بنام خدا

جزوه ریاضی ۲

(یازدهم تجربی)

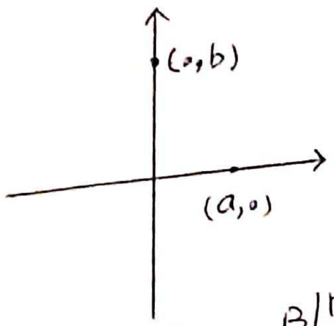
تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

فصل ۱: هندسه تحلیلی و جبر خطی:



نکته ۱: هر نقطه روی محور طول‌ها باشد عرض آن صفر است و هر نقطه روی محور عرض‌ها باشد طول آن صفر است.

مثال) نقطه $A\left|\begin{matrix}2\alpha-1\\3\alpha+1\end{matrix}\right.$ بر روی محور yها و نقطه $B\left|\begin{matrix}2\beta-1\\\beta+2\end{matrix}\right.$ بر روی محور xها است. نقطه $M(\alpha,\beta)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

$M\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\-2\end{matrix}\right.$ ربع چهارم

$y_B=0 \Rightarrow \beta+2=0 \Rightarrow \beta=-2$

$x_A=0 \Rightarrow 2\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$

نکته ۲: فرم کلی معادله خط بصورت $y=ax+b$ است که دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) ضریب x یعنی a را شیب خط می‌نامند. اگر $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ دو نقطه از خط باشند شیب خط یعنی m از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\text{شیب} = m = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$

مثال: خط d از دو نقطه $A\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right.$ می‌گذرد. شیب این خط چقدر است؟

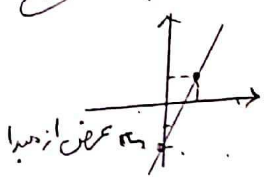
$$m=\frac{8-2}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2$$

۲) b را عرض از مبدا خط می‌نامند یعنی b عرض نقطه‌ای است که خط در آن نقطه محور عرض‌ها را قطع می‌کند پس خط همواره از نقطه $\left|\begin{matrix}0\\b\end{matrix}\right.$ می‌گذرد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۳ و عرض از مبدا آن (۲-) باشد. این خط را رسم کنید.

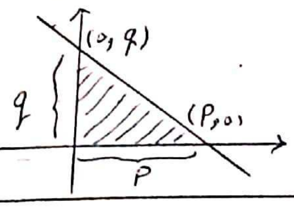
$a=3$ $\quad y=ax+b$

$b=-2$ $\quad \Rightarrow y=3x-2$



۳) اگر در معادله خط $y=ax+b$ مقدار x را صفر بگیریم y بدست آمده را عرض از مبدا نامیده و با q نشان می‌دهیم و اگر مقدار y را صفر بگیریم x بدست آمده را طول از مبدا نامیده و با p نشان می‌دهیم.

اگر طول از مبدا و عرض از مبدا خطی مشخص باشند معادله خط از فرمول $\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1}$ بدست می‌آید.



همچنین هر خط مایل با محورهای مختصات مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازد که مساحتش از فرمول $S=\frac{1}{2}|p\times q|$ بدست می‌آید.

نکته: خط $y=3x-6$ با محورهای مختصات مثلثی می‌سازد. عدد مساحت این مثلث چند برابر اختلاف طول از مبدا و عرض از مبدا است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

$x=0 \Rightarrow y=-6$ عرض از مبدا $p=2$ $p-q=2-(-6)=8$

$y=0 \Rightarrow x=2$ طول از مبدا $q=-6$ $S=\frac{1}{2}|2\times(-6)|=6$

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{اختلاف}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(6,-2)$ بگذرد و مجموع طول از مبدا و عرض از مبدا آن ۵ باشد.

$$\begin{cases}\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\\ p+q=5 \Rightarrow q=5-p\end{cases} \Rightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{5-p}=1 \Rightarrow \frac{6}{p}+\frac{-2}{5-p}=1 \Rightarrow \frac{30-6p-2p}{p(5-p)}=1$$

$$\Rightarrow 30-8p=5p-p^2 \Rightarrow p^2-13p+30=0$$

$$\Rightarrow (p-3)(p-10)=0 \Rightarrow \begin{cases}p=3 \Rightarrow q=2\\ p=10 \Rightarrow q=-5\end{cases}$$

پس دو خط با مشخصات خواسته شده وجود دارد.

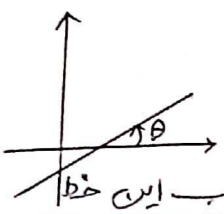
$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow 2x+3y=6$ $\frac{x}{10}+\frac{y}{-5}=1 \Rightarrow x-2y=10$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-2,3)$ بگذرد و عرض از مبدا آن سه برابر طول از مبدا آن باشد.

$$\begin{cases}\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\\ q=3p\end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{p}+\frac{3}{3p}=1 \Rightarrow \frac{-2}{p}+\frac{1}{p}=1 \Rightarrow \frac{-1}{p}=1 \Rightarrow \boxed{p=-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{q=-3} \Rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{-3}=1 \Rightarrow \boxed{3x+y=-3}$$

۴) اگر خط $y=ax+b$ در جهت مثبت مثلثاتی با محورها زاویه θ بسازد شیب خط از فرمول $m=\tan\theta$ بدست می‌آید.



مثال) خط d در جهت مثبت مثلثاتی با محور xها زاویه 60° ساخته است. شیب این خط

چقدر است؟ $m = tg\,60^\circ = \sqrt{3}$

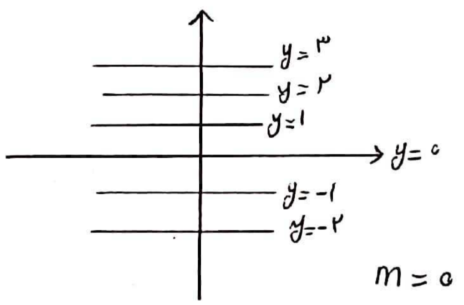
۵) اگر معادله خط بصورت $ax+by=c$ باشد شیب خط از فرمول زیر بدست می آید:

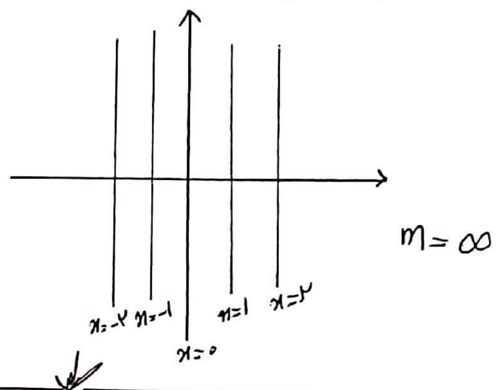
$$\boxed{m = -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} = -\frac{a}{b}}$$

$$3x - 4y = 12 \qquad m = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

همچنین هر خط که موازی محور xها باشد (خطهای افقی) معادله آنها بصورت $y = \beta$ است که در آن β محل برخورد خط با محور yها است شیب این نوع خطوط برابر صفر است.

همچنین هر خط که موازی محور yها باشد (خطهای قائم) معادله آنها بصورت $x = \alpha$ است که در آن α محل برخورد خط با محور xها است شیب این نوع خطوط برابر ∞ (تعریف نشده) است.





نکته ۳: معادله خطی که از نقطه $A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ گذشته و شیب آن برابر m باشد از فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ بگذرد و شیب آن (-3) باشد.

$m = -3$

$A\begin{vmatrix}1 \to x_1\\2 \to y_1\end{vmatrix}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -3(x - 1)$$

$$y = -3x + 5$$

نکته ۴: معادله خطی که از دو نقطه $A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_2\\y_2\end{vmatrix}$ می‌گذرد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

مثال ۱: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(1,4)$ و $B(2,-1)$ کدام است؟

الف) $y=x+3$ ب) $y=5x-1$ ج) $y=-5x+9$ د) $y=9x-5$

$A\begin{vmatrix}1 \rightsquigarrow x_1\\4 \rightsquigarrow y_1\end{vmatrix}$

$B\begin{vmatrix}2 \rightsquigarrow x_2\\-1 \rightsquigarrow y_2\end{vmatrix}$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-4=\frac{-1-4}{2-1}(x-1)\Rightarrow y-4=-5(x-1)$$

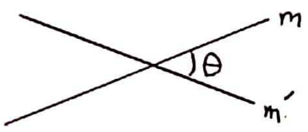
$$\Rightarrow \boxed{y=-5x+9}$$

مثال ۲: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A\begin{vmatrix}2\\6\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}4\\2\end{vmatrix}$ بگذرد.

جواب: $y=-2x+10$

نکته ۵: فرمول زاویه بین دو خط:

اگر شیب دو خط برابر m و m' باشد تانژانت زاویه بین آنها از فرمول زیر بدست می‌آید:



$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

یادآوری: $|x|=a\Rightarrow x=\pm a$

مثال ۳: دو خط $y=1-2x$ و $9x-3y=16$ چه زاویه‌ای باهم می‌سازند؟

الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°

$y=1-2x\Rightarrow m=-2$

$9x-3y=16\Rightarrow m'=-\frac{9}{-3}=3$

$$\tan\theta=\left|\frac{-2-3}{1+(-2)(3)}\right|=\frac{5}{5}=1\Rightarrow \theta=45^\circ$$

مثال ۲: معادله خطوطی را بنویسید که از نقطه $A(-2,5)$ بگذرد و با خط $3x-5y+7=0$ زاویه 45° بسازد.

$3x-5y+7=0 \Rightarrow$ شیب $= m' = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$

$\tan\theta = \left| \frac{m-\frac{3}{5}}{1+m\times\frac{3}{5}} \right| \Rightarrow \tan 45^\circ = \left| \frac{\frac{5m-3}{5}}{\frac{5+3m}{5}} \right| \Rightarrow \left| \frac{5m-3}{5+3m} \right| = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5m-3}{5+3m} = 1 \Rightarrow \boxed{m=4} \Rightarrow y-5 = 4(x-(-2)) \Rightarrow \boxed{y = 4x+13} \\ \frac{5m-3}{5+3m} = -1 \Rightarrow \boxed{m=-\frac{1}{4}} \Rightarrow y-5 = -\frac{1}{4}(x-(-2)) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}} \end{cases}$

مثال ۳: معادله خطی را بنویسید که محور xها را در نقطه ای به طول ۲ قطع کند و با خط $y+2x=1$ زاویه 45° بسازد.

$A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$ $\quad m'=-2$

$m=3 \Rightarrow y = 3x-6$

$m=-\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

مثال ۴: دو نقطه $A(5,0)$ و $B(1,2)$ مفروضند. معادله خطوطی را بنویسید که از نقطه B گذشته و با خط AB زاویه 45° بسازد.

$m'_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{2-0}{1-5} = -\frac{1}{2}$

$\tan\theta = \left| \frac{m-(-\frac{1}{2})}{1+m(-\frac{1}{2})} \right| \Rightarrow \tan 45^\circ = \left| \frac{\frac{2m+1}{2}}{\frac{2-m}{2}} \right| \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2-m} \right| = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2m+1}{2-m} = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3} \Rightarrow y-2 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}} \\ \frac{2m+1}{2-m} = -1 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow y-2 = -3(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -3x+5} \end{cases}$

نکته ۶: وضع دو خط نسبت بهم:

دو خط نسبت بهم سه حالت دارند:

۱) موازیند $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$

۲) عمودند $\Leftrightarrow$ $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ یا $m_1 . m_2 = -1$

۳) متقاطع اند $\Leftrightarrow$ $m_1 \neq m_2$

مثال ۱: به ازای چه مقداری از a دو خط زیر بر هم عمودند:

$D_1:\ ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$ $\qquad$ $D_2:\ 3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$

$$m_1 = -\frac{a}{(a-1)} = \frac{-a}{a-1}$$

$$m_2 = -\frac{3a}{-(3a+1)} = \frac{3a}{3a+1}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{-a}{a-1} \times \frac{3a}{3a+1} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-3a^2}{3a^2 - 2a - 1} = -1 \Rightarrow -2a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

مثال ۲: از نقطه $(1, 4)$ خطی موازی $3y - 2x = 1$ و خطی عمود بر $2y + x = 1$ رسم می‌کنیم عرض از مبدا دو خط جدید چقدر اختلاف دارند؟

۱) $\frac{4}{3}$ $\qquad$ ۲) $\frac{2}{3}$ $\qquad$ ۳) $\frac{10}{3}$ $\qquad$ ۴) $\frac{14}{3}$

$$3y - 2x = 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \Longrightarrow y - 4 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \Rightarrow q_1 = \frac{10}{3}$$

$$2y + x = 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow m' = 2 \Rightarrow y - 4 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x + 2 \Rightarrow q_2 = 2$$

$$q_1 - q_2 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$$

مثال ۳: مقدار a را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم موازی باشند.

$D_1:\ (a-1)x + ay - 1 = 0$ $\qquad$ $D_2:\ 4ax + (a-1)y + 2 = 0$

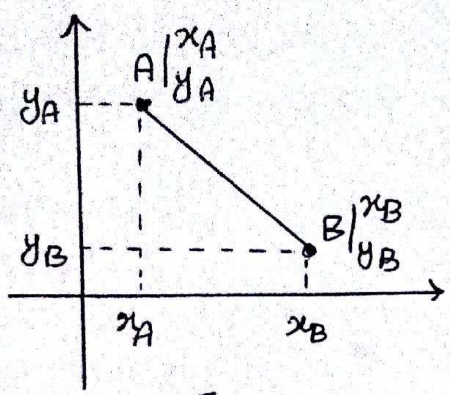
$$m_1 = -\frac{a-1}{a} = \frac{-a+1}{a}$$

$$m_2 = -\frac{4a}{a-1} = \frac{-4a}{a-1}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{-a+1}{a} = \frac{-4a}{a-1}$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 4a^2 \Rightarrow a - 1 = \pm 2a$$

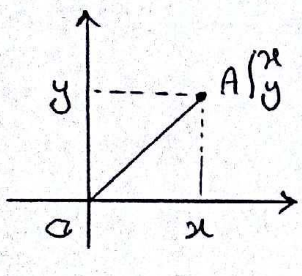
$$\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 2a \Rightarrow \boxed{a = -1} \\ a - 1 = -2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}} \end{cases}$$



فرمول طول پاره خط (فاصله دو نقطه):

اگر $A\left|\begin{smallmatrix}x_A\\y_A\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}x_B\\y_B\end{smallmatrix}\right.$ دو نقطه در صفحه محورهای مختصات باشند فاصله آنها از هم یعنی طول پاره خط AB از فرمول زیر بدست می آید:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(\text{اختلاف طولها})^2+(\text{اختلاف عرضها})^2}$$



فاصله نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.$ از مبدا مختصات از فرمول زیر بدست می آید:

$$OA=\sqrt{x^2+y^2}$$

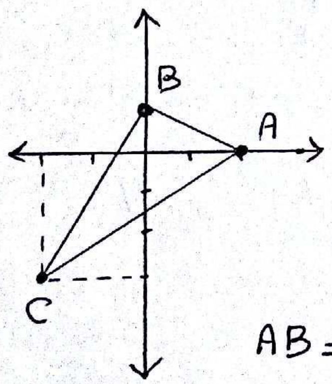
مثال ۱: نقاط $A\left|\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.$ و $C\left|\begin{smallmatrix}-2\\-3\end{smallmatrix}\right.$ سه رأس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند

الف) مثلث را رسم کنید

ب) محیط مثلث را بیابید.

ج) نوع مثلث را مشخص کنید

د) مساحت مثلث را بیابید.



$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$AC=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$BC=\sqrt{(-2-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\text{محیط مثلث}=\sqrt{5}+5+2\sqrt{5}=5+3\sqrt{5}$$

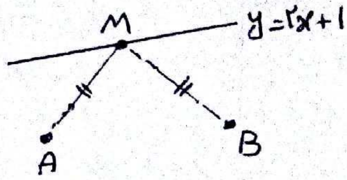
اضلاع مثلث مساوی نیستند، رابطه فیثاغورس را بررسی می کنیم

$$\begin{cases}5^2=25\\(\sqrt{5})^2+(\sqrt{20})^2=5+20=25\end{cases}\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow$$ مثلث قائم الزاویه است.

$$S=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}{2}=5$$

مثال ۲: نقطه ای روی خط $y=2x+1$ پیدا کنید که از دو نقطه $A(3,0)$ و $B(-1,0)$ به یک فاصله باشد. (مسئله نقطه شناور)

حل: نقطه مورد نظر را M در نظر می گیریم: $M \in y=2x+1 \Rightarrow M\left|\begin{matrix}x\\2x+1\end{matrix}\right.$



$$AM=BM \Rightarrow \sqrt{(3-x)^2+(2x+1-0)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(2x+1-0)^2}$$

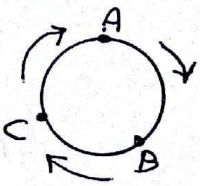
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (3-x)^2+(2x+1)^2=(-1-x)^2+(2x+1)^2 \Rightarrow (3-x)^2=(-1-x)^2$$

$$\Rightarrow 9-6x+x^2=1+2x+x^2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow M\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$$

فرمول مساحت مثلث از روی مختصات سه رأس آن:

اگر $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}x_C\\y_C\end{matrix}\right.$ مختصات سه راس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشند مساحت مثلث از فرمول زیر بدست می آید.

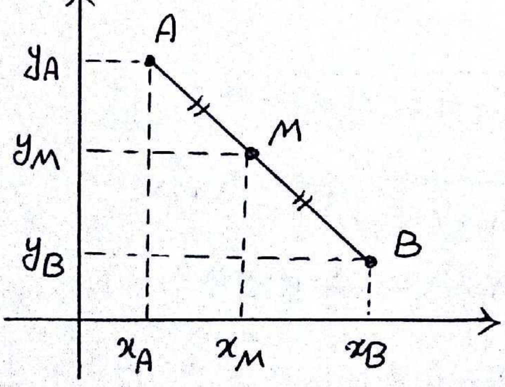
$$S=\frac{1}{2}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$



مثال: اگر $A\left|\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-6\\2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\right.$ مختصات سه راس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشند مساحت مثلث را حساب کنید

$$S=\frac{1}{2}\left|4(2-4)+(-6)(4-(-2))+4(-2-2)\right|=\frac{1}{2}\left|-60\right|=\frac{1}{2}\times 60=30$$

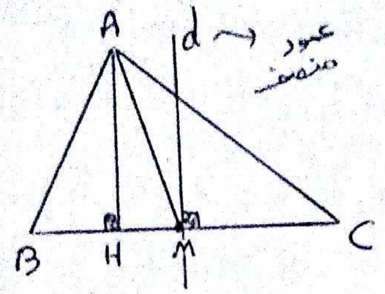
فرمول مختصات وسط پاره خط:



اگر $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ دو نقطه از صفحه محورهای مختصات باشند مختصات نقطه M وسط پاره خط AB از فرمول زیر بدست می آید:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

مثال ۱) اگر $A(-2,3)$ و $B(4,-4)$ و $C(-4,2)$ مختصات سه رأس مثلث $\widehat{ABC}$ باشند مطلوبست محاسبه:



الف) طول میانه AM

ب) معادله میانه AM

ج) معادله ارتفاع AH

د) معادله عمود منصف BC

حل الف)

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+(-4)}{2} = 0$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1 \Rightarrow M\Big|_{-1}^{0} \text{ وسط } BC$$

$$AM = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \Rightarrow \boxed{AM = 2\sqrt{5}}$$

حل ب)

$A\Big|_{3 \to y_1}^{-2 \to x_1}$ ، $M\Big|_{-1 \to y_2}^{0 \to x_2}$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{-1-3}{0-(-2)}(x-(-2)) \Rightarrow y - 3 = -2(x+2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2x - 1}$$ معادله میانه AM

حل ج) شیب BC را محاسبه می‌کنیم:

$B\Big|_{-4 \to y_1}^{4 \to x_1}$ ، $C\Big|_{2 \to y_2}^{-4 \to x_2}$

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-4)}{-4-4} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

AH بر BC عمود است پس شیب AH قرینه و معکوس شیب BC است.

$m_{AH} = \frac{4}{3}$ ، $A\Big|_{3}^{-2}$

$$AH: y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{4}{3}(x-(-2))$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{3}}$$ معادله AH

حل د) عمود منصف BC بر BC عمود است پس شیب آن قرینه و معکوس شیب BC است یعنی $m_d = \frac{4}{3}$ و از نقطه $M\Big|_{-1}^{0}$ می‌گذرد.

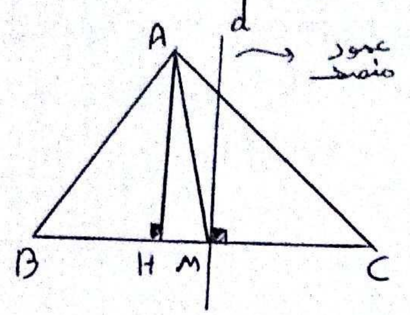
$m = \frac{4}{3}$

$$d: y - y_1 = m(x - x_1)$$

$M\Big|_{-1}^{0}$

$$y - (-1) = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}x - 1}$$ معادله عمود منصف

مثال ۲) نقاط $A\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-5\\-2\end{matrix}\right.$ مختصات سه رأس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند مطلوبست محاسبه:



الف) طول میانه AM

ب) معادله میانه AM

ج) معادله ارتفاع AH

د) معادله عمود منصف BC

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3+(-5)}{2}=-1$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4+(-2)}{2}=1$$

حل الف) $M\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow AM=\sqrt{(2-(-1))^2+(-3-1)^2}$

$$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}\Rightarrow \boxed{AM=5}$$

$A\left|\begin{matrix}2\to x_1\\-3\to y_1\end{matrix}\right.$ $\quad M\left|\begin{matrix}-1\to x_2\\1\to y_2\end{matrix}\right.$

حل ب) $AM:\ y-(-3)=\frac{1-(-3)}{-1-2}(x-2)$

$$\Rightarrow y+3=\frac{4}{-3}(x-2)\Rightarrow \boxed{y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}$$ معادله AM

$B\left|\begin{matrix}3\to x_1\\4\to y_1\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}-5\to x_2\\-2\to y_2\end{matrix}\right.$

حل ج) $BC:\ y-4=\frac{-2-4}{-5-3}(x-3)$

$$\Rightarrow y-4=\frac{3}{4}(x-3)\Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}}$$ معادله BC

AH بر BC عمود است پس: $m_{AH}=-\frac{4}{3}$

$A\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ $\quad m_{AH}=-\frac{4}{3}$

$$AH:\ y-(-3)=-\frac{4}{3}(x-2)\Rightarrow y+3=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}$$ معادله ارتفاع

حل د) عمود منصف BC بر BC عمود است پس شیب آن قرینه و معکوس شیب BC است پس: $m_d=-\frac{4}{3}$ و از $M\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ می‌گذرد.

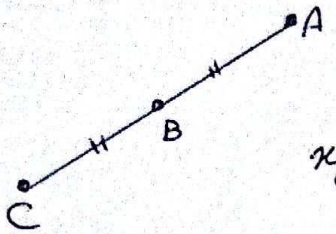
$m=-\frac{4}{3}$ $\quad M\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$

$$d:\ y-1=-\frac{4}{3}(x-(-1))\Rightarrow y-1=-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}$$ معادله عمود منصف

تست: قرینه نقطه $A(3,4)$ نسبت به نقطه $B(1,-2)$ روی خط $x-y=k$ قرار دارد. مقدار k کدام است؟

۱) -7 ۲) 7 ۳) 6 ۴) -6



$$x_B=\frac{x_A+x_C}{2}\Rightarrow 1=\frac{3+x_C}{2}\Rightarrow x_C=-1$$

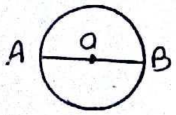
$$y_B=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow -2=\frac{4+y_C}{2}\Rightarrow y_C=-8$$

$$C\left|\begin{matrix}-1\\-8\end{matrix}\right.$$

$$C\left|\begin{matrix}-1\\-8\end{matrix}\right.\in x-y=k\Rightarrow -1-(-8)=k\Rightarrow \boxed{k=7}$$

تست: اگر $A\left|\begin{matrix}-1\\7\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$ مختصات دو سر قطر یک دایره باشند مساحت دایره چقدر است؟

۱) 5π ۲) 10π ۳) 13π ۴) 17π



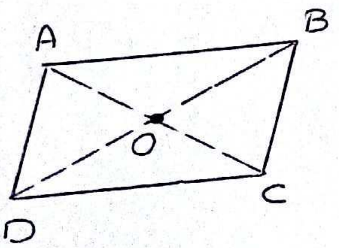
$$x_O=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$$

$$y_O=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{7+1}{2}=4$$

$$O\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$$

$$R=OA=\sqrt{(-1-1)^2+(7-4)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\Rightarrow S=\pi R^2=\pi(\sqrt{13})^2\Rightarrow\boxed{S=13\pi}$$

ویژگی مختصات رئوس متوازی الاضلاع:



اگر $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}x_C\\y_C\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}x_D\\y_D\end{matrix}\right.$ مختصات چهار رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند بین مختصات رئوس رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

ABCD

تست

مثال: اگر $A\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right.$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند معادله ضلع CD را بنویسید.

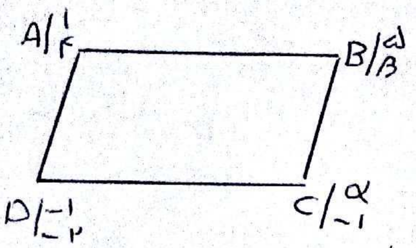
$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+5=-1+x_D\\ 5+1=2+y_D\end{cases}\Rightarrow D\left|\begin{matrix}8\\4\end{matrix}\right.$$

$$CD:\ y-1=\frac{4-1}{8-5}(x-5)$$

$$\Rightarrow y=x-4$$

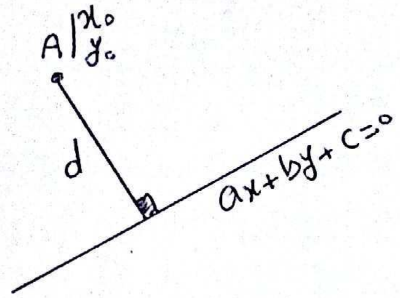
تست: با توجه به مختصات رئوس در متوازی الاضلاع مقابل، مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

الف) ۹ ب) ۱۲ ج) ۱۵ د) ۲۴



$$\begin{cases} 1+\alpha = 5-1 \Rightarrow \alpha = 3 \\ \beta - 2 = 4-1 \Rightarrow \beta = 5 \end{cases} \qquad \alpha\beta = 15$$

فاصله نقطه از خط:

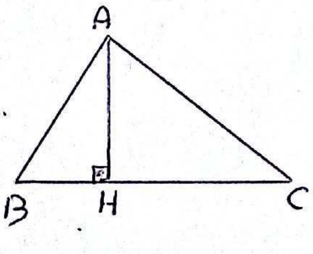


فاصله نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}x_0\\ y_0\end{smallmatrix}\right.$ از خط $ax+by+c=0$ از فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{AH = d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

واضح است که فاصله مبدا مختصات یعنی $O\left|\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right.$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $\boxed{OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

مثال ۱: سه نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}-3\\ -2\end{smallmatrix}\right.$ و $B\left|\begin{smallmatrix}5\\ 0\end{smallmatrix}\right.$ و $C\left|\begin{smallmatrix}1\\ 2\end{smallmatrix}\right.$ مختصات سه رأس مثلث ABC هستند. طول ارتفاع AH را بیابید.

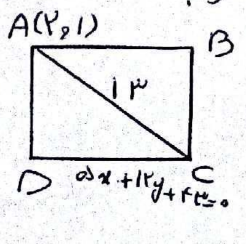


$$BC:\ y-0 = \frac{2-0}{1-5}(x-5) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = -x+5 \Rightarrow \boxed{x+2y-5=0}$$ معادله BC

$$AH = \frac{|(-3)+2(-2)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{AH = \frac{12\sqrt{5}}{5}}$$

مثال ۲: اگر $A(2,1)$ یک راس مستطیل $ABCD$ باشد و معادله ضلع CD بصورت $5x+12y+43=0$ بوده و قطر مستطیل برابر ۱۳ باشد مطلوبست محاسبه مساحت مستطیل:

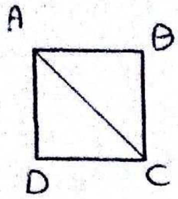


$$\text{عرض} = AD = \frac{|5(2)+12(1)+43|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{65}{13} = 5$$

$$5^2 + CD^2 = 13^2 \Rightarrow \boxed{CD = 12}$$

$$S = AD \times CD = 5 \times 12 = 60$$

مثال ۳: مربع $ABCD$ مفروض است. اگر $A(1,2)$ یک راس آن و معادله ضلع BC بصورت $3x-4y=5$ باشد. مطلوبست:



الف) مساحت مربع

$$BC:\ 3x-4y-5=0 \Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

ب) طول قطر مربع

ج) مختصات راس B

الف) $$\text{ضلع}=AB=\frac{|3(1)-4(2)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2$$

$$S=2^2=4$$

ب) قطر $$AC^2=2^2+2^2=4+4=8 \Rightarrow AC=\sqrt{8} \Rightarrow \boxed{AC=2\sqrt{2}}$$

ج) $$AB\perp BC \Rightarrow m_{AB}\times m_{BC}=-1 \Rightarrow m_{AB}\times\frac{3}{4}=-1 \Rightarrow m_{AB}=-\frac{4}{3}$$

معادله AB: $$y-2=-\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3} \Rightarrow \underbrace{4x+3y=10}_{\text{معادله } AB}$$

محل برخورد AB و BC برابر مختصات راس B است.

$$\begin{array}{r} -3 \\ 4 \end{array}\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 3x-4y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x-9y=-30 \\ 12x-16y=20 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{2}{5},\quad x=\frac{11}{5} \Rightarrow B\left|\begin{matrix}\frac{11}{5}\\ \frac{2}{5}\end{matrix}\right.$$

مثال ۴) فاصله نقطه $A\left|\begin{matrix}-1\\ 4\end{matrix}\right.$ از خط $8x+6y=K$ برابر ۴ است، مقدار K را بدست آورید.

$$AH=\frac{|8(-1)+6(4)-k|}{\sqrt{8^2+6^2}}=4 \Rightarrow \frac{|16-k|}{10}=4 \Rightarrow |16-k|=40 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 16-k=40 \Rightarrow K=-24 \\ 16-k=-40 \Rightarrow K=56 \end{cases}$$

مثال ۵) نقطه‌ای روی محور عرضها پیدا کنید که فاصله آن از خط $3x+2y=15$ برابر $\sqrt{13}$ باشد.

حل) نقطه مورد نظر را $A\left|\begin{matrix}0\\ \alpha\end{matrix}\right.$ درنظر می‌گیریم:

$$AH=\frac{|3(0)+2(\alpha)-15|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13} \Rightarrow \frac{|2\alpha-15|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \Rightarrow |2\alpha-15|=13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-15=13 \Rightarrow 2\alpha=28 \Rightarrow \alpha=14 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\ 14\end{matrix}\right. \\ 2\alpha-15=-13 \Rightarrow 2\alpha=2 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right. \end{cases}$$

تست: فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $y=7x-1$ چند برابر فاصله مبدا از خط $5x-5y=3$ است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

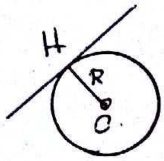
گزینه (۲):

$$y=7x-1 \Rightarrow 7x-y-1=0 \Rightarrow d_1=\frac{|7(1)-2-1|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{50}}$$

$$5x-5y-3=0 \Rightarrow d_2=\frac{|-3|}{\sqrt{5^2+(-5)^2}}=\frac{3}{\sqrt{50}} \qquad \frac{d_1}{d_2}=\frac{4}{3}$$

تست: خط $4x-2y=5$ بر دایره‌ای به مرکز $O(2,-1)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{4\pi}{5}$ ۴) $\frac{2\pi}{5}$



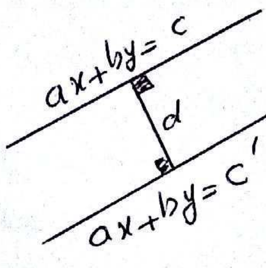
حل:

$$R=OH=\frac{|4(2)-2(-1)-5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{5\sqrt{20}}{20}=\frac{10\sqrt{5}}{20}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S=\pi R^2=\pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Rightarrow S=\frac{5\pi}{4}$$

فاصله دو خط موازی:

فاصله بین دو خط موازی $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ از فرمول زیر بدست می‌آید:



$$\boxed{d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

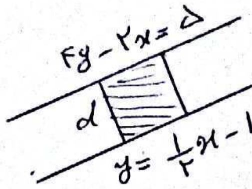
مثال ۱: فاصله دو خط موازی $3x+4y+1=0$ و $6x+8y-8=0$ را بدست آورید.

$$6x+8y-8=0 \xrightarrow{\div 2} 3x+4y-4=0 \qquad d=\frac{|4-(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 3x+4y=4 \end{cases}$$

تست: دو ضلع مربعی بر خطوط $4y-2x=5$ و $y=\frac{1}{2}x-1$ واقع شده‌اند مساحت مربع چقدر است؟

۱) $4{,}1$ ۲) $4{,}02$ ۳) $4{,}05$ ۴) $4{,}03$



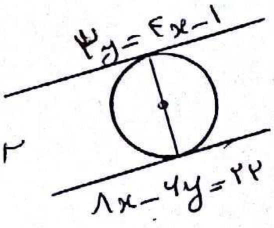
$y=\frac{1}{2}x-1 \xRightarrow{\times 4} 4y=2x-4 \Rightarrow -2x+4y=-4$

$4y-2x=5 \Rightarrow -2x+4y=5$

$$d=\frac{|-4-5|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\frac{9}{\sqrt{20}} \Rightarrow S=d^2=\left(\frac{9}{\sqrt{20}}\right)^2=\frac{81}{20}=4{,}05$$

تست: دو خط به معادله‌های $3y=4x-1$ و $8x-6y=22$ بر دایره‌ای مماس هستند. مساحت دایره کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π



$3y=4x-1 \Rightarrow 4x-3y=1$

$8x-6y=22 \xRightarrow{\div 2} 4x-3y=11$

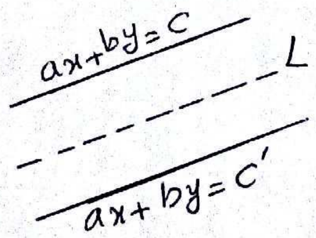
$$2R=d=\frac{|1-11|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

$\Rightarrow \boxed{R=1} \Rightarrow S=\pi R^2=\pi(1)^2$

$\Rightarrow \boxed{S=\pi}$

نکته ریاضی:

معادله خطی که از وسط دو خط موازی $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ می‌گذرد از فرمول زیر بدست می‌آید:



$$L:\ ax+by=\frac{c+c'}{2}$$

مثال) معادله خطی را بنویسید که از وسط دو خط موازی $2x+3y-6=0$ و $4x+6y+20=0$ بگذرد.

$2x+3y-6=0 \Rightarrow 2x+3y=6$

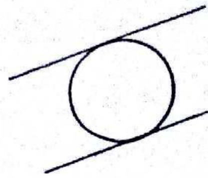
$4x+6y=-20 \xRightarrow{\div 2} 2x+3y=-10$

$$L:\ 2x+3y=\frac{6-10}{2} \Rightarrow 2x+3y=-2$$

تست: دوخط $3y = 4x + 11$ و $3y - 4x + 4 = 0$ بر دایره‌ای مماس هستند. اگر طول مرکز این دایره (۱-) باشد فاصله دورترین نقطه دایره تا محورها کدام است؟

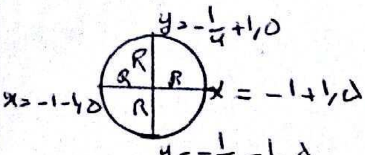
۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} 3y - 4x = 11 \\ 3y - 4x = -4 \end{cases} \qquad 2R = d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-4-11|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$



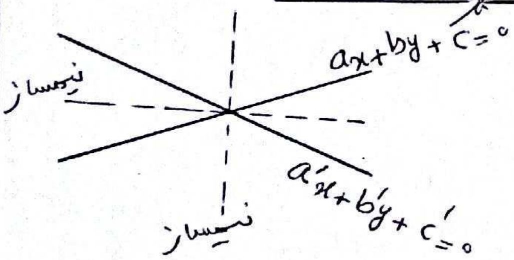
$$\Rightarrow \boxed{R = 1.5}$$

معادله خط گذرنده از مرکز دایره: $3y - 4x = \frac{11-4}{2} \Rightarrow 3y - 4x = \frac{7}{2} \xRightarrow{x=-1} y = -\frac{1}{6}$



$\Rightarrow O(-1, -\frac{1}{6})$ مرکز دایره

بیشترین فاصله تا محورها $= |-1-1.5| = 2.5 = \frac{5}{2}$



معادله نیمسازهای دوخط:

معادله نیمسازهای دوخط متقاطع به معادلات $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}}$$

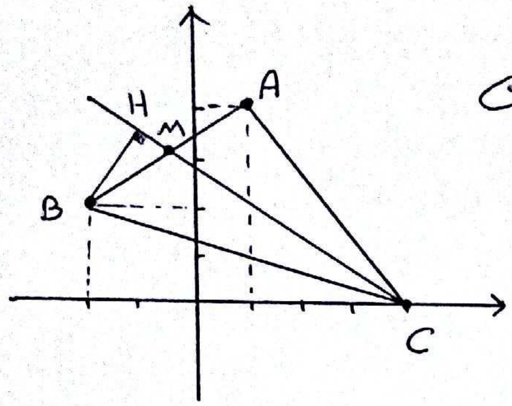
مثال) معادله نیمسازهای دوخط $5x - 12y + 1 = 0$ و $3x + 4y - 1 = 0$ را بدست آورید.

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5x - 12y + 1|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} \Rightarrow \frac{|3x + 4y - 1|}{5} = \frac{|5x - 12y + 1|}{13}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 4y - 1}{5} = + \frac{5x - 12y + 1}{13} \Rightarrow 39x + 52y - 13 = 25x - 60y + 5 \Rightarrow \boxed{7x + 56y - 9 = 0} \\ \text{یا} \\ \frac{3x + 4y - 1}{5} = \frac{-5x + 12y - 1}{13} \Rightarrow 39x + 52y - 13 = -25x + 60y - 5 \Rightarrow \boxed{8x - y - 1 = 0} \end{cases}$$

تمرینات تکمیلی

۱) مثلث $\hat{ABC}$ با رأس های $A(1,4)$ و $B(-2,2)$ و $C(4,0)$ مفروض است. طول عمود خارج شده از رأس B بر میانه نظیر رأس C را بیابید.



حل: می خواهیم طول BH را بیابیم که همان فاصله رأس B از میانه CM است.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3 \end{cases} \qquad M\left|\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{matrix}\right.$$

معادله CM: $y - 0 = \dfrac{3-0}{-\frac{1}{2}-4}(x-4) \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y = -2x + 8$

$\Rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$ $\qquad BH = \dfrac{|2(-2)+3(-2)-8|}{\sqrt{9+4}} = \dfrac{6}{\sqrt{13}} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

---

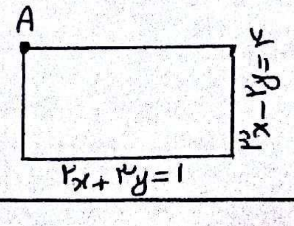
۲) خطوط $2x+3y=1$ و $3x-2y=4$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A\left|\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}\right.$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$3x - 2y = 4 \Rightarrow m_1 = -\dfrac{3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ $\qquad 2x+3y=1 \Rightarrow m_2 = -\dfrac{2}{3}$

شیب دو خط قرینه و معکوس هم است پس برهم عمودند در نتیجه یکی معادله طول مستطیل و دیگری معادله عرض مستطیل است و فاصله نقطه A از این خطوط همان طول و عرض مستطیل است چون نقطه A روی هیچکدام از این دو خط قرار ندارد.

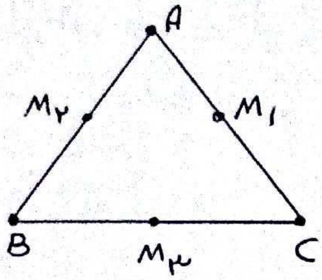
$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}\right. \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Rightarrow d_1 = \dfrac{|2(-1)+3(3)-1|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{13}} \quad \text{عرض}$$

$$\begin{cases} A\left|\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}\right. \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow d_2 = \dfrac{|3(-1)-2(3)-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} \quad \text{طول}$$



$$S = \dfrac{6}{\sqrt{13}} \times \dfrac{13}{\sqrt{13}} = 6$$

۳) مختصات وسط اضلاع مثلثی بصورت $M_1(3,1)$ و $M_2(-1,2)$ و $M_3(4,0)$ است. مطلوبست مختصات سه رأس مثلث:



$$\frac{x_A+x_B}{2}=-1 \Rightarrow x_A+x_B=-2 \quad ①$$

$$\frac{x_A+x_C}{2}=3 \Rightarrow x_A+x_C=6 \quad ②$$

$$\frac{x_B+x_C}{2}=4 \Rightarrow x_B+x_C=8 \quad ③$$

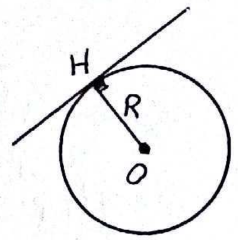
$$①+②+③ \Rightarrow 2(x_A+x_B+x_C)=12 \Rightarrow x_A+x_B+x_C=6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A+x_B=-2 \Rightarrow x_C=8 \\ x_A+x_C=6 \Rightarrow x_B=0 \\ x_B+x_C=8 \Rightarrow x_A=-2 \end{cases}$$

بهمین ترتیب y_A و y_B و y_C بدست می آید.

---

۴) خط $y=mx-2$ بر دایره‌ای به مرکز $O(3,1)$ و شعاع $3\sqrt{2}$ مماس است. m را بیابید.



حل: فاصله مرکز دایره از خط مماس همان شعاع دایره است.

$$y=mx-2 \Rightarrow y-mx+2=0$$

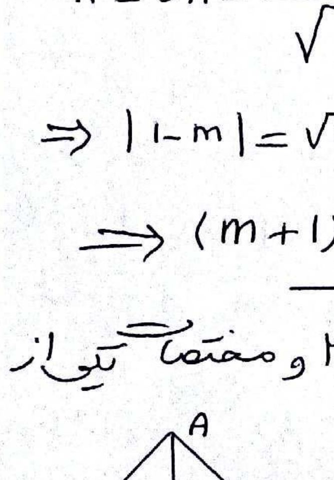
$$R=OH=\frac{|1-m(3)+2|}{\sqrt{1^2+(-m)^2}}=3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|3-3m|}{\sqrt{1+m^2}}=3\sqrt{2} \Rightarrow \cancel{3}|1-m|=\cancel{3}\sqrt{2}(\sqrt{1+m^2})$$

$$\Rightarrow |1-m|=\sqrt{2}(\sqrt{1+m^2}) \xrightarrow{\text{به توان } 2} 1-2m+m^2=2(1+m^2) \Rightarrow m^2+2m+1=0$$

$$\Rightarrow (m+1)^2=0 \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

---

۵) معادله یکی از قطرهای مربعی بصورت $2x+3y+3=0$ و مختصات یکی از راس های آن $(-1,4)$ است. مساحت مربع را بیابید.



حل: مختصات نقطه $A\begin{vmatrix}-1\\4\end{vmatrix}$ در معادله $2x+3y+3=0$ صدق نمی کند پس A روی خط قرار ندارد مطابق شکل فاصله A از خط برابر نصف قطر است و می دانیم مربع نوعی لوزی است

$$AH=\frac{|-2+12+3|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \Rightarrow \text{قطر}=2\sqrt{13} \Rightarrow S=\frac{2\sqrt{13}\times 2\sqrt{13}}{2}=26$$

معادله درجه دوم:

$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \Rightarrow$

- $\Delta>0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه متمایز $\Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله ریشه مضاعف $\Rightarrow x=\dfrac{-b}{2a}$
- $\Delta<0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$

- $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1$ و $x_2=\dfrac{c}{a}$ $\qquad 2x^2-3x+1=0$
- $a+c=b \Rightarrow x_1=-1\,,\ x_2=-\dfrac{c}{a}$ $\qquad 5x^2+6x+1=0$

مثال) حاصل جمع کدام عدد طبیعی با مربع اش برابر ۱۲ می باشد.

$x=$ عدد مورد نظر

$$x+x^2=12 \Rightarrow x^2+x-12=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4(1)(-12)=49 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2(1)}=\begin{cases} x_1=-4 & \text{غ ق ق} \\ x_2=3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

تعیین علامت عبارت درجه دوم: $\quad P=ax^2+bx+c$

الف) $\Delta>0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

ب) $\Delta=0$

x	$-\infty$	$x_1=x_2$	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

ج) $\Delta<0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a

نکته ریاضی: شرط اینکه عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$ همواره مثبت باشد ۲ نکته: $\quad \Delta<0\ ,\ a>0$

نکته ریاضی: شرط اینکه عبارت درجه دوم $P=ax^2+bx+c$ همواره منفی باشد ۲ نکته: $\quad \Delta<0$ و $a<0$

مثال) : به ازای چه مقادیری از m عبارت $(m-1)x^2+x+2m>0$ است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1 \\ \Delta<0 \Rightarrow 1-4(m-1)(2m) = 1-8m^2+8m<0 \Rightarrow -8m^2+8m+1<0 \end{cases}$$

$$-8m^2+8m+1=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{4} \\ m_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

m	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{6}}{4}$		1		$\frac{2+\sqrt{6}}{4}$	$+\infty$
$-8m^2+8m+1$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$m-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
جواب							جواب

$$m > \frac{2+\sqrt{6}}{4}$$

حل معادلات به روش تغییر متغیر:

در برخی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید می‌توان آن را به یک معادله ساده‌تر تبدیل و حل کرد که به آن روش تغییر متغیر می‌گویند.

مثال) معادلات زیر را حل کنید:

الف) $x^4-7x^2+12=0$

$$x^2=u \Rightarrow u^2-7u+12=0 \Rightarrow (u-3)(u-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ u=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

ب) $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$

$$(x^2-1)^2=u \Rightarrow u^2+u-2=0 \Rightarrow (u+2)(u-1)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u=-2 \Rightarrow (x^2-1)^2=-2 \quad \text{غ ق ق} \\ u=1 \Rightarrow (x^2-1)^2=1 \Rightarrow x^2-1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2-1=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \end{cases}$$

ج) $2\left(\frac{3x}{x+1}\right)^2-3\left(\frac{3x}{x+1}\right)+1=0$

$$\frac{3x}{x+1}=u \quad , \quad x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$$

$$2u^2-3u+1=0 \xRightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} u=1 \Rightarrow \frac{3x}{x+1}=1 \Rightarrow 3x=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} & \text{ق ق} \\ u=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow 6x=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{5} & \text{ق ق} \end{cases}$$

د) $x-6\sqrt{x}+5=0$

$$\sqrt{x}=u \Rightarrow \underset{x\geq 0}{x=u^2} \Rightarrow u^2-6u+5=0 \Rightarrow (u-1)(u-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ u=5 \Rightarrow \sqrt{x}=5 \Rightarrow \boxed{x=25} \end{cases}$$

ه) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-20=0$

$$\frac{1-x}{1+x}=u \quad , \quad 1+x\neq 0 \Rightarrow x\neq -1 \qquad \Rightarrow u^2-u-20=0 \Rightarrow (u-5)(u+4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=5 \Rightarrow \frac{1-x}{1+x}=5 \Rightarrow 1-x=5+5x \Rightarrow x=-\frac{4}{6}=\boxed{-\frac{2}{3}} & \text{ق ق} \\ u=-4 \Rightarrow \frac{1-x}{1+x}=-4 \Rightarrow 1-x=-4-4x \Rightarrow x=\boxed{-\frac{5}{3}} & \text{ق ق} \end{cases}$$

و) $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{6x+5}{x+1}\right)-8=0$

$$\frac{6x+5}{x+1}=\frac{2x+1+4x+4}{x+1}=\frac{(2x+1)}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x+1}=\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)+4$$

معادله $\Rightarrow \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)-4-8=0 \Rightarrow \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)-12=0$

$$\frac{2x+1}{x+1}=u \quad , x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1 \qquad \Rightarrow u^2-u-12=0 \Rightarrow (u-4)(u+3)=0$$

$$\begin{cases} u=4 \Rightarrow \frac{2x+1}{x+1}=4 \Rightarrow 2x+1=4x+4 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{2}} & \text{ق ق} \\ u=-3 \Rightarrow \frac{2x+1}{x+1}=-3 \Rightarrow 2x+1=-3x-3 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{4}{5}} & \text{ق ق} \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم :

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشد در این صورت مجموع ریشه‌ها را با S و حاصلضرب ریشه‌ها را با P نشان داده و از فرمولهای زیر محاسبه می کنیم :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

مثال) بدون حل معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ مجموع و حاصلضرب ریشه های معادله را بدست آورید.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{4} = \frac{7}{4}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

روابط بین ریشه ها با S و P :

مجموع مربعات ریشه‌ها $= x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

مجموع مکعبات ریشه‌ها $= x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$

مجموع جذر ریشه‌ها $= \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

(اثبات فرمولها صفحه ۲)

مجموع معکوس ریشه‌ها $= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$

تفاضل ریشه‌ها $= |x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

مثال) در معادله $x^2 - 8x + 12 = 0$ مطلوبست محاسبه :

۱) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8 = S$

۲) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 12 = P$

۳) $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 64 - 24 = 40$

۴) $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = 512 - 3(8)(12) = 224$

$c^2 = A^2 - B$

$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+c}{2}} + \sqrt{\frac{A-c}{2}}$

۵) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{8 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{8+4}{2}} + \sqrt{\frac{8-4}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

۶) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

۷) $|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{64 - 48} = \sqrt{16} = 4$

اثبات فرمولها:

1) $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

2) $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2} = \dfrac{b^2-\Delta}{4a^2} = \dfrac{+b^2-b^2+4ac}{4a^2}$

$= \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

3) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$

4) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = S^3 - 3PS$

5) $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2 = x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} = \sqrt{(x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{S+2\sqrt{P}}$

6) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P}$

7) $|x_1-x_2| = \left|\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\dfrac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$= \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} = \sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{4ac}{a^2}} = \sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{4c}{a}} = \sqrt{S^2-4P}$

مثال ۱: در معادله $3x^2-(3m+1)x+m=0$ مجموع عکس ریشه‌ها برابر ۴ می‌باشد m کدام است؟

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 4 \Rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 4 \Rightarrow \dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 4 \Rightarrow -\dfrac{b}{c} = 4 \Rightarrow \dfrac{3m+1}{m} = 4 \Rightarrow \boxed{m=1}$

مثال ۲: در معادله $x^2+(2-m)x-2m=0$ فاصله دو ریشه ۳ واحد است، m را بیابید.

$|x_1-x_2| = 3 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 3 \xRightarrow{a=1} \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow b^2-4ac = 9$

$\Rightarrow (2-m)^2 - 4(-2m) = 9 \Rightarrow m^2+4m-5=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m=1 \\ m=-5 \end{cases}$

مثال ۳) اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2-4x+1=0$ باشد، مطلوبست محاسبه:

$S=-\frac{b}{a}=4$ $\quad$ $P=\frac{c}{a}=1$

الف) $x_1 x_2^3+x_2 x_1^3=(x_1x_2)(x_2^2+x_1^2)=P(S^2-2P)=1(4^2-2\times1)=14$

ب) $\frac{x_1+1}{x_2^2}+\frac{x_2+1}{x_1^2}=\frac{x_1^3+x_1^2+x_2^3+x_2^2}{x_2^2x_1^2}=\frac{x_1^3+x_2^3+x_1^2+x_2^2}{x_2^2x_1^2}$

$$=\frac{(S^3-3PS)+(S^2-2P)}{P^2}=\frac{52+14}{1}=66$$

مثال ۴) اگر بین ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ رابطه $x_1-x_2+x_1x_2=0$ برقرار باشد یکی از ریشه‌های این معادله برابر است با:

الف) $\frac{c-b}{2a}$ $\quad$ ب) $\frac{c+b}{a}$ $\quad$ ج) $\frac{b-c}{2a}$ $\quad$ د) $\frac{-b-c}{a}$

حل) گزینه الف

به دو طرف رابطه مقدار $2x_2$ را اضافه می‌کنیم:

$x_1-x_2+x_1x_2+2x_2=2x_2 \Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2=2x_2 \Rightarrow -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=2x_2$

$\Rightarrow x_2=\frac{-b+c}{2a} \Rightarrow x_2=\frac{c-b}{2a}$

مثال ۵) اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+x-1=0$ باشند و $x_2>x_1$ مقدار $5x_1^2+3x_2^2$ کدام است؟

الف) $12-\sqrt{5}$

ب) $5-\sqrt{12}$

ج) $-5-\sqrt{12}$

د) $12+\sqrt{5}$

$5x_1^2+3x_2^2=(4x_1^2+x_1^2)+(4x_2^2-x_2^2)$

$=4(x_1^2+x_2^2)+(x_1^2-x_2^2)=4(S^2-2P)+\underbrace{(x_1-x_2)}_{\text{منفی}}(x_1+x_2)$

$=4(S^2-2P)-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\times S=4(1-2(-1))+\frac{-\sqrt{5}}{1}(-1)=12+\sqrt{5}$

مثال ۶) به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+5+m=0$ مجذور دیگری است؟

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_1+x_2=6 \end{cases}$$

$$x_1+x_2=6 \Rightarrow x_2^2+x_2=6 \Rightarrow x_2^2+x_2-6=0$$

$$\Rightarrow (x_2+3)(x_2-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=-3 \Rightarrow (-3)^2-6(-3)+5+m=0 \Rightarrow \boxed{m=-32} \\ x_2=2 \Rightarrow 2^2-6(2)+5+m=0 \Rightarrow \boxed{m=3} \end{cases}$$

مثال ۷) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه‌دوم $x^2-7x+4=0$ باشند مطلوبست محاسبه:

$$S=-\frac{b}{a}=7 \quad , \quad P=\frac{c}{a}=4$$

الف) $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=?$

$$(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})^2=\alpha^2\beta+\beta^2.\alpha+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}=\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$=PS+2P\sqrt{P}=(4)(7)+2(4)(\sqrt{4})=28+16=44 \Rightarrow \alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=\sqrt{44}$$

ب) $\alpha^2+\frac{1}{\alpha}+\beta^2+\frac{1}{\beta}=?$

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha}+\beta^2+\frac{1}{\beta}=\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=S^2-2P+\frac{S}{P}=7^2-2(4)+\frac{7}{4}=\frac{171}{4}$$

مثال ۸) اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2-5x-1=0$ باشند مقدار عددی $2\alpha^2+5\beta$ کدام است؟

الف) ۱۱٫۵

ب) ۱۲٫۵

ج) ۱۳٫۵

د) ۱۴٫۵

α ریشه است $\Rightarrow 2\alpha^2-5\alpha-1=0 \Rightarrow 2\alpha^2=5\alpha+1$

$$2\alpha^2+5\beta=5\alpha+1+5\beta=5(\alpha+\beta)+1$$

$$=5\left(-\frac{b}{a}\right)+1=5\left(-\frac{-5}{2}\right)+1=\frac{25}{2}+1=\frac{27}{2}=13.5$$

= گزینه (ج) صحیح است.

مثال ۹) m را طوری بیابید که یکی از ریشه‌های معادله $mx^2-4x+1=0$ سه برابر ریشه دیگر باشد. ($m \neq 0$)

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $mx^2-4x+1=0$ باشند

$$\begin{cases} \alpha = 3\beta \\ S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \Rightarrow 3\beta+\beta=-\dfrac{-4}{m} \Rightarrow 4\beta=\dfrac{4}{m} \Rightarrow \beta=\dfrac{1}{m} \Rightarrow \alpha=\dfrac{3}{m} \\ P=\alpha.\beta=\dfrac{c}{a} \Rightarrow \dfrac{3}{m}\times\cancel{\dfrac{1}{m}}=\cancel{\dfrac{1}{m}} \Rightarrow \dfrac{3}{m}=1 \Rightarrow \boxed{m=3} \end{cases}$$

مثال ۱۰) یکی از ریشه‌های معادله $x^2-kx+8=0$ مربع ریشه دیگر است. k و هردو ریشه را بیابید.

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^2-kx+8=0$ باشند.

$$\begin{cases} \alpha=\beta^2 \\ S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-k}{1}=k \\ P=\alpha.\beta=\dfrac{c}{a} \Rightarrow \beta^2.\beta=\dfrac{8}{1} \Rightarrow \beta^3=8 \Rightarrow \boxed{\beta=2} \Rightarrow \alpha=2^2 \Rightarrow \boxed{\alpha=4} \end{cases}$$

$$\alpha+\beta=k \Rightarrow 4+2=k \Rightarrow \boxed{k=6}$$

مثال ۱۱) m را چنان بیابید که بین ریشه‌های معادله $x^2-(m+2)x+(m+1)=0$ رابطه $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}=\dfrac{5}{6}$ برقرار باشد. (α و β ریشه‌های معادله‌اند)

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-(m+2)}{1}=m+2 \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{1}=m+1$$

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{S+2}{P+S+1}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{m+2+2}{m+1+m+2+1}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{m+4}{2m+4}=\frac{5}{6} \Rightarrow 6m+24=10m+20$$

$$\Rightarrow \boxed{m=1}$$

مثال ۱۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2-4x+1=0$ باشند مطلوبست محاسبه:

$$\frac{\beta}{\beta^2+1}+\frac{\alpha-1}{\alpha^2-6\alpha+3}=?$$

α ریشه $\Rightarrow \alpha^2-4\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha^2=4\alpha-1$

β ریشه $\Rightarrow \beta^2-4\beta+1=0 \Rightarrow \beta^2+1=4\beta$

$$\frac{\beta}{\beta^2+1}+\frac{\alpha-1}{\alpha^2-6\alpha+3}=\frac{\beta}{4\beta}+\frac{\alpha-1}{4\alpha-1-6\alpha+3}=\frac{1}{4}+\frac{\alpha-1}{-2(\alpha-1)}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

تشکیل معادله درجه دوم:

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند بطوریکه $S=x_1+x_2$ و $P=x_1 \cdot x_2$ دراینصورت معادله درجه دوم موردنظر از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

اثبات: x_1 و x_2 ریشه $\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)=0 \Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

مثال ۱: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن ۳ و ۵ باشند.

$S=x_1+x_2=3+5=8$

$P=x_1x_2=3\times5=15$

$x^2-Sx+P=0$

$\Rightarrow x^2-8x+15=0$

مثال ۲: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $2-\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3}$ باشند.

$S=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

$P=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$

$x^2-Sx+P=0$

$\Rightarrow x^2-4x+1=0$

مثال ۳: معادله درجه دومی بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ باشد.

$$x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x-2=-\sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2=(-\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2-4x+4=3 \Rightarrow \boxed{x^2-4x+1=0}$$

مثال ۴: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۳ واحد کمتر از ریشه‌های معادله $2x^2-3x-2=0$ باشد.

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $2x^2-3x-2=0$ باشند پس:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \qquad \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-1$$

درنتیجه ریشه‌های معادله جدید باید $(\alpha-3)$ و $(\beta-3)$ باشند پس:

$$S=(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6=\frac{3}{2}-6=-\frac{9}{2}$$

$$P=(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=-1-3\left(\frac{3}{2}\right)+9=\frac{7}{2}$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2+\frac{9}{2}x+\frac{7}{2}=0 \Rightarrow \boxed{2x^2+9x+7=0}$$

نکته کنکوری: برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌های آن K واحد کمتر از ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ است کافی است در معادله x را به $(x+K)$ تبدیل کنیم.

مثال) معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۵ واحد کمتر از ریشه‌های معادله $x^2+5x+6=0$ باشد کدام است؟

$$x \longrightarrow x+5 \Rightarrow (x+5)^2+5(x+5)+6=0 \Rightarrow x^2+10x+25+5x+25+6=0$$

$$\Rightarrow x^2+15x+56=0$$

مثال ۵) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۴ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $2x^2-3x+7=0$ باشد.

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $2x^2-3x+7=0$ باشند در اینصورت:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2} \qquad \alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{7}{2}$$

پس ریشه‌های معادله جدید باید $(\alpha+4)$ و $(\beta+4)$ باشند در اینصورت:

$$S=(\alpha+4)+(\beta+4)=\alpha+\beta+8=\frac{3}{2}+8=\frac{19}{2}$$

$$P=(\alpha+4)(\beta+4)=\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+16=\frac{7}{2}+4\left(\frac{3}{2}\right)+16=\frac{51}{2}$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{19}{2}x+\frac{51}{2}=0 \Rightarrow \boxed{2x^2-19x+51=0}$$

نکته کنکوری:

برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌های آن K واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ است کافی است در معادله x را به $(x-k)$ تبدیل کنیم.

مثال) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۳ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $2x^2-5x-1=0$ باشد.

$$x \to x-3 \quad \Rightarrow 2(x-3)^2-5(x-3)-1=0 \Rightarrow 2x^2-17x+32=0$$

مثال ۶: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله $x^2-4x+3=0$ باشد.

حل: فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^2-4x+3=0$ باشند در اینصورت:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{1}=4 \qquad \alpha.\beta=\frac{c}{a}=3$$

پس ریشه‌های معادله جدید باید $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشند در اینصورت:

$$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{4}{3} \qquad P=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{3}$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow 3x^2-4x+1=0$$

نکته ریاضی:
برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد کافی است در معادله x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم یا جای a و c را باهم عوض کنیم:

مثال) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله $2x^2+7x-9=0$ باشد.

روش اول: جای a و c را عوض می‌کنیم $-9x^2+7x+2=0$

روش دوم: $x \to \frac{1}{x} \Rightarrow 2(\frac{1}{x})^2+7(\frac{1}{x})-9=0 \Rightarrow \frac{2}{x^2}+\frac{7}{x}-9=0$

$\xrightarrow{\times x^2} 2+7x-9x^2=0 \Rightarrow -9x^2+7x+2=0$

نکته ریاضی:
برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش قرینه ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد کافی است در معادله x را به $(-x)$ تبدیل کرده یا علامت b را در معادله قرینه کنیم.

مثال) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش قرینه ریشه‌های معادله $3x^2-4x-10=0$ باشند.

$x \to -x \Rightarrow 3(-x)^2-4(-x)-10=0 \Rightarrow 3x^2+4x-10=0$

یا علامت b را قرینه می‌کنیم.

نکته ریاضی:
برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش عکس قرینه (قرینه و معکوس) ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد کافی است در معادله x را به $(-\frac{1}{x})$ تبدیل کرده یا علامت b را تغییر داده و جای a و c را عوض کنیم.

مثال) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش عکس قرینه ریشه‌های معادله $3x^2-7x+2=0$ باشند.

$2x^2+7x+3=0$

نکته ریاضی: برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد کافی است در معادله، x را به $\frac{x}{k}$ تبدیل کنیم یا از فرمول $ax^2+kbx+k^2c=0$ استفاده کنیم.

مثال) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش نصف ریشه‌های معادله $x^2-3x-10=0$ باشند.

$$x \to \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x \Rightarrow (2x)^2-3(2x)-10=0 \Rightarrow 4x^2-6x-10=0 \Rightarrow 2x^2-3x-5=0$$

یا

$$x^2-\frac{1}{2}\times 3x-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 10=0 \Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x-\frac{10}{4}=0 \Rightarrow 2x^2-3x-5=0$$

مثال) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۳ برابر ریشه‌های معادله $2x^2-5x-1=0$ باشند.

$$x \to \frac{x}{3} \Rightarrow 2\left(\frac{x}{3}\right)^2-5\left(\frac{x}{3}\right)-1=0 \Rightarrow \frac{2x^2}{9}-\frac{5x}{3}-1=0 \Rightarrow 2x^2-15x-9=0$$

یا

$$2x^2-3\times 5x-3^2\times 1=0 \Rightarrow 2x^2-15x-9=0$$

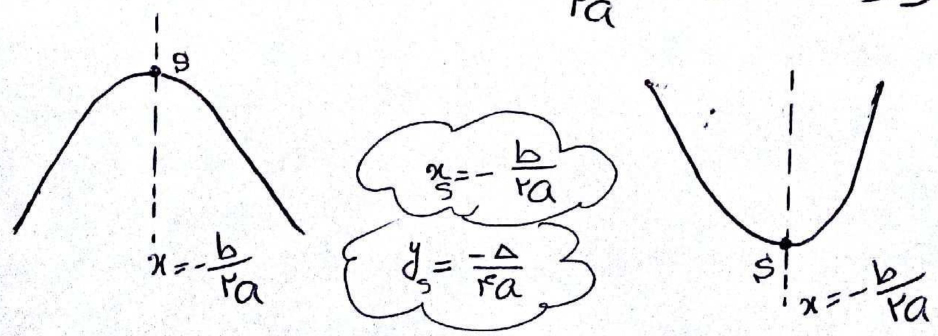
ماکزیمم و مینیمم سهمی :

تابع درجه دوم بصورت $f(x)=ax^2+bx+c$ بیان می‌شود و نمودار آن سهمی نامیده می‌شود :

۱) اگر $a>0$ باشد در این صورت نمودار سهمی بصورت $\cup$ (Min) بوده و سهمی دارای کمترین مقدار (مینیمم) بوده که طول نقطه مینیمم آن از رابطه $x=-\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید که اگر در معادله سهمی قرار دهیم عرض نقطه مینیمم بدست می‌آید نقطه مینیمم را راس سهمی نامیده و آنرا بصورت $S\Big/\begin{matrix}x_s\\ y_s\end{matrix}$ نشان می‌دهیم، $y_s=\frac{-\Delta}{4a}$, $x_s=-\frac{b}{2a}$

۲) اگر $a<0$ باشد در اینصورت نمودار سهمی بصورت $\cap$ (Max) بوده و سهمی دارای بیشترین مقدار (ماکزیمم) بوده که طول نقطه ماکزیمم آن از رابطه $x=-\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید که اگر در معادله سهمی قرار دهیم عرض نقطه ماکزیمم بدست می‌آید نقطه ماکزیمم را راس سهمی نامیده و آنرا بصورت $S\Big/\begin{matrix}x_s\\ y_s\end{matrix}$ نشان می‌دهیم.

تذکر مهم: در هر دو حالت خط $x=-\frac{b}{2a}$ را خط تقارن سهمی می‌گویند.



مثال ۱) کمترین مقدار تابع $f(x)=2x^2-8x+6$ را تعیین کنید.

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{4}=2 \Rightarrow y=f(2)=2(2)^2-8(2)+6=-2$

مثال ۲) کمترین مقدار تابع $f(x)=9x^2-6x+3$ را بیابید.

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2(9)}=\frac{1}{3} \Rightarrow y=f(\frac{1}{3})=9(\frac{1}{3})^2-6(\frac{1}{3})+3=1-2+3=2$$

مثال ۳) حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ می باشد. این دو عدد را چنان بیابید که حاصلضرب آنها ماکزیمم شود؟

عدد اول $=x$

عدد دوم $=110-x$

$$A=x(110-x)=-x^2+110x$$

$$x_{max}=-\frac{b}{2a}=-\frac{110}{2(-1)}=55$$

عدد اول $=55$

عدد دوم $=110-55=55$

مثال ۴) محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود؟

طول + عرض $=100\div 2=50$

طول $=x$

عرض $=50-x$

$$A=x(50-x)=-x^2+50x$$

$$x_{max}=-\frac{b}{2a}=-\frac{50}{2(-1)}=25$$

طول $=x=25$

عرض $=50-x=50-25=25$

مثال ۵) کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x تعیین کنید.

تذکر: $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$$f(x)=x+\frac{4}{x}=(\sqrt{x})^2+(\sqrt{\frac{4}{x}})^2=(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{4}{x}})^2+2(\sqrt{x})(\sqrt{\frac{4}{x}})$$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{4}{x}})^2+4$$

کمترین مقدار عبارت فوق وقتی است که عبارت داخل پرانتز صفر شود یعنی کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ به ازای $x>0$ برابر ۴ می شود.

مثال ۶) اگر x تعداد واحدهای کالا باشد معادله درآمد بصورت $R=100x-0/1x^2$ و معادله هزینه بصورت $C=400+60x$ است ماکزیمم مقدار سود را بدست آورید.

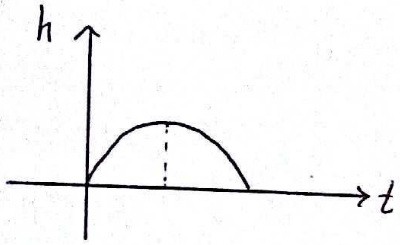
حل: می‌دانیم سود برابر است با تفاضل هزینه از درآمد

$$\text{سود}=P=R-C=100x-0/1x^2-400-60x \Rightarrow P(x)=-0/1x^2+40x-400$$

$$x_{max}=-\frac{b}{2a}=-\frac{40}{2(-0/1)}=\frac{40}{0/2}=200$$

$$P_{max}=-0/1(200)^2+40(200)-400=-\frac{40000}{10}+8000-400=3600$$

مثال ۷) موشکی به آسمان پرتاب می‌شود. اگر فاصله آن از زمین t ثانیه پس از پرتاب $h(t)=100t-5t^2$ متر باشد:



الف) پس از چند ثانیه به نقطه اوج می‌رسد.

ب) ارتفاع نقطه اوج را بدست آورید.

حل الف) $h(t)=-5t^2+100t \Rightarrow t_{max}=-\frac{b}{2a}=\frac{-100}{2(-5)}=10$

حل ب) $h_{max}=h(10)=-5(10)^2+100(10)=-500+1000=500$

صفرهای تابع:

اگر $y=f(x)$ یک تابع باشد ریشه‌های معادله $f(x)=0$ را در صورت وجود صفرهای تابع می‌نامند. از نظر هندسی صفرهای تابع طول نقاط برخورد منحنی تابع با محور xها است.

مثال) صفرهای تابع‌های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=x^2+7x+6$

$$x^2+7x+6=0 \Rightarrow (x+1)(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-6 \end{cases}$$

ب) $g(x)=x^3-x$

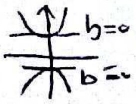
$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=\pm 1$$

برای تعیین علامت ضرایب تابع درجه دوم $y=f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت زیر عمل می کنیم:

۱) معادله $f(x)=ax^2+bx+c=0$ را در نظر می گیریم. که جوابهای آن صفرهای تابع یا همان طول نقاط برخورد نمودار با محور xها است.

۲) اگر $a>0$ باشد نمودار بصورت $\cup$ و اگر $a<0$ باشد نمودار بصورت $\cap$ است.

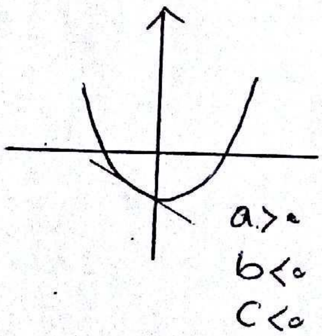
۳) برای تشخیص علامت b، خط مماس بر منحنی را در نقطه برخورد منحنی با محور yها رسم می کنیم b همان شیب است.

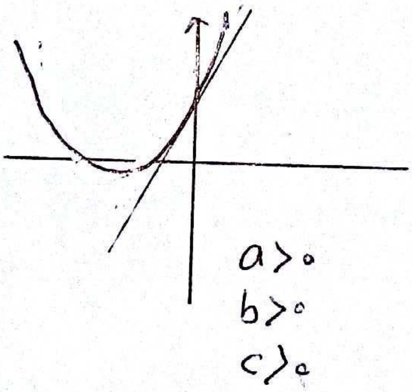


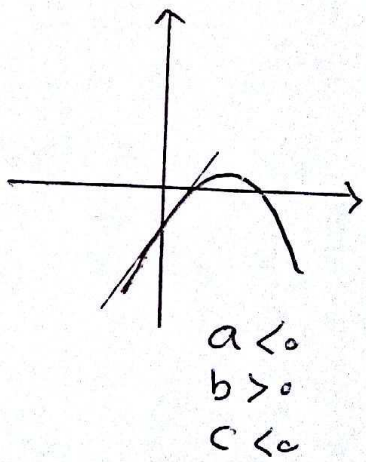
۴) c محل برخورد نمودار با محور yها است.

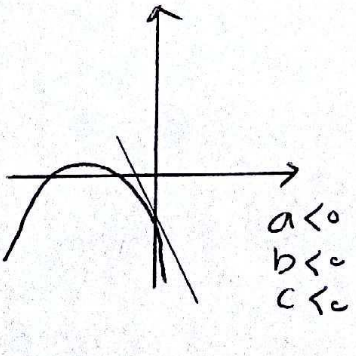
سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) $\Delta>0$ باشد سهمی دو ریشه دارد.

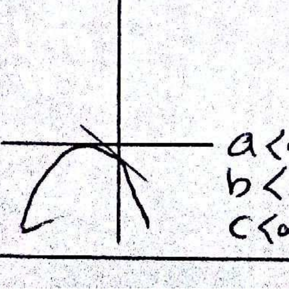


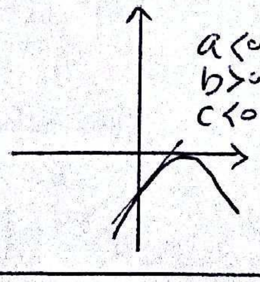


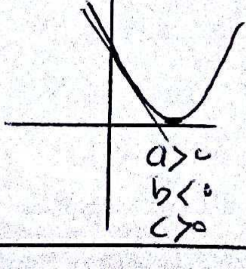


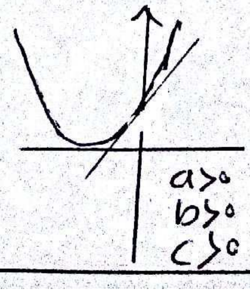


ب) $\Delta=0$ سهمی بر محور xها مماس است.

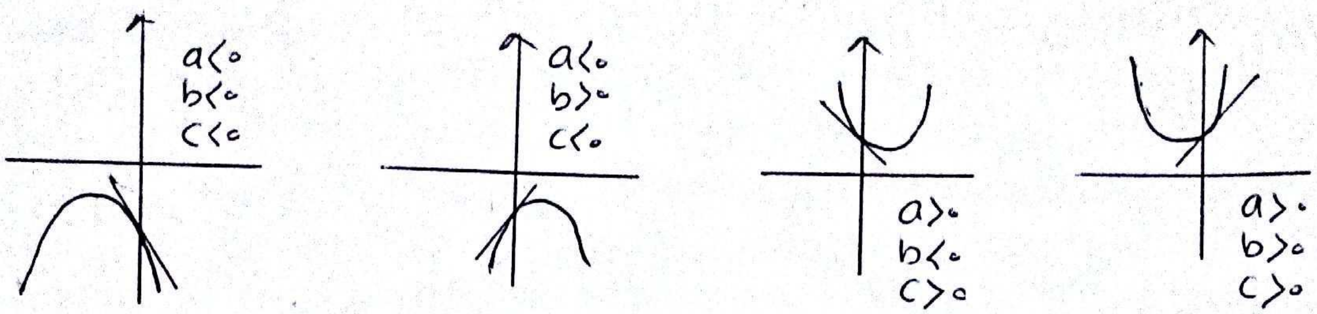




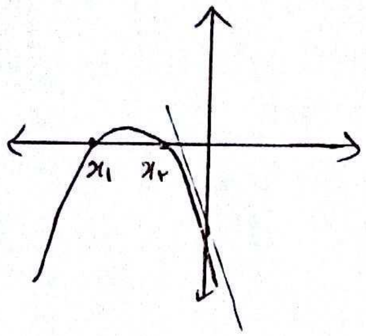




ج) $\Delta<0$ منحنی همیشه در یک طرف محور x ها ست.



مثال ۱: در شکل زیر سهمی به معادله $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است
علامت ضرایب a و b و c، S و P و تعداد صفرهای تابع را تعیین کنید.



حل) تابع دارای دو ریشه است.

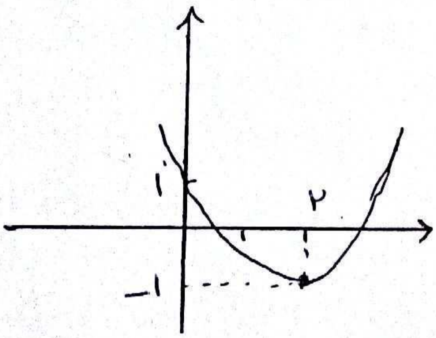
$$x_1<x_2<0$$

$$x_1+x_2=S<0$$

$$x_1 \cdot x_2=P>0$$

$$a<0 \quad , \quad b<0 \quad , \quad c<0$$

مثال ۲: معادله سهمی مقابل را بنویسید.



$$A\Big|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix} \qquad B\Big|\begin{matrix}0\\1\end{matrix} \qquad f(x)=ax^2+bx+c$$

$$A\in f \Rightarrow -1=a(2)^2+b(2)+c \Rightarrow 4a+2b+c=-1$$

$$B\in f \Rightarrow 1=a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

$$x_{Min}=-\frac{b}{2a} \Rightarrow 2=\frac{-b}{2a} \Rightarrow -b-4a=0$$

$$\begin{cases}4a+2b+1=-1\\-b-4a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4a+2b=-2\\-4a-b=0\end{cases} \Rightarrow b=-2 \quad , \quad a=\frac{1}{2}$$

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

معادلات گویا:

معادلاتی که شامل کسر با صورت و مخرج چند جمله‌ای باشد معادلات گویا نامیده می‌شوند که برای حل آنها بصورت زیر عمل می‌کنیم: مخرج‌ها را تجزیه کرده پس دو طرف معادله را در ک‌م‌م مخرجها که شامل حاصلضرب همه عاملها با بیشترین تعداد است ضرب می‌کنیم تا مخرجها ساده شوند سپس معادله را حل می‌کنیم: جوابهایی قابل قبولند که مخرج کسرها را صفر نکنند.

مثال) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x} = \dfrac{x+1}{x}$

$x^2-2x = x(x-2)$ 　　　 ک‌م‌م $= x(x-2)$

$x(x-2)\left[\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x}\right] = x(x-2)\left[\dfrac{x+1}{x}\right]$

$\Rightarrow x^2-x - x^2+2x-2 = x^2-x-2 \Rightarrow x-2 = x^2-x-2 \Rightarrow x^2-2x=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$ 　　معادله جواب ندارد.

ب) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x^2+x}$

$x(x+1)\left[\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right] = x(x+1)\left[\dfrac{2x-1}{x^2+x}\right]$

$\Rightarrow x^2-1 - x = 2x-1 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=3 & \text{ق ق} \end{cases}$

معادله یک جواب دارد.

ج) $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{8}{x^2-4}$

$$(x^2-4)\left[\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}\right]=(x^2-4)\left(\frac{8}{x^2-4}\right)$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+x(x+2)=8 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2+2x=8$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{غ ق ق} \\ x=-1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

د) $$\frac{x-2}{x^2-x-6}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{3}{2x+4}$$

$$\text{ک.م.م}=2(x+2)(x-2)(x-3)$$

$$2(x+2)(x-2)(x-3)\left[\frac{x-2}{x^2-x-6}-\frac{1}{x^2-4}\right]=2(x+2)(x-2)(x-3)\left[\frac{3}{2x+4}\right]$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2-2(x-3)=3(x-2)(x-3) \Rightarrow x^2-5x+4=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

مثال: اگر یکی از جواب‌های معادله $\frac{5-a}{2x}+\frac{a-3}{x^2+4x}=\frac{x}{x^2+3x-4}$ برابر $x=2$ باشد:

الف) مقدار a را بیابید. ب) جواب دیگر معادله را بیابید.

$$x=2 \Rightarrow \frac{5-a}{4}+\frac{a-3}{4+8}=\frac{2}{4+6-4} \Rightarrow \frac{5-a}{4}+\frac{a-3}{12}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15-3a+a-3}{12}=\frac{1}{3} \Rightarrow 12-2a=4 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$a=4 \Rightarrow \frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2+4x}=\frac{x}{x^2+3x-4} \Rightarrow 2x(x+4)(x-1)\left[\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2+4x}\right]=$$

$$2x(x+4)(x-1)\left(\frac{x}{x^2+3x-4}\right) \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-3)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{ق ق} \\ x=3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

تست) در یک آکواریوم با آب شور، قرار است محلول آب نمک با غلظت ۶ درصدی داشته باشیم. اگر در حال حاضر ۱۵۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴ درصدی داشته باشیم، چقدر از آب آن باید تبخیر شود تا به حد مجاز برسیم؟

الف) ۷۵

ب) ۵۰ ✓

ج) ۳۰

د) ۶۰

حل: ابتدا نمک موجود در آب را محاسبه می کنیم. $\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۶}{۱۵۰}$

$$\frac{۶}{۱۵۰-x}=\frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۵۰-x=۱۰۰ \Rightarrow x=۵۰$$

تست: ۲۰۰ کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد را با n کیلوگرم رنگ با غلظت ۸ درصدی مخلوط کرده ایم. حاصل، رنگ با غلظت ۱۰ درصد شده است. مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰۰۰ ✓ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۲۵۰۰

حل: ابتدا مقدار رنگ خالص را پیدا می کنیم: $۲۰۰\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+n\times\frac{۸}{۱۰۰}=۴۰+\frac{۲n}{۲۵}$

سپس غلظت رنگ مخلوط شده را برابر ۱۰ درصد قرار می دهیم:

$$\frac{۴۰+\frac{۲n}{۲۵}}{۲۰۰+n}=\frac{۱۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۴۰+\frac{۲n}{۲۵}}{۲۰۰+n}=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow ۴۰۰+\frac{۲۰n}{۲۵}=n+۲۰۰ \Rightarrow n=۱۰۰۰$$

معادلات گنگ:

برخی معادلات دارای عبارتهای رادیکالی از مجهول هستند که آنها را معادلات گنگ می نامند که برای حل آنها طرفین معادله را به توان دوم می رسانیم تا معادله‌ای بدون عبارت گنگ بدست آید. جوابهایی قابل قبول است که داخل رادیکال را منفی نکند یا در معادله صدق کند.

مثال) معادلات گنگ زیر را حل کنید:

الف) $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}}=۵$

$$۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}=۲۵ \Rightarrow \sqrt{۲x+۸۰}=۱۰ \Rightarrow ۲x+۸۰=۱۰۰ \Rightarrow \boxed{x=۱۰}$$

ق ق

آزمایش جواب: $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲۰+۸۰}}=\sqrt{۱۵+۱۰}=\sqrt{۲۵}=۵$

ب) $x+\sqrt{5x+10}=8$

$\sqrt{5x+10}=8-x \Rightarrow (\sqrt{5x+10})^2=(8-x)^2 \Rightarrow 5x+10=64-16x+x^2$

$\Rightarrow x^2-21x+54=0 \Rightarrow (x-3)(x-18)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=18 \end{cases}$

$x=3 \Rightarrow 3+\sqrt{15+10}=3+5=8$ ق ق

$x=18 \Rightarrow 18+\sqrt{90+10}=18+10=28$ غ ق ق

ج) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8$

$(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1})^2=8^2 \Rightarrow x+1+3x+1+2\sqrt{(x+1)(3x+1)}=64$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(3x+1)}=-4x+62 \Rightarrow \sqrt{3x^2+4x+1}=-2x+31$

$\Rightarrow 3x^2+4x+1=(-2x+31)^2 \Rightarrow 3x^2+4x+1=4x^2-124x+961$

$\Rightarrow x^2-128x+960=0 \Rightarrow (x-120)(x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=120 \\ x=8 \end{cases}$

$x=120 \Rightarrow \sqrt{120+1}+\sqrt{3\times120+1}=\sqrt{121}+\sqrt{361}\neq 8$ غ ق ق

$x=8 \Rightarrow \sqrt{8+1}+\sqrt{3\times8+1}=\sqrt{9}+\sqrt{25}=3+5=8$ ق ق

د) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2\sqrt{x-7}$

$(\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1})^2=(2\sqrt{x-7})^2 \Rightarrow x+17+x+1-2\sqrt{(x+17)(x+1)}=4(x-7)$

$\Rightarrow 2x+18-4x+28=2\sqrt{(x+17)(x+1)} \Rightarrow -2x+46=2\sqrt{(x+17)(x+1)}$

$\Rightarrow 23-x=\sqrt{(x+17)(x+1)} \Rightarrow (23-x)^2=(x+17)(x+1)$

$\Rightarrow 529-46x+x^2=x^2+18x+17 \Rightarrow 64x=512 \Rightarrow \boxed{x=8}$

ق ق

$x=8 \Rightarrow \sqrt{8+17}-\sqrt{8+1}=\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$

$x=8 \Rightarrow 2\sqrt{8-7}=2\sqrt{1}=2$

ه) $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{2x-2}=0$

$$\Longrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{2x-2}\xrightarrow{\text{به توان } 2} x+\sqrt{x-2}=2x-2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x-2}=x-2\xrightarrow{\text{به توان } 2} x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x-2=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{آزمایش}: \sqrt{2}-\sqrt{2}=0 \checkmark \\ x=3 & \text{آزمایش}: \sqrt{4}-\sqrt{4}=0 \checkmark \end{cases}$$

⇐ هر دو جواب قابل قبول

و) $\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=1$

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}=1 \Rightarrow \frac{x+1-2}{\sqrt{x+1}}=1 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}=1 \Rightarrow x-1=\sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2-2x+1=x+1 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow 1-2\neq 1 \times \\ x=3 \Rightarrow 2-1=1 \checkmark \end{cases}$$

پس $x=0$ غیرقابل قبول و $\boxed{x=3}$ قابل قبول است.

ز) $\sqrt{2x-\sqrt{1+4x-x^2}}=2$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} 2x-\sqrt{1+4x-x^2}=4 \Rightarrow \sqrt{1+4x-x^2}=2x-4 \xrightarrow{\text{توان } 2} 1+4x-x^2=4x^2-16x+16$$

$$\Rightarrow 5x^2-20x+15=0 \xrightarrow{\div 5} x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow 0\neq 2 \times \\ x=3 \Rightarrow \sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2 \checkmark \end{cases}$$

⇐ قابل قبول $\boxed{x=3}$

ژ) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x \Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

عبارت $(1-\sqrt{x})$ در هر دو طرف معادله هست با محاسبه ریشه این عبارت می‌توانیم آن را از طرفین حذف کنیم

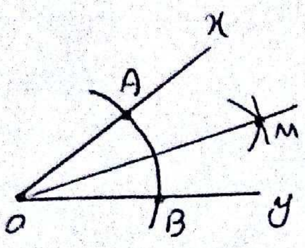
$1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}}=1+\sqrt{x} \Rightarrow (1+\sqrt{x})^2=1 \Rightarrow 1+\sqrt{x}=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x}=1 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 1+\sqrt{x}=-1 \Rightarrow \sqrt{x}=-2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس معادله دو جواب $\boxed{x=1}$ و $\boxed{x=0}$ دارد.

فصل ۲: هندسه

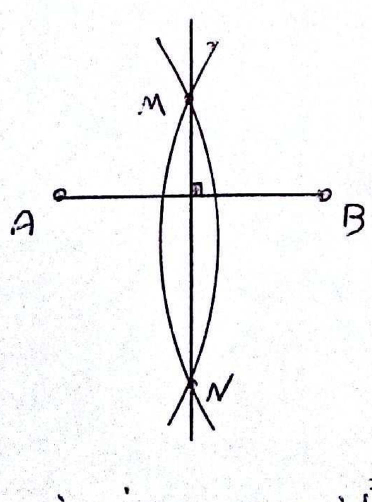
ترسیم نیمساز زاویه به کمک خط کش و پرگار



زاویه $\widehat{xOy}$ را در نظر می گیریم، دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و به مرکز O کمانی می زنیم تا نیم خطهای Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند. سپس دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B کمانی می زنیم تا دو کمان همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع کنند O را به M وصل می کنیم تا نیمساز زاویه xOy رسم شود.

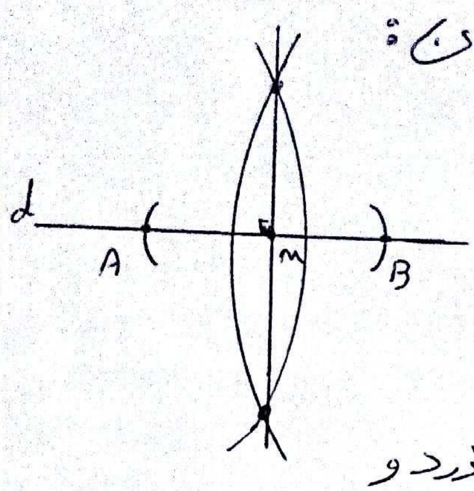
خاصیت نیمساز:
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس

ترسیم عمود منصف یک پاره خط به کمک خط کش و پرگار



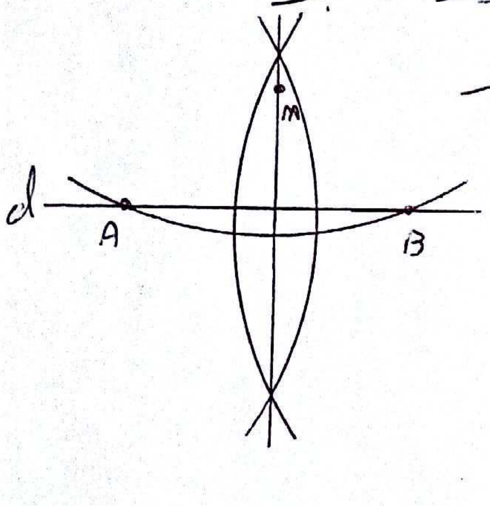
می دانیم عمود منصف هر پاره خط، خطی است که از وسط آن پاره خط گذشته و بر آن عمود باشد. پاره خط دلخواه AB را رسم می کنیم به مرکز A و B و به شعاع بزرگتر از نصف AB کمانهایی می زنیم تا همدیگر را در دو نقطه A و B قطع کند M و N را به هم وصل می کنیم، خطی که از M و N می گذرد عمود منصف پاره خط AB است.

خاصیت عمود منصف:
هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس



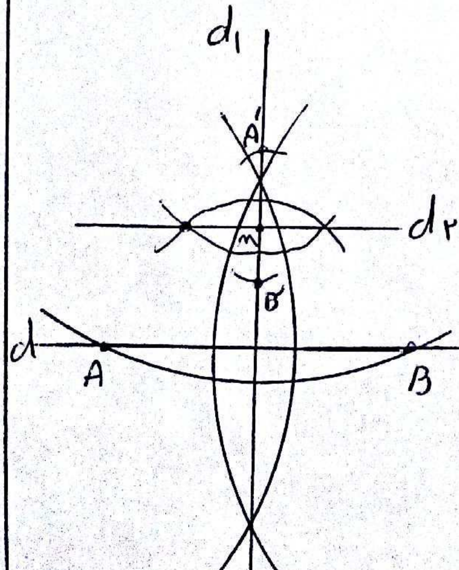
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن:

نقطه M را روی خط دلخواه d در نظر می‌گیریم به مرکز M و به شعاع دلخواه دو کمان هم اندازه در طرفین M می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. این عمود منصف از نقطه M می‌گذرد و بر خط d عمود است.



رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن:

نقطه M را خارج خط d در نظر می‌گیریم، به مرکز M و به شعاع دلخواه، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند، عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. این عمود منصف از نقطه M می‌گذرد و بر خط d عمود است.



رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن:

نقطه M را خارج خط d در نظر می‌گیریم. به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف AB را رسم می‌کنیم که از M می‌گذرد این خط را d_1 می‌نامیم به مرکز M و به شعاع دلخواه دو کمان در طرفین M می‌زنیم تا خط d_1 را در دو نقطه A' و B' قطع کند. عمود منصف $A'B'$ را رسم می‌کنیم و آن را d_2 می‌نامیم خط d_2 بر d_1 عمود است و با خط d موازی است.

ویژگی های تناسب :

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \qquad b, d \neq 0$ (طرفین وسطین کردن)

(مثال) $\frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۱۲} \Leftrightarrow ۲ \times ۱۲ = ۳ \times ۸$

۲) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad a, b, c, d \neq 0$ (معکوس کردن طرفین تناسب)

(مثال) $\frac{۵}{۷} = \frac{۱۰}{۱۴} \Leftrightarrow \frac{۷}{۵} = \frac{۱۴}{۱۰}$

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases} \qquad a, b, c, d \neq 0$ تعویض جای (طرفین و وسطین)

(مثال) $\frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۵} = \frac{۴}{۲}$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad b, d \neq 0$ (ترکیب نسبت در صورت)

(مثال) $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{۲+۳}{۳} = \frac{۴+۶}{۶} \Rightarrow \frac{۵}{۳} = \frac{۱۰}{۶}$

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \qquad b, d \neq 0$ (ترکیب نسبت در مخرج)

(مثال) $\frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow \frac{۳}{۳+۴} = \frac{۶}{۶+۸} \Rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{۶}{۱۴}$

۶) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \qquad b, d \neq 0$ (تفصیل نسبت در صورت)

(مثال) $\frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۶} \Rightarrow \frac{۳-۲}{۲} = \frac{۹-۶}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$

۷) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \qquad b, d \neq 0$ (تفصیل نسبت در مخرج)

مثال $\frac{۱۰}{۳} = \frac{۲۰}{۶} \Rightarrow \frac{۱۰}{۱۰-۳} = \frac{۲۰}{۲۰-۶} \Rightarrow \frac{۱۰}{۷} = \frac{۲۰}{۱۴}$

۸) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$ $\qquad \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲+۴+۶}{۳+۶+۹} = \frac{۱۲}{۱۸}$

مثال) در عبارت مقابل نسبت $\frac{a}{b}$ را بدست آورید. $\frac{3a+10}{10+2a}=\frac{3b+7}{7+2b}$

$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 21a+6ab+\cancel{70}+20b=30b+\cancel{70}+6ab+14a \Rightarrow 7a=10b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{10}{7}$

انواع استدلال:

۱) استدلال تمثیلی: به استدلالی که با یک مثال به نتیجه‌گیری کلی می‌رسد استدلال تمثیلی گفته می‌شود.

مثال) مجموع زاویه‌های مستطیل $360°$ است پس نتیجه می‌گیریم مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی $360°$ است.

۲) استدلال استقرایی: اگر با بررسی تعدادی حالت خاص به یک نتیجه‌گیری کلی برسیم، این نوع استدلال را استدلال استقرایی می‌نامند که نوعی روش از جزء به کل رسیدن است و اثبات ریاضی محسوب نمی‌شود.

مثال) چند نوع مثلث مختلف رسم می‌کنیم و مجموع زاویه‌های داخلی آنها را بدست می‌آوریم و نتیجه می‌گیریم که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۳) استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری بر مبنای حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم. همه اثبات‌های ریاضی استدلال استنتاجی هستند.

قضیه:
عبارت شرطی که همواره درست باشد را قضیه می‌نامند که معمولاً با اگر شروع و با آنگاه پایان می‌یابد. قسمتی که بعد از اگر می‌آید را فرض و قسمتی که بعد از آنگاه می‌آید را حکم می‌نامند.

مثال) اگر $\underbrace{\text{مثلث قائم‌الزاویه باشد}}_{\text{فرض}}$ آنگاه $\underbrace{\text{رابطه فیثاغورس در آن برقرار است}}_{\text{حکم}}$

عکس قضیه:
اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم عکس قضیه بدست می‌آید.

مثال) اگر رابطه فیثاغورس در مثلثی برقرار باشد آنگاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

تذکر مهم: ممکن است عکس یک قضیه همواره درست نباشد.

قضیه: اگر $x=2$ باشد آنگاه: $x^2=4$ (ص)

عکس قضیه: اگر $x^2=4$ باشد آنگاه: $x=2$ (غ) $x=\pm 2$

قضیه دوشرطی:

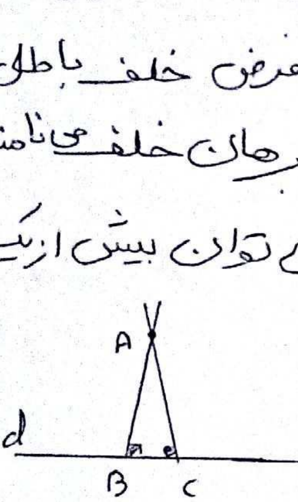
اگر یک قضیه و عکس آن درست باشد آن را قضیه دوشرطی می نامند

مثال) قضیه فیثاغورس

برهان خلف (برهان غیرمستقیم):

برای اثبات برخی قضیه ها، فرض می کنیم حکم نادرست است (فرض خلف) و به یک تناقض (نتیجه نادرست) می رسیم و می گوییم فرض خلف باطل و حکم برقرار است، این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف می نامند

قضیه: ثابت کنید از یک نقطه غیرواقع بر یک خط نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.



فرض	A نقطه ای غیرواقع بر d
حکم	از A نمی توان بیش از یک عمود بر d رسم کرد.

اثبات: فرض کنیم حکم نادرست باشد (فرض خلف)

یعنی از نقطه A دو عمود بر خط d بتوانیم رسم کنیم دراینصورت مطابق شکل مثلثی با دو زاویه قائمه خواهیم داشت که مجموع زاویه های داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه خواهد بود و این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است مثال نقض می گویند.

مثال) برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید.

۱) همه اعداد اول فرد هستند نادرست: زیرا ۲ اول است و فرد نیست

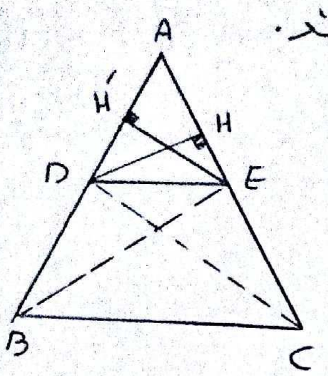
کایت

۲) اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند آن چهارضلعی مربع یا لوزی است. نادرست

۳) به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار n^2+n+41 عددی اول است نادرست $n=41 \Rightarrow$ مرکب

قضیه تالس (قضیه جزئی):

اگر خطی به موازات یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند بر روی آن دو ضلع پاره خط‌های متناسب ایجاد می‌کند.



فرض	$DE \parallel BC$
حکم	$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

حل: DH هم ارتفاع مثلث $A\hat{D}E$ است و هم ارتفاع مثلث $D\hat{E}C$ پس:

$$\frac{S_{A\hat{D}E}}{S_{D\hat{E}C}} = \frac{\frac{1}{2}\times DH \times AE}{\frac{1}{2}\times DH\times EC} \Rightarrow \frac{S_{A\hat{D}E}}{S_{D\hat{E}C}} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

EH' هم ارتفاع مثلث $A\hat{D}E$ است و هم ارتفاع مثلث $D\hat{B}E$ پس:

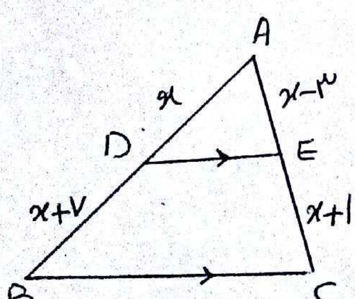
$$\frac{S_{A\hat{D}E}}{S_{D\hat{B}E}} = \frac{\frac{1}{2}\times EH'\times AD}{\frac{1}{2}\times EH'\times DB} \Rightarrow \frac{S_{A\hat{D}E}}{S_{D\hat{E}B}} = \frac{AD}{DB} \quad (2)$$

از طرفی DE قاعده مشترک دو مثلث $D\hat{E}C$ و $D\hat{B}E$ است و چون ارتفاع های این دو مثلث برابرند پس:

$$S_{D\hat{E}C} = S_{D\hat{B}E} \quad (3)$$

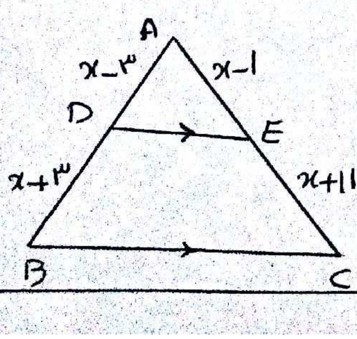
$$(1),(2),(3) \Rightarrow \boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AD}{AD+DB} = \dfrac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \\ \dfrac{DB}{AD} = \dfrac{EC}{AE} \Rightarrow \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{EC}{AC} \end{cases}$$

مثال) مقدار x را بیابید.



$$\frac{x}{x+7} = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow x(x+1) = (x-3)(x+7)$$

$$\Rightarrow x^2+x = x^2+4x-21 \Rightarrow x = 4x-21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

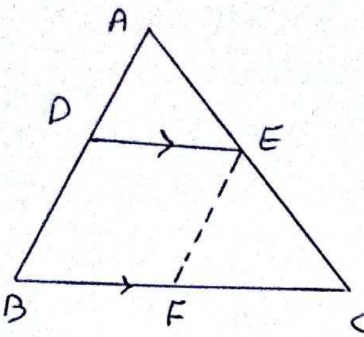


$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-1}{x+11} \Rightarrow (x-3)(x+11) = (x-1)(x+3)$$

$$\Rightarrow x^2+8x-33 = x^2+2x-3 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

تعمیم قضیه تالس (قضیه کلی):

اگر خطی به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می سازد که اضلاعش با اضلاع مثلث اصلی متناسبند.



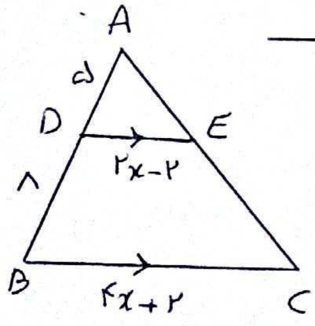
فرض	$DE \parallel BC$
حکم	$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

اثبات: از نقطه E پاره خط EF را موازی AB رسم می کنیم چهارضلعی DEFB متوازی الاضلاع است (چون $DE \parallel BF$ و $DB \parallel EF$). پس: $DB = EF \ , \ DE = BF$

$$\overset{\triangle}{ABC} : DE \parallel BC \xRightarrow{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{CAB} : EF \parallel AB \xRightarrow{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

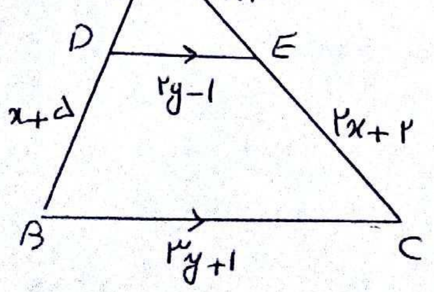
$$(1),(2) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \xRightarrow{BF=DE} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



مثال) مقدار x را بدست آورید:

$$\frac{2x-2}{4x+2} = \frac{5}{13} \Rightarrow 26x - 26 = 20x + 10 \Rightarrow 6x = 36$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 6}$$



مثال) مقادیر x و y را بدست آورید:

$$\frac{x}{x+5} = \frac{x+1}{2x+2} \Rightarrow 2x^2 + 2x = x^2 + 6x + 5$$

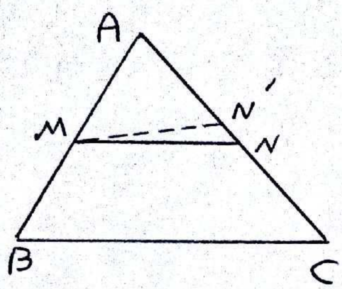
$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=5} & \text{ق ق} \\ x = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{x}{x+x+5} = \frac{2y-1}{3y+1} \xRightarrow{x=5} \frac{5}{15} = \frac{2y-1}{3y+1}$$

$$\Rightarrow 15y + 5 = 30y - 15 \Rightarrow 15y = 20 \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}}$$

عکس قضیه تالس:

اگر خطی چنان رسم شود که دو ضلع مثلثی را قطع کند و بر روی آن دو ضلع پاره خطهای متناسب ایجاد کند آن خط با ضلع سوم موازی است.



فرض	$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$
حکم	$MN \parallel BC$

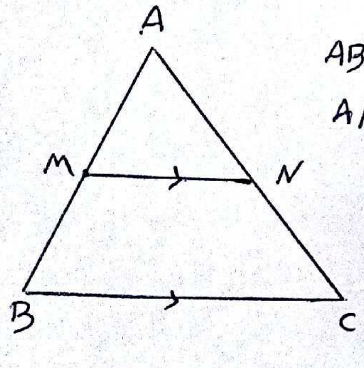
اثبات با برهان خلف:

فرض کنیم $MN \nparallel BC$ (فرض خلف) پس از نقطه M پاره خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم طبق قضیه تالس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN'}{AC} \\ \text{طبق فرض}: \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{AN'}{AC} \Rightarrow AN=AN'$$

پس N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.

تمرین: ثابت کنید در هر مثلث پاره خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل کند با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

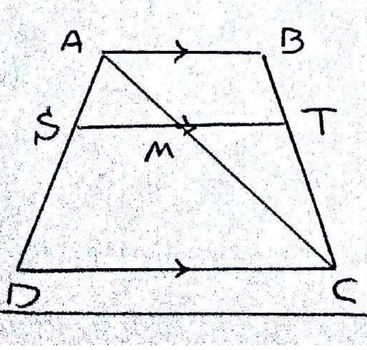


$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ وسط } M \Rightarrow AM=MB \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{1}{2} \\ AN \text{ وسط } N \Rightarrow AN=NC \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} MN \parallel BC$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow MN=\frac{1}{2}BC$$

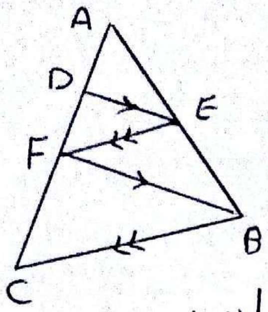
تمرین: در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است ثابت کنید: $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

حل: قطر AC را رسم می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ACD}: SM \parallel CD \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{AM}{MC} \\ \overset{\triangle}{ABC}: MT \parallel AB \Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{BT}{TC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$$

«مطالب تکمیلی»



۱) در مثلث ABC داریم: $DE \parallel FB$ و $BC \parallel EF$

الف) ثابت کنید: $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$

ب) ثابت کنید: $AF^2 = AD \times AC$

ج) اگر $AE=5$ و $EB=2$ و $AD=3$ باشد طول پاره خط FC را بیابید.

(حل الف)

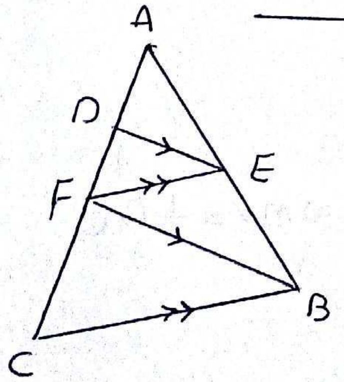
$$\left.\begin{aligned} \overset{\triangle}{ABF}: DE \parallel BF &\Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AE}{EB} \\ \overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC &\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$

(حل ب)

$$\left.\begin{aligned} \overset{\triangle}{ABF}: DE \parallel BF &\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AE}{AB} \\ \overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC &\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF^2 = AC \times AD$$

$\overset{\triangle}{ABF}$: (تالس) $\Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{3}{DF} = \frac{5}{2} \Rightarrow DF = 1.2$

$\overset{\triangle}{ABC}$: (تالس) $\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{4.2}{FC} = \frac{5}{2} \Rightarrow FC = \frac{8.4}{5} = 1.68$



فرمول: در مثلث مقابل فرمول زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} &DE \parallel FB \\ &BC \parallel EF \end{aligned} \Rightarrow \boxed{AF^2 = AD \times AC}$$

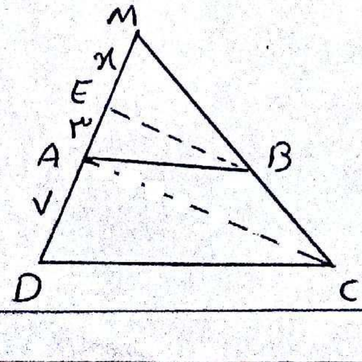
تست: در ذوزنقه ABCD، قطر AC موازی پاره خط BE است. اگر $AD=7$ و $AE=3$ باشد اندازه MD کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۱۲

۲) ۱۲٫۲۵ ✓

۳) ۱۲٫۵

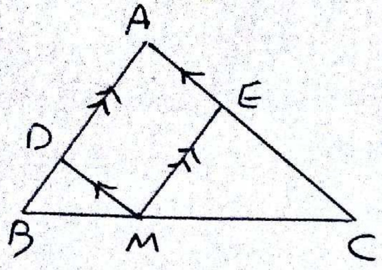
۴) ۱۲٫۷۵



$(x+3)^2 = x(x+10)$

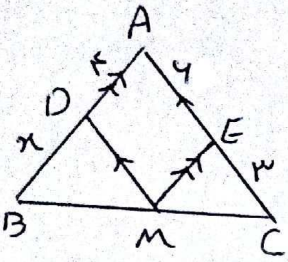
$\Rightarrow x^2+6x+9 = x^2+10x$

$\Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2.25 \Rightarrow MD = 12.25$



فرمول: از نقطه دلخواه M در روی ضلع BC از مثلث دلخواه ABC خطوطی به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا آنها را به ترتیب در D و E قطع کنند آنگاه:

$$\boxed{AD \times AE = BD \times CE}$$

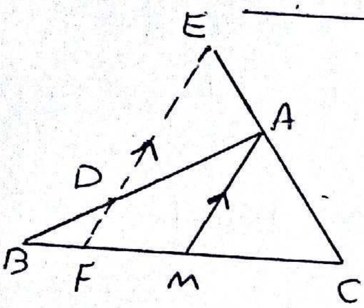


تست: در شکل مقابل اندازه x را بیابید.

$AD \times AE = BD \times CE$

$\Rightarrow 4 \times 6 = x \times 3 \Rightarrow \boxed{x = 8}$

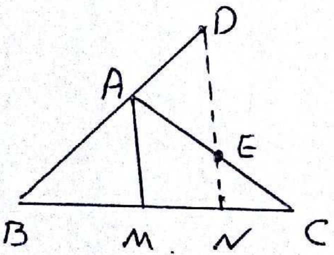
الف) ۵
ب) ۶
ج) ۷
د) ۸



فرمول: در مثلث دلخواه ABC از نقطه F واقع بر ضلع BC خطی موازی میانه AM رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در D و امتداد ضلع AC را در نقطه E قطع کند آنگاه:

$$\boxed{\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}}$$

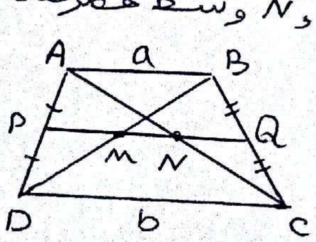
تست: در مثلث ABC: $AB = \frac{2}{3}AC$ ، پاره‌خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)



۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{5}$

طبق فرمول بالا: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$

فرمول: در ذوزنقه ABCD، نقاط P و Q وسط ساق‌ها و M و N وسط قطرها هستند آنگاه:



1) $PQ \parallel AB \parallel CD$ 2) $PQ = \frac{a+b}{2}$

3) $PM = NQ = \frac{a}{2}$ 4) $MN = \frac{b-a}{2}$

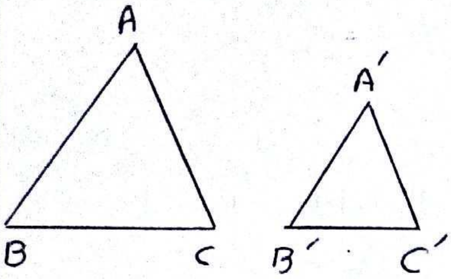
تست: در ذوزنقه ABCD نقاط P و Q وسط ساق‌ها هستند. اگر قطرهای AC و BD پاره‌خط PQ را به سه قطعه با طول یکسان تقسیم کنند قاعده بزرگ چند برابر قاعده کوچک است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) ۲ ✓ ۴) ۳

$$PM = MN = NQ \Rightarrow \begin{cases} PM = NQ = \frac{a}{2} \\ MN = \frac{b-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{b-a}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow b - a = a \Rightarrow b = 2a$$

تشابه مثلثها :

دو مثلث را متشابه می‌گویند هرگاه زاویه‌های متناظرشان باهم برابر و اضلاع متناظرشان باهم متناسب باشند.



$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

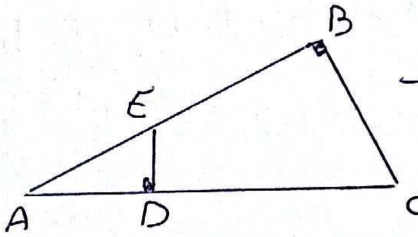
$\hat{C} = \hat{C}'$

k را نسبت تشابه می‌نامند.

حالتهای تشابه دو مثلث :

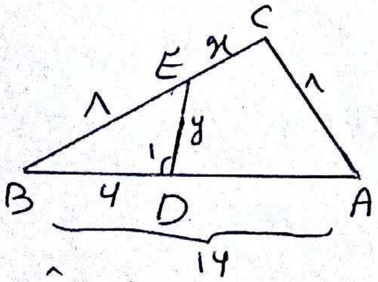
حالت اول: اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث باهم متشابه‌اند (حالت تساوی دو زاویه)

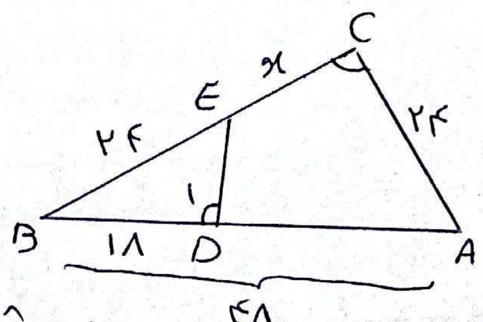
مثال) دلیل تشابه دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ را بیان کنید و تناسب بین اضلاع متناظر را بنویسید.



$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \text{ مشترک} \\ \hat{D} = \hat{B} = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{BC}$

مثال) در شکلهای زیر $\hat{D}_1 = \hat{C}$ ، طول x و y را بیابید.





$\left.\begin{array}{l} \hat{D}_1 = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{BDE} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$\Rightarrow \frac{۸}{۱۴} = \frac{۴}{x+۸} = \frac{y}{۸}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{۱۴} = \frac{۴}{x+۱۸} \Rightarrow x = ۴ \\ \frac{۸}{۱۴} = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۴ \end{cases}$

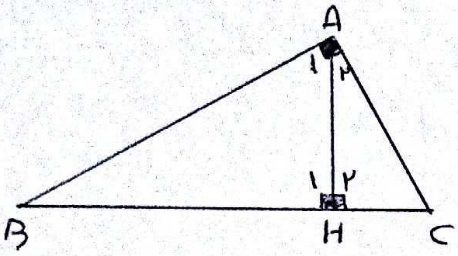
$\left.\begin{array}{l} \hat{D}_1 = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{BDE} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$\Rightarrow \frac{۲۴}{۴۸} = \frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{y}{۲۴}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲۴}{۴۸} = \frac{۱۸}{۲۴+x} \Rightarrow x = ۱۲ \\ \frac{۲۴}{۴۸} = \frac{y}{۲۴} \Rightarrow y = ۱۲ \end{cases}$

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه:

در مثلث قائم الزاویه $A\hat{B}C$ که در رأس A قائمه است ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:



۱) $AB^2 = BH \cdot BC$

۲) $AB \cdot AC = BC \cdot AH$

۳) $AC^2 = CH \cdot BC$

۴) $AH^2 = BH \cdot CH$

۵) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_1 = \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \begin{cases}\boxed{AB^2 = BH \cdot BC} \\ \boxed{AB \cdot AC = BC \cdot AH}\end{cases}$$

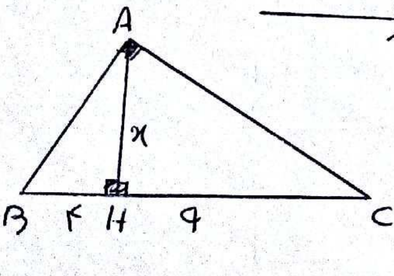
$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_2 = \hat{A} \\ \hat{C} = \hat{C}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \boxed{AC^2 = CH \cdot BC}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C} = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_2 \qquad \left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{A}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$$

$$\Rightarrow \boxed{AH^2 = BH \cdot CH}$$

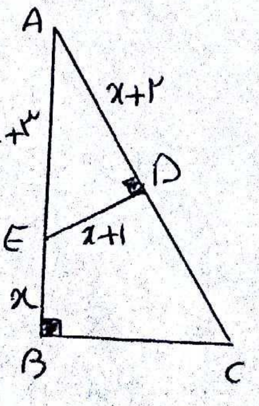
$$AB^2 + AC^2 = BH \cdot BC + CH \cdot BC = (BH + CH) \cdot BC = BC \cdot BC = BC^2$$

$$\Rightarrow \boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$$



مثال) مقدار x را بیابید.

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow x^2 = 4 \times 9 \Rightarrow x = 6$$



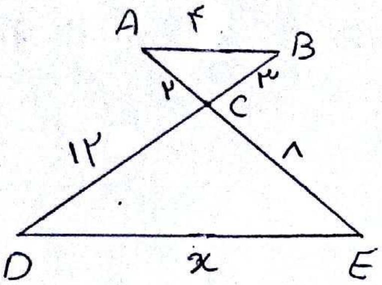
مثال) در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$، اندازه BC را بیابید.

$$(x+3)^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{ق ق} \\ x = -2 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A} \\ \hat{B} = \hat{D}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{x+1}{BC} = \frac{x+2}{2x+3}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{2+1}{BC} = \frac{2+2}{4+3} \Rightarrow BC = \frac{21}{4}$$

حالت دوم: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آنها باهم برابر باشند آن دو مثلث متشابه اند (حالت تناسب دو ضلع و تساوی یک زاویه)

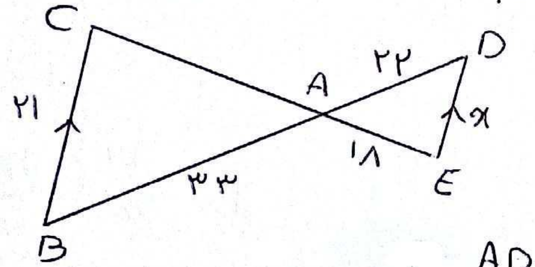


مثال) در شکل مقابل حاصل x کدام است؟

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AC}{CE}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\\ \frac{BC}{CD}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تساوی یک زاویه}]{\text{تناسب دو ضلع}} \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{CDE}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۴}{x}\Rightarrow x=۱۶$$

تست: در شکل مقابل اندازه پاره خط CE برابر ۴۵ سانتیمتر است و $BC \parallel DE$ اندازه $AC+DE$ کدام است؟



$AC=۴۵-۱۸=۲۷$

۱) ۴۱ ✓

۲) ۳۵

۳) ۴۶

۴) ۴۹

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AD}{AB}=\frac{۲۲}{۳۳}=\frac{۲}{۳}\\ \frac{AE}{AC}=\frac{۱۸}{۲۷}=\frac{۲}{۳}\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{وتساوی یک زاویه}]{\text{تناسب دو ضلع}} \overset{\triangle}{ADE}\sim \overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow \frac{x}{۲۱}=\frac{۲}{۳}$$

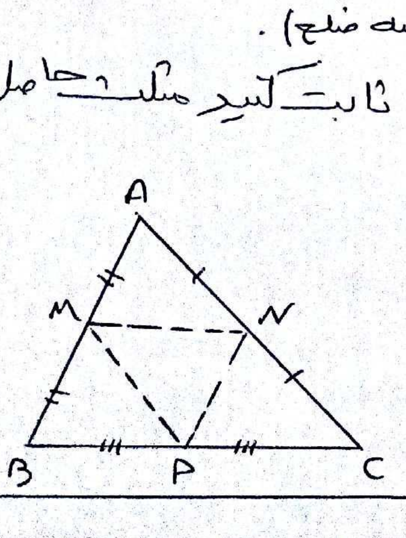
$$\Rightarrow \boxed{x=۱۴}$$

$$AC+DE=۲۷+۱۴=۴۱$$

حالت سوم: اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد آن دو مثلث متشابه اند. (حالت تناسب سه ضلع).

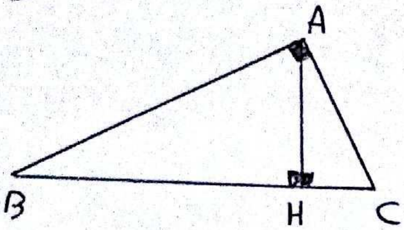
مثال) در یک مثلث، وسط ضلع ها را بهم وصل می کنیم، ثابت کنید مثلث حاصل با مثلث اولیه متشابه است.

حل: می دانیم خطی که وسط دو ضلع مثلثی را بهم وصل می کند مساوی نصف ضلع سوم است.



$$\left.\begin{array}{l}\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{NP}{AB}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{MP}{AC}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{سه ضلع}]{\text{تناسب}} \overset{\triangle}{MNP}\sim \overset{\triangle}{ABC}$$

تمرین: در مثلث قائم الزاویه مقابل به کمک رابطه‌های طولی مقادیر مجهول را بدست آورید.



الف) $BH=9\ ,\ CH=4\ ,\ AH=?\ ,\ AB=?,\ AC=?$

ب) $AB=10\ ,\ BC=12\ ,\ AC=?\ ,\ AH=?$

ج) $AB=8\ ,\ AC=6\ ,\ BH=?\ ,\ CH=?$

د) $AB=8\ ,\ AH=4\ ,\ BC=?\ ,\ AC=?$

حل الف):

$$AH^2=BH\cdot CH \Rightarrow AH^2=9\times 4=36 \Rightarrow AH=6$$
$$AB^2=AH^2+BH^2=6^2+9^2=117 \Rightarrow AB=\sqrt{117}$$
$$AC^2=AH^2+CH^2=6^2+4^2=52 \Rightarrow AC=\sqrt{52}$$

حل ب)

$$AC^2=BC^2-AB^2=12^2-10^2=44 \Rightarrow AC=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$$
$$AH\cdot BC=AB\cdot AC \Rightarrow AH\cdot 12=10\times 2\sqrt{11} \Rightarrow AH=\frac{10\times 2\sqrt{11}}{12}=\frac{5\sqrt{11}}{3}$$

حل ج)

$$BC^2=AB^2+AC^2=8^2+6^2=100 \Rightarrow BC=10$$
$$AB^2=BH\cdot BC \Rightarrow 8^2=BH\times 10 \Rightarrow BH=6.4$$
$$AC^2=CH\cdot BC \Rightarrow 6^2=CH\times 10 \Rightarrow CH=3.6$$

حل د)

$$BH^2=AB^2-AH^2=8^2-4^2=48 \Rightarrow BH=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$
$$AH^2=BH\cdot CH \Rightarrow 4^2=4\sqrt{3}\times CH \Rightarrow CH=\frac{16}{4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$BC=BH+CH=4\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$
$$AC^2=CH\cdot BC=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{16\sqrt{3}}{3}=\frac{192}{9} \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{192}}{3}$$

نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه:

۱) در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها، ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازها برابر است با نسبت تشابه

۲) در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها برابر است با مجذور نسبت تشابه

مثال ۱) طول اضلاع یک مثلث ۱۰، ۱۲ و ۱۵ سانتیمتر است و طول بلندترین ضلع مثلثی مشابه به آن برابر ۱۰ سانتیمتر است. محیط مثلث دوم را بدست آورید.

$$\frac{15}{10}=\frac{12}{x}=\frac{10}{y}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{120}{15}=8\ cm\\ y=\frac{100}{15}=6.6\,cm\end{cases}$$

$$\text{محیط}=8+10+6.6\simeq 24.6$$

تست: مثلثی به اضلاع ۵، ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹، ۷ و b متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای a کدام است؟ (تجربی - ۹۰)

۱) $\frac{36}{7}$

۲) $\frac{45}{7}$

۳) $\frac{36}{5}$

۴) $\frac{35}{4}$

حل: گزینه (۲)

برای اینکه a بیشترین مقدار را به خود اختصاص دهد باید با بزرگترین ضلع از مثلث دوم متناسب باشد یعنی یا با ۹ یا با b

$$\frac{a}{9}=\frac{4}{b}=\frac{5}{7}\Rightarrow a=\frac{45}{7}\qquad b<7<9$$

$$\frac{a}{9}=\frac{5}{b}=\frac{4}{7}\Rightarrow a=\frac{36}{7}\qquad 7<b<9$$

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{9}=\frac{4}{7}\quad \text{غ ق ق}\qquad 7<9<b$$

مثال ۲) طول ضلع های مثلث $\hat{ABC}$ برابر ۷ و ۹ و ۱۴ سانتیمتر و مثلث $\hat{MNP}$ با مثلث $\hat{ABC}$ متشابه است و طول بزرگترین ضلع آن ۲۱ سانتیمتر است. محیط مثلث MNP را بدست آورید و نسبت مساحتهای دو مثلث را پیدا کنید.

نسبت تشابه = نسبت محیطها

$$\hat{ABC}\ \text{محیط}=7+9+14=30\,cm$$

$$\frac{30}{\text{محیط}\ MNP}=\frac{14}{21}\Rightarrow \text{محیط}\ \hat{MNP}=45$$

$$\text{نسبت محیطها}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}=\text{نسبت تشابه}\Rightarrow \text{نسبت مساحتها}=(\text{نسبت تشابه})^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

مثال ۳) دو مثلث $\hat{ABC}$ و $\hat{A'B'C'}$ متشابه هستند. اگر طول اضلاع مثلث $\hat{ABC}$ به ترتیب ۳ و ۵ و ۷ باشد و محیط مثلث $\hat{A'B'C'}$ برابر ۳۰ باشد:

الف) نسبت مساحتهای این دو مثلث را بدست آورید. ب) طول اضلاع مثلث $\hat{A'B'C'}$ را بدست آورید.

$$\frac{\text{محیط}\ ABC}{\text{محیط}\ A'B'C'}=\frac{3+5+7}{30}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}=K\Rightarrow\frac{S_{\hat{ABC}}}{S_{\hat{A'B'C'}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\hat{ABC}\sim\hat{A'B'C'}\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3}{A'B'}=\frac{5}{B'C'}=\frac{7}{A'C'}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}A'B'=6\\ B'C'=10\\ A'C'=14\end{cases}$$

فصل ۳ : تابع

تابع : هر تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب دارای مولفه‌های اول مساوی نباشند.

$$f=\{(1,7),(3,4),(9,5)\}$$ تابع است

تست : رابطه $f=\{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ (خارج - ۸۵)

۱) ۲-

۲) ۱-

۳) ۲

۴) هیچ مقدار m

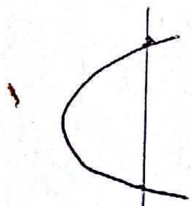
گزینه ۲ :

$$m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$$

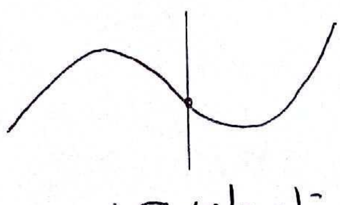
$m=2 \Rightarrow f=\{(3,4),(2,1),(-2,2),(3,4),(2,4)\}$ تابع نیست

$m=-1 \Rightarrow f=\{(3,1),(2,1),(-2,-1),(3,1),(-1,4)\}$ تابع است

از نظر هندسی (رسم نمودار) یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی محور yها نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

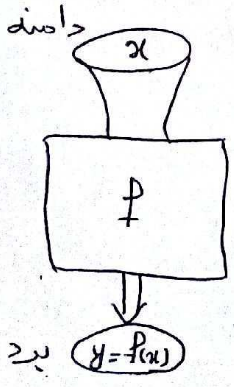


تابع نیست



تابع است.

تابع به عنوان ماشین :



ضابطه یک تابع را معمولاً بصورت $y=f(x)$ نشان می‌دهند که f مخفف کلمه function به معنای تابع است. وقتی می‌گوییم y تابعی از x است یعنی yها از xها تبعیت می‌کنند

به عبارت دیگر مقدار تابع که همان مقدار خروجی یعنی $f(x)$ است از مقدار ورودی آن یعنی x بدست می‌آید.

$$(x,y)\in f \Leftrightarrow y=f(x)$$

مثال) اگر $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ باشد حاصل $f(a-\frac{1}{a})$ را به ازای $a<0$ بیابید.

$$f(x)=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow f(a-\frac{1}{a})=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2+4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2+4}=$$

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2}=\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2}=|a+\frac{1}{a}| \overset{a<0}{=} -(a+\frac{1}{a})$$

تست: اگر $f(x)=\frac{x^2+2x+9}{x^2+2x-6}$ باشد حاصل $f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{9}{2}$ ۴) -2

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1+8}{x^2+2x+1-7}=\frac{(x+1)^2+8}{(x+1)^2-7}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}-1)=\frac{(\sqrt{2}-1+1)^2+8}{(\sqrt{2}-1+1)^2-7}=\frac{2+8}{2-7}=\frac{10}{-5}=-2$$

تست: اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{2x+2}{2-x}$ باشند ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی - ۹۴)

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) $2x$

$$g(f(x))=g(\frac{2x-1}{x+1})=\frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}=\frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{\frac{2x+2-(2x-1)}{x+1}}=\frac{4x}{3}=2x$$ (گزینه ۴)

مثال) در هر یک از حالتهای زیر ضابطه $f(x)$ را بیابید.

الف) $f(x)+2f(1)=x^2-4x$

$$x=1 \Rightarrow f(1)+2f(1)=1^2-4(1) \Rightarrow 3f(1)=-3 \Rightarrow f(1)=-1$$

$$f(x)+2(-1)=x^2-4x \Rightarrow f(x)=x^2-4x+2$$

ب) $f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+1$ $\quad x\to\frac{1}{x} \Rightarrow f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{3}{x}+1$

$$\begin{cases} f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+1 \\ f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{3}{x}+1 \quad \times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+1 \\ 2f(\frac{1}{x})-4f(x)=\frac{6}{x}+2 \end{cases} +$$

$$-3f(x)=3x+1+\frac{6}{x}+2 \Rightarrow f(x)=-x-\frac{2}{x}-1 \quad (x\neq 0)$$

تست: اگر برای هر $x \in R$ بدانیم $2f(2x+1)-x^2f(3)=2x^2+8x-4$ حاصل $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

۱) صفر
۲) 1
۳) 2
۴) 3

گزینه (۳): $f(3)$ مزاحم است پس:

$$x=1 \Rightarrow 2f(3)-1^2 \times f(3)=2(1)^2+8(1)-4 \Rightarrow f(3)=6$$

$$2f(2x+1)-6x^2=2x^2+8x-4 \Rightarrow 2f(2x+1)=8x^2+8x-4$$

$$\Rightarrow f(2x+1)=4x^2+4x-2 \Rightarrow f(2x+1)=4x^2+4x+1-3 \Rightarrow f(2x+1)=(2x+1)^2-3$$

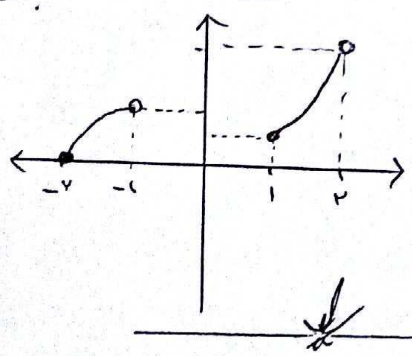
$$\Rightarrow f(x)=x^2-3 \Rightarrow f(\sqrt{5})=(\sqrt{5})^2-3=5-3=2$$

دامنه و برد تابع:

مجموعه شامل مولفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع f را دامنه تابع نامیده و با D_f (Domain) نشان می‌دهند و مجموعه شامل مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f را برد تابع نامیده و با R_f (Range) نشان می‌دهند.

$$f=\{(1,7),(-3,6),(5,4)\} \qquad D_f=\{1,-3,5\} \qquad R_f=\{7,6,4\}$$

در دستگاه مختصات دکارتی تصویر نمودار روی محور xها نشان دهنده دامنه تابع و تصویر نمودار روی محور yها نشان دهنده برد تابع است.



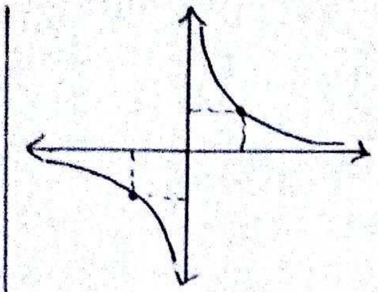
$$D_f=[-2,-1)\cup[1,2)$$

$$R_f=[0,1)\cup[\tfrac{1}{2},2)=[0,2)$$

توابع گویا:

تابع‌هایی که ضابطه آنها بصورت $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ است بطوریکه $p(x)$، $q(x)$ چند جمله‌ای بوده و $q(x)\neq 0$ را تابع گویا می‌نامند (مثال)

$$f(x)=\frac{x}{x+5} \quad , \quad g(x)=\frac{x^3+x^2-2}{x^2+4x-1} \quad , \quad h(x)=\frac{7}{x^3-x+1}$$



از مهمترین توابع گویا می توان به تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ اشاره کرد که نمودار آن بصورت مقابل است:

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ $\qquad$ $R_f=\mathbb{R}-\{0\}$

نکته ریاضی: دامنه توابع گویا برابر همه اعداد حقیقی به غیر از مقادیری که مخرج کسر را صفر می کنند.

دامنه توابع کسری $= D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه های مخرج}\}$

مثال) دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x}{x}$

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

ب) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+x+2}$

$x^2+x+2=0 \Rightarrow \Delta=-7<0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

ج) $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-8x+12}$

$x^2-8x+12=0 \Rightarrow (x-2)(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=6 \end{cases}$ ریشه های مخرج

$D_f=\mathbb{R}-\{2,6\}$

د) $f(x)=\frac{5}{\frac{3}{x}-1}$

$x\neq 0$

$\frac{3}{x}-1\neq 0 \Rightarrow \frac{3}{x}\neq 1 \Rightarrow x\neq 3$ $\qquad D_f=\mathbb{R}-\{0,3\}$

ه) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3|x|+2}$

$x^2-3|x|+2=0 \Rightarrow |x|^2-3|x|+2=0$

$\Rightarrow (|x|-1)(|x|-2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1,-1,2,-2\}$

و) $f(x)=\frac{1}{x-|x|}$

$x-|x|=0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[0,+\infty)=(-\infty,0)$

تست: اگر دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2+ax+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{\pm2\}$ باشد آنگاه $2a-b$ کدام است؟

۱) -4
۲) 4
۳) -8
۴) 8

گزینه (۴): باتوجه به اینکه ±2 ریشه‌های مخرج هستند می‌دانیم اگر ریشه‌های $ax^2+bx+c=0$ برابر α و β باشد آنگاه معادله بصورت $a(x-\alpha)(x-\beta)$ است.

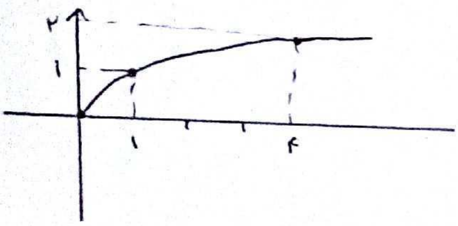
$$2x^2+ax+b=2(x-2)(x+2) \Rightarrow 2x^2+ax+b=2x^2-8 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-8 \end{cases}$$

$$2a-b=2(0)-(-8)=8$$

توابع رادیکالی: توابعی که ضابطه آنها دارای عبارت رادیکالی باشد توابع رادیکالی نامیده می‌شود. (مثال)

$f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$ و

مثال) نمودار تابع $y=f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید.



$D_f=[0,+\infty)$ $R_f=[0,+\infty)$

نکته ریاضی: در تعیین دامنه تابع $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ دو حالت داریم:

۱) اگر n فرد باشد دامنه تابع $f(x)$ با دامنه تابع $g(x)$ برابر است.

۲) اگر n زوج باشد دامنه تابع $f(x)$ برابر مقادیری از xها است که $g(x)\geq 0$ می‌باشد. یعنی برای تعیین دامنه داخل رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر می‌گیریم.

یادآوری: $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$, $|x|\geq a \Rightarrow \begin{cases} x\geq a \\ \text{یا} \\ x\leq -a \end{cases}$

مثال) دامنه توابع زیر را تعیین کنید:

الف) $f(x)=\sqrt{1-x}$

$1-x\geq 0 \Rightarrow 1\geq x \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow D_f=(-\infty,1]$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$

$x^2+5x+6\geq 0$ $(x+2)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
x^2+5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f=(-\infty,-3]\cup[-2,+\infty)$

ج) $f(x)=\sqrt{-x^2(x-1)^2}$

عبارت داخل رادیکال همواره منفی یا صفر است. به ازای $x=0$ و $x=1$ عبارت زیر رادیکال صفر است که این مقادیر قابل قبول هستند.

$D_f=\{0,1\}$

د) $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ $\qquad x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

هـ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x^2-1}{1-x^2}}$

$\dfrac{-x^2-1}{1-x^2}\geq 0 \Rightarrow$ صورت همواره منفی است $\Rightarrow 1-x^2<0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow |x|>1 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases}$

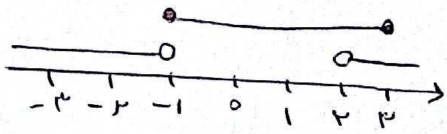
$D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

و) $f(x)=\sqrt{3-x^2+2x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

$3-x^2+2x\geq 0 \Rightarrow x^2-2x-3\leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1)\leq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 3$

$x^2-x-2>0 \Rightarrow (x-2)(x+1)>0 \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ \text{یا} \\ x<-1 \end{cases}$

اشتراک جوابها $= D_f=(2,3]$



ز) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$

$9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9 \Rightarrow |x|\leq 3 \Rightarrow -3\leq x\leq 3$

$x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow |x|>1 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases}$

اشتراک $= D_f=[-3,-1)\cup(1,3]$

ز) $f(x)=\sqrt{\big||x|-2\big|-1}$

$\big||x|-2\big|-1\geq 0 \Rightarrow \big||x|-2\big|\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} |x|-2\geq 1 \Rightarrow |x|\geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x\leq -3 \end{cases} \\ \text{یا} \\ |x|-2\leq -1 \Rightarrow |x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \end{cases}$

$D_f=(-\infty,-3]\cup[-1,1]\cup[3,+\infty)$

تساوی توابع :

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی می‌گویند هرگاه :

۱) دامنه آنها برابر باشند ($D_f = D_g$)

۲) ضابطه آنها باهم برابر باشند ($f(x) = g(x)$)

تمرین : کدام جفت از توابع زیر باهم برابرند؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} - x \\ g(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \end{cases}$

شرط اول : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

شرط دوم : $g(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)} = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1} = \sqrt{x^2+1} - x = f(x)$

پس دو تابع برابرند.

ب) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = \dfrac{x}{x^2} \end{cases}$

$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$g(x) = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} = f(x)$

پس دو تابع برابرند.

ج) $\begin{cases} f(x) = x - 2 \\ g(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2} \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

$D_f \neq D_g$

دو تابع برابر نیستند

د) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} \end{cases}$

$D_f : x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$

$D_g : \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$ $\quad D_f \neq D_g$

دو تابع برابر نیستند

هـ) $\begin{cases} f(x) = |x-1| \\ g(x) = \dfrac{|x^3-1|}{x^2+x+1} \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0 \xrightarrow{a=1>0}$ همواره مثبت است $\Rightarrow D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{|(x-1)(x^2+x+1)|}{x^2+x+1} = \dfrac{|x-1| \times \overbrace{|x^2+x+1|}^{\text{همواره مثبت}}}{x^2+x+1} = \dfrac{|x-1| \times (x^2+x+1)}{x^2+x+1} = |x-1| = f(x)$

پس برابرند.

۹) $\begin{cases} f(x) = \sin x \\ g(x) = \sqrt{1-\cos^2 x} \end{cases}$ $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \neq f(x)$

پس برابر نیستند.

جزء صحیح:

برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آنرا با علامت $[x]$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$[x] = n \Leftrightarrow n \leqslant x < n+1 \quad n \in \mathbb{Z}$

$[۳/۷] = ۳ \Leftrightarrow ۳ \leqslant ۳/۷ < ۴$

$[۵] = ۵ \Leftrightarrow ۵ \leqslant ۵ < ۶$

$[-۲/۷] = -۳ \Leftrightarrow -۳ \leqslant -۲/۷ < -۲$

$[-۹] = -۹ \Leftrightarrow -۹ \leqslant -۹ < -۸$

$[۰/۵] = ۰ \Leftrightarrow ۰ \leqslant ۰/۵ < ۱$

$[-۱۰/۳] = -۱۱ \Leftrightarrow -۱۱ \leqslant -۱۰/۳ < -۱۰$

خواص جزء صحیح:

۱) $[x] \leqslant x < [x]+1$

۲) $0 \leqslant x-[x] < 1$

۳) $x \geqslant n \Rightarrow [x] \geqslant n$

۴) $[x+n] = [x]+n \quad n \in \mathbb{Z}$

۵) $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۶) $[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] \\ \text{یا} \\ [x]+[y]+1 \end{cases}$ $x=۲ \; y=۴$ ، $x=۳/۷ \; y=۴/۵$

۷) $[x+y] \geqslant [x]+[y]$ (نتیجه رابطه ۶)

تابع جزء صحیح:

تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می دهد تابع جزء صحیح می گویند و ضابطه آنرا بصورت $y = f(x) = [x]$ نشان می دهند تابع جزء صحیح را تابع پله‌ای - پلکانی - براکت نیز می نامند. برای رسم نمودار تابع جزء صحیح x را در بازه‌هایی به طول ۱ واحد در نظر گرفته سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.

مثال ۱: نمودار تابع $y=[x]$ را در بازه $[-2,3)$ رسم کنید.

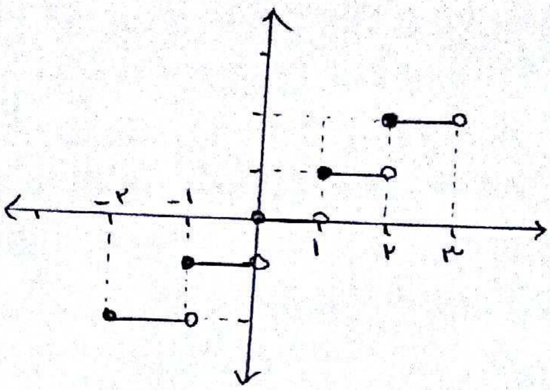
$-2\le x<-1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow y=-2$

$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=-1$

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=0$

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=1$

$2\le x<3 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow y=2$



مثال ۲: نمودار تابع $f(x)=[2x]$ را در بازه $[-1,2)$ رسم کنید.

$-1\le x<2 \Rightarrow -2\le 2x<4$

$-2\le 2x<-1 \Rightarrow [2x]=-2 \Rightarrow y=-2 \quad , \quad -1\le x<-\frac{1}{2}$

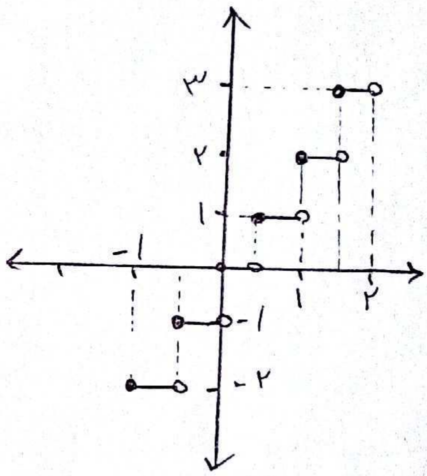
$-1\le 2x<0 \Rightarrow [2x]=-1 \Rightarrow y=-1 \quad , \quad -\frac{1}{2}\le x<0$

$0\le 2x<1 \Rightarrow [2x]=0 \Rightarrow y=0 \quad , \quad 0\le x<\frac{1}{2}$

$1\le 2x<2 \Rightarrow [2x]=1 \Rightarrow y=1 \quad , \quad \frac{1}{2}\le x<1$

$2\le 2x<3 \Rightarrow [2x]=2 \Rightarrow y=2 \quad , \quad 1\le x<\frac{3}{2}$

$3\le 2x<4 \Rightarrow [2x]=3 \Rightarrow y=3 \quad , \quad \frac{3}{2}\le x<2$



مثال ۳: نمودار تابع $f(x)=[\frac{1}{3}x+1]$ را در بازه $[-6,6)$ رسم کنید.

$-6\le x<6 \Rightarrow -2\le \frac{1}{3}x<2$

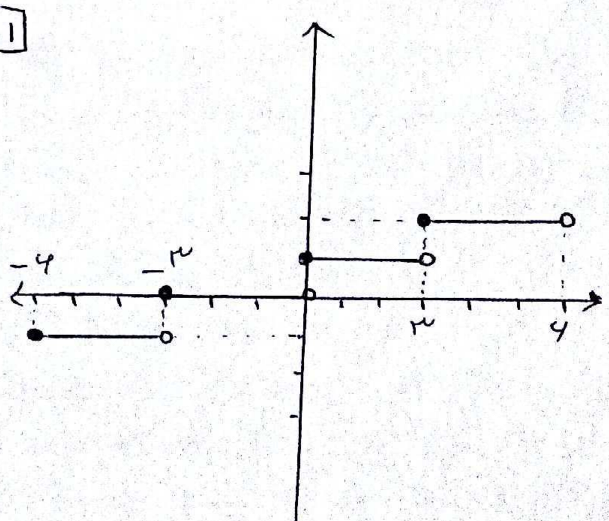
$y=[\frac{1}{3}x+1]=[\frac{1}{3}x]+1$

$-2\le \frac{1}{3}x<-1 \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{3}x]=-2 \Rightarrow \boxed{y=-2+1=-1} \\ -6\le x<-3 \end{cases}$

$-1\le \frac{1}{3}x<0 \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{3}x]=-1 \Rightarrow y=-1+1=0 \\ -3\le x<0 \end{cases}$

$0\le \frac{1}{3}x<1 \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{3}x]=0 \Rightarrow y=0+1=1 \\ 0\le x<3 \end{cases}$

$1\le \frac{1}{3}x<2 \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{3}x]=1 \Rightarrow y=1+1=2 \\ 3\le x<6 \end{cases}$



مثال ۴: مطلوبست رسم نمودار تابع $y = x - [x]$ در بازه $[-3, 3)$

$-3 \le x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow y = x + 3$

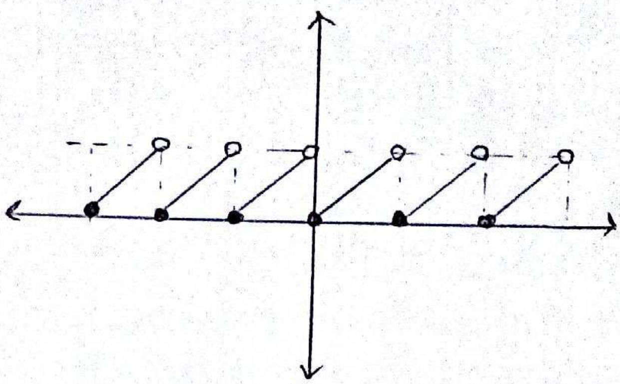
$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x + 2$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x + 1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$

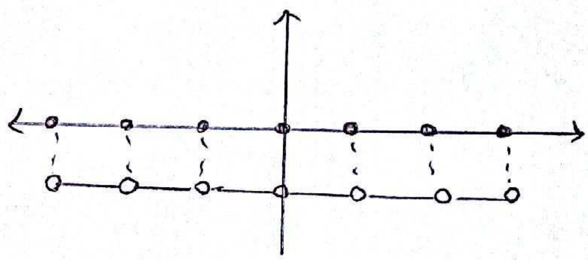
$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - 2$



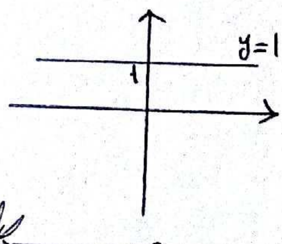
مثال ۵: مطلوبست رسم نمودار تابع $y = [x] + [-x]$ در بازه $[-3, 3]$

$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال ۶: مطلوبست رسم نمودار تابع $y = \left[\frac{x^2+4}{x^2+3}\right]$

$$y = \left[\frac{x^2+4}{x^2+3}\right] = \left[\frac{x^2+3}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+3}\right] = \left[1 + \frac{1}{x^2+3}\right] = [1, ?] = 1$$



مثال ۷: مطلوبست رسم نمودار تابع $y = x + [x]$ در بازه $[-2, 3)$

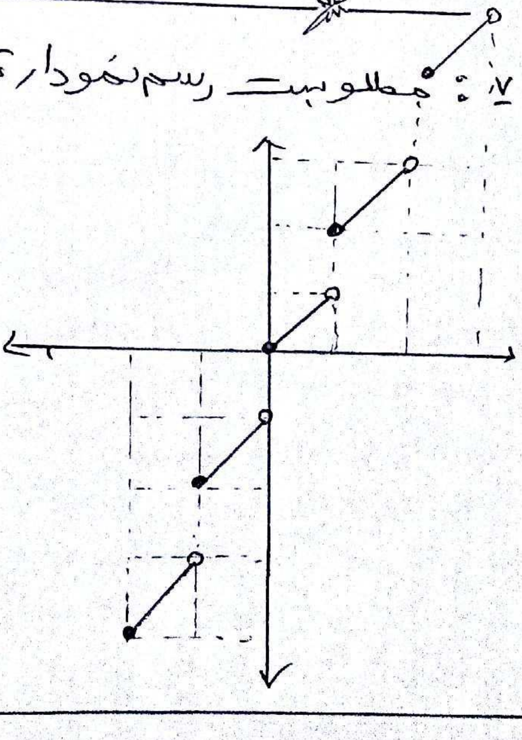
$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - 2$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - 1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x + 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x + 2$



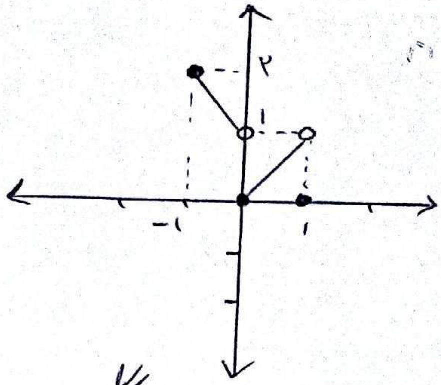
مثال ۸: مطلوبست رسم نمودار $y=|x|-[x]$ در بازه $[-1,1]$

$x=-1 \Rightarrow y=|-1|-[-1]=1+1=2 \Rightarrow y=2$

$-1<x<0 \Rightarrow y=-x-(-1)=-x+1 \Rightarrow y=-x+1$

$0<x<1 \Rightarrow y=x-0=x \Rightarrow y=x$

$x=1 \Rightarrow y=1-1=0 \Rightarrow y=0$

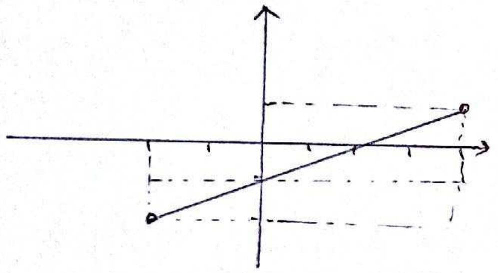


نکته ریاضی:

برای رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم

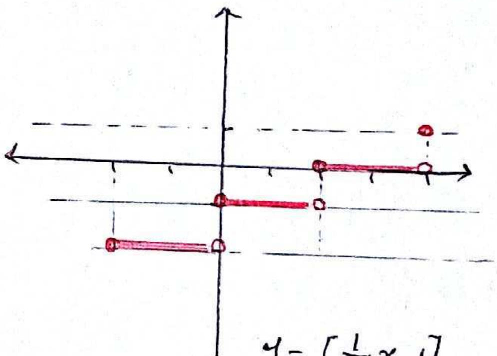
سپس تصویر نمودار $y=f(x)$ را روی خطوط $y=k$ $(k\in \mathbb{Z})$ رسم می‌کنیم.

الف) $y=[\frac{1}{2}x-1]$ $\quad x\in[-2,4]$



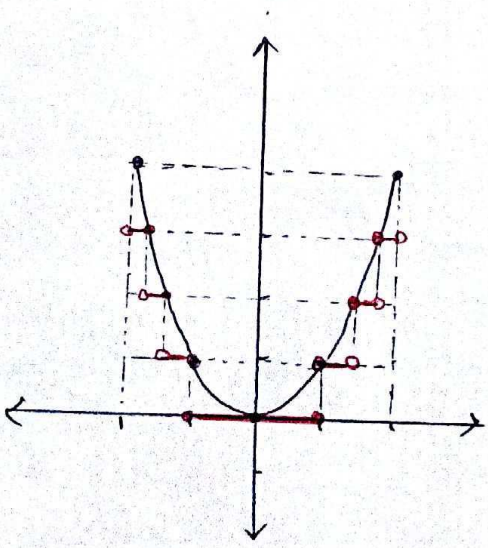
$y=\frac{1}{2}x-1 \quad A\Big|\begin{matrix}4\\1\end{matrix} \quad B\Big|\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}$

$\Rightarrow$



$y=[\frac{1}{2}x-1]$

ب) $y=[x^2]$ $\quad x\in(-2,2)$



تمرین: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $[2x-1]=4$

$[2x-1]=4 \Rightarrow 4\le 2x-1<5 \Rightarrow 5\le 2x<6 \Rightarrow \frac{5}{2}\le x<3$

ب) $[1-x^2]=-3$

$[1-x^2]=-3 \Rightarrow -3\le 1-x^2<-2 \Rightarrow -4\le -x^2<-3 \Rightarrow 3<x^2\le 4 \Rightarrow \sqrt{3}<|x|\le 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}<x\le 2 \\ \text{یا} \\ -2\le x<-\sqrt{3} \end{cases}$$

ج) $[x]^2-5[x]+6=0$

$$[x]=t \Rightarrow t^2-5t+6=0 \Rightarrow (t-2)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\le x<3 \\ t=3 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow 3\le x<4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}}$$

$$2\le x<4$$

تست: اگر $[x-\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]=1$ باشد مجموعه جواب x کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ۲) $[\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ ۳) $[\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ ۴) $(0,\frac{4}{3})$

$[x-\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]=1 \Rightarrow [x-\frac{1}{3}+1-1]+[x+\frac{2}{3}]=1 \Rightarrow [x+\frac{2}{3}-1]+[x+\frac{2}{3}]=1$

$\Rightarrow [x+\frac{2}{3}]-1+[x+\frac{2}{3}]=1 \Rightarrow 2[x+\frac{2}{3}]=2 \Rightarrow [x+\frac{2}{3}]=1 \Rightarrow 1\le x+\frac{2}{3}<2$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\le x<\frac{4}{3} \Rightarrow$ گزینه (۲)

تمرین: مطلوبست تعیین دامنه توابع زیر:

الف) $y=\dfrac{1}{x-[x]}$

$x-[x]=0 \Rightarrow x=[x] \Rightarrow x\in \mathbb{Z}$

$D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\mathbb{R}-\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

ب) $y=\sqrt{3-2[x]}$

$3-2[x]\ge 0 \Rightarrow 2[x]\le 3 \Rightarrow [x]\le \frac{3}{2}$

$\Rightarrow [x]\le 1.5 \Rightarrow x<2$

$D_f=(-\infty,2)$

د) $f(x)=\dfrac{2x+1}{[x]-2}$

$[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\leq x<3$

$D_f=\mathbb{R}-[2,3)$

ج) $f(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]-\dfrac{1}{[x]}$

جوابهای مخرج
$\begin{cases} x=0 \\ [x]=0 \Rightarrow 0\leq x<1 \end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}-[0,1)$

و) $f(x)=\dfrac{\sqrt{8-[x]}}{\sqrt{[x]-2}}$

$8-[x]\geq 0 \Rightarrow [x]\leq 8 \Rightarrow x<9$

$[x]-2>0 \Rightarrow [x]>2 \Rightarrow 3\leq x$

$D_f=[3,9)$

هـ) $f(x)=\dfrac{x-1}{[x]+[-x]}$

$[x]+[-x]=0 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

$D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

تست: حاصل $\left[\frac{10}{2^1}\right]+\left[\frac{10}{2^2}\right]+\dots+\left[\frac{10}{2^n}\right]$ به ازای $n>100$ ، $n\in N$ کدام است؟

۱) 8 ۲) 32 ۳) 1024 ۴) 2^n

جواب گزینه (۱)

$\left[\frac{10}{2}\right]+\left[\frac{10}{2^2}\right]+\dots+\left[\frac{10}{2^n}\right]=5+2+1+0+0+0+\dots=8$

تست: حاصل مجموع $[\sin 1^\circ]+[\sin 2^\circ]+\dots+[\sin 179^\circ]$ برابر است با:

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 179

جواب گزینه (۲)

$\sin 90^\circ=1 \Rightarrow [\sin 90^\circ]=[1]=1$

سایر جزء صحیح‌ها برابر صفر هستند.

تست: اگر جزء صحیح x^2+x برابر -1 باشد آنگاه $[x^{20}]$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر ✓
۳) 1
۴) 2

$[x^2+x]=-1 \Rightarrow -1\leq x^2+x<0$

$-1\leq x^2+x \Rightarrow x^2+x+1\geq 0 \quad \Delta<0 \Rightarrow$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+x+1		$+$	

$x^2+x<0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$-1<x<0$

پس: $-1<x<0 \Rightarrow 0<x^{20}<1$

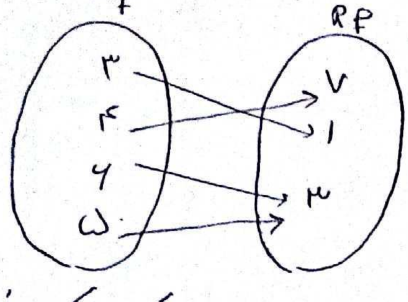
$\Rightarrow [x^{20}]=0$

تابع یک به یک :

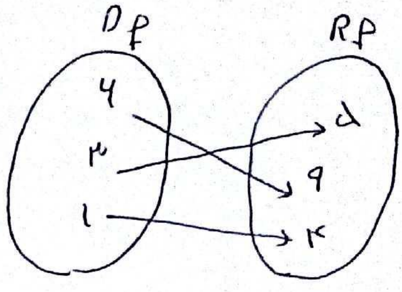
تابع f را یک به یک می گویند هرگاه هیچ دو زوج مرتب آن دارای مولفه دوم مساوی نباشد

$$f=\{(1,2),(3,4),(2,5)\}$$

از نظر نمودار ون (ven) تابع f زمانی یک به یک است که به هر عضو برد فقط و فقط یک پیکان رسم شود.



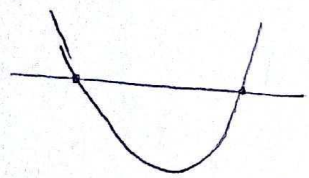
تابع است یک به یک نیست



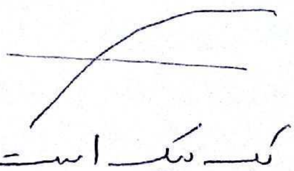
تابع است یک به یک است.

از نظر هندسی (رسم نمودار) :

تابع f زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



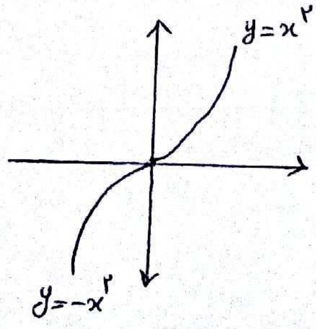
یک به یک نیست



یک به یک است.

مثال) نمودار تابع $y=f(x)=x|x|$ را رسم کرده و یک به یک بودن تابع را از روی نمودار بررسی کنید.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$



یک به یک است چون هر خط موازی محور xها نمودار تابع را در یک نقطه قطع می کند.

از نظر ضابطه تابع :

تابع f را یک به یک می گویند اگر برای هر x_1 و x_2 عضو دامنه f داشته باشیم :

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

مثال ۱ : ثابت کنید تابع $y = -\frac{2x+1}{x+1}$ یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{-2x_1+1}{x_1+1} = \frac{-2x_2+1}{x_2+1} \Rightarrow -2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 + 1 = -2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 + 1 \Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$ f یک به یک است.

مثال ۲ : ثابت کنید تابع $f(x) = \sqrt{3x+1}$ یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{3x_1+1} = \sqrt{3x_2+1} \Rightarrow 3x_1+1 = 3x_2+1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

f یک به یک است.

مثال ۳ : آیا تابع $f(x) = 2x^2+1$ یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2+1 = 2x_2^2+1 \Rightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

f یک به یک نیست

مثال ۴ : یک به یک بودن تابع $f(x) = 5|x| - 2$ را بررسی کنید.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5|x_1| - 2 = 5|x_2| - 2 \Rightarrow 5|x_1| = 5|x_2| \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow$$ f یک به یک نیست

نکته کنکوری :

۱) توابعی که ضابطه آنها بصورت $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ و $y = ax+b$ ، $y = \sqrt{ax+b}$ هستند یک به یک می باشند.

۲) توابع درجه ۲ و توابع قدرمطلق یک به یک نیستند مگر آنکه دامنه آنها محدود باشند.

تابع وارون (تابع معکوس):
اگر در زوجهای مرتب تابع f، جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنیم رابطه‌ی جدیدی حاصل می‌شود چنانچه این رابطه تابع باشد آنرا وارون تابع f نامیده و با f^{-1} نشان می‌دهند پس:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\} \qquad D_f = R_{f^{-1}} \qquad R_f = D_{f^{-1}}$$

$$f = \{(1, ۳), (۴, ۷), (۶, ۲)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(۳, 1), (۷, ۴), (۲, ۶)\}$$

تابع است   تابع است.

تذکر مهم: شرط اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک بیک باشد و برعکس برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون پذیر مانند f، در معادله $y = f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم سپس با تبدیل y به x و برعکس تابع $y = f^{-1}(x)$ را بدست می‌آوریم.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x) = \dfrac{x+1}{x-۲}$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آنرا بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک بیک است.

$$f(x_1) = f(x_۲) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-۲} = \frac{x_۲+1}{x_۲-۲} \Rightarrow x_1x_۲ - ۲x_1 + x_۲ - ۲ = x_1x_۲ + x_1 - ۲x_۲ - ۲$$

$$\Rightarrow x_1 = x_۲ \Rightarrow$$ f یک بیک است $\Rightarrow$ وارون پذیر است

$$y = \frac{x+1}{x-۲} \Rightarrow xy - ۲y = x + 1 \Rightarrow xy - x = ۲y + 1 \Rightarrow x(y-1) = ۲y + 1 \Rightarrow x = \frac{۲y+1}{y-1}$$

$$\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{۲x+1}{x-1}$$

مثال ۲: ثابت کنید تابع $y = f(x) = \sqrt{2x+3}$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{2x_1+3} = \sqrt{2x_2+3} \Rightarrow 2x_1+3 = 2x_2+3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است.

$$y = \sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2 = 2x+3 \Rightarrow y^2-3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2-3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2-3}{2}$$

مثال ۳: ثابت کنید تابع $f(x) = -3x+7$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -3x_1+7 = -3x_2+7 \Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$ یک به یک است

$$y = -3x+7 \Rightarrow y-7 = -3x \Rightarrow x = \frac{y-7}{-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-7}{-3}$$

تذکر مهم:

در برخی توابع برای اثبات یک به یک بودن یا نبودن تابع یک مقدار برای y در نظر می‌گیریم اگر برای x بیش از یک مقدار بدست آید آن تابع یک به یک نیست.

مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $y = x\sqrt{x-1}$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$ یک به یک نیست

۲) $y = f(x) = x^3 - x^2 + 1$

$$y = x^2(x-1)+1$$

$$y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$ یک به یک نیست

۳) $y = f(x) = x[x]$

$$y = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$ یک به یک نیست

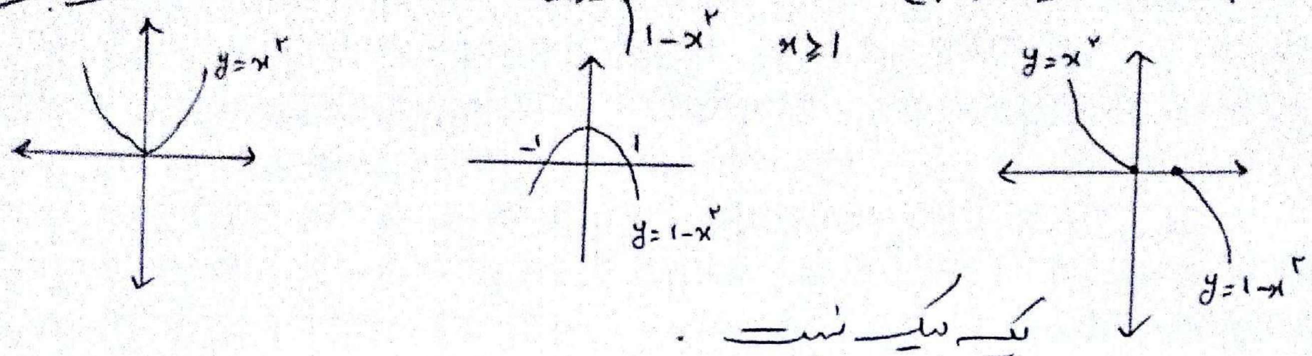
۴) $y = x + \frac{1}{x}$

$$y = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$ یک به یک نیست

۵) $y = \sqrt[3]{x^2}$

$$y = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$ یک به یک نیست

مثال) با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 0 \\ 1-x^2 & x\geq 1 \end{cases}$ یک به یک بودن آن را بررسی کنید.

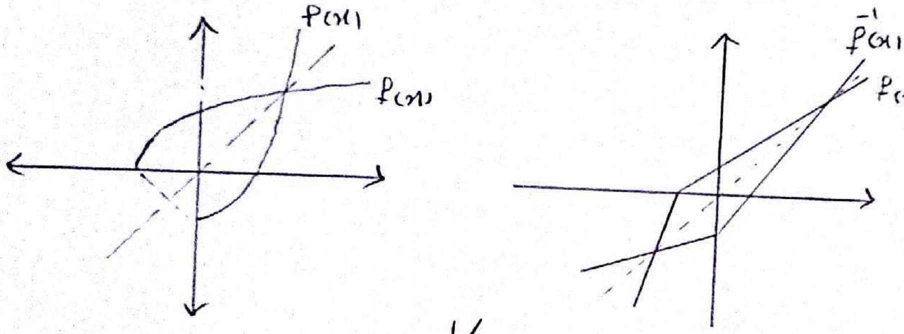


یک به یک نیست.

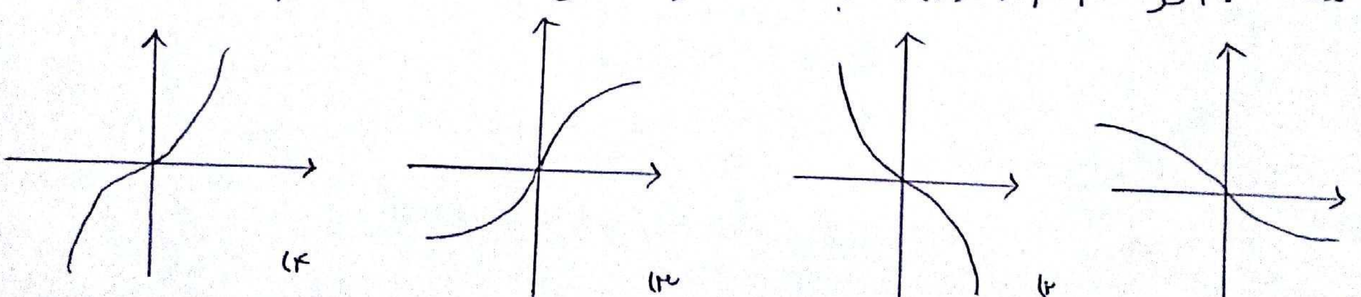
رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار f :

اگر نمودار تابع یک به یک f داده شده باشد برای رسم نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم کنیم

به عبارت دیگر نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به نیمسازهای ربع اول و سوم ($y=x$) متقارن هستند.

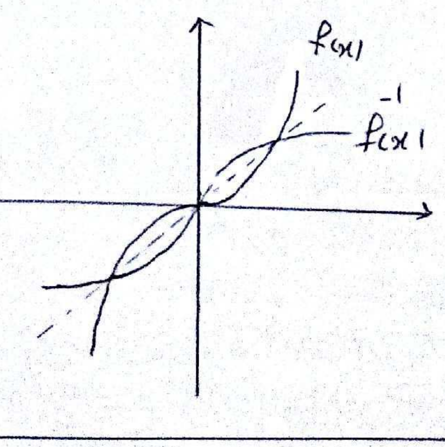


تست: اگر $f(x)=x|x|$ باشد نمودار تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی-۹۵)

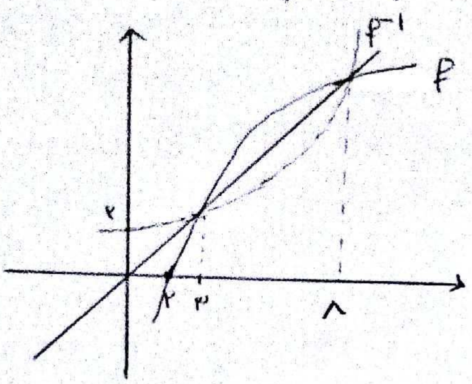


گزینه (۳):

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$



تست: شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ (تجربی - ۹۴)



۱) $[0,2]$

۲) $[2,3]$

۳) $[2,8]$

۴) $[3,8]$ ✓

برای بدست آوردن نمودار f^{-1} قرینه نمودار f را نسبت به خط $y=x$ رسم می کنیم:

$x-f^{-1}(x)\geq 0 \Rightarrow x\geq f^{-1}(x) \Rightarrow x\in[3,8]$

در بازه $[3,8]$ نمودار تابع $y=x$ بالاتر از $f^{-1}(x)$ قرار دارد.

تست: دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ مفروضند اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد a کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$f^{-1}=\{(5,2),(3,6),(7,3),(1,4),(9,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(3)=6 \\ f^{-1}(g(2a))=6 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2a)=3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1}=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{3}{4}$ ✓

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\frac{5}{2}$

تست: اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$ باشد حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $2x$

۲) $\frac{2}{x}$

۳) x^2-1

۴) صفر

حل: گزینه (۴): ضابطه تابع معکوس را پیدا می کنیم:

$$y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4}) \Rightarrow 2y=x+\sqrt{x^2+4} \Rightarrow 2y-x=\sqrt{x^2+4}$$

$$\Rightarrow (2y-x)^2=(\sqrt{x^2+4})^2 \Rightarrow 4y^2-4xy+x^2=x^2+4$$

$$\Rightarrow 4xy=4y^2-4 \Rightarrow x=\frac{4y^2-4}{4y} \Rightarrow x=y-\frac{1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=x-\frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})=x-\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-x=0$$

تمرین: اگر g وارون پذیر باشد و $f(\frac{x+1}{2})=g(\frac{2x-1}{3x+2})$ و بدانیم $g(\frac{3}{8})=2$ است آنگاه حاصل $f^{-1}(2)$ را بدست آورید.

$$g(\frac{3}{8})=2 \Rightarrow \frac{2x-1}{3x+2}=\frac{3}{8} \Rightarrow 16x-8=9x+6 \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$f(\frac{x+1}{2})=g(\frac{2x-1}{3x+2}) \xrightarrow{x=2} f(\frac{3}{2})=g(\frac{3}{8})=2 \Rightarrow f(\frac{3}{2})=2 \Rightarrow f^{-1}(2)=\frac{3}{2}$$

تمرین: ثابت کنید تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x$ در دامنه اش وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1-1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^3+1$$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1-1)^3+1=(x_2-1)^3+1 \Rightarrow (x_1-1)^3=(x_2-1)^3 \Rightarrow x_1-1=x_2-1$$

$$\Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$$ یک به یک است

$$y=(x-1)^3+1 \Rightarrow y-1=(x-1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1}=x-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$$

تمرین: اگر f معکوس پذیر باشد با فرض معکوس پذیری g، معکوس تابع زیر را بدست آورید.

$$g(x)=\frac{2-f(2-3x)}{f(2-3x)}+1$$

$$y=\frac{2-f(2-3x)}{f(2-3x)}+1 \Rightarrow y-1=\frac{2-f(2-3x)}{f(2-3x)} \Rightarrow y\cdot f(2-3x)-\cancel{f(2-3x)}=$$

$$2-\cancel{f(2-3x)} \Rightarrow y\cdot f(2-3x)=2 \Rightarrow f(2-3x)=\frac{2}{y} \Rightarrow 2-3x=f^{-1}(\frac{2}{y})$$

$$\Rightarrow 3x=2-f^{-1}(\frac{2}{y}) \Rightarrow x=\frac{1}{3}(2-f^{-1}(\frac{2}{y})) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{3}(2-f^{-1}(\frac{2}{x}))$$

تمرین: $f(x)$ تابعی معکوس پذیر و f^{-1} معکوس آن است معکوس تابع $g(x)=1+3f(2x-4)$ را حساب کنید.

$$y=1+3f(2x-4) \Rightarrow \frac{y-1}{3}=f(2x-4) \Rightarrow 2x-4=f^{-1}(\frac{y-1}{3}) \Rightarrow 2x=f^{-1}(\frac{y-1}{3})+4$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}(f^{-1}(\frac{y-1}{3})+4) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{2}(f^{-1}(\frac{x-1}{3})+4)$$

تذکر مهم:
ترکیب هر تابع با وارون خودش برابر x است.

$$f(f^{-1}(x))=x$$

$$f^{-1}(f(x))=x$$

مثال ۱: ثابت کنید تابع $g(x)=\frac{1-x}{x}$ وارون تابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ است.

$$f(g(x))=f\left(\frac{1-x}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1-x}{x}+1}=\frac{1}{\frac{1-x+x}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

مثال ۲: در تابع $y=\frac{ax+1}{x-c}$ آیا می‌توان a و c را به گونه‌ای تعیین کرد که این تابع وارون خودش باشد؟

$$y=\frac{ax+1}{x-c}\Rightarrow xy-cy=ax+1\Rightarrow xy-ax=yc+1\Rightarrow x(y-a)=yc+1$$

$$\Rightarrow x=\frac{yc+1}{y-a}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{cx+1}{x-a}$$

$$f(x)=\frac{ax+1}{x-c}$$

$$\Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow \boxed{a=c}$$

اعمال جبری روی توابع:
فرض کنیم f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند و منظور از $D_f\cap D_g$ اشتراک دامنه‌های توابع f و g باشد به ازای هر x عضو $D_f\cap D_g$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و f/g را بصورت های زیر تعریف می‌کنیم:

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$

3) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$ $\quad D_{f.g}=D_f\cap D_g$

4) $(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|x\in D_g\ ,\ g(x)=0\}$

5) $(kf)(x)=kf(x)$ $\quad (k\in\mathbb{R})$

مثال) فرض کنیم $f=\{(-1,1),(2,3),(3,-2),(4,1)\}$ و $g=\{(0,2),(2,4),(4,0)\}$

مطلوبست محاسبه: $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، f/g و $2f+1$

$D_f\cap D_g=\{2,4\}$ $\quad D_g=\{0,2,4\}$ $\quad D_f=\{-1,2,3,4\}$

۱) $(f+g)(2)=f(2)+g(2)=3+4=7$ $\qquad (f+g)(4)=f(4)+g(4)=1+0=1$

$$f+g=\{(2,7),(4,1)\}$$

۲) $(f-g)(2)=f(2)-g(2)=3-4=-1$ $\qquad (f-g)(4)=f(4)-g(4)=1-0=1$

$$f-g=\{(2,-1),(4,1)\}$$

۳) $(f.g)(2)=f(2).g(2)=3\times 4=12$ $\qquad (f.g)(4)=f(4).g(4)=1\times 0=0$

$$f.g=\{(2,12),(4,0)\}$$

۴) $g(4)=0 \Rightarrow D_{f/g}=\{2,4\}-\{4\}=\{2\}$

$(f/g)(2)=\dfrac{f(2)}{g(2)}=\dfrac{3}{4}$ $\qquad f/g=\{(2,\frac{3}{4})\}$

۵) $(2f+1)(x)=(2f)(x)+1(x)=2f(x)+x$

$(2f+1)(-1)=2f(-1)+(-1)=2\times 1+(-1)=1$

$(2f+1)(2)=2f(2)+(+2)=2\times 3+2=8$

$(2f+1)(3)=2f(3)+(3)=2\times(-2)+3=-1$

$(2f+1)(4)=2f(4)+(4)=2\times 1+4=6$

$$2f+1=\{(-1,1),(2,8),(3,-1),(4,6)\}$$

مثال ۲) اگر $f=\{(-2,-1),(-1,0),(0,2),(1,-\frac{3}{2}),(3,4)\}$ و $g=\{(-2,-4),(0,5),(3,0),(4,4)\}$ باشد حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $\left(\dfrac{2f+g}{3f-g}\right)(-2)=\dfrac{2f(-2)+g(-2)}{3f(-2)-g(-2)}=\dfrac{2(-1)+(-4)}{3(-1)-(-4)}=\dfrac{-6}{1}=-6$

ب) $f^2+2g=\{(-2,(-1)^2+2(-4)),(0,2^2+2(5)),(3,4^2+2(0))\}=\{(-2,-7),(0,14),(3,16)\}$

$D_f\cap D_g=\{-2,0,3\}$

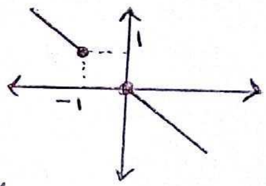
مثال ۳) : اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^2+x}$ باشد نمودار $y=(f.g)(x)$ را رسم کنید.

$x^2+x\geqslant 0 \Rightarrow$

x		-1		0	
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$D_f=D_g=D_f\cap D_g=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(x+\sqrt{x^2+x})(x-\sqrt{x^2+x})=x^2-x^2-x=-x$



$y=(f.g)(x)=-x \qquad D_{f.g}=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

مثال ۴) : اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{a-x}+b$ آنگاه دامنه تابع $(f-g)(x)$ برابر $[2,4]$ است. اگر $(f+g)(3)=5$ باشد a و b را بیابید.

$\left.\begin{array}{l} D_f=[2,+\infty) \\ D_g=(-\infty,a] \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f-g}=D_f\cap D_g=[2,a]=[2,4] \Rightarrow \boxed{a=4}$

$f(x)=\sqrt{x-2} \quad , \quad g(x)=\sqrt{4-x}+b$

$(f+g)(3)=5 \Rightarrow f(3)+g(3)=5 \Rightarrow \sqrt{3-2}+\sqrt{4-3}+b=5 \Rightarrow 1+1+b=5$

$\Rightarrow b=3$

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g=\{(-2,5),(-1,3),(1,\frac{1}{2}),(4,1),(5,0),(9,9)\}$ باشد آنگاه برد تابع $\frac{f}{g}$ شامل چند عضو است؟

۱) ۲ ✓

۲) ۳

۳) ۴

۴) بی شمار

$D_f=[0,+\infty) \quad , D_g=\{-2,-1,1,4,5,9\}$

$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}=\{1,4,5,9\}-\{5\}=\{1,4,9\}$

$(f/g)(1)=\dfrac{f(1)}{g(1)}=\dfrac{\sqrt{1}}{\frac{1}{2}}=2 \qquad (f/g)(4)=\dfrac{f(4)}{g(4)}=\dfrac{\sqrt{4}}{1}=2$

$(f/g)(9)=\dfrac{f(9)}{g(9)}=\dfrac{\sqrt{9}}{9}=\dfrac{1}{3} \qquad R_{f/g}=\{2,\frac{1}{3}\}$

رسم نمودار توابع $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ از روی نمودار توابع f و g :

نکات زیر را در نظر می گیریم :

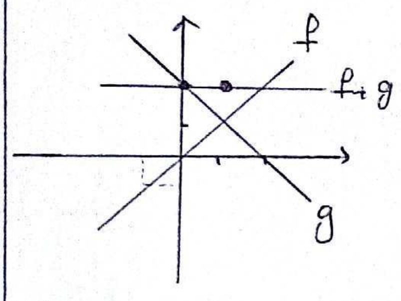
۱) نمودارهای خطی متعلق به توابع خطی درجه یک با ضابطه $y = ax+b$ می باشند.

۲) حاصل جمع و تفریق دو تابع خطی ، یک تابع خطی است.

۳) حاصلضرب دو تابع خطی درجه اول یک تابع درجه ۲ است که نمودارش یک سهمی است.

۴) در تقسیم دو تابع ، نمودار اطراف نقطه ای که تابع مخرج صفر می شود مقادیر بسیار زیاد (می گوئیم به سمت $+\infty$ می رود) یا مقدار بسیار کم (می گوئیم به سمت $-\infty$ می رود) دارد.

مثال ۱ : اگر نمودار دو تابع f و g به شکل روبرو باشد نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.



روش اول) f و g خطی اند پس $f+g$ هم خطی اند

دو نقطه از آن را پیدا کرده به هم وصل می کنیم :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ g(0)=2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(0) = 0+2=2$$

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ g(1)=1 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(1) = 1+1=2$$

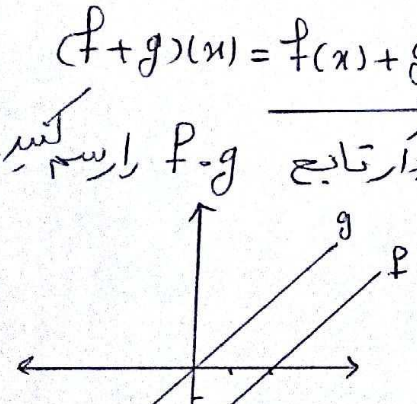
روش دوم : $f(x) = x$

$$A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix} \Rightarrow y-0 = \frac{2-0}{0-2}(x-2) \Rightarrow y = -x+2$$

$$\Rightarrow g(x) = -x+2$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x-x+2 = 2$$

مثال ۲ : اگر نمودار توابع f و g بصورت روبرو باشد نمودار تابع $f.g$ را رسم کنید.



f و g هر دو خطی هستند پس حاصلضرب آنها یک تابع درجه دوم است.

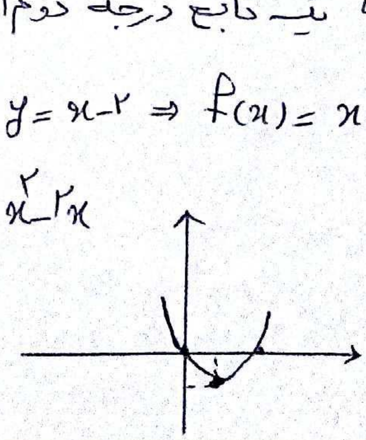
$g(x) = x$

$$A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}0\\-2\end{vmatrix} : f(x) : y-0 = \frac{-2-0}{0-2}(x-2) \Rightarrow y = x-2 \Rightarrow f(x) = x-2$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x-2)(x) = x^2-2x$$

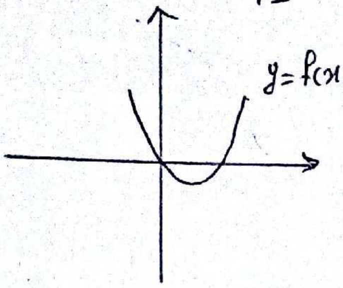
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(1)} = 1 \qquad S\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$$

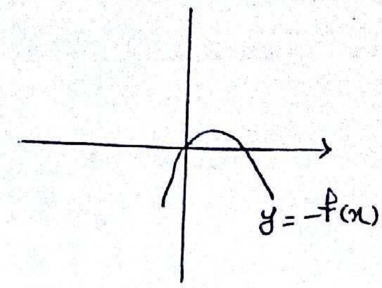
$$x=1 \Rightarrow y = 1^2-2(1) = -1$$



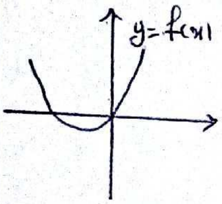
رسم نمودار توابع به کمک انتقال منحنی ها :

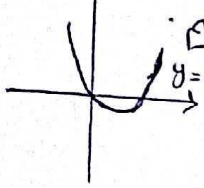
۱) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



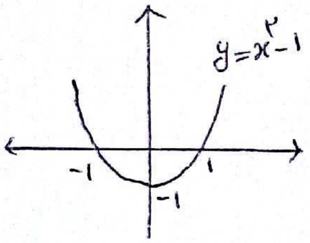


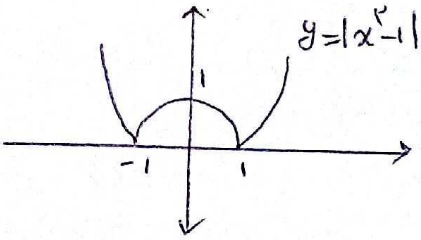
۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.





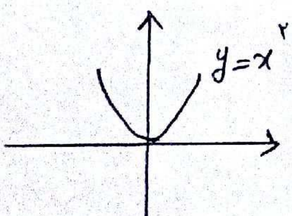
۳) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که زیر محور x ها است نسبت به محور x ها رسم کنیم :

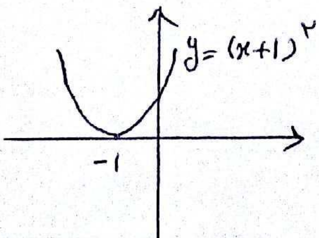


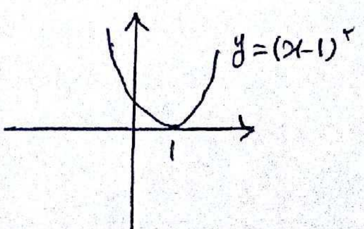


۴) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم :

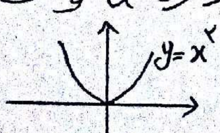
اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت چپ و اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت راست منتقل می شود

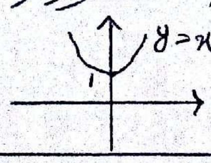


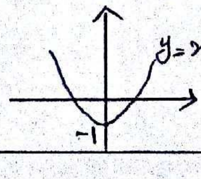




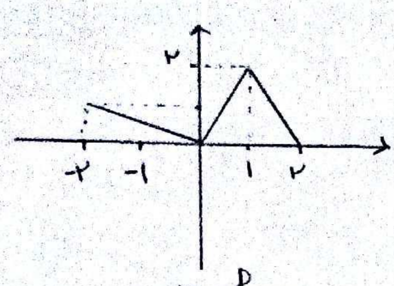
۵) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت بالا و اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت پایین منتقل می شود.



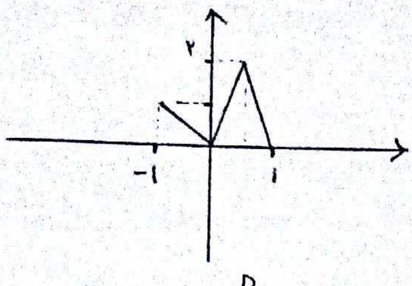




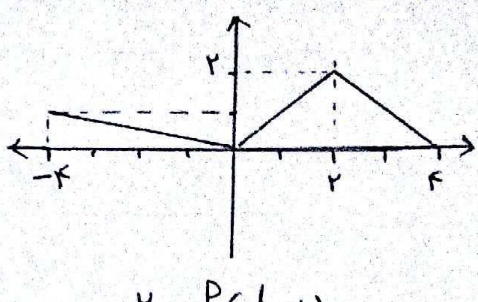
۶) برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ عرض نقاط را ثابت نگه داشته و طول همه نقاط را بر k تقسیم می کنیم ($k>1$ منقبض، $k<1$ منبسط)



$y=f(x)$

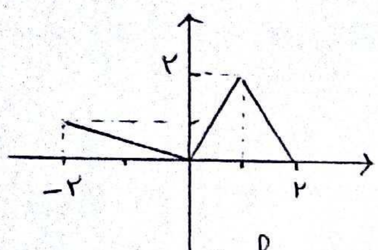


$y=f(2x)$

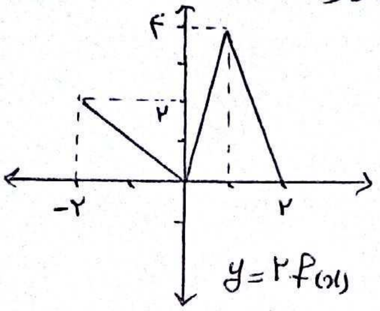


$y=f(\frac{1}{2}x)$

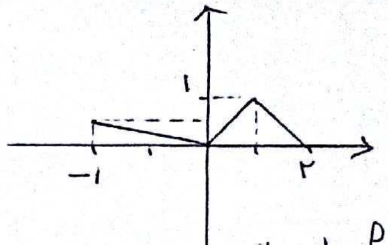
۷) برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ ، طولها را ثابت نگه داشته و عرض همه نقاط را در k ضرب می کنیم



$y=f(x)$

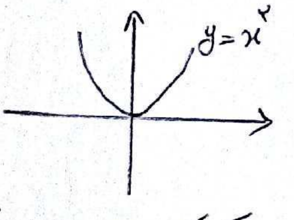


$y=2f(x)$

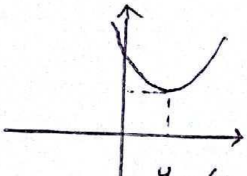


$y=\frac{1}{2}f(x)$

۸) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)+b$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ حالتهای ۴ و ۵ را با هم ترکیب می کنیم:



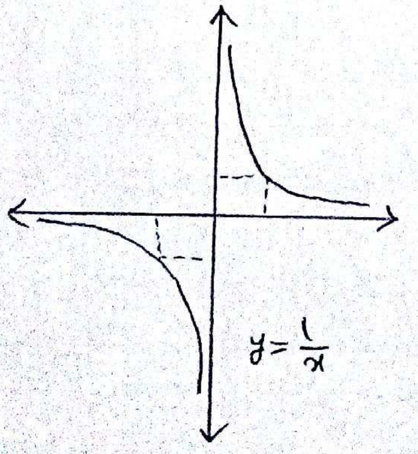
$y=x^2$



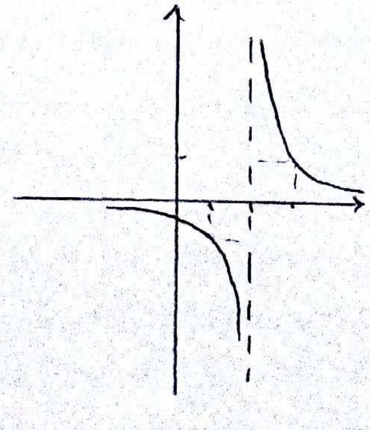
$y=(x-1)^2+1$

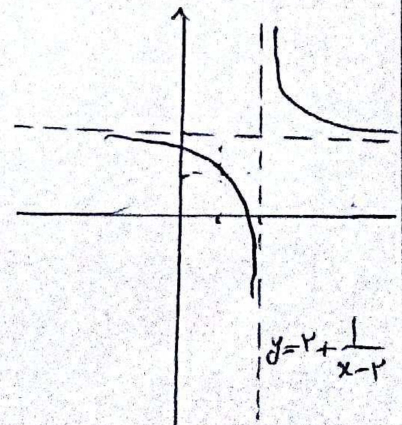
تمرین: نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$ را از روی نمودار $y=\frac{1}{x}$ و به کمک انتقال منحنی‌ها رسم کنید.

$$f(x)=\frac{2x-4+1}{x-2}=\frac{2(x-2)+1}{x-2}=2+\frac{1}{x-2}$$



$y=\frac{1}{x}$

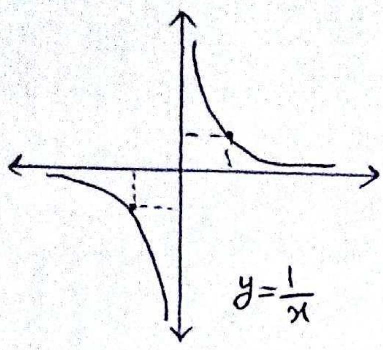




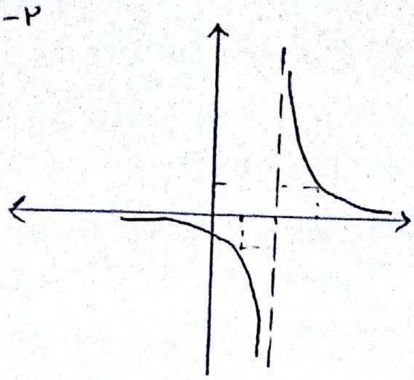
$y=2+\frac{1}{x-2}$

مثال) مطلوبست رسم نمودار تابع $y = \frac{x-1}{x-2}$ به کمک انتقال منحنی‌ها:

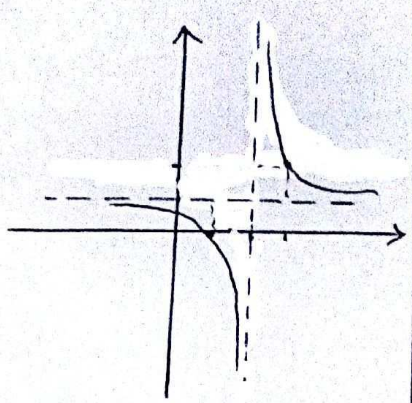
$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$$



$y = \frac{1}{x}$

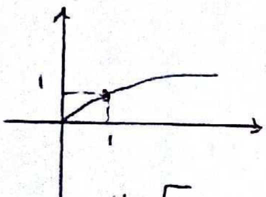


$y = \frac{1}{x-2}$

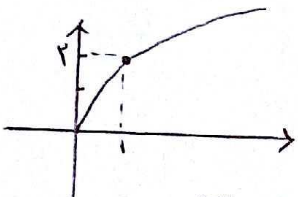


$y = 1 + \frac{1}{x-2}$

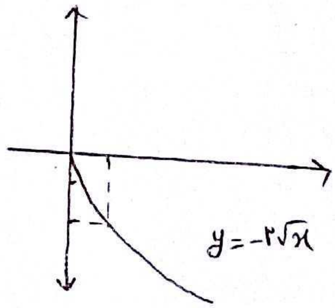
مثال) با توجه به نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع $y = -2f(x) - 1$ را رسم کرده دامنه و بردش را تعیین کنید.



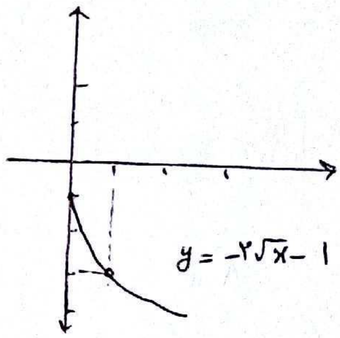
$y = \sqrt{x}$



$y = 2\sqrt{x}$



$y = -2\sqrt{x}$



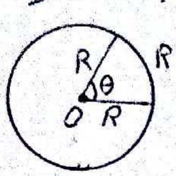
$y = -2\sqrt{x} - 1$

$D_f = [0, +\infty)$

$R_f = (-\infty, -1]$

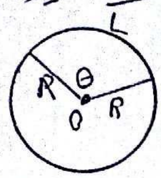
فصل ۴ : مثلثات .

رادیان : در دایره‌ای به شعاع R ، زاویه مرکزی مقابل به کمانی به اندازه R برابر با یک رادیان است .



$$\theta = 1\ rad$$

نکته ریاضی :
اگر شعاع دایره‌ای برابر R باشد و زاویه θ که رأس آن روی مرکز دایره است کمانی به طول L روی دایره ایجاد کند در اینصورت اندازه θ به رادیان از فرمول زیر بدست می‌آید:



$$\boxed{\theta = \frac{L}{R}} \quad \text{یا} \quad \boxed{L = R.\theta}$$

مثال ۱ : اگر زاویه θ که راس آن روی مرکز دایره‌ای به شعاع 5 cm قرار دارد کمانی به طول 10 cm روی دایره ایجاد کرده است. اندازه θ به رادیان چقدر است؟

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{10}{5} = 2$$

مثال ۲ : در دایره‌ای به شعاع ۸ ، اندازه کمان روبرو به زاویه مرکزی ۴/۵ رادیان چقدر است؟

$$L = R.\theta = 8 \times 4{,}5 = 36$$

گراد :
اگر یک زاویه نیم صفحه را به ۲۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک گراد می‌نامند.

$\frac{1}{200}$ زاویه نیم صفحه = ۱ گراد

رابطه بین واحدهای اندازه گیری زاویه :

$$\boxed{\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

مثال ۱ : ۱۲۰ درجه برابر چند گراد و چند رادیان است؟

$$D = 120^\circ$$

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{120\times 200}{180} = \frac{400}{3} \simeq 133{,}3 \\ R = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

مثال ۲: $\frac{\pi}{4}$ رادیان برابر چند درجه و چند گراد است؟

$$R=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} D=\frac{180\times\frac{\pi}{4}}{\pi}=45^\circ \\ G=\frac{200\times\frac{\pi}{4}}{\pi}=50^\circ \end{cases}$$

مثال ۳: زاویه ۱ رادیان تقریباً چند درجه و یک درجه تقریباً چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow R=\frac{\pi}{180}\simeq 0.017 \Rightarrow 1^\circ = 0.017\,rad$$

$$\frac{D}{180}=\frac{1}{\pi} \Rightarrow D=\frac{180}{\pi}\simeq 57.3^\circ \Rightarrow 1\,rad = 57.3^\circ$$

نکته ریاضی: می دانیم شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ است.

$2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi =$ کل دایره

$360^\circ =$ کل دایره

نتیجه: $2\pi = 360^\circ$

درجه	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
رادیان	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$\frac{2\pi}{3}=120^\circ$ $\quad \frac{3\pi}{4}=135^\circ$ $\quad \frac{5\pi}{6}=150^\circ$

مثال) زاویه ۵ رادیان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟

$\pi=3.14 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi \Rightarrow$ ۵ رادیان در ربع چهارم

تست: مجموع دو زاویه برحسب رادیان $\frac{2\pi}{3}$ و تفاضل آنها برحسب درجه برابر 30° می باشد اندازه زاویه بزرگتر چند برابر اندازه زاویه کوچکتر است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{5}{2}$

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$

حل: گزینه (۳)

$$\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{12},\ y=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{5\pi}{12}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{3}$$

مثال) حلقه‌ای فلزی به محیط $18\,cm$ را از دو نقطه برش داده ایم به طوری که زاویه مرکزی روبروی کمان جدا شده برابر ۵۰ درجه است. طول کمان جدا شده چند سانتیمتر است؟

$$\text{محیط} = 2\pi R \Rightarrow 18 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{9}{\pi}$$

$$\frac{50}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{50\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}$$

$$L = R.\theta = \frac{9}{\pi} \times \frac{5\pi}{18} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

مثال) یک چرخ در یک ساعت ۲۴۰۰ دور می‌زند. این چرخ در یک دقیقه چند رادیان طی می‌کند؟

۱ دور	۲۴۰۰
۲π رادیان	۴۸۰۰π

۶۰ دقیقه	۱
۴۸۰۰π رادیان	۸۰π

تمرین: فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که ۴۰ کابین دارد و کابین‌های آن شماره گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما روی کابین شماره ۳ نشسته باشید بعد از $\frac{47\pi}{10}$ رادیان چرخش، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟

$$\text{زاویه بین هر کابین} = 360^\circ \div 40 = 9^\circ$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180 \times R}{\pi} = \frac{180 \times \frac{47\pi}{10}}{\pi} = 846^\circ$$

$$846^\circ = 720^\circ + 126^\circ = (2 \times 360^\circ) + 126^\circ \qquad 126^\circ \div 9^\circ = 14$$

$$3 + 14 = 17 \leftarrow \text{موقعیت شماره کابین}$$

فرمول زاویه بین عقربه‌های ساعت:

در ساعت $h:m'$ زاویه بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار برحسب درجه برابر است با:

$$\alpha = |5{,}5m - 30h|$$

مثال) در ساعت $2:10'$ زاویه بین عقربه‌های ساعت چند درجه است؟

$$\alpha = |5{,}5(10) - 30(2)| = |55 - 60| = 5^\circ$$

مثال) در ساعت $5:40'$ زاویه بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار چند رادیان است؟

$$\alpha = |5{,}5(40) - 30(5)| = |220 - 150| = 70^\circ$$

$$\frac{70}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{70\pi}{180} \Rightarrow R = \frac{7\pi}{18}$$

ریاضی یازدهم تجربی

روابط بین نسبتهای مثلثاتی :

۱) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta \end{cases}$

۲) $tg\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ۳) $cotg\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ۴) $tg\theta \cdot cotg\theta=1 \Rightarrow \begin{cases} tg\theta=\dfrac{1}{cotg\theta} \\ cotg\theta=\dfrac{1}{tg\theta} \end{cases}$

۵) $1+tg^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ۶) $1+cotg^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ ۷) $\begin{cases} -1\leq \sin\theta\leq 1 \\ -1\leq \cos\theta\leq 1 \end{cases}$

۸) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\cos\beta \\ \cos\alpha=\sin\beta \\ tg\alpha=cotg\beta \\ cotg\alpha=tg\beta \end{cases}$

مثال ۱: اگر α در ناحیه دوم و $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ باشد سایر نسبتهای مثلثاتی α را بیابید

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ربع دوم } \alpha} \cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4} \Rightarrow cotg\alpha=-\frac{4}{3}$$

مثال ۲: اگر $\sin x.\cos x=\dfrac{12}{25}$ باشد مقادیر $\sin x+\cos x$ و $\sin x-\cos x$ را بیابید

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x.\cos x=1+2\left(\frac{12}{25}\right)=\frac{49}{25} \Rightarrow \sin x+\cos x=\pm\frac{7}{5}$$

$$(\sin x-\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x.\cos x=1-2\left(\frac{12}{25}\right)=\frac{1}{25} \Rightarrow \sin x-\cos x=\pm\frac{1}{5}$$

مثال ۳: اگر $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$ حاصل $\sin^4x+\cos^4x$ را بدست آورید.

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x.\cos x \Rightarrow (-\sqrt{2})^2=1+2\sin x.\cos x$$

$$\Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x)^2+(\cos^2x)^2=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x$$

$$=1^2-2(\sin x.\cos x)^2=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

تست: اگر $tg\,x = ۲$ باشد مقدار $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۲۵}$

حل: گزینه (۲)

$tg\,x = ۲ \Rightarrow \cot g\,x = \frac{۱}{۲}$

$$tg\,x + \cot g\,x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x . \cos x} = \frac{1}{\sin x . \cos x} \Rightarrow ۲ + \frac{1}{۲} = \frac{1}{\sin x . \cos x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x . \cos x = \frac{۲}{۵}}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^۲ x)^۳ + (\cos^۲ x)^۳ = (\sin^۲ x + \cos^۲ x)^۳ - ۳(\sin^۲ x . \cos^۲ x)(\sin^۲ + \cos^۲ x)$$

$$= 1^۳ - ۳(\sin x . \cos x)^۲(1) = 1 - ۳\left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ = 1 - \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۱۳}{۲۵}$$

تست: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ باشد حاصل $\left(\frac{1}{1+tg^۲ x}\right)^۲ - \left(\frac{1}{1+\cot g^۲ x}\right)^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۵}{۸}$

$$\left(\frac{1}{1+tg^۲ x}\right)^۲ - \left(\frac{1}{1+\cot g^۲ x}\right)^۲ = \left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^۲ x}}\right)^۲ - \left(\frac{1}{\frac{1}{\sin^۲ x}}\right)^۲ = \cos^۴ x - \sin^۴ x$$

$$= (\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\cos^۲ x + \sin^۲ x) = \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos^۲ x - 1 + \cos^۲ x = ۲\cos^۲ x - 1$$

$$= ۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)^۲ - 1 = ۲ \times \frac{۳}{۱۶} - 1 = -\frac{۵}{۸}$$

مثال ۴: ثابت کنید: $\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{\cot g\,\alpha + \cot g\,\beta} = tg\,\alpha . tg\,\beta$

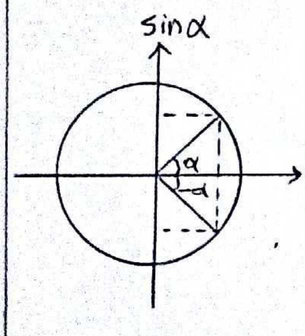
$$\text{سمت چپ} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha . \cos\beta + \sin\beta . \cos\alpha}{\cos\alpha . \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha . \sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta}{\sin\alpha . \sin\beta}} \xlongequal[\text{برابرند}]{\text{صورتها}} \frac{\frac{1}{\cos\alpha . \cos\beta}}{\frac{1}{\sin\alpha . \sin\beta}}$$

$$= \frac{\sin\alpha . \sin\beta}{\cos\alpha . \cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = tg\,\alpha . tg\,\beta$$

جدول نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های مهم:

نسبت \ زاویه	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$cotg\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

نسبت \ زاویه	$0°$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$	$360° = 2\pi$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$tg\theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$cotg\theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده



محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$:

۱) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

۲) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

۳) $tg(-\alpha) = -tg\alpha$

۴) $cotg(-\alpha) = -cotg\alpha$

انتهای کمانهای مقابل به دو زاویه α و $-\alpha$ نسبت به محور کسینوسها قرینه یکدیگرند.

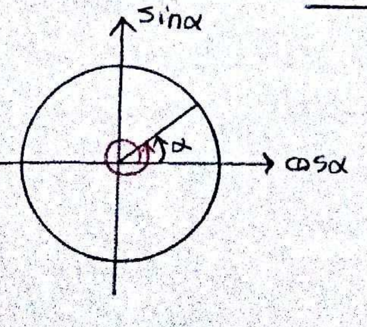
مثال) مطلوبست محاسبه:

$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(-\frac{\pi}{6}) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$cotg(-60°) = -cotg60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(2\pi + \alpha)$:

انتهای کمان مقابل به زاویه α و $2\pi+\alpha$ یک نقطه است.

۱) $\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha$

۲) $\cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha$

۳) $tg(2\pi+\alpha) = tg\alpha$

۴) $cotg(2\pi+\alpha) = cotg\alpha$

مثال) مطلوبست محاسبه:

$$\sin\frac{9\pi}{4}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

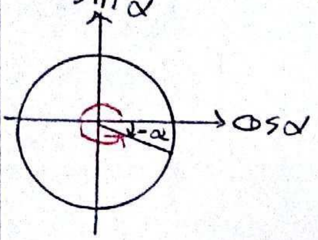
$$\cos\frac{7\pi}{3}=\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$tg\,390^\circ=tg(360^\circ+30^\circ)=tg\,30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\,420^\circ=cotg(360^\circ+60^\circ)=cotg\,60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(2\pi-\alpha)$:

انتهای کمان مقابل به زاویه $(2\pi-\alpha)$ با کمان $(-\alpha)$ یک نقطه است.



1) $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

2) $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$

3) $tg(2\pi-\alpha)=-tg\,\alpha$

4) $cotg(2\pi-\alpha)=-cotg\,\alpha$

مثال) مطلوبست محاسبه:

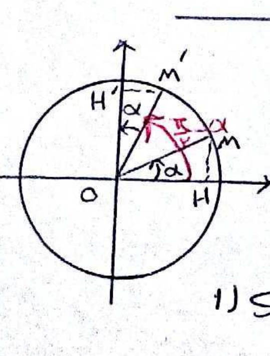
$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$tg\,\frac{7\pi}{4}=tg(2\pi-\frac{\pi}{4})=-tg\,\frac{\pi}{4}=-1$$

$$cotg\,300^\circ=cotg(360^\circ-60^\circ)=-cotg\,60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$:



$$\hat{OMH}=\hat{OM'H'}\Rightarrow OH=OH'$$

وتر و یک زاویه تند

1) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$

2) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

3) $tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=cotg\,\alpha$

4) $cotg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=tg\,\alpha$

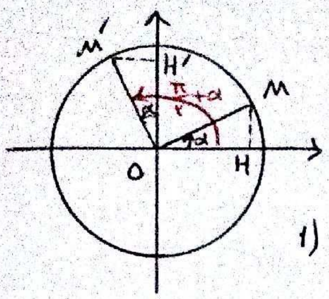
مثال) مطلوبست محاسبه:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=cotg\,\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$cotg(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=tg\,\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$



محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{2}+\alpha)$:

$\overset{\triangle}{OMH} = \overset{\triangle}{OM'H'}$ (وتر و یک زاویه) $\Rightarrow OH = OH'$

۱) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$

۲) $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$

۳) $tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -cotg\,\alpha$

۴) $cotg(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -tg\,\alpha$

مثال) مطلوبست محاسبه :

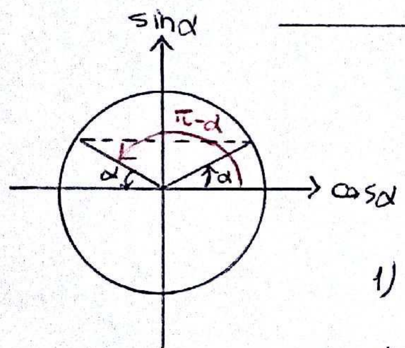
$\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = -cotg\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

$cotg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$

تذکر مهم :
مضربهای فرد $\frac{\pi}{2}$
نسبت را تغییر می دهند



محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\pi-\alpha)$:

انتهای کمانهای مقابل به دو زاویه α و $\pi-\alpha$ نسبت به محور سینوسها قرینه یکدیگرند.

۱) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

۲) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

۳) $tg(\pi-\alpha) = -tg\,\alpha$

۴) $cotg(\pi-\alpha) = -cotg\,\alpha$

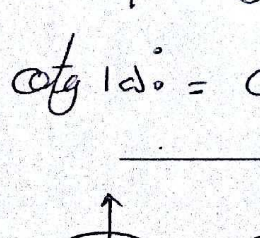
مثال) مطلوبست محاسبه :

$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin(\pi-\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\pi-\frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\frac{5\pi}{6} = tg(\pi-\frac{\pi}{6}) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$cotg\,150^\circ = cotg(180^\circ-30^\circ) = -cotg\,30^\circ = -\sqrt{3}$



محاسبه نسبتهای مثلثاتی زاویه $(\pi+\alpha)$:

انتهای کمانهای مقابل به زاویه‌های α و $\pi+\alpha$ نسبت به مرکز دایره مثلثاتی قرینه یکدیگرند:

۱) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

۲) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

۳) $tg(\pi+\alpha) = tg\,\alpha$

۴) $cotg(\pi+\alpha) = cotg\,\alpha$

ریاضی یازدهم تجربی

مثال) مطلوبست محاسبه:

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=\cos(\pi+\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{7\pi}{6}=tg(\pi+\frac{\pi}{6})=tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\frac{5\pi}{3}=cotg(\pi+\frac{2\pi}{3})=cotg\frac{2\pi}{3}=cotg(\pi-\frac{\pi}{3})=-cotg\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

نکته ریاضی:

درحالت کلی برای هر عدد صحیح K:

1) $\sin(2K\pi+\alpha)=\sin\alpha$
2) $\cos(2K\pi+\alpha)=\cos\alpha$
3) $tg(2K\pi+\alpha)=tg\alpha$
4) $cotg(2K\pi+\alpha)=cotg\alpha$

1) $\sin(2K\pi-\alpha)=-\sin\alpha$
2) $\cos(2K\pi-\alpha)=\cos\alpha$
3) $tg(2K\pi-\alpha)=-tg\alpha$
4) $cotg(2K\pi-\alpha)=-cotg\alpha$

تمرین: حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید:

الف) $tg135^\circ+cotg120^\circ=tg(180-45)+cotg(180-60)=-tg45-cotg60=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ب) $\cos(-210^\circ)+cotg240^\circ=\cos210+cotg240=\cos(180+30)+cotg(180+60)=-\cos30+cotg60=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

پ) $\sin630^\circ+tg(-540^\circ)=\sin630-tg540=\sin(2\times360-90)-tg(360+180)$
$=-\sin90-tg180=-1+0=-1$

ت) $\cos(-720^\circ)+cotg(-600^\circ)+tg720^\circ-tg(-600^\circ)=\cos720-cotg600+tg720+tg600$
$=\cos(2\times360+0)-cotg(2\times360-120)+tg(2\times360+0)+tg(2\times360-120)$
$=\cos0+cotg120+tg0-tg120=1+cotg(180-60)+0-tg(180-60)=1-\frac{\sqrt{3}}{3}+0+\sqrt{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}$

ث) $\sin(\frac{25\pi}{3})-\cos(\frac{33\pi}{4})=\sin(8\pi+\frac{\pi}{3})-\cos(8\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

ج) $$\frac{\sin\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{6}}{\sin(-\frac{3\pi}{4})+tg(-\frac{4\pi}{3})}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{4})-\cos(\pi-\frac{\pi}{6})}{-\sin(\pi-\frac{\pi}{4})-tg(\pi+\frac{\pi}{3})}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}}=\frac{-4-\sqrt{6}}{10}$$

تمرین: در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب پیدا کنید:

الف) $\sin x = \cos(20^\circ + x)$

$x + 20^\circ + x = 90^\circ \Rightarrow 2x + 20^\circ = 90^\circ \Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow \boxed{x = 35^\circ}$

ب) $tg\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = cotg\left(\frac{2\pi}{9} + x\right)$

$x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{18} \Rightarrow 2x = \frac{4\pi}{18}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{18} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{9}}$ یا $x = 20^\circ$

تمرین: درستی تساویهای زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin 840^\circ = \sin 60^\circ$

سمت چپ $= \sin 840^\circ = \sin(720^\circ + 120^\circ) = \sin(2 \times 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ$

$= \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ =$ سمت راست

ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$

سمت چپ $= \cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ =$ سمت راست

پ) $tg(-1000^\circ) = tg 80^\circ$

سمت چپ $= tg(-1000^\circ) = -tg 1000^\circ = -tg(3 \times 360^\circ - 80^\circ) = -tg(-80^\circ)$

$= -(-tg 80^\circ) = tg 80^\circ =$ سمت راست

ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

سمت چپ $= \sin 875^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ =$ سمت راست

ث) $tg(\alpha - \frac{13\pi}{2}) = cotg(7\pi - \alpha)$

سمت چپ $= tg(\alpha - \frac{13\pi}{2}) = tg[-(\frac{13\pi}{2} - \alpha)] = -tg(\frac{13\pi}{2} - \alpha) = -tg(6\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha)$

$= -tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -cotg\alpha$

سمت راست $= cotg(7\pi - \alpha) = cotg(6\pi + \pi - \alpha) = cotg(\pi - \alpha) = -cotg\alpha$

تمرین: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید:

$A = tg(x - 3\pi)\, cotg(x + 4\pi) - \sin(5\pi + x)\sin(8\pi - x)$

$tg(x - 3\pi) = tg[-(3\pi - x)] = -tg(\underbrace{3\pi - x}_{\text{ربع سوم}}) = -(-tgx) = tgx$

$cotg(\underbrace{x + 4\pi}_{\text{ربع اول}}) = cotg x$

$\sin(\underbrace{5\pi + x}_{\text{ربع سوم}}) = -\sin x$

$\sin(\underbrace{8\pi - x}_{\text{ربع چهارم}}) = -\sin x$

$A = tgx \cdot cotgx - (-\sin x)(-\sin x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

تمرین: اگر $\sin 10^\circ = 0{,}17$ و $\cos 10^\circ = 0{,}99$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$A = \sin 100^\circ + \sin 350^\circ - \cos 260^\circ - \cos 190^\circ$

$A = \sin(\underbrace{90^\circ + 10^\circ}_{\text{ربع دوم}}) + \sin(\underbrace{360^\circ - 10^\circ}_{\text{ربع چهارم}}) - \cos(\underbrace{270^\circ - 10^\circ}_{\text{ربع سوم}}) - \cos(\underbrace{180^\circ + 10^\circ}_{\text{ربع سوم}})$

$= \cos 10^\circ - \sin 10^\circ - (-\sin 10^\circ) - (-\cos 10^\circ) = 0{,}99 - 0{,}17 - (-0{,}17) - (-0{,}99)$

$= 2 \times 0{,}99 = 1{,}98$

تمرین: اگر $tg75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ باشد مطلوبست مقدار عددی عبارت زیر:

$A = \frac{3\sin 375^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$

$$A=\frac{3\sin(360^\circ+15^\circ)+2\sin(180^\circ-75^\circ)}{\cos(180^\circ-15^\circ)-\cos(180^\circ+75^\circ)}=\frac{3\sin15^\circ+2\sin75^\circ}{-\cos15^\circ+\cos75^\circ}=\frac{3\cos75^\circ+2\sin75^\circ}{-\sin75^\circ+\cos75^\circ}$$

$$=\frac{\frac{3\cos75^\circ}{\cos75^\circ}+\frac{2\sin75^\circ}{\cos75^\circ}}{-\frac{\sin75^\circ}{\cos75^\circ}+\frac{\cos75^\circ}{\cos75^\circ}}=\frac{3+2\,tg75^\circ}{-tg75^\circ+1}=\frac{3+2(2+\sqrt3)}{-(2+\sqrt3)+1}=\frac{7+2\sqrt3}{-1-\sqrt3}$$

تمرین: مقدار عددی عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$A=\frac{2\sin(\frac{41\pi}{10})+\sin(-\frac{\pi}{10})+\sin(\frac{29\pi}{10})-2\sin(\frac{11\pi}{10})}{\cos(-\frac{\pi}{10})\cdot tg\frac{11\pi}{10}+\sin\frac{21\pi}{10}}$$

$$=\frac{2\sin(4\pi+\frac{\pi}{10})-\sin\frac{\pi}{10}+\sin(3\pi-\frac{\pi}{10})-2\sin(\pi+\frac{\pi}{10})}{\cos\frac{\pi}{10}\cdot tg(\pi+\frac{\pi}{10})+\sin(2\pi+\frac{\pi}{10})}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}\times\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}+\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{4\sin\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{4}{2}=2$$

$$B=\frac{\sin225^\circ\times\cos(-30^\circ)+\cos135^\circ\times\sin60^\circ}{tg210^\circ\times tg60^\circ+\cos210^\circ\times tg330^\circ}$$

$$=\frac{\sin(180^\circ+45^\circ)\times\cos30^\circ+\cos(180^\circ-45^\circ)\times\sin60^\circ}{tg(180^\circ+30^\circ)\,tg60^\circ+\cos(180^\circ+30^\circ)\times tg(360^\circ-30^\circ)}$$

$$=\frac{-\sin45^\circ\times\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin60^\circ}{tg30^\circ\cdot tg60^\circ-\cos30^\circ(-tg30^\circ)}=\frac{-\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt3}{3}\times\sqrt3+\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{3}}=\frac{\frac{-2\sqrt6}{4}}{1+\frac12}=\frac{-\sqrt6}{3}$$

تست: حاصل عبارت $\frac{\cos285^\circ-\sin255^\circ}{\sin525^\circ-\sin105^\circ}$ با فرض $tg15^\circ=0/28$ کدام است؟
(تجربی - ۹۴)

۱) $-\frac{14}{9}$ ✓ ۲) $-\frac{9}{14}$ ۳) $\frac{9}{14}$ ۴) $\frac{14}{9}$

$$\frac{\cos(270^\circ+15^\circ)-\sin(270^\circ-15^\circ)}{\sin(3\times180^\circ-15^\circ)+\sin(90^\circ+15^\circ)}=\frac{\sin15^\circ+\cos15^\circ}{\sin15^\circ-\cos15^\circ}=\frac{\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}+\frac{\cos15^\circ}{\cos15^\circ}}{\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}-\frac{\cos15^\circ}{\cos15^\circ}}=\frac{tg15^\circ+1}{tg15^\circ-1}=\frac{1/28}{-0/72}=-\frac{14}{9}$$

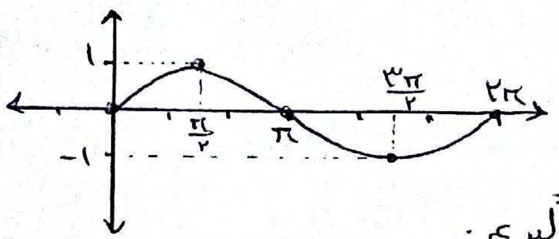
تست: مقدار عبارت $y=4-\frac{2}{3}\sin(3x-\pi)$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{14}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

$$y=4-\frac{2}{3}\sin[-(\pi-3x)]=4+\frac{2}{3}\sin(\pi-3x)=4+\frac{2}{3}\sin 3x=4+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=4+\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2}=4+\frac{2}{3}\times 1=\frac{14}{3}$$

توابع مثلثاتی:

۱) تابع سینوس: تابع $y=\sin x$ را تابع سینوس می‌نامند و نمودار آن به صورت زیر است:



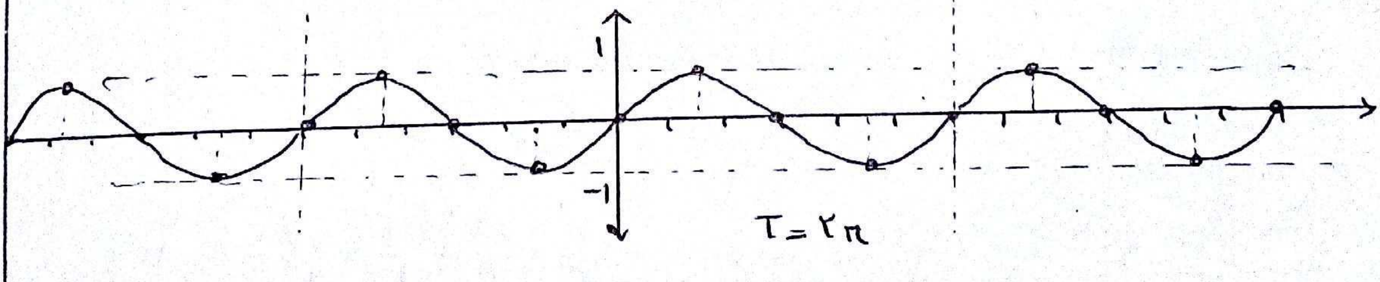
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

در رسم نمودار توابع مثلثاتی $\pi=3$ در نظر می‌گیریم:

$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=[-1,1]$

دامنه تابع $y=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1,1]$ است.

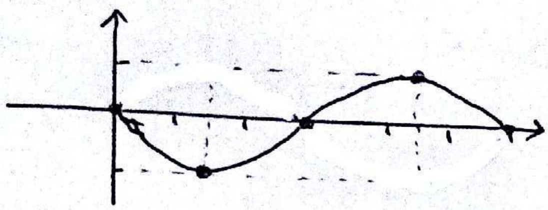
نمودار تابع سینوس در فاصله‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود این فاصله را دوره تناوب (دوره تکرار) می‌نامند و با T نشان می‌دهند.



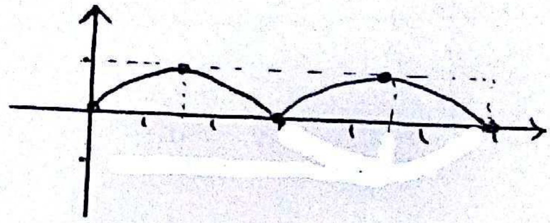
تابع $y=\sin x$ در مضارب صحیح π برابر صفر است. بیشترین مقدار تابع در بازه $[0,2\pi]$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ برابر 1 و کمترین مقدار تابع در بازه $[0,2\pi]$ در نقطه $x=\frac{3\pi}{2}$ برابر (-1) است.

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر در بازه $[0, 2\pi]$:

الف) $y = -\sin x$

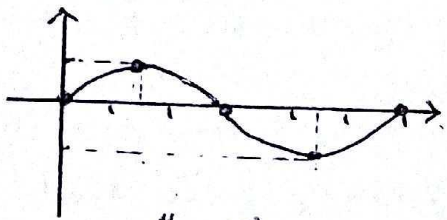


ب) $y = |\sin x|$

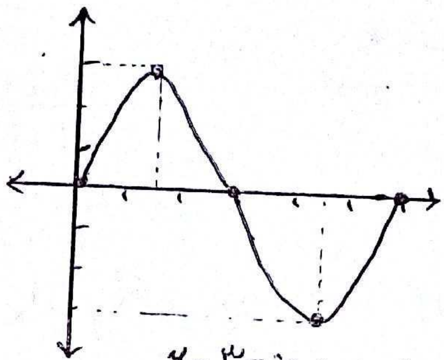


به کمک انتقال منحنی‌ها، نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید:

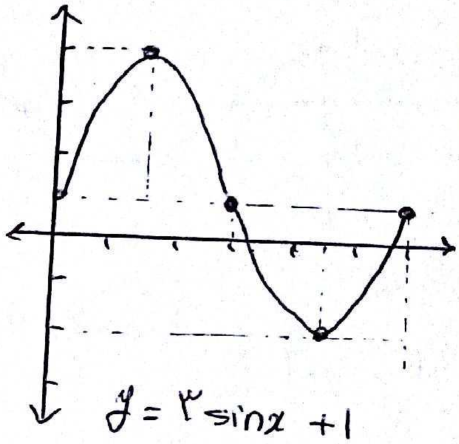
1) $y = 3\sin x + 1$



$y = \sin x$

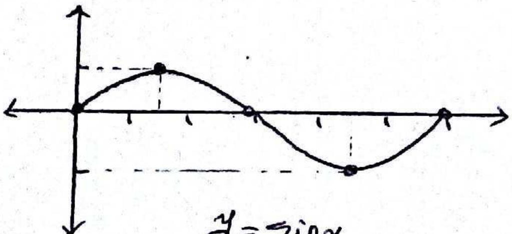


$y = 3\sin x$

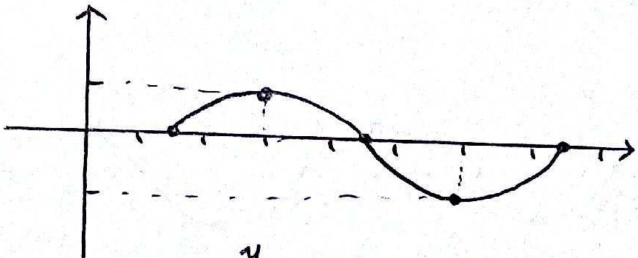


$y = 3\sin x + 1$

۲) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ $\quad \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

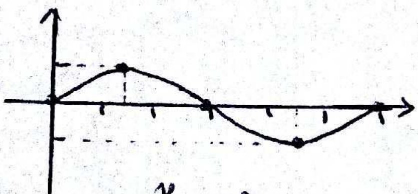


$y = \sin x$

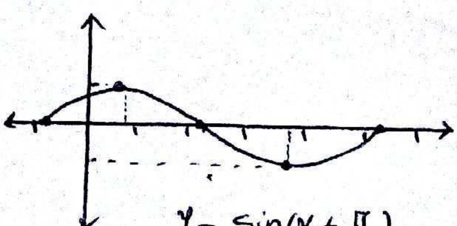


$y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

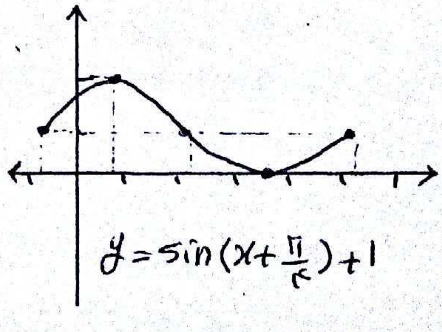
۳) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1$ $\quad \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}$



$y = \sin x$

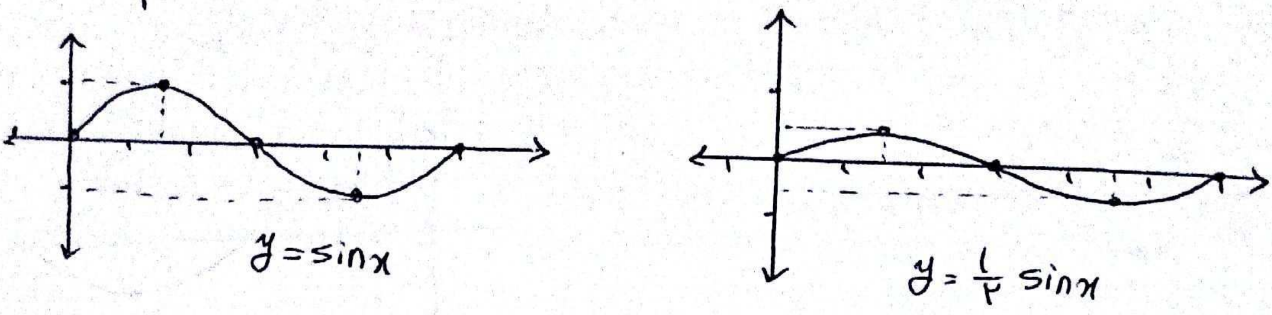


$y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

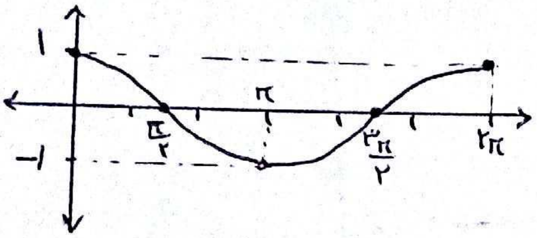


$y = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1$

۴) $y = \frac{1}{2} \sin x$



۲) تابع کسینوس : تابع $y=\cos x$ را تابع کسینوس می‌نامند و نمودار آن به صورت زیر است : $(\pi=3)$



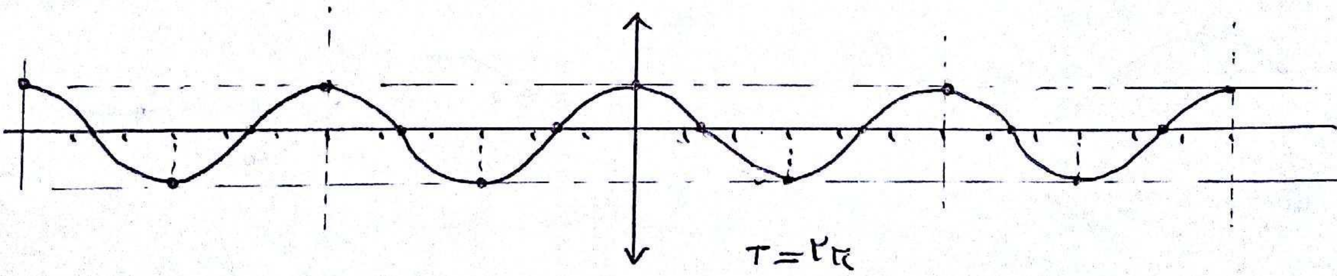
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[-1,1]$

دامنه تابع $y=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1,1]$ است.

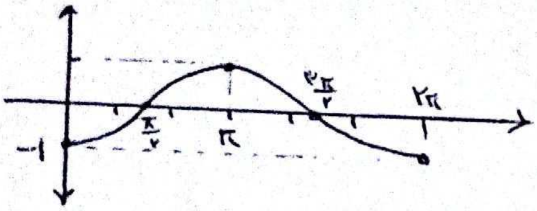
نمودار تابع کسینوس در فاصله هایی به طول 2π تکرار می‌شود این فاصله را دوره تناوب (دوره تکرار) می‌نامند و با T نشان می‌دهند.



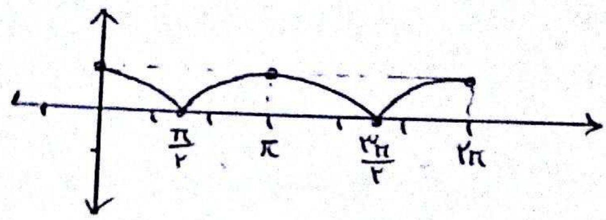
تابع $y=\cos x$ در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ برابر صفر است. بیشترین مقدار تابع در بازه $[0,2\pi]$ در نقاط $x=0$ و $x=2\pi$ برابر 1 است و کمترین مقدار تابع در بازه $[0,2\pi]$ در نقطه $x=\pi$ برابر (-1) است

تمرین : به کمک انتقال منحنی‌ها، نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید.

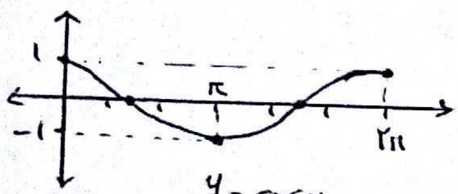
۱) $y=-\cos x$



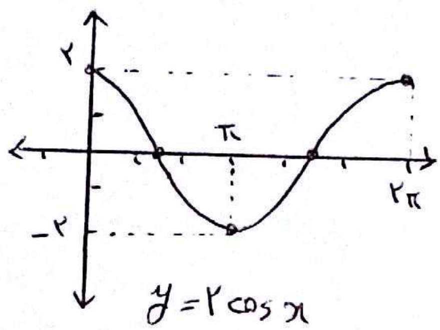
۲) $y=|\cos x|$



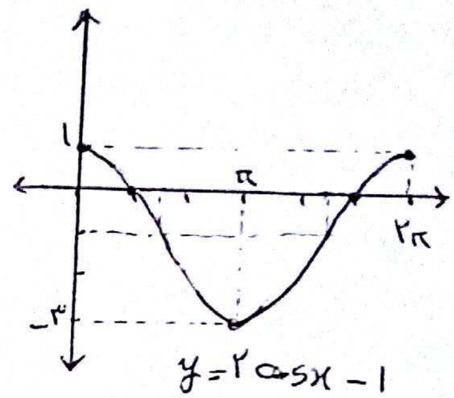
۳) $y=۲\cos x-۱$



$y=\cos x$

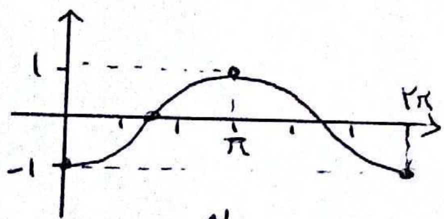


$y=۲\cos x$

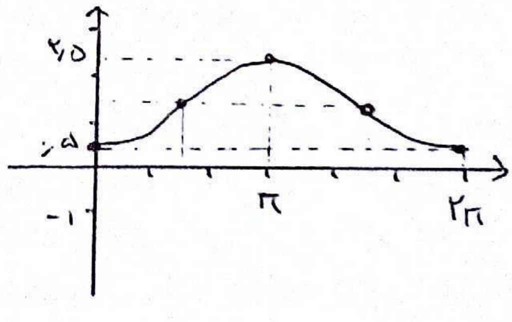


$y=۲\cos x-۱$

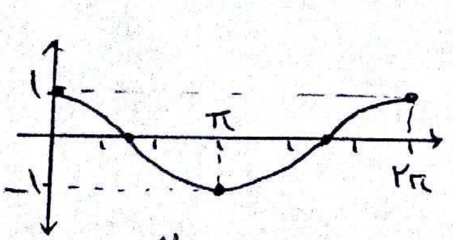
۴) $y=\frac{\pi}{۲}-\cos(-x) = -\cos x+\frac{\pi}{۲}$



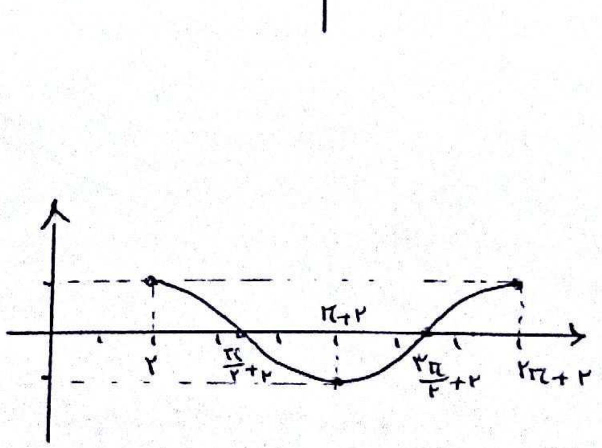
$y=-\cos x$



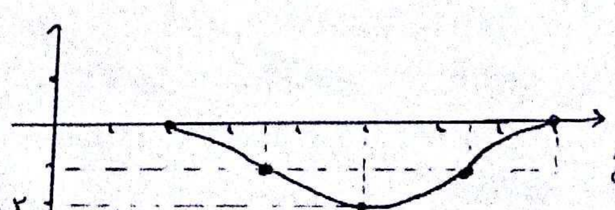
۵) $y=\cos(x-۲)-۱$



$y=\cos x$



$y=\cos(x-۲)$



$y=\cos(x-۲)-۱$

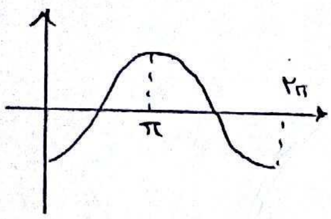
تست: تابع با ضابطه $y = 8\sin x$ در بازه $(-8\pi, 8\pi)$ در چند نقطه مینیمم می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

گزینه ۳: تابع سینوس در هر بازه بین دو مضرب زوج متوالی π یک بار به حداقل مقدار خودش می‌رسد پس از -8π تا 8π که 16π فاصله است ۸ بار به کمترین مقدارش می‌رسد.

تست: تابع با ضابطه $y = -4\cos x$ در بازه $[-3\pi, 7\pi]$ در چند نقطه به حداکثر مقدار خودش می‌رسد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

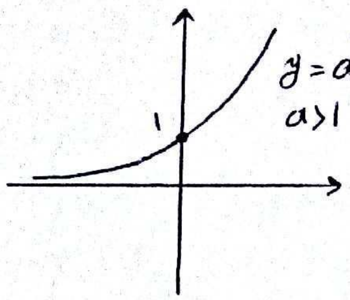


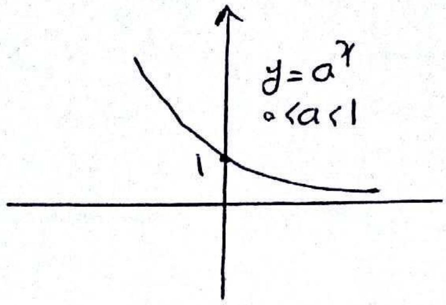
گزینه ۳: تابع $y = -\cos x$ در مضارب فرد π ماگزیمم می‌شود پس باید تعداد مضارب فرد π را از -3π تا 7π بیابیم که عبارت اند از: $-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ که می‌شود ۶ نقطه

فصل ۵ :

تابع نمایی :

هر تابع با ضابطه $y=f(x)=a^x$ را که در آن a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد ($a>0$ و $a\neq 1$) را تابع نمایی می‌نامند و نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است :



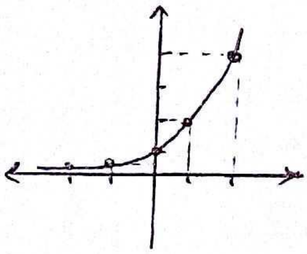


دامنه تابع نمایی $f(x)=a^x$ برابر $D_f=\mathbb{R}$ و برد آن برابر $R_f=(0,+\infty)$ است.

تمرین : نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را بدست آورید.

۱) $y=2^x$

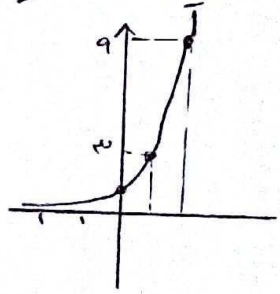
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



$D_f=\mathbb{R}$ $R_f=(0,+\infty)$

۲) $y=3^x$

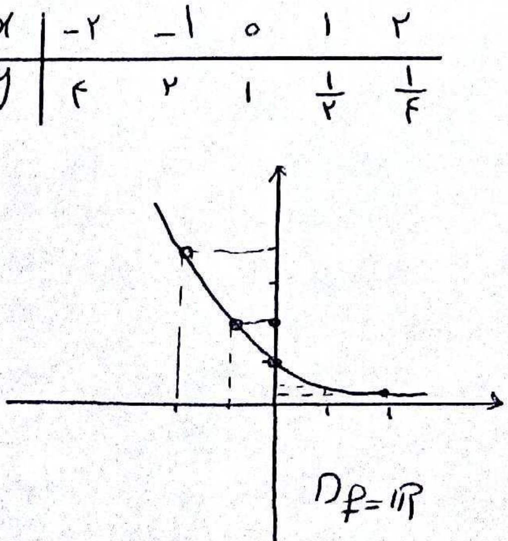
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=(0,+\infty)$

۳) $y=(\frac{1}{2})^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

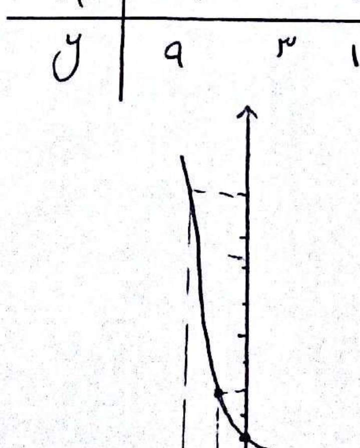


$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=(0,+\infty)$

۴) $y=(\frac{1}{3})^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

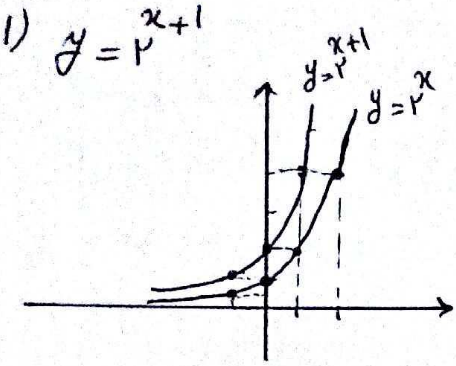


$D_f=\mathbb{R}$

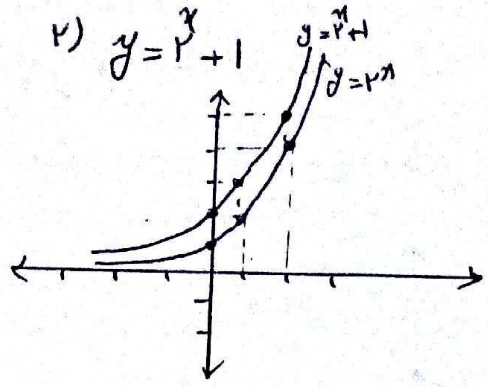
$R_f=(0,+\infty)$

تمرین: به کمک انتقال منحنی‌ها مطلوب است رسم نمودار توابع زیر:

1) $y=2^{x+1}$

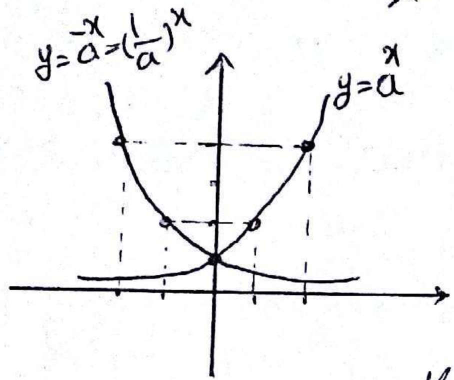


2) $y=2^x+1$

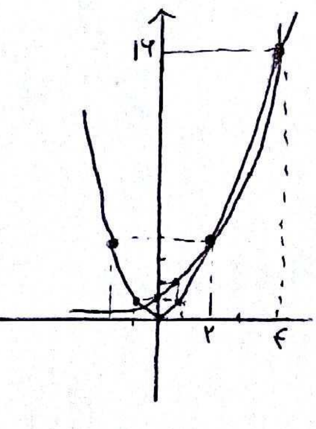


نکته ریاضی:

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ ($a>0$ و $a\neq 1$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.



تمرین: نمودار توابع $y=x^2$ و $y=2^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و مشخص کنید در چند نقطه، مقادیر 2^x و x^2 با هم مساویند؟



$x=2$

$x=4$

$-1<x<0$

معادله $2^x=x^2$ سه جواب دارد.

معادله نمایی:

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد معادله نمایی می‌گوئیم

1) $a^0=1$ 2) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ 3) $a^x.a^y=a^{x+y}$ 4) $(a^x)^y=a^{xy}$

5) $a^x\div a^y=a^{x-y}$ 6) $(\frac{a}{b})^{-x}=(\frac{b}{a})^x$ 7) $a^x=a^y \Rightarrow x=y$

تمرین: معادلات توانی زیر را حل کنید:

1) $32^{3x-1}=(\frac{1}{8})^{5-2x}$

$(2^5)^{3x-1}=(2^{-3})^{5-2x} \Rightarrow 2^{15x-5}=2^{-15+6x} \Rightarrow 15x-5=-15+6x \Rightarrow 9x=-10 \Rightarrow x=-\frac{10}{9}$

۲) $5^{x-1}\times 2^{x-1}=0/001$

$$(5\times 2)^{x-1}=10^{-3}\Rightarrow 10^{x-1}=10^{-3}\Rightarrow x-1=-3\Rightarrow \boxed{x=-2}$$

---

۳) $$2^{5x+1}=8^{x^2+1}\Rightarrow 2^{5x+1}=(2^3)^{x^2+1}\Rightarrow 2^{5x+1}=2^{3x^2+3}\Rightarrow 3x^2+3=5x+1$$

$$\Rightarrow 3x^2-5x+2=0\Rightarrow \boxed{x=1}\ ,\ \boxed{x=\frac{2}{3}}$$

---

۴) $4^{x+1}-18\times 2^x+8=0$

$$4\times 4^x-18\times 2^x+8=0\Rightarrow 4\times (2^2)^x-18\times 2^x+8=0\Rightarrow 4\times(2^x)^2-18\times(2^x)+8=0$$

$$2^x=t\Rightarrow 4t^2-18t+8=0\Rightarrow 2t^2-9t+4=0\qquad \Delta=81-32=49$$

$$t=\frac{9\pm\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{9\pm 7}{4}=\begin{cases}t=4\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow \boxed{x=2}\\ t=\frac{1}{2}\Rightarrow 2^x=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{x=-1}\end{cases}$$

تمرین: معادله‌ی زیر چند جواب دارد؟

الف) $3^{2x}=3^{x+3}-140$

$$(3^x)^2=3^3\times 3^x-140\Rightarrow (3^x)^2-27(3^x)+140=0\qquad 3^x=t$$

$$\Rightarrow t^2-27t+140=0\Rightarrow (t-20)(t-7)=0\Rightarrow\begin{cases}t=20\Rightarrow 3^x=20\Rightarrow \text{یک جواب}\\ t=7\Rightarrow 3^x=7\Rightarrow \text{یک جواب}\end{cases}\Rightarrow \text{۲ جواب}$$

ب) $8\times 2^x+15\times 2^{x+3}=512$

$$2^{x+3}+15\times 2^{x+3}=512\Rightarrow 2^{x+3}(1+15)=512\Rightarrow 2^{x+3}\times 16=512\Rightarrow 2^{x+3}=\frac{512}{16}=32$$

$$\Rightarrow 2^{x+3}=2^5\Rightarrow x+3=5\Rightarrow \boxed{x=2}\ \text{یک جواب}$$

تمرین: اگر $f(x)=2^x+2^{-x}$ باشد مطلوبست محاسبه: $\frac{f(x+1)+f(x-1)}{f(x)}=?$

$$\frac{f(x+1)+f(x-1)}{f(x)}=\frac{2^{x+1}+2^{-x-1}+2^{x-1}+2^{-x+1}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^x(2^1+2^{-1})+2^{-x}(2^{-1}+2^1)}{2^x+2^{-x}}=\frac{\frac{5}{2}\times 2^x+\frac{5}{2}\times 2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{5}{2}$$

تست: نمودارهای دو تابع $f(x)=۳^{ax+b}$ و $g(x)=(\frac{1}{۹})^x$ در نقطه‌ای به طول $(۱-)$ متقاطع هستند. اگر $f(۲)=\frac{1}{۳}$ باشد مقدار $f^{-1}(۲۷)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۳ (ریاضی - ۹۵)

حل: گزینه (۲) وقتی دو تابع در $x=-1$ متقاطع هستند یعنی مقدارشان در این نقطه باهم برابر است:

$$f(-1)=g(-1) \Rightarrow ۳^{-a+b}=(\frac{1}{۹})^{-1} \Rightarrow ۳^{-a+b}=۹=۳^۲ \Rightarrow -a+b=۲$$

$$f(۲)=\frac{1}{۳} \Rightarrow ۳^{۲a+b}=\frac{1}{۳}=۳^{-1} \Rightarrow ۲a+b=-1$$

$$\begin{cases} -a+b=۲ \\ ۲a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-1}, \boxed{b=1} \qquad f(x)=۳^{-x+1}$$

$$f(x)=۲۷ \Rightarrow ۳^{-x+1}=۳^۳ \Rightarrow -x+1=۳ \Rightarrow \boxed{x=-۲} \Rightarrow f(-۲)=۲۷ \Rightarrow f^{-1}(۲۷)=-۲$$

تست: نمودارهای دو تابع $y=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}$ و $y=۳^x+\frac{۸}{۳}$ در نقطه A متقاطع اند فاصله نقطه A از نقطه $(-1,1)$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۴)

۱) 1 ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

حل: گزینه ۳:

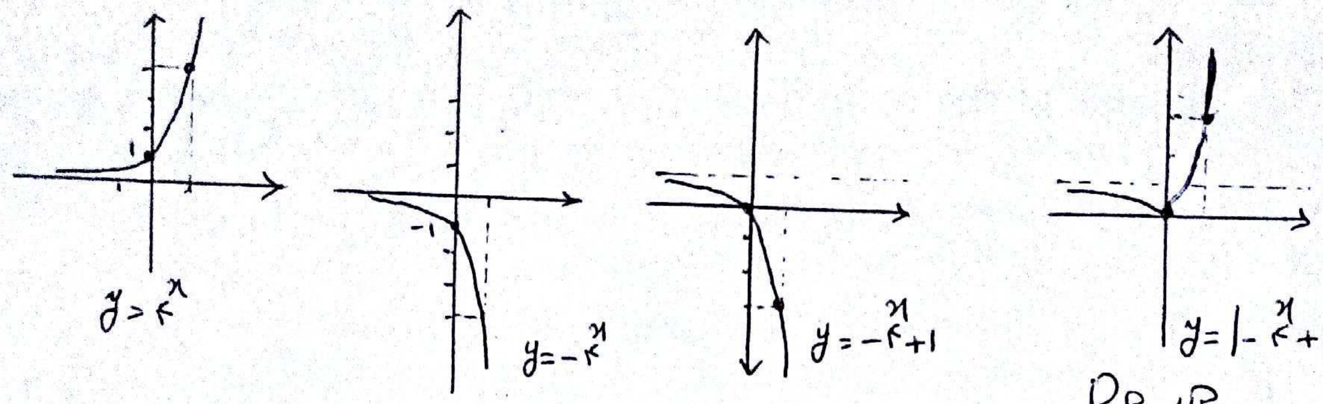
$$۳^x+\frac{۸}{۳}=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x} \Rightarrow ۳^x+\frac{۸}{۳}=(\frac{۳^{\frac{1}{۲}}}{۳})^{۲x} \Rightarrow ۳^x+\frac{۸}{۳}=(۳^{-\frac{1}{۲}})^{۲x} \Rightarrow ۳^x+\frac{۸}{۳}=۳^{-x}$$

$$\xrightarrow{۳^x=t} t+\frac{۸}{۳}=\frac{1}{t} \xRightarrow{\times ۳t} ۳t^۲+۸t=۳ \Rightarrow t=\frac{-۸\pm\sqrt{۱۰۰}}{۶}=\begin{cases} t_1=-۳ \\ t_۲=\frac{1}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳^x=-۳ & \text{غ ق ق} \\ ۳^x=\frac{1}{۳} \Rightarrow ۳^x=۳^{-1} \Rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases} \Rightarrow y=۳^{-1}+\frac{۸}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳ \Rightarrow A=(-1,۳)$$

$$A\begin{vmatrix} -1 \\ ۳ \end{vmatrix} \quad M\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow AM=|۳-1|=۲$$

تمرین : به کمک انتقال منحنی ها نمودار تابع $y=|-4^x+1|$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید :



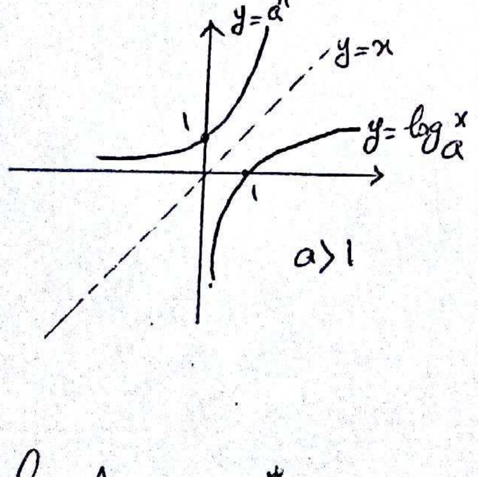
$D_f=\mathbb{R}$

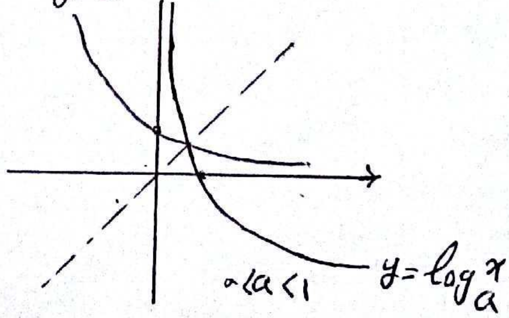
$R_f=[0,+\infty)$

تابع لگاریتمی :

تابع نمایی $f(x)=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ یک به یک است پس در نتیجه وارون پذیر است وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی نامیده و بصورت $y=f(x)=\log_a x$ نشان می دهند a را مبنای (پایه ی) لگاریتم می گویند که عددی مثبت و مخالف یک است . بطور کلی :

$$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$





مثال)

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

$\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow 2^5 = 32$

$\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$

$\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \Rightarrow 3^{-3} = \frac{1}{27}$

قضایای لگاریتم:

۱) اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند. $\log_{5}^{0} =$ جواب ندارد $\log_{2}^{-8} =$ جواب ندارد.

۲) لگاریتم ۱ در هر پایه‌ای صفر است. $(a>0, a\neq 1)$ $\log_{a}^{1} = 0$

مثال) $\log_{5}^{1} = 0$ $\log_{12}^{1} = 0$

۳) لگاریتم هر عدد مثبت مخالف یک در پایه خودش برابر یک است.

$$\log_{a}^{a} = 1 \qquad (a>0, a\neq 1)$$

اثبات: $\log_{a}^{a} = x \Rightarrow a^{x} = a \Rightarrow a^{x} = a^{1} \Rightarrow x = 1$

مثال) $\log_{5}^{5} = 1$ $\log_{8}^{8} = 1$

۴) لگاریتم حاصلضرب دو عدد (حقیقی مثبت) برابر است با مجموع لگاریتم های آن دو عدد

$$\log_{a}^{x.y} = \log_{a}^{x} + \log_{a}^{y} \qquad (x>0, y>0, a>0, a\neq 1)$$

اثبات

$$\left.\begin{array}{l}\log_{a}^{x} = m \Rightarrow a^{m} = x \\ \log_{a}^{y} = n \Rightarrow a^{n} = y\end{array}\right\} \Rightarrow x.y = a^{m}\cdot a^{n} \Rightarrow xy = a^{m+n} \Rightarrow \log_{a}^{x.y} = m+n$$

$$\Rightarrow \log_{a}^{x\cdot y} = \log_{a}^{x} + \log_{a}^{y}$$

۵) لگاریتم حاصل تقسیم دو عدد حقیقی مثبت برابر است با تفاضل لگاریتم های آن دو عدد

$$\log_{a}^{\frac{x}{y}} = \log_{a}^{x} - \log_{a}^{y} \qquad (x>0, y>0, a>0, a\neq 1)$$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l}\log_{a}^{x} = m \Rightarrow a^{m} = x \\ \log_{a}^{y} = n \Rightarrow a^{n} = y\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^{m}}{a^{n}} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{m-n} \Rightarrow \log_{a}^{\frac{x}{y}} = m-n \Rightarrow \log_{a}^{\frac{x}{y}} = \log_{a}^{x} - \log_{a}^{y}$$

۶) برای هر عدد طبیعی n داریم: $\log_a x^n = n\log_a x$

$(a>0, a\neq 1, x>0, n\in N)$

اثبات:

$$\log_a x^n = \log_a \overbrace{x.x.x\ldots x}^{n\ \text{تا}} = \log_a x + \log_a x + \log_a x + \cdots + \log_a x = n\log_a x$$

۷) اگر مبنای (یا پایه‌ی) لگاریتم ۱۰ باشد آن را نمی‌نویسند و اسمش لگاریتم اعشاری است.

$$\log_{10} a = \log a$$

تمرین: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را با استفاده از قضایای لگاریتم بدست آورید:

$$A = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5\times 1 = 5$$

$$B = \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 \frac{1}{3^4} = \log_3 3^{-4} = -4\log_3 3 = -4\times 1 = -4$$

$$C = \log_5 \sqrt{125} = \log_5 \sqrt{5^3} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\times 1 = \frac{3}{2}$$

تمرین: اگر $\log 2 \simeq 0.3$ و $\log 3 \simeq 0.48$ و $\log 7 = 0.85$ باشد مطلوبست محاسبه:

الف) $\log 12 = \log 4\times 3 = \log 4 + \log 3 = \log 2^2 + \log 3 = 2\log 2 + \log 3$

$= 2(0.3) + 0.48 \simeq 1.08$

ب) $\log 25 = \log \frac{100}{4} = \log 100 - \log 4 = \log 10^2 - \log 2^2 = 2\log 10 - 2\log 2$

$= 2\times 1 - 2\times(0.3) = 2 - 0.6 = 1.4$

ج) $\log \frac{8100}{\sqrt{49}} = \log 8100 - \log\sqrt{49} = \log 81 + \log 100 - \log 7^{\frac{2}{3}} = \log 3^4 + \log 10^2$

$- \frac{2}{3}\log 7 = 4\log 3 + 2\log 10 - \frac{2}{3}\log 7 = 4(0.48) + 2(1) - \frac{2}{3}(0.85) \simeq 3.35$

تمرین: اگر $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.4$ آنگاه مطلوبست محاسبه:

$$A = 2\log_{2}^{\sqrt{2}} + \log_{5}^{125} + \log\sqrt{72} = 2\log_{2}^{2^{\frac{1}{2}}} + \log_{5}^{5^{3}} + \log 72^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\log_{2}^{2} + 3\log_{5}^{5} + \frac{1}{2}\log 72 = 1+3+\frac{1}{2}\log(2^{3}\times 3^{2}) = 4+\frac{1}{2}(\log 2^{3}+\log 3^{2})$$

$$= 4+\frac{1}{2}(3\log 2+2\log 3) = 4+\frac{1}{2}(3\times 0.3+2\times 0.4) = 4+\frac{1}{2}(1.7) = 4+0.85 = 4.85$$

$$B = \log\sqrt{15} + \log_{3}^{27} - \log_{2}^{32} = \log 15^{\frac{1}{2}} + \log_{3}^{3^{3}} - \log_{2}^{2^{5}}$$

$$= \frac{1}{2}\log(3\times 5) + 3\log_{3}^{3} - 5\log_{2}^{2} = \frac{1}{2}(\log 3+\log 5) + 3 - 5$$

$$= \frac{1}{2}(\log 3 + \log 10 - \log 2) - 2 = \frac{1}{2}(0.4+1-0.3) - 2 = \frac{1.1}{2} - 2 = -1.4$$

تمرین: اگر $\log_{3}^{12} = a$ باشد حاصل $\log_{3}^{18}$ را برحسب a بدست آورید.

$$\log_{3}^{12} = a \Rightarrow \log_{3}^{2^{2}\times 3} = a \Rightarrow \log_{3}^{2^{2}} + \log_{3}^{3} = a \Rightarrow 2\log_{3}^{2} + 1 = a \Rightarrow \log_{3}^{2} = \frac{a-1}{2}$$

$$\log_{3}^{18} = \log_{3}^{2\times 3^{2}} = \log_{3}^{2} + 2\log_{3}^{3} = \log_{3}^{2} + 2 = \frac{a-1}{2} + 2 = \frac{a+3}{2}$$

تمرین: اگر $\log_{15}^{3} = a$ باشد $\log_{15}^{75}$ چقدر است؟

$$\log_{15}^{75} = \log_{15}^{5\times 15} = \log_{15}^{15} + \log_{15}^{5} = 1 + \log_{15}^{\frac{15}{3}} = 1 + \log_{15}^{15} - \log_{15}^{3} = 1+1-a = 2-a$$

تمرین: اگر $\log_{2}(\log_{3}(\log_{2}^{a})) = 1$ ، مقدار $\log(a+488)$ را بدست آورید.

$$\log_{3}^{(\log_{2}^{a})} = 2 \Rightarrow \log_{2}^{a} = 9 \Rightarrow a = 2^{9} = 512 \Rightarrow \log(a+488) = \log 1000 = 3$$

تمرین: حاصل $\log_{30}^{2} + \log_{30}^{5} + \log_{30}^{90}$ را بدست آورید:

$$\log_{30}^{2} + \log_{30}^{5} + \log_{30}^{90} = \log_{30}^{(2\times 5\times 90)} = \log_{30}^{900} = \log_{30}^{30^{2}} = 2\log_{30}^{30} = 2$$

فرمولهای مهم لگاریتم:

۱) $\boxed{\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x}$

اثبات:

$$\log_{a^m} x^n = z \Rightarrow x^n = (a^m)^z \Rightarrow x^n = a^{mz} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a^{mz}} \Rightarrow x = a^{\frac{mz}{n}} \Rightarrow$$

$$\log_a x = \frac{mz}{n} \Rightarrow \frac{n}{m}\log_a x = z \Rightarrow \frac{n}{m}\log_a x = \log_{a^m} x^n$$

تست: اگر $۳^a = ۷$ و $۲ = ۳^b$ باشد حاصل $\log_9 ۵۶$ کدام است؟

۱) $a + ۳b$ ۲) $۳a + b$ ۳) $\frac{۳a+b}{۲}$ ۴) $\frac{a+۳b}{۲}$

حل: گزینه (۴)

$$۳^a = ۷ \Rightarrow \log_۳ ۷ = a \qquad ۳^b = ۲ \Rightarrow \log_۳ ۲ = b$$

$$\log_9 ۵۶ = \log_9 (۸\times۷) = \log_9 ۸ + \log_9 ۷ = \log_{۳^۲} ۲^۳ + \log_{۳^۲} ۷^۱ = \frac{۳}{۲}\log_۳ ۲ + \frac{۱}{۲}\log_۳ ۷$$

$$= \frac{۳}{۲}b + \frac{۱}{۲}a = \frac{۳b+a}{۲}$$

---

۲) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (قاعده تغییر مبنا)

اثبات:

$$\log_b a = M \Rightarrow a = b^M \qquad \log_c b = N \Rightarrow b = c^N$$

$$a = b^M \Rightarrow a = (c^N)^M \Rightarrow a = c^{NM} \Rightarrow \log_c a = NM \Rightarrow \log_c a = \log_c b \times \log_b a$$

$$\Rightarrow \frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$

نتیجه:

A) $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ (پایه ۱۰ را نمی نویسیم)

B) $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

C) $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a$

تمرین: اگر $\log 5 = a$ حاصل $\log_5 2$ را برحسب a بدست آورید.

$$\log 5 = a \Rightarrow \log \frac{10}{2} = a \Rightarrow \log 10 - \log 2 = a \Rightarrow 1 - \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = 1 - a$$

$$\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{1-a}{a}$$

تمرین: اگر $\log_{20} 4 = a$ باشد حاصل $\log_4 5$ را برحسب a بیابید.

$$\log_{20} 4 = a \Rightarrow \log_4 20 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_4 (4\times 5) = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_4 4 + \log_4 5 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_4 5 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_4 5 = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow \log_4 5 = \frac{1-a}{a}$$

تمرین: مطلوبست محاسبه:

$$\log_5 27 \times \log_{11} 5 \times \log_3 11 = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3\times 1 = 3$$

۳) $a^{\log_a x} = x$

اثبات: $\log_a x = m \Rightarrow a^m = x$

سمت چپ $= a^{\log_a x} = a^{\log_a a^m} = a^{m\log_a a} = a^m = x =$ سمت راست

۴) $x^{\log_a a} = x$

۳و۴ $\Rightarrow a^{\log_a x} = x^{\log_a a}$

مثال) $3^{\log_{10} 15} = 3.$ $\qquad 5^{\log_5 7} = 7$

تست: حاصل $2^{\log_8 x}$ کدام است؟

۱) x^2 ۲) x^3 ۳) $\sqrt[3]{x}$ ۴) $\sqrt{x}$

$$2^{\log_8 x} = x^{\log_8 2} = x^{\log_{2^3} 2} = x^{\frac{1}{3}\log_2 2} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

گزینه (۳)

معادلات لگاریتمی:

یک معادله لگاریتمی شامل یک یا چند عبارت لگاریتمی شامل متغیر است که پس از ساده شدن بتوان بصورت $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)}$ نوشت و از آنجا با فرض مثبت بودن f و g نتیجه گرفت: $f(x) = g(x)$

منظور از حل یک معادله لگاریتمی یافتن مقادیری برای متغیر است که در معادله صدق کند. پس آزمایش جوابها لازم است.

تمرین: معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید:

۱) $\log_۴^{(x-۳)} + \log_۴^{(x+۳)} = ۲$

$\log_۴^{(x-۳)} + \log_۴^{(x+۳)} = \log_۴^{۱۶} \Rightarrow \log_۴^{(x-۳)(x+۳)} = \log_۴^{۱۶} \Rightarrow x^۲ - ۹ = ۱۶$

$\Rightarrow x^۲ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ & \text{ق ق} \\ x = -۵ & \text{ق ق} \notin \end{cases}$

---

۲) $\log(x+1) - \frac{۱}{۲}\log(x-1) = \log ۳$

$\xrightarrow{\times ۲} ۲\log(x+1) - \log(x-1) = ۲\log ۳ \Rightarrow \log(x+1)^۲ - \log(x-1) = \log ۳^۲$

$\Rightarrow \log \frac{(x+1)^۲}{x-1} = \log ۹ \Rightarrow \frac{(x+1)^۲}{x-1} = ۹ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۹x - ۹ \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۰$

$\Rightarrow (x-۲)(x-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ & \text{ق ق} \\ x = ۵ & \text{ق ق} \end{cases}$

---

۳) $\frac{۱}{۲}\log ۲۵ + \log(x-۳) = ۲$

$\Rightarrow \log ۲۵^{\frac{۱}{۲}} + \log(x-۳) = ۲ \Rightarrow \log ۵ + \log(x-۳) = ۲ \Rightarrow \log ۵(x-۳) = ۲$

$\Rightarrow ۵(x-۳) = ۱۰^۲ \Rightarrow ۵x - ۱۵ = ۱۰۰ \Rightarrow ۵x = ۱۱۵ \Rightarrow \boxed{x = ۲۳}$ ق ق

۴) $\log_2(12x-21) - \log_2(x^2-3) = 2$

$$\log_2 \frac{12x-21}{x^2-3} = 2 \Rightarrow \frac{12x-21}{x^2-3} = 2^2 \Rightarrow 12x-21 = 4x^2-12 \Rightarrow 4x^2-12x+9=0$$

$$\Rightarrow (2x-3)^2=0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$ غ ق ق

معادله جواب ندارد.

---

۵) $4\log\frac{x}{2} + 3\log\frac{x}{3} = 5\log x - \log 27$

$$\Rightarrow \log(\frac{x}{2})^4 + \log(\frac{x}{3})^3 = \log x^5 - \log 27 \Rightarrow \log\frac{x^4}{16} + \log\frac{x^3}{27} = \log x^5 - \log 27$$

$$\Rightarrow \log(\frac{x^4}{16}\times\frac{x^3}{27}) = \log\frac{x^5}{27} \Rightarrow \frac{x^7}{16\times 27} = \frac{x^5}{27} \Rightarrow \frac{x^2}{16}=1 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow \begin{cases} x=4 & \text{ق ق} \\ x=-4 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین: اگر $\log_x(3x-1) + \log_x(x+1) = 2$ باشد حاصل $\log_2(x^2+x+\frac{7}{2})$ را بدست آورید.

$$\log_x(3x-1) + \log_x(x+1) = 2 \Rightarrow \log_x(3x-1)(x+1) = 2 \Rightarrow (3x-1)(x+1) = x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x-1 = x^2 \Rightarrow 2x^2+2x-1=0 \Rightarrow 2x^2+2x=1 \Rightarrow x^2+x=\frac{1}{2}$$

$$\log_2(x^2+x+\frac{7}{2}) = \log_2(\frac{1}{2}+\frac{7}{2}) = \log_2\frac{8}{2} = \log_2 4 = 2$$

تست: از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$ مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه ۸ کدام است؟ تجربی - ۹۵

۱) $-\frac{2}{3}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{2}{3}$

حل: گزینه ۴:

$$\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1 \Rightarrow \log_3\frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1$$

$$\Rightarrow 2x^2+1 = 3x+6 \Rightarrow 2x^2-3x-5=0 \Rightarrow x_1=-1 \text{ غ ق ق}, \quad x_2=\frac{5}{2} \text{ ق ق}$$

$$x=\frac{5}{2} \Rightarrow \log_8(2x-1) = \log_8(2(\frac{5}{2})-1) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{2}{3}$$

تمرین ۴ ص ۱۱۴ کتاب درسی :

الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\log_a^x$ از نقطه (۲و۲) عبور کند مقدار a را بدست آورید.

$$۲=\log_a^۲ \Rightarrow a^۲=۲ \Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\log_a^x$ از نقطه $(\frac{۱}{۲}$و$-۴)$ عبور کند مقدار a چند است؟

$$-۴=\log_a^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow a^{-۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{a^۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a^۴=۲ \Rightarrow a=\sqrt[۴]{۲}$$

دامنه توابع لگاریتمی :

می دانیم اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند همچنین پایه لگاریتم باید عددی مثبت و مخالف یک باشد بنابراین :

$$y=\log_B^A \qquad A>۰ \text{ و } B>۰ \text{ و } B\neq ۱$$

مثال ۱ : مطلوبست دامنه توابع زیر :

۱) $y=\log\frac{x+1}{x-1}$

$۱۰\neq۱$ و $۱۰>۰$ ، $۱۰=$ پایه

$$\frac{x+1}{x-1}>۰$$

x	$-\infty$	-۱	۱	$+\infty$
$x+1$	$-$	۰ $+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	۰ $+$	
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	۰ $-$	تعریف نشده $+$	

$$D_f=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$$

۲) $y=\log_۳^{(x-۲)}$

$$\begin{cases} ۳>۰ \\ ۳\neq ۱ \\ x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \end{cases} \Rightarrow D_f=(۲,+\infty)$$

۳) $\log_۲^{(x^۲-۹)}$

$$\begin{cases} ۲>۰ \\ ۲\neq ۱ \\ x^۲-۹>۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۳	۳	$+\infty$
$x^۲-۹$	$+$	۰ $-$	۰ $+$	

$$D_f=(-\infty,-۳)\cup(۳,+\infty)$$

۴) $y=\log_{(x-1)}^{(x+1)}$

$$\begin{cases} x+1>۰ \Rightarrow x>-۱ \\ x-1>۰ \Rightarrow x>۱ \\ x-1\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۲ \end{cases}$$

اشتراک ۳ شرط $=D_f=(۱,۲)\cup(۲,+\infty)$

یا $(۱,+\infty)-\{۲\}$

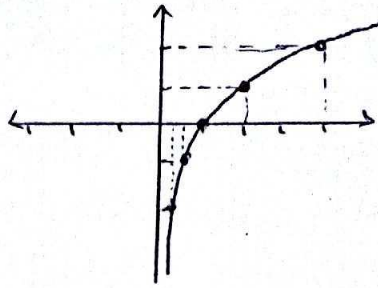
رسم نمودار توابع لگاریتمی:

با استفاده از نقطه یابی در محدوده‌ی دامنه تعریف تابع لگاریتمی می‌توان نمودار تابع لگاریتمی را رسم کرد و با استفاده از انتقال منحنی‌ها توابع ساخته شده از آن را رسم نمود.

تمرین: مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

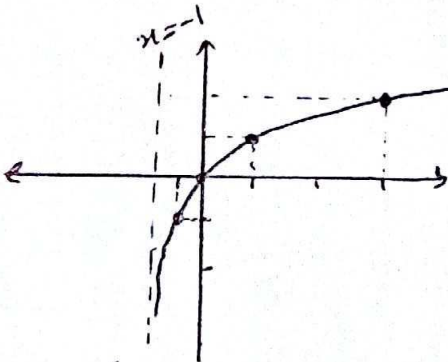
۱) $y=\log_2 x$ $\quad D_f=(0,+\infty)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2



۲) $y=\log_2(x+1)$ $\quad x+1>0 \Rightarrow x>-1$ $\quad D_f=(-1,+\infty)$

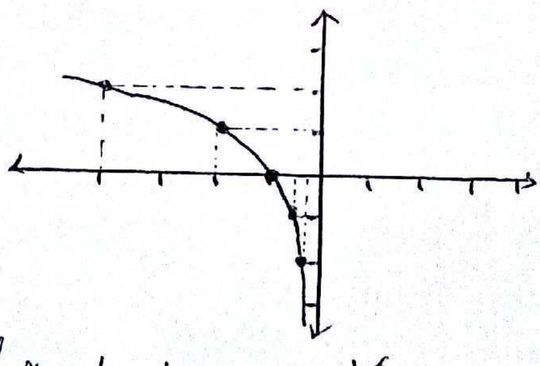
x	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
y	-1	0	1	2



روش دوم: نمودار $y=\log_2 x$ را به اندازه یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

۳) $y=\log_2(-x)$ $\quad -x>0 \Rightarrow x<0$ $\quad D_f=(-\infty,0)$

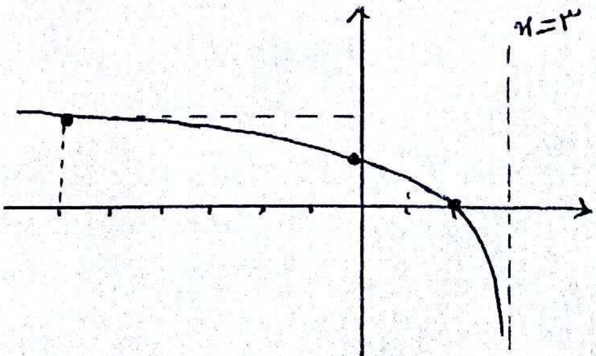
x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4
y	-2	-1	0	1	2



روش دوم: کافی است نمودار $y=\log_2 x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

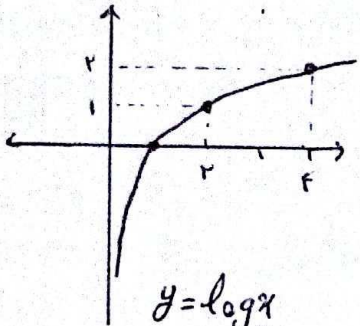
۴) $y=\log_3(3-x)$ $\quad 3-x>0 \Rightarrow x<3$ $\quad D_f=(-\infty,3)$

x	2	0	-6	-24
y	0	1	2	3

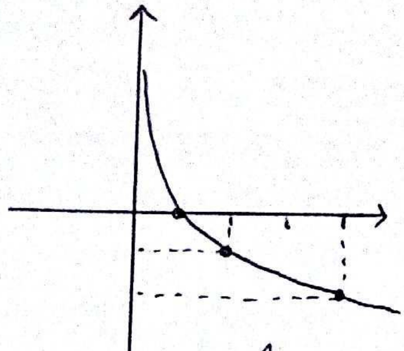


تمرین: به کمک انتقال منحنی‌ها مطلوب است رسم نمودار تابع:

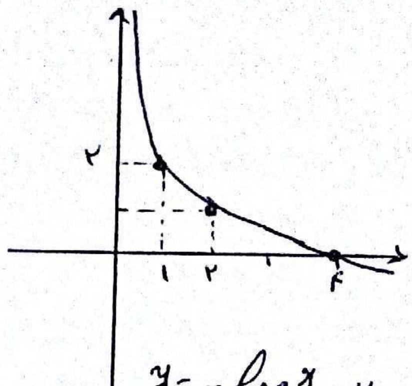
$y=2-\log_2^x$



$y=\log_2^x$



$y=-\log_2^x$



$y=-\log_2^x+2$

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی:

۱) در بسیاری از پدیده‌های طبیعی و اتفاق‌های روزمره می‌توانیم از توابع نمایی برای بررسی رفتار پدیده‌ها استفاده کنیم. میزان تولید باکتری‌ها، میزان افزایش جمعیت، میزان سود بانکی و ... را با توابع نمایی بررسی می‌کنند. از مهم‌ترین توابع نمایی، تابع $h(x)=ka^x$ ($a>0$ و $a\neq 1$) است که در بسیاری از مسائل مطرح می‌شود. (k = مقدار اولیه)

مثال ۱: نوعی باکتری در بدن انسان تولید می‌شود. اگر در ابتدا ۲۰۰ باکتری موجود باشند، پس از t دقیقه، میزان تولید این باکتری از رابطه $f(t)=200\times 2^{0/03t}$ بدست می‌آید. پس از چند دقیقه ۱۰۰۰ باکتری وجود خواهد داشت؟ ($\log 2=0/3$)

$$f(t)=1000 \Rightarrow 1000=200\times 2^{0/03t} \Rightarrow 5=2^{0/03t} \Rightarrow 0/03t=\log_2^5$$

$$\Rightarrow 0/03t=\frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow 0/03t=\frac{\log\frac{10}{2}}{0/3} \Rightarrow 0/03t=\frac{1-0/3}{0/3} \Rightarrow 0/03t=\frac{0/7}{0/3}=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{100}t=\frac{7}{3} \Rightarrow t=\frac{700}{9} \Rightarrow t=77/7$$

تقریباً ۷۸ دقیقه طول می‌کشد تا ۱۰۰۰ باکتری بوجود آید.

مثال ۲: در شرایط ایده‌آل تعداد یک باکتری خاص هر سه ساعت ۲ برابر می‌شود. اگر در ابتدا ۱۰۰۰ باکتری موجود باشند:

الف) رابطه‌ای بیابید که تعداد باکتری‌ها را بعد از t ساعت به ما بدهد.

ب) تعداد باکتری‌ها را بعد از ۱۵ ساعت بیابید.

ج) بعد از چند ساعت تعداد باکتری‌ها ۱۰۰۰۰۰ می‌شود؟ $(\log 2 = 0/3)$

حل الف) تعداد باکتری‌ها بعد از t ساعت

$$f(t) = 1000 \times 2^{\frac{t}{3}}$$

حل ب)

$$t=15 \Rightarrow f(15) = 1000 \times 2^{\frac{15}{3}} = 1000 \times 2^{5} = 32000$$

حل ج)

$$f(t)=100000 \Rightarrow 1000 \times 2^{\frac{t}{3}} = 100000 \Rightarrow 2^{\frac{t}{3}} = 100 \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{3}} = \log 100$$

$$\Rightarrow \frac{t}{3} \times 0/3 = 2 \Rightarrow \frac{t}{3} = \frac{2}{0/3} \Rightarrow t = \frac{6}{0/3} \Rightarrow t = 20$$

مثال ۳: (ص ۱۱۷ کتاب درسی):

نوعی باکتری (اِشِرِیشیا کلی) $E\text{-}coli$ در هر نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده از این باکتری بعد از t ساعت از رابطه $P(t) = 100 \times 2^{2t}$ بدست می‌آید. تعداد باکتری‌ها پس از ۳ ساعت چقدر است؟

$$t=3 \Rightarrow P(3) = 100 \times 2^{2 \times 3} = 100 \times 2^{6} = 100 \times 64 = 6400$$

---

۲) ریشتر مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر بدست آید:

$$\boxed{\log E = 11/8 + 1/5M}$$

مثال ۵: روز پنجم دیماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5(6/6) \Rightarrow \log E = 21/7 \Rightarrow E = 10^{21/7}\ Erg$$

مثال ۲: زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار-منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزادشده در این زلزله را محاسبه کنید:

$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow \log E = 11/8 + \underbrace{1/5(7/4)}_{11/1} \Rightarrow \log E = 22/9$$

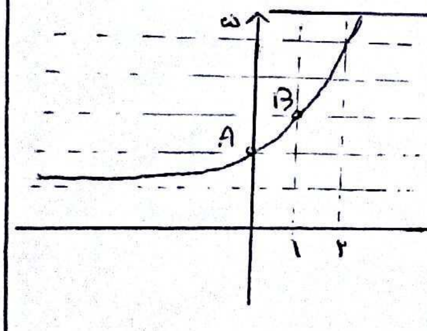
$$\Rightarrow E = 10^{22/9} \ \text{Erg}$$

مثال ۳: محققین، انرژی آزادشده از انفجار یک میلیارد تن ماده انفجاری TNT را برابر $10^{23/8}$ ارگ محاسبه کرده‌اند. یک زمین‌لرزه با چه بزرگی می‌تواند این انرژی را آزاد کند؟

$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow \log 10^{23/8} = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 23/8 \log 10 = 11/8 + 1/5M$$

$$\Rightarrow 23/8 = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 1/5M = 12 \Rightarrow M = 8 \ \text{ریشتر}$$

یعنی انرژی یک زلزله ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده انفجاری TNT است.



تمرین ۱) ص ۱۱۸

در دستگاه مختصات روبرو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را بدست آورید.

$$A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \Rightarrow 2 = a + 2^{0-b} \Rightarrow a + 2^{-b} = 2 \quad (1)$$

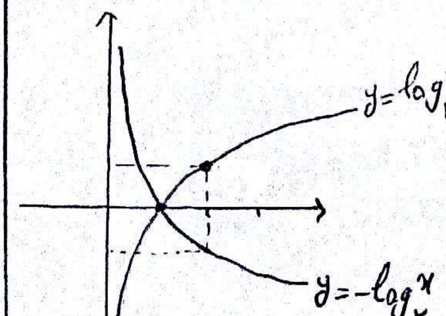
$$B\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \Rightarrow 3 = a + 2^{1-b} \Rightarrow a + 2^{1-b} = 3 \quad (2)$$

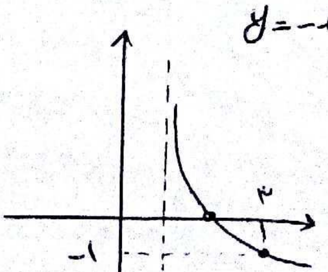
$$(2) - (1) \Rightarrow a + 2^{1-b} - a - 2^{-b} = 1 \Rightarrow 2^{-b}(2^1 - 1) = 1 \Rightarrow 2^{-b} = 1 \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$a + 2^{-b} = 2 \Rightarrow a + 2^{0} = 2 \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

تمرین ۴) ص ۱۱۸

مطلوبست رسم نمودار تابع: $y = -\log_2(x-1)$





«تمرینات تکمیلی»

۱) اگر $a=\log_4^b$ باشد آنگاه معادله $3^{x-a}=2^{x^2}$ یک جواب دارد، مقدار b را محاسبه کنید:

$$3^{x-a}=2^{x^2} \Longrightarrow \log 3^{x-a}=\log 2^{x^2} \Rightarrow (x-a)\log 3 = x^2\log 2$$

$$\Rightarrow (\log 2)x^2-(\log 3)x+a\log 3=0$$

قرار است این معادله درجه $\underline{2}$ فقط یک جواب داشته باشد

شرط وجود یک جواب: $\Delta=0$

$$\Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0 \Rightarrow (-\log 3)^2-4(\log 2)(a\log 3)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\log 3}_{\neq 0}(\log 3-4a\log 2)=0$$

$$\Rightarrow \log 3-4a\log 2=0 \Rightarrow \log 3=4a\log 2 \Rightarrow \log 3=a\log 2^4$$

$$\Rightarrow \log 3=a\log 16 \Rightarrow a=\frac{\log 3}{\log 16} \Rightarrow a=\log_{16}^{3} \Rightarrow a=\log_{4^2}^{(\sqrt3)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a=\frac{2}{2}\log_4^{\sqrt3} \Rightarrow a=\log_4^{\sqrt3} \\ \text{از طرفی مسئله گفته } a=\log_4^b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=\sqrt3}$$

---

۲) مطلوبست محاسبه:

$$A=5^{\log_5^{\sqrt3}}+2\log_3^2\times 2\log_4^{\sqrt3}+\log\sqrt[5]{0.001}=\sqrt3^{\log_5^{5}}+\log_3^{2^2}\times 2\log_4^{\sqrt3}+\log\sqrt[5]{10^{-3}}$$

$$=(\sqrt3)^2+2\log_3^4\times\log_4^{\sqrt3}+\log 10^{-\frac{3}{5}}=3+2\log_3^{\sqrt3}-\frac{3}{5}\log 10$$

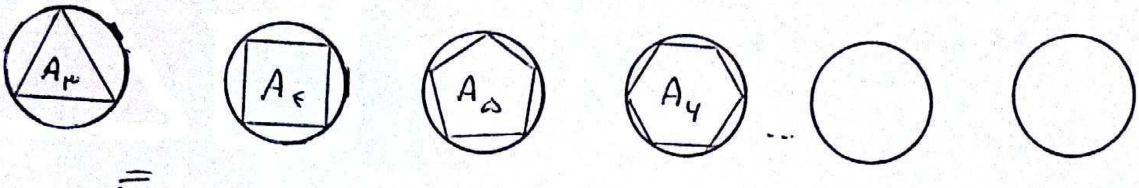
$$=3+\log_3^{(\sqrt3)^2}-\frac{3}{5}\times 1=3+1-\frac{3}{5}=\frac{17}{5}=3/4$$

فصل ۶ : حد و پیوستگی :

فرآیندهای حدی : (limit)

ابتدا با چند مثال مفهوم حد را بیان می کنیم:

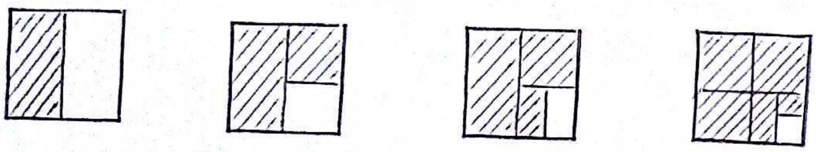
۱) برای پیدا کردن مساحت یک دایره، یک چند ضلعی منتظم را مطابق شکل در آن محاط می کنیم و تعداد اضلاع را افزایش می دهیم:



اگر A_n را مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره در نظر بگیریم با افزایش مقدار n، مقدار A_n به مساحت دایره نزدیک و نزدیکتر می شود در این صورت می گوییم که: وقتی n خیلی بزرگ شود حد مساحت چند ضلعی ها برابر مساحت دایره می شود.

---

۲) در یک مربع به ضلع یک، ابتدا نیمی از مساحت را رنگ می کنیم در مرحله دوم نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم و این کار را ادامه می دهیم:



$S_1=\frac{1}{2}$ $S_2=\frac{3}{4}$ $S_3=\frac{7}{8}$ $S_4=\frac{15}{16}$

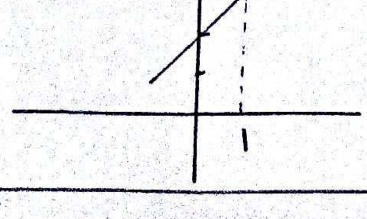
با افزایش مراحل به هر میزان که بخواهیم می توانیم مساحت قسمت رنگ شده را به عدد یک یعنی مساحت مربع نزدیک کنیم به شرط آنکه تعداد مراحل را به مقدار کافی افزایش داده باشیم و می گوییم:

مساحت مربع حد مساحت قسمت رنگ شده است.

---

۳) تابع $f(x)=x+2$ را در نظر می گیریم

نمودار این تابع را رسم می کنیم:



x	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۲
$f(x)$	۲/۷	۲/۸	۲/۹	۳	۳/۱	۳/۲

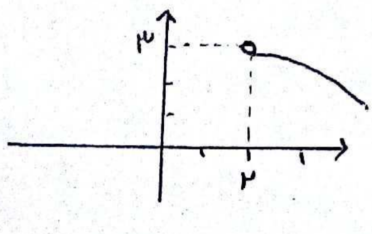
با توجه به جدول فوق وقتی x با مقادیر بزرگتر از یک به یک نزدیک می‌شود (از سمت راست) $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود و اگر x با مقادیر کمتر از یک به یک نزدیک می‌شود (از سمت چپ) $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شود ۳ را حد تابع $f(x)=x+2$ در نقطه $x=1$ می‌گویند

تذکر مهم:
در مثال فوق اگر از سمت راست (مقادیر بزرگتر از ۱) به ۱ نزدیک شویم می‌گوئیم x از سمت راست به ۱ میل می‌کند و می‌نویسیم: $x \to 1^+$

و اگر از سمت چپ (مقادیر کوچکتر از ۱) به ۱ نزدیک شویم می‌گوئیم x از سمت چپ به ۱ میل می‌کند و می‌نویسیم: $x \to 1^-$

حد راست:
اگر x از سمت راست به a میل کند (نزدیک شود) و مقدار تابع $f(x)$ به عددی مانند L_1 نزدیک شود، L_1 را حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ می‌نامند و می‌نویسند:

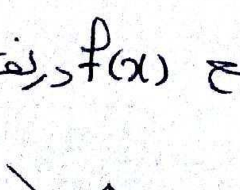
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$



$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

حد چپ:
اگر x از سمت چپ به a میل کند (نزدیک شود) و مقدار تابع $f(x)$ به عددی مانند L_2 نزدیک شود، L_2 را حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ می‌نامند و می‌نویسند:

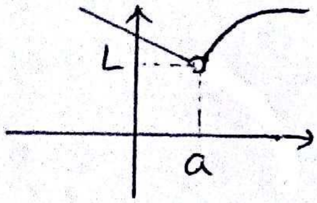
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$



$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2$$

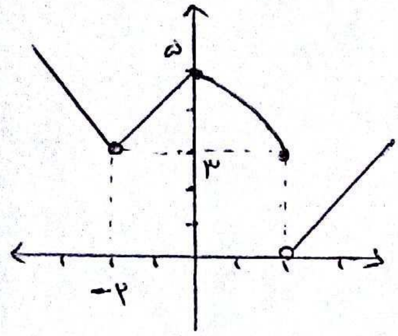
حد تابع:

اگر حد راست و حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ موجود و باهم برابر باشد می‌گوئیم تابع $f(x)$ در $x=a$ دارای حدی برابر L است و آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

مثال) نمودار تابع f بصورت مقابل داده شده است. مطلوبست محاسبه حدهای زیر:



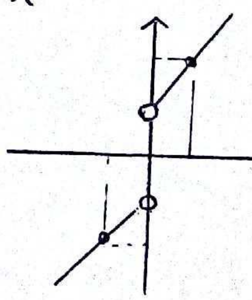
$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۰ \qquad \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = \text{وجود ندارد} \qquad \lim_{x \to ۰^+} f(x) = ۵$$

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = ۵ \qquad \lim_{x \to ۰} f(x) = ۵ \qquad \lim_{x \to -۲} f(x) = ۳$$

مثال) نمودار تابع $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ را رسم کرده و حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



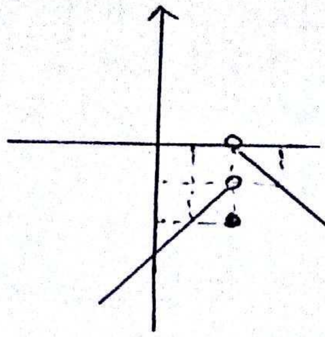
$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x + \frac{x}{x} \Rightarrow f(x) = x + 1$$

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = x + \frac{-x}{x} \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

مثال) نمودار تابع زیر را رسم کرده و حد تابع را در $x=2$ بررسی کنید؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & x>2 \\ -2 & x=2 \\ x-3 & x<2 \end{cases}$$

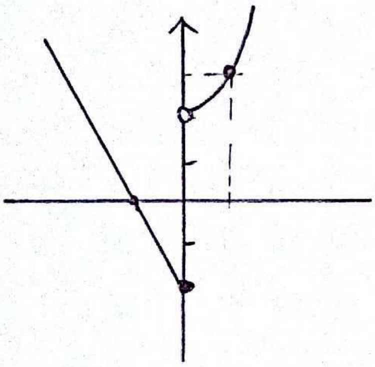


$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$$

$\lim_{x\to 2} f(x) =$ وجود ندارد

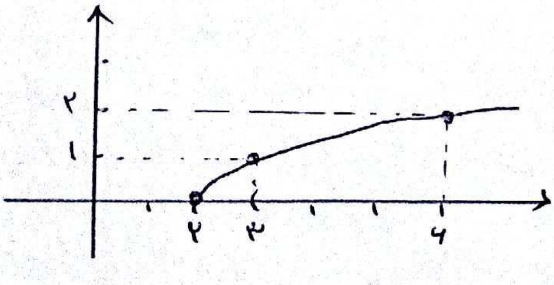
مثال) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم کرده و حد تابع در $x=0$ را در صورت وجود بیابید.



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-2$$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$ وجود ندارد

مثال) در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-2}$ با رسم نمودار، موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



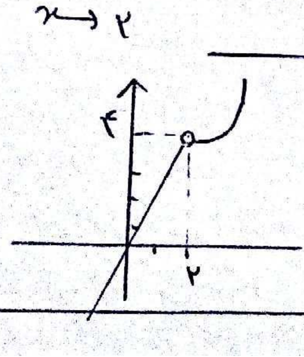
الف) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$

ب) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=$ وجود ندارد (تابع برای $x<2$ تعریف نشده است)

ج) $\lim_{x\to 2} f(x)=$ وجود ندارد

د) $f(2)=0$

مثال) تابعی مانند f را ارائه کنید که در نقطه $x=2$ تعریف نشده باشد و $\lim_{x\to 2} f(x)=4$



محاسبه حد توابع:

۱) حد تابع ثابت در هر نقطه برابر همان مقدار ثابت است. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

مثال) $\lim\limits_{x \to 5} 4 = 4$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} (-7) = -7$

۲) حد تابع همانی در هر نقطه برابر طول آن نقطه است. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

مثال) $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2} x = -2$

۳) حد تابع چند جمله‌ای در هر نقطه برابر است با مقدار تابع در همان نقطه

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = f(a)$$

مثال) $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 4x^2 + 1) = 1^3 - 4(1)^2 + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$

۴) $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n \ , \ n \in N$

مثال) $\lim\limits_{x \to 2} x^5 = 2^5 = 32$

۵) $\lim\limits_{x \to a} k f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$$\lim_{x \to -2} 5(x^2 - 4x + 1) = 5 \lim_{x \to -2} (x^2 - 4x + 1) = 5((-2)^2 - 4(-2) + 1) = 5 \times 13 = 65$$

۶) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که در نقطه $x = a$ دارای حد باشند آنگاه:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

مثال) $\lim_{x\to 0}[(۴x+۱)+(x^۳-۲x^۲+۱)]=\lim_{x\to 0}(۴x+۱)+\lim_{x\to 0}(x^۳-۲x^۲+۱)$

$=۱+۱=۲$

۷) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که در نقطه $x=a$ دارای حد باشند آنگاه:

الف) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ $(\lim_{x\to a}g(x)\neq ۰)$

مثال) $\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+۱}{x^۳-۳x+۲}=\frac{\lim_{x\to ۰}(x^۲+۱)}{\lim_{x\to ۰}(x^۳-۳x+۲)}=\frac{۱}{۲}$

ب) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$

مثال) $\lim_{x\to -۲}x^۲(۵x+۱)=\lim_{x\to -۲}x^۲\times\lim_{x\to -۲}(۵x+۱)=(-۲)^۲\times(۵(-۲)+۱)$

$=۴\times(-۹)=-۳۶$

۸) اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$ و $n\in N$ آنگاه:

$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{L}$

مثال) $\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{x+۷}=\sqrt[۳]{۱+۷}=\sqrt[۳]{۸}=۲$

۹) اگر $\lim_{x\to a}f(x)\neq ۰$ آنگاه:

$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\lim_{x\to a}f(x)}$

مثال) $\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x^۲-۴}=\frac{۱}{\lim_{x\to ۳}(x^۲-۴)}=\frac{۱}{۳^۲-۴}=\frac{۱}{۵}$

۱۰) حد توابع مثلثاتی در هر نقطه با مقدار تابع مثلثاتی در آن نقطه برابر است.

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x \to a} tg\, x = tg\, a \qquad \lim_{x \to a} cotg\, x = cotg\, a$$

مثال) مطلوبست محاسبه حد توابع زیر:

۱) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

۲) $\lim_{x \to \pi} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{\lim_{x \to \pi}(1+\cos x)} = \frac{1}{1+\cos \pi} = \frac{1}{1+(-1)} = \frac{1}{0} =$ حد وجود ندارد

۳) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} tg\, x = tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

۴) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2+\sin x} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0}(2+\sin x)} = \frac{\cos 0}{2+\sin 0} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$

۵) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\cos^2 x} = \frac{\lim_{x \to \pi}(\sin x \cdot \cos x)}{\lim_{x \to \pi}(1+\cos^2 x)} = \frac{\sin \pi \cdot \cos \pi}{1+\cos^2 \pi} = \frac{0(-1)}{1+(-1)^2} = \frac{0}{2} = 0$

تذکر مهم: تمام قوانینی که درباره حد توابع مطرح شد برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

---

۱۱) در محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق، حد چپ و حد راست تابع را جداگانه محاسبه می‌کنیم اگر باهم برابر شدند، تابع حد دارد.

مثال ۱: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه $x=1$

حد راست $= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{|x-1|}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$

حد چپ $= \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{|x-1|}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}(-1) = -1$

پس تابع در $x=1$ حد ندارد.

مثال ۲: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ در نقطه $x=0$

حد راست $= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

حد چپ $= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{-x}\right) = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$

پس تابع در $x=0$ حد ندارد.

مثال ۳: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=|x-2|$ در نقطه $x=5$:

حل: در سمت راست و چپ $x=5$ مقدار تابع مثبت است پس نیازی به محاسبه حد راست و حد چپ نیست

$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}(|x-2|) = \lim_{x\to 5}(5-2) = 5-2 = 3$

مثال ۴: مطلوبست محاسبه حد تابع $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ در نقطه $x=1$:

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

حد راست $= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(|x-1|) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 1-1 = 0$

حد چپ $= \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}|x-1| = \lim_{x\to 1^-}(-(x-1)) = -(1-1) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0$

۱۲) محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح:

حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to n^-}[x]=n-1 \qquad \lim_{x\to n^+}[x]=n$$

مثال) مطلوبست محاسبه:

1) $$\lim_{x\to 5^+}\frac{[x]+3}{[x]-3}=\frac{5+3}{5-3}=\frac{8}{2}=4$$

2) $$\lim_{x\to 5^-}\frac{[x]+3}{[x]-3}=\frac{(5-1)+3}{(5-1)-3}=\frac{4+3}{4-3}=7$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{[x]+3}{[x]-3}=$$ حد ندارد

مثال) مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to 2}[x]=?$

حد راست $=\lim_{x\to 2^+}[x]=2$

حد چپ $=\lim_{x\to 2^-}[x]=2-1=1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2}[x]=$ وجود ندارد

مثال) مطلوبست محاسبه: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{[x-1]}=?$

حد راست $=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x]-1}=\frac{1^+-1}{1-1}=\frac{\text{عدد مثبت خیلی کوچک}}{0}=$ وجود ندارد

حد چپ $=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{[x]-1}=\frac{1-1}{(1-1)-1}=\frac{0}{-1}=0$

پس: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{[x-1]}=$ وجود ندارد

مثال) مطلوبست محاسبه: $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-[x^2]}{x-[x]}$

$x\to 1^+ \Rightarrow x^2\to 1^+$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-[x^2]}{x-[x]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

۱۳) حالت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام:

در محاسبه حد توابعی که بصورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ هستند، اگر حد صورت و حد مخرج برابر صفر باشد اصطلاحاً به آن حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌گوئیم برای رفع ابهام و محاسبه حد، صورت و مخرج را تجزیه کرده و عامل صفر کننده صورت و مخرج را حذف می‌کنیم تا حد محاسبه شود در توابع رادیکالی از روش گویا کردن استفاده می‌کنیم

تمرین: مطلوبست محاسبه حد توابع زیر:

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}=\frac{2^3-8}{3(2)^2-12}=\frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{3(x+2)}=\frac{12}{12}=1$

۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{x+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

۳) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2-x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{x-1}=-\frac{1}{2}$$

۴) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-x-1}{|x^2-x^3|}=\frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-x-1}{|x^2(1-x)|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(2x+1)}{x^2|1-x|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(2x+1)}{-x^2(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(2x+1)}{x^2(x-1)}$$

$$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x^2}=\frac{3}{1}=3$$

۵) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$$

۶) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۷) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)} = \lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3) = 3+3 = 6$$

۸) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

I (روش) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \times \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) = \lim \dfrac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}} = \frac{2}{2} = 1$$

II (روش) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}) = \sqrt{1} = 1$

۹) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+\sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x+\sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1} = \lim_{x\to -2}\left(\frac{2x+\sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1} \times \frac{2x-\sqrt{x+18}}{2x-\sqrt{x+18}} \times \frac{\sqrt{3x+7}+1}{\sqrt{3x+7}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(4x^2-(x+18))(\sqrt{3x+7}+1)}{(3x+7-1)(2x-\sqrt{x+18})} = \lim_{x\to -2} \frac{(4x^2-x-18)(\sqrt{3x+7}+1)}{(3x+6)(2x-\sqrt{x+18})}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(4x-9)(\sqrt{3x+7}+1)}{3(x+2)(2x-\sqrt{x+18})} = \frac{-17\times 2}{3(-8)} = \frac{17}{12}$$

---

10) $\lim_{x\to 8} \frac{2-\sqrt[3]{x}}{x^2-64} = \frac{0}{0}$ مبهم

$(a-\sqrt[3]{b})(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}) = a^3-b$ (فرمول)

$$\lim_{x\to 8} \frac{(2-\sqrt[3]{x})}{x^2-64} = \lim_{x\to 8}\left(\frac{2-\sqrt[3]{x}}{x^2-64} \times \frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\right) = \lim_{x\to 8} \frac{8-x}{(x-8)(x+8)(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{-1}{(x+8)(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{-1}{16(4+4+4)} = -\frac{1}{192}$$

بخشی از تمرینات ص ۳۶ کتاب درسی:

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید

1) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{[x]+1} = \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}$

2) $\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{-2}{-2} = 1$

3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\sin x) = 1+1=2$$

4) $\lim_{x\to 0} (x+[x]) = ?$

حد راست $= \lim_{x\to 0^+} (x+[x]) = 0+0=0$

حد چپ $= \lim_{x\to 0^-} (x+[x]) = 0+(0-1) = -1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(x+[x]) =$ وجود ندارد

(تمرینات تکمیلی مبحث حد)

۱) اگر $f(x)=\begin{cases} 5x^2+6x & x>-1 \\ 2x+1 & x=-1 \\ 3x+4 & x<-1 \end{cases}$ باشد، حد چپ و راست و مقدار تابع را در $x=-1$ بیابید.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^+} (5x^2+6x) = 5(-1)^2+6(-1) = 5-6 = -1$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (3x+4) = 3(-1)+4 = 1$$

$$f(-1) = 2(-1)+1 = -1$$

۲) اگر تابع $f(x)$ در $x=-1$ حد داشته باشد و بدانیم $\lim_{x\to -1} \frac{3f(x)+1}{2f(x)-1} = 1$ آنگاه حاصل $\lim_{x\to -2} f(2x+3)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

گزینه ۴: فرض کنیم $\lim_{x\to -1} f(x) = L$ در اینصورت:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3f(x)+1}{2f(x)-1} = 1 \Rightarrow \frac{3L+1}{2L-1} = 1 \Rightarrow 3L+1 = 2L-1 \Rightarrow \underline{L=-2}$$

پس: $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = -2$

$$\lim_{x\to -2} f(2x+3) = f(2(-2)+3) = f(-1) = -2$$

۳) حاصل حد $\frac{\log_2^x - \log_x^2}{\log_2 (\frac{x}{2})^2}$ وقتی $x \to 2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

حل: گزینه ۱: حالت $\frac{0}{0}$ است.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log_2^x - \log_x^2}{\log_2 (\frac{x}{2})^2} = \lim_{x\to 2} \frac{\log_2^x - \frac{1}{\log_2^x}}{2\log_2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{(\log_2^x)^2-1}{\log_2^x}}{2(\log_2^x - \log_2^2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\log_2^x-1)(\log_2^x+1)}{2\log_2^x(\log_2^x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{\log_2^x+1}{2\log_2^x} = \frac{1+1}{2\times 1} = 1$$

۴) (کنکور ریاضی ۹۵) اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$ باشد b کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ۳) 4 ۴) 5

حل: گزینه 1 : در $x=1$ مخرج صفر است پس صورت هم باید صفر باشد

$$\sqrt{a(1)+b}-2=0 \Rightarrow \sqrt{a+b}=2 \Rightarrow a+b=4 \text{ یا } b=4-a$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{ax+b-4}{(x^2-1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{ax+4-a-4}{(x^2-1)(\sqrt{ax+b}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a}{(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}=\frac{a}{2(\underbrace{\sqrt{a+b}}_{4}+2)}=\frac{a}{2(4)}=\frac{a}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=12}\Rightarrow b=4-12 \Rightarrow \boxed{b=-8}$$

مشابه این تست در کنکور تجربی ۹۵ مطرح شده بود

۵) حاصل حد مقابل را بدست آورید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x-|x|}{2x+[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x-x}{2x+[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{2x+[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{2x+0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{2x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

۶) مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{|x+1|} & x>-1\\ [x]+a & x<-1\end{cases}$ در $x=-1$ دارای حد باشد؟

حل: باید مقادیر حد چپ و حد راست برابر باشند.

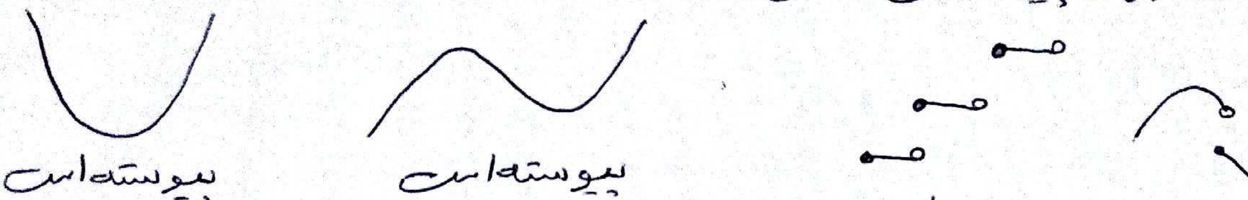
$$\text{حد راست}=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+x}{|x+1|}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}x=-1$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}([x]+a)=(-1)-1+a=-2+a$$

$$\text{حد چپ}=\text{حد راست}\Rightarrow -2+a=-1\Rightarrow \boxed{a=1}$$

پیوستگی:

هرگاه نمودار یک تابع را با یک بار حرکت قلم بر روی کاغذ بتوان رسم کرد آن تابع را پیوسته می نامند.



پیوسته است   پیوسته است   پیوسته نیست

از نظر ریاضی:

تابع $f(x)$ را در نقطه $x=c$ پیوسته می گوئیم هرگاه: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

به عبارت دیگر:

تابع $f(x)$ را در نقطه $x=c$ پیوسته می گوئیم هرگاه در این نقطه حد راست برابر حد چپ برابر مقدار تابع باشد در غیر اینصورت تابع در $x=c$ ناپیوسته است.

مثال ۱: پیوستگی تابع $f(x)=x+1$ را در نقطه $x=3$ بررسی کنید.

حد راست $= \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x+1) = 3+1 = 4$

حد چپ $= \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x+1) = 3+1 = 4$

مقدار تابع $= f(3) = 3+1 = 4$

تابع $f(x)=x+1$ در $x=3$ پیوسته است $\Leftarrow$ حد راست = حد چپ = مقدار تابع

مثال ۲: پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

حد راست $= \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ حد چپ $= \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ مقدار تابع $f(0) = 1$

پیوسته نیست $\Leftarrow$ مقدار تابع = حد راست $\neq$ حد چپ

مثال ۳: به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\begin{cases}-x+2 & x<2\\ ax-2 & x\geq 2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته است.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 2^+}(ax-2) = 2a-2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 2^-}(-x+2) = -2+2=0$$

$$\text{مقدار تابع} = f(2)= a(2)-2=2a-2$$

$$\Rightarrow 2a-2=0 \Rightarrow a=1$$

مثال ۴: به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\begin{cases}ax-1 & x>4\\ 3x+7 & x\leq 4\end{cases}$ در نقطه $x=4$ پیوسته است.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 4^+}(ax-1) = 4a-1$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 4^-}(3x+7) = 3(4)+7=19$$

$$\text{مقدار تابع} = f(4)= 19$$

$$\Rightarrow 4a-1=19 \Rightarrow a=5$$

مثال ۵: به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\leq 1\\ ax+b & 1<x<4\\ -2x & x\geq 4\end{cases}$ پیوسته است.

حل: باید پیوستگی تابع را در دو نقطه $x=1$ و $x=4$ همزمان بررسی کنیم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 1^-}x = 1$$

$$\text{مقدار تابع} = f(1)=1$$

$$\Rightarrow a+b=1$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 4^+}(-2x) = -8$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 4^-}(ax+b) = 4a+b$$

$$f(4) = -8$$

$$\Rightarrow 4a+b=-8$$

$$\begin{cases}a+b=1\\ 4a+b=-8\end{cases}$$

$$\boxed{a=-3}$$

$$\boxed{b=4}$$

مثال ۶ : پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} 3x+\frac{|2x|}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 0^+}\left(3x+\frac{|2x|}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(3x+\frac{2x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(3x+2)=0+2=2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 0^-}\left(3x+\frac{|2x|}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(3x+\frac{-2x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}(3x-2)=0-2=-2$$

تابع در $x=0$ حد ندارد پس پیوسته نیست.

مثال ۷ : مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & x>2 \\ 3 & x=2 \\ (a+1)x-b & x<2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 2^+}(ax^2+bx+1) = 4a+2b+1$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 2^-}((a+1)x-b) = 2a+2-b$$

$$f(2)=3 \quad \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b+1=3 \\ 2a+2-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{matrix}$$

مثال ۸ : به‌ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{ax}{1+[x]} & x<1 \\ b & x=1 \\ \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1} & x>1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است؟

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}(x+2)(\sqrt{x}+1) = 3\times 2=6 \quad (1)$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 1^-}\frac{ax}{1+[x]}=\frac{a(1)}{1+(1-1)}=\frac{a}{1}=a \quad (2)$$

$$\text{مقدار تابع} = f(1)=b \quad (3) \qquad (1),(2),(3) \Rightarrow \boxed{a=b=6}$$

پیوستگی راست و چپ:

تابع f را در نقطه $x=c$ از سمت راست پیوسته می‌نامیم هرگاه:

$\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ (حد راست برابر مقدار تابع باشد) در اینصورت می‌گوئیم

تابع f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.

تابع f را در نقطه $x=c$ از سمت چپ پیوسته می‌نامیم هرگاه:

$\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ (حد چپ برابر مقدار تابع باشد) در اینصورت می‌گوئیم

تابع f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

مثال ۱: تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x>1 \\ 5 & x=1 \\ -x^2+3 & x<1 \end{cases}$ مفروض است پیوستگی چپ و راست

این تابع را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 1^+}(2x+3) = 2+3=5$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 1^-}(-x^2+3) = -(1)^2+3=2$$

$$\text{مقدار تابع} = f(1)=5$$

$\Rightarrow$ حد راست = مقدار تابع $\neq$ حد چپ

تابع در $x=1$ پیوستگی راست دارد.

مثال ۲: پیوستگی تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{x-1}{|x-1|} & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2-\frac{x-1}{|x-1|}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2-\frac{x-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}(x^2-1) = 1^2-1=0$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2-\frac{x-1}{|x-1|}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2-\frac{x-1}{-(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 1^2+1=2$$

$$\text{مقدار تابع} = f(1)=2$$

حد راست $\neq$ حد چپ = مقدار تابع $\Leftarrow$ تابع در $x=1$ پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی در بازه‌ها:

۱) پیوستگی در بازه (a,b):

تابع f را در بازه (a,b) پیوسته می‌گوییم هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

مثال) پیوستگی تابع $f(x)=[x]+1$ را در بازه $(0,1)$ بررسی کنید.

حل: فرض کنیم که a یک نقطه دلخواهی از بازه $(0,1)$ باشد حال پیوستگی تابع را در نقطه دلخواه a بررسی می‌کنیم:

$$a\in(0,1) \Rightarrow 0<a<1 \Rightarrow [a]=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست} = \lim\limits_{x\to a^+}([x]+1) = 0+1=1 \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{x\to a^-}([x]+1) = 0+1=1 \\ \text{مقدار تابع} = f(a)=[a]+1=0+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حد راست} = \text{حد چپ} = \text{مقدار تابع}$$

تابع f در بازه $(0,1)$ پیوسته است.

---

۲) پیوستگی در بازه $[a,b]$:

تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال: پیوستگی تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}+1 & x\in(0,1) \\ 2 & x=0,1 \end{cases}$ را در بازه $[0,1]$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع f را در بازه $(0,1)$ بررسی می‌کنیم:

فرض کنیم a نقطه دلخواهی از $(0,1)$ باشد در اینصورت:

$$a\in(0,1) \Rightarrow 0<a<1 \Rightarrow |a|=a$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to a^+}\left(\frac{|x|}{x}+1\right) = \frac{|a|}{a}+1 = \frac{a}{a}+1 = 1+1 = ۲$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to a^-}\left(\frac{|x|}{x}+1\right) = \frac{|a|}{a}+1 = \frac{a}{a}+1 = 1+1 = ۲$$

$$\text{مقدار تابع} = f(a) = \frac{|a|}{a}+1 = \frac{a}{a}+1 = 1+1 = ۲$$

حد راست = حد چپ = مقدار تابع ⇐ تابع f در $(0,1)$ پیوسته است

پیوستگی راست تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{|x|}{x}+1\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}+1\right) = \lim_{x\to 0^+}(1+1) = ۲$$

$$\text{مقدار تابع} = f(0) = ۲$$

پس تابع در $x=0$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ تابع را در $x=1$ بررسی می‌کنیم:

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{|x|}{x}+1\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x}+1\right) = \lim_{x\to 1^-}(1+1) = ۲$$

$$\text{مقدار تابع} = f(1) = ۲$$

پس تابع در $x=1$ پیوستگی چپ دارد.

در نتیجه تابع f در $[0,1]$ پیوسته است.

تذکر مهم ۱:
تابع f را روی بازه $[a,b)$ پیوسته می‌گویند هرگاه روی بازه (a,b) پیوسته بوده و در نقطه $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

تذکر مهم ۲:
تابع f را روی بازه $(a,b]$ پیوسته می‌گویند هرگاه روی بازه (a,b) پیوسته بوده و در نقطه $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

تست: (تجربی ۸۹): تابع با ضابطه
$$f(x)=\begin{cases} a+\sin 3x & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ b\cos 2x & \frac{\pi}{2}<x\leq 2\pi \end{cases}$$
با شرط $f(\frac{\pi}{2})=2$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است. $a-b$ کدام است؟

۱) -5
۲) -1
۳) 1
۴) 5

حل: گزینه (۴) مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ برابر ۲ است پس حد راست و حد چپ در $x=\frac{\pi}{2}$ باید برابر ۲ باشد:

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(b\cos 2x)=b\cos 2(\frac{\pi}{2})=b(-1)=-b$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(a+\sin 3x)=a+\sin\frac{3\pi}{2}=a-1$$

$$\begin{cases} a-1=2 \Rightarrow \boxed{a=3} \\ -b=2 \Rightarrow \boxed{b=-2} \end{cases} \Rightarrow a-b=5$$

تست: (تجربی ۹۴): تابع با ضابطه
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$$
به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=0$ پیوسته است؟

۱) -2
۲) -1
۳) 1
۴) 2

حل: گزینه ۴ باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\times\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}=\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x})=1+1=2$$

پس: $\boxed{a=2}$

تست: (ریاضی خارج ۹۴): به ازای کدام مقدار a تابع
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-3} & x>3 \\ ax-3a-\frac{3}{8} & x\leq 3 \end{cases}$$
در $x=3$ پیوسته است؟

۱) -3
۲) 2
۳) هیچ مقدار a
۴) هر مقدار a

حل: گزینه ۴

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(ax - 3a - \frac{3}{8}\right) = 3a - 3a - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3} \times \frac{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}\right) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1-(x-\sqrt{x+1})}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{(1-x)+\sqrt{x+1}}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})} \times \frac{(1-x)-\sqrt{x+1}}{(1-x)-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(1-x)^2-(x+1)}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})((1-x)-\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x}{(x-3)(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})((1-x)-\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}})((1-x)-\sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{3}{(1+1)(-2-2)} = -\frac{3}{8}$$

حد راست و حد چپ برابر است و مقدار a هر چقدر باشد این دو حد برابرند

پس تابع در $x=3$ به ازای تمام مقادیر a پیوسته است.

تست: تابع $f(x) = \dfrac{[x]}{x+a[3x]}$ به ازای چه مقداری از a در $x=-1$ پیوسته است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) -1

۴) هیچ مقدار a

حل: گزینه ۲:

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{[x]}{x+a[3x]} = \frac{[(-1)^+]}{-1+a[(-3)^+]} = \frac{-1}{-1-3a}$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{[x]}{x+a[3x]} = \frac{[(-1)^-]}{-1+a[(-3)^-]} = \frac{-2}{-1-4a}$$

$$\text{مقدار تابع} = f(-1) = \frac{-1}{-1-3a}$$

$$\text{شرط پیوستگی}: \frac{-1}{-1-3a} = \frac{-2}{-1-4a} \Rightarrow 1+4a = 2+6a \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

فصل ۷ : آمار و احتمال

فضای نمونه‌ای : همه حالت‌هایی را که در یک آزمایش تصادفی رخ می‌دهد فضای نمونه‌ای نامیده و با S نشان داده و تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S را با $n(S)$ نشان می‌دهیم.

مثال : فضای نمونه ای در پرتاب هم زمان یک سکه و یک تاس را بنویسید.

$S = \{(۱،پ), (۲،پ), (۳،پ), (۴،پ), (۵،پ), (۶،پ), (۱،ر), (۲،ر), (۳،ر), (۴،ر), (۵،ر), (۶،ر)\} \Rightarrow n(S) = ۱۲$

پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی می‌گویند.

مثال : یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم پیشامد آنکه سکه رو و مکعب زوج بیاید را بنویسید.

$A = \{(۲،ر), (۴،ر), (۶،ر)\}$

احتمال وقوع یک پیشامد :

اگر S یک فضای نمونه‌ای و A پیشامدی از آن باشد احتمال وقوع پیشامد A را با علامت $P(A)$ نشان داده و از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \begin{cases} ۰ \leq P(A) \leq ۱ \\ P(A) = ۰ \Rightarrow \text{احتمال غیرممکن (نشدنی)} \\ P(A) = ۱ \Rightarrow \text{احتمال حتمی (یقینی)} \end{cases}$$

مثال) می‌خواهیم از بین ۶ دانش آموز کلاس سوم و ۵ دانش آموز کلاس دوم، یک تیم ۴ نفره به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد :

الف) هیچ دانش آموز کلاس سوم در تیم نباشد

ب) یک دانش آموز کلاس سوم و سه دانش آموز کلاس دوم در تیم باشند.

$$n(S) = \binom{۱۱}{۴} = \frac{۱۱!}{۴! \times ۷!} = ۳۳۰$$

الف) $n(A) = \binom{۵}{۴} = ۵ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۳۳۰} = \frac{۱}{۶۶}$

ب) $n(B) = \binom{۶}{۱} \times \binom{۵}{۳} = ۶۰ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶۰}{۳۳۰} = \frac{۲}{۱۱}$

پیشامد متمم:

اگر A یک پیشامد تصادفی باشد متمم پیشامد A را با علامت A' نشان داده و زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد و احتمال وقوع آن از فرمول زیر محاسبه می شود: $P(A') = 1 - P(A)$

نکته ریاضی:

در پرتاب n سکه روابط زیر برقرار است:

۱) $P($هیچکدام رو نیاید$) = P($هر n سکه پشت بیاید$)$

۲) $P($حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید$) = 1 - P($هر n سکه پشت بیاید$)$

مثال) در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ خراب است. به تصادف ۳ لامپ از جعبه خارج می کنیم. احتمال آنکه حداقل یکی از لامپ‌ها خراب باشد چقدر است؟

$n(S) = \binom{10}{3} = 120$ $\qquad$ $n(A) = n($سالم بودن هر ۳ لامپ$) = \binom{6}{3} = 20$

$P($سالم بودن هر ۳ لامپ$) = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

$P($حداقل یکی خراب$) = 1 - P($هر سه سالم$) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

نکته ریاضی:

۱) اگر یک سکه را n بار پرتاب کنیم:

$P($دقیقاً k بار رو بیاید$) = P($دقیقاً k بار پشت بیاید$) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

۲) در یک خانواده n فرزندی:

$P($دقیقاً k فرزند پسر$) = P($دقیقاً k فرزند دختر$) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

(تجربی - ۹۰) در یک خانواده ۴ فرزندی، با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

احتمال ۲ فرزند پسر $= \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16}$

احتمال ۳ فرزند دختر $= \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{4}{16}$

اصل جمع: $\frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

قانون جمع احتمالات :

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B یا هردو رخ دهد و احتمال آن از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$ (قانون جمع احتمالات)

مثال) اعداد طبیعی یک رقمی را روی کارت‌هایی نوشته و در یک کیسه می‌ریزیم. به تصادف کارتی از کیسه خارج می‌کنیم احتمال آنکه عدد روی کارت زوج یا مضرب ۳ باشد چقدر است؟

$S = \{1, 2, 3, \ldots, 9\} \Rightarrow n(S) = 9$

پیشامد زوج بودن عدد $= A = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$

پیشامد مضرب ۳ بودن عدد $= B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{3}{9}$

پیشامد زوج و مضرب ۳ بودن $= A \cap B = \{6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{9}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

نکته ریاضی ۱ :

پیشامدی که در آن نه A و نه B یعنی هیچکدام از آنها رخ ندهد بصورت $A' \cap B'$ بیان می‌شود و :

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

نکته ریاضی ۲ :

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

احتمال شرطی :
اگر S فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و A و B دو پیشامد از آن و $P(B) \neq 0$ باشد احتمال وقوع پیشامد A را به شرط وقوع پیشامد B، با علامت $P(A|B)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ یا $$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

در فرمولهای بالا، پیشامد B اتفاق افتاده و ما می خواهیم احتمال وقوع پیشامد A را حساب کنیم

مثال ۱ : یک تاس سالم را یکبار پرتاب می کنیم. احتمال آنرا حساب کنید که عدد ۴ رخ دهد درصورتیکه می دانیم شماره های بزرگتر از ۳ رخ داده است؟

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$

پیشامد رخ دادن ۴ $= A = \{۴\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۶}$

پیشامد رخ دادن شماره های بزرگتر از ۳ $= B = \{۴, ۵, ۶\} \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۶}$

$A \cap B = \{۴\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$ $\qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۳}{۶}} = \frac{۱}{۳}$

مثال ۲ : دو تاس سالم را پرتاب می کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۷ باشد احتمال آنکه عدد هر دو تاس مثل هم باشد چقدر است؟

پیشامد مثل هم بودن عدد هر دو تاس $= A = \{(۱,۱), (۲,۲), \dots, (۶,۶)\} \Rightarrow n(A) = ۶$

پیشامد مجموع اعداد رو شده کمتر از ۷ $= B = \{(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۲,۱),$
$(۲,۲), (۲,۳), (۲,۴), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۳), (۴,۱), (۴,۲), (۵,۱)\} \Rightarrow n(B) = ۱۵$

$A \cap B = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۳$ $\qquad P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۳}{۱۵} = \frac{۱}{۵}$

مثال ۳ : اگر $P(A)=0/3$ و $P(B)=0/2$ و $P(A\cup B)=0/4$ باشد حاصل $P(A|B)$ را تعیین کنید :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0/4=0/3+0/2-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=0/1$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/1}{0/2}=\frac{1}{2}$$

تذکر مهم : احتمال وقوع پیشامد B به شرط وقوع پیشامد A را با علامت $P(B|A)$ نشان می‌دهیم :

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$ یا $$P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}$$

مثال ۴ : در یک مسابقه اتومبیل رانی، احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد برابر $0/7$ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود برابر $0/8$ است اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل $=A \Rightarrow P(A)=0/8$

پیشامد رسیدن به خط پایان $=B$

از طرفی $P(A\cap B)=0/7$ و

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0/7}{0/8}=\frac{7}{8}$$

مثال ۵ : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و بدانیم $P(B)=0/04$ و $P(A|B)=\frac{1}{2}$ و $P(B|A)=\frac{1}{3}$ باشد، $P(A)$ کدام است؟

۱) $0/02$

حل : گزینه (۴)

۲) $0/03$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{P(A\cap B)}{0/04} \Rightarrow P(A\cap B)=0/02$$

۳) $0/04$

۴) $0/06$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{0/02}{P(A)} \Rightarrow P(A)=0/06$$

مثال ۶: اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم مطلوبست احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل: برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشد، یا هر سه عدد باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشد.

تعداد کارتهای فرد = ۵ تا $\qquad$ تعداد کارتهای زوج = ۴ تا

پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشد = $A \Rightarrow n(A) = \binom{4}{3} = 4$

تعداد حالتهایی که دو عدد فرد و یکی زوج باشند = $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$

پیشامد اینکه مجموع اعداد سه کارت زوج باشد = $B \Rightarrow n(B) = 4 + 40 = 44$

$n(A \cap B) = 4 \qquad P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{44} = \frac{1}{11}$

مثال ۷: احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد $\frac{1}{6}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق «قهرمان شدن» یا «بردن اصلی‌ترین رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

پیشامد قهرمان شدن = A $\qquad$ پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب = B

$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{6} \qquad P(A|B) = \frac{1}{3}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{6}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{13}{36}$$

پیشامدهای مستقل :

دو پیشامد A و B را مستقل می گوئیم هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع یا عدم وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد به عبارت دیگر A و B را دو پیشامد مستقل می گویند هرگاه :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

مثال ۱ : مادری صاحب سه فرزند است . احتمال آنکه دو فرزند اول پسر باشند چقدر است ؟

حل : جنسیت نوزادان دو پیشامد مستقل است

P(فرزند اول پسر و فرزند دوم پسر) = P(فرزند اول پسر) × P(فرزند دوم پسر) = ۱/۲ × ۱/۲ = ۱/۴

مثال ۲ : در بین یک خانواده سه فرزندی ، اگر A پیشامد آنکه حداکثر یک پسر و B پیشامد آنکه از دو جنس پسر و دختر داشته باشند نشان دهید که A و B مستقل اند ؟

S = {(د،د،د) ، (د،د،پ) ، (د،پ،د) ، (د،پ،پ) ، (پ،د،د) ، (پ،د،پ) ، (پ،پ،د) ، (پ،پ،پ)} ⇒ n(S) = ۸

A = {(د،د،د) ، (د،د،پ) ، (د،پ،د) ، (پ،د،د)} ⇒ n(A) = ۴

⇒ P(A) = ۴/۸ = ۱/۲

B = {(د،د،پ) ، (د،پ،د) ، (د،پ،پ) ، (پ،د،د) ، (پ،د،پ) ، (پ،پ،د)} ⇒ n(B) = ۶ ⇒ P(B) = ۶/۸ = ۳/۴

A∩B = {(د،د،پ) ، (د،پ،د) ، (پ،د،د)} ⇒ P(A∩B) = ۳/۸

P(A) × P(B) = ۱/۲ × ۳/۴ = ۳/۸ = P(A∩B) ⇒ A و B مستقل اند

مثال ۳: برای دو پیشامد مستقل A و B اگر $P(A)=0/5$ و $P(A\cup B)=0/8$ باشد، آنگاه $P(B')$ را بیابید.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$\Rightarrow 0/8=0/5+P(B)-0/5P(B) \Rightarrow 0/3=0/5P(B) \Rightarrow P(B)=\frac{0/3}{0/5}=\frac{3}{5}$$

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

مثال ۴: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A|B)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ آنگاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل: گزینه (۲)

$$P(A|B)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=\frac{1}{2} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

مثال ۵: تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم پیشامدهای A و B را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

A = مجموع اعداد رو شده در دو پرتاب ۷ باشد B = عدد رو شده در پرتاب اول ۴ باشد

ثابت کنید A و B مستقل اند.

$$n(S)=6^2=36$$

$$A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \Rightarrow n(A)=6 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$$

$$B=\{(4,1),(4,2),\ldots\ldots,(4,6)\} \Rightarrow n(B)=6 \Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}$$

$$A\cap B=\{(4,3)\} \Rightarrow n(A\cap B)=1 \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P(A\cap B) \Rightarrow$$ A و B مستقل اند.

تمرین ۳ ص ۱۵۱ کتاب: فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند
الف) نشان دهید A' و B مستقل اند.
ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل اند.

حل الف) $P(B\cap A') = P(B-A) = P(B) - P(A\cap B) = P(B) - P(A)\times P(B)$
$= P(B)(1-P(A)) = P(B)\times P(A') \Rightarrow$ B و A' مستقل اند

حل ب) طبق قسمت (الف) اگر دو پیشامد مستقل باشند هر یک از آنها با متمم دیگری هم مستقل است بنابراین اگر A و B مستقل باشند در این صورت A و B' مستقل اند و اگر A و B' مستقل باشند A' و B' مستقل اند

تمرین ۴ ص ۱۵۲ کتاب:
احمد به احتمال ۰٫۷ در تیم کوهنوردی مدرسه شان و به احتمال ۰٫۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می شود احتمال زیر را محاسبه کنید:
الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود
ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود
پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود
ت) فقط در یکی از تیم ها انتخاب شود
ث) حداقل در یکی از تیم ها انتخاب شود.

$P(A)=0/7 \Rightarrow P(A')=0/3$, $P(B)=0/8 \Rightarrow P(B')=0/2$, A و B مستقل اند

الف) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = 0/7\times 0/8 = 0/56$

ب) $P(A'\cap B') = P(A')\times P(B') = 0/3\times 0/2 = 0/06$ (A, B مستقل $\Leftarrow$ A' و B' مستقل)

پ) $P(B-A) = P(B\cap A') = P(B)\times P(A') = 0/8\times 0/3 = 0/24$

ت) $P(A-B)+P(B-A) = P(A\cap B') + P(B\cap A') = P(A)\times P(B') + P(B)\times P(A')$
$= (0/7\times 0/2) + (0/3\times 0/8) = 0/14 + 0/24 = 0/38$

ث) $P(A\cup B) = P(A)+P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{\text{الف}} = 0/7 + 0/8 - 0/56 = 0/94$

تمرین ۵ ص ۱۵۲ کتاب:
احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند برابر ۰٫۶۲۵ باشد رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

احتمال قبولی دوست رویا $= P(A) = x$
احتمال قبولی رویا $= P(B) = 2x$

$P(A\cup B) = 0/625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B) \Rightarrow \frac{5}{8}=x+2x-(x)(2x)$$

$$\Rightarrow -2x^2+3x-\frac{5}{8}=0 \Rightarrow -16x^2+24x-5=0 \qquad \Delta=576-320=256$$

$$x=\frac{-24\pm\sqrt{256}}{2(-16)} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-24+16}{-32}=\frac{-8}{-32}=\frac{1}{4} \Rightarrow P(B)=2x=2(\frac{1}{4})=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{-24-16}{-32}=\frac{-40}{-32}=\frac{5}{4}>1 \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

تمرین ۶ صفحه ۱۵۲ کتاب:

دو تاس باهم پرتاب شده اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را بدست آورید.

پیشامد هر دو عدد زوج $=A=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$$\Rightarrow n(A)=9 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{36} \qquad n(S)=6^2=36$$

پیشامد مجموع دو عدد برابر ۸ $=B=\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\} \Rightarrow n(B)=5 \Rightarrow P(B)=\frac{5}{36}$

$$A\cap B=\{(2,6),(6,2),(4,4)\} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{36} \qquad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{3}{5}$$

تمرین ۷ صفحه ۱۵۲ کتاب:

ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A برابر $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B برابر $\frac{1}{7}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد احتمال واکنش نشان دادن ماده B برابر $\frac{1}{4}$ خواهد بود. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

$P(A)=\frac{1}{5}$

$P(B)=\frac{1}{7}$

$P(B|A)=\frac{1}{4}$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{P(B\cap A)}{\frac{1}{5}} \Rightarrow P(B\cap A)=\frac{1}{20}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{20}=\frac{41}{140}$$

معیارهای گرایش به مرکز:
معیارهایی که محل تمرکز داده ها را نشان می دهند معیارهای گرایش به مرکز نامیده می شوند که عبارتند از:

۱) میانگین:
میانگین یک دسته داده های آماری که شامل n تا باشد برابر است با مجموع داده ها تقسیم بر تعداد

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

مثال ۱: میانگین مجموعه ای از ۵۰ عدد ۳۸ است اگر دو عدد ۴۵ و ۵۰ حذف شوند میانگین اعداد باقیمانده را بدست آورید.

$$۳۸ = \frac{\text{مجموع}}{۵۰} \Rightarrow \text{مجموع} = ۳۸ \times ۵۰ = ۱۹۰۰$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۱۹۰۰ - ۴۵ - ۵۰}{۴۸} = ۳۷/۵$$

مثال ۲: میانگین داده های $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ برابر ۵ است. میانگین مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$، ۱۶ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{۵۰ + ۱۶}{۱۱} = \frac{۶۶}{۱۱} = ۶$$

مجموع ده داده $۱۰ \times ۵ = ۵۰$

مثال ۳: اگر میانگین نمرات یک کلاس ۳۰ نفری ۱۲ و میانگین نمرات یک کلاس ۲۰ نفری ۱۶ باشد، میانگین نمرات این ۵۰ دانش آموز چقدر است؟

$$\bar{x} = \frac{۳۰ \times ۱۲ + ۲۰ \times ۱۶}{۳۰ + ۲۰} = \frac{۳۶۰ + ۳۲۰}{۵۰} = ۱۳/۶$$

تذکر مهم: میانگین را متوسط داده ها یا مرکز ثقل داده ها نیز می نامند.

مثال ۴: به داده‌های ۳ و ۴ و ۷ و ۸ چه عددی را اضافه کنیم تا میانگین داده‌ها حاصل یک واحد افزایش یابد؟

$$\bar{x}_{\text{اولیه}} = \frac{3+6+7+8}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{24+x}{5} = 6+1 \Rightarrow \frac{24+x}{5} = 7 \Rightarrow 24+x = 35 \Rightarrow \boxed{x=11}$$

انحراف از میانگین:

تفاضل هر داده از میانگین را انحراف از میانگین آن داده می‌گویند.

قضیه: مجموع انحراف از میانگین داده‌ها همیشه برابر صفر است.

اثبات: فرض کنیم میانگین داده‌های x_1 و x_2 و ..... و x_n برابر $\bar{x}$ باشد.

$$(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x}) = x_1+x_2+\cdots+x_n-(\overbrace{\bar{x}+\bar{x}+\cdots+\bar{x}}^{n \text{ بار}})$$

$$= n\bar{x}-n\bar{x}=0$$

مثال) انحراف از میانگین داده‌های ۸ و ۳ و ۷ و ۴ و ۹ و ۵ را بدست آورده و مجموع انحراف از میانگین داده‌ها را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{5+9+4+7+3+8}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$5-6=-1$ و $9-6=3$ و $4-6=-2$ و $7-6=1$ و $3-6=-3$ و $8-6=2$

انحراف از میانگین داده‌ها: -1 و 3 و -2 و 1 و -3 و 2

$$\text{مجموع} = -1+3-2+1-3+2=0$$

قضیه: اگر $\bar{x}$ میانگین داده‌های x_1 و x_2 و ..... و x_n باشد آنگاه میانگین داده‌های ax_1+b و ax_2+b و ..... و ax_n+b که با نماد $\overline{ax+b}$ نشان می‌دهیم عبارتست از:

$$\overline{ax+b} = a\bar{x}+b$$

اثبات: $\overline{ax+b} = \dfrac{(ax_1+b)+(ax_2+b)+\dots+(ax_n+b)}{n} = \dfrac{a(x_1+x_2+\dots+x_n)+(b+\dots+b)}{n}$

$= a\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} + \dfrac{nb}{n} = a\bar{x}+b$

نتیجه: هر تغییری برای داده‌ها اتفاق بیافتد همان تغییر برای میانگین نیز اتفاق می‌افتد.

مثال) اگر میانگین داده‌های x_1 و x_2 و ... و x_n برابر ۲۰ باشد آنگاه:

الف) میانگین x_1-3 و x_2-3 و ... و x_n-3 را بیابید.

ب) ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم می‌کنیم و سپس داده‌ها را ۳ برابر می‌کنیم میانگین داده‌های نهایی چقدر است؟

ج) میانگین x_1+1 و x_2+2 و ... و x_n+n را بیابید.

حل الف) $\bar{x}$ جدید $= 20-3=17$

حل ب) $\bar{x}$ جدید $= (20-12)\times 3 = 24$

حل ج) $\bar{x}$ جدید $= \dfrac{(x_1+1)+(x_2+2)+\dots+(x_n+n)}{n} = \dfrac{(x_1+x_2+\dots+x_n)+(1+2+\dots+n)}{n}$

$= \dfrac{n\bar{x}+\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \dfrac{n\bar{x}}{n} + \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \bar{x}+\dfrac{n+1}{2} = 20+\dfrac{n+1}{2}$

نکته ریاضی: اگر یک سری داده‌ی آماری، تشکیل دنباله حسابی بدهند (فاصله بین داده‌ها برابر باشد) در اینصورت:

$$\text{میانگین کل داده‌ها} = \frac{\text{داده‌ی آخر} + \text{داده‌ی اول}}{2}$$

مثال: میانگین داده‌های ۳۲ و ۳۴ و ۳۶ و ... و ۱۶۸ را بدست آورید.

$$\bar{x} = \frac{32+168}{2} = \frac{200}{2} = 100$$

مثال) میانگین داده‌های x_1 و x_2 و ... و x_{10} و ۱۱ برابر $\bar{x}$ است اگر $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\dots+(x_{10}-\bar{x})=0$ باشد مقدار $\bar{x}$ را بیابید.

حل: می‌دانیم مجموع انحراف از میانگین داده‌ها صفر است

$$\underbrace{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\dots+(x_{10}-\bar{x})}_{\text{صفر}}+(11-\bar{x})=0 \Rightarrow 0+11-\bar{x}=0 \Rightarrow \bar{x}=11$$

۲) میانه:
پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر باشد میانه می‌نامیم و آنرا با Q_2 نشان می‌دهیم که دو حالت داریم:

۱) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار می‌گیرد میانه است

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۹ $\qquad Q_2 = 4$

۲) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر است با نصف مجموع (میانگین) دو عددی که در وسط قرار می‌گیرند

۱، ۴، ۶، ۹ $\qquad Q_2 = \frac{4+6}{2} = 5$

مثال) اعداد دو رقمی که باقیمانده تقسیم آنها بر ۶ برابر ۲ است را بصورت صعودی کنار هم می‌نویسیم، میانه داده چندم است؟

داده‌ها: ۱۴، ۲۰، ۲۶، ...، ۹۸ (دنباله حسابی)

$$\text{تعداد} = \frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{98-14}{6} + 1 = 15$$

تعداد فرد است $\Rightarrow \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{۷ داده}} Q_2 \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{۷ داده}} \Rightarrow$ Q_2 داده هشتم است.

نکته ریاضی:
اگر n داده داشته باشیم و n فرد باشد $\frac{n+1}{2}$ اُمین داده میانه است

مثال) اگر ۳۱۳ داده داشته باشیم $\frac{313+1}{2} = 157$ اُمین داده میانه است

اگر n داده داشته باشیم و n زوج باشد $\frac{n}{2}$ اُمین و $\frac{n}{2}+1$ اُمین داده‌ها داده‌های وسطی هستند.

مثال) اگر ۱۰۰۰ داده داشته باشیم میانه برابر میانگین داده ۵۰۰ اُم و ۵۰۱ اُم است.

چارک ها :

چارک ها مقادیری هستند که داده های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند.

چارک اول عددی است که از $\frac{1}{4}$ داده ها بزرگتر و از $\frac{3}{4}$ آنها کوچکتر است و آنرا با Q_1 نشان می دهیم.

چارک دوم همان میانه است که از $\frac{1}{2}$ داده ها بزرگتر و از $\frac{1}{2}$ آنها کوچکتر است و آن را با Q_2 نشان می دهیم.

چارک سوم عددی است که از $\frac{3}{4}$ داده ها بزرگتر و از $\frac{1}{4}$ داده ها کوچکتر است و آن را با Q_3 نشان می دهیم

روش پیدا کردن چارک ها :

اول داده ها را مرتب می کنیم و میانه را بدست می آوریم . میانه همان چارک دوم است. حال بین داده های قبل از میانه ، دو باره میانه را بدست می آوریم عدد حاصل چارک اول است و در آخر هم بین داده های بعد از میانه دوباره میانه را بدست می آوریم ، عدد حاصل چارک سوم است

مثال 1 : چارک اول تا سوم را برای داده های زیر بدست آورید.

$$\underbrace{1, 1, 3, 5}, 7, \underbrace{9, 11, 13, 14}$$

$\text{میانه} = Q_2 = 7$

(فرد) $9 = $ تعداد

$\text{چارک اول} = Q_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$\text{چارک سوم} = Q_3 = \frac{11+13}{2} = 12$

مثال : چارک اول تا سوم را برای داده های زیر مشخص کنید.

$$\underbrace{1, 2, 3, 5, 5, 6}, \underbrace{8, 8, 13, 19, 20, 20}$$

$\text{میانه} = Q_2 = \frac{6+8}{2} = 7$

(زوج) $12 = $ تعداد

$\text{چارک اول} = Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4$

$\text{چارک سوم} = Q_3 = \frac{13+19}{2} = 16$

شاخص های پراکندگی :
پارامترهایی هستند برای نشان دادن میزان پراکندگی داده ها
که عبارتند از :
۱) دامنه تغییرات - ۲) واریانس - ۳) انحراف معیار - ۴) ضریب تغییرات

---

۱) دامنه تغییرات :
اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین داده را دامنه تغییرات می گوئیم
و آنرا با R نشان می دهیم :
$$R = x_{Max} - x_{Min}$$

دامنه تغییرات برای بیان پراکندگی داده ها، اطلاعات زیادی
به ما نمی دهد زیرا فقط کوچکترین و بزرگترین داده ها در آن مؤثرند

۱۰ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۷ و ۲۲ $\Rightarrow R = 22 - 10 = 12$

۱۰ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۵ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ $\Rightarrow R = 22 - 10 = 12$

دامنه تغییرات هر دو گروه ۱۲ است اما کاملا مشخص است که پراکندگی
گروه اول کمتر است.

---

۲) واریانس :
میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین را واریانس نامیده و
آنرا با علامت σ^2 (سیگما به توان ۲) نشان داده و از فرمول زیر محاسبه
می کنیم :
$$\text{واریانس} = \sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

هرچقدر واریانس بیشتر باشد پراکندگی داده ها اطراف میانگین بیشتر است
و هرچه واریانس کمتر باشد پراکندگی داده ها اطراف میانگین کمتر است.

مثال) نمرات درس ریاضی دانش آموزان دو کلاس A و B بصورت زیر است :

A: ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ B: ۰ و ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰

الف) میانگین نمرات دو کلاس را محاسبه کنید ب) مطلوبست واریانس نمرات دو کلاس
ج) میزان پراکندگی نمرات کدام کلاس کمتر

$$\bar{x}_A = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\bar{x}_B = \frac{0+5+10+15+20}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(8-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{(0-10)^2+(5-10)^2+(10-10)^2+(15-10)^2+(20-10)^2}{5} = \frac{100+25+0+25+100}{5} = 50$$

(A) (B)

میزان پراکندگی نمرات کلاس A کمتر است ($\sigma_A^2 < \sigma_B^2$)

نکته ریاضی:

۱) هرچه واریانس به صفر نزدیکتر باشد پراکندگی داده‌ها کمتر است.

۲) اگر تمام داده‌ها برابر باشند واریانس صفر است و برعکس

۳) اگر همه داده‌ها را با عددی مثل b جمع یا تفریق کنیم واریانس تغییری نمی‌کند

۴) اگر همه داده‌ها را در عددی مثل a ضرب کنیم واریانس در a^2 ضرب می‌شود

$$\sigma^2_{ax+b} = a^2 \sigma^2_x$$

مثال) واریانس داده‌های: $a+3$ و $a+2$ و $a-1$ و $a-4$ را بدست آورید.

می‌دانیم اگر همه داده‌ها را منهای عددی کنیم واریانس تغییری نمی‌کند

همه داده‌ها را منهای a می‌کنیم: 3 و 2 و -1 و -4

$$\bar{x} = \frac{-4-1+2+3}{4} = 0 \qquad \sigma^2 = \frac{(-4-0)^2+(-1-0)^2+(2-0)^2+(3-0)^2}{4} = \frac{30}{4} = 7/5$$

نکته ریاضی:

اگر n داده آماری تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند واریانس از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} \times d^2$$

مثال) واریانس داده‌های زیر را بدست آورید: ۴۰۱ و ۴۰۳ و ۴۰۵ , ۴۰۷

دنباله حسابی و $n=4$ و $d=2$

$$\sigma^2=\frac{n^2-1}{12}\times d^2=\frac{4^2-1}{12}\times 2^2=5$$

نکته ریاضی:
اگر مجموع مربعات داده‌ها را داشته باشیم واریانس از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}-(\bar{x})^2$$

مثال ۱) اگر مجموع مربعات ۱۰ داده آماری ۲۰۰ و مجموع این ۱۰ داده برابر ۴۰ باشد واریانس این ۱۰ داده را بیابید.

$$\bar{x}=\frac{40}{10}=4$$

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}-(\bar{x})^2=\frac{200}{10}-4^2=20-16=4$$

مثال ۲) در ۲۵ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آنها ۳۲۵۰ می‌باشد. واریانس داده‌ها را بیابید.

$$\bar{x}=\frac{275}{25}=11$$

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}-(\bar{x})^2=\frac{3250}{25}-(11)^2=130-121=9$$

---

۳) انحراف معیار:
بعضی مواقع واریانس عدد بزرگی به ما می‌دهد و تشخیص پراکندگی از روی آن خیلی راحت نیست معمولاً جذر واریانس شاخص بهتری برای تشخیص پراکندگی داده‌ها حول میانگین است. جذر مثبت واریانس را انحراف معیار نامیده و با نماد σ نشان می‌دهیم:

$$\sigma=\sqrt{\sigma_x^2}=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

مثال) انحراف معیار داده‌های مقابل را بدست آورید. ۳ و ۴ و ۵ , ۶ , ۷

$$\bar{x}=\frac{3+4+5+6+7}{5}=5$$

$$\sigma^2=\frac{(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2}{5}=2\Rightarrow\sigma=\sqrt{2}$$

نکته ریاضی :

۱) اگر همه داده‌ها برابر باشند واریانس و انحراف معیار هر دو صفر است و برعکس

۲) اگر به همه داده‌ها مقدار ثابتی مانند a اضافه یا کم کنیم واریانس و انحراف معیار تغییری نمی‌کنند.

۳) اگر همه داده‌ها را در عددی مثل a ضرب کنیم واریانس در a^2 و انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود $\sigma_{ax+b}=|a|\sigma_x$

---

۴) ضریب تغییرات :

یکی از شاخص‌های پراکندگی بدون واحد است و معمولاً برای مقایسه چند چیز باهم استفاده می‌شود و پراکندگی داده‌ها را به نسبت بزرگی آنها بیان می‌کند. در مقایسه دو گروه داده‌ها، هر چقدر ضریب تغییرات کمتر باشد پراکندگی داده‌های آن گروه کمتر است و معمولاً بصورت درصد بیان می‌شود.

ضریب تغییرات را با علامت CV نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم :

$$\text{ضریب تغییرات}=\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}} \Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

مثال ۱ : ضریب تغییرات داده‌های ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ را بیابید.

$$\bar{x}=\frac{8+10+12+14}{4}=11 \qquad \sigma^2=\frac{(8-11)^2+(10-11)^2+(12-11)^2+(14-11)^2}{4}=5 \Rightarrow \sigma=\sqrt{5}\simeq 2{,}2$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2{,}2}{11}=0{,}2=20\%$$

مثال ۲ : کارخانه‌ای دو نوع لاستیک A و B تولید می‌کند که میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۲۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای A و B به ترتیب برابر ۱۲۰۰ و ۴۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

$$CV_A=\frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}=\frac{1200}{12000}=\frac{1}{10}$$

$$CV_B=\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}=\frac{4000}{20000}=\frac{1}{5}$$

$\Rightarrow CV_A < CV_B \Rightarrow$ کیفیت لاستیک A بهتر است.

مثال ۳: دو نفر در یک آزمایشگاه در ۵ روز متوالی هم زمان شروع به کار کرده‌اند. امتیازهای دقت کاری آنها مطابق جدول زیر است دقت کاری کدام بیشتر است؟

روز	۱	۲	۳	۴	۵
نفر اول	۷	۹	۸	۹	۷

روز	۱	۲	۳	۴	۵
نفر دوم	۱۰	۸	۶	۷	۹

حل: ضریب تغییرات امتیازهای دو نفر را محاسبه و مقایسه می‌کنیم دقت کاری فردی بیشتر است که ضریب تغییرات کمتری دارد.

$$\bar{x}_1=\frac{7+9+8+9+7}{5}=8 \quad و \quad \sigma_1^2=\frac{(7-8)^2+(9-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(7-8)^2}{5}=0/8 \Rightarrow \sigma_1=\sqrt{0/8}\simeq 0/89$$

$$CV_1=\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}=\frac{0/89}{8}\simeq 0/11\simeq 11\%$$

$$\bar{x}_2=\frac{10+8+6+7+9}{5}=8 \quad و \quad \sigma_2^2=\frac{(10-8)^2+(8-8)^2+(6-8)^2+(7-8)^2+(9-8)^2}{5}=2 \Rightarrow \sigma_2=\sqrt{2}\simeq 1/41$$

$$CV_2=\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}=\frac{1/41}{8}\simeq 0/17=17\%$$

$CV_1 < CV_2 \Rightarrow$ نفر اول دقت بیشتری دارد

نکته ریاضی:

۱) اگر تمام داده‌ها را با b جمع کنیم، σ تغییر نمی‌کند ولی $\bar{x}$ به $\bar{x}+b$ تبدیل می‌شود بنابراین CV کاهش می‌یابد.

۲) اگر تمام داده‌ها را منهای b کنیم، σ تغییر نمی‌کند اما $\bar{x}$ به $\bar{x}-b$ تبدیل می‌شود بنابراین CV افزایش می‌یابد.

۳) اگر تمام داده‌ها را a برابر کنیم هم σ و هم $\bar{x}$ در a ضرب می‌شود پس CV تغییری نمی‌کند.

۴) اگر داده‌ها را از x به $ax+b$ تبدیل کنیم ضریب تغییرات از $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$ به $CV=\frac{a\sigma}{a\bar{x}+b}$ تغییر خواهد کرد

«پایان»