچ یک از دو عضوش در خودش نباشد؟
الف) ۱۶ ب) ۳۶ ج) ۵۶ د) ۷۶ ه) ۹۶

۵. فرض کنید مجموع $n + \cdots + ۲ + ۱$ یک عدد سه‌رقمی باشد که رقمهای آن مساوی‌اند. در این‌صورت n بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟
الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۱۱

۶. فرض کنید در مثلث ABC، CH ارتفاع باشد و $۲CH \geq AB$. در این‌صورت بزرگترین مقدار زاویه‌ی C برابر است با:
الف) ۳۰° ب) ۴۵° ج) ۶۰° د) ۹۰° ه) ۱۲۰°

۷. تعدادی متناهی وزنه داریم که وزن هر یک حداکثر ۱۰ کیلوگرم است. می‌دانیم که اگر این وزنه‌ها را به دلخواه به دو دسته تقسیم کنیم مجموع وزنهای یکی از دسته‌ها حداکثر ۱۰ کیلوگرم می‌شود. بیشترین وزن مجموع

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

وزنه‌ها چند کیلوگرم می‌تواند باشد؟
الف) ۲۰ ب) ۲۵ ج) ۳۰ د) ۳۵ ه) ۴۰

۸. فرض کنید هر حرف لاتین نماینده‌ی یک رقم باشد و اگر دو حرف لاتین متفاوت باشند حتماً رقمهای آنها نیز متفاوت است. اگر داشته باشیم $\frac{SIX}{NINE} = \frac{۲}{۳}$ در این‌صورت مقدار I برابر است با:
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۹. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به‌طوری‌که

$$\left(x + \sqrt{x^۲ + ۱}\right)\left(y + \sqrt{y^۲ + ۱}\right) = ۱$$

در این‌صورت دقیق‌ترین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت چیست؟
الف) $x = y = ۰$ ب) $x + y = ۰$ ج) $x + y \geq ۰$
د) $x + y \leq ۰$ ه) x و y هم‌علامت‌اند.

۱۰. اگر $a > ۰$ و $b > ۰$ و $۰ < \alpha < ۱$ در این‌صورت داریم
الف) $a^a b^b \geq a^b b^a$
ب) $a^\alpha b^{۱-\alpha} < a + b$
ج) $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b+۱}{۲}}$
د) $(\alpha a + (۱ - \alpha)b)^۲ \geq \alpha a^۲ + (۱ - \alpha)b^۲$
ه) الف و ب و ج هر سه صحیح است.

۱۱. از نقطه‌ی O واقع در درون مثلث ABC، عمودهای OM، ON و OP را به‌ترتیب بر اضلاع AB، BC و AC رسم می‌کنیم. اگر $AM = ۳$، $MB = ۵$، $BN = ۴$، $NC = ۲$ و $CP = ۴$ در این‌صورت مقدار AP برابر است با:
الف) ۳ ب) $۲\sqrt{۲}$ ج) ۴ د) $۲\sqrt{۳}$ ه) $۲\sqrt{۲}$

۱۲. نقاط A، B و C روی یک خط واقع‌اند و B نقطه‌ای میان A و C است. تمام دایره‌های گذرا از نقاط A و B را درنظر می‌گیریم و از C مماسهایی بر آنها رسم می‌کنیم. در این‌صورت مکان هندسی نقاط تماس برابر است با:
الف) یک خط راست ب) یک دایره ج) یک نیم‌دایره
د) یک بیضی ه) هیچ‌کدام

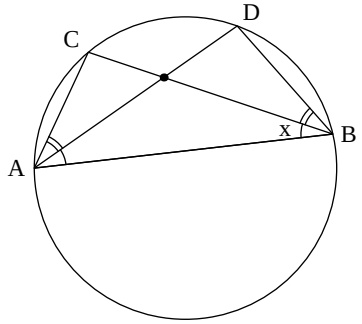
۱۳. معادله‌ی $۳^y = ۱ + ۲^x$ در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟
الف) ۱ جواب ب) ۲ جواب ج) ۳ جواب
د) ۴ جواب ه) نامتناهی جواب

۱۴. مثلث ABC محاط در داخل دایره‌ی C را درنظر بگیرید. فرض کنید AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. اگر $AB = \sqrt{۲}BC = \sqrt{۲}AD$، در این‌صورت زوایای مثلث ABC برابرند با:
الف) ۱۵°، ۳۰°، ۱۳۵° ب) ۳۰°، ۶۰°، ۹۰° ج) ۴۵°، ۴۵°، ۹۰°
د) ۲۰°، ۴۰°، ۱۲۰° ه) ۱۵°، ۶۰°، ۱۰۵°

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور



۱۵. فرض کنید a و b دو عدد طبیعی بوده به‌طوری‌که $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b از کدام‌یک از اعداد زیر بزرگتر نیست (بهترین جواب ممکن مورد نظر است)؟

الف) $\sqrt{a+b}$ ب) $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}}$ ج) $\sqrt{\frac{3(a^2+b^2)}{a+b}}$

د) $\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2b}}{2}$ ه) $\sqrt{a+b}-1$

۱۶. فرض کنید α و β دو عدد باشند به‌طوری‌که $\alpha^3-6\alpha^2+13\alpha=1$ و $\beta^3-6\beta^2+13\beta=19$. در این‌صورت مقدار $\alpha+\beta$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۱۷. عدد a را متعادل گوییم هرگاه بتوان رقمهای آن را به دو دسته تقسیم کرد به‌طوری که مجموع رقمهای دو دسته مساوی باشد. کوچکترین عدد a، به‌طوری‌که a و $a+1$ متعادل باشند در کدام‌یک از فاصله‌های زیر قرار می‌گیرند؟

الف) $[100,200]$ ب) $[200,300]$ ج) $[300,400]$

د) $[400,500]$ ه) $[500,600]$

۱۸. در مثلث ABC نقطه‌ی M را روی BC درنظر می‌گیریم و از M خطوطی موازی اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. فرض کنید مساحت متوازی الاضلاع حاصل $\frac{5}{18}$ مساحت مثلث شود. در این‌صورت نقطه‌ی M ضلع BC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

الف) ۱ به ۶ ب) ۱ به ۴ ج) ۱ به ۵ د) ۲ به ۹ ه) ۱ به ۳

۱۹. یک کره به‌وسیله‌ی ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه‌صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند کره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

الف) 2^8 ب) 2^9 ج) ۷۶ د) ۸۱ ه) ۷۴

۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\angle A=90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای ABH و ACH به‌ترتیب برابر ۱ و ۳ باشند آنگاه شعاع دایره محاطی مثلث ABC برابر است با:

الف) ۵ ب) $\sqrt{10}$ ج) $2\sqrt{2}$ د) ۴٫۵ ه) ۳

۲۱. فرض کنید $f(x)=ax^2+bx+c$، و به‌ازای $0\le x\le 1$ داشته باشیم، $|f(x)|\le 1$. در این‌صورت ماکزیمم مقدار $2a+b$ چه می‌تواند باشد؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۲۲. مجموع تمام اعداد مثبت x را بیابید به‌طوری‌که عبارت $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}$ به‌ازای آنها عددی صحیح شود.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt[۳]{۴}$ ج) $\sqrt{۵}$
د) $\sqrt{۵}\left(۱+\frac{۲\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۳}}\right)$ ه) $\frac{\sqrt{۵}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱)}{\sqrt{۳}}$

۲۳. حداقل چند نقطه باید در صفحه درنظر گرفت به‌طوری که هر نقطه‌ی صفحه لااقل از یکی از این نقاط فاصله‌اش گنگ باشد.
الف) ۲ نقطه ب) ۳ نقطه ج) ۴ نقطه د) ۵ نقطه
ه) با تعدادی متناهی نقطه نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۴. فرض کنید $f(x)=\frac{۴^x}{۴^x+۲}$. در این‌صورت مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$S=f\left(\frac{۱}{۱۴}\right)+f\left(\frac{۲}{۱۴}\right)+\cdots+f\left(\frac{۱۳}{۱۴}\right)$$

الف) ۷ ب) ۸□۵ ج) ۶□۵ د) ۴□۵ ه) ۵□۵

۲۵. تعداد تمام اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ را بیابید به‌طوری‌که مجموع اعدادی طبیعی باشند که در رقمهای آنها هر یک از اعداد ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار آمده باشد. (مثال: $۹+۸+۷+۶+۴+۳+۵۲+۱+۰=۹۰$)
الف) ۷ ب) ۱۱ ج) ۱۵ د) ۱۹ ه) ۲۳

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید که $a = \sqrt{۴ + \sqrt{۱۵}}$. در این‌صورت روشن است که

$$\sqrt{۴ - \sqrt{۱۵}} = \frac{\sqrt{(۴ - \sqrt{۱۵})(۴ + \sqrt{۱۵})}}{\sqrt{۴ + \sqrt{۱۵}}} = \frac{۱}{a}$$

پس صورت مسأله به معادله‌ی $a^x + a^{-x} = ۸$ تبدیل می‌شود. بنابراین،

$$a^x - ۸ + a^{-x} = ۰ \Rightarrow (a^x)^۲ - ۸a^x + ۱ = ۰ \Rightarrow a^x = ۴ \pm \sqrt{۱۵}$$

که دارای جوابهای $x = ۱$ و $x = -۱$ است.

راه حل دوم: از طرف دیگر، فرض کنید $a^{-x} + a^x = a^{-y} + a^y$. محاسبه‌ی ساده‌ای نشان می‌دهد که $(a^x - a^y)(a^x a^y - ۱) = ۰$. پس یا $x = y$ و یا $x = -y$. پس معادله جواب دیگری ندارد.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
باید باقیمانده‌ی تقسیم عدد $a = ۲۳^{۲۳} - ۱۷^{۱۷}$ را بر ۱۰ پیدا کنیم. توجه کنید که $۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۳$ و $-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۳^۲$. پس

$$۲۳^{۲۳} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^{۱۱} \times ۳ \overset{۱۰}{\equiv} -۳$$

همچنین، $-۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۷$ و $-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۷^۲$. پس

$$۱۷^{۱۷} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^۸ \times -۳ \overset{۱۰}{\equiv} -۳$$

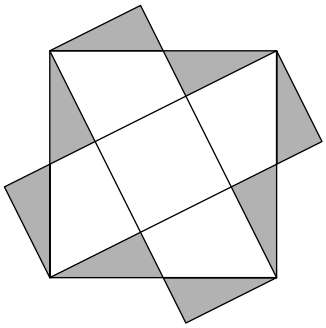
پس $۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۳ + ۳ - \overset{۱۰}{\equiv} a$ و بنابراین، رقم سمت راست a صفر است.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر به شکل زیر دقت کنید، خواهید دید که همه‌ی مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی نشان داده شده با هم برابرند.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور



همچنین اگر در مربع اصلی به‌جای مثلثهای درونی مثلثهای بیرونی را جایگزین کنیم به پنج مربع که هر یک با مربع کوچکتر همنهشت‌اند می‌رسیم. پس اگر مساحت مربع کوچک برابر S باشد، آنگاه $5S = 1$ و بنابراین $S = \frac{1}{5}$.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
ابتدا دقت کنید که اگر اعداد ۲، ۳، ... و ۳۷ را حذف کنیم، در مجموعه‌ی باقی‌مانده هیچ عضوی حاصل‌ضرب دو عضو دیگر نخواهد بود زیرا به‌ازای هر دوعضو مجموعه‌ی باقی‌مانده مانند a و b چون $a, b \geq 38$ پس $ab \geq 38^2 > 1375$.

از طرف دیگر نشان می‌دهیم که گزینه (الف) نادرست است. ابتدا توجه کنید که اگر a عددی طبیعی باشد و $2 \leq a \leq 37$، آنگاه از بین a و a^2 دست کم یکی باید حذف شود. حال اگر همه‌ی زوجهای (a, a^2) را که $2 \leq a \leq 37$ و a مربع کامل نیست درنظر بگیریم، از هر زوج مرتب دست‌کم یک مولفه باید حذف شود و اعداد حذف شده دوبه‌دو متمایزند. چون تعداد اعدادی مانند a با خاصیت بالا برابر ۳۲ است، پس دست کم ۳۲ عضو باید حذف شوند.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید $S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ برابر عدد $\overline{aaa} = 111a$ شود. با توجه به این که $37 \times 3 = 111$، پس $37 | n(n+1)$ و چون ۳۷ عددی اول است، n یا $n+1$ باید بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد. اما چون $\frac{n(n+1)}{2} < 1000$ پس $n < 50$. پس $n = 36$ یا $n = 37$ و یک بررسی ساده نشان می‌دهد که تنها $n = 36$ قابل‌قبول است.

۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.
ابتدا توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ($\angle C = 90^\circ$) ویژگی مورد نظر برقرار است. حال فرض کنید که $\angle C > 90^\circ$. در این‌صورت

$$\begin{array}{rcccl} AB^2 & = & c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos C > a^2 + b^2 \geq 2ab > 2ab\sin C \\ & = & 4S & = & \frac{4AB \cdot CH}{2} \end{array}$$

پس $2CH < AB$ که خلاف فرض است.

۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
ابتدا توجه کنید که انتخاب سه وزنه که وزن هر کدام ۱۰ کیلوگرم است، نشان می‌دهد که مجموع وزن وزنه‌ها می‌تواند برابر ۳۰ کیلوگرم باشد. ثابت می‌کنیم که این حداکثر ممکن است. فرض کنید $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ وزن وزنه‌ها را نشان دهد. k را کوچکترین عدد طبیعی بگیرید که $w_1 + \cdots + w_k > 10$. پس چون $w_1 + \cdots + w_{k-1} \leq 10$ داریم،

$$10 < w_1 + \cdots + w_k \leq 20$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

پس بنابر فرض مسأله $w_{k+1} + \cdots + w_n \leq 10$ و درنتیجه،

$$w_1 + \cdots + w_n \leq 20 + 10 = 30$$

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید $a = \overline{SIX}$ و $b = \overline{NINE}$. چون $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ و همچنین می‌دانیم که $b < 2000$ پس $N = 1$. پس $I \neq 1$. حال بازه‌های $[1210, 1219]$، $[1310, 1319]$، $\ldots$، $[1510, 1519]$ را درنظر می‌گیریم. با توجه به گزینه‌ها، b در یکی از این بازه‌ها قرار دارد. اگر مثلاً $1219 \leq b \leq 1210$، آنگاه با توجه به $a = \frac{2}{3}b$ داریم $806 \leq a \leq 812$ و چون هیچ یک از اعضای این بازه رقم دهگانشان ۲ نیست، پس از اینجا جوابی پیدا نمی‌شود. اگر $1310 \leq b \leq 1319$، به‌طور مشابه جوابی پیدا نمی‌شود. اما اگر $1410 \leq b \leq 1419$ نتیجه می‌شود که $940 \leq a \leq 946$.
از اینجا مثلاً جوابهای $a = 942$، $b = 1413$ به‌دست می‌آید. پس $I = 4$.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که رابطه‌ی داده شده معادل است با

$$x + \sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1} + y} = \sqrt{y^2 + 1} - y$$

پس،

$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \\ (x + y)^2 &= y^2 + 1 + x^2 + 1 - \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \\ \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} &= 1 - xy \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) &= 1 + x^2y^2 - 2xy \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 &= 1 + x^2y^2 - 2xy \end{aligned}$$

درنتیجه، داریم $x^2 + y^2 + 2xy = 0$؛ یعنی $x + y = 0$. برعکس اگر $y = -x$، عبارت

$$\left(\sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$$

برابر

$$\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right)\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$$

خواهد بود که عبارت فوق نیز برابر ۱ است.

۱۰. این مسأله نادرست است.
ثابت می‌کنیم گزینه‌های (الف) و (ب) درست‌اند در حالی که گزینه‌ی (ج) نادرست است. توجه کنید که تابع $f_\alpha(x) = x^\alpha$ به‌ازای $x > 0$، بسته به اینکه α مثبت یا منفی باشد، تابعی صعودی یا نزولی است. پس اگر $a \geq b$، $f_{a-b}(x)$ صعودی است و درنتیجه،

$$\frac{a^a b^b}{b^a a^b} = f_{a-b}\left(\frac{a}{b}\right) \geq f(1) = 1$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

و اگر $a \leq b$، $f_{a-b}(x)$ نزولی است و درنتیجه،

$$\frac{a^a b^b}{b^a a^b} = f_{a-b}\left(\frac{a}{b}\right) \geq f(۱) = ۱$$

و در هر حال گزینه‌ی (الف) درست است. در گزینه (ب) فرض کنید $a \leq b$. در این‌صورت،

$$a^\alpha b^{۱-\alpha} = f_\alpha(a) b^{۱-\alpha} \leq f_\alpha(b) b^{۱-\alpha} = b^\alpha b^{۱-\alpha} = b < a + b$$

اگر $a \geq b$، باز هم با استدلال مشابهی می‌توانید نشان دهید که $a^\alpha b^{۱-\alpha} > a + b$ و در هر حال، گزینه‌ی (ب) درست است.

اما گزینه‌ی (ج) نادرست است. فرض کنید $a = b$. در این‌صورت حکم این گزینه تبدیل می‌شود به

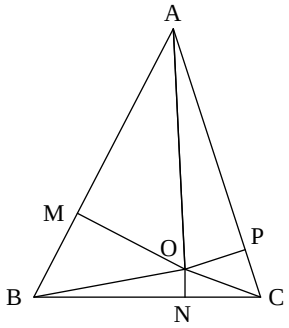
$$a^{۲a} \geq (a^۲)^{\frac{۲a+۱}{۲}}$$

یا

$$a^{۲a} \geq a^a a^{\frac{۱}{۲}}$$

که هم‌ارز است با $a^a \geq a^{\frac{۱}{۲}}$. اما اگر $\frac{۱}{۲} < a < ۱$ آنگاه، چون $a < ۱$ و $a - \frac{۱}{۲} > ۰$ نتیجه می‌شود $a^{a-\frac{۱}{۲}} < ۱$ و بنابراین $a^a < a^{\frac{۱}{۲}}$.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.



بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$\begin{array}{rcrcl} AM^۲ + OM^۲ & = & OA^۲ & = & AP^۲ + OP^۲ \\ CP^۲ + OP^۲ & = & OC^۲ & = & CN^۲ + ON^۲ \\ BN^۲ + ON^۲ & = & OB^۲ & = & BM^۲ + OM^۲ \end{array}$$

اگر این سه رابطه را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$AM^۲ + CP^۲ + BN^۲ = AP^۲ + CN^۲ + BM^۲$$

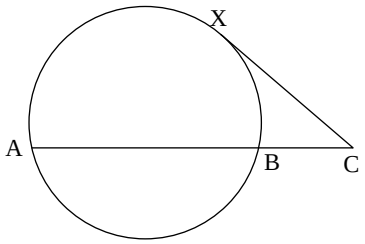
اگر مقادیر داده شده را در رابطه‌ی بالا جایگذاری کنیم مقدار $AP = ۲\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
اگر X نقطه‌ی تماس یکی از مماسها با دایره باشد،



بنابر قضیه‌ی قوت نقطه،

$$CX^۲ = CA \cdot CB$$

پس CX مقداری ثابت است. بنابراین X روی یک دایره تغییر می‌کند. از طرف دیگر، اگر X نقطه‌ای باشد که $CX^۲ = CA.CB$ و X روی خط AB نباشد دایره‌ای از سه‌نقطه A، B و X می‌گذرد و خط CX بر این دایره مماس است. اما اگر X روی خط AB باشد، به روشنی چنین دایره‌ای وجود ندارد پس مکان هندسی X دایره‌ای است به مرکز C و شعاع $CA \cdot CB$ که دو نقطه‌ی تقاطع آن با خط AB حذف شده‌اند.

۱۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
روشن است که $(x, y) = (۳, ۲)$ و $(x, y) = (۱, ۱)$ جوابهای مسأله‌اند. ادعا می‌کنیم که مسأله جواب دیگری ندارد. اگر $x \geq ۳$، آنگاه

$$۳^y = ۲^x + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۱$$

پس y باید زوج باشد. در واقع اگر $y = ۲z + ۱$ آن‌گاه

$$۳^y = ۳^{۲z+۱} = ۹^z \times ۳ \overset{۸}{\equiv} ۳$$

پس فرض کنید $y = ۲z$. درنتیجه،

$$۲^x = ۳^{۲z} - ۱ = (۳^z - ۱)(۳^z + ۱)$$

پس $۳^z - ۱$ و $۳^z + ۱$ دو توان ۲ هستند که اختلاف آنها ۲ است. پس $۳^z = ۳$ و بنابراین، $z = ۱$. نتیجه می‌شود $(x, y) = (۳, ۲)$. پس تنها جوابهای معادله $(x, y) = (۱, ۱)$ و $(x, y) = (۳, ۲)$ هستند.

۱۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
قانون سینوسها را در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BDA} = \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x}$$

پس بنابر فرض مسأله،

$$\frac{\sin ۳x}{\sin ۲x} = \sqrt{۲}$$

به آسانی نتیجه می‌شود که تنها جواب این معادله $x = ۱۵^\circ$ است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b را d فرض کنید. چون

$$\frac{a+۱}{b}+\frac{b+۱}{a}=\frac{a^۲+b^۲+a+b}{ab}$$

عددی طبیعی است، پس عبارت $a^۲+b^۲+a+b$ بر ab بخش‌پذیر است. پس $(a+b)^۲+a+b$ نیز بر ab بخش‌پذیر است. یعنی ab عبارت $(a+b)(a+b+۱)$ را می‌شمارد. دقت کنید که چون ab بر $d^۲$ بخش‌پذیر است، پس

$$d^۲|(a+b)(a+b+۱)$$

اما $a+b+۱$ به‌صورت $dk+۱$ است و بنابراین، نسبت به d اول است. پس $d^۲|a+b$. یعنی $d^۲\le a+b$ که گزینه‌ی (الف) یعنی $d\le\sqrt{a+b}$ را نتیجه می‌دهد. انتخاب $a=۳$ و $b=۶$ نشان می‌دهد که گزینه‌های (د) و (ه) نادرست‌اند. همچنین روشن است که به‌ازای هر $a,b\ge ۰$،

$$\sqrt{a+b}\le\sqrt{\frac{۲(a^۲+b^۲)}{a+b}}\le\sqrt{\frac{۳(a^۲+b^۲)}{a+b}}$$

۱۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر $\alpha=x+۲$، آنگاه

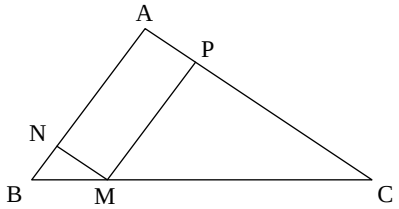
$$\alpha^۳-۶\alpha^۲+۱۳\alpha=(x+۲)^۳-۶(x+۲)^۲+۱۳(x+۲)=x^۳+x+۱۰$$

پس $x^۳+x=-۹$. همچنین اگر $\beta=y+۲$، با محاسبه‌ی مشابهی نتیجه می‌شود $y^۳+y=۹$. اما می‌دانیم که تابع $f(t)=t^۳+t$ تابعی اکیداً صعودی و فرد است. پس چون $f(x)=-f(y)$ نتیجه می‌شود $x+y=۰$ و بنابراین،

$$\alpha+\beta=x+y+۴=۴$$

۱۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
فرض کنید a عددی متعادل و سه رقمی باشد. (توجه کنید که هر عدد متعادل دو رقمی به‌صورت $a=\overline{xx}$ است و بنابراین $a+۱$ متعادل نیست). مجموع رقمهای هر عدد متعادل زوج است. پس برای اینکه $a+۱$ هم متعادل باشد، رقم سمت راست a باید ۹ باشد. فرض کنید $a=\overline{xy۹}$. روشن است که باید رابطه‌ی $x+y=۹$ برقرار باشد. پس تنها عددهای متعادل سه رقمی ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹، ۴۵۹، ۵۴۹، ۶۳۹، ۷۴۹، ۸۴۹ و ۹۰۹ هستند. اما اگر a یکی از چهار عدد ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹ یا ۴۵۹ باشد $a+۱$ متعادل نیست. پس کوچکترین عدد متعادل مانند a که $a+۱$ هم متعادل باشد ۵۴۹ است.

۱۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $x=\frac{BM}{BC}$. در این‌صورت، $\frac{CM}{BC}=x-۱$. مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم.



https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

فرض کنید خطهای رسم شده از M ضلعهای AB و AC را به‌ترتیب در N و P قطع کنند. در این‌صورت،

$$\begin{aligned}[BMN] &= x^۲\,[ABC]\\ [CMP] &= (۱-x)^۲\,[ABC]\end{aligned}$$

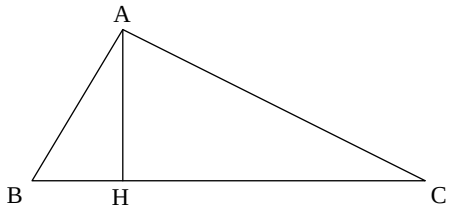
بنابراین،

$$\begin{aligned}(x^۲+(۱-x)^۲)\,[ABC] &= ([BMN]+[CMP])\\ &= \left(۱-\tfrac{۵}{۱۸}\right)[ABC]\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود $۲x^۲-۲x+\frac{۵}{۱۸}=۰$. جوابهای این معادله $x=\frac{۱}{۶}$ و $x=\frac{۵}{۶}$ هستند. پس M ضلع BC را به نسبت ۱ به ۵ تقسیم می‌کند.

۱۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
فرض کنید که a_n تعداد ناحیه‌هایی را نشان دهد که توسط n صفحه که هیچ سه‌تایی از آنها در یک قطر کره مشترک نیستند، در کره به‌وجود می‌آید. روشن است که $a_۱=۲$ و $a_۲=۴$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_{n+۱}=a_n+۲n$. فرض کنید که صفحه‌های $\pi_۱$، $\pi_۲$، ... و π_n کره را به a_n ناحیه قسمت کرده باشند. اشتراک صفحه‌ی $\pi_{n+۱}$ با هر یک از این صفحه‌ها یک خط است که قطری از کره را در بر دارد. و بنابر فرض مسأله، این n خط که آنها را $l_۱$، $l_۲$، ... و l_n می‌نامیم دوبه‌دو متمایزند. روشن است که به‌ازای هر یک از این خطها دو ناحیه‌ی جدید به‌وجود می‌آید. پس $۲n$ ناحیه‌ی جدید افزوده می‌شوند و بنابراین، $a_{n+۱}=a_n+۲n$. اکنون به استقرا روی n می‌توان ثابت کرد که $a_n=n^۲-n+۲$. پس $a_۹=۷۴$.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اضلاع مثلث قائم الزاویه را با a، b و c نشان می‌دهیم.



روشن است که مثلثهای ABH و ACH با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها نیز به‌ترتیب برابر $\frac{c}{a}$ و $\frac{b}{a}$ است. پس اگر شعاع دایره‌های محاطی آنها را به‌ترتیب با $r_۱$ و $r_۲$ نشان دهیم، آنگاه

$$r_۱=\frac{c}{a}r,\quad r_۲=\frac{b}{a}r$$

پس،

$$r_۱^۲+r_۲^۲=\frac{b^۲+c^۲}{a^۲}r^۲=r^۲$$

درنتیجه، $r=\sqrt{r_۱^۲+r_۲^۲}$ یا $r=\sqrt{۱۰}$.

۲۱. گزینه (ج) صحیح است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

توجه کنید که

$$\begin{aligned} |f(۰)| &= |c| \le ۱ \\ \left|f\left(\tfrac{۱}{۲}\right)\right| &= \left|\tfrac{a}{۴}+\tfrac{b}{۲}+c\right| \le ۱ \\ |f(۱)| &= |a+b+c| \le ۱ \end{aligned}$$

پس،

$$\begin{aligned} &\left|c-۴\left(\tfrac{a}{۴}+\tfrac{b}{۲}+c\right)+۳(a+b+c)\right| \\ &\quad = \left|f(۰)-۴f\left(\tfrac{۱}{۲}\right)+۳f(۱)\right| \\ &\quad \le |f(۰)|+۴\left|f\left(\tfrac{۱}{۲}\right)\right|+۳|f(۱)| \\ &\quad \le ۸ \end{aligned}$$

اما

$$\left|c-۴\left(\frac{a}{۴}+\frac{b}{۲}+c\right)+۳(a+b+c)\right| = |۲a+b|$$

پس $|۲a+b| < ۸$. پس ۸ کران بالایی برای $|۲a+b|$ است و مثال

$$f(x) = ۸x^۲ - ۸x + ۱$$

نشان می‌دهد که ۸ ماکزیمم مقدار $۲a+b$ است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $f(x) = \sqrt[۳]{۲+x}+\sqrt[۳]{۲-x}$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(x) \le ۲\sqrt[۳]{۲}$. برای اثبات کافی است ماکزیمم f را پیدا کنیم. معادله‌ی $f'(x) = ۰$ تبدیل می‌شود به،

$$\frac{۱}{۳}(۲+x)^{-\frac{۲}{۳}} - \frac{۱}{۳}(۲-x)^{-\frac{۲}{۳}} = ۰$$

که دارای جواب $x = ۰$ است و چون $f(۰) = ۲\sqrt[۳]{۲}$ نتیجه می‌شود که ماکزیمم f مقدار $۲\sqrt[۳]{۲}$ است. اکنون چون $۳ < ۲\sqrt[۳]{۲}$، کافی است جواب معادله‌های

$$(۲+x)^{\frac{۱}{۳}} + (۲-x)^{\frac{۱}{۳}} = n$$

را به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ پیدا کنیم. اگر قرار دهیم $y^۳ = x+۲$، نتیجه می‌شود $۲-x = ۴-y^۳$ و بنابراین،

$$y + (۴-y^۳)^{\frac{۱}{۳}} = n$$

یا

$$\begin{aligned} ۴-y^۳ &= (n-y)^۳ \\ &= n^۳ - ۳n^۲y + ۳ny^۲ - y^۳ \end{aligned}$$

پس $۳ny^۲ - ۳n^۲y + n^۳ - ۴ = ۰$. جوابهای این معادله عبارت‌اند از

$$y = \frac{۳n^۲ \pm \sqrt{۹n^۴ - ۱۲n(n^۳-۴)}}{۶n}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

است. به‌ازای $n = ۱$، جواب مثبت معادله $y = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است و به‌ازای $n = ۲$ معادله‌ی

$$x = y^۳ - ۲ = \sqrt{۵}$$

دو جواب مثبت مانند $y_۱$ و $y_۲$ دارد به‌طوری‌که $y_۱ y_۲ = \frac{۲}{۳}$ و $y_۱ + y_۲ = ۲$. به آسانی می‌توان ثابت کرد که $x_۱ + x_۲ = ۰$ و بنابراین $y_۱^۳ + y_۲^۳ = ۴$.

۲۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
سه نقطه‌ی $P = (۰, ۰)$، $Q = (۱, ۰)$ و $R = (\sqrt[۴]{۲}, ۰)$ را درنظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هیچ نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله‌ی آن از هر سه نقطه‌ی P و Q و R عددی گویا باشد. فرض کنید $X = (x, y)$ چنین نقطه‌ای باشد. اگر

$$\begin{aligned} a &= x^۲ + y^۲, \\ b &= (x-۱)^۲ + y^۲ \\ &= a + ۱ - ۲x, \\ c &= (x - \sqrt[۴]{۲})^۲ + y^۲ \\ &= a + \sqrt{۲} - ۲x\sqrt[۴]{۲} \end{aligned}$$

آنگاه a، b و c باید اعدادی گویا باشند. پس $۲x - ۱$ و $\sqrt{۲} - ۲x\sqrt[۴]{۲}$ اعدادی گویا هستند. از اینجا نتیجه می‌شود که x گویاست. اما در این‌صورت $\sqrt{۲} - ۲x\sqrt[۴]{۲}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد. پس سه نقطه‌ی P، Q و R دارای خاصیت مورد نظر مسأله‌اند.

توجه کنید که هیچ دو نقطه‌ای مانند A و B نمی‌توانند منظور ما را برآورده کنند. فرض کنید R عددی گویا بزرگتر از نصف فاصله‌ی A و B باشد. در این‌صورت دایره‌های به شعاع R و به مرکزهای A و B یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. فاصله‌ی P از A و B گویاست.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که

$$f(۱-x) = \frac{۴^{۱-x}}{۴^{۱-x} + ۲} = \frac{۴}{۴ + ۲ \times ۴^x} = \frac{۲}{۴^x + ۲}$$

پس،

$$f(x) + f(۱-x) = \frac{۴^x + ۲}{۴^x + ۲} = ۱$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ۲S &= \left[f\left(\tfrac{۱}{۱۴}\right) + f\left(\tfrac{۱۳}{۱۴}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\tfrac{۱۳}{۱۴}\right) + f\left(\tfrac{۱}{۱۴}\right)\right] \\ &= \overbrace{۱ + \cdots + ۱}^{\text{۱۳ بار}} \\ &= ۱۳ \end{aligned}$$

پس $S = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

---

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
توجه کنید که اگر a عددی با خاصیت مورد نظر مسأله باشد، a به پیمانه‌ی ۹ با عدد $۰+۱+\cdots+۹ = ۴۵$ همنهشت است. پس a بر ۹ بخش‌پذیر است. همچنین $۴۵ \leq a \leq ۹۹$. پس حداکثر ۷ مقدار برای a وجود دارد. به‌سادگی می‌توان دید که همه‌ی اعداد ۴۵، ۵۴، ... و ۹۹ خاصیت مورد نظر را دارند. پس دقیقاً ۷ مقدار برای a وجود دارد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

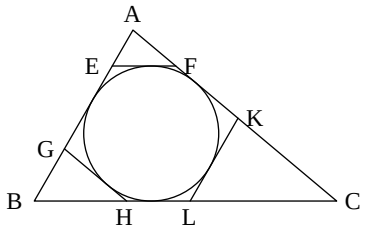
۱. اعداد زوج متوالی ۲، ۴، ۶، ۸، ... را آنقدر ضرب می‌کنیم تا حاصل بر ۱۳۷۵ بخش‌پذیر شود. بزرگترین عدد زوج به کار رفته در کدام‌یک از روابط زیر صدق می‌کند؟
الف) بین ۱ تا ۱۱ ب) بین ۱۱ تا ۲۱ ج) بین ۲۱ تا ۳۱
د) بین ۳۱ تا ۴۱ ه) چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

۲. اگر $۹x + ۵y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، برای اینکه لزوماً $۱۰x + ky$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر شود، k را برابر کدام‌یک از مقادیر زیر انتخاب کنیم؟
الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۱۰

۳. مربع $ABCD$ در صفحه مفروض است. سه خط موازی $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ را به‌ترتیب از سه رأس A، B و C رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که فاصله‌ی $L_۱$ با $L_۲$ برابر ۵ و فاصله‌ی $L_۲$ با $L_۳$ برابر ۷ باشد. مطلوب است مساحت مربع.
الف) ۷۰ ب) $\sqrt{۳۵}$ ج) ۳۵ د) $\sqrt{۷۴}$ ه) ۷۴

۴. تعداد سه‌تاییهای مرتب (x, y, z) از اعداد صحیح که در معادلات $x + y^۲ - z = ۱۲۴$ و $x^۲ + y - z =$ ۱۰۰ صدق می‌کنند عبارت است از:
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۵. مثلث ABC و دایره‌ی محاطی آن به شعاع r مفروض است. سه مماس EF، GH و KL را به‌ترتیب موازی BC، AC و AB رسم کرده‌ایم. اگر r_a، r_b و r_c به‌ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای AEF، BGH و CKL باشند، آنگاه کدام‌یک از روابط زیر همواره صحیح است؟
الف) $r - r_a < r_a + r_b$ ب) $r - r_a > r_b + r_c$
ج) $r - r_a = r_b + r_c$ د) $r - r_a = r_b - r_c$
ه) هیچ‌کدام از این روابط همواره برقرار نیست.

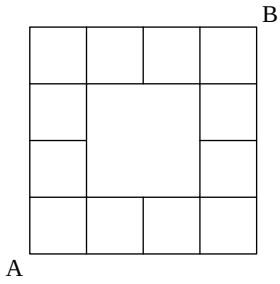


دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۶. در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم روی خطوط رسم شده از A به B برویم به‌طوری‌که کوتاهترین مسیر ممکن را پیموده باشیم؟
الف) ۱۸ ب) ۳۴ ج) ۲۶ د) ۲۸ ه) ۳۲



۷. عدد طبیعی b را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی a به‌دست می‌آید مقلوب a می‌نامیم (مثلاً مقلوب ۱۳۷۵ عدد ۵۷۳۱ است). مطلوب است تعداد اعداد بین ۱ تا ۹۹۹۹۹، که مقلوبشان با خودشان برابر است.
الف) ۱۰۹۸ ب) ۱۲۲۰ ج) ۹۷۶ د) ۱۵۴۲ ه) ۱۰۰۸

۸. فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a \neq 0$. اگر a و $4a+3b+2c$ دارای یک علامت باشند، کدام‌یک از نتیجه‌گیریهای زیر برای معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ درست است؟
الف) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(1,4)$ قرار گیرند.
ب) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(1,2)$ قرار گیرند.
ج) معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است.
د) دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامتهای متفاوتی هستند.
ه) هر دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامت یکسانی هستند.

۹. دنباله‌های $a_n = \sqrt{123+n^2}$ و $b_n = n+3$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ داده شده‌اند. فرض کنید که r کوچکترین عدد صحیحی باشد که $a_r < b_r$ و s نیز بزرگترین عدد صحیحی باشد که $a_s > b_s + 1$. در این‌صورت $r+s$ برابر است با:
الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ ه) ۳۸

۱۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ مفروض است. نیمساز زاویه‌ی B ضلع AC را در D قطع می‌کند و داریم $BC = BD + AD$. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر است با:
الف) 100° ب) 108° ج) 110° د) 115° ه) 120°

۱۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ میانه‌ی BM عمود بر نیمساز CD است. در این‌صورت $\sin C$ برابر با کدام‌یک از مقادیر زیر است؟
الف) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ د) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ه) $\frac{1}{4}$

۱۲. فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح و مثبت باشند به‌طوری‌که $a < 2b$ و باقیمانده‌ی تقسیم a بر b برابر $2r$، باقیمانده‌ی تقسیم a بر c برابر r، و باقیمانده‌ی تقسیم b بر c نیز برابر r است. در این‌صورت کوچکترین عدد از میان اعداد زیر که بر c بخش‌پذیر باشد کدام است؟
الف) $(a+b)$ ب) $\frac{(a+b)}{2}$ ج) $\frac{(a+b)}{3}$ د) $2(a+b)$ ه) $3(a+b)$

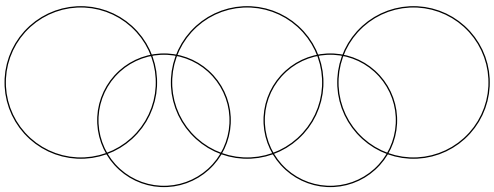
۱۳. ۵ دایره مطابق شکل، ۹ ناحیه (متناهی) در صفحه به‌وجود آورده‌اند. اعداد از ۱ تا ۹ را به این نواحی طوری نسبت می‌دهیم که مجموع اعداد هر دایره با مجموع اعداد دایره‌های دیگر مساوی باشد. بیشترین مقداری که

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

این مقدار مساوی می‌تواند داشته باشد، عبارت است از:
الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۱۴ د) ۱۵ ه) ۱۶



۱۴. اگر $S = \frac{(۲^۳-۱)(۳^۳-۱)(۴^۳-۱)\cdots(۱۰۰^۳-۱)}{(۲^۳+۱)(۳^۳+۱)(۴^۳+۱)\cdots(۱۰۰^۳+۱)}$ کدام‌یک از مقادیر زیر به S نزدیکتر است؟
الف) ۰٫۶ ب) ۰٫۶۷ ج) ۰٫۶۶۷ د) ۰٫۶۶۶۷ ه) ۰٫۶۶۶۶۷

۱۵. به‌ازای کدام مقدار n معادله‌ی $\frac{۱}{n} = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای جواب منحصربه‌فردی است؟
الف) ۱۰۲۴ ب) ۲۱۱۹ ج) ۲۲۱۹ د) ۲۶۵۱ ه) هیچکدام

۱۶. یک صفحه‌ی شطرنجی ۲۵ × ۲۵ را درنظر گرفته اعداد ۱ تا $۲۵^۲$ را به ترتیبِ زیر در خانه‌های آن قرار می‌دهیم. اعداد ۱، ۲، ... و ۲۵ را از چپ به راست در سطر اول، ۲۶، ۲۷، ... و ۵۰ را از چپ به راست در سطر دوم، و بقیه را به همین ترتیب در سطرهای بعدی مربع قرار می‌دهیم. حال اگر ۲۵ خانه را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند در آن صورت مجموع اعداد این خانه‌ها چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد؟
الف) فقط می‌تواند برابر $\binom{۲۵}{۲}$ باشد.
ب) هر مقدار بین $\binom{۲۵}{۲}$ و $\binom{۲۵}{۳}$ می‌تواند باشد.
ج) فقط می‌تواند $\frac{۱}{۲}(۲۵ + ۲۵^۳)$ باشد.
د) هر مقدار بین $\binom{۲۵}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}(۲۵ + ۲۵^۳)$ می‌تواند باشد.
ه) هر مقدار بین $۲۵^۲$ و $\frac{۱}{۲}(۲۵^۲ + ۲۵^۳)$ می‌تواند باشد.

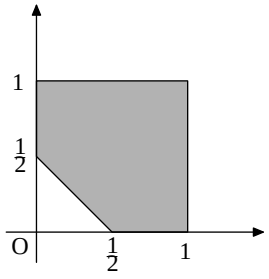
۱۷. چندجمله‌ای $P(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۰$، که a_iها اعداد صحیح هستند، مفروض است. اگر داشته باشیم $P(۱) = P(۲) = ۰$، در آن صورت دقیق‌ترین حکمی که در مورد ضرایب P می‌توان بیان کرد کدام است؟
الف) ضریب جمله‌ی ثابت (یعنی $a_۰$) کوچکتر یا مساوی ۲ است.
ب) اختلاف بین تعداد ضرایب مثبت و ضرایب منفی‌حداکثر یک است.
ج) مجموع ضرایب توانهای فرد قرینه‌ی مجموع ضرایب توانهای زوج است.
د) حداقل یک ضریب کوچکتر یا مساوی -۲ وجود دارد.
ه) هیچ‌کدام از حکمهای بالا در مورد تمامی $P(x)$ها صدق نمی‌کنند.

۱۸. مربع $S = \{(x,y) \mid ۰ \le x \le ۱, ۰ \le y \le ۱\}$ را درنظر بگیرید و به‌ازای هر $t \in [۰,۱]$، C_t را مجموعه‌ی نقاطی از S درنظر بگیرید که بالای خط واصل بین نقاط $(۰,۱-t)$ و $(t,۰)$ هستند ($C_{\frac{۱}{۲}}$ در شکل نشان داده شده است). اگر A اشتراک تمام C_tها، $۰ \le t \le ۱$، باشد یعنی $A = \{x \mid x \in C_t, \forall t \in [۰,۱]\}$. در آن صورت A برابر کدام‌یک از مجموعه‌های زیر است؟
الف) $S \cap \{(x,y) \mid x + y \ge ۱\}$ ب) $S \cap \{(x,y) \mid x + \sqrt{y} \ge ۱\}$
ج) $S \cap \{(x,y) \mid \sqrt{x} + y \ge ۱\}$ د) $S \cap \{(x,y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge ۱\}$
ه) $S \cap \{(x,y) \mid \sqrt{x+y} \ge ۱\}$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور



۱۹. فرض کنید که P_1، P_2، ... و P_{10} ده عدد طبیعی زوج و متمایز باشند. برای هر دنباله‌ی دلخواه a_1، a_2، ... و a_{1375} که a_iها از اعداد P_1 تا P_{10} باشند کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

الف) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مربع کامل است.

ب) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مکعب کامل است.

ج)تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مربع کامل است.

د) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مکعب کامل است.

ه) الف و ب هر دو درست است.

۲۰. فرض کنید ۱۳۷۵ بزرگترین عدد صحیحی است که 2^{1375}، عدد طبیعی n را می‌شمارد. در آن صورت بزرگترین مقدار k به‌طوری‌که 2^k عدد $A = 1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^{4n-1}$ را بشمارد برابر است با:

الف) ۱۳۷۴ ب) ۱۳۷۵ ج) ۱۳۷۶ د) ۱۳۷۷ ه) ۱۳۷۸

۲۱. فرض کنید f و g دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و با درجه‌ی بزرگتر یا مساوی ۲ باشند. اگر داشته باشیم:

$$f(x^2) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) g\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

در این‌صورت از بین نتیجه‌گیریهای زیر، کدام‌یک دقیق‌تر است؟

الف) به‌ازای هر $n \geq 2$ چنین چندجمله‌ایهایی وجود دارند به‌طوری که f از درجه‌ی n است.

ب) چنین چندجمله‌ایهایی وجود ندارند.

ج) $f(x)$ ریشه‌ای در $(0, \frac{1}{2})$ دارد.

د) $g(x)$ ریشه‌ای در $(0, \frac{1}{2})$ دارد.

ه) $g(x)$ برای هر x بزرگتر از صفر است.

۲۲. در مثلث مفروض ABC، D را پای نیمساز رأس A، و E را قرینه‌ی D نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع BC می‌گیریم. حال اگر F را روی BC به قسمی انتخاب کنیم که $\angle BAF = \angle EAC$ در آن‌صورت $\frac{BF}{FC}$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{c}{b}$ ب) $\frac{c^2}{b^2}$ ج) $\frac{c^3}{b^3}$ د) $\frac{c}{c+b}$ ه) $\frac{c^2}{(b+c)^2}$

۲۳. در مثلث ABC نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاعهای مثلث است. اگر $AH = BC$، آنگاه زاویه‌ی A چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

الف) 30° و 45° ب) 60° و 75° ج) 60° د) 45° ه) 45° و 60°

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. اگر $S = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹۹\}$، آنگاه بزرگترین زیرمجموعه‌ی آن با این خاصیت که هیچ عضو آن دو برابر دیگری نباشد چند عضو دارد؟
الف) ۵۵ ب) ۶۲ ج) ۶۶ د) ۷۱ ه) ۷۷

۲۵. در مورد تعداد دنباله‌های $n_۱$، $n_۲$، $n_۳$، ... از اعداد طبیعی با این خاصیت که برای هر k داشته باشیم $n_{k+۱} > n_{n_k}$ چه می‌توان گفت؟
الف) بینهایت دنباله با این خاصیت وجود دارد.
ب) تعداد زوجی از این دنباله‌ها وجود دارد.
ج) دقیقاً ۵ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
د) دقیقاً ۳ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
ه) دقیقاً یک دنباله با این خاصیت وجود دارد.

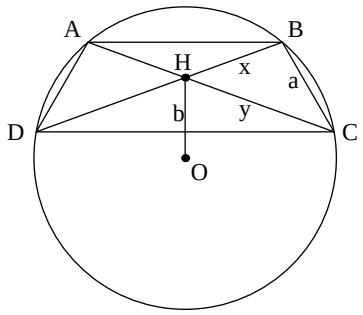
۲۶. برای عدد طبیعی n، بسط n در مبنای ۲ را درنظر گرفته و $f(n)$ را برابر تعداد رقمهای صفر در آن درنظر می‌گیریم (به عنوان مثال $f(۴) = ۲$ و $f(۶) = ۱$). اگر فرض کنیم که $S = ۲^{f(۱)} + ۲^{f(۲)} + \cdots + ۲^{f(۲۵۵)}$ آنگاه مقدار S برابر خواهد بود با:
الف) ۳۲۸۰ ب) ۱۰۹۰ ج) ۱۰۸۶ د) ۳۲۷۶ ه) ۶۵۶۰

۲۷. در حاصلضرب $\prod_{۱ \le i < j \le ۹}(x_i - x_j)$ ضریب جمله‌ی $x_۱^۴ x_۲^۴ \ldots x_۹^۴$ برابر است با:
الف) صفر ب) $\binom{۹}{۴}$ ج) $-\binom{۹}{۴}$ د) $۹ \times \binom{۹}{۲} \times \binom{۹}{۳}$ ه) $-۹ \times \binom{۹}{۲} \times \binom{۹}{۳}$

۲۸. تعداد زوجی بردار واحد از یک نقطه از صفحه رسم شده‌اند به‌طوری‌که یک در میان قرمز و آبی هستند. فرض کنید $\vec{R}$ مجموع بردارهای قرمز و $\vec{B}$ مجموع بردارهای آبی باشد. در این‌صورت دقیق‌ترین حکمی که می‌توان گفت چیست؟
الف) $|\vec{R} - \vec{B}| \le ۲$ ب) $|\vec{R} - \vec{B}| \le ۱ + \sqrt{۲}$
ج) $|\vec{R} - \vec{B}| \le ۱ + \sqrt{۳}$ د) $|\vec{R} - \vec{B}| \le \frac{۲\pi}{۳}$
ه) $|\vec{R} - \vec{B}| \le \pi - ۱$

۲۹. ۲۵ نقطه به‌طور دلخواه روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند. مطلوب است حداقل تعداد کمانهای کوچکتر یا مساوی ۱۲۰° که توسط این نقاط درست می‌شود.
الف) ۱۰۰ ب) ۱۲۰ ج) ۱۳۲ د) ۱۴۴ ه) ۱۴۹

۳۰. در شکل زیر $ABCD$ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محاط در دایره‌ی واحد است. فرض کنید $x > y$. در این‌صورت $x - y$ برابر است با:
الف) $(ab)^۲$ ب) $a\sqrt{b}$ ج) ab د) $b\sqrt{a}$ ه) $\sqrt{ab}$



https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

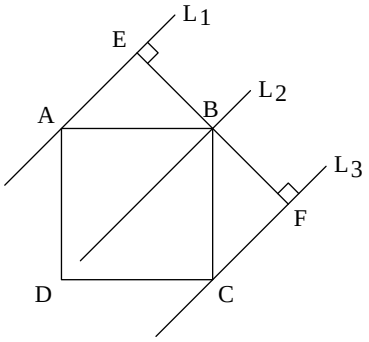
زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که $۱۳۷۵ = ۱۱ \times ۵^۳$. چون بین اعداد زوج فقط مضربهای ۱۰ عامل ۵ دارند، پس بزرگترین عدد به‌کار رفته ۳۰ است.

۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.
چون $۹x + ۵y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس $۲x + ۶y$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است. پس $۵(۲x + ۶y)$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است و بنابراین، $k \overset{۱۱}{\equiv} ۳۰$. پس $k = ۸$.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
از B خطی عمود بر خطهای موازی رسم کنید تا $L_۱$ را در E و $L_۳$ را در F قطع کند.



در این‌صورت، مثلث AEB با مثلث BFC همنهشت است. پس $AE = BF = ۵$. بنابراین،

$$AB^۲ = AE^۲ + BF^۲ = ۵^۲ + ۷^۲ = ۷۴$$

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
با کم کردن دو معادله از یکدیگر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۲۴ &= x + y^۲ - x^۲ - y \\ &= (y - x)(y + x - ۱) \end{aligned}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

توجه کنید که اگر $y-x$ زوج باشد، $(y+x-۱)$ فرد است و اگر $y-x$ فرد باشد، $(y+x-۱)$ زوج است. پس فقط حالتهای زیر امکان دارد:

$$\begin{cases} y-x=۱ \\ y+x-۱=۲۴ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y-x=۳ \\ y+x-۱=۸ \end{cases}$$

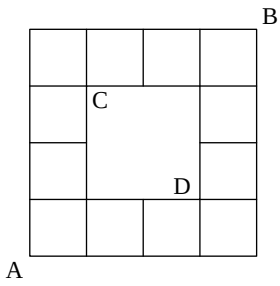
بنابراین، $(x,y,z)=(۱۲,۱۳,۵۷)$ یا $(x,y,z)=(۳,۶,-۸۵)$.

۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
به‌سادگی می‌توان دید که مثلثهای AEF ، BGH و CKL با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبتهای تشابه نیز اعداد $\frac{p-a}{p}$، $\frac{p-b}{p}$ و $\frac{p-c}{p}$ هستند. چون

$$\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}=۱$$

پس $r_a+r_b+r_c=r$ و از آنجا $r-r_a=r_b+r_c$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
برای رفتن از A به B اگر از C بگذریم تعداد راههای ممکن ۱۶ (۴ × ۴) است (از A به C چهار راه و از C به B نیز چهار راه).



به‌همین ترتیب، اگر از D نیز بگذریم ۱۶ راه وجود دارد. امّا دو مسیر نیز وجود دارند که از هیچ‌کدام از D و C نمی‌گذرند (روی مرز مربع بزرگتر). پس تعداد کل حالتها ۳۴ حالت است.

۷. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
n_k را تعداد عددهای k رقمی می‌گیریم که با مقلوب خود برابرند. برای اینکه n عددی k رقمی باشد که با مقلوب خود برابر است، رقم یکان آن نباید صفر باشد. اکنون توجه کنید که

$$\text{اگر } k=۱ \text{ آنگاه } n_۱=۹$$

$$\text{اگر } k=۲l+۱,\ l\geq ۱ \text{ آنگاه } n_k=۹\times ۱۰^{l}$$

$$\text{اگر } k=۲l,\ l\geq ۱ \text{ آنگاه } n_k=۹\times ۱۰^{l-۱}$$

پس

$$n_۱+n_۲+n_۳+n_۴+n_۵=۹+۹+۹۰+۹۰+۹۰۰=۱۰۹۸$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید معادله دو ریشه‌ی حقیقی مانند $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} ۰ &\leq \frac{۴a+۳b+۲c}{a} \\ &= ۴+۳\frac{b}{a}+۲\frac{c}{a} \\ &= ۲x_۱x_۲-۳(x_۱+x_۲)+۴ \\ &= (x_۱-۱)(x_۲-۲)+(x_۱-۲)(x_۲-۱) \end{aligned}$$

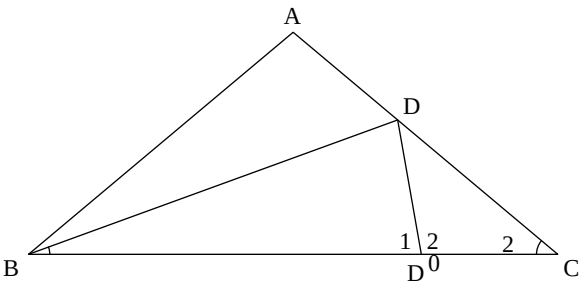
پس هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(۱,۲)$ باشند.

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
با حل نامعادله‌های $\sqrt{۱۲۳+r^۲}<r+۳$ و $\sqrt{۱۲۳+s^۲}>s+۴$ می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که $r=۲۰$ و $s=۱۳$. پس $r+s=۳۳$.

۱۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
چون BD نیمساز زاویه‌ی B است می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{DC}{AD}=\frac{BC}{AB}$$

اگر D' را روی BC چنان انتخاب کنیم که $BD=BD'$،



آنگاه $AD=D'C$ و رابطه‌ی بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{DC}{BC}=\frac{D'C}{AC}$$

و چون دو مثلث $DD'C$ و ABC در زاویه C نیز مشترک‌اند پس با هم متشابه‌اند. بنابراین، مثلث $DD'C$ متساوی‌الساقین است. پس، اگر زاویه‌ی C برابر ۲α باشد، چون $\angle DD'C$ زاویه‌ی خارجی مثلث $DD'C$ است نتیجه می‌شود $\angle DD'C=۴\alpha$. همچنین چون مثلث $BD'D$ متساوی‌الساقین است می‌توانیم بنویسیم

$$۱۸۰^\circ=\alpha+۴\alpha+۴\alpha=۹\alpha$$

و درنتیجه $\alpha=۲۰^\circ$. بنابراین،

$$\angle A=۱۸۰^\circ-۴\alpha=۱۰۰^\circ$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.
اگر نقطه‌ی تقاطع BM و CD را E بنامیم، روشن است که مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی EBC و EMC همنهشت‌اند. پس $BC = MC$ و درنتیجه، $AC = ۲BC$.
اگر $\angle C$ برابر با α باشد، $\angle A = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$ و بنابراین،

$$\sin A = ۲ \sin\alpha \cos\alpha$$

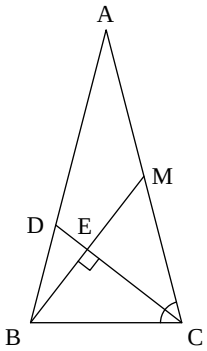
پس از قضیه سینوسها

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{BC}{AC}$$

نتیجه می‌شود،

$$\frac{۲ \sin\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۱}{۲}$$

و بنابراین، $\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$ یا $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$.



۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که می‌توانیم بنویسیم

$$a = mc + r, \quad b = nc + r, \quad a = lb + ۲r$$

که m، n و l عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. چون $a < ۲b$، نتیجه می‌شود $l = ۰$ یا $l = ۱$.
اگر $l = ۰$، نتیجه می‌شود $a = ۲r$ و درنتیجه $mc = r$. اما $۰ \le r < c$. پس $m = ۰$ بنابراین، $r = ۰$. پس $a = ۰$ که تناقض است. اگر $l = ۱$، نتیجه می‌شود $a = b + ۲r$ و درنتیجه، $b = a - ۲r$. بنابراین،

$$\frac{a+b}{۲} = \frac{a + a - ۲r}{۲} = a - r = mc$$

یعنی $\frac{a+b}{۲}$ بر c بخش‌پذیر است. اما $\frac{a+b}{۳}$ لزوماً بر c بخش‌پذیر نیست. در واقع از

$$\frac{a+b}{۳} = \frac{۲a - ۲r}{۳} = \frac{۲(a-r)}{۳} = \frac{۲mc}{۳}$$

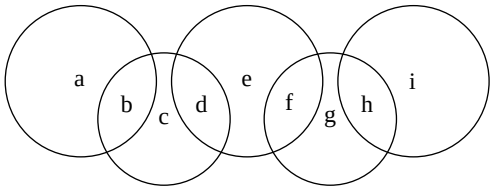
نتیجه می‌شود که اگر $\frac{a+b}{۳}$ بر c بخش‌پذیر باشد، m باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. پس لزوماً $a \ge ۳c$ و $b \ge ۳c$. اما مثال $a = ۱۵$، $b = ۹$ و $c = ۶$ نشان می‌دهد که این روابط لزوماً برقرار نیستند.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض می‌کنیم اعداد مطابق شکل قرار داده شده باشند و مقدار مشترک را N می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$N = a + b = h + i$$

بنابراین،

$$۲N \leq ۶ + ۹ + ۷ + ۸ = ۲ \times ۳۰$$

و درنتیجه، $N \leq ۱۵$. امّا اگر $N = ۱۵$، آنگاه

$$\{a, b, h, i\} = \{۹, ۸, ۷, ۶\}$$

و درنتیجه با استفاده از دایره‌ی وسط،

$$N = d + e + f \leq ۵ + ۴ + ۳ = ۱۲$$

که تناقض است. پس $N \leq ۱۴$. مقادیر زیر نشان می‌دهد که $N = ۱۴$ ممکن است.

$$a = ۵,\ b = ۹,\ c = ۲,\ d = ۳,\ e = ۴,\ f = ۷,\ g = ۱,\ h = ۶,\ i = ۸$$

۱۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که

$$S = \frac{(۲-۱)\left(۲^۲+۲+۱\right)(۳-۱)\left(۳^۳+۳+۱\right)\cdots(۱۰۰-۱)\left(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱\right)}{(۲+۱)(۲^۲-۲+۲)(۳+۱)(۳^۳-۳+۱)\cdots(۱۰۰+۱)(۱۰۰^۲-۱۰۰+۱)}$$

اما چون

$$((n+۲)-۱) = n+۱$$

و

$$(n+۱)^۲ - (n+۱) + ۱ = n^۲ + n + ۱$$

نتیجه می‌شود

$$S = \frac{(۲-۱)(۳-۱)(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{(۲^۲-۲+۱)(۹۹+۱)(۱۰۰+۱)} = \frac{۱۰۱۰۱}{۱۵۱۵۰} \simeq ۰/۶۶۶۷۳$$

۱۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
ثابت می‌کنیم معادله‌ی

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{n}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب منحصربه‌فرد دارد اگر و فقط اگر n عددی اول باشد. فرض کنید p عددی اول باشد. در این‌صورت معادله‌ی

$$\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}=\frac{۱}{p}$$

را می‌توانیم به‌صورت

$$x=\frac{yp}{y+p}$$

بنویسیم. در این‌صورت،

$$yp=x(y+p)$$

پس $x(y+p)$ عامل p دارد. اما اگر $x=kp$، آنگاه $y=k(y+p)$ که ناممکن است. پس $y+p=kp$. پس $y=p(k-۱)$. بنابراین،

$$x=\frac{p^۲(k-۱)}{pk}=\frac{p(k-۱)}{k}$$

اما چون $k>۱$، نتیجه می‌شود $k=p$. بنابراین $y=p(p-۱)$ و $x=p-۱$ جواب منحصربه‌فرد معادله است.

از طرف دیگر، اگر $p>۱$، $q>۱$ و $n=pq$، آنگاه معادله دارای دو جواب متمایز

$$x=n-۱,\quad y=n(n-۱)$$

و

$$x=p(q-۱),\quad y=pq(q-۱)$$

است. توجه کنید هیچ‌کدام از اعداد داده شده اول نیست.

۱۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که اعداد $i+۲۵j$ $(j=۰,۱,\dots,۲۴)$ را در ستون i ام چیده‌ایم. حال اگر اعداد را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند، ۲۵ عدد به‌صورت $i+۲۵j$ با i و jهای متمایز داریم. پس مجموع این عددها برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+۲۵+(۰\times۲۵+۱\times۲۵+\cdots+۲۴\times۲۵)$$

که عبارت فوق برابر است با

$$\frac{۲۵(۲۵+۱)}{۲}+۲۵\times\frac{۲۴(۲۴+۱)}{۲}=\frac{۱}{۲}(۲۵^۳+۲۵)$$

۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.
روشن است که $P(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. فرض کنید

$$h(x)=\frac{P(x)}{x-۲}=b_{n-۱}x^{n-۱}+b_{n-۲}x^{n-۲}+\cdots+b_۰$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که اگر $۰\le k\le n$، آنگاه

$$b_k-۲b_{k+۱}=a_{k+۱}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

و $a_۰ = -۲b_۰$. توجه کنید که $h(۱) = -P(۱) = ۰$. پس

$$b_{n-۱} + b_{n-۲} + \cdots + b_۰ = ۰$$

همه‌ی ضرایب b_i نمی‌توانند هم‌علامت باشند. پس دست‌کم یکی از این ضرایب بزرگتر از یا مساوی با ۱ است. اگر $b_۰ \geq ۱$، آنگاه $a_۰ \leq -۲$. اگر $b_۰ < ۱$، فرض کنید k کوچکترین عدد طبیعی باشد که $b_k \geq ۱$،

$$b_j \leq ۰, \quad j = ۰, ۱, \ldots, k-۱$$

در این‌صورت،

$$a_k = b_{k-۱} - ۲k_k \leq -۲$$

پس دست‌کم یکی از ضرایب $P(x)$ کوچکتر از یا مساوی با -۲ است.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که اگر $t = ۰$ و $t = ۱$، آنگاه از $(x, y) \in C_t$ نتیجه می‌شود،

$$yt + (۱-t)x \geq (۱-t)t, \quad ۰ \leq x, y \leq ۱$$

و درنتیجه،

$$y \geq \frac{t-۱}{t}x + ۱ - t = ۱ + x - \frac{x}{t} - t$$

توجه کنید که در مجموعه‌ی S، به‌ازای $t \in (۰, ۱)$،

$$\frac{x}{t} + t \leq ۲\sqrt{x}$$

بنابراین،

$$y \geq ۱ + x - ۲\sqrt{x} = (۱ - \sqrt{x})^۲$$

و درنتیجه، $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱$. چون $C_۰ = C_۱ = S$، نتیجه می‌شود

$$A \subseteq S \cap \{(x, y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱\}$$

از طرف دیگر، به آسانی می‌توانید دید که

$$S \cap \{(x, y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱\} \subseteq A$$

درنتیجه

$$S \cap \{(x, y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱\} = A$$

۱۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
بردار $x_j = \left(\alpha_۱^j, \alpha_۲^j, \ldots, \alpha_{۱۰}^j\right)$ را به‌ازای $۱ \leq j \leq ۱۳۷۵$ چنین تعریف می‌کنیم: اگر توان P_i در حاصل‌ضرب $a_۱a_۲ \ldots a_j$ برابر r باشد و $r \overset{۲}{\equiv} s$ که $s \in \{۰, ۱\}$، قرار می‌دهیم $\alpha_j^j = s$. روشن است که α_i^j ($۱ \leq i \leq ۱۰$، $۱ \leq j \leq ۱۳۷۵$) یا ۰ است یا ۱.

پس تعداد بردارهای x_j متمایز حداکثر $۲^{۱۰}$، یعنی ۱۰۲۴ است. پس بین $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۱۳۷۵}$ دست‌کم دو بردار مانند x_l و x_k $(k < l)$ برابرند. پس به‌ازای $۱ \leq i \leq ۱۰$، اگر تعداد P_i بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_l زوج باشد تعداد P_i ها بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k و بنابراین $a_{k+۱}$، $a_{k+۲}$، ...، a_l نیز زوج است. اگر تعداد P_i ها بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_l فرد باشد، تعداد P_i بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k نیز فرد و بنابراین بین $a_{k+۱}$، $a_{k+۲}$، ...، a_l زوج است. پس $a_{k+۱}a_{k+۱} \ldots a_l$ مربع کامل است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

---

۲۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید $O(n)$ نشان‌دهنده‌ی بزرگترین عدد صحیح k باشد که $۲^k | n$. توجه کنید که

$$A = \frac{۹^{۴n} - ۱}{۸}$$

و همچنین،

$$۹^{۲^{t+۱} \cdot s} - ۱ = \left(۹^{۲^t \cdot s} - ۱\right)\left(۹^{۲^{t} \cdots} + ۱\right)$$

چون $۹^{۲^t \cdot s} + ۱$ عددی به‌صورت $۴k + ۲$ است، نتیجه می‌شود

$$O\left(۹^{۲^{t+۱} \cdot s} - ۱\right) = O\left(۹^{۲^t \cdot s} - ۱\right) + ۱$$

حال اگر s عدد فردی باشد،

$$O\left(۹^s - ۱\right) = ۳$$

و بنابراین،

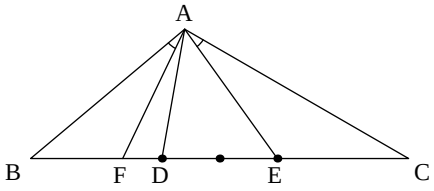
$$O\left(\frac{۹^{۲^{۱۳۷۵+۲} \cdot s} - ۱}{۸}\right) = ۱۳۷۷$$

۲۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
دقت کنید که برای هر عدد حقیقی x داریم،

$$x^۲ - \left(x - \frac{۱}{۲}\right) = \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۴}$$

پس $x^۲ > x - \frac{۱}{۲}$ و با توجه به این که اگر $f\left(x - \frac{۱}{۲}\right) = ۰$، آنگاه $f\left(x^۲\right) = ۰$ نتیجه می‌شود که اگر f یک ریشه داشته باشد بینهایت ریشه برای آن پیدا می‌شود. بنابراین f ریشه ندارد و درنتیجه، $g(x)$ همواره مثبت است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $\angle BAF = \alpha$.



در مثلث ABF می‌توانیم بنویسیم،

$$\frac{BF}{AF} = \frac{\sin\alpha}{\sin B}$$

در مثلث AEC می‌توانیم بنویسیم،

$$\frac{EC}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin C}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

پس

$$\frac{BF}{EC} = \frac{AF}{AE} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AF}{AE} \cdot \frac{c}{b} \quad (۱)$$

همچنین، در مثلث ABE نیز به‌طور مشابه داریم،

$$\frac{BE}{AE} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin B}$$

و در مثلث ACF می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{FC}{AF} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin C}$$

پس

$$\frac{BE}{FC} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{c}{b} \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{BE}{EC} = \frac{c^۲}{b^۲}$$

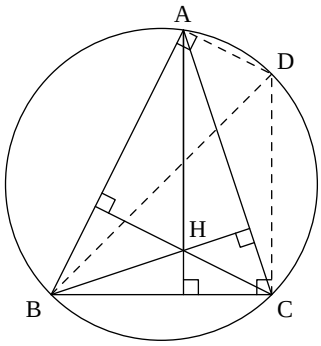
اما چون $BD = EC$ و $BE = CD$، خواهیم داشت،

$$\frac{BE}{EC} = \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$$

و بنابراین،

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c^۳}{b^۳}$$

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.
در نقطه‌ی C خطی بر BC عمود می‌کنیم تا دایره‌ی محیطی مثلث را در D قطع کند.



روشن است که BD قطر دایره است و بنابراین، $\angle BAD = ۹۰^\circ$.
پس، $CH \| DA$ و $CD \| AH$. یعنی چهار ضلعی $AHCD$ متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه، $AH = CD$ همچنین، $BC = AH$ و بنابراین، در مثلث BCD زاویه‌ی BDC برابر ۴۵° است. چون $\angle BAC = \angle BDC$، نتیجه می‌گیریم که زاویه‌ی BDC برابر ۴۵°.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰۰ را درنظر بگیرید. به‌ازای هر یک از این عددها مانند j، حداکثر یکی از دو عدد j و $۲j$ می‌توانند در مجموعه‌ی مورد نظر قرار داشته باشند، پس از دو زیرمجموعه‌ی

$$\{۱, ۳, ۵, \ldots, ۹۹\}, \quad \{۲, ۴, ۶, \ldots, ۹۸\}$$

حداکثر $\left[\frac{۹۹}{۲}\right]$ عدد در مجموعه‌ی مورد نظر قرار دارند. به‌همین ترتیب از دو مجموعه‌ی مضارب ۴ و مضارب ۸ عددهای فرد، یعنی

$$\{۴, ۱۲, ۲۰, ۲۸, \ldots, ۹۲\}, \quad \{۸, ۲۴, ۴۰, \ldots, ۸۸\}$$

حداکثر $\left[\frac{۹۹}{۸}\right]$ عدد در مجموعه‌ی مورد نظر قرار دارند. با ادامه‌ی این استدلال نتیجه می‌شود که حداکثر تعداد عضوهای مجموعه‌ی مورد نظر برابر است با

$$\left[\frac{۹۹}{۲}\right] + \left[\frac{۹۹}{۸}\right] \left[\frac{۹۹}{۳۲}\right] + \left[\frac{۹۹}{۶۴}\right] = ۶۶$$

۲۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
نشان می‌دهیم هر دنباله‌ای با خاصیت بیان شده اکیداً صعودی است. در این‌صورت روشن است که $n_k \geq k$ و از رابطه‌ی $n_{k+۱} > n_{n_k}$ نتیجه می‌شود که $k + ۱ > n_k$. درنتیجه، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $n_k = k$. برای اثبات اینکه $\{n_k\}$ دنباله‌ای صعودی است توجه می‌کنیم که $n_۱$ از همه‌ی اعضای دنباله اکیداً کوچکتر است زیرا اگر عضو مینیمم دنباله α باشد و به‌ازای $k > ۱$ داشته باشیم $n_k = \alpha$، آنگاه $n_{n_{k-۱}} < \alpha$ که تناقض است. حال اگر $n_۱$ را از دنباله حذف کنیم و دنباله‌ی جدید

$$n_۲, n_۳, \ldots$$

را درنظر بگیریم این دنباله نیز این خاصیت را دارد. بنابراین $n_۲$ کوچکترین عضو آن است. به این ترتیب نتیجه می‌شود که $\{n_k\}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی است.

۲۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=۰}^{۷} ۲^t \sum_{i=۱}^{۸} \binom{i-۱}{t} \\ &= \sum_{t=۰}^{۷} \sum_{i=۱}^{۸} ۲^t \binom{i-۱}{t} \\ &= \sum_{i=۱}^{۸} \sum_{t=۰}^{۷} ۲^t \binom{i-۱}{t} \\ &= \sum_{i=۱}^{۸} ۳^{i-۱} \\ &= \frac{۳^۸ - ۱}{۲} \\ &= ۳۲۸۰ \end{aligned}$$

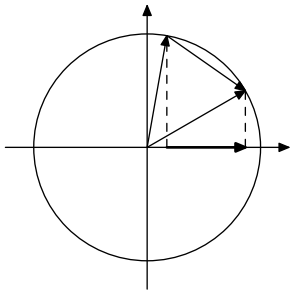
۲۷. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر جایگشتی که جای x_i و x_j را عوض می‌کند روی $\{x_i\}$ عمل کند $\prod_{۱ \leq i < j \leq ۹} (x_i - x_j)$ قرینه می‌شود. اما اثر این جایگشت روی جملات بسط حاصل‌ضرب، جمله‌ی $x_۱^۴ + x_۲^۴ + \cdots + x_۹^۴$ را ثابت نگاه می‌دارد. پس ضریب این جمله جمله‌ی صفر است. (در واقع همین استدلال نشان می‌دهد که درجمله‌های با ضریب ناصفر، هیچ دو توانی برابر نیستند).

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر بردارها را یک‌درمیان (مطابق شکل) از هم کم کنیم $|\vec{R}-\vec{B}|$ برابر مجموع بردارهای به‌دست آمده خواهد بود. امّا این بردارها پشت سر هم و مجزا هستند لذا مجموع آنها در واقع نقطه‌ای از دایره را به نقطه‌ای در درون یا روی دایره انتقال می‌دهد پس طول بردار $\vec{R}-\vec{B}$ کمتر از یا مساوی با قطر دایره، یعنی ۲ است.



۲۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید x نقطه‌ای باشد که کمترین تعداد نقاط در فاصله‌ی کمتر یا مساوی ۱۲۰° از آن قرار دارند (مثلاً k نقطه). هر کدام از این k نقطه خود k نقطه‌ی دیگر در فاصله‌ی کمتر یا مساوی ۱۲۰° دارند. همچنین، هر دو نقطه از $۲۴-k$ نقطه‌ی دیگر نیز در فاصله‌ای کمتر از ۱۲۰° از هم قرار دارند. پس تعداد کمانهای کمتر یا مساوی ۱۲۰° حداقل برابر است با

$$\binom{k+۱}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}=\frac{k^۲}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}+k$$

که کمترین مقدار آن به‌ازای $k=۱۲$ یا $k=۱۳$ برابر ۱۴۴ است. (۱۲ نقطه نزدیک یک قطب و ۱۳ نقطه نزدیک قطب دیگر، ۱۴۴ را به‌دست می‌دهند.)

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که

$$\angle BHC=\frac{\angle BC+\angle AD}{۲}=\angle BC$$

و چون $\angle BOC=\widehat{BC}$ پس $OHBC$ محاطی است و با استفاده از قضیه بطلمیوس داریم $y-x=ab$.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

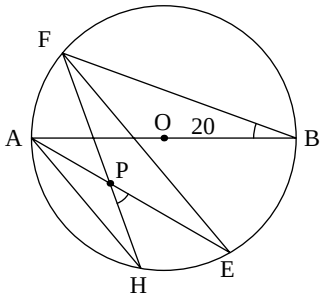
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $\angle FBA = ۲۰^\circ$، در این‌صورت زاویه‌ی HPE برابر است با:
الف) ۲۰° ب) ۲۵° ج) ۳۰° د) ۳۵° ه) ۴۰°



۲. باقیمانده‌ی تقسیم $۷ + ۵^{۲۲}$ بر ۸ برابر است با:
الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

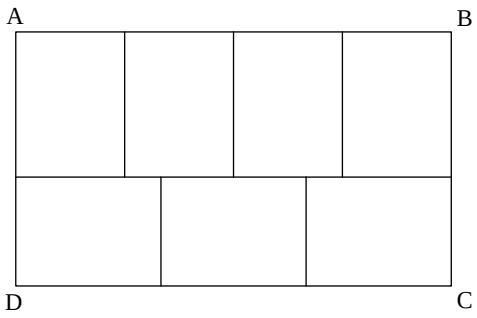
۳. اگر $r^۲ - r - ۱۰ = ۰$، آنگاه در مورد $(r - ۴)(r + ۲)(r + ۱)$ کدام‌یک از جملات زیر درست است؟
الف) عددی صحیح است. ب) مثبت و گنگ است.
ج) منفی و گنگ است. د) گویا اما غیر صحیح است.
ه) غیر حقیقی است.

۴. مستطیل $ABCD$ مانند شکل به هفت مستطیل مساوی کوچکتر تقسیم شده است. اگر مساحت $ABCD$ برابر ۳۳۶ سانتیمتر مربع باشد، در آن صورت محیط $ABCD$ بر حسب سانتیمتر برابر کدام‌یک از اعداد زیر است؟
الف) ۷۶ ب) ۸۶ ج) ۹۶ د) ۱۰۶ ه) ۱۱۶

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

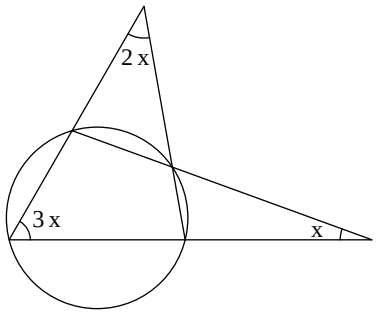
@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



۵. در شکل زاویه‌ی x برابر است با:

الف) $x = ۱۰^\circ$ ب) $x = ۱۵^\circ$ ج) $x = ۱۸^\circ$ د) $x = ۲۰^\circ$ ه) $x = ۲۵^\circ$



۶. در یک امتحان تستی با ۲۰ سؤال هر جواب صحیح ۷ نمره‌ی مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره‌ی منفی دارد (به سؤالهای بدون جواب هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد. اگر نمره‌ی دانش‌آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش‌آموز به چند سؤال جواب نداده است؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۳

۷. در یک چهارضلعی محدب کدام‌یک از نقاط زیر دارای این خاصیت است که مجموع فواصل آن از چهار رأس چهارضلعی حداقل مقدار ممکن را دارد؟

الف) مرکز ثقل چهارضلعی ب) یکی از رأسهای چهارضلعی
ج) نقطه‌ای بیرون چهارضلعی د) محل برخورد قطرهای چهارضلعی
ه) محل برخورد پاره‌خطهایی که اوساط اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کنند.

۸. کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که بتوان آن را هم به‌صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به‌صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی (اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند.

الف) ۴۵ ب) ۵۵ ج) ۱۰۰ د) ۱۳۵ ه) ۴۹۵

۹. به‌ازای کدام مقدار n، معادله‌ی $n = x + y + xy$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب ندارد؟

الف) $n = ۱۰۰$ ب) $n = ۱۰۵$ ج) $n = ۱۱۰$ د) $n = ۱۱۵$ ه) $n = ۱۲۰$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

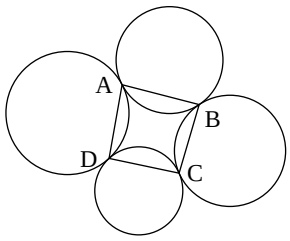
آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۰. چهار دایره‌ی $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ مطابق شکل در نقاط A، B، C و D بر هم مماس هستند. کدام‌یک از احکام زیر در مورد چهارضلعی $ABCD$ همواره درست است؟

الف) $ABCD$ محیطی است. ب) $ABCD$ محاطی است.

ج) $ABCD$ ذوزنقه است. د) قطرهای $ABCD$ بر هم عمودند.

ه) قطرهای $ABCD$ همدیگر را نصف می‌کنند.



۱۱. فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بوده و $\frac{F(k)}{G(k)}$، به‌ازای $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$، عددی صحیح باشد. در این‌صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\frac{F\left(\frac{۱}{n}\right)}{G\left(\frac{۱}{n}\right)}$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، عددی صحیح است.

ب) F بر G بخش‌پذیر است.

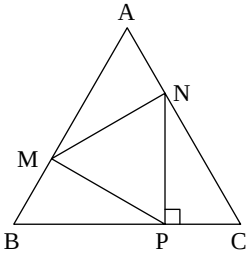
ج) $\frac{F'(k)}{G'(k)}$ به‌ازای هر عدد صحیح k، صحیح است.

د) $\lim_{k\to\infty}\frac{F(k)}{G(k)} = \infty$.

ه) درجه‌ی $G(x)$ صفر یا یک است.

۱۲. مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط شده است به‌طوری که $NP \perp BC$. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ د) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ ه) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$



۱۳. اگر چندجمله‌ای $ax^۳ + bx + c$ بر $x^۲ + tx + ۱$ بخش‌پذیر باشد آنگاه، کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) $a^۲ - ۲c \geq b$ ب) $a + c > ۳$ ج) $a^۲ - c \geq ab$

د) $a^۲ + c^۲ = ab$ ه) $a^۲ - c^۲ = ab$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۴. فرض کنید در مجموع زیر هر حرف انگلیسی نماینده‌ی عددی یک رقمی است:

$$\begin{array}{cccccc} & S & U & A & V & E \\ & & S & A & G & E \\ + & & S & A & G & E \\ \hline & ۴ & ۶ & ۹ & ۳ & ۳ \end{array}$$

در این‌صورت U کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟
الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۱۵. چهاروجهی $ABCD$ داده شده است. چند صفحه می‌توان یافت که از چهار رأس این چهاروجهی به یک فاصله باشد؟
الف) یک صفحه ب) چهار صفحه ج) هفت صفحه
د) حداکثر شش صفحه ه) $\binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۱}$ صفحه

۱۶. اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه‌ی

$$c^۴ - ۲(a^۲ + b^۲)c^۲ + a^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ = ۰$$

برقرار باشد، زاویه‌ی C برابر است با:
الف) دقیقاً ۳۰° ب) دقیقاً ۶۰° ج) دقیقاً ۱۲۰°
د) ۶۰° یا ۱۲۰° ه) ۳۰° یا ۱۲۰°

۱۷. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که مجموع

$$۱! + ۲! + \cdots + n!$$

مربع کامل باشد؟
الف) تعداد نامتناهی n ب) فقط برای دو مقدار n
ج) فقط برای سه مقدار n د) فقط برای چهار مقدار n
ه) فقط برای پنج مقدار n

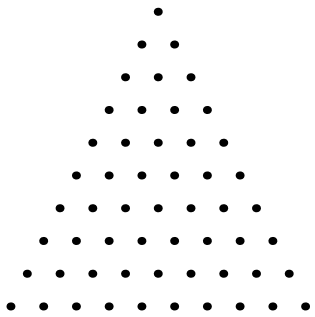
۱۸. چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه [مانند M] را بیابید به‌طوری که دو چهارضلعی $AMCD$ و $ABCM$ دارای مساحتهای یکسان باشند.
الف) یک پاره‌خط است. ب) کمانی از دایره است.
ج) خطی عمود بر BD است. د) خطی موازی AC است.
ه) خطی است که با یکی از اضلاع موازی است.

۱۹. در شکل، یک شبکه‌ی منظم مثلثی از نقاط شامل $\frac{۱۰\times۱۱}{۲}$ نقطه را مشاهده می‌کنید به‌طوری که هر ضلع آن شامل ۱۰ نقطه است. حداقل تعداد خطوطی را بیابید که از تمام این نقاط می‌گذرند.
الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. فرض کنید «ناحیه‌ی اول»، آن نقاطی از صفحه باشند که مختصات آنها مثبت‌اند. ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور xها درنظر می‌گیریم و آنها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور yها وصل می‌کنیم. از ۴۰۰ خط پدید آمده فرض کنید در ناحیه‌ی اول هیچ سه‌تایی از یک نقطه نگذرند. تعداد نقاط تقاطع این خطوط را در ناحیه‌ی اول بیابید.

الف) ۷۹۸۰۰ ب) ۴۰۰۰۰ ج) ۳۶۱۰۰ د) ۴۲۰۰۰ ه) ۳۸۰۰۰

۲۱. فرض کنید $A \subseteq \{۱, ۲, \dots, ۱۶\}$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. سه‌تایی $\{a, b, c\}$ را «اولیه» گوییم هرگاه هر دو عضوش نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه‌تایی اولیه نباشد آنگاه ماکزیمم تعداد اعضای A برابر است با:

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۲۲. اگر در مثلث ABC داشته باشیم

$$\angle B = ۲\angle C \qquad a = \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

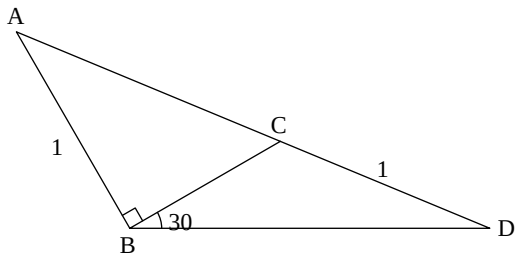
آنگاه λ در کدام‌یک از فواصل زیر قرار می‌گیرد؟

الف) $۰ < \lambda \leq ۱$ ب) $\frac{۱}{۲} < \lambda \leq ۱$ ج) $۰ < \lambda < \frac{۳}{۲}$

د) $۱ \leq \lambda < ۲$ ه) $\frac{۱}{۲} \leq \lambda < \frac{۳}{۲}$

۲۳. در شکل فرض کنید $AB = CD = ۱$. در این‌صورت طول AC برابر است با:

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۳}$ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) $\sqrt[۳]{۳}$ ه) $\sqrt[۳]{۲}$



۲۴. اگر رابطه‌ی

$$\left(\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\right)^n + \left(\frac{c^۲+a^۲-b^۲}{۲ac}\right)^n + \left(\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}\right)^n = ۱$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

برای $n = ۱$ صحیح باشد، آنگاه
الف) برای تمام nهای زوج صحیح است.
ب) برای تمام nهای فرد صحیح است.
ج) برای $n = ۳k$ صحیح است.
د) برای $n = ۳k + ۱$ صحیح است.
ه) برای $n = ۳k + ۲$ صحیح است.

۲۵. می‌دانیم بین اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰، چهار عدد طبیعی موجودند به‌طوری که هریک با مجموع مکعبات رقمهایشان برابرند و سه‌تا از آنها عبارت‌اند از ۴۰۷، ۳۷۱ و ۱۵۳. عدد چهارم را دقیقاً به‌دست آورید و بگویید در کدام‌یک از فاصله‌های زیر قرار دارد.
الف) $[۳۰۰, ۴۰۰]$ ب) $[۴۰۰, ۵۰۰]$ ج) $[۵۰۰, ۶۰۰]$
د) $[۶۰۰, ۷۰۰]$ ه) $[۷۰۰, ۸۰۰]$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned}\angle HPE &= \angle PAH + \angle PHA \\ &= \angle EFH + \angle PHA \\ &= \angle FHA + \angle PHA \\ &= ۲\angle FHA \\ &= ۲\angle FBA \\ &= ۴۰^\circ\end{aligned}$$

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
چون $۵^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱$، پس $۵^{۲۲} \overset{۸}{\equiv} ۱$ و بنابراین، $۵^{۲۲} + ۷$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
با توجه به فرض،

$$\begin{aligned}(r+۱)(r+۲)(r-۴) &= (r^۲+۳r+۲)(r-۴) \\ &= (r+۱۰+۳r+۲)(r-۴) \\ &= ۴(r+۳)(r-۴) \\ &= ۴(r^۲-r-۱۲) \\ &= ۴(r+۱۰-r-۱۲) \\ &= -۸\end{aligned}$$

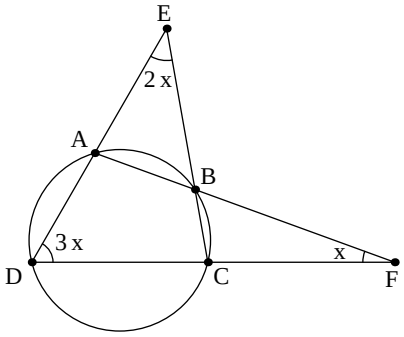
۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
طول مستطیل کوچک را با x و عرض آن را با y نشان دهید. در این‌صورت $۴y = ۳x$؛ اما چون مساحت مستطیل $ABCD$ برابر ۳۳۶ است، پس مساحت مستطیل کوچکتر برابر $\frac{۳۳۶}{۷} = ۴۸$ است. پس $xy = ۴۸$، یا $\frac{۳}{۴}y.y = ۴۸$. درنتیجه، $x = ۶$ و $y = ۸$ پس محیط مستطیل برابر ۷۶ خواهد بود.

۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور



با توجه به شکل،

$$\begin{array}{rcccl} \angle ECD & = & ۱۸۰^\circ - \angle ECF & = & ۱۸۰^\circ - ۵x \\ \angle DAB & = & ۱۸۰^\circ - \angle BAE & = & ۱۸۰^\circ - ۴x \\ \angle ABC & = & \angle BAE + \angle AEB & = & ۶x \end{array}$$

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ مجموع زاویه‌های روبه‌رو برابر ۱۸۰° است. پس،

$$۱۸۰^\circ - ۴x + ۱۸۰^\circ - ۵x = ۶x + ۳x$$

و درنتیجه، $x = ۲۰^\circ$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر x تعداد جوابهای مثبت و y تعداد جوابهای منفی باشد، آنگاه $۷x - ۲y = ۸۷$ و $x + y \leq ۲۰$. توجه کنید که x و y صحیح و نامنفی‌اند. به‌سادگی می‌توان دید که $x = ۱۳$ و $y = ۲$ تنها جواب مسأله است پس دانش‌آموز با این شرایط، به ۵ سوال پاسخ نداده است.

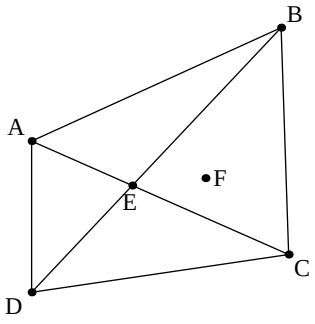
۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.
چهار ضلعی محدب $ABCD$ و نقطه‌ی F را در صفحه‌ی آن درنظر بگیرید. محل برخورد قطرهای چهارضلعی را E بنامید. در این‌صورت، روشن است که

$$FA + FC \geq AC, \quad FB + FD \geq BD$$

بنابراین،

$$FA + FB + FC + FD \geq AC + BD$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $F = E$.



https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

---

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید عدد مورد نظر هم برابر با

$$n + (n+۱) + \cdots + (n+۸) = ۹n + ۳۶$$

و هم برابر با

$$m + (m+۱) + \cdots + (m+۹) = ۱۰m + ۴۵$$

باشد (n و m عددهای طبیعی‌اند). در این‌صورت،

$$۹n + ۳۶ = ۱۰m + ۴۵$$

یا

$$۹n - ۱۰m = ۹$$

یا

$$۱۰m = ۹(n-۱)$$

پس $۹|۱۰m$، اما $۱۰\not|\ ۹$. پس m مضربی از ۹ است. پس عدد مطلوب برابر است با

$$۱۰ \times ۹ + ۴۵ = ۱۳۵$$

۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
از فرض نتیجه می‌شود که

$$n + ۱ = (x+۱)(y+۱)$$

پس اگر $n+۱$ عددی اول نباشد، معادله جواب دارد. بین گزینه‌های داده شده فقط در گزینه‌ی (الف)، $n+۱ = ۱۰۱$ عددی اول است.

۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
روشن است که،

$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= \tfrac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}\right) + \tfrac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}\right) \\ &= \tfrac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}\right) \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\angle B + \angle D = \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}\right)$$

پس،

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ۳۶۰ \Longrightarrow \angle A + \angle C = ۱۸۰$$

پس چهار ضلعی محاطی است.

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
چند جمله‌ایی مانند $A(x)$ وجود دارد که

$$F(x) = G(x)A(x) + B(x), \quad \deg B < \deg G$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

فرض کنید $B(x)$ متحد با صفر نباشد. در این‌صورت،

$$\frac{F(x)}{G(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{G(x)}$$

چون درجه‌ی B از درجه‌ی G کمتر است، وقتی x به بینهایت میل می‌کند $\frac{B(x)}{G(x)}$ به صفر میل می‌کند. پس برای اعداد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ، این کسر عددی صحیح نمی‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، به سادگی می‌توان ثابت کرد که مثلثهای AMN، NCP و MBP متساوی‌اند و $NP = ۲PC = \frac{۱}{۳}BC$.

$$\frac{[MPC]}{[ABC]} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

بنابراین،

$$[AMN] + [MBP] + [NPC] = \frac{۶}{۹}\,[ABC]$$

پس،

$$[MNP] = \frac{۱}{۳}[ABC]$$

۱۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
به روش معمول چندجمله‌ای، $ax^۳ + bx + c$ را بر $x^۲ + tx + ۱$ تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} ax^۳ + bx + c &= (ax - at)\,(x^۲ + tx + ۱) \\ &\quad + (at^۲ + b - a)\,x + (at + c) \end{aligned}$$

چون بنابر فرض، $(at^۲ + b - a)\,x + (at + c) = ۰$. پس،

$$at^۲ + b - a = ۰, \quad at + c = ۰$$

از رابطه‌ی دوم نتیجه می‌شود $t = \frac{-c}{a}$ و سپس از رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود

$$a\left(\frac{-c}{a}\right)^۲ = a - b$$

و درنتیجه، $c^۲ = a^۲ - ab$.

۱۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
توجه کنید S یا ۳ است یا ۴. اگر $S = ۴$،

$$U + S + S = U + ۸$$

و چون رقم یکان این مجموع ۶ است، $U = ۸$ که به تناقض $S = ۳$ منجر می‌شود. پس $S = ۳$ در این‌صورت،

$$U + S + S = U + ۶$$

پس U فقط می‌تواند ۸ یا ۹ باشد تا «نقلی» حاصل از موضع صدگان برابر با ۱۰ شود و ۸ بین گزینه‌ها نیست.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
به آسانی می‌توانید ثابت کنید که فقط دو دسته صفحه با شرایط مطلوب وجود دارند:

الف) سه رأس در یک طرف و یک رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر سه رأسی از چهار وجهی که انتخاب کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد. پس تعداد این صفحات برابر است با

$$\binom{۴}{۳} = ۴$$

ب) دو رأس در یک طرف و دو رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر دو رأسی از چهار وجهی که انتخاب می‌کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد. پس تعداد این صفحه‌ها برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\binom{۴}{۲} = ۳$$

بنابراین تعداد کل صفحه‌هایی که از چهار رأس به یک فاصله‌اند ۳ + ۴ است.

۱۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned} & c^۴ - ۲\left(a^۲ + b^۲\right)c^۲ + a^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ \\ & = \left(c^۲ - \left(a^۲ + b^۲\right)\right)^۲ - \left(a^۲ + b^۲\right)^۲ + \left(a^۲ + b^۲\right)^۲ - a^۲b^۲ \\ & = \left(c^۲ - \left(a^۲ + b^۲ - ab\right)\right)\left(c^۲ - \left(a^۲ + b^۲ + ab\right)\right) \\ & = ۰ \end{aligned}$$

پس

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ + ab \quad \text{یا} \quad c^۲ = a^۲ + b^۲ - ab$$

پس بنابر قضیه‌ی کسینوسها، $\cos C = \pm\frac{۱}{۲}$. بنابراین، $C = ۶۰^\circ$ یا $C = ۱۲۰^\circ$.

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
این عدد به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۳$ مربع کامل است. و به‌ازای $n = ۲$ و $n = ۴$ مربع کامل نیست. به‌ازای $n \geq ۵$ رقم یکان این عدد ۳ است و درنتیجه مربع کامل نیست.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
در اینجا باید مساحت را به‌عنوان مساحت جهت‌دار تعبیر کنیم و می‌دانیم که اگر σ مساحت جهت‌دار $PQRS$ را نشان دهد، آن‌گاه $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QS} = \sigma\vec{\mathbf{n}}$ که $\mathbf{n}$ بردار عمود بر صفحه است. پس M دارای خاصیت مسأله است اگر و تنها اگر $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BM}$ و یا معادلاً $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{MN} = ۰$ که N وسط پاره‌خط BD است. پس مکان M خطی به موازات AC است.

۱۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
با ۱۰ خط به آسانی می‌توان همه‌ی نقطه‌ها را پوشاند. این کار با کمتر از ۱۰ خط ممکن نیست. توجه کنید که هر خط حداکثر ۱۰ نقطه را می‌پوشاند. وقتی یک خط رسم شود، هر خط دیگر حداکثر ۹ نقطه‌ی دیگر را می‌پوشاند و با استدلال مشابه دیده می‌شود که i خط حداکثر

$$۱۰ + ۹ + \cdots + (۱۱ - i)$$

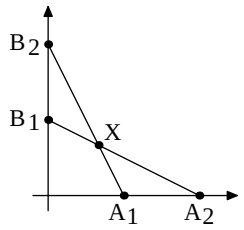
نقطه را می‌پوشانند. چون تعداد نقطه‌ها ۵۵ است، $i \geq ۱۰$.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
با انتخاب دو نقطه روی محور xها و دو نقطه روی محور yها دقیقاً یک نقطه‌ی تقاطع به‌دست می‌آید.



با توجه به فرض مسأله، نقطه‌های تقاطع به‌دست آمده دوبه‌دو متمایزند. پس مجموعاً $\binom{۲۰}{۲}^{۲} = ۳۶۱۰۰$ نقطه‌ی تقاطع به‌دست می‌آید.

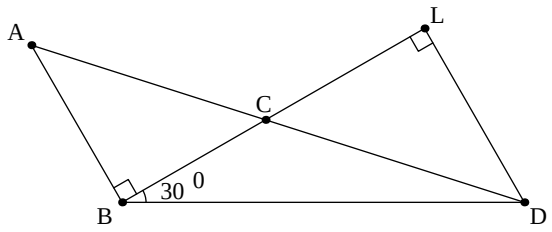
۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
مجموعه‌ی $A = \{۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶\}$ دارای خاصیت مسأله است. هیچ مجموعه‌ی ۱۲ عضوی با خاصیت موردنظر وجود ندارد. توجه کنید که در مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۶ هفت عدد غیرمرکب وجود دارد (شش عدد اول و عدد ۱). هر مجموعه‌ی ۱۲ عضوی باید شامل دست کم سه تا از این هفت عدد باشد بنابراین دارای سه عدد دوبه‌دو نسبت به هم اول است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
قرار دهید $x = \cos C$ در این‌صورت، چون $C < ۹۰^\circ$، پس $۰ < x < ۱$. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{a}{b} &= \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin ۲C}{\sin ۲C} = \frac{۳\sin C - ۴\sin^۳ C}{۲\sin C\cos C} \\ &= \frac{۳-۴\sin^۲ C}{۲\cos C} = \frac{۳-۴(۱-x^۲)}{۲x} = \frac{۴x^۲-۱}{۲x} \\ &= ۲x - \frac{۱}{۲x} < \frac{۳}{۲}\end{aligned}$$

و در ضمن وقتی $x \to ۱$ و یا $C \to ۰$، مقدار λ به $\frac{۳}{۲}$ نزدیک می‌شود.

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
قرار می‌دهیم، $BD = x$. در شکل زیر دو مثلث CDL و ABC متشابه‌اند.



چون زاویه B برابر ۳۰° است پس داریم $LD = \frac{x}{۲}$ و درنتیجه $AC = \frac{۲}{x}$. حال بنابر قانون کسینوسها در مثلث ABD داریم

$$۱ + x^۲ - ۲x\cos ۱۲۰^\circ = (۱ + \frac{۲}{x})^۲$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

پس،

$$x^۴ + x^۳ = ۴(x + ۱)$$

و درنتیجه $x = \sqrt[۳]{۴}$ و $AC = \frac{۲}{x} = \sqrt[۳]{۲}$.

۲۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
بنابر فرض،

$$\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} + \frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{۲ac} + \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab} = ۱$$

پس

$$ab^۲ + ac^۲ + ba^۲ + bc^۲ + ca^۲ + cb^۲ - (a^۳ + b^۳ + c^۳) = ۲abc$$

و درنتیجه،

$$(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) = ۰$$

پس یکی از سه حالت $a + b = c$، $a + c = b$ یا $b + c = a$ اتفاق می‌افتد. فرض کنید $a + b = c$. در این‌صورت از سه کسر فوق دو تا برابر $+۱$ و یکی برابر -۱ خواهد شد. پس برای تمام nهای فرد تساوی برقرار است.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
توجه کنید که $۱^۳ + ۷^۳ + ۳^۳ = ۳۷۱$. پس

$$۳۷۰ = ۳^۳ + ۷^۳ + ۰^۳$$

بنابراین، عدد دیگر ۳۷۰ است و در بازه‌ی $[۳۰۰, ۴۰۰]$ قرار دارد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. فرض کنیم a، b و c اعداد حقیقی باشند که

$$۹a + ۱۱b + ۲۹c = ۰$$

ثابت کنید $ax^۳ + bx + c = ۰$ در $[۰, ۲]$ یک ریشه دارد.

۲. اگر $a > b$ اعداد طبیعی بوده و n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $\frac{a+n}{b}$ و $\frac{b+n}{a}$ اعداد طبیعی باشند و $d = (a, b)$، ثابت کنید

$$۲d \leqslant (n+۱)\sqrt{a-b}$$

۳. روی مربع $ABCD$ نقاط K و N روی AB و AD به‌ترتیب داده شده‌اند به طوری که

$$AK \times AN = ۲BK \times DN$$

اضلاع CK و CN قطر BD را در نقاط L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید نقاط K، L، M، N و A روی یک دایره هستند.

۴. تعداد سی‌وسه عدد طبیعی داده شده است که عوامل اول آنها فقط از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تشکیل شده است. ثابت کنید حاصلضرب حداقل دوتای آنها مربع کامل است.

۵. یک نقطهٔ p درون یک $۲n$ ضلعی محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطهٔ p وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا یکی از اضلاع را قطع کند. ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ‌یک از این خطوط آنرا قطع نمی‌کند. (قطع کردن امتداد اضلاع مورد نظر نیست).

۶. صفحهٔ P و نقطهٔ M روی آن و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروضند. از نقطهٔ M خطی در صفحهٔ P رسم کنید که از A و B به یک فاصله باشد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل‌های آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر $f(x) = ax^۳ + bx + c$، داریم $f(۰) = c$ و $f(۲) = ۸a + ۲b + c$. در این صورت

$$\begin{aligned} ۰ &= ۹a + ۱۱b + ۲۹c \\ &= f(۰) + f(۲) + a + ۹b + ۲۷c \\ &= f(۰) + f(۲) + ۲۷\left(\frac{a}{۲۷} + \frac{b}{۳} + c\right) \\ &= f(۰) + f(۲) + ۲۷f\left(\frac{۱}{۳}\right) \end{aligned}$$

لذا $f(۰) + ۲۷f(\frac{۱}{۳}) + f(۲) = ۰$.

اگر یکی از مقادیر $f(۰)$، $f(۲)$ ویا $f(\frac{۱}{۳})$ صفر باشد، مسأله حل شده است؛ در غیر این صورت دوتا از این مقادیر دارای عمتهای مختلفی هستند و در نتیجه، معادله یک ریشه در یکی از فواصل $[۰, \frac{۱}{۳}]$، $[\frac{۱}{۳}, ۲]$ ویا $[۰, ۲]$ دارد.

۲. داریم

$$\frac{a+n}{b} - \frac{b+n}{a} = \frac{a^۲ - b^۲ + n(a-b)}{ab}$$

چون $d^۲ \mid ab$، $d^۲ \mid a^۲$ و $d^۲ \mid b^۲$؛ بنابراین $d^۲ \mid n(a-b)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} d^۲ \leqslant n(a-b) &\Longrightarrow d \leqslant \sqrt{n(a-b)} \\ \sqrt{n} \leqslant \frac{n+۱}{۲} &\Longrightarrow d \leqslant \frac{n+۱}{۲}\sqrt{a-b} \\ &\Longrightarrow ۲d \leqslant (n+۱)\sqrt{a-b} \end{aligned}$$

۳. ضلع مربع را برابر یک واحد می‌گیریم. داریم

$$\angle BKC + \angle DNC = \frac{۳\pi}{۴}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل‌های آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد ریاضی

زیرا اگر بگیریم

$$a = BK = \cot g \angle BKC$$
$$b = DN = \cot g \angle DNC$$

و با توجه به اینکه $(۱-a)(۱-b) = ۲ab$،

$$\tg(\angle BKC + \angle DNC) = \frac{a+b}{ab-۱} = -۱ = \tg\frac{۳\pi}{۴}$$

یعنی $\angle BKC + \angle DNC = \frac{۳\pi}{۴}$. حال داریم

$$\angle BLK = \frac{۳\pi}{۴} - \angle BKL = \angle DNC$$
$$= \angle BCM = \angle BAM$$

پس

$$\angle KLM + \angle KAM = \angle KLM + \angle BLK = \pi$$

پس M، L، K و A روی یک دایره هستند. همچنین L، M، N و A روی یک دایره هستند. بنابراین N، M، L و K و A روی یک دایره هستند.

۴. فرض کنید اعداد مورد نظر $n_۱$، $n_۲$، ... و $n_{۳۳}$ باشند و

$$n_i = ۲^{a_i} \times ۳^{b_i} \times ۵^{c_i} \times ۷^{d_i} \times ۱۱^{e_i}$$

داریم

$$n_i \times n_j = ۲^{a_i+a_j} \times ۳^{b_i+b_j} \times ۵^{c_i+c_j} \times ۷^{d_i+d_j} \times ۱۱^{e_i+e_j}$$

$n_i \times n_j$ وقتی مربع کامل است که توانهای عوامل اول آن زوج باشند؛ یعنی (a_i, a_j)، (b_i, b_j)، (c_i, c_j)، (d_i, d_j) و (e_i, e_j) زوجیت یکسان داشته باشند.

حال برای هر پنج‌تایی $T_k = (a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$، که در آن $k = ۱, ۲, \ldots, ۳۳$، قرار می‌دهیم

$$a'_k = a_k \bmod ۲, \quad b'_k = b_k \bmod ۲, \quad c'_k = c_k \bmod ۲$$
$$d'_k = d_k \bmod ۲, \quad e'_k = e_k \bmod ۲$$

که منظور از $a_k \bmod ۲$ باقیماندهٔ a_k بر ۲ است. سپس $(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$ را با $(a'_k, b'_k, c'_k, d'_k, e'_k)$ جایگزین می‌کنیم. ولی هر a'_k، b'_k، c'_k، d'_k و e'_k برابر ۰ یا ۱ است و تعداد پنج‌تاییهای $(a'_k, b'_k, c'_k, d'_k, e'_k)$ برابر $۳۲ = ۲^۵$ می‌شود. در نتیجه، دو پنج‌تایی $(a_k, b_k, c_k, d_k, e_k)$ و $(a_r, b_r, c_r, d_r, e_r)$ وجود دارند به طوری که $a_r \equiv a_k \pmod ۲$، $b_r \equiv b_k \pmod ۲$، $c_r \equiv c_k \pmod ۲$، $d_r \equiv d_k \pmod ۲$ و $e_r \equiv e_k \pmod ۲$. یعنی $n_r \times n_k$ مربع کامل است.

۵. از یک رأس به P وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که یکی از اضلاع را قطع کرده باشد. $۲n-۱$ رأس باقی می‌ماند که در دو طرف این خط واقعند. بنابراین تعدادی از رأسها در یک طرف و تعدادی در طرف دیگر قرار می‌گیرند و تعداد رأسهای یک طرف بیش از طرف دیگر است. خطوطی که از رأسهای طرف کمتر به P وصل می‌شوند، اضلاع طرف دیگر را که بیشتر هستند، قطع می‌کنند. لذا در طرفی که بیشتر رأس دارد یک ضلع وجود دارد که به‌وسیلهٔ این خطوط قطع نمی‌شود.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل‌های آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد ریاضی

۶. صفحهٔ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا P را در خط Δ قطع کند. سپس از B، C (وسط AB) و A بر صفحهٔ P عمود می‌کنیم تا آن را به‌ترتیب در B'، C' و A' قطع کنند. حال به قطر MC' دایره‌ای رسم می‌کنیم تا Δ را در N قطع کند. خط MN جواب است. از وسط A و B به MN عمود می‌کنیم تا آن را در K و F قطع کند. بنابر قضیهٔ سه عمود، $A'K$ و $B'K$ نیز بر MN عمودند. حال از C' به N وصل می‌کنیم؛ چون N در نیمدایره محاط شده است، پس $C'N$ بر MN عمود است. ولی $C'N$، $B'F$ و $A'K$ چون هر سه بر MN عمودند، باهم موازی هستند و چون C' وسط $A'B'$ است، لذا N نیز وسط KF است. اما N روی Δ یعنی صفحهٔ عمودمنصف AB است، پس $NB = AN$. حال دو مثلث BFN و AKN برابرند، زیرا $NB = AN$، $NF = NK$ و $F = K = ۹۰^\circ$. پس $BF = AK$ و در نتیجه BF و AK برابر خواهند شد؛ لذا MN خط مطلوب است.

اگر دایره، خط Δ را در دو نقطه قطع کند، دو جواب داریم، اگر Δ بر دایره مماس باشد یک جواب داریم و اگر این دو یکدیگر را قطع نکنند، جوابی نخواهیم داشت.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر تفاضل مکعبات دو عدد صحیح و متوالی، توان دوم یک عدد باشد، نشان دهید این عدد برابر حاصلجمع توان دوم دو عدد صحیح و متوالی است.

۲. نقطهٔ P را درون مثلث ABC اختیار می‌کنیم، خطوط راست BP و CP اضلاع روبرو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحتها و هم محیطهای دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند، آنگاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویهٔ A قرار دارد.

۳. تابع پیوستهٔ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که برای هر $c \in \mathbb{R}$ معادلهٔ $f(x) = c$ دقیقاً سه جواب داشته باشد.

۴. ثابت کنید معادلهٔ $۳x^۲ + ۱ = ۴y^۳$ در اعداد گویا فقط دارای جوابهای $x = \pm ۱$ و $y = ۱$ است.

۵. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. از نقاط A، B و C خطوط دلخواهی رسم می‌کنیم تا اضلاع و کمانهای روبرو را به ترتیب در M و M'، N و N' و P و P' قطع کنند. ثابت کنید اگر حاصل عبارت

$$T = \frac{AM'}{MM'} + \frac{BN}{NN'} + \frac{CP'}{PP'}$$

مینیمم شود، آنگاه سه خط مزبور همرسند. سپس نشان دهید $T \geqslant ۱۲$.

۶. فرض کنید خانوادهٔ $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ که از n مجموعهٔ متمایز ناتهی تشکیل شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از $\mathscr{A}$ دوباره عضوی از $\mathscr{A}$ باشد. اگر

$$|A_1| \leqslant |A_2| \leqslant \cdots \leqslant |A_n|$$

که $|A_i|$ تعداد اعضای مجموعهٔ A_i است؛ و $|A_1| \leqslant ۲$، نشان دهید عضوی مانند x وجود دارد که عضو حداقل $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ تا از این مجموعه‌ها است. ($\lceil a \rceil$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a).

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. برای $n \in \mathbb{Z}$ فرض کنید $(n+1)^3 - n^3 = k^2$. در نتیجه k عددی فرد است $(k = 2m+1)$، ولی داریم

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = k^2$$
$$4(3n^2 + 3n + 1) - 1 = 3(4n^2 + 4n + 1) = 3(2n+1)^2$$

از طرف دیگر،

$$4(3n^2 + 3n + 1) - 1 = 4(2m+1)^2 - 1 = (4m+1)(4m+3)$$

$4m+1$ و $4m+3$ نسبت به هم اولند، پس یکی از آنها مربع کامل است ولی $4m+3$ هیچگاه مربع کامل نیست، پس $4m+1 = (2t+1)^2$. یعنی $2m+1 = t^2 + (t+1)^2$.

۲. فرض کنیم دو مثلث PB_1C و PCB_1 دو مثلثی باشند که دارای مساحتها و محیطهای مساوی هستند، یعنی $S = S'$ و $2p = 2p'$. می‌دانیم که

$$\left.\begin{aligned} S &= pr \\ S' &= p'r' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow pr = p'r' \Longrightarrow r = r'$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PMI و PNJ برابرند در نتیجه $PM = PN$ است.

ولی $PM = p - BC_1$ و $PN = p' - CB_1$ ویا $p - BC_1 = p' - CB_1$ ویا $BC_1 = CB_1$. از طرف دیگر

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BC_1 \cdot h \\ S' &= \frac{1}{2} CB_1 \cdot h' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow h = h'$$

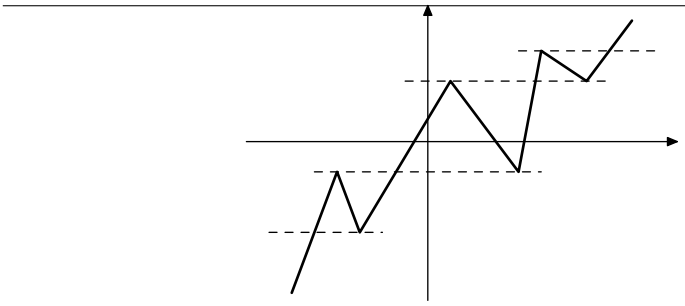
یعنی نقطهٔ P از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است. یعنی P روی نیمساز $\angle A$ واقع است.

۳. بدیهی است که باید خط $y = c$ نمودار تابع $y = f(x)$ را دقیقاً در سه نقطه قطع کند.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد ریاضی



به همین ترتیب $y = f(x)$ را می‌توان از هر دو طرف ادامه داد.

۴. با تبدیل $u = \frac{۳x-۱}{۲}$ نتیجه می‌شود

$$u^۲ + u + ۱ = ۳y^۳ \Longrightarrow (۲+u)^۳ + (۱-u)^۳ = (۳y)^۳$$

که آخرین قضیهٔ فرما در حالت $n = ۳$ است و فقط جوابهای بدیهی $u = ۱$ و $u = -۲$ وجود دارد. پس

$$\left.\begin{matrix} u = ۱ \\ u = -۲ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x = \pm ۱, y = ۱$$

۵. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$T = \frac{AM}{MM'} + \frac{BN}{NN'} + \frac{CP}{PP'} + ۳$$

پس T مینیمم است هرگاه

$$\frac{AM}{MM'} + \frac{BN}{NN'} + \frac{CP}{PP'}$$

مینیمم شود. حال اگر Q پای عمود از M' به BC، M'' وسط کمان BC، Q' پای عمود از M'' به BC و H پای ارتفاع وارد از A به BC باشد، داریم

$$\frac{AM}{MM'} = \frac{AH}{M'Q} \geqslant \frac{AH}{M''Q'} = \frac{AD}{DM''}$$

پس نتیجه می‌گیریم که T وقتی مینیمم است که خطوط فوق‌الذکر نیمسازهای مثلث باشند. اما وقتی این خطوط نیمسازها باشند (یعنی در واقع از اینجا به بعد M پای نیمساز است)، داریم

$$\frac{AM}{MM'} = \frac{AM^۲}{MM' \times AM} = \frac{AM^۲}{BM \times MC} = \frac{AM^۲(b+c)^۲}{a^۲bc}$$

و می‌دانیم

$$AM^۲ = bc - BM \times MC = bc - \frac{a^۲bc}{(b+c)^۲}$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{AM}{MM'} = \left(\frac{b+c}{a}\right)^۲ - ۱$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد ریاضی

به همین ترتیب

$$\frac{CP}{PP'} = \left(\frac{a+b}{c}\right)^۲ - ۱ \quad \text{و} \quad \frac{BN}{NN'} = \left(\frac{a+c}{b}\right)^۲ - ۱$$

پس

$$T = \frac{(b+c)^۲}{a^۲} + \frac{(a+c)^۲}{b^۲} + \frac{(a+b)^۲}{c^۲} \geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{(a+b)^۲(a+c)^۲(b+c)^۲}{a^۲b^۲c^۲}}$$

$$\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{۴ab \times ۴ac \times ۴bc}{a^۲b^۲c^۲}} = ۱۲$$

۶. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $|A_۱| = ۱$. فرض کنید $A_۱ = \{a\}$، تمام مجموعه‌هایی را که شامل عضو a هستند، با S_a و بقیه را با S'_a نشان می‌دهیم. نشان خواهیم داد که $|S_a| > |S'_a|$. به‌ازای هر $A_i \in S'_a$ می‌توان یک مجموعه در S_a پیدا کرد $(A_i \cup \{a\})$ و غیر از آنها، $A_۱$ نیز در S_a است.

ب) $|A_۱| = ۲$. فرض کنید $A = \{a, b\}$ و

S_{ab} = مجموعه‌هایی که شامل a و b هستند

S_a = مجموعه‌هایی که فقط شامل a هستند

S_b = مجموعه‌هایی که فقط شامل b هستند

S'_{ab} = مجموعه‌هایی که شامل هیچ‌یک از a و b نیستند

به هر $A_i \in S'_{ab}$ مجموعهٔ $A_i \cup \{a, b\}$ در S_{ab} را متناظر می‌کنیم، پس

$$|S_{ab}| \geqslant |S'_{ab}|$$

پس اگر مثلاً $|S_a| \geqslant |S_b|$ باشد آنگاه

$$|S_{ab}| + |S_a| \geqslant |S_b| + |S'_{ab}|$$

در نتیجه تعداد آنهایی که شامل a هستند یعنی $|S_{ab}| + |S_a|$ بزرگتر یا مساوی نصف تعداد کل است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

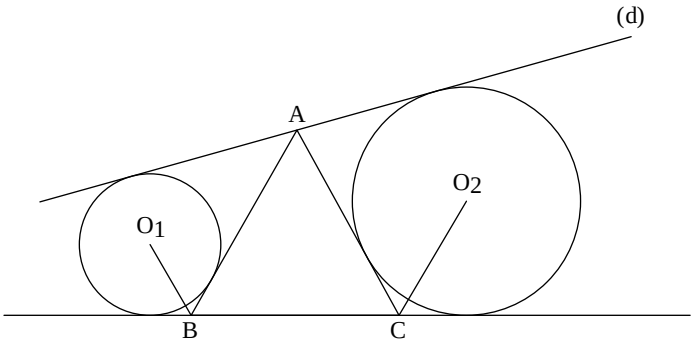
زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. همهٔ جوابهای درست معادلهٔ $\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{mn^۲}=\frac{۳}{۴}$ را به‌دست آورید.

۲. اگر X یک مجموعهٔ n عضوی باشد آنگاه ثابت کنید تعداد زوجهای (A,B) که A و B زیرمجموعه‌های X هستند و $A\subsetneq B$، برابر است با $۳^n-۲^n$.

۳. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. از نقطهٔ A در بیرون مثلث، خطی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دو دایره‌ای باشند که مطابق شکل به ترتیب بر AB، BC و (d) و همچنین بر AC، BC و (d) مماسند، آنگاه ثابت کنید که $O_۱B+O_۲C$ مقداری است ثابت.



۴. در معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^۳+bx+c=۰$ ضرایب همگی اعداد گویا هستند و می‌دانیم که یکی از ریشه‌های آن با حاصلضرب دو ریشهٔ دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه، عددی گویاست.

۵. همهٔ اعداد اول فرد p را پیدا کنید به گونه‌ای که

$$\frac{۲^{p-۱}-۱}{p}$$

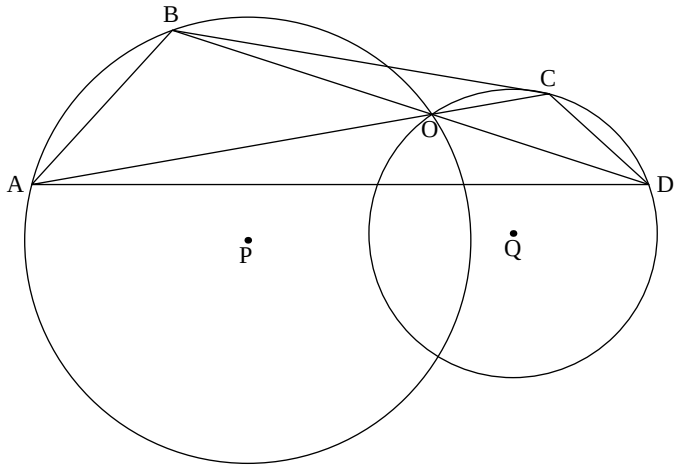
مربع کامل گردد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دهمین دوره المپیاد ریاضی

۶. در چهارضلعی گوژ $ABCD$، نقطهٔ O محل برخورد قطرهاست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند آنگاه ثابت کنید که $PQ \geqslant \frac{AB+CD}{۴}$.



دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱.

$$\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{mn^۲}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow ۴mn\left(\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{mn^۲}\right)=۳mn$$
$$\Longrightarrow ۴n+۴m-\frac{۴}{n}=۳mn$$

چون طرفین معادلهٔ فوق باید صحیح باشند، پس $\frac{۴}{n}$ باید عدد صحیحی باشد. پس $n=\{\pm ۱$ یا ± ۱ یا ± ۴ یا $۲\}$.

$n=۱\Longrightarrow \frac{۱}{m}+۱-\frac{۱}{m}=\frac{۳}{۴}$	امکان ندارد.
$n=-۱\Longrightarrow \frac{۱}{m}-۱-\frac{۱}{m}=\frac{۳}{۴}$	امکان ندارد.
$n=۲\Longrightarrow \frac{۱}{m}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴m}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow m=۳$	
$n=-۲\Longrightarrow \frac{۱}{m}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴m}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow m=\frac{۱۵}{۸}$	امکان ندارد.
$n=۴\Longrightarrow \frac{۱}{m}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶m}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow m=\frac{۱۵}{۸}$	امکان ندارد.
$n=-۴\Longrightarrow \frac{۱}{m}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶m}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow m=\frac{۱۵}{۱۶}$	امکان ندارد.

پس تنها جواب مسأله هنگامی است که $n=۲$ و $m=۳$ باشد.

۲. حالتی را در نظر می‌گیریم که مجموعهٔ B، i عضوی باشد. در این حالت تعداد حالات مختلف انتخاب B برابر است با $\binom{n}{i}$ و تعداد حالات مختلف انتخاب A برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های محض B یعنی $۲^i-۱$. پس تعداد حالات مختلف انتخاب زوج مرتب (A,B) برابر است با $\binom{n}{i}(۲^i-۱)$. B می‌تواند ۰، ۱، ... و یا m عضوی باشد. پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}(۲^i-۱)=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}۲^i-\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی

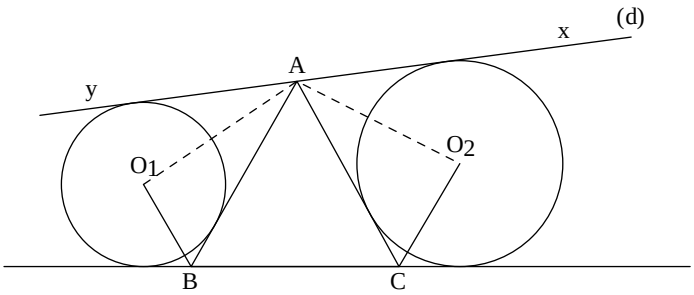
و بنابر بسط دوجمله‌ای خیام می‌دانیم که

$$۳^n = (۲+۱)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} ۲^i, \quad ۲^n = (۱+۱)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}$$

پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\text{تعداد کل حالات} = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} ۲^i - \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} = ۳^n - ۲^n$$

۳. نقطهٔ M را روی BC به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\angle BAM = \angle O_۱AB$ باشد.



در این صورت

$$\angle O_۲AC = \frac{۱}{۲}\angle CAx = \frac{۱}{۲}(۱۲۰^\circ - \angle BAy) = ۶۰^\circ - \angle O_۱AB$$
$$\angle MAC = ۶۰^\circ - \angle BAM$$

بنابراین $\angle O_۲AC = \angle MAC$ است.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle O_۱AB = \triangle ABM \Longrightarrow O_۱B = BM \\ \triangle O_۲AC = \triangle ACM \Longrightarrow O_۲C = MC \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$O_۱B + O_۲C = BM + CM = BC$$

پس مجموع $O_۱B + O_۲C$ برابر باطول ضلع مثلث AB است.

۴. فرض می‌کنیم که ریشه‌های این معادله برابر با $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ باشند و داشته باشیم $x_۱ = x_۲x_۳$. در این صورت، بنابر رابطه‌های بین ضرایب و ریشه‌ها داریم

$$\begin{cases} x_۱x_۲x_۳ = -\dfrac{c}{a} \\ x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۱ = \dfrac{b}{a} \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی

پس

$$x_1x_2x_3 = -\frac{c}{a} \Longrightarrow x_1 \times x_1 = -\frac{c}{a}$$
$$\Longrightarrow x_1^2 = -\frac{c}{a} \quad (1)$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{b}{a} \Longrightarrow x_1x_2 + x_1 + x_3x_1 = \frac{b}{a}$$
$$\Longrightarrow x_1(1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{a}$$

از طرفی

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 + x_3 = -x_1$$
$$\Longrightarrow x_1(1 - x_1) = \frac{b}{a}$$
$$\Longrightarrow x_1 - x_1^2 = \frac{b}{a} \quad (2)$$
$$(1),(2) \Longrightarrow x_1 - \left(-\frac{c}{a}\right) = \frac{b}{a} \Longrightarrow x_1 = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

چون a و b و c اعدادی گویا هستند، x_1 هم گویا می‌شود.

۵.

$$2^{p-1} - 1 = pk^2$$

چون p فرد است، پس می‌توان نوشت $p = 2m + 1$. بنابراین،

$$2^{2m} - 1 = pk^2 \Longrightarrow (2^m - 1)(2^m + 1) = pk^2$$

$2^m - 1$ و $2^m + 1$ دو عدد فرد متوالی هستند. بنابراین نسبت به هم اولند و چون حاصلضرب آنها برابر با pk^2 است، پس یکی از آنها باید به‌صورت مجذور کامل و دیگری باید به‌صورت حاصلضرب p در یک مجذور کامل باشد یعنی دو حالت زیر پیش می‌آید.

$$\begin{cases} 2^m - 1 = x^2,\ 2^m + 1 = py^2 \\ 2^m - 1 = px^2,\ 2^m + 1 = y^2 \end{cases}$$

در حالت اول چون $2^m - 1$ عددی فرد است، پس x باید فرد باشد. یعنی $x = 2n + 1$. پس

$$2^m - 1 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$
$$\Longrightarrow 2^m = 4n^2 + 4n + 2 = 2(2n^2 + 2n + 1)$$
$$\Longrightarrow 2^{m-1} = 2(n^2 + n) + 1$$

طرف راست این عبارت فرد است؛ بنابراین طرف چپ هم باید فرد باشد؛ ولی تنها توانی از ۲ که عددی فرد است $2^0 = 1$ است. پس باید $m - 1 = 0$ باشد در نتیجه، $m = 1$ و $p = 3$. در حالت دوم هم

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی

به‌طور مشابه می‌توانیم بگوییم که y عددی فرد است پس می‌توانیم بنویسیم $y = ۲n + ۱$. پس

$$۲^m + ۱ = y^۲ = (۲n+۱)^۲ = ۴n^۲ + ۴n + ۱$$
$$\Longrightarrow ۲^m = ۴(n^۲ + n)$$
$$\Longrightarrow ۲^{m-۲} = n(n+۱)$$

یکی از دو عدد n و $n+۱$ فرد است؛ ولی می‌دانیم که $۲^{m-۲}$ هیچ عامل فردی جز ۱ ندارد؛ پس باید $n = ۱$ باشد. پس

$$n = ۱ \Longrightarrow ۲^{m-۲} = ۲ \Longrightarrow m = ۳ \Longrightarrow p = ۷$$

پس تنها جوابهای مسأله عبارتند از ۳ و ۷.

۶. از P و Q دو عمود بر BD رسم می‌کنیم و پای عمودها را H و H' می‌نامیم. می‌توان گفت

$$PQ \geqslant HH' = OH + OH' = \frac{۱}{۲}OD + \frac{۱}{۲}OB \qquad (۱)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$PQ \geqslant \frac{۱}{۲}OA + \frac{۱}{۲}OC \qquad (۲)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$۲PQ \geqslant \frac{۱}{۲}(OA + OB + OC + OD)$$

ولی در مثلثهای OAB و OCD می‌دانیم که $OA + OB \geqslant AB$ و $OC + OD \geqslant CD$. بنابراین،

$$۲PQ \geqslant \frac{۱}{۲}(AB + CD) \Longrightarrow PQ \geqslant \frac{۱}{۴}(AB + CD)$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت کنید بینهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آنها کمترین مقدار ممکن (مثبت) باشد.

۲. همهٔ اعداد طبیعی a، b و c بزرگتر از یک را بیابید که حاصلضرب هر دو عدد از آنها به علاوهٔ یک، مضرب سومی گردد.

۳. اگر برای تابع حقیقی غیر ثابت f داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - ۲f(xy)$$

آنگاه $f(۱۳۷۰)$ را به‌دست آورید.

۴. خط (L) دو خط (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. از نقطهٔ P واقع بر (L) خطی رسم کنید که (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A' و B' قطع کند، به طوری که $\frac{AA'}{BB'} = K$.

۵. اگر $(x, y, z \in \mathbb{R})$ $x \geqslant y \geqslant z > ۰$، ثابت کنید که

$$\frac{x^۲y}{z} + \frac{y^۲z}{x} + \frac{z^۲x}{y} \geqslant x^۲ + y^۲ + z^۲$$

۶. ۵۵ عدد دلخواه از مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید که همواره می‌توان دو عدد بین اعداد انتخاب‌شده یافت به طوری که تفاضل آنها ۱۰ باشد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. **روش اول.** اگر $A(x_۱, y_۱)$، $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ مختصات سه رأس مثلث باشند، می‌دانیم مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

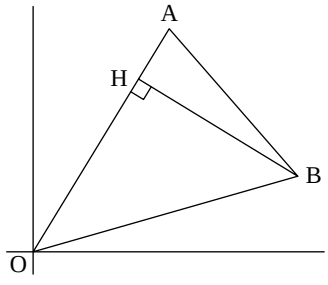
که منظور از $|A|$ قدرمطلق دترمینان ماتریس A است. در نتیجه، کمترین مقدار ممکن S عدد $\frac{۱}{۲}$ است. حال نشان می‌دهیم بینهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت همهٔ آنها $\frac{۱}{۲}$ است. اگر قرار دهیم $A(m, n)$ و $\gcd(m, n) = ۱$[۱]؛ و r و s اعداد طبیعی باشند به طوری که $ms - nr = ۱$، آنگاه با قرار دادن $B(r, s)$ مثلث AOB دارای مساحت $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود، زیرا

$$BH = \frac{|ms - nr|}{\sqrt{m^۲ + n^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{m^۲ + n^۲}}, \quad OA = \sqrt{m^۲ + n^۲}$$

پس

$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲} OA \cdot BH = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه، برای هر زوج (m, n) که $\gcd(m, n) = ۱$ باشد مثلثی با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آن $\frac{۱}{۲}$ است.



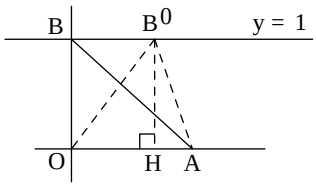
[۱] بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی

روش دوم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB را که در آن $OA = OB = ۱$ و $\angle AOB = \frac{\pi}{۲}$ در نظر می‌گیریم. حال اگر روی خط $y = ۱$ نقاطی با طول صحیح اختیار کنیم، این نقاط با O و A مثلثهایی می‌سازند که مساحت همه آنها $\frac{۱}{۲}$ است.



۲.

$$\begin{cases} ab+۱ = kc \\ ac+۱ = k'b \\ bc+۱ = k''a \end{cases} \qquad (۱)$$

حالا

$$(ab+۱)(ac+۱)(bc+۱) = kk'k''abc$$
$$\Longrightarrow mabc + ab + ac + bc + ۱ = kk'k''abc$$
$$\Longrightarrow ab + bc + ca + ۱ = nabc$$
$$\Longrightarrow \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{abc} = n$$

اگر $a > ۳$، $b > ۳$ و $c > ۳$، آنگاه

$$\text{طرف اول} \leqslant \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶۴} < ۱$$

پس اقلاً یکی از عددها باید کوچکتر یا مساوی ۳ باشد مثلاً اگر $a = ۲$، آنگاه،

$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲bc} = n > ۰$$

اگر $c > ۴$ و $b > ۴$ باشد طرف اول کوچکتر از ۱ می‌شود پس یکی از آنها کوچکتر یا مساوی ۴ است. مثلاً $b \leqslant ۴$. ضمناً از رابطه‌های (۱) نتیجه می‌گیریم که a، b و c دوبه‌دو نسبت به هم اولند. پس $b = ۳$ و

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۶c} = n \Longrightarrow \frac{۷}{۶c} = n - \frac{۵}{۶}$$
$$\Longrightarrow ۷ = c(۶n - ۵)$$

c عدد ۷ را می‌شمارد پس $c = ۷$ و مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۷\}$ به‌دست می‌آید. اگر $a = ۳$ را در نظر بگیریم

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۳bc} = n \geqslant ۰$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی

در اینجا نیز اگر $b > ۴$ و $c > ۴$ باشد طرف اول کوچکتر از ۱ می‌شود پس یکی از آنها کوچکتر یا مساوی ۴ است مثلاً $b \leqslant ۴$. و چون a و b نسبت به هم اولند پس $b = ۲$ یا $b = ۴$. از $b = ۲$ مجدداً جواب قبلی به‌دست می‌آید و از $b = ۴$ داریم

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۱۲c} = n$$

پس

$$\frac{۱۳}{۱۲c} + \frac{۷}{۱۲} = n$$

چون $a = ۳$ و $b = ۴$ پس c باید نسبت به ۲ و ۳ اول باشد، پس c حداقل مساوی ۵ است و با این فرض طرف اول تساوی کوچکتر از ۱ می‌شود که غیر ممکن است. پس تنها جواب مسأله $\{۲,۳,۷\}$ است.

.۳

$$f(a+b) = f(a) + f(b) - ۲f(ab)$$
$$f(۰) = f(۰+۰) = f(۰) + f(۰) - ۲f(۰) = ۰$$

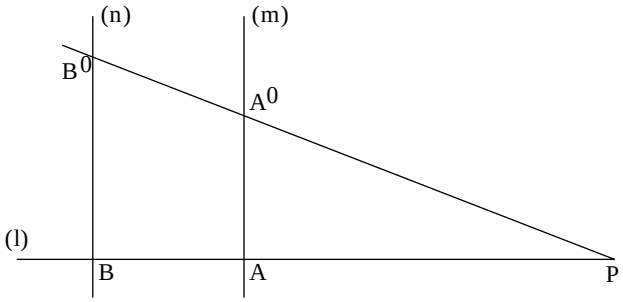
پس $f(۰) = ۰$.

$$f(n+۱) = f(n) + f(۱) - ۲f(n) = f(۱) - f(n)$$

پس

$$f(۱) = f(۱)$$
$$f(۲) = f(۱) - f(۱) = ۰$$
$$f(۳) = f(۱) - f(۲) = f(۱)$$
$$f(۴) = f(۱) - f(۳) = ۰$$

و با استقرا می‌توان ثابت کرد $f(۲n) = ۰$ و $f(۲n+۱) = f(۱)$، در نتیجه $f(۱۳۷۰) = ۰$.



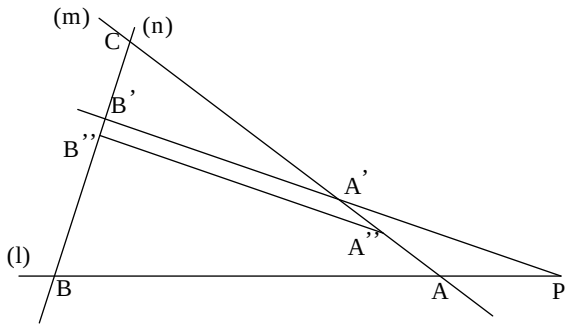
.۴

واضح است اگر $(n) \parallel (m)$ باشد آنگاه مسأله وقتی دارای جواب است که $K = \frac{PA}{PB}$. در این حالت هر خطی که از P بگذرد و (m) و (n) را قطع کند جواب مسأله است. در حالتی که $K \neq \frac{PA}{PB}$ مسأله جواب ندارد.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی



حال فرض می‌کنیم که (m) و (n) متقاطع باشند و $(m)\cap(n)=\{c\}$. در مثلث ABC بنابر قضیهٔ منلائوس داریم

$$\frac{A'A}{A'C}\times\frac{B'C}{B'B}\times\frac{PB}{PA}=۱$$

و یا

$$\frac{B'C}{A'C}=\frac{PA}{PB}\times\frac{۱}{K}=K'$$

پس کافی است نقاط B'' و A'' را به ترتیب روی CB و CA به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{B''C}{A''C}=K'$ باشد و آنگاه از P خطی به موازات $A''B''$ رسم کنیم. در این حالت مسأله یک جواب دارد.

۵. باید ثابت کنیم که

$$x^۲\left(\frac{y}{z}\right)+y^۲\left(\frac{z}{x}-۱\right)+z^۲\left(\frac{x}{y}-۱\right)>۰$$

اگر $a=\frac{y}{z}-۱$، $b=\frac{z}{x}-۱$ و $c=\frac{x}{y}-۱$ بنابر نامساوی حسابی‌هندسی داریم

$$a+b+c\geqslant ۰$$

حال ثابت می‌کنیم که

$$ax^۲+by^۲+cz^۲\geqslant ۰$$

چون $c\geqslant -a-b$ بنابراین،

$$ax^۲+by^۲+cz^۲\geqslant ax^۲+by^۲-az^۲-bz^۲$$

حال نشان می‌دهیم که

$$\begin{aligned}ax^۲+by^۲-az^۲-bz^۲&\geqslant ۰\\ a(x^۲-z^۲)+b(y^۲-z^۲)&\geqslant ۰\\ \frac{y-z}{z}(x^۲-z^۲)+\frac{z-x}{x}(y^۲-z^۲)&\geqslant ۰\\ \frac{x+z}{z}-\frac{y+z}{x}&\geqslant ۰\end{aligned}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی

(در مرحلهٔ آخر $(x-z)(y-z)$ را از طرفین ساده کرده‌ایم.) چون $x+z \geqslant y+z$ و $\frac{۱}{z} \geqslant \frac{۱}{x}$ بنابراین،

$$\frac{x+z}{z} \geqslant \frac{y+z}{x}$$

یعنی $\frac{x+z}{z} - \frac{y+z}{x} \geqslant ۰$. پس

$$ax^۲ + by^۲ + cz^۲ \geqslant ۰$$

۶. اگر در مجموعهٔ

$$\{a, a+۱, \ldots, a+۲n-۱\}$$

$n+۱$ عدد انتخاب کنیم، تفاضل دوتای آنها n است. برای اثبات زوجهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$(a, a+n), (a+۱, a+n+۱), \ldots, (a+n-۱, a+۲n-۱)$$

و اصل لانه کبوتری را به کار می‌بریم. حال اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به ۵ دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}, \quad \{۲۱, ۲۲, \ldots, ۴۰\}, \quad \{۴۱, ۴۲, \ldots, ۶۰\}$$
$$\{۶۱, ۶۲, \ldots, ۸۰\}, \quad \{۸۱, ۸۲, \ldots, ۱۰۰\}$$

واضح است که از میان ۵۱ عدد باید یازده‌تای آنها از یکی از این دسته‌ها انتخاب شوند و با آنچه که در بالا گفتیم اثبات تمام است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

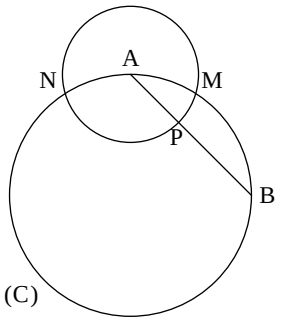
۱. اگر $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n و ... مجموعه‌های دلخواه باشند، مجموعه‌های B_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$B_n = \begin{cases} A_۱ & \text{اگر } n = ۱ \\ A_n - \bigcup_{i=۱}^{n-۱} A_i & \text{اگر } n \geqslant ۲ \end{cases}$$

الف) ثابت کنید $B_n \cap B_m = \varnothing$ $(n \neq m)$.

ب) ثابت کنید $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=۱}^{\infty} B_n$.

۲. وتر AB از دایرهٔ (C) را در نظر می‌گیریم. دایرهٔ دیگری به مرکز A و به شعاع کوچکتر از طول AB رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را در نقاط M و N و وتر AB را در نقطهٔ P قطع کند، ثابت کنید عمودمنصف BP از وسط کمان $\overset{\frown}{MB}$ می‌گذرد.



۳. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۵$، $n!$ بر کلیهٔ اعداد ۱، ۲، ... و k بخشپذیر است به شرط اینکه $k+۱$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از n باشد. (می‌دانیم که برای $n \geqslant ۲$ بین n و $۲n$]حداقل[یک عدد اول وجود دارد).

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هشتمین دوره المپیاد ریاضی

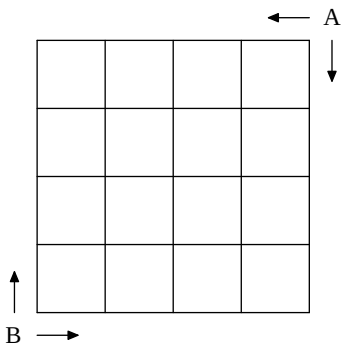
۴. همهٔ اعداد حقیقی x، y و z را تعیین کنید که در رابطه‌های زیر صادق باشند:

$$x(۱+y)=y(۱+z)=z(۱+x)$$

۵. ثابت کنید در هر مثلث، خطوطی که اوساط اضلاع را به اوساط ارتفاعهای متناظر وصل می‌کنند، متقاربند]همرسند[.

آیا می‌توان به جای ارتفاعها، هر سه خط متقارب]همرس[را در نظر گرفت؟ چگونه؟ ثابت کنید.

۶. در شبکهٔ ۴ × ۴ شکل زیر متحرکی از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت می‌کند به طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. همچنین متحرک دیگری از نقطهٔ B به سمت نقطهٔ A در حرکت است به طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید. اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت نمایند، احتمال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید.



۷. از تساوی زیر $f(x)$ را تعیین کنید.

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{-۱,۰,۱\},\quad f\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)+f\left(-\frac{۱}{x}\right)+f\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)=x$$

۸. اگر $a_۱\geqslant a_۲\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant ۰$، $b_i>۰$ و به‌ازای هر k $(۱\leqslant k\leqslant n)$،

$$\sum_{j=۱}^{k}a_j\leqslant\sum_{j=۱}^{k}b_j$$

ثابت کنید که

$$\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲\leqslant\sum_{i=۱}^{n}b_i^۲$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. فرض کنید $m < n$. داریم

$$B_n = A_n \cap A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_m \cap \ldots \cap A'_{n-1}$$

بدیهی است که $B_m \cap B_n = \varnothing$، $B_n \subseteq A_n$ و در نتیجه $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. حال اگر $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، فرض کنید n کوچکترین عدد طبیعی باشد که $x \in A_n$، پس $x \in A'_k$، $k = 1, 2, \ldots, n-1$، پس $x \in B_n$. از آنجا $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و بنابراین،

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

۲. نیمساز زاویهٔ MAP عمودمنصف پاره‌خط MP است. که از وسط کمان MB می‌گذرد. حال در مثلث MNB نیمساز زاویه $\angle MNB$ و عمود منصف ضلع MB یکدیگر را بر دایرهٔ محیطی مثلث MNB قطع می‌کنند، که وسط قوس MB است. پس عمودمنصفهای دو ضلع MP و MB از مثلث MPB یکدیگر را در وسط قوس MB قطع می‌کنند. در نتیجه عمودمنصف ضلع سوم BC نیز از این نقطه می‌گذرد.

۳. واضح است که برای $j = 1, 2, \ldots, n$ داریم $j \mid n!$. حال برای هر $n < j < k+1$، j مرکب است، یعنی اعداد طبیعی $a, b \geqslant 2$ یافت می‌شوند که $j = ab$. چون بین اعداد n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد پس $j < 2n$. ولی اگر $a > n$، چون $b \geqslant 2$ آنگاه $j = ab > 2n$ و به طریق مشابه برای b، پس $a \leqslant n$ و $b \leqslant n$. حال اگر $a \neq b$، آنگاه a و b دو عدد مختلف از اعداد ۱، ۲، ... و n هستند؛ پس $j = ab \mid n!$. اما اگر هیچ دو عدد متفاوتی مانند a و b وجود نداشته باشند که $j = ab$، در این صورت $j = p^2$ که p اول است. اگر $p \geqslant 4$ آنگاه $j = p^2 \geqslant 4p$، یعنی $4p \leqslant j < 2n$. پس $2p < n$. یعنی هم p و هم $2p$ جزء اعداد ۱، ۲، ... و n هستند. پس $j = p^2 \mid n!$. اگر $p = 3$ آنگاه $j = 9$ و در نتیجه $k + 1 = 11$. چون بین n و $k+1$ هیچ عددی اول نیست، پس n فقط می‌تواند به‌صورت ۷ یا ۸ باشد که در آن صورت $9 \mid 7!$ و $9 \mid 8!$ و چون $n \geqslant 5$ پس $j = p^2 > 5$، یعنی $p > 2$. بنابراین، حالت دیگری امکانپذیر نیست یعنی برای هر j، $j \mid n!$ و اگر $n = k$ حکم واضح است.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی

۴. اگر $y=-۱$ باشد نتیجه می‌شود $x=-۱$ و $z=-۱$. فرض کنیم $y\neq -۱$. داریم

$$x=\frac{y(۱+z)}{۱+y}\Longrightarrow y(۱+z)=z\left(۱+\frac{y(۱+z)}{۱+y}\right)$$
$$\Longrightarrow (y-z)(۱+y+yz)=۰$$
$$\Longrightarrow y-z=۰ \quad \text{یا} \quad ۱+y+yz=۰$$

اگر $y=z$، داریم $x=y=z$ و اگر $۱+y+yz=۰$ خواهیم داشت $y(۱+z)=-۱$.

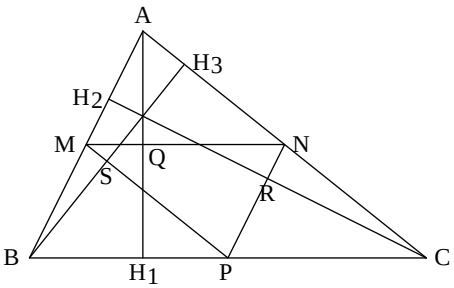
$$۱+z=\frac{-۱}{y}\Longrightarrow z=\frac{-۱}{y}-۱$$

که با فرض $y=\beta$، $\beta\in\mathbb{R}$، $\beta\neq -۱$ و $\beta\neq ۰$ نتیجه می‌شود

$$۱+x+\beta x=۰\Longrightarrow x=\frac{-۱}{۱+\beta}$$
$$y=\beta \quad و \quad x=\frac{-۱}{۱+\beta} \quad و \quad z=\frac{-۱}{\beta}-۱$$

در صورتی که $y=۰$ باشد، به سادگی ثابت می‌شود که $x=z=۰$.

۵. با توجه به شکل



$$\frac{QM}{QN}=\frac{BH_۱}{H_۱C}$$
$$\frac{RN}{RP}=\frac{AH_۲}{H_۲B}$$
$$\frac{SP}{SM}=\frac{CH_۳}{H_۳A}$$

با ضرب طرفین تساوی در یکدیگر و با توجه به این که ارتفاعها متقاربند، بنابر قضیهٔ سوا حاصلضربهای طرف دوم یک و از آنجا بنابر عکس قضیهٔ سوا خطوط NS، PQ و MR همرسند.

در حالت کلی اگر به جای ارتفاعها سه خطّ همرس در نظر بگیریم، کافی است به جای $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ محل تلاقی خطوط سه‌گانه را با اضلاع مثلث، جایگزین کنیم.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی

۶. این دو متحرک فقط روی قطر عمود بر AB می‌توانند به هم برخورد کنند. تعداد حرکتهای ممکن ۱۶ × ۱۶ = ۲۵۶ است. حالات مساعد به موارد زیر امکانپذیر است.

الف) B چهار مرحلهٔ متوالیِ افقی و A چهار مرحلهٔ عمودی را انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۴} \times \binom{۴}{۰} = ۱$$

ب) B سه مرحلهٔ افقی و یک مرحلهٔ عمودی و A سه مرحلهٔ عمودی و یک مرحلهٔ افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۳} = ۱۶$$

ج) B دو مرحلهٔ افقی و دو مرحلهٔ عمودی و A دو مرحلهٔ عمودی و دو مرحلهٔ افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۴}{۲} = ۳۶$$

د) B یک مرحلهٔ افقی و سه مرحلهٔ عمودی و A یک مرحلهٔ عمودی و سه مرحلهٔ افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۳} \times \binom{۴}{۱} = ۱۶$$

ه) B هر چهار مرحله را عمودی و A هر چهار مرحله را افقی انتخاب کند.

$$\binom{۴}{۰} \times \binom{۴}{۴} = ۱$$

پس

$$p = \frac{۱ + ۱۶ + ۳۶ + ۱۶ + ۱}{۲۵۶} = \frac{۷۰}{۲۵۶}$$

۷. با فرض $y = \frac{x-۱}{x+۱}$ داریم $x = \frac{۱+y}{۱-y}$ و $-\frac{۱}{x} = \frac{y-۱}{y+۱}$، $-\frac{۱}{y} = \frac{۱+x}{۱-x}$ و از آنجا

$$f(y) + f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right) + f\left(-\frac{۱}{y}\right) = \frac{۱+y}{۱-y} \qquad (۱)$$

با فرض $y = \frac{۱+x}{۱-x}$ داریم $x = \frac{y-۱}{y+۱}$، $-\frac{۱}{x} = \frac{۱+y}{۱-y}$ و $-\frac{۱}{y} = \frac{x-۱}{x+۱}$ و از آنجا

$$f\left(-\frac{۱}{y}\right) + f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right) + f(y) = \frac{y-۱}{y+۱} \qquad (۲)$$

و با فرض $y = -\frac{۱}{x}$ داریم $x = -\frac{۱}{y}$، $\frac{x-۱}{x+۱} = \frac{۱+y}{۱-y}$ و $\frac{y-۱}{y+۱} = \frac{۱+x}{۱-x}$ و از آنجا

$$f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right) + f(y) + f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right) = -\frac{۱}{y} \qquad (۳)$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی

با جمع معادلات (۱)، (۲) و (۳) داریم

$$\begin{aligned}
۳f(y)+۲f\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right)+۲f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right)+۲f\left(-\frac{۱}{y}\right) &= \frac{۴y}{۱-y^۲}-\frac{۱}{y} \\
&\Longrightarrow ۳f(y)+۲y=\frac{۵y^۲-۱}{y(۱-y^۲)} \\
&\Longrightarrow f(y)=\frac{۲y^۴+۳y^۲-۱}{۳y(۱-y^۲)}
\end{aligned}$$

۸. فرض کنیم که $b_۱ \geqslant b_۲ \geqslant \cdots \geqslant b_n > ۰$ و قرار دهیم

$$\forall k \leqslant n, \quad S_k=\sum_{i=۱}^{k}(b_i-a_i)$$

آنگاه $b_۱-a_۱=S_۱$، $b_۲-a_۲=S_۲-S_۱$، ... و $b_n-a_n=S_n-S_{n-۱}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n}(b_i-a_i)a_i &= S_۱a_۱+(S_۲-S_۱)a_۲+\cdots+(S_n-S_{n-۱})a_n \\
&= S_۱(a_۱-a_۲)+S_۲(a_۲-a_۳)+\cdots+S_{n-۱}(a_{n-۱}-a_n)+S_na_n \\
&\geqslant ۰
\end{aligned}$$

یعنی $\sum_{i=۱}^{n}b_ia_i \geqslant \sum_{i=۱}^{n}a_i^۲$. به همین شکل $\sum_{i=۱}^{n}(b_i-a_i)b_i \geqslant ۰$ و در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n}b_i^۲ \geqslant \sum_{i=۱}^{n}a_ib_i \geqslant \sum_{i=۱}^{n}a_i^۲$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

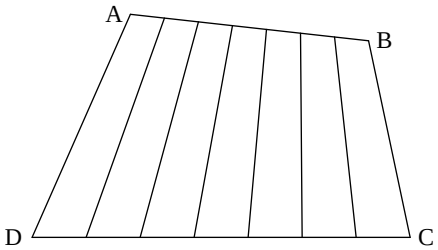
زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. نشان دهید اگر a، b و c طولهای اضلاع یک مثلث باشند، داریم

$$۳(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)^۲ < ۴(ab+bc+ca)$$

۲. در چهارضلعی $ABCD$ (شکل زیر) ضلع AB را به هفت قسمت مساوی و ضلع CD را نیز به هفت قسمت مساوی تقسیم]کرده[و نقاط تقسیم را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا هفت چهارضلعی کوچک به‌دست آید.



ثابت کنید دست کم یکی از چهارضلعیهای کوچک مساحتی برابر $\frac{۱}{۷}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ دارد.

۳. ثابت کنید معادلهٔ

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲^t xyz$$

که در آن x، y، z و t اعداد طبیعی هستند، جواب ندارد.

۴. اگر $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ فواصل یک نقطه در درون مثلث قائم‌الزاویه از سه ضلع آن و a طول وتر مثلث باشد، نشان دهید

$$\sqrt{d_۱} + \sqrt{d_۲} + \sqrt{d_۳} < \sqrt{۲a}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی

۵. n نقطه در روی صفحه مفروض است به طوری که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آنها بزرگتر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید تعداد جفتهایی از این نقاط که فاصلهٔ آنها دقیقاً مساوی یک باشد از $3n$ تجاوز نمی‌کند.

۶. روی محیط دایره‌ای به شعاع یک متر نقطهٔ دلخواه A_0 را انتخاب و در جهت مثبت دایرهٔ مثلثاتی نقاط A_1، A_2، A_3، ... را طوری انتخاب می‌کنیم که متر$\overset{\frown}{A_0A_1} = 1$، متر$\overset{\frown}{A_1A_2} = \frac{1}{2}$، ...، متر$\overset{\frown}{A_{n-1}A_n} = \frac{1}{n}$ و ... (تعداد نقاط نامتناهی است).

الف) نشان دهید هیچ دو نقطهٔ A_i و A_j $(i \neq j)$ بر هم منطبق نیستند.

ب) نشان دهید اقلاً یک کمان یک میلیمتری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقاط A_i واقع بر آن بینهایت است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. داریم

$$(a+b+c)^۲ - ۳(ab+bc+ca) = \frac{۱}{۲}\left((a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲\right) \geqslant ۰$$

و این همواره برقرار است. بنابراین،

$$۳(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)^۲$$

برای اثبات قسمت دوم نامساوی می‌نویسیم

$$۴(ab+bc+ca) - (a+b+c)^۲ =$$
$$a(b+c-a) + b(c+a-b) + c(a+b+c)$$

چون در مثلثی به اضلاع a، b و c داریم

$$b+c>a \Longrightarrow b+c-a>۰$$
$$c+a>b \Longrightarrow c+a-b>۰$$
$$a+b>c \Longrightarrow a+b-c>۰$$

بنابراین،

$$(a+b+c)^۲ < ۴(ab+bc+ca)$$

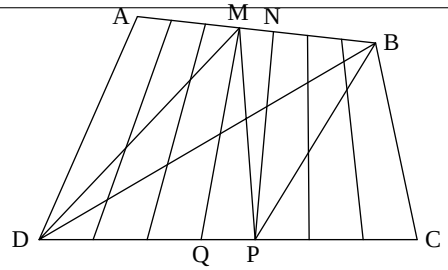
۲. داریم

$$\left.\begin{aligned} S_{MPN} &= \frac{۱}{۴}S_{MBP} \\ S_{MPQ} &= \frac{۱}{۴}S_{MPD} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S_{MNPQ} = \frac{۱}{۴}S_{MBPD}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{BDP} &= \frac{۴}{۷}S_{BDC} \\ S_{DMB} &= \frac{۴}{۷}S_{DBA} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S_{MBPD} = \frac{۴}{۷}S_{ABCD}$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هفتمین المپیاد ریاضی

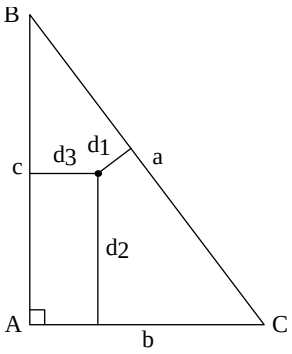


در نتیجه، $S_{MNPQ} = \frac{۱}{۷} S_{ABCD}$. ٪در حالت خاص، اگر AB موازی CD باشد مساحت هر هفت چهارضلعی کوچک با یکدیگر ٪مساوی و برابر با $\frac{۱}{۷}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ است.

۳. فرض کنیم $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ جوابی از این معادله باشد. واضح است که x، y و z باید زوج باشند. زیرا اگر فقط یکی از آنها و یا همه فرد باشند، آنگاه سمت چپ معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲^t xyz$ عدد فرد و سمت راست زوج خواهد بود که غیر ممکن است. و اگر فقط دوتای آنها فرد باشند آنگاه سمت چپ معادله بر ۴ قابل قسمت نیست ولی سمت راست بر ۴ قابل قسمت است (z زوج است). در نتیجه،

$$\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{y}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{z}{۲}\right)^۲ = ۲^{t+۱} \left(\frac{x}{۲}\right)\left(\frac{y}{۲}\right)\left(\frac{z}{۲}\right)$$

با همان استدلال بالا، نتیجه می‌شود که $\frac{x}{۲}$، $\frac{y}{۲}$ و $\frac{z}{۲}$ نیز زوج هستند. پس به همین ترتیب برای هر $k \in \mathbb{N}$، باید $\frac{x}{۲^k}$ عدد صحیح باشد که غیر ممکن است.



۴.

داریم

$$\sqrt{d_۱} + \sqrt{d_۲} + \sqrt{d_۳} = \sqrt{ad_۱} \cdot \sqrt{\frac{۱}{a}} + \sqrt{bd_۲} \cdot \sqrt{\frac{۱}{b}} + \sqrt{cd_۳} \cdot \sqrt{\frac{۱}{c}}$$
$$\leqslant \sqrt{ad_۱ + bd_۲ + cd_۳} \cdot \sqrt{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هفتمین المپیاد ریاضی

(بنابر نامساوی کوشی). اما $ad_۱ + bd_۲ + cd_۳ = ۲S = bc$، پس

$$\sum_{i=۱}^{۳} \sqrt{d_i} \leqslant \sqrt{bc} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ac}{abc}}$$

چون

$$ab+bc+ac < a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۲a^۲$$

پس

$$\sum_{i=۱}^{۳} \sqrt{d_i} < \sqrt{bc} \cdot \sqrt{\frac{۲a^۲}{abc}}$$

در نتیجه، $\Sigma_{i=۱}^{۳} \sqrt{d_i} < \sqrt{۲a}$.

۵. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر نقطه مانند A حداکثر شش نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها با A مساوی یک باشد. زیرا تمام نقاطی که فاصلهٔ آنها با A مساوی یک است روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع یک واقع هستند و هر دو نقطه روی این دایره که فاصله‌شان حداقل یک باشد باید در دو سر کمانی به اندازهٔ حداقل ۶۰ درجه واقع باشند. در نتیجه بیشتر از شش نقطه ممکن نیست.

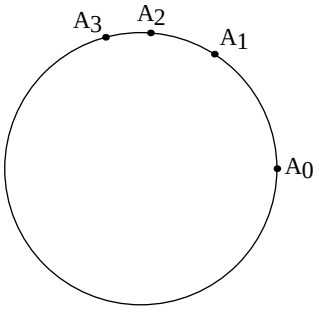
به این ترتیب برای هر نقطه بیش از شش جفت که دارای خاصیت فوق باشد نمی‌توان تشکیل داد و چون تعداد نقطه‌ها n است پس کلاً $۶n$ جفت به‌دست می‌آید اما جفت (A, B) با جفت (B, A) فرقی ندارد پس $\frac{۶n}{۲} = ۳n$ جفت به‌دست می‌آید. یعنی بیش از $۳n$ جفت با این خاصیت نخواهیم داشت.

۶. الف) اگر دو نقطهٔ A_i و A_j به فرض $j > i$ بر هم منطبق باشند خواهیم داشت

$$\frac{۱}{i+۱} + \frac{۱}{i+۲} + \cdots + \frac{۱}{j} = ۲k\pi$$

طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است پس تساوی نمی‌تواند برقرار باشد.

ب) چون هیچ دو نقطه‌ای بر هم منطبق نیستند و تعدادشان نامتناهی است اقلاً در یک کمان یک میلیمتری باید تعدادشان نامتناهی باشد زیرا تعداد فواصل یک میلیمتری که می‌توان روی این دایره جدا کرد، متناهی است.



https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $x^۳+x^۲+۲x-۱=۰$ باشد آنگاه دو ریشهٔ دیگر معادله را به صورت کثیرالجمله‌ای [چندجمله‌ای] با ضرایب گویا بر حسب α به‌دست آورید.

۲. در مثلث غیر مشخص ABC که هر سه زاویهٔ آن حاده هستند ارتفاعات AD، BE و CF را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را به ترتیب در P، Q و R قطع کنند. اگر h طول بزرگترین ارتفاع و s طول کوچکترین پاره‌خط از بین پاره‌خطهای AP، BQ و CR باشد ثابت کنید

$$\frac{h}{s} > \frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۳. دو تابع حقیقی f و g بر $\mathbb{R}$ [روی $\mathbb{R}$] را وابسته گوییم هرگاه تابع حقیقی دوسویی h (یک‌به‌یک و پوشا) [روی $\mathbb{R}$] وجود داشته باشد به طوری که $h\circ f = g\circ h$ ($f\circ g$ ترکیب توابع f و g است).

الف) نشان دهید اگر f و g وابسته و g و φ نیز وابسته باشند آنگاه f و φ نیز وابسته‌اند.

ب) مطلوب است شرط لازم و کافی بر حسب a و b برای اینکه دو تابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۲-ax+b$ وابسته باشند.

۴. معادلهٔ سیالهٔ زیر را حل کنید (m، n، p و q ارقام هستند):

$$(m-۹)^۲\times m! + (n-۸)^۲\times n! + ۵۰\times p! + ۴۹\times q! = \sqrt{\overline{mnpq}}$$

۵. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ ($۰<a<b$) تعریف شده و در رابطهٔ

$$\forall x,y\in[a,b],\quad x\neq y \Rightarrow |f(x)-f(y)|<|x-y|$$

صدق کند؛ و داریم $f(a)=f(b)=۰$. ثابت کنید

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |f(x)-f(y)|<\frac{a+b}{۲}$$

۶. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AC>BD$، از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید

$$AB\cdot AE + AD\cdot AF = AC^۲$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل آزمون مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. می‌دانیم $P(x) = x^۳ + x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ ریشهٔ گویا ندارد (چرا؟) پس $P(x)$ روی اعداد گویا تجزیه نمی‌شود. یعنی α نمی‌تواند ریشهٔ چندجمله‌ای دیگری از درجهٔ کمتر از ۳ باشد و $P(x)$ تنها چندجمله‌ای درجهٔ سوم تحویل‌ناپذیر روی اعداد گویاست که $P(\alpha) = ۰$. حال چندجمله‌ای $P(x-۱) = x^۳ - ۲x^۲ - x + ۱$ را در نظر می‌گیریم. ریشه‌های $P(x-۱) = ۰$ عبارتند از $\alpha+۱$، $\beta+۱$ و $\gamma+۱$، که α، β و γ ریشه‌های $P(x) = ۰$ هستند. اما،

$$\beta\cdot\gamma = \frac{۱}{\alpha}, \quad (\beta+۱)(\gamma+۱) = -\frac{۱}{\alpha+۱}$$

پس

$$\beta+\gamma = (\beta+۱)(\gamma+۱) - \beta\gamma - ۱ = -\frac{۱}{\alpha+۱} - \frac{۱}{\alpha} - ۱$$

یعنی

$$\begin{cases} \beta+\gamma = \dfrac{-\alpha^۲ - ۳\alpha - ۱}{\alpha(\alpha+۱)} \\ \beta\cdot\gamma = \dfrac{۱}{\alpha} \end{cases}$$

در نتیجه،

$$\gamma = -\frac{\alpha+۱}{\alpha}, \quad \beta = -\frac{۱}{\alpha+۱}$$

حال قرار می‌دهیم

$$\beta = -\frac{۱}{\alpha+۱} = A\alpha^۲ + B\alpha + C$$

ضرایب A، B و C را تعیین می‌کنیم، خواهیم داشت

$$A\alpha^۳ + (A+B)\alpha^۲ + (B+C)\alpha + C + ۱ = ۰$$

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی

داریم $\alpha^۳ = ۱ + ۲\alpha - \alpha^۲$ که با قرار دادن آن در رابطهٔ اخیر به‌دست می‌آوریم

$$B\alpha^۲ + (B + C + ۲A)\alpha + (A + C + ۱) = ۰$$

$$\left.\begin{matrix} B = ۰ \\ B + C + ۲A = ۰ \\ A + C + ۱ = ۰ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A = ۱ \text{ و } C = -۲$$

بنابراین،

$$\beta = \alpha^۲ + ۰ \times \alpha - ۲ = \alpha^۲ - ۲$$

و چون $\alpha + \beta + \gamma = -۱$، به‌دست می‌آید

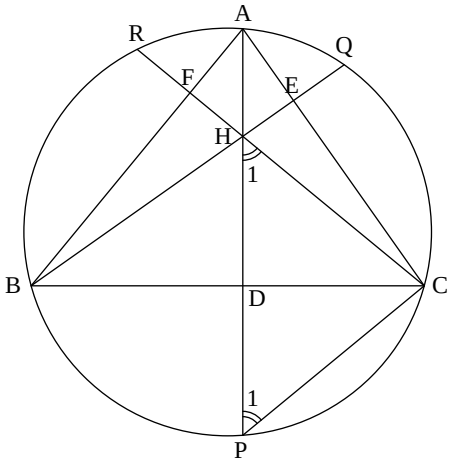
$$\gamma = -۱ - \alpha - \alpha^۲ + ۲ = -\alpha^۲ - \alpha + ۱$$

۲. می‌دانیم که قرینهٔ محل تلاقی سه ارتفاع، H، نسبت به هر یک از اضع، روی دایرهٔ محیطی است. پس

$$\frac{AP}{AD} = ۱ + \frac{DP}{AD} = ۱ + \frac{HD}{AD}$$

در نتیجه،

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = ۳ + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{FC}$$



اما،

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{FC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = ۱$$

پس

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = ۴$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی

و با توجه به نامساوی $\frac{x+y+z}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{xyz}$ $(x,y,z \geqslant ۰)$ داریم

$$\frac{AP}{AD} \times \frac{BQ}{BE} \times \frac{CR}{CF} \leqslant \frac{۶۴}{۲۷}$$

پس

$$\frac{s^۳}{h^۳} \leqslant \frac{۶۴}{۲۷} \Longrightarrow \frac{h}{s} \geqslant \frac{۳}{۴} > \frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۳. الف) توجه می‌کنیم که f و g وابسته‌اند هرگاه $f = h^{-۱} \circ g \circ h$. پس اگر $g = \psi^{-۱} \circ \varphi \circ \psi$ (h و ψ یک‌به‌یک و پوشا هستند)، آنگاه

$$f = h^{-۱}(\psi^{-۱}\varphi\psi)\, h = (\psi h)^{-۱}\varphi(\psi h)$$

و ψh نیز یک‌به‌یک و پوشاست. پس φ و f نیز وابسته‌اند.
ب) از تساوی $h\big(f(x)\big) = g\big(h(x)\big)$ داریم

$$h(x^۲) = h(x)^۲ - ah(x) + b \qquad (۱)$$

اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم خواهیم داشت

$$h(x^۲) = h(-x)^۲ - ah(-x) + b \qquad (۲)$$

حال اگر دو تساوی (۱) و (۲) را از هم کم کنیم خواهیم داشت

$$\big(h(x) - h(-x)\big)\big(h(x) + h(-x) - a\big) = ۰$$

چون h یک‌به‌یک است پس برای هر $x \neq ۰$، $h(x) - h(-x) \neq ۰$؛ بنابراین، برای هر x غیر صفر، $h(x) + h(-x) - a = ۰$. چون h تابعی پوشاست پس $x_۰$ موجود است به طوری که $h(x_۰) = \frac{a}{۲}$ و در نتیجه، $h(-x_۰) = \frac{a}{۲}$ ($x_۰ = ۰$ مشکلی برای ما ایجاد نمی‌کند). و چون h تابعی یک‌به‌یک است پس $x_۰ = ۰$ یعنی $h(۰) = \frac{a}{۲}$. حال در تساوی

$$h(x^۲) = h(x)^۲ - ah(x) + b$$

به جای x صفر می‌گذاریم، خواهیم داشت

$$\frac{a}{۲} = \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۲} + b$$

یعنی

$$a^۲ + ۲a = ۴b$$

این شرط کافی است زیرا توجه می‌کنیم که برای تابع یک‌به‌یک و پوشای

$$h(x) = x + \frac{a}{۲}$$

خواهیم داشت $h \circ f = g \circ h$.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی

۴. می‌دانیم $\overline{mnpq} \leqslant ۹۹$؛ بنابراین،

$$(m-۹)^۲ \times m! + (n-۸)^۲ \times n! + ۵۰ \times p! + ۴۹ \times q! \leqslant ۹۹$$

حداقل مقدار $p!$ و $q!$ یک است پس کمترین مقدار $۵۰ \times p! + ۴۹ \times q!$، ۹۹ است. پس

$$(m-۹)^۲ \times m! + (n-۸)^۲ \times n! = ۰$$
$$(m-۹)^۲ \times m! = ۰ \Longrightarrow m = ۹$$
$$(n-۸)^۲ \times n! = ۰ \Longrightarrow n = ۸$$

و

$$۵۰ \times p! + ۴۹ \times q! \leqslant ۹۹ \qquad (۱)$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که $p! = ۱$ و $q! = ۱$. پس

$$\begin{cases} p = ۰ \\ p = ۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} q = ۰ \\ q = ۱ \end{cases}$$

تنها جواب $p = ۰$ و $q = ۱$ در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند. بنابراین،

$$\overline{mnpq} = ۹۹^۲ = ۹۸۰۱$$

۵. اگر $x = y$ باشد حکم واضح است. اگر x دلخواه و $y = a$ یا $y = b$، داریم

$$\begin{cases} |f(x) - f(a)| < |x - a| = x - a < x \\ |f(x) - f(b)| < |x - b| = b - x \end{cases}$$

پس

$$|f(x)| < \frac{b}{۲} < \frac{a+b}{۲} |f(x) - f(b)| < \frac{a+b}{۲} |f(x) - f(a)| < \frac{a+b}{۲}$$

و اگر $x, y \in (a, b)$، کافی است فرض کنیم $|x - y| < \frac{a+b}{۲}$ (در غیر اینصورت حکم ثابت می‌شود)، داریم

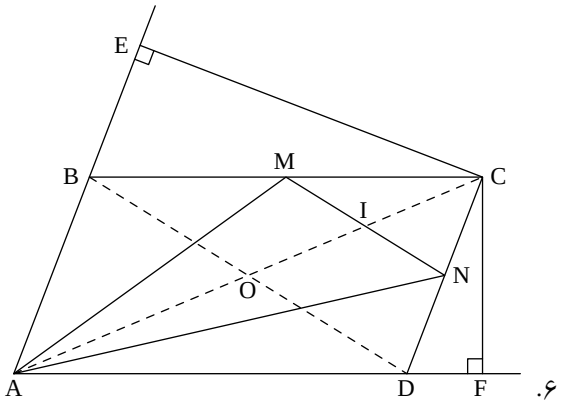
$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x)| + |f(y)| \\ &< x + (b - y) \\ &= b - (y - x) \end{aligned}$$

می‌توان فرض کرد $x < y$، پس

$$|f(x) - f(y)| < b - \frac{a+b}{۲} = \frac{b-a}{۲} < \frac{b+a}{۲}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی



.۶

در دایره‌ای به قطر BC (که مرکزش M است) داریم P_M^A یعنی قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ با مرکز M)

$$P_M^A = AB \cdot AE = AM^۲ - \frac{BC^۲}{۴}$$

در دایره‌ای به قطر CD (که مرکزش N است) داریم

$$P_N^A = AD \cdot AF = AN^۲ - \frac{CD^۲}{۴}$$

I را محل تقاطع MN و AC و O را محل تقاطع BD و AC می‌گیریم. طرفین رابطه‌های بالا را جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} AB \cdot AE + AD \cdot AF \\ &= (AM^۲ + AN^۲) - \frac{۱}{۴}(BC^۲ + CD^۲) \\ &= \frac{۱}{۲}MN^۲ + ۲AI^۲ - \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}BD^۲ + ۲CO^۲\right) \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}BD\right)^۲ + ۲\left(\frac{۳}{۴}AC\right)^۲ - \frac{۱}{۸}BD^۲ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}AC\right)^۲ \\ &= \frac{۱}{۸}BD^۲ + \frac{۱۸}{۱۶}AC^۲ - \frac{۱}{۸}BD^۲ - \frac{۱}{۸}AC^۲ \\ &= \frac{۹}{۸}AC^۲ - \frac{۱}{۸}AC^۲ \end{aligned}$$

پس

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^۲$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم کنید و نقطهٔ وسط آن را I بنامید. پاره‌خط BI را ادامه دهید تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید

$$S_{ABC} = ۱۲S_{AID}$$

(منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است).

۲. ثابت کنید حاصلجمع هیچ k عدد صحیح متوالی و مثبت را نمی‌توان به صورت ۲^n نوشت. (k و n اعداد صحیح و مثبت و $k \neq ۱$ است)

۳. همهٔ چندجمله‌ایهای $P(x)$ را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد.

$$xP(x-۱) = (x-۱۲)P(x)$$

۴. مثلث ABC مفروض است.

الف) ثابت کنید عدهٔ بیشماری مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به طوری که مثلث ABC در آنها محاط باشد (یعنی هریک از رئوس A، B و C روی یکی از اضلاع مثلث ساخته شده قرار گیرد).

ب) از میان مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده مثلثی را تعیین کنید که محیط و مساحت آن ماکزیمم باشد.

۵. چندجمله‌ای ناصفر $f(x)$ را چنان تعیین کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$f(۲x) = f'(x)f''(x)$$

۶. اعداد صحیح و مثبت n، $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n را طوری تعیین کنید که

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۱۳۶۶$$

و حاصلضرب $a_۱a_۲\cdots a_n$ ماکزیمم باشد.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

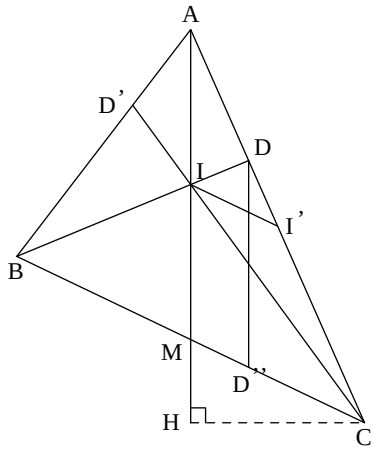
حل مسائل آزمون مرحله‌ی اول پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. مساحت مثلث AMC برابر $\frac{۱}{۲}$ مساحت ABC است و مساحت مثلث AIC نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ مساحت AMC است (زیرا قاعدهٔ آن AM و $AI = \frac{۱}{۲}AM$؛ و CH ارتفاع مشترک آنهاست). پس مساحت AIC برابر $\frac{۱}{۴}$ مساحت ABC است. حال ثابت می‌کنیم که مساحت AID برابر $\frac{۱}{۳}$ مساحت AIC است. این دو مثلث دارای ارتفاع مشترک هستند. بنابراین، باید ثابت کنیم $AC = ۳AD$ یا $\frac{AD}{AC} = \frac{۱}{۳}$. برای این منظور، از I موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در I' قطع کند. چون I وسط AM است، پس $\frac{II'}{MC} = \frac{۱}{۲}$ یا $\frac{II'}{BC} = \frac{۱}{۴}$. از تشابه دو مثلث DII' و DBC، داریم

$$\frac{DI}{DB} = \frac{II'}{BC} = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow \frac{DB}{DI} = \frac{۴}{۱} \Longrightarrow \frac{DB}{BI} = \frac{۴}{۳} \qquad (۱)$$



از D خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا BC را در D'' قطع کند. دو مثلث AMC و $DD''C$ متشابهند،

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

پس

$$\frac{DC}{AC} = DD''AM = \frac{DD''}{۲IM} = \frac{۱}{۲} \times \frac{DD''}{IM} \qquad (۲)$$

اما دو مثلث BDD'' و BIM متشابهند. پس بنابر (۱)،

$$\frac{DD''}{IM} = \frac{BD}{BI} \Longrightarrow \frac{DD''}{IM} = \frac{۴}{۳} \qquad (۱)$$

بنابر (۱) و (۲)، داریم

$$\frac{DC}{AC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

به عبارت دیگر

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC - DC}{AC} = ۱ - \frac{DC}{AC} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow AC = ۳AD$$

۲. فرض کنید، p، $p+۱$، ⋯و $p+k-۱$، k عدد صحیح مثبت و متوالی باشند و

$$p + (p+۱) + \cdots + (p+k-۱) = ۲^n$$

در نتیجه،

$$kp + (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + k - ۱) = ۲^n$$

$$kp + \frac{(k-۱)k}{۲} = ۲^n$$

$$k\left(p + k - ۱۲\right) = ۲^n \qquad (۱)$$

دو حالت را بررسی می‌کنیم.

الف) اگر k فرد باشد، $p + \frac{k-۱}{۲}$ عددی صحیح است و بنابراین تساوی (۱) غیر ممکن است چون ۲^n عامل فردی مانند k ندارد (k بزرگتر از واحد است).

ب) اگر k زوج باشد، داریم $k = ۲l$، پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$۲l\left(p + \frac{۲l-۱}{۲}\right) = ۲^n$$

یعنی

$$l\big(۲(p+l) - ۱\big) = ۲^n$$

چون $۲(p+l) - ۱$ فرد است، پس ۲^n باید دارای عامل اول فرد باشد که غیر ممکن است؛ پس حکم برقرار است.

۳. فرض کنیم $P(x) = P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که $P(x)$ بر x بخشپذیر است. بنابراین $P_n(x) = xP_{n-۱}(x)$ ($P_{n-۱}$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-۱$ است). در نتیجه،

$$P_n(x-۱) = (x-۱)P_{n-۱}(x-۱)$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

یا

$$xP_n(x-۱) = x(x-۱)P_{n-۱}(x-۱)$$
$$(x-۱۲)P_n(x) = x(x-۱)P_{n-۱}(x-۱)$$

بنابراین، $P_n(x)$ بر $x-۱$ بخشپذیر است. پس داریم

$$P_n(x) = x(x-۱)P_{n-۲}(x)$$
$$P_n(x-۱) = (x-۱)(x-۲)P_{n-۲}(x-۱)$$
$$xP_n(x-۱) = x(x-۱)(x-۲)P_{n-۲}(x-۱)$$
$$(x-۱۲)P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)P_{n-۲}(x-۱)$$

بنابراین $P_n(x)$ بر $x-۲$ بخشپذیر است و می‌توان نوشت

$$P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)P_{n-۳}(x)$$

با ادامه دادن این روش خواهیم داشت

$$P(x) = P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)(x-۳)\cdots(x-۱۱)P_{n-۱۲}(x) \qquad (۱)$$

با تبدیل x به $x-۱$ داریم

$$P_n(x-۱) = (x-۱)(x-۲)(x-۳)\cdots(x-۱۲)P_{n-۱۲}(x-۱)$$

یا

$$(x-۱۲)P_n(x) = x(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۱۱)(x-۱۲)P_{n-۱۲}(x-۱)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) خواهیم داشت

$$(x-۱۲)x(x-۱)(x-۲)(x-۳)\cdots(x-۱۱)P_{n-۱۲}(x) =$$
$$x(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۱۱)(x-۱۲)P_{n-۱۲}(x-۱)$$

در نتیجه، $P_{n-۱۲}(x) = P_{n-۱۲}(x-۱)$. می‌گیریم $Q(x) = P_{n-۱۲}(x)$؛ داریم

$$Q(x-۱) = Q(x)$$

که $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-۱۲$ است. اگر $Q(x) = Q_۰(x) = c$ (یعنی $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ صفر و برابر با یک مقدار ثابت باشد)، آنگاه رابطهٔ $Q(x) = Q(x-۱)$ برقرار است.

حال ثابت می‌کنیم که $Q(x) = c$ تنها حالتی است که رابطهٔ $Q(x) = Q(x-۱)$ می‌تواند برقرار باشد. اگر

$$Q(x) = Q_k(x) = a_۰x^k + a_۱x^{k-۱} + \cdots + a_{k-۱}x + a_k$$

که در آن $k \geqslant ۱$ و $a_۰ \neq ۰$، آنگاه از $Q(x) = Q(x-۱)$ نتیجه می‌شود

$$a_۰(x-۱)^k + a_۱(x-۱)^{k-۱} + \cdots + a_k = a_۰x^k + a_۱a^{k-۱} + \cdots + a_k$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

با مساوی قرار دادن ضریب x^{k-1} در دو طرف تساوی، خواهیم داشت

$$ka_0 + a_1 = a_1 \Longrightarrow a_0 = 0$$

و این متناقض با $a_0 \neq 0$ است. پس $k = 0$ و بنابراین، $Q(x) = c$. در نتیجه،

$$P(x) = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-11)$$

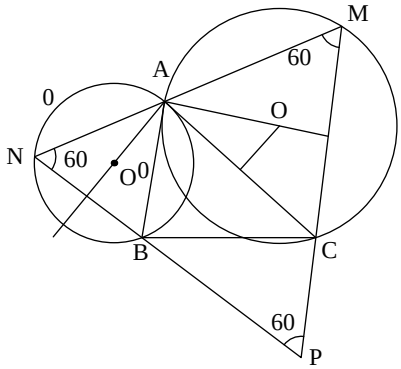
یعنی $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۱۲ است.

۴. کمان درخورهای 60° را بر AC و AB رسم می‌کنیم و آنها را دوایر γ و γ' می‌نامیم. هر خطی که از A رسم شود تا γ و γ' را در M و N قطع کند و آنگاه خطوط MC و NB همدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کنند، مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱). در نتیجه بینهایت مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان بر ABC محیط کرد. حال برای اینکه مساحت یا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع ماکزیمم شود کافی است ضلع آن ماکزیمم شود. پس برای حل این قسمت کافی است از نقطهٔ A خطی رسم کنیم به طوری که MN ماکزیمم شود. ثابت می‌کنیم هرگاه از A خطی به موازات OO' (خط‌المرکزین دو دایرهٔ γ و γ') رسم کنیم این خاصیت را خواهد داشت.

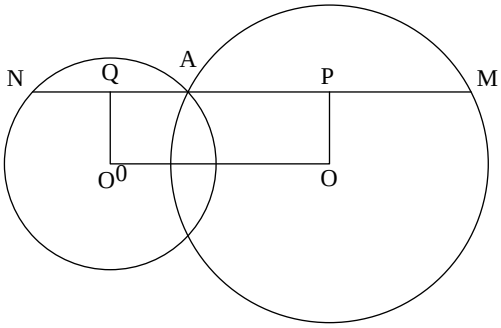
https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

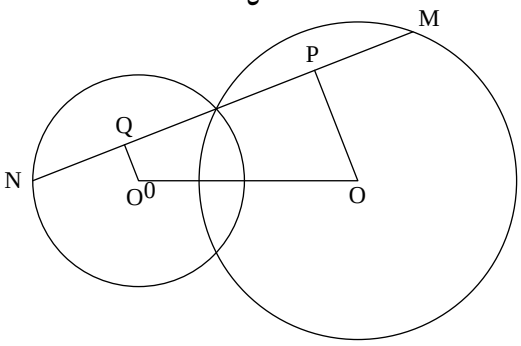
حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

اگر MN موازی OO' باشد، آنگاه واضح است که $MN = ۲OO'$ (شکل ۲).

ولی اگر MN موازی OO' نباشد، $MN < ۲OO'$ (شکل ۳). زیرا اگر از O و O' به MN عمود کنیم و پاهای عمود را P و Q بنامیم، خواهیم داشت

$$\frac{MN}{۲} = PQ < OO' \Longrightarrow MN < ۲OO'$$

۵. فرض می‌کنیم

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

در این صورت، درجه‌های $f(x)$، $f'(x)$ و $f''(x)$ به ترتیب n، $n-1$ و $n-2$ هستند. باید داشته باشیم

$$f(2x) = f'(x)f''(x)$$

پس $n = (n-1) + (n-2)$ و $n = 3$. همچنین

$$\forall x, \quad 8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$$

از اتحاد فوق دستگاه معادلات زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} 8a = 18a^2 \\ 4b = 6ab + 12ab \\ 2c = 4b^2 + 6ac \\ d = 2bc \end{cases}$$

پس از حل، $f(x) = \frac{4}{9}x^3$.

۶. هریک از a_iها را می‌توان کوچکتر از ۴ گرفت زیرا $a_i = (a_i - 2) + 2$ و اگر $a_i \geqslant 4$، $2(a_i - 2) \geqslant a_i$ و اگر به جای a_i دو عدد $(a_i - 2)$ و ۲ را قرار دهیم، حاصلضرب بزرگتر خواهد شد. حال ادعا می‌کنیم که در بین a_iها بیش از دوتا عدد ۲ نمی‌توانیم داشته باشیم زیرا

$$3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2, \quad 2 + 2 + 2 = 3 + 3$$

پس به جای هر سه‌تا عدد ۲ می‌توان اعداد ۳ و ۳ را انتخاب کرد. در نتیجه با توجه به تساوی

$$1366 = 3 \times 454 + 2 + 2$$

خواهیم داشت

$$n = 456, \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_{454} = 3, \quad a_{455} = a_{456} = 2$$

یعنی ماکزیمم حاصلضرب، $2^2 \times 3^{454}$ خواهد بود.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول سومین دوره مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. توابع زیر مفروضند:

$$f(x)=\frac{۱}{[|x|]-۱} \quad و \quad g(x)=\frac{۱}{|[x]|-۱}$$

اولاً قلمرو هریک از توابع فوق را به‌دست آورید. ثانیاً ثابت کنید که

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} g(x)$$

۲. تابع زیر مفروض است:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{۲}\lfloor x\rfloor\right)$$

اولاً دورهٔ تناوب آن را تعیین کنید و نمودار آن را در یک دورهٔ تناوب رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید که حدهای یکطرفی (چپ و راست) $\lim_{x\to ۱^{\pm}} f(x)$ هر دو موجودند، ولی $\lim_{x\to ۱} f(x)$ موجود نیست (با روش ε و δ]با استفاده از تعریف حد[).

۳. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ چنان تعریف شده است که به‌ازای هر x و y از $\mathbb{R}$ رابطهٔ زیر برقرار است.

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

اگر $f(۰)\neq ۰$ و $f'(۰)$ موجود و متناهی]مخالف بینهایت[باشد، ثابت کنید f در هر نقطه دارای مشتق است.

۴. تعیین کنید بسط $(a+b+c)^{۹۹}$ در حالت کلی چند جمله می‌تواند داشته باشد.

۵. اگر داشته باشیم

$$S_n=\frac{۵}{۹}\times\frac{۱۴}{۲۰}\times\frac{۲۷}{۳۵}\times\cdots\times\frac{۲n^۲-n-۱}{۲n^۲+n-۱}$$

مطلوب است تعیین حد S_n، وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول سومین المپیاد ریاضی کشور

۶. دو خط D و D' به معادله‌های

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z-۱}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۲}{۴}=\frac{z-۱}{۳}$$

مفروضند. طول عمود مشترک این دو خط را محاسبه کنید.

۷. دو نقطهٔ ثابت B و C در صفحهٔ P مفروضند مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحهٔ P را به‌دست آورید به طوری که داشته باشیم $MB^۲+kMC^۲=a^۲$ (a و k دو عدد معلومند و $k>۰$).

۸. عمل دوتایی $\oplus$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x\oplus y=x+y-xy$$

که در آن اعمال سمت راست، جمع، تفریق و ضرب معمولی‌اند. اولاً ثابت کنید $\oplus$ در $\mathbb{R}$ شرکتپذیر است؛ ثانیاً عضو بی‌اثر در این عمل را تعیین کنید.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دومین دوره مسابقات ریاضی کشور (بعضی از استانها)

زمان برگزاری: ۱۳۶۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

الف) استان آذربایجان شرقی

۱. توابع f و g با ضابطه‌های

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۴+۳} \quad \text{و} \quad g(x)=\sqrt[۴]{-۲x+۱}$$

تعریف شده‌اند. دامنه تعریف تابع $(f\circ g)^{-۱}$ را به‌دست آورید.

۲. بین دو رابطهٔ زیر θ را حذف کنید و نشان دهید $x^۲+y^۲=۱$.

$$\begin{cases} ۲x=y\,\mathrm{tg}\theta+\sin\theta \\ ۲y=x\,\mathrm{cotg}\theta+\cos\theta \end{cases}$$

۳. دایرهٔ (C) و دو نقطهٔ A و B در خارج آن مفروضند. نقطهٔ M را روی محیط این دایره طوری انتخاب کنید که $MA^۲+MB^۲$ کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۴. اگر $A=ax+by$ بر $x-y$ بخشپذیر باشد ثابت کنید که $B=(a+b)(x+y)$ نیز بر $x-y$ بخشپذیر است ($a,b,x,y\in\mathbb{N}$ و $x>y$).

۵. اگر a، b، c، $a+b-c$، $a+c-b$ و $b+c-a$ همگی مثبت فرض شوند ثابت کنید که

$$abc\geqslant(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

۶. روی محور yها نقطه‌ای تعیین کنید که اگر از این نقطه دو قائم بر منحنی تابع $y=\frac{-۴}{x^۲}$ رسم کنیم بر هم عمود باشند.

۷. حاصل عبارت

$$P=\left(۱-\mathrm{tg}^۲\frac{a}{۲}\right)\left(۱-\mathrm{tg}^۲\frac{a}{۴}\right)\left(۱-\mathrm{tg}^۲\frac{a}{۸}\right)\cdots\left(۱-\mathrm{tg}^۲\frac{a}{۲^m}\right)$$

را حساب کرده و حد آن را وقتی که $m\to+\infty$ به‌دست آورید.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

۸. اگر U یک ایده‌آلِ حلقهٔ تعویضپذیر و یکدار R باشد و $۱ \in U$، اولاً ثابت کنید $U = R$ و ثانیاً اگر F یک میدان باشد با استفاده از قسمت قبل ثابت کنید ایده‌آلهای میدان F فقط $\{۰\}$ و F هستند.

۹. خط D به معادلهٔ $\frac{x}{۴} + \frac{y}{۳} = ۱$ محور xها را در A و محور yها را در B قطع می‌کند. معادلهٔ دایرهٔ محاطی خارجی مثلث OAB را که نظیر ضلع OA است پیدا کنید (O مبدأ محورهای مختصات است).

۱۰. صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروضند ($AB \not\perp P$). نقطهٔ M را روی صفحه چنان انتخاب کنید که مثلث MAB متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۱. با ترازوی نامتعادلی کالایی را توزین می‌کنند دفعهٔ اول در کفهٔ A یک کیلوگرم وزنه و در کفهٔ B آنقدر کالا قرار می‌دهند تا تعادل ترازو برقرار شود؛ دفعهٔ دوم عکس عمل فوق را انجام می‌دهند. معلوم کنید که در دوبار توزین مجموع کالای وزن شده بیشتر یا کمتر یا مساوی دو کیلوگرم است.

ب) استان چهارمحال و بختیاری

۱. معادلهٔ زیر را حل کنید. (x مجهول و $a \neq ۰$ فرض شود.)

$$۱ + a + a^۲ + \cdots + a^{x-۱} + a^x = (۱ + a)(۱ + a^۲)(۱ + a^۴)(۱ + a^۸)$$

۲. اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{a_۱} + \sqrt{a_۲}} + \frac{۱}{\sqrt{a_۲} + \sqrt{a_۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{a_{n-۱}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-۱}{\sqrt{a_۱} + \sqrt{a_n}}$$

۳. کثیرالجمله]چندجمله‌ای[$f(x)$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$f\big(f'(x)\big) = ۲۷x^۶ - ۲۷x^۴ + ۶x^۲ + ۲$$

۴. نمودار رابطهٔ

$$\frac{y}{|x|} + ۱ = |xy| + y|y|$$

را رسم کنید.

۵. معادلهٔ

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{۲}$$

را حل کنید.

۶. از رابطهٔ $\log_{\sqrt{۲}} a = ۹$ مقدار $\log_a ۱۶ + \log_a$ را حساب کنید.

۷. الف) اگر V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی و $V_۱$، $V_۲$، ... و V_n مستقل خطی باشند، ثابت کنید هر بردار این فضا را فقط به یک صورت می‌توان به صورت ترکیب خطی $V_۱$، $V_۲$، ... و V_n نوشت.

ب) اگر $(A, *)$ یک گروه باشد و برای هر دو عنصر a و b از آن داشته باشیم $(a * b)^۲ = a^۲ * b^۲$ ثابت کنید این گروه آبلی است.

دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است https://amoozz.ir/class/13

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

۸. دو دایره از مرکزهای یکدیگر می‌گذرند. از نقطهٔ K محل برخورد آنها خطی می‌گذرانیم که دایره‌ها را در M و N قطع کند و در این نقاط مماسهایی بر دایره‌ها رسم می‌کنیم. زاویهٔ بین این مماسها را تعیین کنید.

۹. اگر داشته باشیم

$$A = ۲^n \underbrace{\sqrt{۲ - \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \cdots + \sqrt{۲ + ۲\cos\alpha}}}}}_{n \text{ رادیکال}}$$

الف) A را بر حسب n و α حساب کنید.

ب) مطلوب است

$$\lim_{n\to\infty} ۲^{n+۱} \sin\frac{\alpha}{۲^{n+۱}}$$

۱۰. فاصلهٔ شهر A از شهر B، ۲۴۰ کیلومتر است. اتوبوسی با سرعت متوسط ۶۰ کیلومتر در ساعت از شهر A به طرف شهر B و همزمان با آن اتومبیلی با سرعت متوسط a کیلومتر در ساعت از شهر B به شهر A حرکت می‌کنند. اتومبیل بعد از ملاقات با اتوبوس نیم ساعت دیگر به راه خود ادامه داده و سپس به طرف شهر B بر می‌گردد. حساب کنید a را به شرطی که اتومبیل و اتوبوس با هم به شهر B برسند.

ج) استان خوزستان

۱. زاویهٔ قائمهٔ مفروضی طوری تغییر می‌کند که اضلاع زاویهٔ قائمه همواره بر دو دایرهٔ ثابت مماس هستند. مکان هندسی وسط خط واصل بین دو نقطهٔ تماس را به‌دست آورید.

۲. بر خط d به معادلات

$$\begin{cases} x + y + ۲z = ۱ \\ x - y + z = ۰ \end{cases}$$

صفحه‌ای بگذرانید که با صفحهٔ xOy زاویهٔ ۳۰° بسازد.

۳. تابع f به معادلهٔ

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ ۰ & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

مفروض است. مستقیماً و با استفاده از تعریف حد ثابت کنید f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

۴. ثابت کنید که هرگاه تابع f در $x = a$ مشتقپذیر باشد آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

۵. اگر $(S, +, \times)$ یک میدان باشد ثابت کنید $(S - \{e\}, \times)$ یک گروه جابجایی است (e عضو بی‌اثر S نسبت به عمل $+$ است).

۶. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۴^x - ۳^{x-\frac{۱}{۲}} = ۳^{x+\frac{۱}{۲}} - ۲^{۲x-۱}$$

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

۷. اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ثابت کنید که

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}$$

۸. تابع

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = (x+y, x-y)$$

مفروض است. ثابت کنید که f یک‌به‌یک و پوشاست.

۹. شخصی دارای a دوست است. به چند روش می‌تواند یک یا تعداد بیشتری از دوستان خود را به شام دعوت کند؟

۱۰. مطلوب است محاسبهٔ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(2i-1)x}{\cos^2 ix \cdot \cos^2(i-1)x}$$

د) استان باختران

جبر و آنالیز

۱. دامنه و برد توابع $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{1+\sin^2 x} \right\rfloor$ و $g(x) = \log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ را مشخص کنید.

۲. توابع $y_1 = \sqrt[3]{x+1}$ و $y_2 = \sqrt[3]{m^2 x - 1}$ مفروضند. m را به قسمی تعیین کنید که توابع معکوس آنها مجانب هم باشند.

۳. پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x-|x|}{[x]}$ را در $(1,2]$ بررسی کرده، نمودار آن را در فاصلهٔ $[-2,0)$ رسم کنید.

۴. به‌ازای چه مقدار از m نقطهٔ $A(1,1)$ مرکز تقارن تابع $y = \frac{x^2+x-1}{mx+n}$ خواهد بود؟

۵. اولاً ثابت کنید $y = x^3 - 6x^2 + 12x$ در $\mathbb{R}$ معکوسپذیر است. ثانیاً ضابطهٔ تابع معکوس آن را به‌دست آورید.

ریاضیات جدید

۶. رقم سمت راست عدد $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ را پیدا کنید.

۷. ثابت کنید

$$9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv 0 \pmod{73}$$

۸. ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant 2$،

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + \cdots + \operatorname{tg}(n-1)\alpha \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - n$$

۹. اگر R یک حلقه و $a \in R$ وارونپذیر باشد، ثابت کنید $a \neq 0$ و a مقسوم‌علیه صفر نیست.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است

@sampaadia amoozz.ir برای دسترسی به دوره های متنوع به وبسایت آموزشگاه ذهن زیبا مراجعه کنید

آزمون مرحله‌ی اول دومین المپیاد ریاضی کشور

هندسه

۱۰. چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک خط راست واقعند. بر این خط دو نقطهٔ P و Q را چنان تعیین کنید که هم نسبت به Aو B و هم نسبت به Cو D مزدوج توافقی باشند.

۱۱. نقاط Aو B در یک طرف خط Δ واقع هستند. نقطهٔ M را روی خط Δ چنان تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطهٔ Aو B مینیمم باشد.

۱۲. مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که وسط وترهایی از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$ باشند و از مبدأ مختصات بگذرند.

https://amoozz.ir/class/13 دوره جامع آموزش مرحله اول المپیاد ریاضی از طریق لینک مقابل قابل دسترسی است