به نام او

آزمون میان‌ترم

روز اول

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۱۴۰۱ | مدت زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

۱.همه‌ی توابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x,y,z\in\mathbb{R}^+$

$$f(x+f(y)+f(f(z)))=z+f(y+f(x))$$

۲. در مثلث ABC، نقاط متغیر D,E,F به ترتیب روی اضلاع BC,CA,AB قرار دارند به گونه ای که مثلث DFE با مثلث ABC با همین ترتیب متشابه باشد. دوایر محیطی BDF و CDE دایره محیطی ABC را برای بار دوم به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید دایره محیطی DPQ از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۳. تعدادی زیرمجموعه سه عضوی از یک مجموعه ۱۰۰۰ عضوی داریم. می‌دانیم اجتماع هر ۵ تا از آن‌ها حداقل ۱۲ عضو دارد. بیشترین مقدار ممکن برای تعداد این زیرمجموعه‌ها را بیابید.

موفق باشید!

به نام او

آزمون میان‌ترم

روز دوم

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۱۴۰۱ | مدت زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

---

۴. $a_۱, a_۲, \dots$ دنباله‌ای از اعداد صحیح ناصفر است که برای هر $n \in \mathbb{N}$، اگر $a_n = ۲^\alpha k$ که k عددی صحیح و فرد و α عددی صحیح و نامنفی باشد، در این صورت: $a_{n+۱} = ۲^\alpha - k$. ثابت کنید اگر این دنباله متناوب باشد، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $a_{n+۲} = a_n$. (دنباله $a_۱, a_۲, \dots$ متناوب است هرگاه عدد طبیعی d موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم: $a_{n+d} = a_n$)

۵. علی ۱۰۰ کارت با اعداد $۱, ۲, ..., ۱۰۰$ دارد. علی و امین باهم یک بازی انجام می‌دهند. در هر مرحله، ابتدا علی یک کارت را بین کارت‌های باقیمانده انتخاب می‌کند و امین تصمیم می‌گیرد آن کارت را برای خودش بردارد یا آن را دور بیندازد. در صورتی که آن را بردارد، کارتی را که در مرحله بعد علی انتخاب می‌کند، نمی‌تواند برای خودش بردارد و باید آن را دور بیندازد. این کار تا زمانی تکرار می‌شود که کارتی برای علی باقی نماند.
امین می‌خواهد طوری کارت‌ها را بردارد که مجموع اعداد کارت‌هایش بیشینه شود و علی می‌خواهد طوری کارت‌ها را انتخاب کند که مجموع اعداد کارت‌های امین کمینه شود. حداکثر مقدار k را بیابید که امین می‌تواند طوری باز کند که مطمئن باشد مجموع اعداد کارت‌هایش حداقل برابر k خواهد شد.

۶. ثابت کنید میان هر ۹ عدد حقیقی و متمایز، ۴ عدد متمایز a, b, c, d وجود دارند که

$$(ac+bd)^۲ \geq \frac{۹}{۱۰}(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)$$

موفق باشید!