به نام خدا

گراف

سوالات:

ساده:

۱. مرتضی تورنمنتی $n \geq 3$ راسی داره که هر راسش لااقل یک یال خروجی دارد.ثابت کنیدگراف مرتضی مثلث جهتدار داره. (تی اس تی آرژانتین ۲۰۱۱)

۲. جمعی n نفره از دکتر و مهندس داریم به طوری که هر کس d دکتر و d مهندس میشناسد. تمام ۲تایی های (n,d) را بیابید. (دختران! چین ۲۰۱۴)

۳. ثابت کنید هر گراف، زیر گرافی دو بخشی با حداقل نصف یالهای گراف اولیه دارد.

۴. ثابت کنید که هر گراف با میانگین درجات d زیرگرافی با میانگین درجات $\frac{d}{2}$دارد.

۵. در طرفین یک رودخانه تعدادی شهر وجود دارد. از هر شهر دقیقاً به k شهر در طرف دیگر خط قایقرانی وجود دارد (خطوط قایقرانی دو طرفه هستند). میدانیم در هر شهری که باشیم، می توانیم با تعدادی سفر به هر شهر دیگری سفر کنیم. ثابت کنید اگر یکی از خطوط قایقرانی متوقف شده و کار نکند، باز هم این خاصیت (امکان سفر از هر شهر به هر شهر دیگر- همبندی) برقرار است. (مرحله دو ایران)

۶. در یک مدرسه b معلم و c دانش آموز حضور دارند. هر معلم دقیقا با k دانش آموز کلاس دارد و هر دو دانش آموز دقیقا h معلم مشترک دارند نشان دهید: $\frac{b}{h}=\frac{c(c-1)}{k(k-1)}$

۷. n نفر در یک شرکت کار میکنند($n > 3$). هر کسی حداقل ۱ نفر و حداکثر n-۲ نفر می‌شناسد ثابت کنید میشود ۴ نفر از آن‌ها را دور میز دایره‌ای نشاند که هرکسی دقیقا ۱ نفر از مجاوراشو بشناسه. (Kürschák ! ۲۰۱۴)

۸. n تا آبنبات داریم که در کنار هم قرار دارند. در هر مرحله یک دسته از آبنباتها را دو دسته کرده و به اندازهی ضرب دو دسته سکه به مرتضی میدیم. ثابت کنید در انتها میزان سکه داده شده ربطی به ترتیب و چگونگی اعمال ما ندارد .

۹. کشوری ۱۵ شهر دارد، از هر شهر به حداقل ۷ شهر جاده مستقیم داریم، ثابت کنید میتوان از هر شهری به هر شهری رفت. (محافل)

۱۰. ثابت کنید برای هر n، گرافی ۲n راسی داریم که دنباله درجاتش $1,1,2,2,\dots,n,n$ هست.

۱۱. برای n بزرگتر از دو ثابت کنید تعداد گراف‌های همبند n راسی از تعداد گرفهای ناهمبند n راسی بیشتر است.

متوسط:

۱. n دکتر و m مهندس داریم در بین هر ۴ نفر که دوتاشون دکتر دوتاشون مهندس هستند لااقل یک مهندس و یک دکتر هم دیگر را نمی‌شناسند (شناختن دو طرف است). ثابت کنید تعداد آشنایی بین دکتر و مهندس ها کمتر از $m+\frac{n(n-1)}{2}$ است. (دختران! چین ۲۰۱۳)

۲. در یک مهمانی n نفر حضور دارند. هر یک از این افراد با k نفر از بقیه‌ی مهمان‌ها دست می‌دهد (k یک عدد ثابت بین ۱ و n−۱ است). می‌دانیم که لااقل $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ نفر وجود دارند که دوبه‌دو با هم دست داده‌اند. ثابت کنید که در این مهمانی هر دو نفری با هم دست داده‌اند. (المپیاد کامپیوتر! ۱۳۷۴)

۳. جمعی $2n+1$ نفره داریم که هر n نفر حداقل ۱ دوست مشترک (که در بین خودشون نیست) دارند. ثابت کنید ۱ نفر وجود دارد که با همه دوست است.

۴. ۲۰ شطرنج باز ۱۴ بازی انجام داده اند و هر کس حداقل ۱ بازی کرده است. ثابت کنید حداقل ۶ بازی مستقل از هم انجام شده(یعنی هیچ ۲ بازی ای از آن ۶ تا، بازیکن مشترک نداشته!)

۵. دریک گراف با ۱۹۹۳ رأس، درجه‌ی هر رأس حداقل ۹۳ است. ثابت کنید اگر بین دو رأس مسیری وجود داشته باشد، آنگاه فاصله‌ی کوتاهترین مسیر بین آن دو از ۶۲ بیشتر نیست.

۶. در یک کشور، ۱۳۹۲ شهر وجود دارد و بین هر دو شهر جاده ایست که آن را یکی از ۱۰ شرکت بزرگ کشور ساخته‌اند. ثابت کنید دوری شامل فرد جاده وجود دارد که تمام جاده‌هایش را یک شرکت تولید کرده است.

۷. در بین ۴۶ نفر، تعدادی گروههای سه نفری تشکیل شده، به طوری که هیچ دو گروهی ۲ عضو مشترک ندارند. ثابت کنید می توان ۱۰ نفر انتخاب کرد که هیچ سه تایی از آنها عضو یک گروه نباشند.

۸. در یک گراف درخت، به هر رأس، مجموع فواصل آن تا بقیه ی رئوس را نسبت می دهیم. رئوسی که بیشترین عدد رویشان نوشته شده باشد را شاه (بعضیام مرتضی میگن) می‌نامیم. ثابت کنید یا دقیقاً یک شاه داریم، یا دقیقاً دو شاه که با هم مجاورند. (فاصله: کمترین تعداد یالهای مسیر بین دو رأس)

۹. در یک دانشگاه ۱۰۰۰۱ دانشجو تحصیل می‌کنند. در این دانشگاه تعدادی کلوپ و k گروه تشکیل شده است. هر کلوپ از چند دانشجو و هر گروه از چند کلوپ تشکیل شده است. یک دانشجو ممکن است در چند کلوپ عضو باشد و یک کلوپ ممکن است در چند گروه آماده باشد. هر دو دانشجو دقیقا در یک کلوپ با هم اشتراک دارند ، برای هر دانشجو و هر گروه دانشجو دقیقا عضو یکی از کلوپ‌های این گروه

است و هر کلوپ تعداد فردی عضو دارد. در ضمن اگر یک کلوپ ۲m + ۱ عضو داشته باشد (m>۰) این کلوپ در m گروه قرار دارد. کلی مقادیر ممکن k را بیابید (پیشنهادی جهانی ۲۰۰۴)

۱۰. فرض کنید X مجموعه ای n عضوی و $A_1, A_2, \ldots, A_m$ زیر مجموعه‌هایی از X باشند به طوری که هر دوتا حداکثر یک عضو مشترک داشته باشند و هر عضو X متعلق به حداقل k تا از آنها باشد. ثابت کنید بین A_iها، k مجموعه یافت می‌شود که تعداد اعضای یکسانی داشته باشند.

۱۱. دستگاهی داریم که یک گراف را مد نظر گرفته است. میخواهیم گراف را پیدا کنیم. در هر مرحله می-توانیم به دستگاه فرد راس بدهیم و دستگاه در پاسخ به ما، رئوسی را که در زیر گراف القایی آن راس‌ها، درجه شان فرد میشده را به ما می‌گوید.

الف) ثابت کنید نمی‌توان گراف را پیدا کرد.

ب) ثابت کنید اگر بدانیم گراف ناهمبند است، می‌توان آن را یافت.

۱۲. ثابت کنید در یک تورنمنت قویا همبند دور جهتدار به هر طولی وجود دارد.(تورنمنت گراف کاملی است که جهتدار شده و تورنمنت قویا همبند تورنمنتی است که از هر یال آن به هر یال دیگه مسیر جهتدار وجود دارد.)

۱۳. کشوری ۱۰۰ شهر دارد که برخی از آنها از طریق خط هوایی به هم متصل اند. می‌دانیم که می‌توان از هر شهر به بقیه شهر ها دسترسی داشت (هر چند که ممکن است چند جا میان راه توقف کرد). ثابت کنید می‌توان با حداکثر

الف) ۱۹۸ بار

ب) ۱۹۶ بار

پرواز کرد و از همه شهر ها دیدن کرد. (محافل)

۱۴. الف) قضیه اویلر: در هر گراف همبند مسطح تعداد ناحیه بعلاوه تعداد رئوس، با تعداد یال ها بعلاوه ۲ برابر است.(گرافی مسطح است که بتوان طوری آن را روی صفحه کشید بدون اینکه یال هایش یکدیگر را(بجز در انتهایشان) قطع نکنند)

ب) ثابت کنید در هر گراف مسطح، $E \leq 3V - 6$ (E تعداد یال ها و V تعداد راس هاست)

ج) ثابت کنید در هر گراف مسطح، $2E \geq 3F$

۱۵. طول هر مسیر ساده را که دو راس درختی را به هم وصل میکند فاصله میان این دو راس می نامیم. مجموع فاصله های میان هر راس با بقیه راس های گراف را دوری این راس می نامیم. ثابت کنید تعداد راسهای درختی که دو رأس دارد که اختلاف دوری آنها برابر یک است، عددی فرد است. (محافل)

۱۶. از یک $۲k + ۱$ ضلعی k قطر رسم شده است. ثابت کنید حداقل یکی از نواحی ایجاد شده درون چندضلعی ، ۴ ضلعی نیست.

۱۷. در کشوری همه جاده ها یکطرفه اند و میتوانید با ماشین از هر شهر به هر شهر دیگر بروید، به طوری که حداکثر از دو تا از جاده ها عبور کنید. یکی از جاده ها برای تعمیرات مسدود شده است، اما باز هم میتوان از هر شهر به بقیه شهر ها رفت. ثابت کنید در این وضعیت می توان این کار را طوری انجام داد که حداکثر از ۳ جاده عبور کرد. (محافل)

سخت:

۱. عدد زوج n را در نظر بگیرید. گرافی n راسی با $\frac{n^2}{4}$ یال داریم. یک جفت از رئوس را خوب مینامیم اگر همسایه مشترک داشته باشند. ثابت کنید حداقل $2 \times \binom{n/2}{2}$ جفت خوب داریم. (تی اس تی آمریکا ۲۰۱۴)

۲. ثابت کنید راس های هر گرافی را میتوان به ۲ دسته تقسیم کرد که با حذف یال های بین دو دسته، درجه هر راس زوج بشود. (برزیل ۲۰۱۲)

۳. در جمعی از معلم ها و شاگرد ها، هر دانش آموز شاگرد حداقل یک معلم است. ثابت کنید میتوان بیش از نیمی از مجموعه کل افراد را درون یک گروه انتخاب کرد به طوری که هر دانش آموز گروه، شاگرد تعداد فردی از معلم های گروه باشد.

۴. ۱۰ مجموعه ۳ عضوی داده شده است به طوری که اشتراک هر دو تا از آنها ناتهی است. بزرگترین n را بیابید که همواره عضوی متعلق به n تا از این مجموعه ها باشد.

۵. فرض کنید مجموعه های متمایز $S_1, S_2, \dots, S_n$ وجود داشته باشند که اجتماع هر دوتا از آنها حداکثر ۲۰۰۴ عضو داشته باشد و اجتماع هر ۳ تا از آنها برابر {۱,۲,...,۲۰۰۸} باشد. ثابت کنید $n < 33$. (صربستان ۲۰۰۹)

۶. کشوری ۱۶۰۰ نماینده دارد که ۱۶۰۰۰ کمیته ۸۰ نفر تشکیل داده اند. ثابت کنید دو کمیته وجود دارد که حداقل ۴ عضو مشترک دارند.

۷. به یک نفر در یک جمع میگوییم k- شناس، اگر یا حداقل k نفر را در آن جمع بشناسد یا حداقل k نفر از آن جمع او را بشناسند (شناختن رابطه لزوما ۲طرفه نیست). جمعی از آدم‌ها داریم که هر یک از آنها

$3k+1$-شناس اند. ثابت کنید میتوان این آدم ها را به دو دسته ناتهی افراز کرد به طوری که هر نفر در دسته ای که قرار دارد k-شناس باشد.

۸. گرافی داریم که روی هر یال آن یک عدد حقیقی نوشته شده است، به طوری که در هر دور زوج، جمع یال های فرد دور برابر با جمع یال های زوج دور میشود. ثابت کنید میتوان به هر راس گراف یک عدد حقیقی نسبت داد، به طوری که عدد هر یال برابر با جمع عدد رئوس ۲ سرش باشد. (انتخابی تیم ریاضی ایران)

۹. گراف کامل m راسی را در نظر بگیرید. میخواهیم اعداد ۱تا m را روی یال های آن بنویسیم به طوری که در هر مثلث دو عدد با هم برابر باشند و عدد سوم کوچکتر از دو عدد برابر نباشد

الف. نشان دهید اگر $m=2^n$ باشد این کار ممکن است.

ب. اگر $m=2^n+1$ باشد این کار ممکن نیست.

۱۰. t^2 مستطیل در صفحه داریم. ثابت کنید در بین $4t^2$ زاویه‌ی قائمهٔ موجود، حداقل $4t$زاویه ی متمایز از هم وجود دارد.

۱۱. در هر مرحله، دریک گراف کامل یک دور به طول ۴ را در صورت وجود انتخاب کرده و یکی از یالهای آن دور را از گراف حذف میکنیم. با این کار حداکثر چند یال از گراف را میتوانیم حذف کنیم؟

۱۲. در گراف G میانگین درجات برابر d است.. ثابت کنید به ازای هر k ، زیرگرافی از این گراف با حداقل $\frac{kn}{d+1}$ راس وجود دارد که خود آن زیرگراف، شامل هیچ زیرگراف کامل ۱ + k راسی نباشد.

۱۳. یال های یک گراف کامل n رأسی را با ۲ − n رنگ،رنگ کرده ایم ثابت کنید مثلثی از رئوس گراف وجود داردکه هر سه یال بین آنها ناهمرنگ هستند.

راهنمایی ها:

ساده:

۱. ثابت کنید گراف دور دارد و هر دور بزرگتر از ۳ شامل دور کوچکتری است

۲. تعداد دکترها با مهندس‌ها یکسان است پس جواب n های زوج که $\frac{n}{2} > d$ و $\frac{dn}{2}$ زوج است (چرا؟)

۳. استقرا روی راس ها.

۴. هر بار رأس با درجه‌ی کمتر از d را حذف کرده و ثابت کنید میانگین درجات کاهش نمی‌یابد و در نهایت نتیجه بگیرید که این الگوریتم با خره متوقف میشود.

۵. تعداد یالهای خروجی از دو طرف را در نظر بگیرید و از دو طرف بشمارید.

۶. گراف دو بخشی تشکیل دهید که یک بخش معلما و یک بخش دانش آموزا است.

تعداد مسیر های به طول ۳ که راس وسط آن معلم است را دوگونه شماری کنید.

۷. راس درجه ماکسیمم را در نظر بگیرید.

۸. یک گراف کامل n رأسی در نظر بگیرید. انگار در هر مرحله رئوس یک دسته را دو قسمت کرده و یالهای بینشان را پاک می‌کنیم.

۹. فرض کنید همبند نباشد، آنگاه به تناقض برسید.

۱۰. استقرا از n به n + ۲ بزنید.

حالت n رو در نظر می گیریم ۴ تا راس اضافه می کنیم ۲ تا از ۴ راس را به بقیه راس ها وصل می کنیم.

۱۱. مکمل یک گراف ناهمبند، همبند است

متوسط:

۱. x_i تعداد آشنایان دکتر i (در بین مهندس) هاست

$$\binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_n}{2} \le \binom{n}{2}$$

و از کوششی استفاده کنید.

۲. یال های بین بزرگ ترین خوشه و بقیه را دوگونه شماری کنید.

۳. گراف کامل n + ۱ راسی داریم.

۴. تعداد مولفه های همبندی را بشمرید.

۵. کوتاهترین مسیر بین دو راس دلخواه را در نظر بگیرید. رئوسی که بیرون از این مسیر هستند حداکثر به سه تا از رئوس در این مسیر یال دارند.

۶. زیر گرافی شامل یالهای مربوط به یک شرکت خاص را در نظر میگیریم. با فرض خلف این زیرگراف دو بخشی بوده و در نتیجه می توان آن را با دو رنگ، رنگ نمود. پس در کل گراف را میتوان با ۱۰۲۴ رنگ رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند. اکنون توجه کنید که گراف اصلی ما یک گراف کامل ۱۳۹۲ رأسی بوده و این موضوع امکان ندارد.

۷. بیشترین تعداد افراد ممکن را انتخاب کنید که هیچ سهتایی از آنها درون یک گروه نباشند.

۸. از یک شاه به سمت شاه دیگر حرکت کنید و عدد نوشته شده روی رئوس را بررسی کنید.

۹. $k = 5000$

کلوپ $C_i, 2m_i + 1$ عضو دارد.

ثابت کنید $\sum_{i=1}^{r} \binom{2m_i+1}{2} = \binom{n}{2}$

۱۰. گراف دو بخشی اعضا و مجموعه ها را تشکیل دهید.

یال های بین اعضا بزرگترین مجموعه و بقیه مجموعه ها را دوگونه شماری کنید.

۱۱. الف) به یک گراف و مکملش دقت کنید

ب) ثابت کنید میتوان مولفه های همبندی را پیدا کرد و پس از آن تمامی یال ها را یافت.

۱۲. روی طول دور استقرا بزنید

۱۳. درخت فراگیر آن گراف را در نظر بگیرید

۱۴. برای قسمت الف روی یال ها استقرا بزنید. (پایه برای درخت) بقیه قسمت ها با استفاده از قضیه اویلر بررسی شود.

۱۵. مسیر بین آن دو راس را در نظر بگیرید. تفاضل فاصله هر راس با این ۲ راس را به آن مسیر ربط بدهید.

۱۶. قضیه اویلر

۱۷. فرض کنید از شهر x نتوان با حداکثر ۲ جاده به شهر y رفت. پس اگر در گراف اولیه مسیر به طول حداکثر دوی بین آن دو را در نظر بگیریم یکی از این یال ها مسدود شده است. حال مسیری که از x به y وجود دارد را در نظر بگیرید. ثابت کنید طول آن حداکثر ۳ است.

سخت:

۱. فرض کنید گراف مسئله G است. گراف n راسی H را از روی G به این صورت بسازید: راس u به راس v یال دارد اگر در گراف g همسایه مشترک نداشته باشند. کرانی برای جمع تعداد یال های G و H بزنید.

۲. از بخشی از گراف مکمل بگیرید.

۳. همه ی حالت ها را جمع بزنید و میانگین بگیرید!

۴. وضعیت عضو های یکی از مجموعه ها را با بقیه مقایسه کنید.

۵. ثابت کنید: $4\binom{n}{2} \leq 2008\binom{2}{2}$

۶. به این نکته توجه کنید که برای $x_1 + \cdots + x_n = k$، $\binom{x_1}{m} + \binom{x_2}{m} + \cdots + \binom{x_n}{m}$ زمانی ماکسیمم میشود که x_i ها میانگین باشند. برای x_i های طبیعی بعضی ها $\left[\frac{k}{n}\right]$ و باقی سقف $\frac{k}{n}$

۷. وقتی یک گراف خود مکمل است، یعنی هر راس آن به یک راس در مکملش متناظر میشود. یعنی یک جایگشت از این رئوس متناظر بدست می آید. با استفاده از گراف جایگشت مسئله را بررسی کنید.

۸. سوال چالش برانگیزیست. به خودتان میسپاریمش!!

۹. در هر مولفه هبندی رئوس یک دور فرد را در صورت وجود مقدار دهی کنید. این مقدار دهی یکتاست. با استفاده از این مقدار دهی رئوس کل گراف را مقدار دهی کنید

۱۰. یک گراف دو بخشی تشکیل دهید که رئوس آن زوایای متمایز هستند، حال به ازای هر مستطیل، بین زوایای متناظرش یال بکشید.

۱۱. گراف با این عمل همواره همبند میماند. حال روی زوجیت تعداد یالهای دورها درون گراف کار کنید.

۱۲. ابتدا زیرمجموعه های زیر از رئوس گراف را در نظر بگیرید:

یک جایگشت دلخواه از ریئوس گراف را در نظر گرفته و با شروع از ابتدای آن به طور حریصانه هر راسی را که میتوانید درون مجموعه ی از رئوس قرار دهید به شرطی که شرط "وجود نداشتن گراف کامل k+۱ راسی" در بین اعضای آن مجموعه برقرار باشد.. حال این کار را برای هرجایگشتی تکرار کنید.

حال میانگین تعداد اعضای مجموعه های مستقلی را که در با ساختید را به دست آورید. این میانگین از کران سوال بزرگتر است!

۱۳. بزرگترین مولفه ی همبندی تکرنگ در گراف را در نظر بگیرید.