# به نام خدا

**راهنمایی تمارین نامساوی‌ها** **تابستان ۹۵**

۱. $(1+x+y)^2 \le (1+yz+xz)(1+\frac{y}{z}+\frac{x}{z})$

۲. $\Sigma(a+\frac{1}{b})^2 \ge \frac{\left(\Sigma a+\Sigma\frac{1}{b}\right)^2}{3}$

۳. $\frac{ab^2+bc^2}{2} \ge b\sqrt{c}$

۴. از حالت تساوی کمک بگیرید $(a=b=\frac{1}{2})$ : $a \le a^2+\frac{1}{4}$ , $b \le b^2+\frac{1}{4}$ , $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$

۵. $\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}.c \le \sqrt{\frac{a+b}{2}}.c$

۶. $9=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ , $a^2+2\sqrt{a} \ge 3a$

۷. $2a^3+1 \ge 3a^2$

۸. $abc\,(a+b)\,(a+c)\,(b+c) = (ab+ac)\,(bc+ba)(ac+bc)$

۹. دو طرف را با $2\left(\Sigma\frac{x_i}{1+x_i}\right)$ جمع کنید و از حالت تساوی کمک بگیرید و از نامساوی حسابی هندسی استفاده کنید.

۱۰. $\Sigma\frac{a}{b^2+c} = \Sigma\frac{a^2}{ab^2+ac} \ge \frac{(\Sigma a)^2}{\Sigma ab+\Sigma ab^2}$

۱۱. $\Sigma\frac{a^4}{b^2+c^2} \ge \frac{(\Sigma a^2)^2}{2\Sigma a^2}$

۱۲. $(x+y+z)^2 \le (x^2+y+1)(1+y+z^2)$

۱۳. از این نامساوی استفاده کنید:

$$(\Sigma a^2+\Sigma ab)^2 \le (\Sigma(a+c)^2(b^2+ab+a^2))\left(\Sigma\frac{a^2}{b^2+ab+a^2}\right)$$

۱۴. تعریف کنید $y_i=\frac{1}{x_i}$

۱۵. $n = 2\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n}{(n-1)}$

۱۶. $a^n + b^n \ge ab\,(a^{n-2}+b^{n-2})$

۱۷. $ka^{k+1}+c^{k+1} \ge (k+1)\,a^k\,c$

۱۸. $\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+d)^2(c+e+f)}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{c+e+d}\right)$

۱۹. $LHS = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)$

۲۰. سعی کنید مقدار عبارت $\Sigma\left(2x^2+\frac{8}{x^4}\right)$ را بیابید.

۲۱. اگر $a, b, c$ حقیقی و مثبت باشند، داریم:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \ge \frac{8}{9}(\Sigma a)(\Sigma ab)$$

همچنین:

$$x^2+xy+y^2 = \frac{3(x+y)^2}{4}+\frac{(x-y)^2}{4}$$

۲۲. از نابرابری‌های زیر استفاده کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{abc} \ge \dfrac{3(a+b+c)}{(ab+ac+bc)^2} \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \ge \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc} \end{cases}$$

۲۳. $\Sigma a^4 - 4abcd \ge 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{b+d}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$

۲۴. $\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} \le \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{a^3b}}$

۲۵. از نامساوی شور کمک بگیرید.

۲۶. می‌دانیم $2abc+1 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ و سپس از نامساوی شور کمک بگیرید.

۲۷. $(ab+1)(\frac{a}{b}+1) \ge (a+1)^2$

۲۸. $(a+b^3+c^2)\left(a+\frac{1}{b}+1\right) \ge (a+b+c)^2$

۲۹. طبق T2 :

$$\frac{4(a-b)^2}{(a+b+c)} \le \frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}$$

۳۰. تعریف کنید $S_i = a_1+\cdots+a_i$ در نتیجه $S_{i+1}-S_i = a_{i+1}$

۳۱. نامساوی هم‌ارز است با : $p(y) = y^2+\left(\frac{1}{x}\right)y+\left(x^2+\frac{1}{x^2}-\sqrt{3}\right)$

۳۲. ثابت کنید $\prod(1+a) = \prod(1-a)$ و تعریف کنید:

$$\frac{1+d}{1-d}=t,\quad \frac{1+c}{1-c}=z,\quad \frac{1+a}{1-a}=x,\quad \frac{1+b}{1-b}=y$$

۳۳. اگر حکم برای $n$ درست باشد، برای اعداد کمتر از $n$ نیز درست است. برای اثبات حکم برای n = 2kاین‌گونه عمل کنید: $s_k \geq t_k \geq s_{k-1} \geq t_{k-1} \geq \cdots \geq s_1 \geq t_1$ . سپس به $s_i$ ها $+1$ و به $t_i$ ها $-1$ را نسبت دهید و از استقرا کمک بگیرید.

۳۵. از اتحاد لاگرانژ استفاده کنید:

$$\left(\sum {a_i}^{2n}\right)\left(\sum \frac{1}{{a_i}^{2n}}\right)=n^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{{a_i}^n}{{a_j}^n}-\frac{{a_j}^n}{{a_i}^n}\right)^2$$

۳۶. از اتحاد لاگرانژ استفاده کنید:

$$\sum {a_i}^3 \sum a_i=\left(\sum {a_i}^2\right)^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\sqrt{{a_i}^3 a_j}-\sqrt{{a_j}^3 a_i}\right)^2$$

۳۷. تعریف کنید : $a=\frac{xr}{y},\ b=\frac{yr}{z},\ c=\frac{zr}{x}$ که $r^3=abc$

۳۸. $\sum {a_i}^2({a_{i+1}}^2+1)\geq\left(\sum a_i\sqrt{a_i}\right)^2$ $\sum\frac{a_i}{{a_{i+1}}^2+1}$

۳۹. تعریف کنید $a>b>c,\ a-b=x,\ b-c=y,\ a-c=x+y$

۴۰.

$$\sqrt{\frac{xy}{(x+y)(y+z)}}=\sqrt{\frac{x}{x+z}\cdot\frac{y(x+z)}{(x+y)(y+z)}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y(x+z)}{(x+y)(y+z)}\right)$$

۴۱. از حالت $n=3$ سعی کنید اتحادی مشابه برای $n$ بدست آورید.

۴۲. دو حالت کنید. $\sum a_i\, a_{i+1}\geq n$ یا $\sum a_i\, a_{i+1}\leq n$

# به نام خدا

**تمارین نامساوی‌ها** **تابستان ۹۵**

**ساده :**

۱. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$\frac{1+yz+xz}{(1+x+y)^2}+\frac{1+xz+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+x+z)^2}\geq 1$$

۲. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $abc=1$ ثابت کنید:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 3(a+b+c+1)$$

۳. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $abc=1$ ثابت کنید:

$$a\left(b^2-\sqrt{b}\right)+b\left(c^2-\sqrt{c}\right)+c\left(a^2-\sqrt{a}\right)\geq 0$$

۴. $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $6\geq 9a^2+8ab+7b^2$ ثابت کنید:

$$7a+5b+12ab\leq 9$$

۵. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $a+b+c=1$ ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{1}{a+b}}+\sqrt{\frac{1}{b+c}}+\sqrt{\frac{1}{a+c}}\leq\frac{1}{\sqrt{2abc}}$$

۶. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $a+b+c=3$ ثابت کنید:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+ac+bc$$

۷. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ و $\sum_{cyc}\frac{1}{1+a^3}=2$ ثابت کنید:

$$\sum\frac{1-a}{1-a+a^2}\geq 0$$

۸. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $ab+ac+bc=3$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{abc}+\frac{4}{(a+b)(b+c)(a+c)}\geq\frac{3}{2}$$

۹. $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ و $x_1\times x_2\times\dots\times x_{n=1}$ ثابت کنید:

$$x_1+\dots+x_n\geq\frac{2}{1+x_1}+\dots+\frac{2}{1+x_n}$$

نامساوی $T_2$: نامساوی $T_2$ فرم دیگری از نامساوی کوشی شوارتز می‌باشد:

اگر $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ و $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$ آن‌گاه داریم:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1, \dots, a_n)^2}{b_1, \dots, b_n}$$

۱۰. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $a + b + c = 3$ ثابت کنید:

$$\frac{a}{b^2 + c} + \frac{b}{c^2 + a} + \frac{c}{a^2 + b} \geq \frac{9}{4}$$

۱۱. $a, b, c \in \mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$\frac{a^6}{b^2 + c^2} + \frac{b^6}{a^2 + c^2} + \frac{c^6}{a^2 + b^2} \geq \frac{abc(a + b + c)}{2}$$

**متوسط :**

۱۲. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ و $xy + xz + yz = x + y + z$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{x^2 + y + 1} + \frac{1}{y^2 + z + 1} + \frac{1}{z^2 + x + 1} \leq 1$$

۱۳. $a, b, c \in R^+$ ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{b^2 + ba + a^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + ac + a^2} \geq 1$$

۱۴. $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ و $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n=1}$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{x_1(x_1 + 1)} + \frac{1}{x_2(x_2 + 1)} + \dots + \frac{1}{x_n(x_n + 1)} \geq \frac{n}{2}$$

۱۵. $a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ و $a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n = 1$ و می‌دانیم $n \geq 3$ ثابت کنید:

$$(a_2 + 1)^2 (a_3 + 1)^3 \dots (a_n + 1)^n > n^n$$

۱۶. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $abc = 1$ ثابت کنید:

$$\frac{a + b}{a^7 + b^7 + c} + \frac{b + c}{b^7 + c^7 + a} + \frac{a + c}{a^7 + c^7 + b} \leq 2$$

۱۷. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ و $a_1^1 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} \leq 1$ ثابت کنید:

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + (n + 1)a_n^n < 3$$

۱۸. $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^+$ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{a+b+d}} + \sqrt[3]{\frac{def}{c+e+f}} < \sqrt[3]{(a+b+d)(c+e+f)}$$

۱۹. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq (a^2+b^2)^2$$

۲۰. همه‌ی اعداد حقیقی مانند $x, y, z$ را بیابید به گونه‌ای که:

$$x^2+y^2+z^2 \leq 6+\min\left\{x^2-\frac{8}{x^4}, y^2-\frac{8}{y^4}, z^2-\frac{8}{z^4}\right\}$$

۲۱. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$(x+y+z)^2(xy+yz+xz)^2 \leq 3(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)$$

۲۲. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $a+b+c=3$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

۲۳. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ و $a+b+c+d=2$ ثابت کنید:

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd \geq 2(a-b)(c-d)$$

۲۴. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

۲۵. $a, b, c > 0$ ثابت کنید:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+ac+bc)$$



۲۶. $a, b, c \geq 0$ ثابت کنید:

$$2(ab+bc+ac) \leq a^2+b^2+c^2+2abc+1$$

۲۷. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ و $abcd=1$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{(d+1)^2} \geq 1$$

۲۸. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ و $abc \geq 6\sqrt{3}+10$ ثابت کنید:

$$\frac{b}{a+b^3+c^2}+\frac{c}{b+c^3+a^2}+\frac{a}{c+a^3+b^2} \leq \frac{1}{2}$$

۲۹. $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \leq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

۳۰. فرض کنید $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ و برای هر $1 \leq k \leq n$ می‌دانیم $a_1+\cdots+a_k \leq k$

ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n} \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

۳۱. $x,y \in \mathbb{R}$ و $x \neq 0$ ثابت کنید:

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x} \geq \sqrt{3}$$

۳۲. $|a|,|b|,|c|,|d| > 1$ و $a+b+c+d+abc+bcd+dca+abd=0$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d} < 0$$

۳۳. $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید $a_1,\dots,a_n$ عضو بعد مجموعه‌ی $\{1,-1\}$ وجود دارند به طوری که:

$$a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2 \geq (a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2$$

۳۴. $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}^+$ و برای هر $2 \leq k \leq n$ می‌دانیم : $a_k \geq a_1+\cdots+a_{k-1}$ ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}$$



۳۵. $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}^+$ و $\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2n}=1$ ثابت کنید:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^{2n}\right)-n^2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_j}{a_i}\right)^2 \geq n^2$$

۳۶. $a_1,\dots,a_n,k \in \mathbb{R}^+$ به طوری که:

1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=3k$

2) $a_1^2+\cdots+a_n^2=3k^2$

3) $a_1^3+\cdots+a_n^3>3k^3+k$

ثابت کنید دو تا از $a_i$ ها وجود دارند که اختلاف آنها از یک بزرگتر است.

**سخت :**

۳۷. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1} \le \frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}$$

۳۸. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ و $a_1+\cdots+a_n=1$ ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1} \ge \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)$$

۳۹. $a, b, c \in \mathbb{R}$ و متمایز می‌باشند. ثابت کنید:

$$\sum_{cyc}\frac{(b-c)^4}{(a-c)^2(a-b)^2} \ge \frac{33}{2}$$

۴۰. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

۴۱. $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ و $x_1x_2\dots x_n=1$ و $x_{n+1}=x_1$ ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i+x_ix_{i+1}} \ge 1$$

۴۲. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ و $a_1+\cdots+a_n=1$ و $a_{n+1}=a_1$ ثابت کنید:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)\left(\sum\frac{a_i}{a_{i+1}^2+a_{i+1}}\right) \ge \frac{n}{n+1}$$